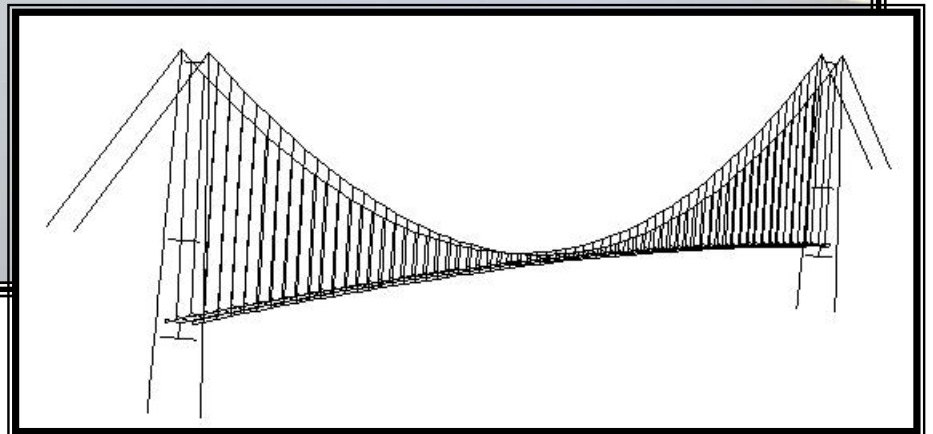
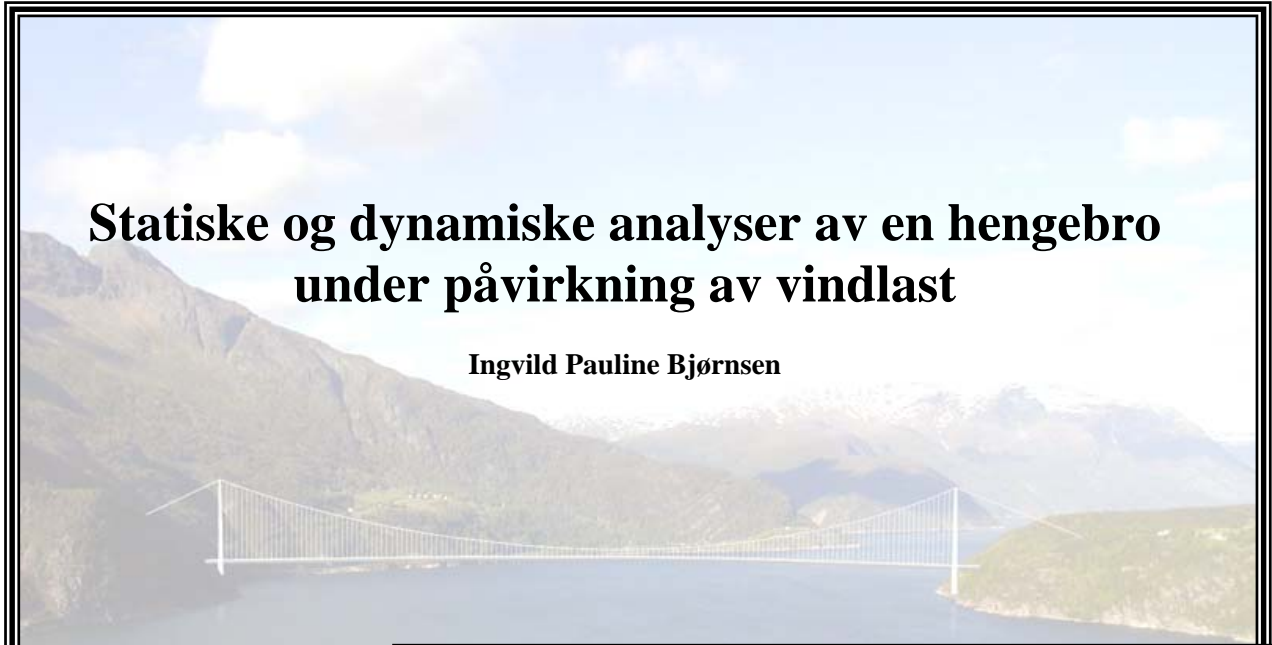


Statiske og dynamiske analyser av en hengebro under påvirkning av vindlast

Ingvild Pauline Bjørnsen



**Masteroppgave i Offshoreteknologi – Offshore konstruksjoner
Universitetet i Stavanger, våren 2007**

Forord

Denne oppgaven er avslutningen på et toårig masterstudium i offshore konstruksjonsteknikk ved Universitetet i Stavanger. Oppgaven omhandler statiske og dynamiske analyser av Hardangerbrua, en hengebro som skal bygges over Hardangerfjorden. Broen er planlagt å være ferdigstilt i 2011, og vil med et hovedspenn på 1310 meter, og en total lengde på 1380 meter, bli Norges lengste og verdens 7. lengste hengebro.

Oppgaven tar utgangspunkt i en elementmodell, samt analyser, utarbeidet av Statens vegvesens kontor i Oslo.

Hensikten med oppgaven var å

1. sette seg inn i lastbæringskarakteristikker for hengebroer under statisk last, samt dynamiske egenskaper, som egenfrekvenser og svingeformer for denne type broer
2. sette seg inn i bruken av programmet ABAQUS, for deretter å gjøre en del endringer i modellen fra Statens vegvesen, for å se hvordan dette påvirker resultatene

Rapporten inneholder

- en generell del om hengebroer, som tar for seg hovedelementene i en hengebro samt lastbæringskarakteristikker for en hengebro under statisk last
- resultater fra håndberegninger av egenfrekvenser og svingemoder for Hardangerbrua
- en beskrivelse av statiske og dynamiske vindkrefter som virker på en hengebro
- beskrivelser av, og resultater fra, de nye analysene som er utført (med utgangspunkt i modellen og analysene fra Statens vegvesen)

Jeg vil rette en stor takk til faglig ansvarlig og veileder for oppgaven, Jasna Bogunovic Jakobsen, samt hjelpeveileder, Ove Mikkelsen, for god hjelp underveis. Jeg vil også takke Aleksander Kyte ved Statens vegvesen for modell og analyser, som var grunnlaget for analysedelen av denne oppgaven.

Universitetet i Stavanger, 29.6.2007

Ingvild Pauline Bjørnsen

Innholdsfortegnelse

Forord	ii
Innholdsfortegnelse	iii
Appendiks	iv
1 Sammen drag	1
2 Innledning	3
3 Generelt om kabelbroer	4
3.1 HENGEBROENS HOVEDELEMENTER	4
3.1.1 Brokasse/avstivningsbjelke.....	4
3.1.2 Hengestenger.....	6
3.1.3 Hovedkabler	6
3.1.4 Tårn	7
3.1.5 Ankerfester	7
3.2 LASTBÆRINGSKARAKTERISTIKK FOR EN HENGEBRO UNDER STATISK LAST	7
3.2.1 Brokasse/avstivningsbjelke.....	7
3.2.2 Kabelsystemet.....	7
3.2.3 Tårn	9
4 Egenfrekvenser og svingeformer for Hardangerbrua	10
4.1 EGENFREKVENSER FOR HARDANGERBRUA	10
4.1.1 Egenfrekvenser for vertikal svingning.....	10
4.1.2 Egenfrekvenser for torsjonssvingning.....	13
4.2 SVINGEFORMER FOR HARDANGERBRUA	14
4.2.1 Vertikale svingeformer	14
4.2.2 Torsjonssvingeformer.....	16
5 Vindlast på brobjelken	19
5.1 STATISKE VINDKREFTER.....	19
5.2 DYNAMISKE VINDKREFTER OG AEROELASTISK ATFERD.....	22
5.2.1 Virvelindusert vibrasjon.....	23
5.2.2 Flutter og galoppering	25
6 Elementmodellering av Hardangerbrua i ABAQUS	27
6.1 BESKRIVELSE AV ABAQUS-MODELLEN	27
6.1.1 Geometri, randbetingelser, masse- og stivhetsdata	27
6.1.2 Modellering av avstivningsbæreren.....	28
6.1.3 Elementer	29
6.2 DEFORMASJONER FOR HARDANGERBRUA	29
6.2.1 Ikkelineære geometriske effekter.....	32
7 Analyser av Hardangerbrua i ABAQUS	33
7.1 ENDRING AV PÅFØRINGSMETODE FOR EGENVEKT AV BROKASSE.....	33
7.2 ENDRING AV FORMFAKTORER I SUBROUTINEN.....	35
7.2.1 Kontroll av resultater	40
7.3 SUBROUTINE SOM TAR HENSYN TIL STIVHETSENDRINGEN KNYTTET TIL VRIDNING.....	41
7.3.1 Analyse med stivhetsreduksjon og Statens vegvesens formfaktorer.....	41
7.3.2 Analyse med stivhetsreduksjon og nye formfaktorer.....	43
7.4 TILLEGGSLØFT PÅ GRUNN AV HORISONTAL BØYNING.....	45
8 Oppsummering og konklusjon	50
9 Referanser	52

Appendiks

[Appendiks A](#): Egenfrekvenser og svingeformer for Hardangerbrua

[Appendiks B](#): Sammenligning av kjedelinje og parabel

[Appendiks C](#): Beregning av formfaktorer for Hardangerbrua

[Appendiks D](#): Beregning av krefter for kontroll av subrutine med nye formfaktorer

[Appendiks E](#): FORTRAN-subrutine med 3.gradspolynomer for formfaktorene

[Appendiks F](#): FORTRAN-subrutine, med SVs formfaktorer, som inkluderer stivhetsendring

[Appendiks G](#): FORTRAN-subrutine, med nye formfaktorer, som inkluderer stivhetsendring

[Appendiks H](#): Beregning av ekstraløft pga aksiallast i brobjelken

1 Sammendrag

En av de største utfordringene ved dimensjonering av store brokonstruksjoner er vindlast. Det var først etter kollapsen av Tacoma Narrows Bridge i 1940 at man begynte å fokusere på aerodynamisk atferd. I dag er forståelsen av aerodynamisk atferd en svært viktig faktor når en bro skal konstrueres, blant annet ved utforming av brokassens tverrsnittsf orm. I tillegg har brokassens torsjonsstivhet, og broens stivhet generelt mye så si for broens oppførsel under påvirkning av dynamisk vindlast. For å undersøke konstruksjonens oppførsel, samt finne lastene som virker på konstruksjonen som følge av vind, er det vanlig å lage en modell av brobjelken, inkludert detaljer som rekkverk, parapeter, ledeskovler osv, og utsette denne for vind i en vindtunnel. Fra vindtunnelforsøkene finnes formfaktorer for beregning av løft-, drag- og momentkrefter som virker på konstruksjonen.

Analysene som er beskrevet i denne rapporten tar utgangspunkt i en elementmodell, samt analyser, utarbeidet av Aleksander Kyte ved Statens vegvesen. Analysene er utført i elementmetodeprogrammet ABAQUS, hvorav noen av analysene krever en subrutine. Modellen påføres vindlast ut ifra vindtunnelforsøkene som er utført av Svend Ole Hansen ApS for Statens vegvesen.

I analysene fra Statens vegvesen er formfaktorene som funksjon av brobanens vridningsvinkel antatt å følge en rett linje. I analysene utført som en del av denne oppgaven er det i stedet brukt 3.gradspolynomer, som gir formfaktorverdier som ligger nærmere de målte verdiene fra vindtunnelforsøkene. Den nye måten å beregne formfaktorene på fører til en *betydelig endring i deformasjonene til broen*. Ved en middelvindhastighet på 80m/s får man for eksempel en reduksjon i vridningsvinkelen i midten av spennet på 94 %, og en økning i vertikal nedbøyning på hele 207 %.

I analysene fra Statens vegvesen er egenvekten av avstivningsbjelken og hengestengene påført som en linjelast *i avstivningsbjelkens nøytralakse*, som ligger 0,175m over skjærsenteret. I de nye analysene påføres i stedet denne egenvekten i det virkelige massetyngdepunktet, som ligger 0,428m over skjærsenteret. Dette fører til et større veltemoment når kassen roterer om skjærsenteret, noe som igjen fører til *endringer i egenfrekvensene*. Disse endringene viser seg å være relativt små, med en maksimal reduksjon på 0,6 % i analysen uten vindlast (for 1.symmetriske torsjonssvingeform), og en maksimal reduksjon på 1,09 % i analysen med vindhastighet lik 80m/s (for den koblede svingeformen mellom 1.symmetriske torsjonssvingeform og 2.symmetriske, vertikale svingeform).

I Statens vegvesens analyser var det bare noen av analysene (de som ikke krever subrutine) som tok hensyn til stivhetsreduksjon på grunn av bevegelsesavhengig vridning ved beregning av egenperioder. Dette fordi den bevegelsesavhengige delen av momentet her ble påført som *horisontale* kraftpar, mens det i subrutinen ble påført som vertikale kraftpar. Ved påføring av momentet som horisontale kraftpar vil en økt rotasjon av brokassen føre til en økt arm for kraftparet, som igjen fører til økt rotasjon osv. Med denne lastpåføringen vil en stivhetsreduksjon på grunn av bevegelsesavhengig vridning være inkludert i en etterfølgende beregning av egenperioder, ved at kraftparet inngår i den geometriske stivhetsmatrisen. Det er her forsøkt å inkludere denne effekten også i subrutinen, med tilfredsstillende resultater.

Ved horisontal utbøyning av broen vil det oppstå aksialkrefter i brobjelken; losiden av bjelken vil komme i trykk, og lesiden vil komme i strekk. Dette resulterer i et *tilleggsløft* for broen, da trykksiden vil få en *redusert* bøyestivhet, og dermed en *økt forskyvning oppover* (siden den

allerede har en liten forskyvning oppover grunnet brobjelkens rotasjon), strekksiden vil få en *økt* bøyestivhet, og dermed en *reduert forskyvning nedover* (denne siden har en liten nedbøyning på grunn av rotasjonen). Disse to endringene i forskyvninger kan påføres modellen som et tillegg i løftkraften. Dette tilleggsløftet viser seg imidlertid å være ubetydelig lite i forhold til løftet på grunn av vinden.

Det er utført håndberegninger av egenfrekvenser og svingemoder for vertikal svingning og torsjonssvingning for Hardangerbrua, basert på forenklete uttrykk og formler fra Bleich [6] og Steinman [7]. De fleste håndberegnete egenfrekvensene stemmer bra overens med de fra ABAQUS og Alvsat. *Maksimale* avvik er på hhv 7,5 og 11,1 % for vertikal asymmetrisk og symmetrisk svingning, og på hhv 7,8 og 5,6 % for symmetrisk og asymmetrisk torsjonssvingning.

2 Innledning

Denne rapporten omhandler statiske og dynamiske analyser av Hardangerbrua, en hengebro som skal bygges over Hardangerfjorden. Broen er planlagt å være ferdigstilt i 2011, og vil med et hovedspenn på 1310 meter, og en total lengde på 1380 meter, bli Norges lengste og verdens 7. lengste hengebro.

Opgaven gikk ut på å sette seg inn i lastbæringskarakteristikker for hengebroer under statisk last, samt dynamiske egenskaper, som egenfrekvenser og svingeformer for denne type broer. Det skulle så gjennomføres ulike analyser av broens respons under statisk vindlast i elementmetodeprogrammet ABAQUS. Det er da tatt utgangspunkt i en elementmodell og analyser som er gjort tilgjengelig av Statens vegvesen [1].

Hensikten med analysedelen av oppgaven var å få en forståelse av broens oppførsel under statisk vindlast, samt å vurdere effekten av forenklinger som er gjort i analysene fra Statens vegvesen. Disse forenklingene inkluderer blant annet beregningen av formfaktorene som er brukt ved utregning av krefter som virker på broen, samt metoden for påføring av brokassens egenvekt. De nye analysene som er gjort er følgende:

1. Endring av påføringsmetode for egenvekt av brokassen, for å få med effekten av eksentrisiteten som massesenteret får i forhold til skjærsenteret når brobjelken roterer, se *Kap.7.1*.
2. Analyser med tilpassede 3.gradspolynomer for formfaktorene CD, CL og CM i stedet for lineære funksjoner, se *Kap.7.2*.
3. Analyser *med* subrutine som tar hensyn til stivhetsendringen på grunn av de bevegelsesavhengige kreftene ved beregning av egenfrekvenser. (Tidligere var det bare analysene som ikke krever subrutine som fikk med virkningen av dette), se *Kap.7.3*.
4. Analyser som inkluderer tilleggsløftet på grunn av aksiallasten som oppstår i bjelken ved horisontal utbøyning, se *Kap.7.4*.

Første del av rapporten (*Kap.3*) er en generell del om hengebroens hovedelementer og lastbæringskarakteristikk. Andre del omhandler broens dynamiske egenskaper, som egenfrekvenser og svingeformer (*Kap.4*) og statisk og dynamisk vindlast og resulterende oppførsel for broen (*Kap.5*). Til slutt kommer en analysedel, som beskriver de nye analysene som er utført for broen, og resultatene av disse (*Kap.6 og 7*). Alle beregninger som er utført underveis er lagt ved oppgaven som appendiks.

3 Generelt om kabelbroer

Det er to typer kabelbroer; skråstagbroer og hengebroer. I en skråstagbro henger brobjelken i stag som er festet direkte i tårnene (se *Figur 3-1*). Her er det tårnene som bærer mesteparten av lasten, og brobjelken blir utsatt for stort trykk siden kablene ”drar” brobjelken mot tårnene. I en hengebro henger brobjelken i hengestenger fra to eller flere tykke kabler som er trukket mellom tårnene og forankret i endene av broen (se *Figur 3-2*). Denne rapporten vil hovedsakelig omhandle den sistnevnte typen, da det er denne kategorien Hardangerbrua tilhører.



Figur 3-1: Et eksempel på en skråstagbro er Skybridge, den største (i 2007) skråstagbroen i verden som bare bærer kollektivtrafikk, fra [4].



Figur 3-2: Et eksempel på en hengebro er Akashi Bridge, Japan, som er (i 2007) verdens lengste hengebro, fra [3].

3.1 Hengebroens hovedelementer

En hengebro består av fem hovedelementer:

- Brokasse/avstivningsbjelke
- Hengestenger
- Hovedkabler
- Ankerfester
- Tårn

3.1.1 Brokasse/avstivningsbjelke

Avstivningsbjelken har som funksjon å bære trafikklaster, samt å (som navnet tilsier) avstive brokonstruksjonen. En hengebro er i utgangspunktet en veldig fleksibel konstruksjon, da kablene har tilnærmet null bøyestivhet. Det vil si at dersom broen ikke var avstivet av brobjelken så ville den få store deformasjoner ved punktlaster som for eksempel en enkelt trailer som kjører over broen. Avstivningsbjelkens hovedfunksjoner er dermed å

1. Bære lasten mellom hengestengenes ankerpunkter
2. Distribuere konsentrerte laster

At avstivningsbjelken kan distribuere en konsentrert last mellom flere hengestenger er en fordel da det vil redusere den dimensjonerende lasten for hengestengene, samt gi en jevnere kurvatur av brobjelken ved den konsentrerte lasten [10].

Det er brukt mange ulike typer avstivningsbjelker gjennom hengebroens historie, som for eksempel fagverksbjelker og ulike varianter av kassebjelker sammensatt av stålplater.

Opplysningene i de neste avsnittene er i stor grad hentet fra Gimsing [10].

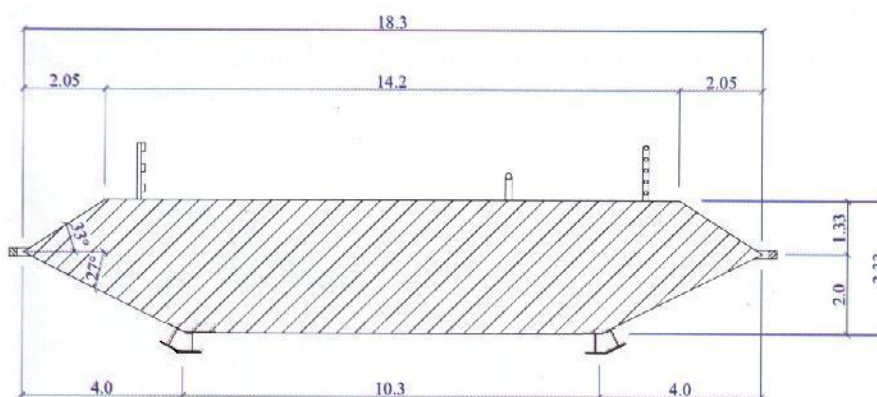
Brooklyn Bridge (ferdigstilt i 1883) er den hengebroen som sies å være forgjengeren for moderne hengebroer. Denne broen ble konstruert, av Roebling, som en kombinasjon av kabelhengebro og skråstagbro. Broen ble konstruert på en tid hvor man kan si at brobygging var mer en kunstform enn en vitenskap og broen ble konstruert mye ut fra intuisjon og erfaring fra tidligere broer, kombinert med enkle beregninger for å finne passende dimensjoner på de ulike strukturelle elementene. Det ville være nærmest uoverkommelig mye regnearbeid å beregne denne broen ut fra elastisk teori med kompatibilitet mellom alle elementer, men tilstrekkelig sikkerhet ble oppnådd ved å anta en fornuftig fordeling av krefter og å sørge for at konstruksjonene var i likevekt.

Ingeniørene som kom i perioden etter at denne broen ble bygd ble opplært til i høyere grad å konsentrere seg om beregninger, noe som førte til at de måtte ha en mer nøyaktig beregningsmodell, som igjen førte til at broene måtte ha et enklere kabelfsystem enn det i Brooklyn Bridge (et system med høy grad av statisk ubestemthet ville kreve altfor stor beregningskapasitet). Dette resulterte i at broene på slutten av 1800-tallet og begynnelsen av 1900-tallet var enklere systemer, med høyere brokasser (grunnet bruk av 1.ordens teori, som gav langt høyere bøyemomenter i avstivningsbjelken enn 2.ordens teorien som kom senere). Et eksempel på dette er Williamsburg Bridge som ble bygget over East River i New York. Den amerikanske ingeniøren David B. Steinman (1886-1960) skrev følgende om broen: "With the ungainly tower design and the excessively deep trusses, the structure presents an appearance of angularity and clumsiness. It marked one extreme of the swing of the pendulum; thereafter there was a reversal of the trend, toward progressively increasing slenderness and grace in the design of suspension bridges".

"The Deflection theory" (1888) tok hensyn til forskyvningen i hovedkablene ved beregning av bøyemomenter i avstivningsbjelken, og kunne derved mer enn halvere momentene i forhold til 1.gradsteorien, noe som førte til at man ved bruk av denne teorien kunne konstruere broer med langt lavere brokasser. I 1930-årene ble det introdusert en tredimensjonal teori, som også tok hensyn til kablens forskyvning under *sideveis* belastning (L.S. Moisseiff). Dette var en videreutvikling av "The Deflection theory" som fra før bare var utviklet for vertikal belastning i planet. Denne nye teorien førte til en trend med slankere og slankere brokasser (både angående høyde og bredde), som endte opp i kollapsen av Tacoma Narrows Bridge (07.11.1940), som hadde en brokasse med et høyde til spennforhold på bare 1:350 og et bredde til spennforhold på 1:72. Broen hadde en god sikkerhetsmargin med hensyn på trafikklast og statiske dragkrefter fra vind, men det var ikke tatt hensyn til de *dynamiske kreftene* som virket på broen, blant annet fra virvlene som ble dannet grunnet de skarpe kantene på brokassen. I starten beveget broen seg bare vertikalt, og til tross for store svingeamplituder (opptil ca 1,5 meter), ble disse bevegelsene sett på som harmløse. Det var først etter noen måneder i drift, da broen begynte å vri seg i torsjon, at tilstanden ble alvorlig. Broens torsjonssvingninger førte til en effektiv økning i de dynamiske vindkreftene (se mer om dette i *Kap.5.2.2*), og etter en time med vridningsvinkler på opptil +/-45° kollapset broen.

Det var først etter kollapsen av Tacoma Narrows Bridge at man begynte å fokusere på aerodynamisk atferd. Dette førte til at flere broer ble forsterket for å få en økt torsjonsstivhet, og nye broer ble igjen bygget med høyere brokasser.

I 1966 ble Severn Bridge åpnet, og ble med en slank brokasse, med en høyde på bare 3 meter, malen for mange hengebroer som bygges i dag. Brokassen var nesten like slank som i Tacoma Narrows Bridge (2,45 meter høy), men de skarpe kantene var fjernet og erstattet med et mer strømlinjeformet tverrsnitt for å redusere virveldannelser, og torsjonsstivheten var betydelig bedre grunnet en *breiere og lukket* brokasse. En annen fordel med denne typen brokasse er at den er mye enklere å vedlikeholde med hensyn på korrosjon enn for eksempel en fagverksbjelke, da den har en jevn overflate som er lett å male. Inni brokassen kan det plasseres en anretning som reduserer luftfuktigheten for å hindre innvendig korrosjon. Det er denne typen avstivningsbjelke som skal brukes i Hardangerbrua, se *Figur 3-3*.



Figur 3-3: Skisse av brokassen som skal brukes i Hardangerbrua, påtegnet rekkverk, ledeskovler og skinner for vedlikehold, fra [14].

3.1.2 Hengestenger

Hengestengene er bindeleddet mellom brokassen og kablene, og har som funksjon å overføre alle lastene fra broen til kablene. Hengestengene fungerer som leddede staver og overfører bare aksialkrefter. Hengestengene som skal brukes i Hardangerbrua er stålstenger med diameter 62mm som skal henge med 20 meters mellomrom.

3.1.3 Hovedkabler

Hovedkablene er trukket mellom tårnene og festes i endene av broen i store ankerblokker eller, dersom grunnen tillater det, direkte i fjellgrunnen. Kablene er sammensatt av mange strenger, som igjen består av opptil hundrevis av vaier med en typisk diameter på 5-5,5mm. Strengene kan være prefabrikkerte eller de kan bli spunnet på stedet (air-spinning method), fra ankerblokk til ankerblokk. Fordelen med å bruke *prefabrikkerte* strenger er at operasjonen med å trekke kablene blir mindre værsensitiv siden strengene er tyngre og dermed mer stabile enn de enkle vaierne, samt at operasjonen tar mye kortere tid enn om man trekker en og en vaier.



Figur 3-4: Tverrsnitt av hovedkabel brukt i Golden Gate Bridge. Kabelen består av 27572 vaier, fra [2].

Ulempen er at strengene blir veldig lange og tunge, og dermed vanskelige å håndtere med hensyn på transport og lignende. Etter at alle vaierne er trukket samles de til et rundt tverrsnitt ved hjelp av en hydraulisk anretning og surres sammen med myk stålvaier.

En hovedkabel består gjerne av opptil 30000 vaiere (eksempelvis består hver av hovedkablene til Golden Gate Bridge, som har et hovedspenn på 1280m, av 27572 vaiere, se *Figur 3-4*).

Hardangerbrua skal bygges med to hovedkabler med tverrsnitt $A=0,223\text{m}$ ($\varnothing=0,533\text{m}$).

3.1.4 Tårn

De vertikale kreftene fra broen overføres, via hengestenger, fra hovedkablene til tårnene og ned i tårnfundamentene. Siden tårnene er utsatt for store trykkrefter bygges de ofte i betong, men det kan også velges å lage tårnene av stål. Ved valg av materiale er det mange faktorer som må tas hensyn til, slik som grunnforhold, byggehastighet, stabilitet under byggefasen, pris og estetikk. I jordskjelvområder kan det være en fordel å bruke ståltårn, siden disse er bedre til å absorbere energi.

Tårnenes utforming har også mye å si for broens estetiske framtoning. I Hardangerbrua er det lagt vekt på at konstruksjonen skal være mest mulig diskret fra sjøsiden, og betongtårnene er derfor forsøkt konstruert så slanke som mulig. I toppen av tårnene, hvor kablene passerer, skal tårnene være bare 4,5x4,5 meter, mens de skal gå svake bue nedover og ende i rektangler nederst [12].

3.1.5 Ankerfester

I motsetning til en tverrbelastet bjelke så vil en tverrbelastet kabel også få store aksialkrefter, og disse kreftene må tas opp av forankringen. Kablene kan forankres direkte i grunnen dersom det er god fjellgrunn, ellers må det bygges store gravitasjonsbaserte ankerblokker.

I Hardangerbrua forankres kablene direkte i fjellgrunnen.

3.2 Lastbæringskarakteristikk for en hengebro under statisk last

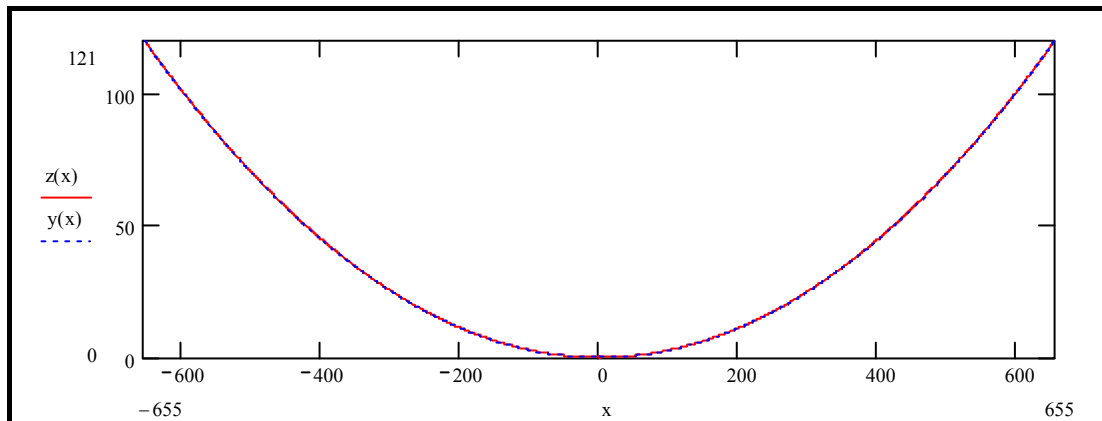
3.2.1 Brokasse/avstivningsbjelke

Brokassen/avstivningsbjelken er det elementet i hengebroen som er utsatt for mesteparten av den ytre lasten, som stort sett består av trafikklast, snølast og vindlast. Trafikk- og snølasten virker på kjørebanelen som er integrert i selve brokassen, og arealet for vindlast er som regel større for brokassen enn for kabelsystemet. Brokassen må være stiv nok til å ta imot lokale laster fra trafikklast og lignende uten å få for store deformasjoner, mens det er kabelsystemet som tar seg av den globale lastoverføringen til tårnene. For Hardangerbrua er avstivningsbæreren fritt opplagt ved tårnene i begge ender, fastholdt sideveis og for torsjon i begge ender og fastholdt i lengderetningen i en ende.

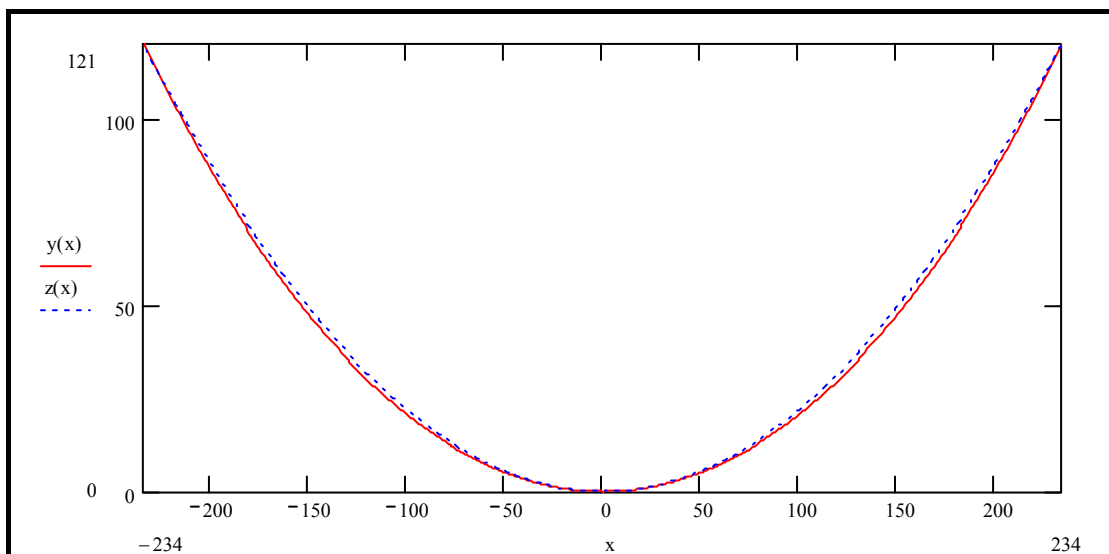
3.2.2 Kabelsystemet

Kabelsystemet, det vil si hovedkabler og hengestenger, vil i motsetning til brokasse og tårn *alltid* være i strekk. Det er hovedkablene som er hovedelementet i det globale bæresystemet, og disse tar seg av den globale lastoverføringen til tårn og ankerblokker. Lasten overføres egentlig til hovedkablene som konsentrerte punktlaster der hengestengene er koblet på kablene, men siden stengene henger relativt tett sier man at lasten på kablene er *jevnt fordelt*.

En kabel som henger mellom to opplagere, bare påkjent av sin egenvekt, vil innta en bestemt form kalt *kjedelinje*. Men ved økt jevn belastning vil formen etter hvert endre seg til en *parabel*, noe som altså gjelder for kablene i en hengebro. Figurene under viser sammenligninger av en kjedelinje og en parabel for hhv en av hovedkablene i Hardangerbrua, og for en kabel med større pilhøyde. Man ser at kabelen for Hardangerbrua, grunnet en relativt lav pilhøyde, vil ha en form tilnærmet lik en parabel også før lasten fra brobanen påføres (Figur 3-5). Figurene under er hentet fra [Appendiks B](#) [15].



Figur 3-5: Sammenligning av en kjedelinje, $y(x)$, og en parabel, $z(x)$, for en fritthengende kabel med spenn 1310 meter og pilhøyde 121 meter (som for Hardangerbrua). Grunnet relativt liten "sag" er det umulig å se forskjell på de to linjene.



Figur 3-6: Sammenligning av en kjedelinje, $y(x)$, og en parabel, $z(x)$, for en fritthengende kabel med større "sag" enn for Hardangerbrua (Figur 3-5). Her ser man tydelig forskjell på kjedelinjen og parabellen.

En av fordelene med et kabelbasert bæresystem er at kabelen har langt bedre kapasitet i forhold til tverrsnittstørrelsen enn en bjelke. Dette fører til lav egenvekt for konstruksjonen, noe som gjør det mulig å bygge broer med svært lange spenn. I tillegg til egenvekten av hovedkablene kommer selvsagt også egenvekt av hengestenger, brokasse, kjørebane, avstiving osv, som også må regnes med når man sammenligner en hengebro med en vanlig bjelkebro. For små spenn er det derfor mest fornuftig å bruke bjelkebroer, mens det for større spenn (over 200-300 meter) som regel brukes kabelbaserte bæresystemer (skråstagbro, hengebro eller kombinasjon av disse).

En ulempe med kabelsystemet er at kabelen må henge i en bue for å kunne bære tverrlast, jo dypere bue (for hengebroer: pilhøyde) desto høyere tverrlast kan den bære. Lange hengebroer må derfor bygges med tårn som er opptil 200-300 meter høye (Hardangerbrua har en pilhøyde på 121 meter). En annen ulempe med kabelen er at den har tilnærmet null bøyestivhet, noe som gjør hengebroer svært fleksible, og derfor avhengige av en stiv brokasse (se *Kap. 3.2.1*) for ikke å få for store deformasjoner.

3.2.3 Tårn

I motsetning til et frittstående tårn, hvor hovedbelastningen som regel er moment i tårnets innspanning grunnet vindkrefter, er hovedbelastningen på tårnene i en hengebro aksialkrefter fra de vertikale komponentene av kreftene i hovedkablene, som er festet til tårnene. Tårnene vil altså *hovedsaklig* bli utsatt for trykkrefter. Tårnene vil også kunne bli utsatt for moment på grunn av vindlast på tvers av eller langs brobjelken, og på grunn av eksentrisitet i kabelfestene. For hengebroer vil imidlertid kabelforankringene gi en viss støtte i lengderetningen for tårnene, slik at de nærmest vil få en fastholding i toppen og dermed ikke få store forskyvninger i denne retningen [10]. For Hardangerbrua er tårnene fast innspent nede, tårnbeinas tverrsnitt øker gradvis nedover, og er dermed størst ved innspanningen, hvor også momentet vil være størst [12]. Tårnene er formet som portaler med tre tverrbjelker, noe som også gir en bra avstivning med hensyn på vindkrefter på tvers av tårnet.

4 Egenfrekvenser og svingeformer for Hardangerbrua

Egenfrekvenser og svingeformer for en konstruksjon kan finnes ved hjelp av elementmetodeprogrammer, og er for Hardangerbrua beregnet med programmene ABAQUS og Alvsat [1]. Det er utført håndberegninger av vertikale og torsjonssvingefrekvenser og -former i programmet Mathcad, for å kontrollere om man får de samme resultatene som fra dataprogrammene. Det er da brukt *forenklete* uttrykk og formler fra Bleich [6] og Steinman [7], se [Appendiks A](#).

4.1 Egenfrekvenser for Hardangerbrua

Det er beregnet egenfrekvenser for asymmetrisk og symmetrisk vertikal svingning, og for asymmetrisk og symmetrisk torsjonssvingning.

Bleichs og Steinmans formler ble brukt for å beregne de vertikale egenfrekvensene til brua mens for torsjon ble det bare brukt formler fra Bleich.

4.1.1 Egenfrekvenser for vertikal svingning

Ved beregning av egenfrekvensene for vertikal svingning ble det brukt formler fra Bleich [6] og Steinman [7]. Resultater fra beregningene samt fra ABAQUS og Alvsat er oppsummert i *Tabell 4-1* og *Tabell 4-2*.

Teorien og formlene fra Bleich er basert på følgende antagelser:

- Svingeamplitudene er små og tillegget i kabelens horisontalkraft på grunn av treghetskrefter er lite sammenlignet med horisontalkraften på grunn av egenvekten. Denne antagelsen gjør at man kan basere teorien på en lineær differensialligning, se *L 4-1*.
- Egenvekten og treghetsmomentet er konstante innen et spenn (men kan variere i ulike spenn).
- Den totale massen til broen antas å være konsentrert langs senterlinjen til avstivningsbjelken, som er festet i en ende. Horisontale komponenter av treghetskreftene neglisjeres.
- Hengestengene antas å være udeformerbare, det vil si at kabelens og brobjelkens vertikale deformasjon antas å være identisk.

For *vertikal asymmetrisk svingning* er det brukt følgende formler:

Formler fra Bleich [6]:

Frekvensligningen til Bleich er utledet fra differensialligningen:

$$\frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - H_w \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{w}{H_w} h = 0 \quad \text{L 4-1}$$

hvor w er vekt av hovedspenn per meter, g er gravitasjonsakselerasjonen, E er elastisitetsmodul for avstivningsbæreren, I er treghetsmoment om den svakeste akselen, η er amplitude ved avstand x fra brobjelkens venstre opplager ved tid t , H_w er horisontal kabelkraft på grunn av egenvekt ($H_w = w l^2 / (8f)$, hvor f er pilhøyde) og h er tillegg i kabelens horisontalkraft grunnet treghetskrefter som funksjon av t . Verdier for de ulike parametrene (w , E , I osv) finnes i [Appendiks A](#).

Formelen for vertikal asymmetrisk svingefrekvens er utledet fra differensialligningen L 4-1. For en detaljert utledning av formelen under vises det til Bleichs notat [6].

$$\omega(n) = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{g}{w} (H_w + n^2 \lambda)} \quad \text{L 4-2}$$

hvor n er antall halvbølger ($n = 2, 4, 6, \dots$), l er lengde av hovedspenn og $\lambda = \pi^2 EI/l^2$.

Formler fra Steinman [7]:

Steinman har brukt samme formel for vertikal asymmetrisk svingning som Bleich (L 4-2), bare skrevet på en litt annen måte, se under.

$$K(n) = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} H_w + \frac{\pi^4 n^4}{l^4} EI \quad \text{L 4-3}$$

$$\omega(n) = \sqrt{\frac{K(n)}{\frac{w}{g}}} \quad \text{L 4-4}$$

Tabell 4-1: Sammenligning av egenfrekvenser og –perioder beregnet med ABAQUS, Alvsat og med forenklete formler fra Bleich [6] og Steinman [7] for vertikal asymmetrisk svingning.

	VA-1		VA-2		VA-3	
	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]
Fra ABAQUS:	0,691	9,09	1,326	4,74	2,071	3,03
Fra Alvsat:	0,685	9,17	1,340	4,69	2,101	2,99
Fra Bleich:	0,639	9,83	1,317	4,77	2,070	3,04
<i>Avvik fra ABAQUS</i>	-7,53 %	8,13 %	-0,68 %	0,68 %	-0,05 %	0,03 %
<i>Avvik fra Alvsat</i>	-6,74 %	7,22 %	-1,69 %	1,71 %	-1,49 %	1,51 %
Fra Steinman:	0,639	9,83	1,317	4,77	2,070	3,04
<i>Avvik fra ABAQUS</i>	-7,53 %	8,13 %	-0,68 %	0,68 %	-0,05 %	0,03 %
<i>Avvik fra Alvsat</i>	-6,74 %	7,22 %	-1,69 %	1,71 %	-1,49 %	1,51 %

For **vertikal symmetrisk svingning** er det brukt følgende formler:

Formler fra Bleich [6]:

For vertikal symmetrisk svingning har Bleich tatt utgangspunkt i en energiligning (her energiligningen for hengebroer med *ett* hengende spenn):

$$T - V = \frac{1}{2} \left[\frac{w}{g} \omega^2 \int_0^l \eta^2 dx - EI \int_0^l \eta''^2 dx + H_w \int_0^l \eta'' \eta dx - \frac{8f}{l^2} h \int_0^l \eta dx \right] \quad \text{L 4-5}$$

og ligningen

$$\frac{8f}{l^2} \int_0^l \eta dx - \frac{L_E h}{E_c A_c} = 0 \quad \text{L 4-6}$$

hvor T er maksimal kinetisk energi i konstruksjonen og V er maksimal potensiell energi (som delvis er lagret i brobjelken som elastisk energi grunnet bøyning, og delvis i kablene som elastisk spennings-tøyningsenergi og i form av økt tyngdekraftpotensial). Både T og V er

funksjoner av svingeamplituden, η . L_E er lengde av hovedkabel i hovedspenn og E_c og A_c er hhv E-modul og tverrsnittsareal for kabelen. Verdier for de ulike parametrene (L_E , E_c , A_c osv.) finnes i [Appendiks A](#).

Ut fra de to ligningene ovenfor utledes frekvensligningene L 4-7 (gjelder for 1. og 2. svingefrekvens) og L 4-10 (gjelder for høyere svingemoder). For en detaljert utledning av formlene under vises det til Bleichs notat [6].

$$A \cdot k + 9 \cdot B \cdot (k - A \cdot p) = 0 \quad (\text{gjelder for } n=1 \text{ og } n=3) \quad \text{L 4-7}$$

hvor

$$A = s \cdot \omega^2 - H_w - \lambda \quad B = s \cdot \omega^2 - 9H_w - 91\lambda \quad \text{L 4-8}$$

og

$$s = \frac{w \cdot l^2}{\pi^2 \cdot g} \quad k = \frac{32f}{\pi^3} \quad p = \frac{\pi \cdot l}{16f} \cdot \frac{L_E}{E_c \cdot A_c} \quad \text{L 4-9}$$

$$\omega(n) = \sqrt{\frac{1}{s} \cdot (n^2 \cdot H_w + n^4 \cdot \lambda + \frac{k}{n^2 \cdot p})} \quad (\text{gjelder for } n = 5, 7..) \quad \text{L 4-10}$$

Formler fra Steinman [7]:

$$\sum_{n=1,3,5..} \frac{1}{n^2} \frac{C \cdot \frac{f}{l}}{K - K(n)} = 1 \quad (K(n) \text{ finnes fra ligning L 4-3}) \quad \text{L 4-11}$$

$$C = \frac{512}{\pi^2} \cdot \frac{f}{l^2} \frac{E_c \cdot A_c}{L_E} \quad \text{L 4-12}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\frac{w}{g}}} \quad (K \text{ løses ut fra ligning L 4-11}) \quad \text{L 4-13}$$

Tabell 4-2: Sammenligning av egenfrekvenser og –perioder beregnet med ABAQUS, Alvsat og med forenklete formler fra Bleich [6] og Steinman [7] for vertikal symmetrisk svingning.

	VS-1		VS-2		VS-3	
	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]
Fra ABAQUS:	0,890	7,06	1,263	4,98	1,715	3,66
Fra Alvsat:	0,894	7,03	1,280	4,91	1,740	3,61
Fra Bleich:	0,847	7,40	1,145	5,48	1,693	3,71
Avvik fra ABAQUS	-4,83 %	4,83 %	-9,34 %	10,10 %	-1,28 %	1,42 %
Avvik fra Alvsat	-5,23 %	5,28 %	-10,52 %	11,67 %	-2,73 %	2,83 %
Fra Steinman:	0,847	7,42	1,138	5,52	1,699	3,70
Avvik fra ABAQUS	-4,83 %	5,06 %	-9,90 %	10,88 %	-0,93 %	1,04 %
Avvik fra Alvsat	-5,23 %	5,50 %	-11,07 %	12,46 %	-2,38 %	2,44 %

Man ser av tabellene ovenfor at egenfrekvensene for vertikal svingning beregnet med formler fra Bleich [6] og Steinman [7] stemmer forholdsvis bra overens med de som er beregnet ved

hjelp av ABAQUS. For asymmetrisk svingning gir formlene et maksimalt avvik på 7,5 % fra ABAQUS og 6,7 % fra Alvsat, og for symmetrisk svingning gir de et maksimalt avvik på 9,9 % fra ABAQUS og 11,1 % fra Alvsat..

4.1.2 Egenfrekvenser for torsjonssvingning

Ved beregning av torsjonseigenfrekvenser er det brukt *forenklete* formler fra Bleich [6]. Forenklingene går blant annet ut på at Bleichs brokasse, som er en tynnvegget, lukket, rektangulær kasse, blir gjort om til et fagverk. Det er her gjort noen ytterligere antagelser, da Hardangerbruas brokasse er sekskantet, og ikke rektangulær som Bleichs. Resultater fra beregningene samt fra ABAQUS og Alvsat er oppsummert i *Tabell 4-3* og *Tabell 4-4*.

For *symmetrisk torsjonssvingning* er det brukt følgende formler:

1. og 2. svingefrekvens løses ut fra frekvensligningen:

$$B \cdot (A - K) - \frac{A \cdot K}{9} = 0 \quad \text{L 4-14}$$

hvor

$$A = s \cdot \omega^2 - \Lambda - R \quad B = s \cdot \omega^2 - 81\Lambda - 9R \quad \text{L 4-15}$$

og

$$\Lambda = E \cdot Y \cdot \frac{\pi^4}{2 \cdot I^3} \quad R = (E \cdot \beta \cdot bk \cdot d + Hw \cdot \frac{bk^2}{4}) \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot l} \quad s = M \cdot \frac{l}{4}$$

$$Y = I_v \cdot \varepsilon v^2 + I_h \cdot \varepsilon h^2 \quad \beta = \frac{bk \cdot d}{\frac{\mu v \cdot h^2}{A_v} + \frac{\mu h \cdot b^2}{A_h}}$$

$$M = \frac{1}{g} (r^2 \cdot wa + \frac{bk^2}{4} \cdot wc)$$

$$\varepsilon v = \frac{b}{2} - \frac{\mu v}{A_v} \cdot \beta \cdot d \quad \varepsilon h = \frac{d}{2} - \frac{\mu h}{A_h} \cdot \beta \cdot b$$

hvor d er brokassens høyde, bk er avstand mellom hovedkablene, μv og μh settes lik $2\sqrt{2}$, b er brokassens bredde, $A_v = 1,09 \cdot t \cdot d$, $A_h = 1,09 \cdot t \cdot b$, t er tykkelsen på stålplatene i brokassen, I_v og I_h er arealtreghetsmomenter for brokassen. Verdier for de ulike parametrene finnes i [Appendiks A](#).

Tabell 4-3: Sammenligning av egenfrekvenser og –perioder beregnet med ABAQUS, Alvsat og med forenklete formler fra Bleich [6] for symmetrisk torsjonssvingning.

	TS-1		TS-2	
	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]
Fra ABAQUS:	2,293	2,74	4,947	1,27
Fra Alvsat:	2,234	2,81	5,088	1,24
Fra Bleich:	2,408	2,61	5,054	1,24
Avvik fra ABAQUS	5,02 %	-4,74 %	2,16 %	-2,13 %

Avvik fra Alvsat	7,79 %	-7,12 %	-0,67 %	0,65 %
------------------	--------	---------	---------	--------

For *asymmetrisk torsjonssvingning* er det brukt følgende frekvensligning:

$$\omega = \sqrt{\frac{n^2}{s}(n^2 \cdot \Lambda + R)}$$

L 4-16

hvor n er antall svingeamplituder (2, 4, 6..).

Tabell 4-4: Sammenligning av egenfrekvenser og – perioder beregnet med ABAQUS, Alvsat og med forenklete formler fra Bleich [6] for asymmetrisk torsjonssvingning.

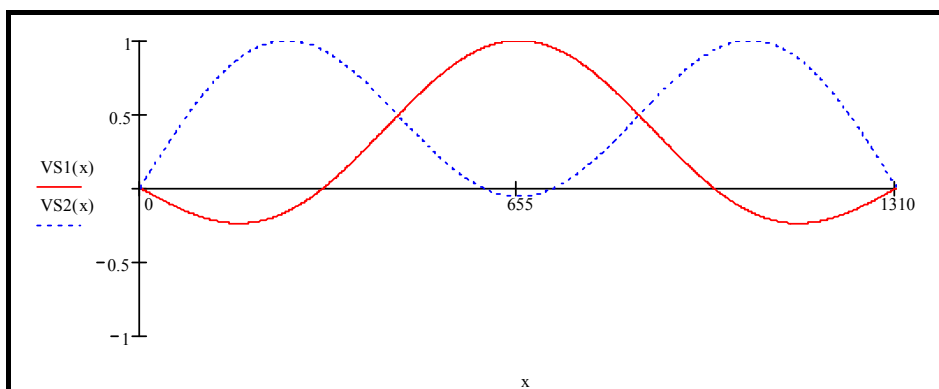
	TA-1		TA-2	
	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]
Fra ABAQUS:	3,290	1,91	6,347	0,99
Fra Alvsat:	3,355	1,87	6,712	0,93
Fra Bleich:	3,337	1,88	6,701	0,94
<i>Avvik fra ABAQUS</i>	1,43 %	-1,41 %	5,58 %	-5,25 %
<i>Avvik fra Alvsat</i>	-0,54 %	0,53 %	-0,16 %	0,64 %

4.2 Svingeformer for Hardangerbrua

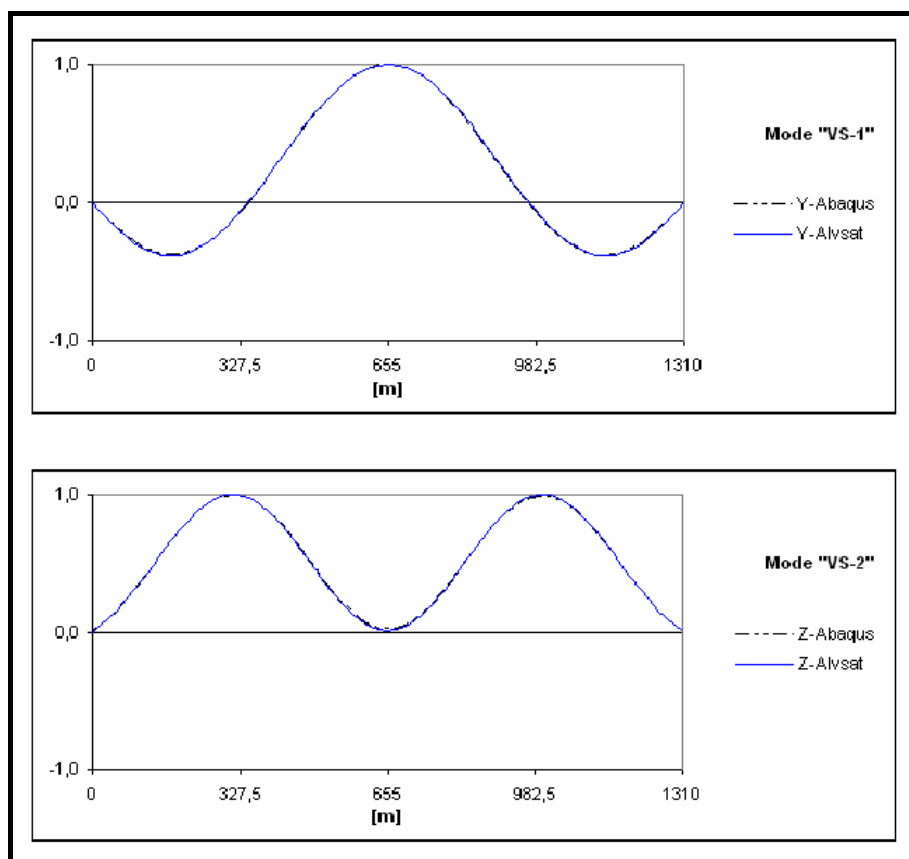
Svingeformene for Hardangerbrua er funnet ved hjelp av formler fra Bleich [6] og Steinman [7], og sammenlignes med svingeformene funnet med programmene ABAQUS og Alvsat (fra [1]).

4.2.1 Vertikale svingeformer

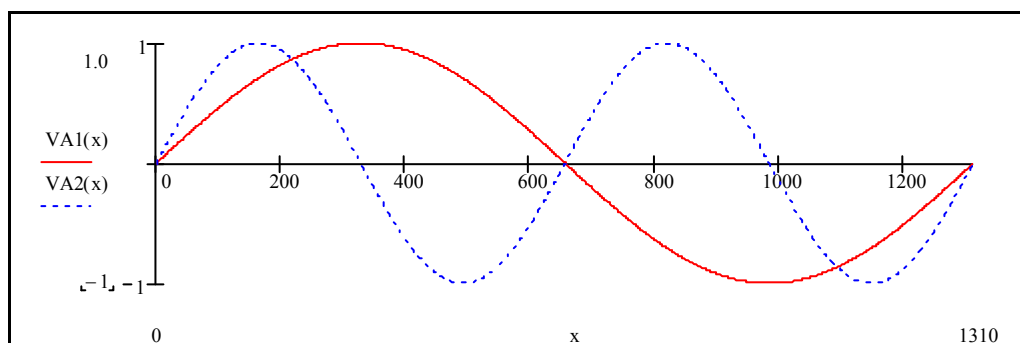
De vertikale symmetriske svingeformene er funnet ved hjelp av formler fra Bleich [6] og kontrollert med formler fra Steinman [7], se [Appendiks A](#). Svingeformene stemmer bra overens med de som er funnet ved hjelp av programmene Alvsat og ABAQUS, se *Figur 4-1* til *Figur 4-4*.



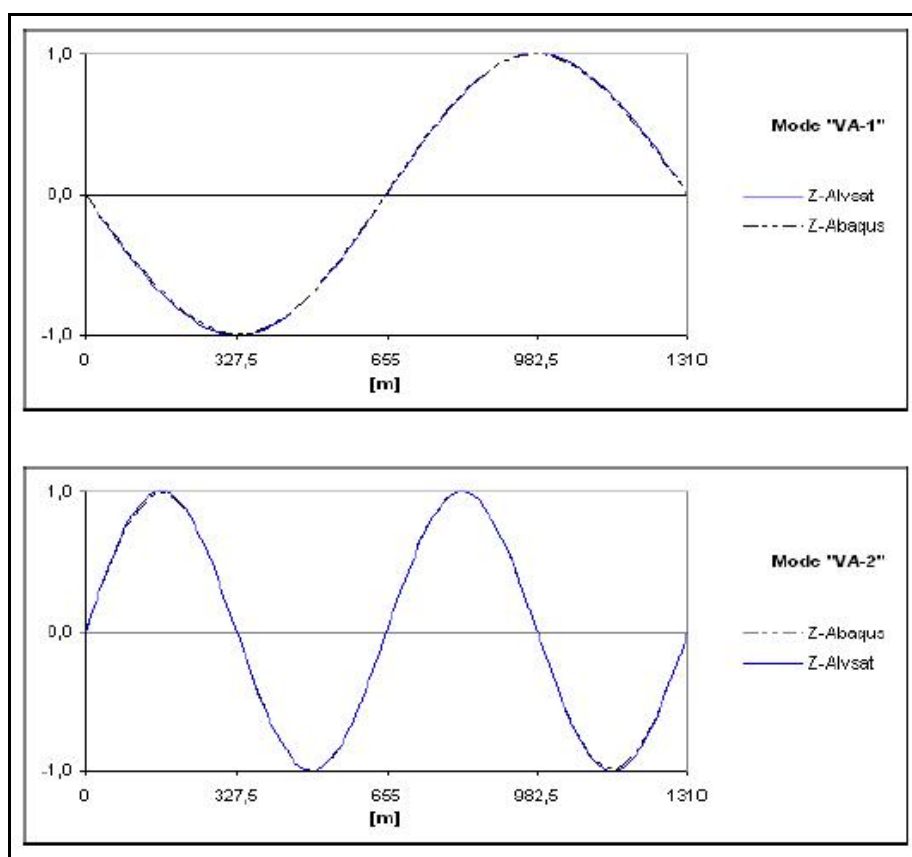
Figur 4-1: Den røde grafen, $VS1(x)$, og den blå grafen, $VS2(x)$ viser hhv 1. og 2. vertikale symmetriske svingeform for Hardangerbrua, skalert slik at største amplitude=1,0. Svingeformene er sammensatt av bidrag fra $n=1$, $n=3$ og $n=5$. Svingeformene stemmer bra overens med de fra ABAQUS og Alvsat, se Figur 4-2.



Figur 4-2: 1. og 2. vertikale symmetriske svingeform fra ABAQUS og Alvsat. Figuren er hentet fra [1].



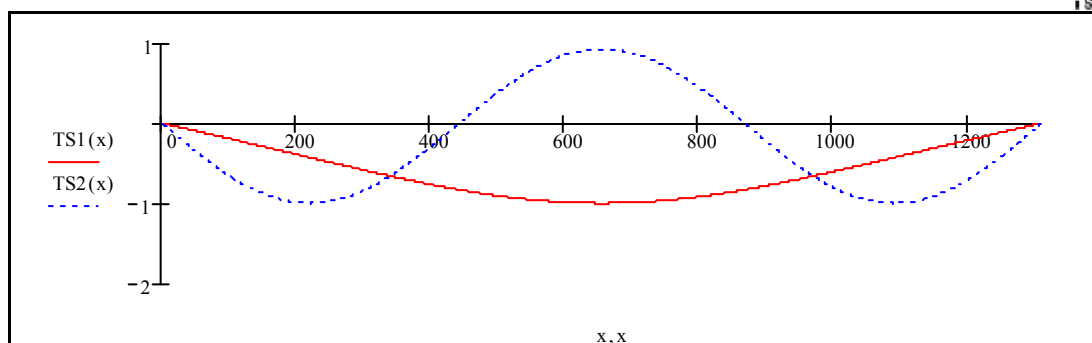
Figur 4-3: Den røde grafen, $VA1(x)$, og den blå grafen, $VA2(x)$ viser hhv 1. og 2. vertikale asymmetriske svingeform for Hardangerbrua, skalert slik at største amplitude=1,0. Svingeførmene stemmer bra overens med de fra ABAQUS og Alvsat, se Figur 4-4.



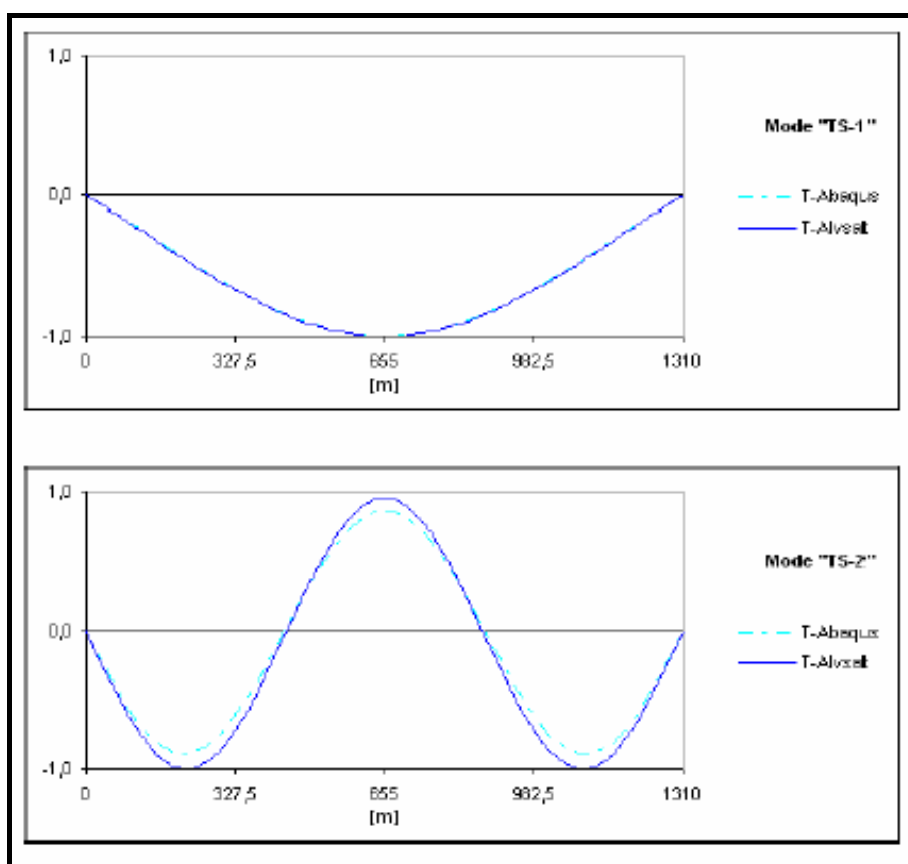
Figur 4-4: 1. og 2. vertikale asymmetriske svingeform fra ABAQUS og Alvsat. Figuren er hentet fra [1].

4.2.2 Torsjonssvingeformer

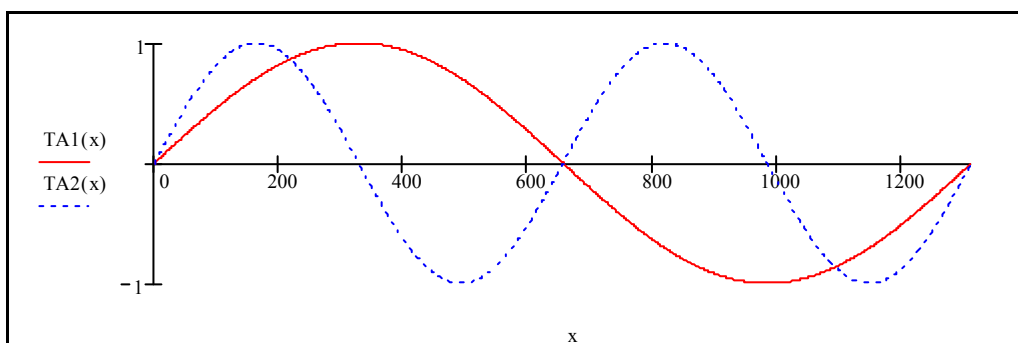
Torsjonssvingeførmene er funnet ved hjelp av forenklete formler fra Bleich [6], se [Appendiks A](#). Torsjonssvingeførmene stemmer bra med de som er funnet med ABAQUS/Alvsat, se *Figur 4-5* til *Figur 4-8*.



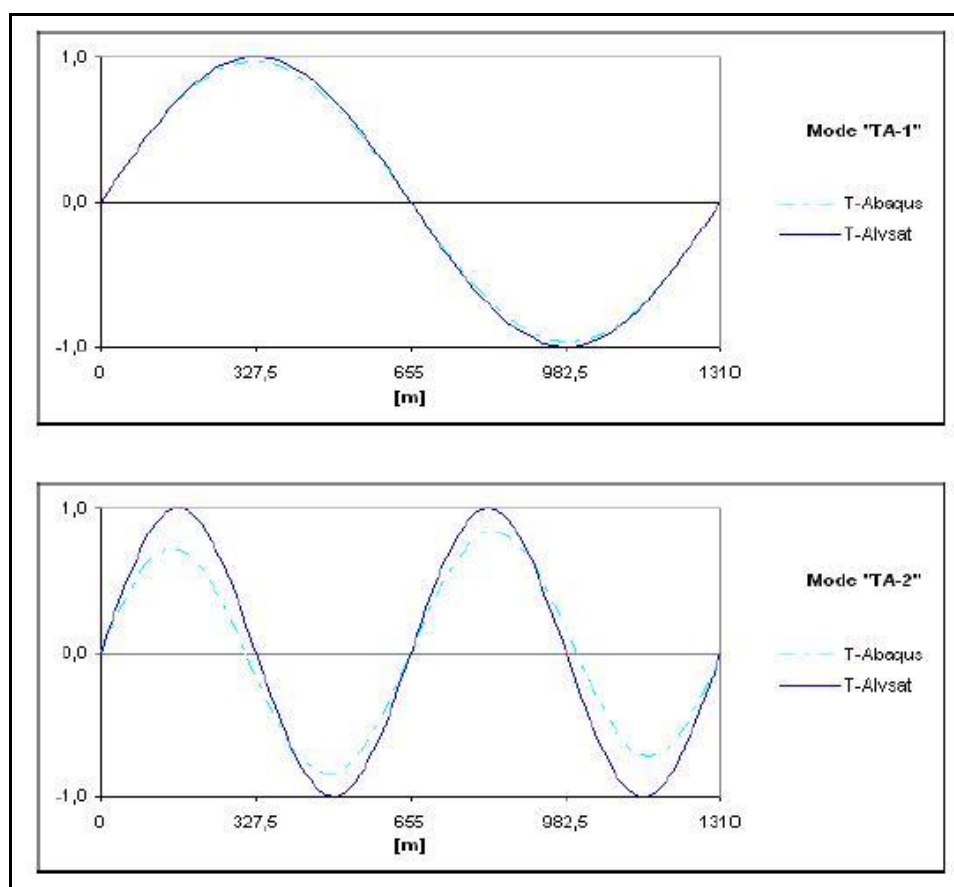
Figur 4-5: 1. og 2. symmetriske torsjonssvingeform beregnet ved hjelp av formler fra Bleich, skalert slik at største amplitude = 1,0.



Figur 4-6: 1. og 2. symmetriske torsjonssvingeform fra ABAQUS og Alvsat. Figuren er hentet fra [1].



Figur 4-7: 1. og 2. asymmetriske torsjonssvingeform, skalert slik at største amplitude = 1,0.



Figur 4-8: 1. og 2. asymmetriske torsjonssvingeform fra ABAQUS og Alvsat. Figuren er hentet fra [1].

5 Vindlast på brobjelken

En av de største utfordringene ved dimensjonering av store brokonstruksjoner er vindlast. Lasten fra vinden kan deles i to; statiske vindkrefter, som beregnes ut fra middelvindhastigheten, og dynamiske vindkrefter, som er krefter som skyldes virvelavløsning, turbulens og bevegelsesavhengige dynamiske krefter.

5.1 Statiske vindkrefter

De statiske vindkreftene beregnes ut fra middelvindhastigheten, og tilhørende dynamisk trykk, som virker på broen, og kalles statiske (middel) drag-, løft- og momentkrefter. Dragkreftene virker parallelt med vindens retning, løftkreftene virker normalt på vindens retning (vertikalt på brobanen) og momentet virker om brobjelkens lengdeakse. *Middelverdien* av disse kreftene (det vil si uten hensyn til bevegelsesavhengige krefter samt turbulens) beregnes som følger:

$$\text{Drag:} \quad D = \frac{1}{2} \rho V^2 H C_D \quad \text{L 5-1}$$

$$\text{Løft:} \quad L = \frac{1}{2} \rho V^2 B C_L \quad \text{L 5-2}$$

$$\text{Moment:} \quad M = \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 C_M \quad \text{L 5-3}$$

hvor ρ er tettheten til luft, V er middelvindhastigheten, H er brobjelkens høyde, B er bredden og C_D , C_L og C_M er dimensjonsløse formfaktorer, definert i L 5-4.

Formfaktorene er avhengige av tverrsnittsformen på brobjelken og finnes ved hjelp av forsøk i vindtunneler. Faktorene er avhengige av detaljer som rekkverk, ledeskovler, utsparinger og lignende, og det er derfor viktig at alle slike detaljer tas med i testmodellen (se *Figur 5-1*). Faktorene er også avhengige av vinkelen vinden treffer broen med, noe tunneltestingen tar hensyn til ved at bromodellen kan vrís rundt sin egen akse.



Figur 5-1: Bilder av broseksjonsmodellen som ble brukt ved vindtunnelforsøkene for Hardangerbrua, tatt ovenfra (a) og fra undersiden (b). Bildene er hentet fra vindtunnelrapporten [14]. Modellen er 1,7 meter lang og er laget i skala 1:50. Legg merke til at alle detaljer er tatt med i modellen, slik som rekkverk, ledeskovler og skinner for vedlikehold.

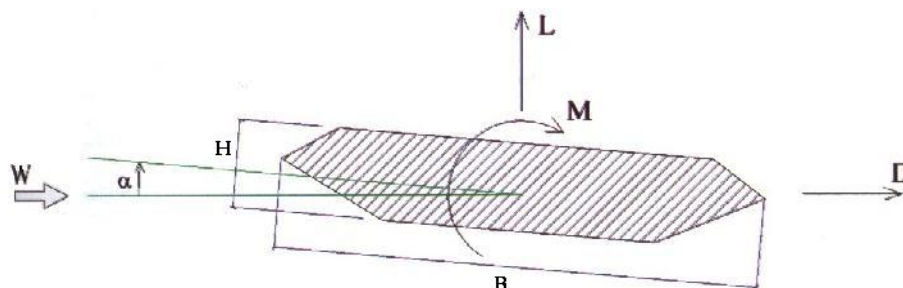
Figur 5-4 viser drag-, løft- og momentkoeffisientene som er målt for Hardangerbrua ved bruk av modellen i Figur 5-1 (forsøkene er utført av Svend Ole Hansen ApS for Statens Vegvesen). Formfaktorene i Figur 5-4 er for gang-/sykkelsti på nedstrøms (lo) side, og inkluderer optimale virvelreduksjonsanretninger (ledeskovler og liten midtbjelke (se Figur 5-1b)) Turbulensintensiteten i vindretningen var på ca 12-13%.

Lastkoeffisientene (formfaktorene) er definert som følger:

$$C_D = \frac{D}{qHl} \quad C_L = \frac{L}{qBl} \quad C_M = \frac{M}{qB^2l} \quad \text{L 5-4}$$

hvor q er middelhastighetstrykk langs spennet, definert som $q = 0,5\rho V^2$ og l er lengden av brobjelken.

Figur 5-2 viser hvordan de positive retningene for løft, drag og moment er definert, samt orienteringen av vindens innfallsvinkel, α (i Figur 5-4).



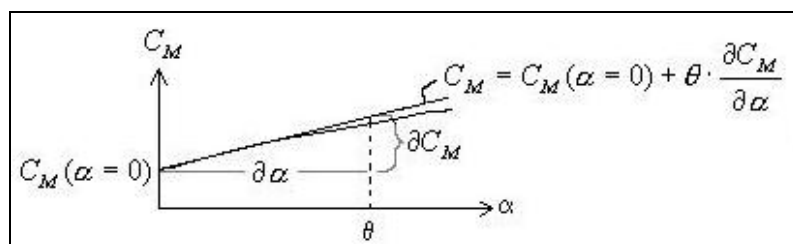
Figur 5-2: Figuren viser hvilke retninger som er definert positive for løft (L), drag (D) og moment (M), samt hvordan vindens innfallsvinkel, α , er orientert. Figuren er hentet fra [14].

De målte formfaktorene forenkles gjerne til rettlinjede funksjoner, med utgangspunkt i koeffisienten ved $\alpha = 0$, og stigningstallet til tangenten gjennom dette punktet, se Figur 5-3, Det vil si at formlene for statisk drag, løft og moment blir følgende:

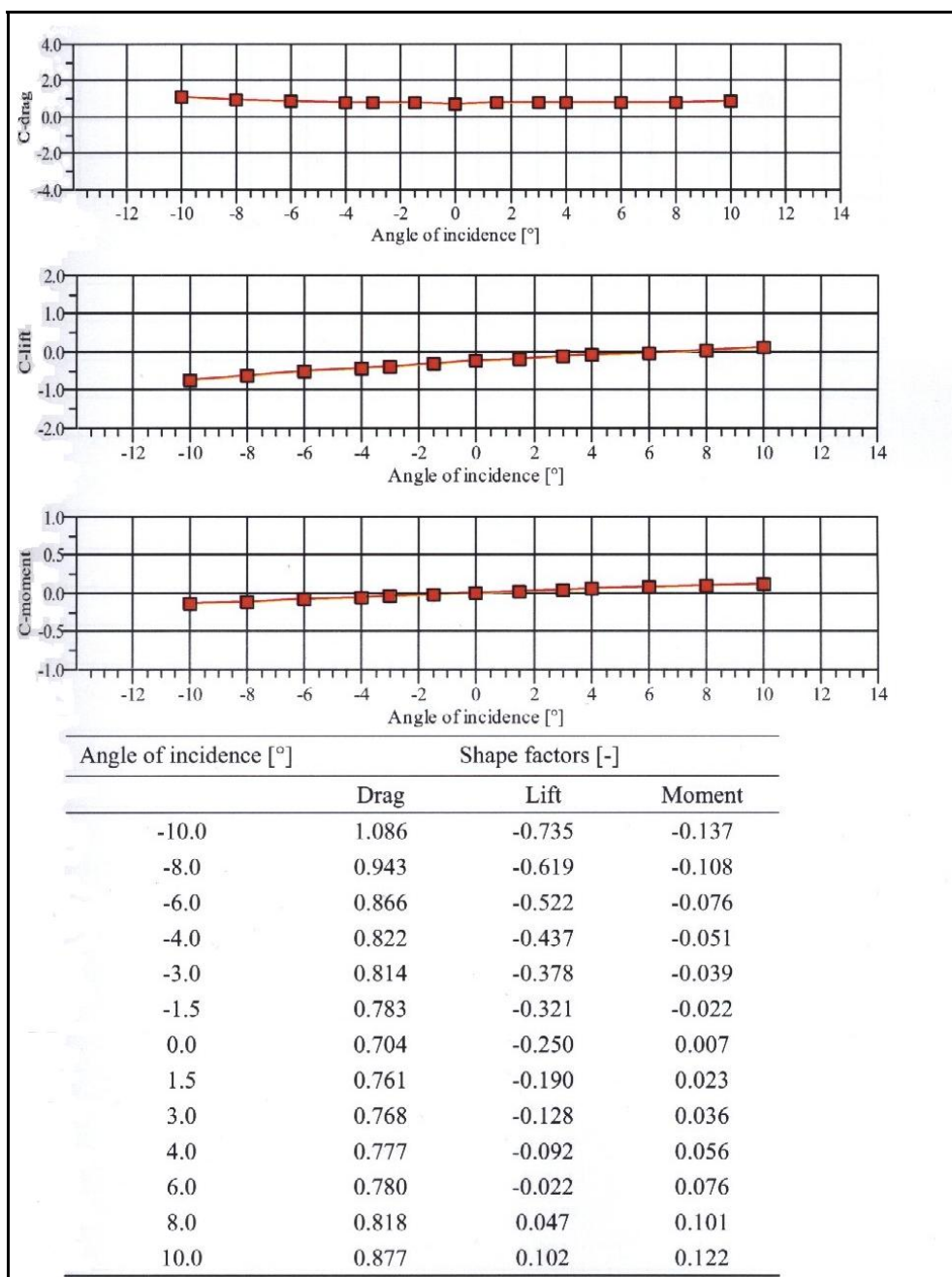
Drag: $D(\alpha = \theta) = \frac{1}{2} \rho V^2 H \cdot (C_D(\alpha = 0) + \theta \cdot C_D'(\alpha = 0))$ L 5-5

Løft: $L(\alpha = \theta) = \frac{1}{2} \rho V^2 B \cdot (C_L(\alpha = 0) + \theta \cdot C_L'(\alpha = 0))$ L 5-6

Moment: $M(\alpha = \theta) = \frac{1}{2} \rho V^2 B^2 (C_M(\alpha = 0) + \theta \cdot C_M'(\alpha = 0))$ L 5-7



Figur 5-3: Figuren viser hvordan formfaktorene (her momentkoeffisienten) ofte forenkles til et lineært uttrykk.



Figur 5-4: Formfaktorer for Hardangerbrua som funksjon av innfallsvinkel α (se Figur 5-2), målt fra modellforsøk (utført av Svend Ole Hansen ApS for Statens Vegvesen) med modellen i Figur 5-1. Faktorene er for gang-/sykkelsti på nedstrøms (lo) side, og inkluderer optimale virvelreduksjonsanretninger. Figuren er hentet fra vindtunnelrapporten [14].

Vinden beskrives gjerne med en middelværdi pluss en varierende del over en gitt periode på for eksempel ti minutter. Ligningene L 5-1 til L 5-7 inkluderer bare middelvinden. Den varierende delen av vinden tar hensyn til:

- Turbulens, det vil si tidsvarierende hastighetskomponenter i x-, y-, og z-retning, som betegnes med hhv u, v og w.
- Relativ vindhastighet, som er vindhastighet minus konstruksjonshastighet
- Relativ innfallsvinkel

Ligningene L 5-8 til L 5-10 viser de modale svingeligningene for moment, drag og løft, som inkluderer den varierende delen av vinden. Formlene er direkte hentet fra Hjorth-Hansen [16],

og brukes i *dynamiske* analyser. Det er i denne oppgaven kun foretatt analyser med *statisk* vindlast, men formlene tas likevel med her for å vise hvor sammensatt lastbildet knyttet til vinden virkelig er.

Man får da følgende modale svingeligning for moment [16]:

$$M_\theta \ddot{\theta} + D_\theta \dot{\theta} + \left[K_\theta - \frac{1}{2} \rho C'_M B^2 V^2 \right] \theta + \rho \bar{C}_M B^2 l V \dot{r}_x + \frac{1}{2} \rho C'_M B^2 l V \dot{r}_z = \rho \bar{C}_M B^2 V \int_0^l u dl + \frac{1}{2} \rho C'_M B^2 V \int_0^l w dl$$

L 5-8

hvor M_θ , D_θ og K_θ er hhv massetregghetsmoment, rotasjonsdempning og torsjonsstivhet, r_x , r_z og θ er hhv forskyvning i x -retning, z -retning og rotasjon, u og w er de varierende vindkomponentene i hhv x - og z -retning, \bar{C}_M er momentkoeffisient ved $\alpha =$ innfallsvinkel $\bar{\alpha}$ og C'_M er den deriverte av koeffisienten. Aksekorset er orientert slik at x er i vindens retning (på tvers av brobanen), z er normalt på denne, og y er orientert langs brobanen.

Ligning L 5-8 er ordnet slik at alle leddene som påvirker torsjonsstivheten er samlet inni hakeparentesen. Man ser at i de to leddene i denne parentesen er det bare middelvindhastigheten, V , som er en variabel (C_M antas å følge en rett linje slik at C'_M blir konstant), og ved å variere denne kan uttrykket i parentesen, det vil si den totale torsjonsstivheten, risikere å bli null (gitt at C'_M er positiv). Dette kalles *divergens*, og er svært kritisk, da det vil si at brobjelken i praksis har ingen torsjonsstivhet og vil kollapse. Man ser fra formelen at man må sikre at broen har en tilstrekkelig stor K_θ til at man må ha en usannsynlig høy (det vil si mye høyere enn den som er antatt å opptre på stedet) middelvindhastighet, V , for at divergens skal inntreffe.

Tilsvarende svingeligninger for drag og løft [16]:

$$M_x \ddot{r}_x + \left[D_x + \rho \bar{C}_D H l V \right] \dot{r}_x + K_x r_x + \frac{1}{2} \rho C'_{D2} H l V \dot{r}_z - \frac{1}{2} \rho C'_D H l V^2 \theta = \rho \bar{C}_D H V \int_0^l u dl + \frac{1}{2} \rho C'_{D2} H V \int_0^l w dl$$

L 5-9

$$M_z \ddot{r}_z + \left[D_z + \frac{1}{2} \rho C'_{L2} B l V \right] \dot{r}_z + K_z r_z + \rho \bar{C}_L B l V \dot{r}_x - \frac{1}{2} \rho C'_L B l V^2 \theta = \rho \bar{C}_L B V \int_0^l u dl + \frac{1}{2} \rho C'_{L2} B V \int_0^l w dl$$

L 5-10

hvor M , D og K er hhv masse, dempning og stivhet, $C'_{L2} = C'_L + \bar{C}_D H / B$ og $C'_{D2} = C'_D - \bar{C}_L B / H$.

Man ser av ligning L 5-10 at man for negative verdier av C'_{L2} kan få at total dempning (uttrykket inni hakeparentesen) blir lik eller mindre enn null, noe som kan føre til at konstruksjonen blir ustabil og starter å *galoppere* (det vil si at den svinger ukontrollert i vertikalplanet, se en mer utdypende forklaring i Kap.5.2.2).

5.2 Dynamiske vindkrefter og aeroelastisk atferd

Hengebroer er store og fleksible konstruksjoner som kan bli utsatt for store svingninger. Svingningene settes i gang av krefter som skyldes vinden, og påvirkes så av samspillet

mellom luftstrømningen og den bevegelige konstruksjonen. Bevegelsene blir igjen påvirket av de aerodynamiske kreftene som de selv forårsaker, og kreftene kalles derfor *bevegelsesavhengige krefter*. Atferden forbundet med disse bevegelsene kalles *aeroelastisk atferd* [8]. Dersom de bevegelsesavhengige kreftene blir veldig store kan konstruksjonen begynne å svinge *ukontrollert*. Eksempler på denne typen aeroelastisk atferd er galoppering (ukontrollert vertikal svingning) og flutter (kombinasjon av vertikal svingning og torsjon (klassisk flutter) eller ren torsjon (torsjonsflutter)).

5.2.1 Virvelindusert vibrasjon

Når vinden passerer brokassen blir luftstrømmen separert. Denne separasjonen er, spesielt for tverrsnitt med avrundede hjørner, avhengig av Reynolds tall, Re .

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad \text{L 5-11}$$

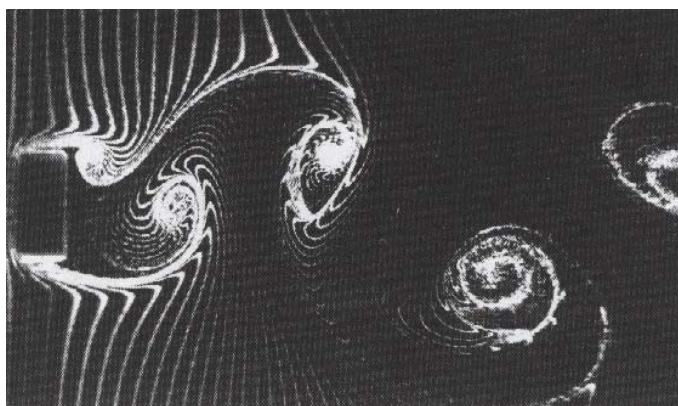
hvor V er middelvindhastighet, D er karakteristisk dimensjon av tverrsnittet og ν er luftens kinematiske viskositet ($\nu = 1,5E^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

For konstruksjoner med skarpe hjørner oppstår separasjon ved hjørnene uavhengig av størrelsen på Re . Separasjonen av luftstrømmen påvirkes også av rekkverk, parapeter og lignende, og det er derfor viktig at slike detaljer er med i en vindtunnelmodell. Når luftstrømmen separeres dannes det virvler vekselvis på over- og undersiden av brobjelken (se *Figur 5-5*), noe som skaper en vekslende kraft på broen. Frekvensen til virvelavløsningen, n , er proporsjonal med vindhastigheten, og styrken og regulariteten er avhengig av formen på tverrsnittet.

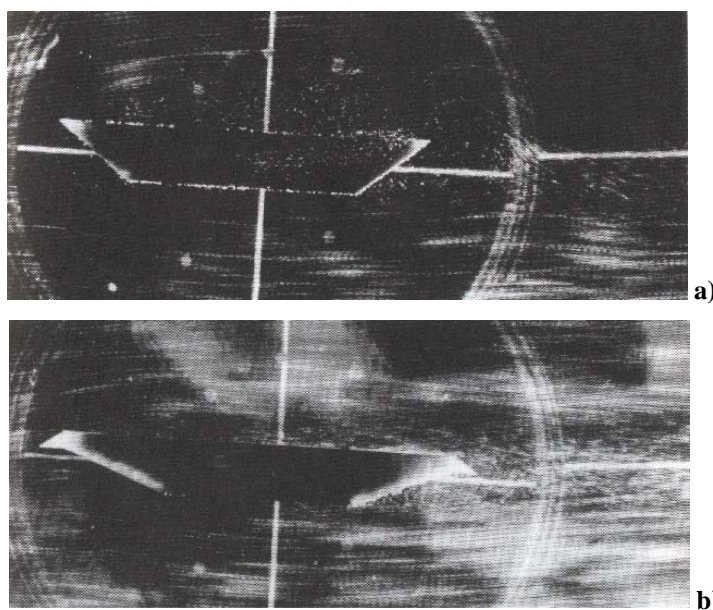
$$n = \frac{St \cdot V}{D} \quad \text{L 5-12}$$

hvor St er Strouhals tall, som er avhengig av tverrsnittsform og Reynolds tall (St kan finnes ved hjelp av vindtunnelforsøk). Eksempelvis er Strouhalstallet for en sylinder i luft i subkritisk område, $St = 0,2$. For Hardangerbrua ligger St på ca 0,145 for vertikale vibrasjoner og 0,13 for torsjonsvibrasjoner når modellen inkluderer virvelreduksjonsanretninger og rekkverk.

Figur 5-5 viser virvelavløsninger for en rektangulær sylinder med $Re=200$. For tverrsnitt med betydelig høyere Re (hvilket er tilfelle for de fleste brokasser), så vil ikke virvlene være så klare og regulære som i *Figur 5-5*, da luftstrømmen vil bli langt mer turbulent, se *Figur 5-6*. Det vil likevel være mulig å definere en dominerende virvelfrekvens [8].



Figur 5-5: Her kan man tydelig se virveldannelsen når luftstrømmen passerer en rektangulær sylinder ($Re=200$). Fra [8].



Figur 5-6: Bildene viser hvordan vannstrømmen (har samme effekt som en luftstrøm) over en "vanlig" (a) og en mer strømlinjeformet brokasse (b) oppfører seg. Den strømlinjeformede brokassen får betraktelig mindre turbulens på oversiden av dekket grunnet en redusert separasjonssone. Bildene er hentet fra [8].

Siden middelvindhastigheten på et sted kan variere mye (og virvelavløsningsfrekvensen er proporsjonal med denne) er det vanskelig å unngå at virvelavløsningsfrekvensen på et tidspunkt vil sammenfalle med en av egenfrekvensene til konstruksjonen. Dette vil føre til resonans og kan betydelige svingninger. Dersom de to frekvensene blir tilstrekkelig like, kan de til en viss grad *tilnærme seg hverandre*, ved at konstruksjonens svingefrekvens styrer virvelfrekvensen, slik at det oppstår resonans, dette kalles *lock-in* [8]. Relativt store virvelinduserte vibrasjoner kan altså oppstå allerede ved relativt lave vindhastigheter dersom virvelavløsningen treffer en av konstruksjonens egenfrekvenser.

Virvelinduserte svingninger er begrenset til en viss størrelse ettersom store utsving ser ut til å bryte ned drivkraften fra virvlene slik at bevegelsen dempes. Disse svingningene vil derfor i utgangspunktet ikke føre til konstruksjonssammenbrudd, men de kan være et problem når det gjelder *utmattning*. Store svingninger kan dessuten være et bruksproblem, da svingningene kan oppleves som ubehagelige for trafikantene. Den dynamiske lasten på grunn av virvelavløsning virker primært i vertikal retning, og vil derfor forårsake vertikale svingninger.

Men ettersom kraftresultanten kan virke med en arm i forhold til skjærsenteret kan virvelavløsningen også forårsake torsjonssvingning.

For å håndtere problemet med virvelinduserte svingninger må man dimensjonere konstruksjonen slik at den er stiv nok og har tilstrekkelig demping til at svingningene ikke blir ubehagelig store, eller man kan plassere dempere inni brokassen. Det er også vanlig å bruke *ledeskovler* langs hjørnene av brokassen (se *Figur 5-1b*). Disse har som oppgave å lede luftstrømmen tettere inntil brokassen for å påvirke separasjonsområdet og redusere virveldannelsen og dermed svingningene.

5.2.2 Flutter og galoppering

Ved høyere vindhastigheter kan brobjelken bli utsatt for ulike typer aeroelastisk *ustabil* atferd, slik som *galoppering* (vertikal svingning), *klassisk flutter* (kombinasjon av vertikal svingning og torsjon) og *torsjonsflutter* (ren torsjon). Det var torsjonsflutter som førte til kollapsen av Tacoma Narrows Bridge (se *Kap. 3.1.1* og *Figur 5-7*).

Flutter er en betegnelse på svært store, voksende svingninger, som er *selvinduserte*. Når konstruksjonen begynner å vibrere i torsjon skapes det en ugunstig trykkvariasjon rundt kassen i takt med bevegelsene. Disse bevegelsesstyrte lastvariasjonene svarer effektivt til et drivende torsjonsmoment i fase med torsjonssvingehastigheten, noe som gir en *negativ aerodynamisk demping*. Denne dynamiske lasten kan beskrives som en form for virvler, som avløses ettersom kassen vrir på seg, ved en viss redusert vindhastighet. Virvlene i dette tilfellet dannes altså på grunn av *vridding*, og er ikke det samme som i *Kap.5.2.1*, som er virveldannelse på en *fastholdt* konstruksjon. Redusert hastighet for torsjonsflutter, $V/f_t B$, er som regel større enn hastigheten for ”vanlig” virvelavløsning (som i *5.2.1*), og det er derfor mindre sannsynlig at flutter skal inntreffe.



Figur 5-7: Bilde av Tacoma Narrows Bridge like før den kollapset som følge av flutter. Fra [9].

Det er sannsynlig at enhver konstruksjon som har en høyere torsjonseigenfrekvens enn vertikal egenfrekvens, vil bli utsatt for klassisk flutter om bare vindhastigheten blir høy nok. Det er derfor viktig å se til at dette først skjer ved en vindhastighet som er betraktelig høyere enn den som er sannsynlig å opptre i konstruksjonens levetid. Dess større avstand det er mellom de to egenfrekvensene, jo høyere hastighet må til for at flutter skal inntreffe [5].

En annen type *ukontrollert*, selvindusert svingning som en brokonstruksjon kan utsettes for er *galoppering*. Galoppering er storamplitudede svingninger som oppstår *normalt på* vindretningen (i vertikalplanet), ved vindhastigheter som er typisk betydelig høyere enn de som forårsaker lock-in for virvelinduserte svingninger (se *Kap.5.2.1*). Galoppering forårsakes av en kobling mellom de aerodynamiske kreftene som virker på konstruksjonen og konstruksjonens bevegelser. Det som skjer er at når broen begynner å vibrere som følge av vinden, så endres innfallsvinkelen til luftstrømmen. Dette skjer ved at når konstruksjonen får en forskyvning, så nedover, så vil den også få en hastighet nedover, noe som medfører at luftstrømmen vil få en tilsvarende hastighetskomponent oppover (luften presses mot

konstruksjonen). Den relative hastigheten til luftstrømmen vil da være en vektorsum av vindhastigheten, som kommer fra siden, og hastighetskomponenten som virker oppover, og vil altså danne en vinkel med horisontalplanet. Dersom de aerodynamiske egenskapene til tverrsnittet er slik at kraften tilknyttet den relative hastigheten ved vinkler tilnærmet 0° fortsetter å trykke konstruksjonen nedover i stedet for å bringe den tilbake til utgangsposisjon, er konstruksjonen *ustabil*, og en galopperende bevegelse vil inntreffe. I motsetning til ved lock-in og flutter, forblir luftstrømmen separert ved galoppering. [8], [15].

For at galoppering skal være mulig må den aerodynamiske dempingen (det siste leddet i hakeparentesen i ligning L 5-10) være *negativ*. Dette er *Glauert-Den Hartogs nødvendige kriterium for galoppering*. For at galoppering skal inntreffe må imidlertid *det totale* uttrykket inni parentesene (det vil si den *totale* dempningen) være mindre enn null. Dersom den mekaniske vertikale dempingen, D_z , er veldig liten, kan altså galoppering i teorien oppstå ved alle vindhastigheter, uansett hvor lave de er [8].

6 Elementmodellering av Hardangerbrua i ABAQUS

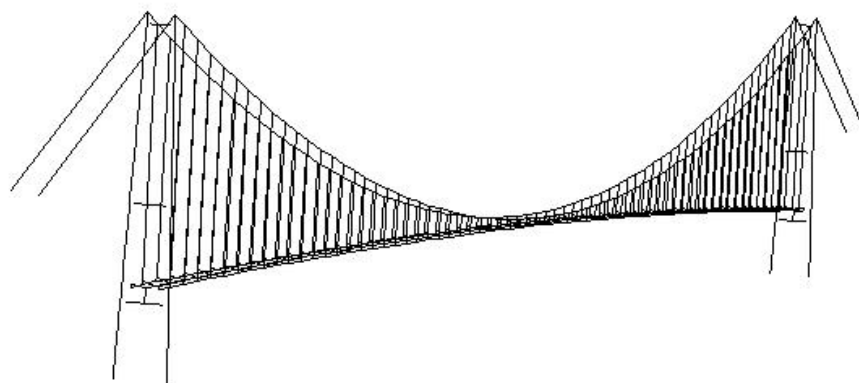
Ved dimensjonering av større og kompliserte konstruksjoner er det vanlig å lage en elementmodell av konstruksjonen i et elementmetodeprogram. Ved hjelp av denne kan man blant annet se på statiske deformasjoner for konstruksjonen ved ulike lastsituasjoner, samt beregne (kontrollere) egenfrekvenser og svingemoder for konstruksjonen, både med og uten last. Dette er viktig ved dynamiske analyser, det vil si analyser av konstruksjonens oppførsel ved dynamisk last. Det må som regel gjøres en del forenklinger i en slik elementmodell, og det er da viktig å sørge for at modellens skjærsenter, massetyngepunkt, stivheter, randbetingelser og så videre stemmer best mulig overens med den virkelige konstruksjonen, slik at resultatene blir så riktige som mulig.

Modellen bygges opp av knutepunkter (noder) og ulike typer elementer, som gis riktige dimensjoner, elastisitetsmoduler, arealtreghetsmomenter og randbetingelser, før den påføres egenvekter og andre laster konstruksjonen skal kontrolleres/dimensjoneres for.

Elementmodellen som er brukt i analysene i forbindelse med denne oppgaven er modellert i elementmetodeprogrammet ABAQUS, av Aleksander Kyte ved Statens vegvesens kontor i Oslo. Modellen består av totalt 1236 elementer og 1021 noder, hvorav selve brobjelken består av 66 bjelkeelementer og 67 noder.

6.1 Beskrivelse av ABAQUS-modellen

Analysene i denne oppgaven er gjennomført med utgangspunkt i en elementmodell (se *Figur 6-1*) og analyser gjort tilgjengelige av Statens vegvesen.



Figur 6-1: Elementmodellen som er brukt i analysene av Hardangerbrua. Modellen er laget i programmet ABAQUS av Aleksander Kyte ved Statens vegvesen.

6.1.1 Geometri, randbetingelser, masse- og stivhetsdata

Elementmodellen av Hardangerbrua har følgende geometridata [1]:

Hovedspenn:	1310 meter
Pilhøyde hovedspenn:	121 meter
Avstand mellom bærevegger:	14,5 meter
Lengde bakstag:	171,277 meter
Kordevinkel bakstag:	26,277°
Pilhøyde avstivningsbærer:	10,726 meter
Minste hengestanglengde:	2,88 meter
Avstand fra nedre hengestangfeste til nøytralakse:	1,494 meter
Avstand fra nedre hengestangfeste til skjærsenter:	1,669 meter

Kote topp tårn:	+187,500
Kote underkant fundament tårn:	+4,0

Opplagerbetingelser [1]:

Avstivningsbæreren er fritt opplagt ved tårnene i begge ender. Den er fastholdt sideveis og for torsjon i begge ender, og fastholdt i lengderetningen i den ene enden.

Masser for Hardangerbrua [1]:

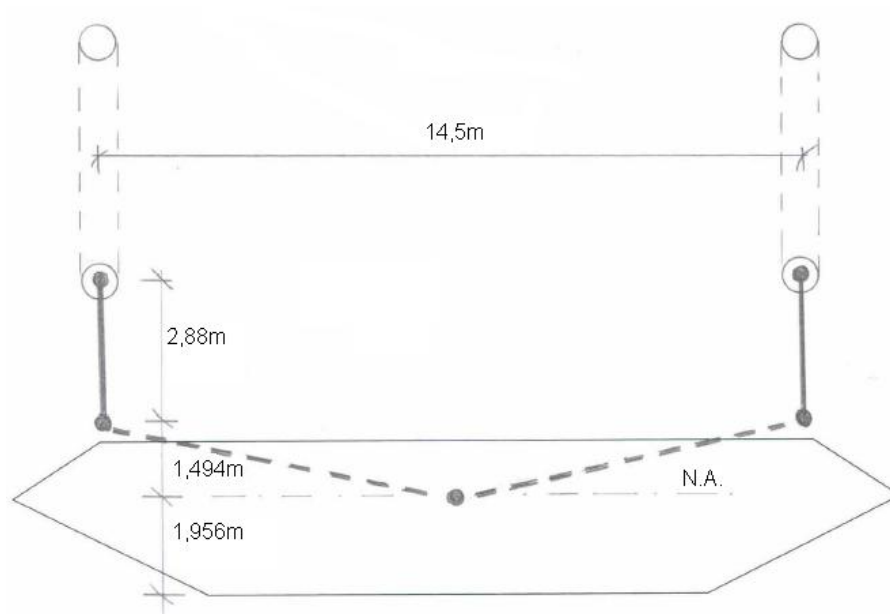
Avstivningsbærer:	$m = 9015 \text{ kg/m}$ $M = 9015 \times 1310 = 11810 \text{ tonn}$
Hengestenger:	$M = 304,6 \text{ tonn}$
Bærekabel hovedspenn:	$m = 1834,3 \text{ kg/m}$ $M = 2 \times 1339,2 \times 1834,3 = 4913 \text{ tonn}$
Bærekabel bakstag:	$m = 1834,3 \text{ kg/m}$ $M = 2 \times 2 \times 191,016 \times 1834,3 = 1402 \text{ tonn}$

Stivhetsdata for modellen [1]:

Avstivningsbærer:	$A = 0,596 \text{ m}^2$ $I1 = 0,99 \text{ m}^4$ $I2 = 16,877 \text{ m}^4$ $IT = 2,467 \text{ m}^4$ $CW = 4,567 \text{ m}^6$ $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$ $G = 80.700 \text{ N/mm}^2$
Hengestang:	$A = 0,00301 \text{ m}^2$ $I = 1 \% \text{ av sirkel med diameter } \varnothing = 62\text{mm}$ $E = 164.000 \text{ N/mm}^2$
Bærekabel:	$A = 0,223 \text{ m}^2$ $I = 1 \% \text{ av sirkel med diameter } \varnothing = 600\text{mm}$ $E = 205.000 \text{ N/mm}^2$
Tårn:	$EC = 40.000 \text{ N/mm}^2$

6.1.2 Modellering av avstivningsbæreren

Avstivningsbæreren er modellert som en bjelkestreng i avstivningsbærerenes nøytralakse, som ligger 0,175 meter over avstivningsbærerenes skjærsenter. Som illustrert med stiplede linjer i figuren under, er det en stiv kobling mellom avstivningsbæreren og nedre hengestangfeste. Hengestenger og kabler er modellert som bjelkeelementer med liten bøyestivhet, det vil si at de oppfører seg som leddede staver. Tårnene er modellert med bjelkeelementer og tilsvarer tårnløsning med "lav midtrigel", som er gjeldende utforming for Hardangerbrua (fra [1]).



Figur 6-2: Figuren viser hvordan avstivningsbæreren er modellert i ABAQUS-modellen, som en bjelkestreng i nøytralaksen. Det er en stiv kobling mellom bjelkestrengen og nedre hengestangfester, disse vises på figuren som stiplede linjer. Figuren er hentet fra Kytes rapport [1].

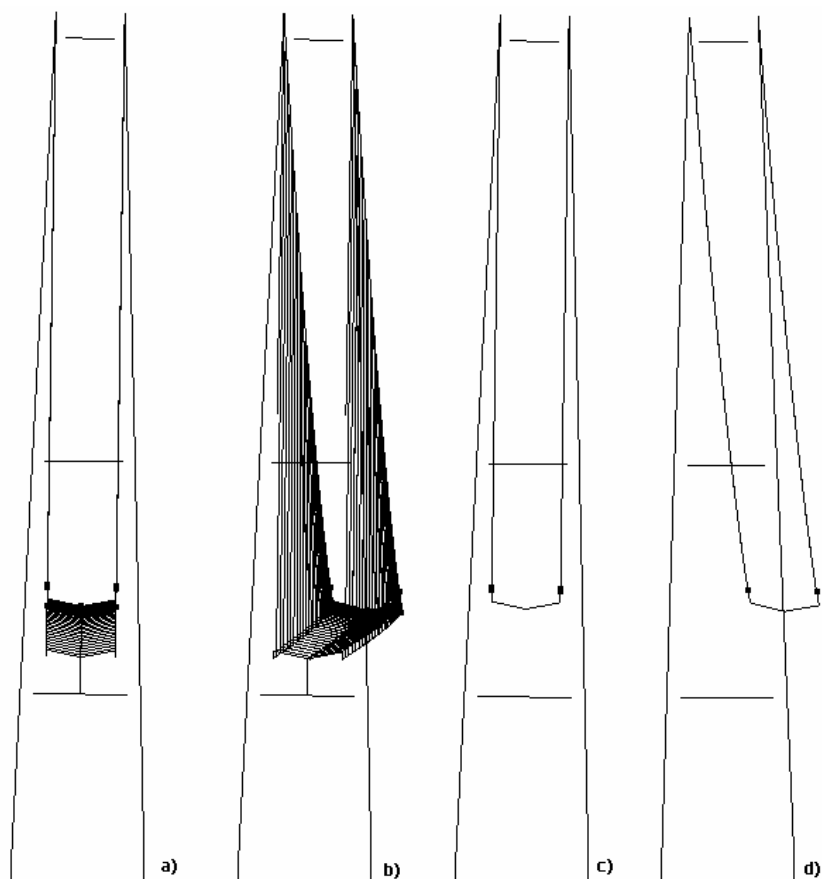
6.1.3 Elementer

ABAQUS-modellen av Hardangerbrua er bygd opp av noder og B31-elementer. B31 vil si at det er et 1.ordens (lineært), 3-dimensjonalt bjelkeelement. B31-elementene har to noder og er skjærdeformerbare. Tårnene er bygd opp av elementer av typen FRAME3D, som er bjelkeelementer spesielt egnet for rammeanalyser.

6.2 Deformasjoner for Hardangerbrua

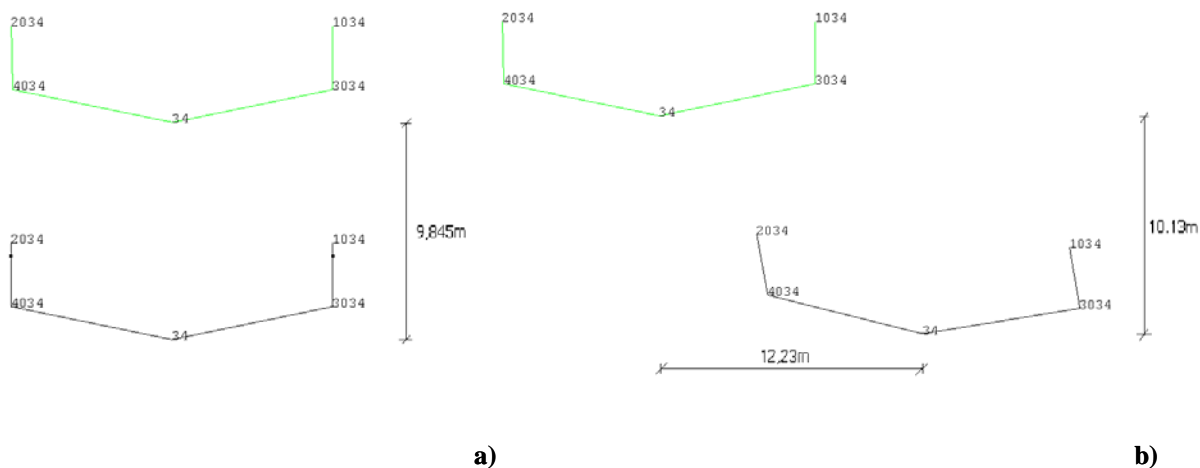
Hengebroer er store, fleksible konstruksjoner som kan bli utsatt for store krefter, og dermed store deformasjoner. Figurene i dette kapittelet gir en indikasjon på dette, men det er viktig å merke seg at figurene viser modellen med påført last for en vindhastighet på 80m/s, som er langt større enn hva som vil opptre i virkeligheten (til sammenligning starter orkan styrke på 32,7m/s). Dette brukes likevel som eksempel for å tydeliggjøre hvilken form broen får når den deformeres.

Siden konstruksjonen er utsatt for store deformasjoner, er det viktig at modellen tar hensyn til de ikkelineære geometriske effektene disse forårsaker, se *Kap.6.2.1*.

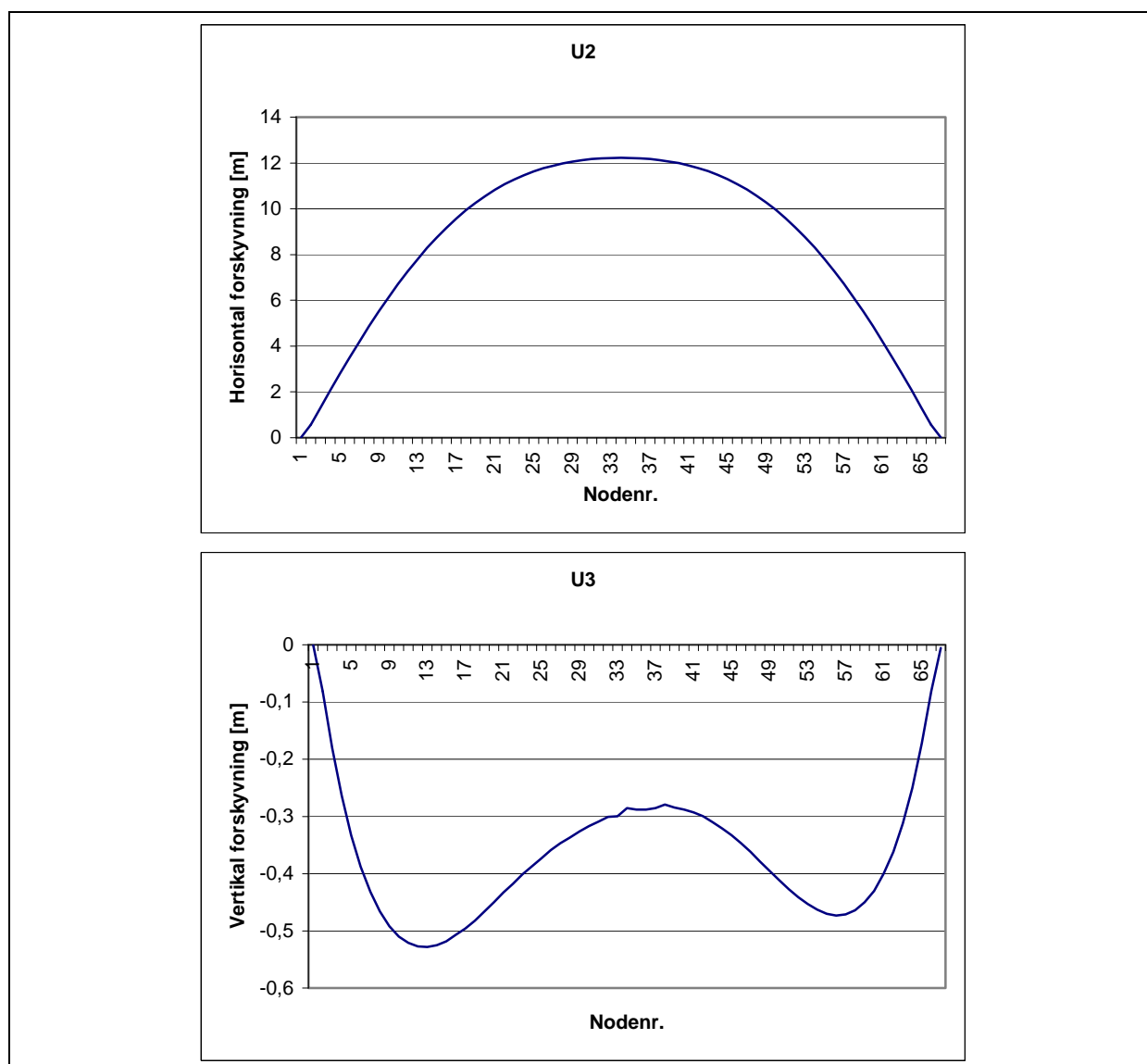


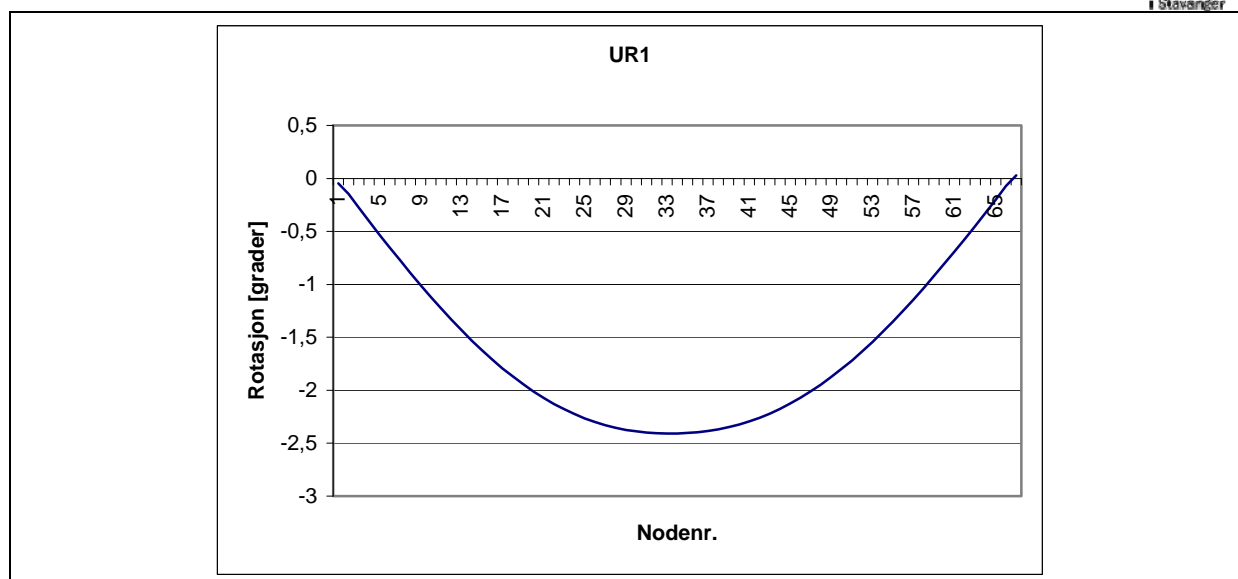
Figur 6-3: Figuren viser hvordan Hardangerbrua deformeres ved en vindhastighet på 80m/s. Figur a) og b) viser hele modellen i hhv utgangsposisjon (bare deformert som følge av egenvekt) og i deformert tilstand som følge av vinden. I figur c) og d) vises bare hovedkablene samt et snitt av brokassen i **midten av spennet** (med samme belastninger som i a) og b)).

Figur 6-4 viser et snitt i midten av spennet, med påførte forskyvninger og nodenummer. Deformasjonene er for belastning av egenvekt og for en vindhastighet på 80m/s. Egenvekten er selvsagt alltid ”på”, og det er viktig å merke seg at størsteparten av den vertikale forskyvningen i figuren for påsatt vind (figur b) skyldes denne. Den reelle deformasjonen på grunn av vinden blir derfor deformasjonen i b) – deformasjonen i a).



Figur 6-4: Figur a) viser brokassens deformasjon i midten av spennet som følge av egenvekt, mens b) viser deformasjonen ved en vindhastighet på 80m/s (de grønne linjene er i begge tilfeller brokassen i udeformert tilstand, før påføring av egenvekt). Den reelle vertikale deformasjonen ved en vindhastighet på 80m/s blir dermed $10,13\text{m} - 9,845\text{m} = 0,285\text{m}$. NB: Dette er forskyvningene ved bruk av Statens vegvesens formfaktorverdier, se Kap.7.2.

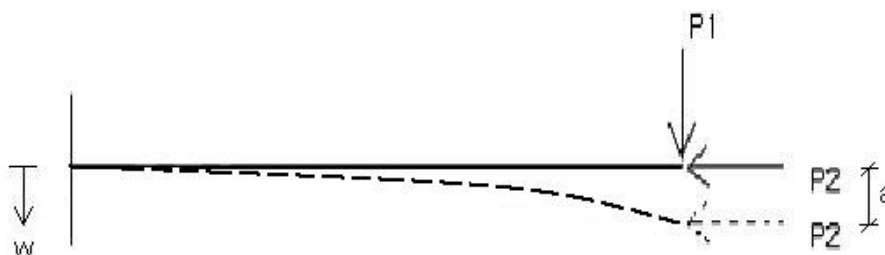




Figur 6-5: Figurene viser broens deformasjon langs spennet i horisontal retning (U2) og vertikal retning (U3), samt rotasjon om lengdeaksen til brobanen (UR1) ved en vindhastighet på 80m/s. NB: Dette er forskyvningene ved bruk av Statens vegvesens formfaktorverdier, se Kap.7.2.

6.2.1 Ikkelineære geometriske effekter

I alle stegene i alle analysene er settingen NLGEOM (non linear geometry) brukt. Denne settingen gjør at konstruksjonens deformasjon på grunn av påført last blir tatt hensyn til, slik at ABAQUS ”forstår” at kreftenes plassering endrer seg i takt med konstruksjonens deformasjon, noe som igjen kan påvirke lastsituasjonen. Dette kan illustreres med et enkelt eksempel;



Figur 6-6: Eksempel på ikkelineære geometriske effekter; ved deformasjon av bjelken vil punktlasten P2 skape moment i bjelken.

Figuren over viser en enkel utkraget bjelke belastet med to punktlaster, P1 og P2, på enden av bjelken. Den stiplede linjen viser bjelkens deformasjon, og hvordan P2 forskyves i takt med denne. Forskyvningen av P2 gjør at bjelken, i tillegg til de to punktlastene, blir belastet med et moment lik $P2 \cdot (a-w)$, hvor w er vertikal forskyvning langs bjelken og a er vertikal forskyvning i enden av bjelken. Ved små forskyvninger er dette momentet ofte så lite at det kan neglisjeres, men når deformasjonene blir store kan disse ikkelineære geometriske effektene være betydelige. NLGEOM-settingen for et lastpåføringssteg avgjør om ABAQUS vil ta hensyn til geometrisk ikkelinearitet i det gjeldende steget, så dersom NLGEOM er satt på vil momentet i eksempelet ovenfor bli tatt hensyn til.

Hardangerbrua er en relativt fleksibel konstruksjon, og i modellen er altså NLGEOM brukt i alle stegene, og analysene tar dermed hensyn til ikkelineære geometriske effekter.

7 Analyser av Hardangerbrua i ABAQUS

Det er tatt utgangspunkt i en elementmodell av Hardangerbrua som er laget i elementmetodeprogrammet ABAQUS av Aleksander Kyte ved Statens vegvesen, se *Figur 6-1*. Det er tatt utgangspunkt i to ulike typer inputfiler; de som kan kjøres alene og de som må kjøres sammen med en subrutine. Inputfilene som kan kjøres alene er av Kyte gitt navn som ender på -VGxx, hvor xx er vindhastigheten som lastene i filen er beregnet ut ifra (f.eks. påfører *analyse61d-VG40.inp* kreftene for en vindhastighet på 40m/s). Disse filene omtales heretter som *VG-filene*. Filene som må kjøres sammen med en subrutine har tilsvarende navn som ender på -Vxx.

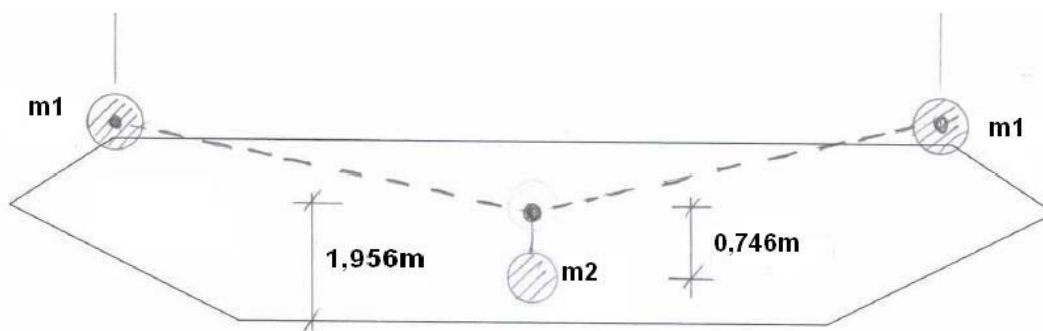
Hensikten med de nye analysene var, i tillegg til å få en forståelse av broens oppførsel under statisk last, å vurdere effekten av forenklinger som er gjort i analysene fra Statens vegvesen. Disse forenklingene innbefatter blant annet utregningen av formfaktorer brukt ved beregning av kreftene som virker på konstruksjonen, samt påføringen av brokassens egenvekt. Det er også forsøkt å inkludere i subrutinen stivhetsreduksjonen på grunn av de bevegelsesavhengige kreftene ved beregning av egenfrekvensene. I Statens vegvesens analyser er det analysene uten subrutiner som får med dette. Til slutt er det forsøkt å vurdere effekten av et tilleggsloft på brobjelken på grunn av aksialkreftene som oppstår i bjelken ved horisontal utbøyning.

De nye analysene som er gjort er følgende:

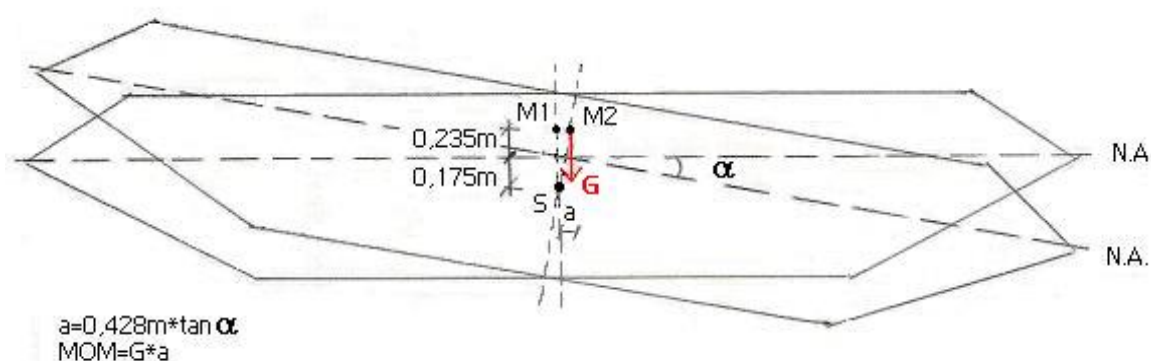
1. Endring av påføringsmetode for egenvekt av brokassen i VG-filene, for å få med effekten av eksentrisiteten som massesenteret får i forhold til skjærsenteret når brobjelken roterer, se *Kap.7.1*.
2. Analyser med tilpassede 3.gradspolynomer for formfaktorene CD, CL og CM i subrutinen i stedet for lineære funksjoner, se *Kap.7.2*.
3. Analyser *med* subrutine som tar hensyn til stivhetsendringen på grunn av de bevegelsesavhengige kreftene ved beregning av egenfrekvenser (tidligere var det bare VG-filene som fikk med virkningen av dette), se *Kap.7.3*.
4. Analyser som inkluderer tilleggsloftet på grunn av aksiallasten som oppstår i bjelken ved horisontal utbøyning, se *Kap.7.4*.

7.1 Endring av påføringsmetode for egenvekt av brokasse

I VG-filene fra Statens vegvesen er egenvekten av brokassen, sammen med egenvekten av hengestengene, påført som en linjelast på elementene 1-66, det vil si *i nøytralaksen*. Når broen roterer om skjærsenteret vil denne egenvekten få en liten horisontal eksentrisitet i forhold til skjærsenteret, siden nøytralaksen ligger 0,175m over skjærsenteret, og egenvekten vil dermed skape et lite tilleggsmoment. I virkeligheten ligger massetyngdepunktet til brokassen 0,253 meter over nøytralaksen, det vil si 0,428 meter over skjærsenteret, og egenvekten vil dermed i virkeligheten skape et større moment enn det som skapes når egenvekten påføres *i nøytralaksen*. I de nye analysene påføres derfor egenvekten i stedet i massepunktene m_1 og m_2 i ABAQUS-modellen, se *Figur 7-1* (det er bare 41 % av hengestengene som lumpes til m_1 , resten lumpes oppover og inngår som en del av massen til hovedkablene). Kyte har i ABAQUS-modellen tilpasset disse punktene slik at tyngdepunktet ligger nettopp 0,253 meter over nøytralaksen. Ved å påføre egenvekten av brokassen og hengestengene på denne måten vil man få et større veltemoment, som altså vil være mer virkelighetstro, se *Figur 7-2*.



Figur 7-1: I de nye analysene påføres egenvekten av brokassen og hengestengene som lumpede masser i masseelementene m_1 og m_2 som på figuren ovenfor (masseelementene er plassert med 20 meters mellomrom langs brokassen i elementmodellen). Dette gir et massepunkt som ligger 0,253m over nøytralaksen, slik som er tilfelle i virkeligheten, se Figur 7-2.



Figur 7-2: Figuren viser at egenvekten vil gi et større veltemoment ved rotasjon av brokassen når egenvekten plasseres i massetyngdepunktet ($M1$) i stedet for i nøytralaksen ($N.A.$). ($M2$ er massetyngdepunktet i ny posisjon etter at brokassen har rotert om skjærsenteret med en vinkel α). NB! Brokassen er her rotert langt mer enn hva som er sannsynlig i virkeligheten, dette for å kunne vise forskyvningen av massetyngdepunktet i forhold til skjærsenteret.

Ved ny påføringsmetode for egenvekten blir veltemomentet:

$$M_{VELT} = G \cdot \tan \alpha \cdot 0,428m \quad \text{L 7-1}$$

hvor G er egenvekten av brokassen og α er rotasjonsvinkel.

For den gamle påføringsmetoden var momentet, $M_{VELT} = G \cdot \tan \alpha \cdot 0,175m$, hvilket vil si at det nye veltemomentet er $0,428/0,175 = 2,4$ ganger større enn før.

I tillegg til å skape en større rotasjon (rotasjonsvinkelen α øker fra 2,39 til 2,5 grader midt i spennet ved $V=80m/s$), så vil det økte momentet ha en effekt på stivheten til konstruksjonen, som igjen vil påvirke egenfrekvensene til broen, se Tabell 7-1.

Tabell 7-1: Tabellen viser egenfrekvensene for brua med gammel og ny måte å påføre brokassens egenvekt på, for hhv bro uten last (Analyse61d) og bro med last for vindhastighet lik 80m/s (VG80). (Gammel: Egenvekten påføres som linjelast på elementene 1-66, i nøytralaksen. Ny: Egenvekten påføres i masseelementene m1 og m2, se Figur 7-1, hvilket gir et mer virkelighetsnært veltemoment ved rotasjon av brobjelken). Svingeformene er gitt på følgende måte: H = horisontal, V = vertikal, T = torsjon, S = symmetrisk, A = asymmetrisk, 1, 2 og 3 betyr hhv. 1., 2. og 3.svingeform (HS1 betyr eksempelvis 1.horisontale, symmetriske svingeform).

Svingeformer	Analyse61d			VG80		
	Gammel (rad/s)	Ny (rad/s)	Endring (%)	Gammel (rad/s)	Ny (rad/s)	Endring (%)
HS1	0,3156	0,3142	-0,44	0,3315	0,3302	-0,39
HA1	0,6269	0,6251	-0,29	0,6467	0,6448	-0,29
VA1	0,691	0,6875	-0,51	0,7312	0,728	-0,44
VS1	0,8901	0,8864	-0,42	0,9209	0,9174	-0,38
HS2	1,0942	1,0925	-0,16	1,1122	1,1101	-0,19
VS2	1,2627	1,2602	-0,20	1,279/1,3335	1,2662/1,3189	-1,00/-1,09
VA2	1,3264	1,3204	-0,45	1,3911	1,3853	-0,42
HA2	1,4872	1,4794	-0,52	1,5477	1,539	-0,56
VS3	1,7146	1,7078	-0,40	1,796	1,7893	-0,37
HA3	1,8996	1,8974	-0,12	1,9248	1,9222	-0,14
VA3	2,0709	2,0625	-0,41	2,1627	2,1547	-0,37
TS1	2,2925	2,2787	-0,60	1,279/1,3335	1,2662/1,3189	-1,00/-1,09
TA1	3,2959	3,2868	-0,28	2,7993	2,7879	-0,41
TS2	4,9284	4,9215	-0,14	4,6431	4,6353	-0,17
TA2	6,3444	6,3384	-0,09	6,1608	6,1534	-0,12
TS3	7,7883	7,7824	-0,08	7,6802	7,6746	-0,07
TA3	9,0192	9,0125	-0,07	8,9734	8,9676	-0,06

Som tabellen ovenfor viser, gir ikke den nye måten å påføre brokassens egenvekt på noen dramatisk endring i egenfrekvensene. Den største endringen får man i den koblede svingeformen som oppstår et sted mellom 60 og 80 m/s mellom 2. vertikale, symmetriske svingeform og 1. symmetriske torsjonssvingeform. Man får her en maksimal reduksjon i egenfrekvensen på 1,09 %. I analysen uten last får man en maksimal reduksjon på 0,6 % for 1.symmetriske torsjonssvingeform.

7.2 Endring av formfaktorer i subrutinen

I FORTRAN-subrutinen fra Statens vegvesen er funksjonene for moment- og løftkoeffisient forenklet til rette linjer, mens dragkoeffisienten blir sett på som en konstant. I funksjonene for moment- og løftkoeffisientene er koeffisienten ved $\alpha=0$ grader satt lik den største koeffisienten fra tunnelforsøkene for α mellom -1,5 og 1,5 grader, og stigningstallet er satt lik det største stigningstallet for α mellom -6 og 6 grader. Dragkoeffisienten er satt lik den største som oppstår for α mellom -1,5 og 1,5 grader, se Figur 5-4. Funksjonene for formfaktorene brukt i analysefilene fra Statens vegvesen blir da som følger:

$$CD=0,738$$

$$CL(\alpha)=-0,321+3,38\alpha\cdot\pi/180$$

L 7-2

$$CM(\alpha)=0,023+1,15\alpha\cdot\pi/180$$

hvor α er gitt i grader.

For å få en bedre tilnærming til de virkelige formfaktorene som er funnet ved hjelp av tunnelforsøk (se *Figur 5-4*), kan man bruke et tilpasset 3.gradspolynom i stedet for en lineær funksjon. De tilpassede 3.gradspolynomene (funnet ved hjelp av MathCad, se [Appendiks C](#)) er som følger:

$$CD(\alpha) = 0,754 - 0,005341\alpha + 0,002183\alpha^2 - 0,00004861\alpha^3$$

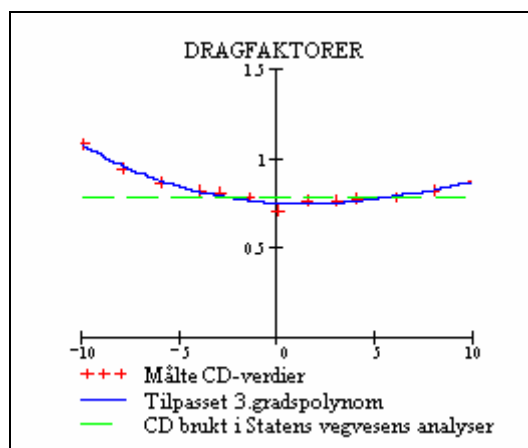
$$CL(\alpha) = -0,251 + 0,042\alpha - 0,000624\alpha^2 - 0,000004306\alpha^3$$

L 7-3

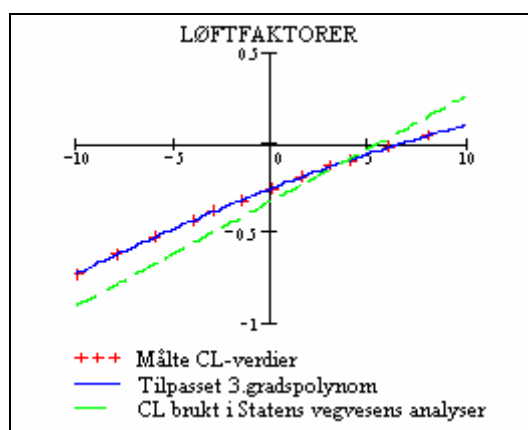
$$CM(\alpha) = 0,002383 + 0,013\alpha - 0,00009457\alpha^2 - 0,0000005606\alpha^3$$

Subrutinen med de nye formfaktorene er lagt ved som [Appendiks E](#).

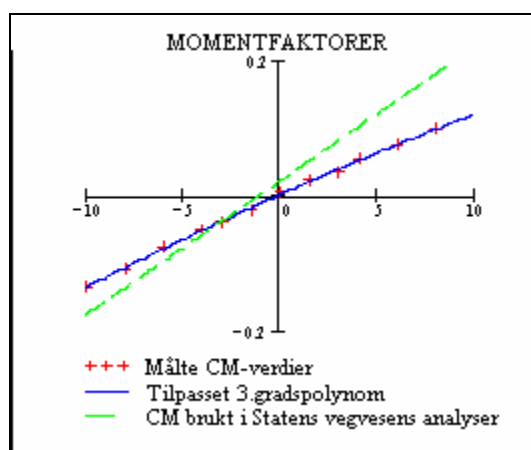
Figurene under sammenligner de virkelige formfaktorene fra vindtunnelforsøkene, formfaktorer som er brukt i Statens vegvesens analyser og formfaktorene som er brukt i de nye analysene.



Figur 7-3: Figuren viser målte dragkoeffisientverdier fra vindtunnelrapporten [14] (røde kryss), et tilpasset 3.gradspolynom for dragkoeffisientene (blå heltrukket linje) og dragkoeffisienter brukt i analysene fra Statens vegvesen (grønn stiplet linje).



Figur 7-4: Figuren viser målte løftkoeffisientverdier fra vindtunnelrapporten [14] (røde kryss), et tilpasset 3.gradspolynom for løftkoeffisientene (blå heltrukket linje) og løftkoeffisienter brukt i analysene fra Statens vegvesen. (grønn stiplet linje).

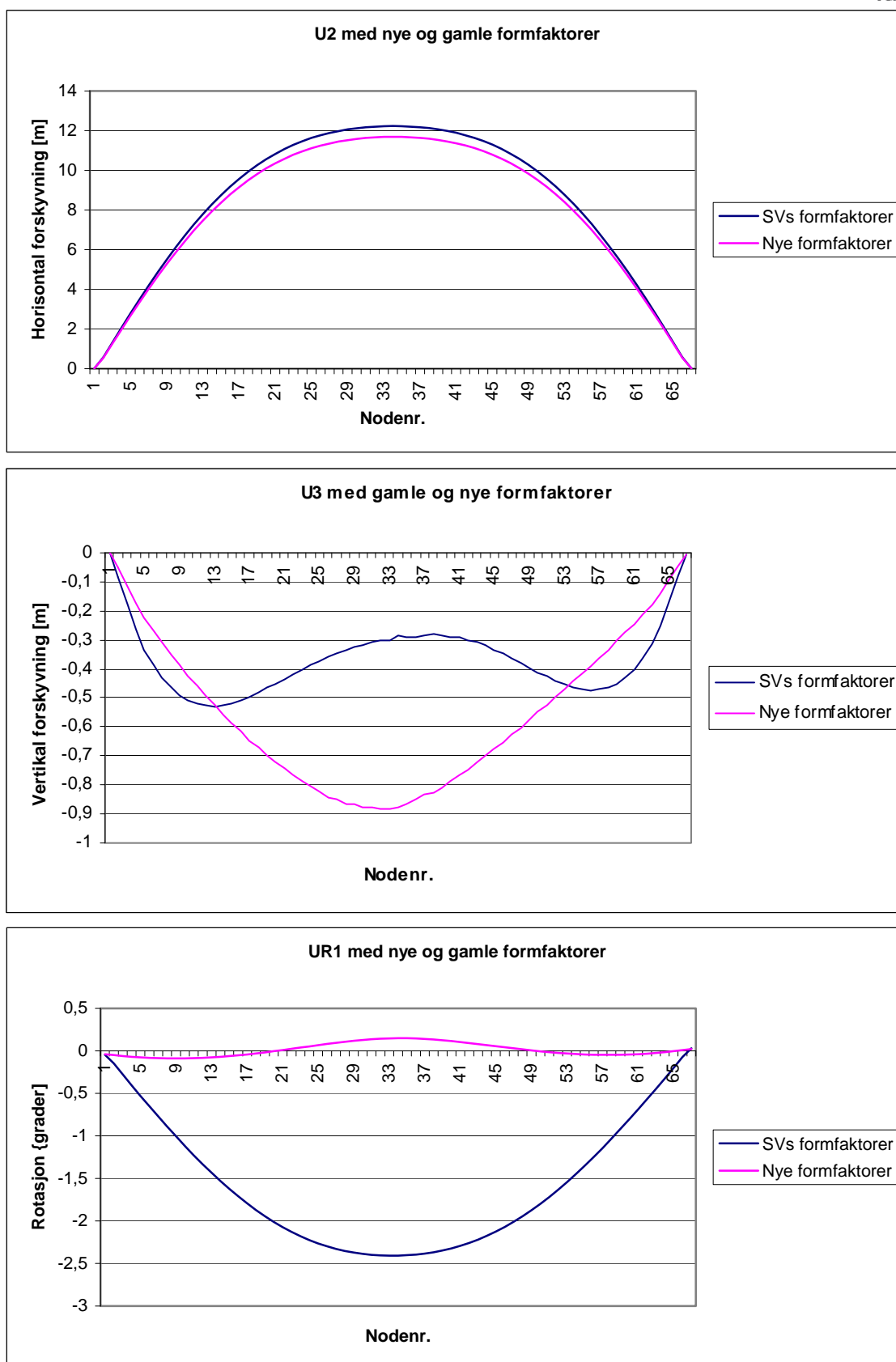


Figur 7-5: Figuren viser målte momentkoeffisientverdier fra vindtunnelrapporten [14] (røde kryss), et tilpasset 3.gradspolynom for momentkoeffisientene (blå heltrukket linje) og momentkoeffisienter brukt i analysene fra Statens vegvesen (grønn stiplet linje).

Man ser fra figurene ovenfor at 3.gradspolynomene i L 7-3 gir en mye bedre tilnærming til de virkelige formfaktorene (røde kryss) enn de lineære funksjonene som er brukt i de opprinnelige analysene fra Statens vegvesen (L 7-2).

Tabell 7-2: Tabellen viser forskyvningene i horisontal retning (på tvers av broen), i vertikal retning og rotasjon i midten av spennet, ved bruk av tilpassede 3.gradspolynomer for formfaktorene (Ny) og ved bruk av lineære funksjoner for formfaktorene (SV), se Figur 7-3 til Figur 7-5.

Vindhastighet [m/s]	Horisontal Forskyvning (Y) [m]			Vertikal Forskyvning (Z) [m]			Rotasjon (T) [grader]		
	SV	Ny	Endring [%]	SV	Ny	Endring [%]	SV	Ny	Endring [%]
40	3,270	3,205	-1,99	-0,355	-0,285	-19,72	0,234	0,016	-93,16
80	12,230	11,680	-4,50	-0,285	-0,875	207,02	2,408	0,150	-93,77
90	-	14,300	-	-	-1,025	-	-	0,260	-
100	-	16,990	-	-	-1,235	-	-	0,530	-
105	-	18,300	-	-	-1,405	-	-	0,760	-
110	-	19,550	-	-	-1,695	-	-	1,210	-



Figur 7-6: Figurene viser forskyvningene i horisontal retning (U2) og vertikal retning (U3) samt vridningsvinkel (UR1) langs hele brospennet, fra analysen med Statens vegvesens formfaktorer og med de nye formfaktorene (dvs. med 3.gradspolynomer) ved en vindhastighet på 80m/s.

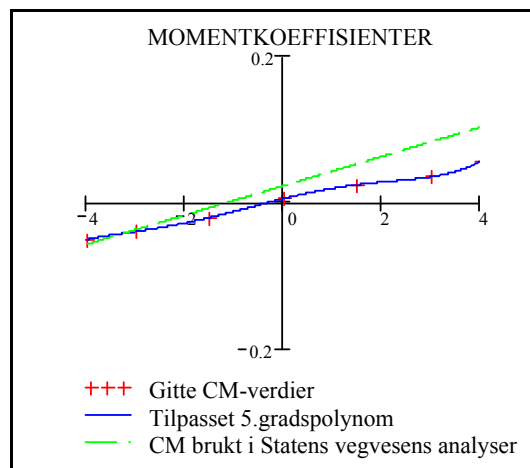
Tabell 7-2 og Figur 7-6 viser at de nye formfaktorene gir betydelige endringer i broens deformasjon. Dette var også ventet når man ser på de store avvikene mellom formfaktorkurvene i Figur 7-3 til Figur 7-5. De horisontale forskyvningene på tvers av broen er litt redusert på grunn av at de nye dragkoeffisientene ligger litt under de som er brukt av Statens vegvesen, se Figur 7-3. Man får i tillegg en dramatisk reduksjon i rotasjonsvinkelen på midten av spennet (-93,77 % ved en vindhastighet på 80m/s), siden de nye momentkoeffisientene er betraktelig lavere enn de brukt i de tidligere analysene, se Figur 7-5. Denne reduksjonen i brobanens vridningsvinkel fører til at man får en betydelig økning i den vertikale forskyvningen (ved store vindhastigheter), grunnet økte negative løftkrefter. Av Figur 7-4 ser det ved første øyeblikk ut som at man skal få mindre negativt løft, siden den nye kurven for løftkoeffisienten ligger over den gamle. Løftkoeffisienten stiger imidlertid raskt ved økende vinkel, og siden den nye vridningsvinkelen på midten av broen nå er betraktelig redusert (fra 2,41 til 0,15 grader ved $V=80\text{m/s}$), så vil det nå bli større negativt løft, og dermed større nedbøyning på broen.

Det er imidlertid viktig å merke seg at heller ikke 3.gradpolynomene gir en nøyaktig beskrivelse av formfaktorene. Dette er kanskje mest kritisk for polynomet som beskriver momentkoeffisientene, hvor man ser at koeffisientene for små vinkler (mellom ca -1,5 og 1,5 grader) vil bli litt mindre enn de målte koeffisientene. Ved 0 grader vil for eksempel beregnet CM bli 0,0024 i stedet for 0,007 (målt verdi).

Det er prøvd å tilpasse et 5.gradspolynom for momentkoeffisientene for vinkler mellom -4 og 4 grader (se Figur 7-7), for å se om dette kan gi en bedre tilnærming til de virkelige verdiene, og for å se om rotasjonsvinklene da blir større:

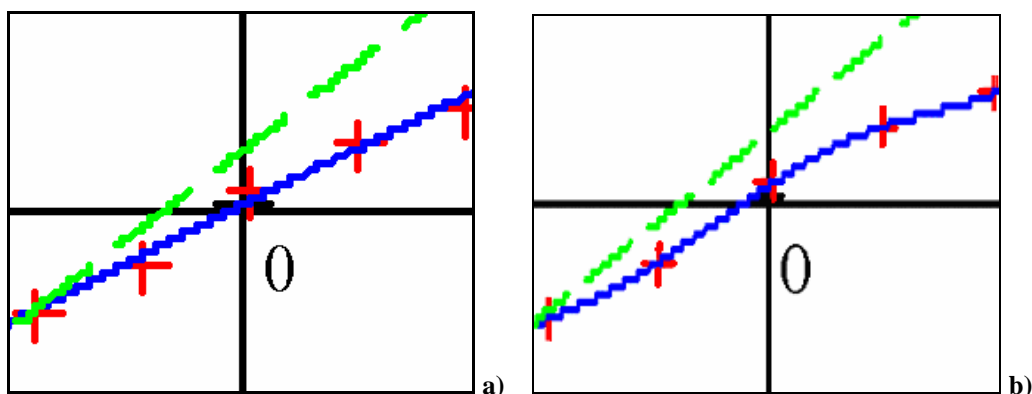
$$CM(\alpha) = 0,005189 + 0,017\alpha - 0,001673\alpha^2 - 0,000757\alpha^3 + 0,00009482\alpha^4 + 0,00003603\alpha^5$$

L 7-4



Figur 7-7: Figuren viser gitte momentkoeffisientverdier fra vindtunnelrapporten [14] (røde kryss), et tilpasset 5.gradspolynom for momentkoeffisientene for vinkler mellom -4 og 4 grader (blå heltrukket linje) og momentkoeffisienter brukt i analysene fra Statens vegvesen (grønn stiptet linje).

Figur 7-8 viser at 5.gradspolynomet (b) gir en bedre tilnærming for CM ved små vinkler enn 3.gradspolynomet (a).



Figur 7-8: Figurene viser et nærbilde av 3.gradspolynommet for momentkoeffisienten (a) og 5.gradspolynommet (b) for små vinkler. Man ser av disse at 5.gradspolynommet gir en bedre tilnærming i dette området enn 3.gradspolynommet.

Figuren over viser at 5.gradspolynommet for momentkoeffisientene gir en bedre tilnærming enn 3.gradspolynommet for små vinkler. Det er derfor også kjørt analyser hvor 3.gradspolynommet ble byttet ut med 5.gradspolynommet ved beregning av CM for vinkler mellom -4 og 4 grader. Resultatene fra disse analysene er oppsummert i tabellen under. **NB!** Det er imidlertid verdt å merke seg at også de målte formfaktorverdiene kan være unøyaktige, og at det dermed er sannsynlig at det likevel er 3.gradspolynommet som gir det mest korrekte bildet av momentkoeffisienten, da det gjerne er mer naturlig at denne følger en forholdsvis jevn kurve.

Tabell 7-3: Tabellen viser forskyvningene i horisontal retning (på tvers av broen), i vertikal retning og rotasjon i midten av spennet, ved bruk av bare tilpassede 3.gradspolynomer for formfaktorene (3.grad), med 5.gradspolynom for CM for α mellom -4 og 4 grader (5.grad), og ved bruk av lineære funksjoner for formfaktorene (SV), se Figur 7-3 til Figur 7-8.

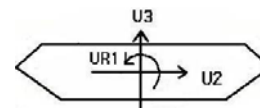
Vindhastighet [m/s]	Horisontal Forskyvning (Y) [m]			Vertikal Forskyvning (Z) [m]			Rotasjon (T) [grader]		
	SV	3.grad	5.grad	SV	3.grad	5.grad	SV	3.grad	5.grad
40	3,270	3,205	3,205	-0,355	-0,285	-0,285	0,234	0,016	0,017
80	12,230	11,680	11,710	-0,285	-0,875	-0,805	2,408	0,150	0,089*

*0,21 grader i 4.delspunkt.

7.2.1 Kontroll av resultater

For å kontrollere at påføringen av kreftene i subrutinen fungerer som tiltenkt, er det utført en kontroll ved å beregne kreftene som virker på alle elementene for hånd (se [Appendiks D](#)), for så å påføre disse i en VG-fil (inputfil som ikke krever subrutine). Det er da brukt 3.gradspolynom også for momentkoeffisientene. Vinklene som er brukt for å beregne koeffisientene er de siste vinklene som er skrevet i log-filen (ved hjelp av "write-funksjonen") fra analysen med subrutine (og nye formfaktorer). Forskyvningene midt i spennet fra analysen med FORTRAN-subrutinen og fra kontrollen er oppsummert i *Tabell 7-4*.

Tabell 7-4: Tabellen viser forskyvningene på midten av avstivningsbjelken (i node 34) beregnet med (V80) og uten (VG80) subrutine.

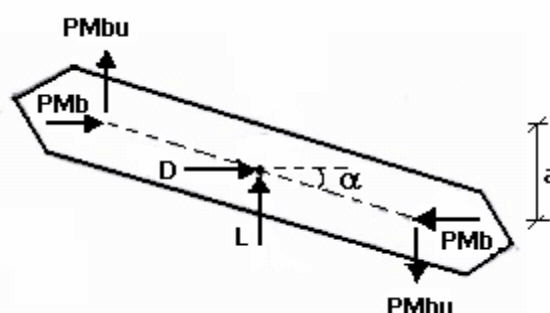


	Node	U1 [m]	U2 [m]	U3 [m]	UR1 [rad]	UR2 [rad]	UR3 [rad]
V80	34	0,2169	11,68	-0,875	2,6104E-03	4,4330E-04	2,8590E-05
VG80 (Kontroll)	34	0,2169	11,68	-0,875	2,6078E-03	4,4339E-04	2,8488E-05

Tabellen over viser at kontrollen (VG80) gir svært like deformasjoner som analysen med subrutinen (V80), hvilket betyr at FORTRAN-subrutinen påfører lastene som tiltenkt. De små ulikhetene kommer av at kreftene beregnet i [Appendiks D](#) er avrundet til hele tall ved påføring i VG-filen.

7.3 Subrutine som tar hensyn til stivhetsendringen knyttet til vridning

Fordelen med Kytes VG-filer (filene som ikke krever en subrutinefil) er at de ved beregning av egenfrekvenser som funksjon av middelvind tar hensyn til stivhetsendringen til konstruksjonen grunnet bevegelsesavhengige krefter ved beregning av egenfrekvensene. Dette ivaretas ved at den bevegelsesavhengige delen av momentet påføres som horisontale kraftpar. Når brobjelken roterer vil da momentarmen til kraftparet øke, noe som vil føre til økt rotasjon, som igjen fører til økt momentarm osv. Den bevegelsesuavhengige delen av momentet påføres som et vertikalt kraftpar, se *Figur 7-9*.



Figur 7-9: Figuren viser hvordan momentet deles opp i to kraftpar; et vertikalt par, PM_{bu} , som er den bevegelsesuavhengige delen av momentet og et horisontalt kraftpar, PM_b , som er den bevegelsesavhengige delen av momentet. Man ser at det horisontale kraftparets momentarm (a) vil øke ved økt rotasjon (α), noe som vil føre til økt rotasjon, som igjen fører til økt momentarm, osv.

Med denne lastpåføringen vil en stivhetsreduksjon pga. bevegelsesavhengig vridning være inkludert i en etterfølgende beregning av egenperioder ved at kraftparet inngår i den geometriske stivhetsmatrisen. En ytterligere rotasjon av tverrsnittet vil medføre at kraftparet får større momentarm, som igjen fører til en ytterligere rotasjon osv [1]. Denne effekten fanges opp av ABAQUS når momentet settes på som et horisontalt kraftpar i stedet for et vertikalt kraftpar (eller et konsentrert moment).

7.3.1 Analyse med stivhetsreduksjon og Statens vegvesens formfaktorer

I analysene fra Statens vegvesen var det bare VG-filene (filene som ikke krever subrutine) som tok hensyn til denne stivhetsreduksjonen, da *hele* momentet i FORTRAN-subrutinen var satt på som *vertikale* kraftpar. Det er her forsøkt å ta med denne effekten også i filene *med* subrutine, ved å lage en subrutine hvor momentet er delt i to deler, en bevegelsesavhengig og

bevegelsesuavhengig del, der den bevegelsesavhengige delen blir satt på som *horisontale kraftpar* (se [Appendiks F](#)). Disse resultatene blir så sammenlignet med resultatene fra Statens vegvesens analyser for å kontrollere at ønsket effekt er oppnådd (resultatene bør samsvare med *VG-filen*, siden denne inkluderer stivhetsreduksjon). I den nye subrutinen er derfor kreftene regnet ut på samme måte som i Statens vegvesens analyser, det vil si med *lineære funksjoner* for formfaktorene (se L 7-2).

Da blir den bevegelsesuavhengige delen av momentet:

$$M_{bu} = Q \cdot B^2 \cdot 0,023 - (Q \cdot H \cdot 0,738 \cdot 0,056m) \quad *)$$

$$PM_{bu} = \frac{M_{bu}}{14,5m}$$

*) Lastkoeffisientene fra vindtunnelforsøkene er målt i et punkt som ligger 1,9 meter fra undersiden av brokassen. ABAQUS-modellen er modellert i nøytralaksen, som ligger 1,956 meter fra undersiden. Ved lastpåføring i ABAQUS-modellen er det kompensert for dette avviket ved å påføre et moment tilsvarende dragkraftens eksentrisitet ($e = 1,956 - 1,9 = 0,056$ meter).

og den bevegelsesavhengige delen av momentet blir:

$$M_b = Q \cdot B^2 \cdot \alpha \cdot 1,15$$

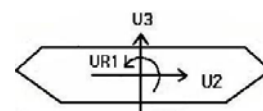
$$PM_b = \frac{M_b}{14,5m \cdot \alpha}$$

Hvor $Q = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2$ (ρ er luftens tetthet, V er middelvindhastigheten), α er vridningsvinkelen langs spennet i radianer og 14,5m er den horisontale avstanden mellom kreftene i kraftparet.

Tabell 7-5 viser at forskyvningene i midten av spennet, som ventet, blir tilnærmet like for de tre analysene;

- **SV, V80:** Statens vegvesens analyse med subrutine, tar ikke hensyn til stivhetsendringen. Vindhastighet = 80m/s.
- **SV, VG80:** Statens vegvesens analyse uten subrutine, tar hensyn til stivhetsendringen. Vindhastighet = 80m/s.
- **V80, ny subrutine:** analyse med ny subrutine som tar hensyn til stivhetsendringen. Vindhastighet = 80m/s.

Tabell 7-5: Tabellen viser forskyvningene i midten av spennet for de tre analysene beskrevet i avsnittet ovenfor.



	Node	U1 [m]	U2 [m]	U3 [m]	UR1 [rad]	UR2 [rad]	UR3 [rad]
SV, V80	34	0,1971	12,23	-0,285	-4,2021E-2	5,4850E-4	5,3061E-6
SV, VG80	34	0,1972	12,23	-0,285	-4,1689E-2	5,4858E-4	3,5001E-6
V80, ny subrutine	34	0,1974	12,22	-0,295	-4,1611E-2	5,1154E-4	5,9453E-6

Tabell 7-6 viser at den nye subrutinen gir tilfredsstillende resultater, da svingeperiodene fra den nye analysen er tilnærmet like de fra Statens vegvesens (Kytes) VG-fil. Det vil si at den nye subrutinen tar hensyn til stivhetsreduksjonen pga bevegelsesavhengige krefter ved beregning av svingeperioder, som tiltenkt.

Tabell 7-6: Tabellen viser svingeperiodene for Statens vegvesens (SV) analyser og resultatene fra analysen med den nye subrutinen. Den nye subrutine tar hensyn til stivhetsreduksjonen pga bevegelsesavhengig vridning, og gir dermed tilnærmet like svingeperioder som SVs VG-filer.

Svingemode	SV, V80		SV, VG80		V80, ny subrutine	
	Modenr.	Periode [s]	Modenr.	Periode [s]	Modenr.	Periode [s]
HS1	1	18,89	1	18,95	1	18,95
HS2	5	5,62	5	5,65	5	5,65
HS3	11	3,80	12	3,78	12	3,78
HA1	2	9,68	2	9,72	2	9,72
HA2	10	3,93	10	3,93	10	4,06
HA3	13	3,26	14	3,26	14	3,26
VS1	4	6,82	4	6,82	4	6,82
VS2	6	4,85	6/7	4,91/4,71	6/7	4,88/4,62
VS3	12	3,50	13	3,50	13	3,50
VA1	3	8,59	3	8,59	3	8,59
VA2	7	4,52	8	4,52	8	4,52
VA3	14	2,90	15	2,91	15	2,90
TS1	15	2,73	6/7	4,91/4,71	6/7	4,88/4,62
TS2	39	1,26	37	1,35	37	1,36
TS3	60	0,80	57	0,82	57	0,82
TA1	25	1,89	21	2,24	21	2,24
TA2	50	0,99	48	1,02	48	1,02
TA3	69	0,69	68	0,70	68	0,70

7.3.2 Analyse med stivhetsreduksjon og nye formfaktorer

Det er også gjennomført en analyse med *de nye formfaktorene* og momentpåføringen som tar hensyn til stivhetsendringen på grunn av det bevegelsesavhengige momentet (se Figur 7-9). Subrutinen er vedlagt som [Appendiks G](#).

Med de nye formfaktorene (se L 7-3 i Kap.7.2) blir den bevegelsesuavhengige delen av momentet:

$$M_{bu} = Q \cdot B^2 \cdot 0,002383 - Q \cdot H \cdot 0,754 \cdot 0,056m$$

$$PM_{bu} = \frac{M_{bu}}{14,5m}$$

og den bevegelsesavhengige delen av momentet blir:

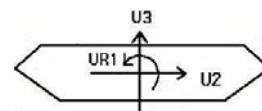
$$M_b = Q \cdot B^2 \cdot (CM(\alpha) - 0,002383) - Q \cdot H \cdot (CD(\alpha) - 0,754) \cdot 0,056m$$

$$PM_b = \frac{M_b}{14,5m \cdot \alpha}$$

Hvor $Q = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2$ (ρ er luftens tetthet, V er middelvindhastigheten), α er vridningsvinkelen langs spennet i radianer og 14,5m er den horisontale avstanden mellom kreftene i kraftparet.

Tabellen under viser at forskyvningene for de to lastpåføringsmetodene er tilnærmet like, noe som også er ventet siden den totale lasten som påføres er lik. Den lille endringen i vinklene kommer av den nye måten å påføre momentet på.

Tabell 7-7: Tabellen viser forskyvningene ved en vindhastighet på 80m/s ved bruk av nye formfaktorer (fra Kap.7.2), med og uten lastpåføringsmetoden som inkluderer stivhetsendring som følge av bevegelsesavhengige krefter.



	Node	U1 [m]	U2 [m]	U3 [m]	UR1 [rad]	UR2 [rad]	UR3 [rad]
Nye formfaktorer, uten stivhetsendring	34	0,2169	11,68	-0,875	2,6104E-3	4,4330E-4	2,8590E-5
Nye formfaktorer, inkl. stivhetsendring	34	0,2169	11,68	-0,875	2,7617E-3	4,4470E-4	2,8709E-5

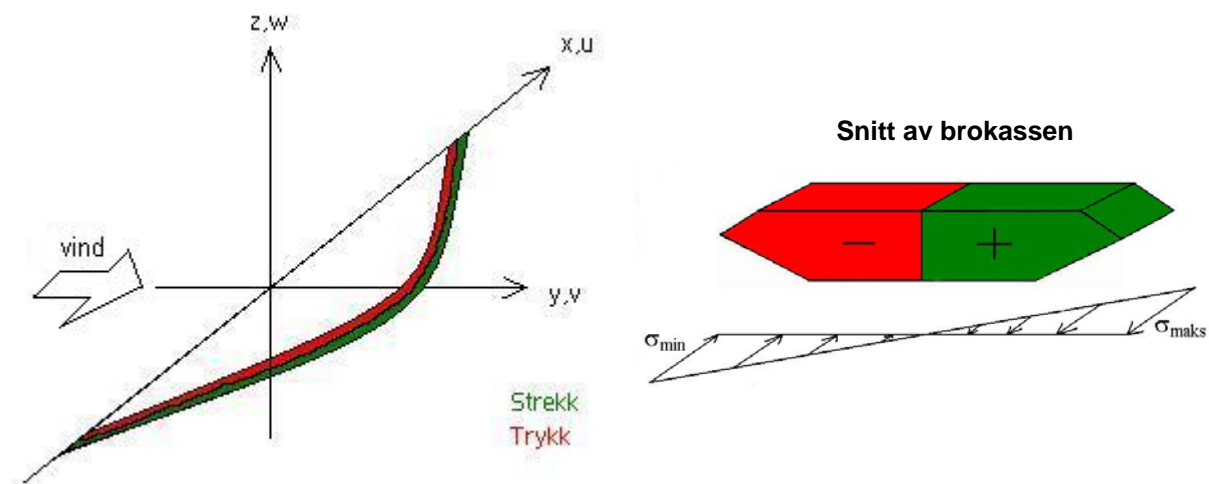
Tabell 7-8 viser de beregnede svingeperiodene (fra ABAQUS) beregnet med de nye formfaktorene fra Kap.7.2 for en vindhastighet på 80m/s. Tabellen viser svingeperiodene fra analysene med og uten lastpåføringsmetoden som tar hensyn til stivhetsreduksjonen på grunn av bevegelsesavhengige krefter. Man ser av tabellen at flere av svingeperiodene for horisontal svingning og torsjon er noe høyere i analysene som inkluderer stivhetsendringen. Dette var også ventet siden en redusert stivhet fører til redusert svingefrekvens ($\omega = \sqrt{k/m}$, hvor ω er svingefrekvens og k er stivhet), som igjen fører til økt periode ($T = 2\pi/\omega$).

Tabell 7-8: Tabellen viser svingeperiodene for Hardangerbrua ved en vindhastighet på 80m/s ved bruk av de nye formfaktorene (fra Kap.7.2), med og uten lastpåføringsmetoden som inkluderer stivhetsendring som følge av bevegelsesavhengige krefter.

	Nye formfaktorer, uten stivhetsendring		Nye formfaktorer, inkl. stivhetsendring	
	Modenr.	Periode [s]	Modenr.	Periode [s]
HS1	1	18,71	1	18,75
HS2	5	5,61	5	5,62
HS3	11	3,77	11	3,81
HA1	2	9,61	2	9,63
HA2	10	3,95	10	3,95
HA3	13	3,25	14	3,25
VS1	4	6,7	4	6,7
VS2	6	4,85	6	4,85
VS3	12	3,47	13	3,45
VA1	3	8,50	3	8,50
VA2	7	4,47	7	4,47
VA3	14	2,88	15	2,88
TS1	15	2,71	11	3,81
TS2	39	1,27	38	1,32
TS3	57	0,80	57	0,81
TA1	25	1,89	22	2,10
TA2	47	1,00	47	1,00
TA3	68	0,69	68	0,70

7.4 Tilleggsløft på grunn av horisontal bøyning

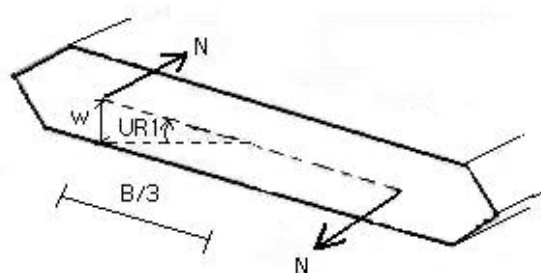
Som tidligere vist vil broen få relativt stor utbøyning sideveis. Dette vil føre til at brokassen vil komme i trykk på losiden og strekk på lesiden, som vist i figuren under.



Figur 7-10: Figuren viser hvordan en horisontal utbøyning av brobanen fører til at losiden av brokassen kommer i trykk, og lesiden av brokassen kommer i strekk.

De to delene av brobanen i figuren over kan sammenlignes med to aksialbelastede bjelker; en som er belastet med en trykkraft (rød del) og en som er belastet med en strekkraft (grønn del). En trykkbelastet bjelke vil få en redusert effektiv bøyestivhet, hvilket vil si at den vil få en større tverrforskyvning ved tverrlast enn en bjelke uten aksialtrykk. En strekkbelastet bjelke vil på samme måte få en økning i effektiv bøyestivhet og dermed en redusert deformasjon i tverrlastens retning.

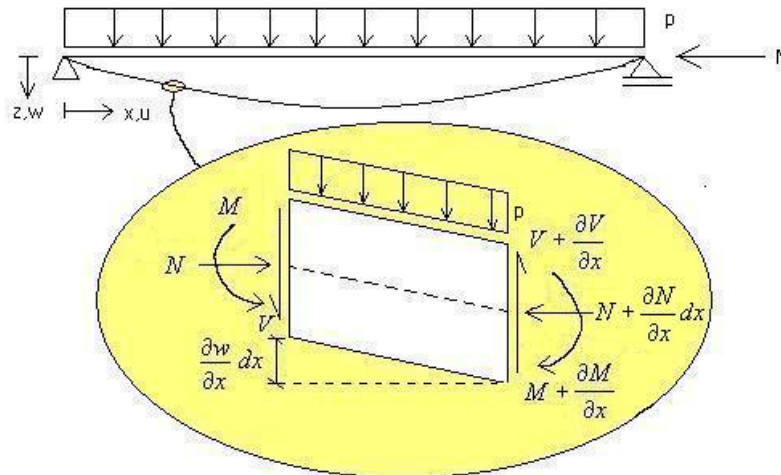
I tillegg til den horisontale utbøyningen i Figur 7-10 har brokassen en liten rotasjon (UR1), se Figur 7-11. På grunn av denne rotasjonen har de to aksialbelastede delene beskrevet ovenfor henholdsvis en liten forskyvning, w , oppover (trykkbelastet del) og nedover (strekkbelastet del).



Figur 7-11: Figuren viser at brobjelken får en vertikal forskyvning, w , på grunn av rotasjonen UR1. w er forskyvningen $B/3$ fra midten av brokassen., som er punktene hvor aksiallasten virker.

Den trykkbelastede delen av brobjelken (Figur 7-10) har allerede en liten forskyvning, w , oppover på grunn av rotasjonen. Som nevnt vil en trykkbelastet bjelke få en redusert bøyestivhet, noe som vil føre til en økt tverrdeformasjon. Siden bjelken allerede er løftet litt

opp er det naturlig at den vil bøyes ytterligere oppover ved en redusert bøyestivhet (på grunn av trykkraften, N). Dette kan ses på som et lite *tillegg i løftkraften*. Den strekkbelastede delen av brobjelken har en liten forskyvning, w , *nedover* på grunn av rotasjonen. Når denne får en økt bøyestivhet på grunn av strekkraften N , vil dette som nevnt resultere i en redusert nedbøyning. Dette kan også ses på som et tillegg i løftkraften. I praksis vil altså hele tverrsnittet få en liten *økning i løftkraften på grunn av den horisontale utbøyningen*. Denne effekten kan derfor inkluderes i analysene ved å beregne tilleggsløftet og påføre dette sammen med løftkraften fra vinden. Tilleggsløftet er beregnet i [Appendiks H](#) ved hjelp av formlene nedenfor.



Figur 7-12: Figuren viser kreftene som virker på et lite element i brobjelken.

Fra figuren over ser vi at likevekt i vertikal retning gir:

$$-V - p \cdot dx + (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = p \quad \text{L 7-5}$$

Momentlikevekt om høyre ende gir oss, når høyere ordens ledd neglisjeres, skjærkraften:

$$-V \cdot dx + N \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot dx - M_y + (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial x} \cdot dx) \Rightarrow V = N \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial x} \quad \text{L 7-6}$$

Derivering på begge sider gir

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (N \cdot \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} = \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + N \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} \quad \text{L 7-7}$$

Vi vet fra statikken at

$$M_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot EI \quad \text{L 7-8}$$

Ligning L 7-5, L 7-7 og L 7-8 gir at

$$\frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + N \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot EI = p \quad \text{L 7-9}$$

Dermed blir

$$-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} EI = p - \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - N \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{L 7-10}$$

hvor de to siste leddene på høyre side kan ses på som et tillegg i tverrlasten p på grunn av aksiallasten N .

For tilfellet i *Figur 7-10*, hvor aksiallasten skyldes horisontal utbøyning blir da tilleggsløftet på grunn av aksiallasten:

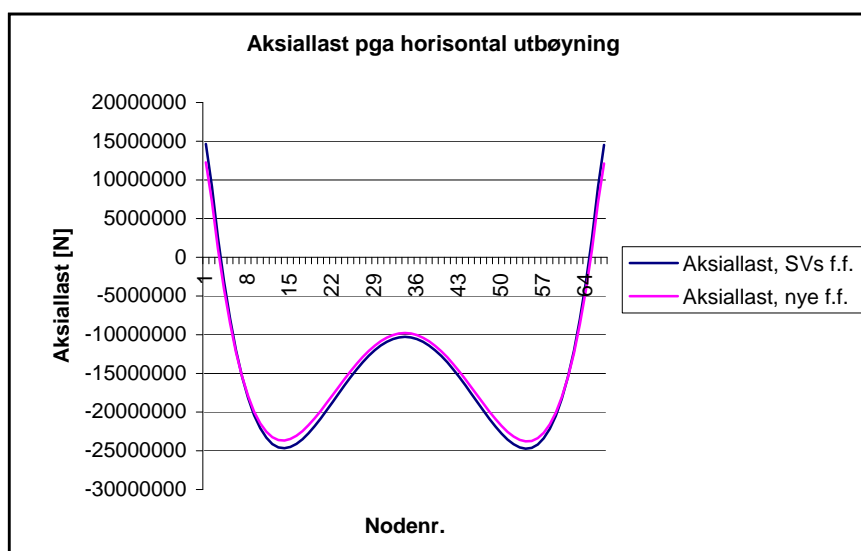
$$L_N = -\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - N \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{L 7-11}$$

hvor

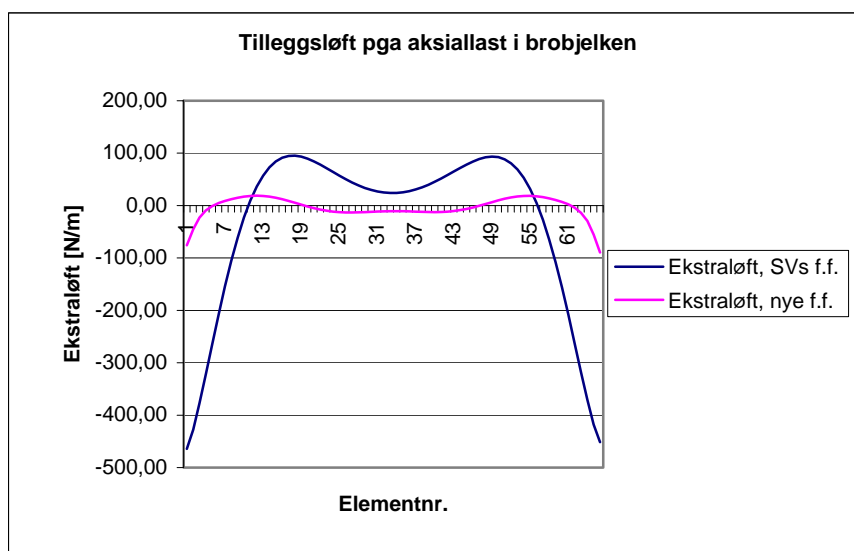
$$N = \frac{1}{2} \sigma_{\min} \cdot \frac{A}{2} \quad \sigma_{\min} = \frac{M_z}{I_z} \cdot \left(-\frac{B}{2}\right) \quad M_z = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E \cdot I_z \quad \text{L 7-12}$$

og A er brokassens tverrsnittsareal, B er brokassens bredde, v er forskyvning i **horisontal** retning, E og I_z er brokassens elastisitetsmodul og arealtreghetsmoment om z -aksen.

Figurene under viser de beregnede aksiallastene på grunn av den horisontale utbøyningen, samt tilleggsløftet på grunn av denne aksiallasten, ved en vindhastighet på 80m/s. Kreftene er beregnet både ved bruk av Statens vegvesens formfaktorer og med de nye formfaktorene (se Kap.7.2).

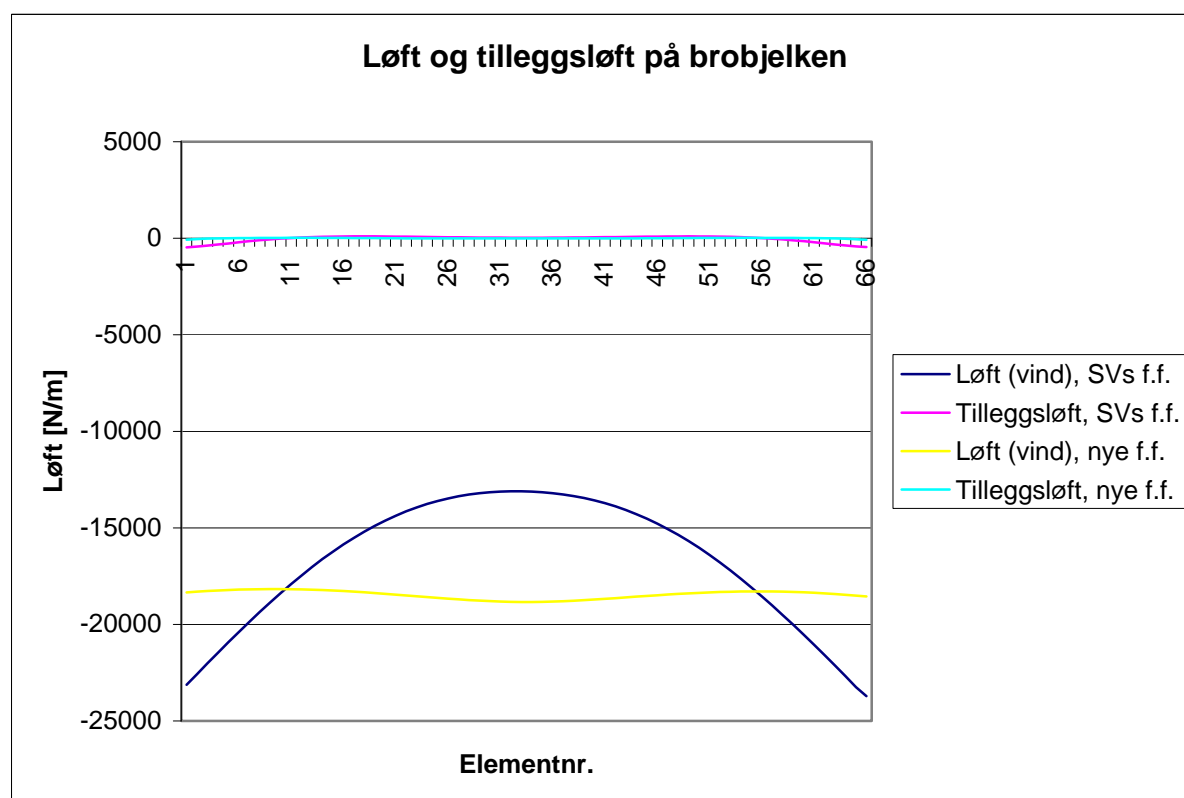


Figur 7-13: Figuren viser beregnet aksialkraft i lo side av brobjelken, pga den horisontale utbøyningen ved en vindhastighet på 80m/s. Kreftene er beregnet både ved bruk av Statens vegvesens formfaktorer og ved bruk av nye formfaktorverdier. Negativ aksiallast er trykk.



Figur 7-14: Figuren viser totalt beregnet tilleggsløft pga aksiallasten som virker i brobjelken, det vil si løft på trykksiden (lo side) + løft på strekksiden (le side) (= 2 ganger løftet i L 7-11). Løftet er beregnet med vegvesenets formfaktorer og med de nye formfaktorene, for en vindhastighet på 80m/s.

Figur 7-15 viser tilleggsløftet i figuren ovenfor sammenlignet med det opprinnelige løftet på grunn av vinden.



Figur 7-15: Figuren viser størrelsen på tilleggsløftet på grunn av aksiallasten i brobjelken, sammenlignet med løftet på grunn av vinden.

Man ser av figuren over at tilleggsløftet på grunn av aksiallasten blir ubetydelig lite i forhold til løftet på grunn av vinden. Ved bruk av vegvesenets formfaktorer utgjør tilleggsløftet på det

meste ca 2 % av vindløftet. Dette tilleggsløftet virker også for det meste gunstig på broens deformasjon, siden det opprinnelige løftet på grunn av vinden er negativt. Tilleggsløftet vil altså i dette tilfellet i praksis gi en ørliten reduksjon av det negative løftet fra vinden. Ved bruk av de nye formfaktorene utgjør tilleggsløftet maksimalt ca 0,5 % av løftet fra vinden. Tilleggsløftet viser seg altså å gi minimale endringer i broens deformasjon. Ved inkludering av tilleggsløftet i analysene i ABAQUS viser den vertikale deformasjonen på midten av broen seg i begge tilfeller (for nye og gamle formfaktorer) å være uendret (opp til 3. desimal).

8 Oppsummering og konklusjon

I denne oppgaven er statisk virkemåte av en hengebro under egenvekt og vindlast undersøkt. Grunnleggende dynamiske egenskaper i form av egenfrekvenser og svingeformer er også studert. Broens oppførsel under statisk vindlast er undersøkt basert på en elementmodell av Hardangerbrua, gjort tilgjengelig av Statens vegvesen. Det er i forbindelse med denne oppgaven utført en del endringer i Statens vegvesens analyser av Hardangerbrua, blant annet for å vurdere effekten av visse forenklinger som er gjort. De gjennomførte endringene viser seg å ha svært varierende grad av innvirkning på analysene; noen forårsaker minimale endringer i analyseresultatene, mens andre endringer har forårsaket drastiske endringer i resultatene.

Av den sistnevnte typen gjelder endringen i beregningen av formfaktorene som er brukt i analysene av Hardangerbrua. I Statens vegvesens analyser var formlene for beregning av formfaktorene som funksjon av vridningsvinkel forenklet til lineære funksjoner. Disse funksjonene var i tillegg relativt konservativt utledet, noe som gav formfaktorverdier (spesielt for moment og løft) som i ganske stor grad avviker fra de målte verdiene fra vindtunnelforsøkene. Disse lineære funksjonene ble her erstattet med 3.gradspolynom, som i langt større grad følger kurvaturen til de målte verdiene. Det er imidlertid viktig å understreke at avvikene mellom 3.gradspolynomene og de målte verdiene ikke alltid virker i konservativ retning, noe som i sær gjelder momentkoeffisientene ved små vinkler. Det vil si at mens Statens vegvesens analyser gir en temmelig konservativ beregning av lastene, så virker de nye analysene i noen tilfeller litt i *motsatt* retning. De nye analysene gav ved en vindhastighet på 80m/s en reduksjon i rotasjonsvinkelen på midten av spennet på ca 94 %, og en økning i den vertikale nedbøyningen på hele 207 %. Den nye beregningen basert på en bedre tilpassing til de målte formfaktorene gir altså betydelige endringer i resultatene.

De andre utførte endringene viste seg å ha langt mindre innvirkning på resultatene;

Det ble gjort en endring i påføringsmetoden av egenvekt for brokassen, hvor massetyngdepunktet ble flyttet fra 0,175 meter over skjærsenteret (SVs analyse) til 0,428 meter over skjærsenteret, som er hvor massetyngdepunktet virkelig ligger. Dette ble gjort for å undersøke om endringen av tyngdepunktets avstand til skjærsenteret påvirket svingefrekvensene til broen, da denne påføringsmetoden gir et større veltemoment for brokassen ved rotering om skjærsenteret (som igjen påvirker broens stivhet). Forenklingen med å plassere massen i nøytralaksen (som i SVs analyse) viste seg å ha liten påvirkning på svingefrekvensene. Den største endringen får man i den koblede svingeformen mellom 2. vertikale, symmetriske svingeform og 1. symmetriske torsjonssvingeform, for en vindhastighet på 80m/s, hvor man i den nye analysen får en maksimal reduksjon i egenfrekvensen på 1,09 %. I analysen uten vindlast får man en maksimal reduksjon på 0,6 %, for 1.symmetriske torsjonssvingeform.

Det ble forsøkt å inkludere virkningen bevegelsesavhengig rotasjon har på stivheten (og dermed svingefrekvensene) til konstruksjonen i subrutinen. Dette ble gjort ved å påføre momentet på samme måte som i filene uten subrutine, det vil si ved å påføre den bevegelsesavhengige delen av momentet som *horisontale* kraftpar i stedet for vertikale. Subrutinen tok da hensyn til stivhetsreduksjonen på grunn av vridning ved beregning av svingefrekvensene, slik at svingefrekvensene ble litt lavere (svingeperiodene ble litt større).

Ved horisontal utbøyning av brobjelken vil det oppstå et lite tilleggsløft på broen på grunn av aksiallastene som oppstår i brobjelken. Dette tilleggsløftet ble inkludert i en analyse for en vindhastighet på 80m/s, men det viste seg å være så lite at det hadde minimal/ingen innvirkning på broens deformasjoner.

Konklusjonen når det gjelder de undersøkte forenklingene som Statens vegvesen har gjort i sine analyser er altså at forenklingene av formfaktorene til lineære funksjoner kanskje gir unødvendig store avvik fra de målte verdiene, mens forenklingen ved påføringen av brokassens egenvekt ikke har noe nevneverdig innvirkning på resultatene. I dette tilfellet er dessuten ekstraløftet på grunn av aksiallasten som oppstår i brobjelken grunnet horisontal utbøyning svært lite i forhold til løftet på grunn av vinden.

Noe som kan være verdt å undersøke nærmere er asymmetrien i lastpåføringen. Denne asymmetrien kan enkelt ses i figurene som viser vertikal nedbøyning (se for eksempel *Figur 7-6*), og kommer sannsynligvis av at vinklene som er brukt ved beregning av formfaktorene er hentet fra den ene enden av elementene, i stedet for midt på. På denne måten vil det første elementet i brobjelken, element 1 (som går fra node 1-2), bli påført krefter beregnet ut fra vinkelen i node 1, som vil være tilnærmet lik 0, mens det siste elementet, element 66 (som går fra node 66-67), vil få krefter beregnet med vinkelen i node 66. Det kan derfor være interessant å forsøke å heller bruke *middelverdiene* av vinklene i nodene som elementene spenner mellom, og se hvilken innvirkning dette får på resultatene. Det ble dessverre ikke tid til å inkludere dette forsøket i denne oppgaven.

Når det gjelder håndberegningene av egenfrekvensene (med forenklede formler fra Bleich [6] og Steinman [7]) er de maksimale avvikene (11 %) såpass store at disse beregningene ikke bør brukes alene. Dette kommer nok i stor grad av at formlene ikke er utledet for en identisk brokasse som den som skal brukes i Hardangerbrua, men for en rektangulær brokasse. Som en kontroll av svingefrekvensene beregnet ved hjelp av et elementmetodeprogram fungerer imidlertid håndberegningene bra. Det er imidlertid viktig å understreke at det er fullt *mulig* å få mer nøyaktige resultater ved hjelp av håndberegning, blant annet ved en mer korrekt bruk av torsjonsstivhet, men at det i denne oppgaven er brukt mer forenklede formler.

9 Referanser

- [1] Hardangerbrua: ABAQUS bjelkemodell, Dynamisk analyse, Aleksander Kyte, Vegvesenet, 2006
- [2] www.rogerwendell.com/sanfrancisco.html
- [3] http://no.wikipedia.org/wiki/Bilde:Akashi_Bridge.JPG
- [4] <http://www.answers.com/topic/vancouver-skybridge-jpg>
- [5] ESDEP Lecture note, Lecture 15B.9: Suspension Bridges
- [6] Friedrich Bleich, "Analysis of vibration modes"
- [7] D.B. Steinman, "Modes and natural frequencies of suspension-bridge oscillations"
- [8] Emil Simiu og Toshio Miyata, "Design of buildings and bridges for wind", 2006, Wiley and sons
- [9] www.physics.brown.edu/.../waves/demo/3a6010.htm
- [10] Niels J. Gimsing, "Cable supported bridges, Concept and design, Second edition", 1997, John Wiley and sons
- [11] Tacoma Narrows Bridge, Washington State Department of Transportation, <http://www.wsdot.wa.gov/TNBhistory/Machine/machine3.htm>
- [12] Teknisk Ukeblad nr.2, 2007
- [13] Truc Huynh, "Suspension Bridge, Aerodynamics and Active Vibration Control", 2000, Aalborg University
- [14] Svend Ole Hansen ApS, "The Hardanger Bridge: Static and dynamic wind tunnel tests with a section model", Revision 1, 2006.
- [15] Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Volume 94, Issue 4, April 2006: A parametric study of the galloping stability of two-dimensional triangular cross-section bodies, http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6V3M-4J8D8TR-1&_user=1460901&_coverDate=04%2F30%2F2006&_rdoc=1&_fmt=&_orig=search&_sort=d&view=c&_acct=C000052797&_version=1&_urlVersion=0&_userid=1460901&md5=0f9388ee6c6add21ecb91ad6064b280
- [16] Erik Hjorth-Hansen, "Fluctuating drag, lift and overturning moment for a line like structure predicted (primarily) from static, mean loads", Universitetet i Trondheim, Norges tekniske høyskole

APPENDIKS A

EGENFREKVENSER OG SVINGEFORMER FOR HARDANGERBRUA

Egenfrekvensene er beregnet med forenklede formler fra Bleich og Steinman.

Data for brua/avstivningsbæreren:

Spennlengde: $l := 1310\text{m}$

Pilhøyde: $f := 12\text{m}$

E-modul: $E := 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

E-modul kabel: $E_c := 205000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Areal kabel: $A_c := 0.223\text{m}^2$

Treghetsmoment: $I := 9.9 \times 10^{11} \text{mm}^4$

Vekt av hovedspenn per meter:

$$w := \frac{17028 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot \text{g}}{1} \quad w = 1.275 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

Vertikal asymmetrisk svingning

n = antall halvølger svingeformen har. Her beregnes egenfrekvens og -periode når brua svinger med 2, 4 og 6 halvølger, det vil si hhv svingeformene VA-1, VA-2 og VA-3 i Abaqus-rapporten.)

Formler fra Bleich:

$$\lambda := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

$$\lambda = 1.196 \times 10^6 \text{ N}$$

$$H_w := \frac{w \cdot l^2}{f \cdot 8}$$

$$H_w = 2.26 \times 10^8 \text{ N}$$

Ligning 3.25:

$$\omega(n) := \frac{n \cdot \pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{g}{w} \cdot (H_w + n^2 \cdot \lambda)}$$

$$n := 2..6$$

$$\omega(n) := \frac{n \cdot \pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{g}{w} \cdot (Hw + n^2 \cdot \lambda)}$$

$$T(n) := \frac{2 \cdot \pi}{\omega(n)}$$

$\omega(2) = 0.639 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	$\omega(4) = 1.317 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	$\omega(6) = 2.07 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
$T(2) = 9.832\text{s}$	$T(4) = 4.77\text{s}$	$T(6) = 3.035\text{s}$

Formler fra D. B. Steinmans notat:

Formel 9:

$$K(n) := \frac{\pi^2 \cdot n^2}{l^2} \cdot Hw + \frac{\pi^4 \cdot n^4}{l^4} \cdot EI$$

$$\omega_S(n) := \sqrt{\frac{K(n)}{\frac{w}{g}}}$$

$$TS(n) := \frac{2\pi}{\omega_S(n)}$$

$\omega_S(2) = 0.639 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	$\omega_S(4) = 1.317 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	$\omega_S(6) = 2.07 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
$TS(2) = 9.832\text{s}$	$TS(4) = 4.77\text{s}$	$TS(6) = 3.035\text{s}$

Tabell 1: Sammenligning av vertikale asymmetriske egenfrekvenser/-perioder fra Abaqus, Alvsat, Bleich og Steinman

	VA-1		VA-2		VA-3	
	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]
Fra Abaqus:	0,691	9,09	1,326	4,74	2,071	3,03
Fra Alvsat:	0,685	9,17	1,340	4,69	2,101	2,99
Fra Bleich:	0,639	9,83	1,317	4,77	2,070	3,04
Avvik fra Abaqus	-7,53 %	8,13 %	-0,68 %	0,68 %	-0,05 %	0,03 %
Avvik fra Alvsat	-6,74 %	7,22 %	-1,69 %	1,71 %	-1,49 %	1,51 %
Fra Steinman:	0,639	9,83	1,317	4,77	2,070	3,04
Avvik fra Abaqus	-7,53 %	8,13 %	-0,68 %	0,68 %	-0,05 %	0,03 %
Avvik fra Alvsat	-6,74 %	7,22 %	-1,69 %	1,71 %	-1,49 %	1,51 %

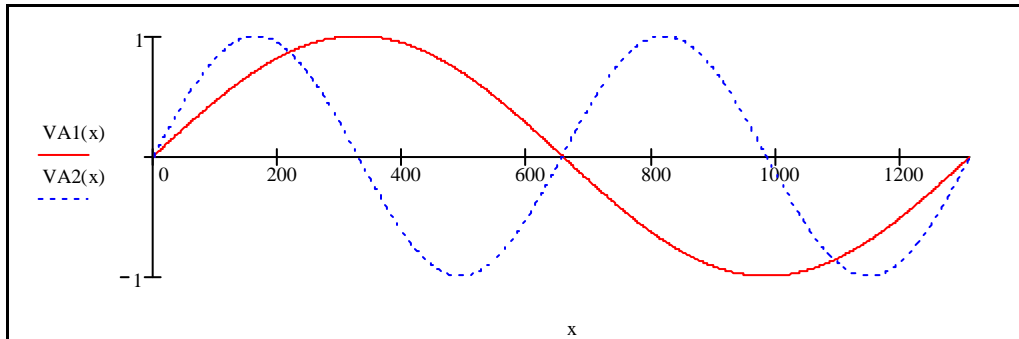
Formlene fra Bleich og D.B. Steinman var identiske for vertikal asymmetrisk svingform.

Asymmetriske vertikale svingeformer

Setter $y_0 := 1$

$$VA(x, \Omega) := y_0 \cdot \sin\left(\Omega \cdot \frac{x}{l}\right) \quad \Omega = 2\pi n, n=1, 2, \dots$$

$$VA1(x) := VA(x, 2 \cdot \pi \cdot 1) \quad VA2(x) := VA(x, 2 \cdot \pi \cdot 2)$$



Figur 1: Figuren viser 1. ($VA1(x)$) og 2. ($VA2(x)$) vertikale asymmetriske svingeform.

Vertikal symmetrisk svingning

Formler fra Bleich:

Frekvensligning (3.54):

$$A \cdot k + 9 \cdot B \cdot (k - A \cdot p) = 0$$

Hvor

$$A = s \cdot \omega^2 - Hw - \lambda$$

$$B = s \cdot \omega^2 - 9Hw - 81\lambda$$

$$s := \frac{w \cdot l^2}{\pi^2 \cdot g}$$

$$s = 2.26 \times 10^9 \text{ kg m}$$

$$k := \frac{32f}{\pi^3}$$

$$k = 124.878 \text{ m}$$

$$LE = \int \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 ds$$

eller tilnærmet:

$$LE = \Sigma \left(1 + \frac{8f^2}{1} \right) \sec^3 \cdot \gamma$$

Fra Abaqusrapport: $LE := 1339.2m$ (Se kontroll lenger nede)

$$p := \frac{\pi \cdot l}{16f} \cdot \frac{LE}{Ec \cdot Ac} \quad p = 6.227 \times 10^{-8} \frac{s^2}{kg}$$

Ved å substituere for A og B i ligning (3.54), hvor:

$$A(x) := s \cdot x^2 - Hw - \lambda$$

$$B(x) := (s \cdot x^2 - 9Hw - 81\lambda)$$

og x er egenfrekvensene får vi at:

$$A(x) \cdot k + 9 \cdot B(x) \cdot (k - A(x) \cdot p) \text{ solve, } x \rightarrow = \begin{pmatrix} 1.145 \\ -1.145 \\ 0.847 \\ -0.847 \end{pmatrix}$$

Da blir altså:

$$\omega_1 := 0.847 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \omega_2 := 1.145 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

For høyere symmetriske svingeformer ($n > 3$) brukes ligning (3.57):

$$\omega(n) := \sqrt{\frac{1}{s} \cdot \left(n^2 \cdot Hw + n^4 \cdot \lambda + \frac{k}{n^2 \cdot p} \right)}$$

$$\omega(5) = 1.693 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\omega_3 := \omega(5)$$

$$T_1 := \frac{2\pi}{\omega_1} \quad T_2 := \frac{2\pi}{\omega_2} \quad T_3 := \frac{2\pi}{\omega_3}$$

$\omega_1 = 0.847 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	$\omega_2 = 1.145 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	$\omega_3 = 1.693 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
$T_1 = 7.401s$	$T_2 = 5.483s$	$T_3 = 3.712s$

Formler fra D. B. Steinman:

$$L_s := LE$$

Formel 12 b:

$$C := \frac{512 \cdot f}{\pi^2} \cdot \frac{Ec \cdot Ac}{l^2 \cdot L_s}$$

$$C = 1.249 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\frac{C \cdot f}{l} = 1.153 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Formel 12 c:

$$\Sigma \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{C \cdot \frac{f}{1}}{K - K_n} \right) = 1 \quad n=1,3..$$

K_n er gitt fra formel 9, som gjelder for asymmetrisk svingning.

$$K_n = \left(K(n) := \frac{\pi^2 \cdot n^2}{l^2} \cdot Hw + \frac{\pi^4 \cdot n^4}{l^4} \cdot E \cdot I \right) \quad 9)$$

$$K(1) = 1.307 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$K(3) = 1.225 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$K(5) = 3.679 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Løsning av formel 12 c med $n=1$ og $n=3$:

$$\frac{1}{l^2} \cdot \frac{C \cdot \frac{f}{1}}{x - K(1)} + \frac{1}{l^2} \cdot \frac{C \cdot \frac{f}{1}}{x - K(3)} - 1 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1.705 \times 10^4 \\ 9.328 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Får at x_1 og $x_2 = K_1$ og $K_2 =$

$$\begin{pmatrix} 1.705 \times 10^4 \\ 9.328 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$K_{11} := 9328 \text{ Pa}$$

$$K_{21} := 17050 \text{ Pa}$$

$$\omega_{S11} := \sqrt{\frac{K_{11}}{\frac{w}{g}}}$$

$$\omega_{S21} := \sqrt{\frac{K_{21}}{\frac{w}{g}}}$$

$$\omega_{S11} = 0.847 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\omega_{S21} = 1.145 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$TS_{11} := \frac{2\pi}{\omega_{S11}}$$

$$TS_{21} := \frac{2\pi}{\omega_{S21}}$$

$$TS_{11} = 7.417 \text{ s}$$

$$TS_{21} = 5.486 \text{ s}$$

Løsning med $n=3$ og $n=5$ gir:

$$q(x) := \frac{1}{3^2} \cdot \frac{C \cdot \frac{f}{1}}{x - K(3)} + \frac{1}{5^2} \cdot \frac{C \cdot \frac{f}{1}}{x - K(5)} - 1$$

$$q(x) \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 3.728 \times 10^4 \\ 1.351 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Får at x_1 og $x_2 = K_{22}$ og $K_{32} =$

$$\begin{pmatrix} 3.728 \times 10^4 \\ 1.351 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$K_{22} := 13510 \text{ Pa}$$

$$K_{32} := 37280 \text{ Pa}$$

Da blir:

$$\omega_{S22} := \sqrt{\frac{K_{22}}{\frac{w}{g}}}$$

$$\omega_{S32} := \sqrt{\frac{K_{32}}{\frac{w}{g}}}$$

$$\omega_{S22} = 1.019 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\omega_{S32} = 1.694 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$TS_{22} := \frac{2\pi}{\omega_{S22}}$$

$$TS_{32} := \frac{2\pi}{\omega_{S32}}$$

$$TS_{22} = 6.163 \text{ s}$$

$$TS_{32} = 3.71 \text{ s}$$

Løsning med $n=1$, $n=3$ og $n=5$ gir:

$$p(y) := \frac{1}{1^2} \cdot \frac{C \cdot \frac{f}{1}}{y - K(1)} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{C \cdot \frac{f}{1}}{y - K(3)} + \frac{1}{5^2} \cdot \frac{C \cdot \frac{f}{1}}{y - K(5)} - 1$$

$$p(y) \text{ solve, } y \rightarrow = \begin{pmatrix} 3.752 \times 10^4 \\ 9.276 \times 10^3 \\ 1.683 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Dvs:

$$K_{13} := 9.276 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$K_{23} := 1.683 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$K_{33} := 3.752 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$\omega_{S13} := \sqrt{\frac{K_{13}}{\frac{w}{g}}}$$

$$\omega_{S23} := \sqrt{\frac{K_{23}}{\frac{w}{g}}}$$

$$\omega_{S33} := \sqrt{\frac{K_{33}}{\frac{w}{g}}}$$

$$\omega_{S13} = 0.847 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\omega_{S23} = 1.138 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\omega_{S33} = 1.699 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$TS_{13} := \frac{2\pi}{\omega_{S13}}$$

$$TS_{23} := \frac{2\pi}{\omega_{S23}}$$

$$TS_{33} := \frac{2\pi}{\omega_{S33}}$$

$$TS_{13} = 7.438 \text{ s}$$

$$TS_{23} = 5.522 \text{ s}$$

$$TS_{33} = 3.698 \text{ s}$$

$\omega_{S11} = 0.847 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	$\omega_{S23} = 1.138 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	$\omega_{S33} = 1.699 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
$TS_{11} = 7.417 \text{ s}$	$TS_{23} = 5.522 \text{ s}$	$TS_{33} = 3.698 \text{ s}$

Tabell 2: Sammenligning av vertikale symmetriske egenfrekvenser/-perioder fra Abaqus, Alvsat, Bleich og Steinman

	VS-1		VS-2		VS-3	
	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]
Fra Abaqus:	0,890	7,06	1,263	4,98	1,715	3,66
Fra Alvsat:	0,894	7,03	1,280	4,91	1,740	3,61
Fra Bleich:	0,849	7,40	1,146	5,48	1,693	3,71
Avvik fra Abaqus	-4,61 %	4,83 %	-9,26 %	10,10 %	-1,28 %	1,42 %
Avvik fra Alvsat	-5,01 %	5,28 %	-10,45 %	11,67 %	-2,73 %	2,83 %
Fra Steinman:	0,847	7,42	1,138	5,52	1,699	3,70
Avvik fra Abaqus	-4,83 %	5,06 %	-9,90 %	10,88 %	-0,93 %	1,04 %
Avvik fra Alvsat	-5,23 %	5,50 %	-11,07 %	12,46 %	-2,38 %	2,44 %

Kontroll av buelengde fra Abaqus:

$$r := -655\text{m}.. 655\text{m}$$

Vekt av kabel per meter:

$$w_c := 1834.39.81 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Horisontalkraft fra en fritt hengende kabel med vekt, w_c :

$$H_c := 3.224 \cdot 10^7 \text{N}$$

Lengde av kabel fra origo, som er bunnen av buen, til punktet r .

$$s(r) := \frac{H_c}{w_c} \cdot \sinh\left(\frac{w_c \cdot r}{H_c}\right)$$

Total lengde av buen blir da:

$$2s(655\text{m}) = 1.339 \times 10^3 \text{ m} \quad \text{OK}$$

Symmetriske vertikale svingeformer

Bruker ligning 3.53. i Appendix H (Bleich) som gir at

$$a_3 = \frac{A}{3B} \cdot a_1$$

Kontrollerer med formel 12d) fra Steinman:

$$n_a = \frac{1}{K - K_n}$$

som man kan finne de relative amplitudene fra.

NB! Dersom man f.eks. skal finne a_3 / a_1 , settes $n=3$ og $K_n=K(3)$, mens $K = K_1$ for å finne a_3 , og $n=1$, $K_n=K(1)$ og $K=K_1$ for å finne a_1 ..

1. symmetriske vertikale svingeform

Setter inn laveste egenfrekvensen fra Bleich for symmetrisk vertikal svingning i uttrykkene for A og B, og setter $a1=1$.

$$\omega_1 = 0.847 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$a11 := 1$$

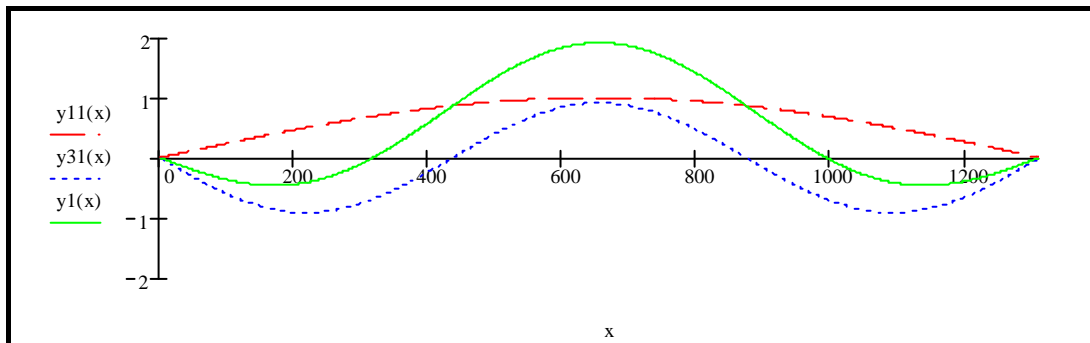
$$A(\omega_1) = 1.394 \times 10^9 \text{ N}$$

$$B(\omega_1) = -5.093 \times 10^8 \text{ N}$$

$$a31 := \frac{A(\omega_1)}{3 \cdot B(\omega_1)} \cdot a11 \quad a31 = -0.913$$

$$y11(x) := a11 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right) \quad y31(x) := a31 \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{1}\right)$$

$$y1(x) := y11(x) + y31(x)$$



Figur 2: Den heltrukne linjen viser 1. symmetriske svingeform, sammensatt av bidrag fra $n=1$ (stiplet linje) og $n=3$ (prikket linje).

Fra Abaqus:

$$\omega_{1A} = 0.89 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$a31A := \frac{A(\omega_{1A})}{3 \cdot B(\omega_{1A})} \cdot a11 \quad a31A = -1.53 \quad \text{Samme type svingeform som for Bleich, men den blå grafen (n=3) vil her ha større amplitude enn den røde (n=1)!}$$

Kontroll: Relative amplituder fra formel 12d) i Steinman:

$$a1 := \frac{1}{(K11 - K(1))}$$

$$a1 = 1.247 \times 10^{-4} \frac{\text{ms}^2}{\text{kg}}$$

$$a3 := \frac{1}{3 \cdot (K11 - K(3))}$$

$$a3 = -1.139 \times 10^{-4} \frac{\text{ms}^2}{\text{kg}}$$

$$\frac{a3}{a1} = -0.914$$

Ok, samme som fra Bleich

$$a5 := \frac{1}{5 \cdot (K11 - K(5))}$$

$$a5 = -7.283 \times 10^{-6} \frac{\text{ms}^2}{\text{kg}}$$

$$\frac{a5}{a1} = -0.058$$

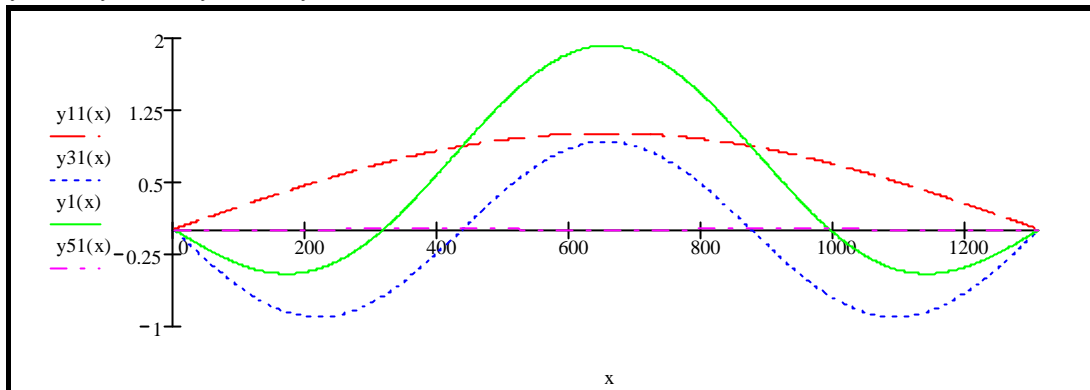
Inkluderer a5 og ser om dette påvirker svingeformen:

$$y11(x) := a11 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right)$$

$$y31(x) := a31 \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{1}\right)$$

$$y51(x) := a5 \cdot \sin\left(\frac{5 \cdot \pi \cdot x}{1}\right)$$

$$y1(x) := y11(x) + y31(x) + y51(x)$$



Figur 3: Den heltrukne linjen viser 1. symmetriske svingeform, sammensatt av bidrag fra $n=1$, $n=3$ og $n=5$.

Man ser at $a5$ ikke har noen stor innvirkning på svingeformen (ved sammenligning av figur 2 og 3).

2. symmetriske vertikale svingeform

Setter inn den andre egenfrekvensen for symmetrisk vertikal svingning fra Bleich i uttrykkene fra A og B, og setter $a1=1$.

$$A(\omega_2) = 2.736 \times 10^9 \text{ N}$$

$$B(\omega_2) = 8.324 \times 10^8 \text{ N}$$

$$\omega_2 = 1.145 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

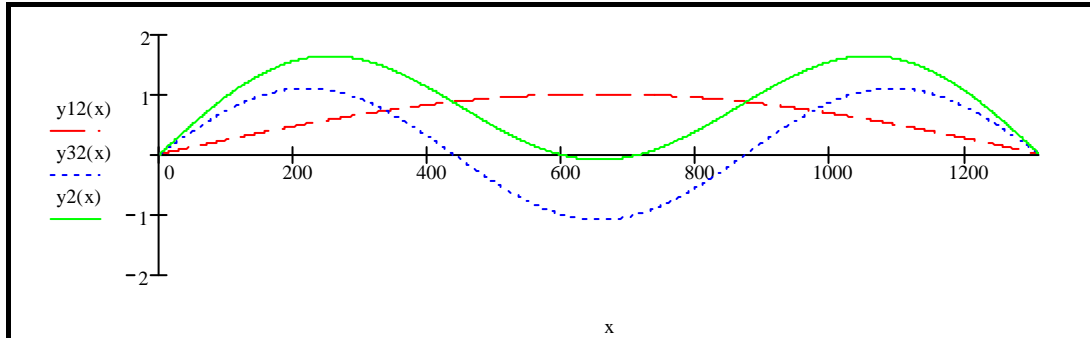
$$a1 := 1$$

$$a_{32} := \frac{A(\omega_2)}{3 \cdot B(\omega_2)} \cdot a_1 \quad a_{32} = 1.096$$

$$y_{12}(x) := a_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right)$$

$$y_{32}(x) := a_{32} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{1}\right)$$

$$y_2(x) := y_{12}(x) + y_{32}(x)$$



Figur 4: Den heltrukne linjen viser 2.symmetriske svingeform, sammensatt av bidrag fra $n=1$ og $n=3$.

Fra Abaqus:

$$a_{32A} := \frac{A(\omega_{2A})}{3 \cdot B(\omega_{2A})} \cdot a_1$$

$$a_{32A} = 0.764$$

NB! Kurven vil egentlig ikke svinge under "nullaksen", siden den prikkete linjen ($n=3$) da vil ha lavere amplitude enn den stiplede ($n=1$).

Kontroll: Relative amplituder fra formel 12d) i Steinman:

$$a_1 := \frac{1}{(K_{23} - K(1))}$$

$$a_1 = 6.442 \times 10^{-5} \frac{\text{ms}^2}{\text{kg}}$$

$$a_3 := \frac{1}{3 \cdot (K_{23} - K(3))}$$

$$a_3 = 7.285 \times 10^{-5} \frac{\text{ms}^2}{\text{kg}}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = 1.131$$

Ok, nesten samme som fra Bleich (1,096).

$$a_5 := \frac{1}{5(K_{23} - K(5))}$$

$$a_5 = -1.002 \times 10^{-5} \frac{\text{ms}^2}{\text{kg}}$$

$$\frac{a_5}{a_1} = -0.156$$

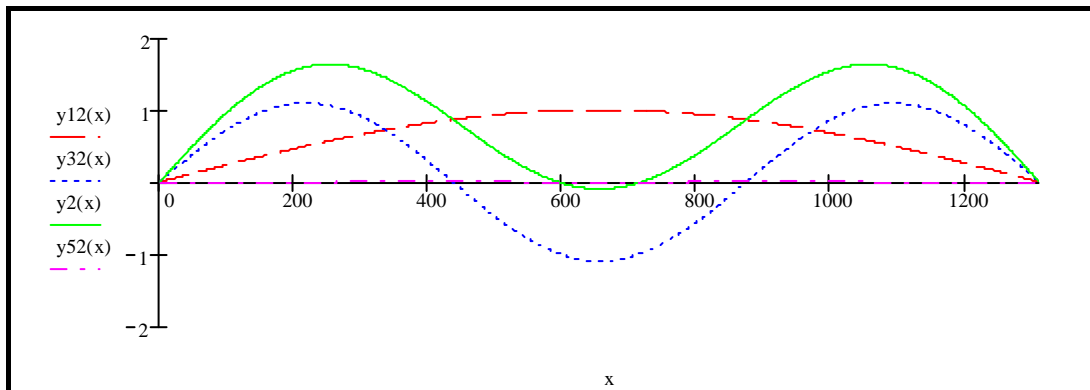
$$y_{12}(x) := a_{11} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right)$$

$$y_{32}(x) := a_{32} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{1}\right)$$

$$y_{52}(x) := a_{5} \cdot \sin\left(\frac{5 \cdot \pi \cdot x}{1}\right)$$

$$y_2(x) := y_{12}(x) + y_{32}(x) + y_{52}(x)$$

Inkluderer a_5 og ser om dette påvirker svingeformen:

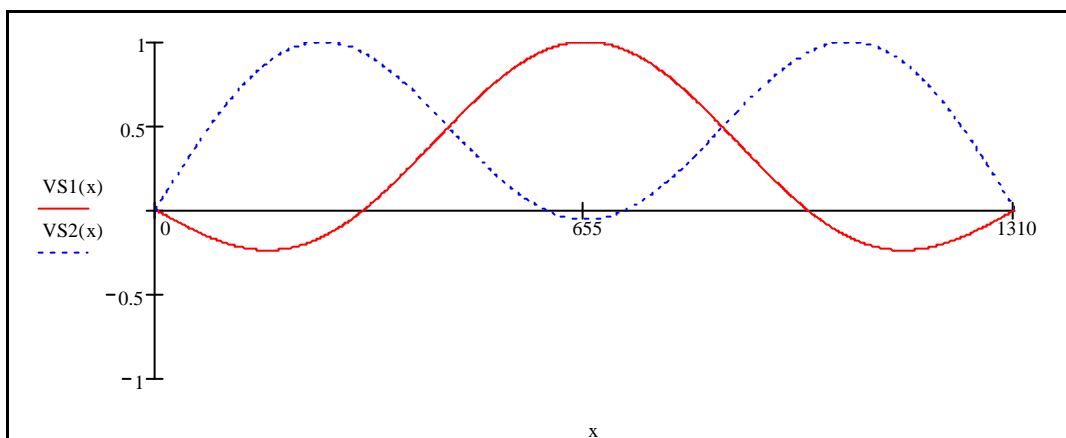


Figur 5: Den heltrukne linjen viser 2. vertikale symmetriske svingeform, sammensatt av bidrag fra $n=1$, $n=3$ og $n=5$.

Man ser at a_5 ikke har noen stor innvirkning på svingeformen (ved sammenligning av figur 4 og 5).

Skalerer svingeformene slik at største amplitude = 1,0:

$$VS1(x) := \frac{y_1(x)}{1.913} \quad VS2(x) := \frac{y_2(x)}{1.632}$$



Figur 6: 1. og 2. vertikale symmetriske svingeform for Hardangerbrua, skalert slik at største amplitude=1,0. Svingeformene er sammensatt av bidrag fra $n=1$, $n=3$ og $n=5$.

Symmetrisk torsjonssvingning

Fra Abaqusrapport:

Masse av hovedspenn:

$$m_h := \frac{17028000 \text{ kg}}{1310 \text{ m}} \quad m_h = 1.2998 \times 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Bredde av avstivningsbærer:

$$b := 18.3 \text{ m}$$

Massetregningsmoment for avstivningsbærer:

$$I_m := 430000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{m}}$$

$$r^2 = \frac{\sum m \cdot r^2}{\sum m} = \frac{I_m}{m_h} \quad r := \sqrt{\frac{I_m}{m_h}} \quad r = 5.7516 \text{ m}$$

$$\frac{b}{2r} = 1.5909$$

Fra Bleich, ch.5:

Høyde på brokasse: $d := 3.25 \text{ m}$

Avstand mellom kabler: $b_k := 14.5 \text{ m}$

Antar $\mu_v := 2 \cdot \sqrt{2}$ og $\mu_h := 2 \cdot \sqrt{2}$

Antar $t := 10 \text{ mm}$ en mellomting av topp (12mm) og bunn (8mm).

$$A_v := 1.09 \cdot t \cdot d \quad A_h := 1.09 \cdot t \cdot b$$

$$\beta := \frac{b_k \cdot d}{\left(\frac{\mu_v \cdot d^2}{A_v} \right) + \frac{\mu_h \cdot b^2}{A_h}}$$

$$R := \left(E \cdot \beta \cdot b_k \cdot d + H_w \cdot \frac{b_k^2}{4} \right) \cdot \frac{\pi^2}{2l} \quad R = 3.5891 \times 10^8 \text{ J}$$

$$I_h := t \cdot d \cdot \frac{b^2}{2} \quad I_v := t \cdot b \cdot \frac{d^2}{2}$$

$$I_h = 5.442 \text{ m}^4 \quad I_v = 0.9665 \text{ m}^4$$

Fra rapport: $I_h := 16.877 \text{ m}^4$ $I_v := 0.99 \text{ m}^4$

$$\varepsilon_v := \frac{b}{2} - \frac{\mu_v}{A_v} \cdot \beta \cdot d \quad \varepsilon_h := \frac{d}{2} - \frac{\mu_h}{A_h} \cdot \beta \cdot b$$

$$Y := I_v \cdot \varepsilon_v^2 + I_h \cdot \varepsilon_h^2$$

$$\Lambda := E \cdot Y \cdot \frac{\pi^4}{2l^3} \quad \Lambda = 2.4262 \times 10^5 \text{ J}$$

$$r_s := r$$

$$w_a := 9015 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot g$$

$$M := \frac{1}{g} \cdot \left(r_s^2 \cdot w_a + \frac{b k^2}{4} \cdot w_c \right) \quad M = 3.9467 \times 10^5 \text{ kg m}$$

$$s := M \cdot \frac{1}{4} \quad s = 1.2926 \times 10^8 \text{ kg m}^2$$

$$A(x) := s \cdot x^2 - \Lambda - R$$

$$J = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}^2}$$

$$B(x) := s \cdot x^2 - 81\Lambda - 9R \quad \text{Hvor } x = \omega$$

$$K := \frac{E_c \cdot A_c}{LE} \cdot \frac{64 f^2 \cdot b k^2}{\pi^2 \cdot l^2} \quad K = 3.9706 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$p(x) := B(x) \cdot (A(x) - K) - \frac{A(x) \cdot K}{9}$$

$$p(x) \text{ solve, } x \rightarrow = \begin{pmatrix} 5.0535 \\ -5.0535 \\ 2.4078 \\ -2.4078 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{t1} := 2.4078 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad T_{t1} := \frac{2\pi}{\omega_{t1}} \quad T_{t1} = 2.6095 \text{ s}$$

$$\omega_{t2} := 5.0535 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad T_{t2} := \frac{2\pi}{\omega_{t2}} \quad T_{t2} = 1.2433 \text{ s}$$

Tabell 3: Sammenligning av symmetriske torsjonseigenfrekvenser /-perioder fra Abaqus, Alvsat og Bleich

	TS-1		TS-2	
	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]
Fra Abaqus:	2,293	2,74	4,947	1,27
Fra Alvsat:	2,234	2,81	5,088	1,24
Fra Bleich:	2,408	2,61	5,054	1,24
Avvik fra Abaqus	5,02 %	-4,74 %	2,16 %	-2,13 %
Avvik fra Alvsat	7,79 %	-7,12 %	-0,67 %	0,65 %

Symmetriske torsjonssvingeformer

1. symmetriske torsjonssvingeform

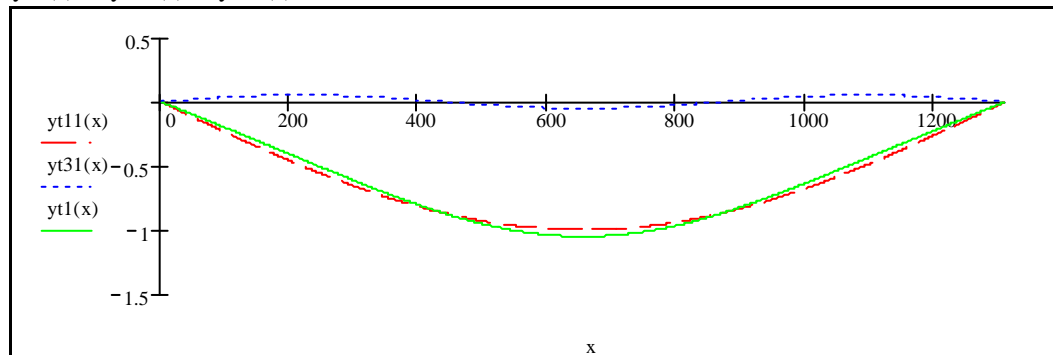
$$at1 := -1$$

$$at31 := \frac{A(\omega t1)}{3 \cdot B(\omega t1)} \cdot at1 \quad at31 = 0.052$$

$$\frac{at31}{at1} = -0.052$$

$$yt11(x) := at1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right) \quad yt31(x) := at31 \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{1}\right)$$

$$yt1(x) := yt11(x) + yt31(x)$$



Figur 7: Den heltrukne linjen viser 1. symmetriske torsjonssvingeform, denne er sammensatt av bidrag fra $n=1$ (stiplet linje) og $n=3$ (prikket linje)

2. symmetriske torsjonssvingeform

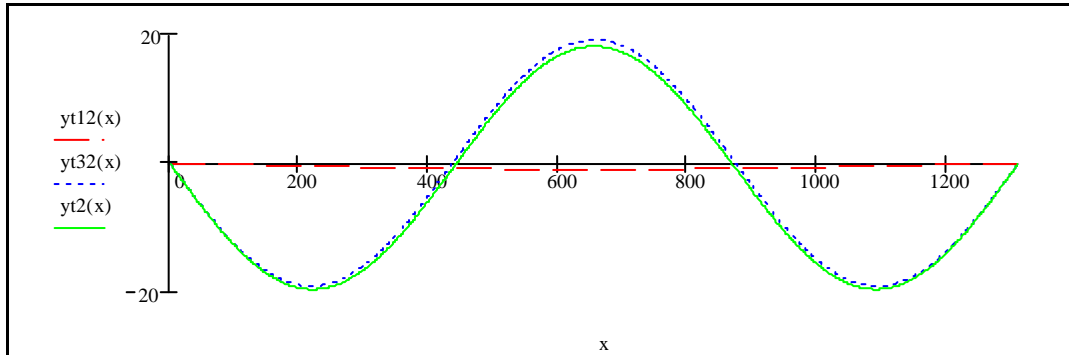
$$\text{Setter } at1 := -1.0$$

$$at32 := \frac{A(\omega t2)}{3 \cdot B(\omega t2)} \cdot at1 \quad at32 = -19.2025$$

$$\frac{at32}{at1} = 19.2025$$

$$yt12(x) := at1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{1}\right) \quad yt32(x) := at32 \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{1}\right)$$

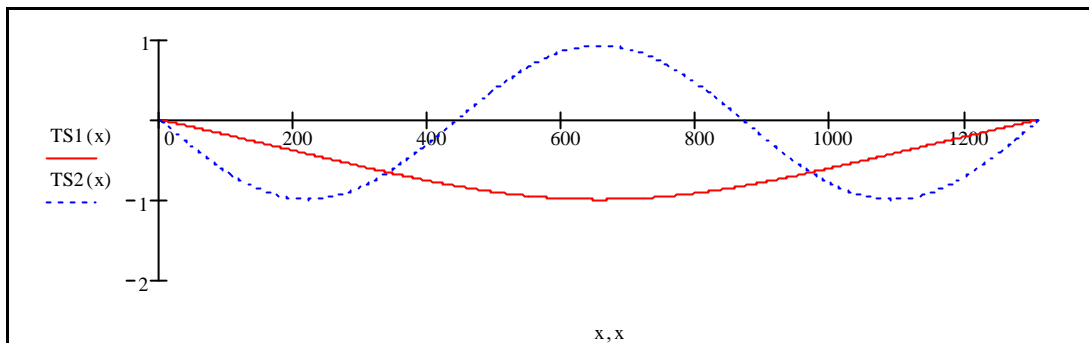
$$yt2(x) := yt12(x) + yt32(x)$$



Figur 8: Den heltrukne linjen viser 2. symmetriske torsjonssvingform, denne er sammensatt av bidrag fra $n=1$ (stiplet linje) og $n=3$ (prikket linje)

Skalerer svingeformene slik at største svingeamplitude er lik 1,0:

$$TS1(x) := \frac{yt1(x)}{1.0516} \quad TS2(x) := \frac{yt2(x)}{19.703}$$



Figur 9: 1. og 2. symmetriske torsjonssvingform for Hardangerbrua

Asymmetrisk torsjonssvingning

Fra Bleich

$$\omega_{t1B} := \sqrt{\frac{2^2}{s} \cdot (2^2 \cdot \Lambda + R)} \quad \omega_{t1B} = 3.3372 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (5.31)$$

$$Tt1B := \frac{2\pi}{\omega_{t1B}} \quad Tt1B = 1.8828\text{s}$$

$$\omega_{t2B} := \sqrt{\frac{4^2}{s} \cdot (4^2 \cdot \Lambda + R)} \quad \omega_{t2B} = 6.7014 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (5.31)$$

$$Tt2B := \frac{2\pi}{\omega_{t2B}} \quad Tt2B = 0.9376\text{s}$$

Tabell 4: Sammenligning av asymmetriske torsjonseigenfrekvenser /-perioder fra Abaqus, Alvsat og Bleich

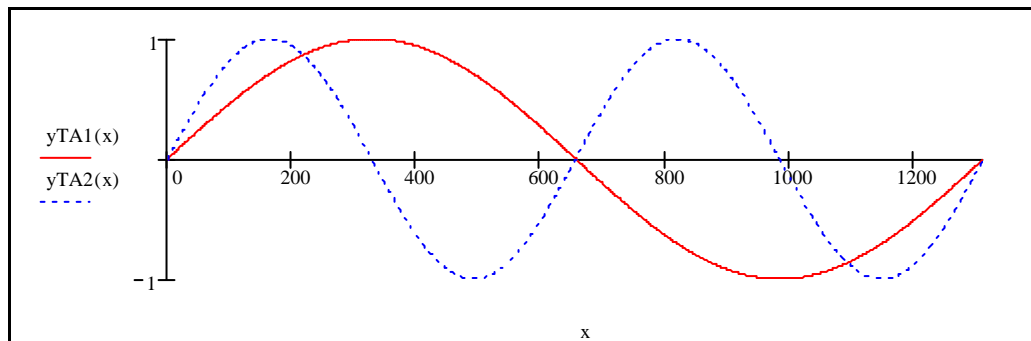
	TA-1		TA-2	
	ω [rad/s]	T [s]	ω [rad/s]	T [s]
Fra Abaqus:	3,290	1,91	6,347	0,99
Fra Alvsat:	3,355	1,87	6,712	0,93
Fra Bleich:	3,337	1,88	6,701	0,94
Avvik fra Abaqus	1,43 %	-1,41 %	5,58 %	-5,25 %
Avvik fra Alvsat	-0,54 %	0,53 %	-0,16 %	0,64 %

Asymmetriske torsjonssvingformer

Setter $y_0 := 1$

$$y_{TA}(x, \Omega) := y_0 \cdot \sin\left(\Omega \cdot \frac{x}{l}\right) \quad \Omega = 2\pi n, n=1, 2, \dots$$

$$y_{TA1}(x) := y_{TA}(x, 2 \cdot \pi \cdot 1) \quad y_{TA2}(x) := y_{TA}(x, 2 \cdot \pi \cdot 2)$$



Figur 10: 1. og 2. asymmetriske torsjonssvingform for Hardangerbrua

APPENDIKS B

SAMMENLIGNING AV KJEDELINJE OG PARABEL

Newton: $N := \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Horisontal strekkkomponent, H:

Beregner først vertikal komponent, V, som går ned i tårnene:

Masse av en hovedkabel: $mh := \frac{4913000}{2} \text{kg}$

$V := \frac{mh \cdot g}{2}$ $V = 1.205 \times 10^7 \text{ N}$

Antar at hovedspennet har vinkel: $\alpha := 20.485 \text{deg}$

Denne vinkelen er funnet ved prøving for å få grafen $y(x)=121\text{m}$ for $x = +/- 655\text{m}$

Da blir $H := \frac{V}{\tan(\alpha)}$ $H = 3.224 \times 10^7 \text{ N}$

Vekt per lengdeenhet kabel:

$w := 1834.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot g$ $w = 1.799 \times 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$

$x := -655\text{m}.. 655\text{m}$

Kjedelinjeligning:

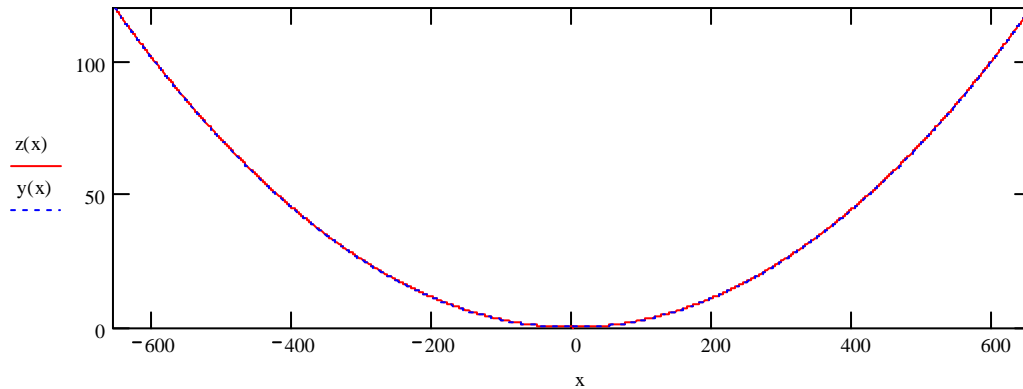
$$y(x) := \frac{H}{2 \cdot w} \cdot \left[e^{\left(\frac{w \cdot x}{H} \right)} + e^{\left(-\frac{w \cdot x}{H} \right)} - 2 \right]$$

Parabel:

Ligningen for en parabel er $z(x)=Ax^2+Bx+C$

Denne må tilfredsstillere kravene $z(0)=0$, $z'(0)=0$ og $z(655)=121$. Får da at $B=0$, $C=0$ og $A=0,000282$, dvs:

$z(x) := 0.000282x^2$



Figur 1: Sammenligning av kjedelinje, $y(x)$, og parabel, $z(x)$, for en kabel med spenn 1310m, pilhøyde 121m og masse 1834,3kg/m. Det er liten forskjell på de to kurvene i dette tilfellet siden kabelen har relativt liten "sag". Det er lettere å se forskjellen i neste eksempel.

Kontroll:

Setter

$$x := 0\text{m}$$

Da blir

$$y(x) = 0\text{m}$$

$$z(x) = 0\text{m}^2$$

$$x := 655\text{m}$$

$$y(x) = 121.019\text{m}$$

$$z(x) = 120.985\text{m}^2$$

Sammenligning av kjedelinje og parabel ved større "sag"

Det er enklere å se forskjellen på en parabel og en kjedelinje ved større sag. Se figur 2.

Horisontal strekkkomponent, H:

Beregner først vertikal komponent, V, som går ned i tårnene:

$$\text{Masse av en hovedkabel: } mh := \frac{4913000}{2}\text{kg}$$

$$V := \frac{mh \cdot g}{2} \quad V = 1.205 \times 10^7 \text{ N}$$

Velger en stor vinkel som gir mye større sag enn i eksempelet ovenfor, for å se om forskjellen mellom kjedelinjen og parabelen kommer bedre frem.

$$\text{Velger: } \alpha := 70\text{deg}$$

$$\text{Da blir: } H := \frac{V}{\tan(\alpha)} \quad H = 4.384 \times 10^6 \text{ N}$$

$$\text{Vekt per lengdeenhet kabel: } w := 1834.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot g \quad w = 1.799 \times 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$x := -655\text{m}.. 655\text{m}$

Kjedelinjeligning:

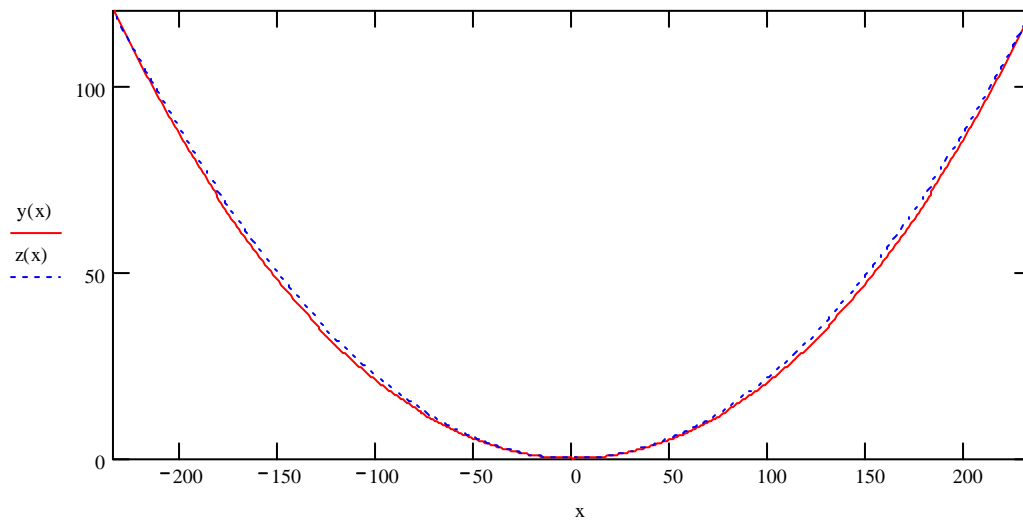
$$y(x) := \frac{H}{2 \cdot w} \cdot \left[e^{\left(\frac{w \cdot x}{H} \right)} + e^{\left(-\frac{w \cdot x}{H} \right)} - 2 \right]$$

Parabel:

Ligningen for en parabel er $z(x) = Ax^2 + Bx + C$

For å tilpasse parabelen til kjedelinjen finnes et punkt i kjedeligningen (ved hjelp av "trace"), som f.eks at $y(235) = 122,21$. Parabelligningen må da tilfredsstillere kravene $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$ og $z(235) = 122,21$. Får da at $B = 0$, $C = 0$ og $A = 0,002213$, dvs:

$$z(x) := 0.002213x^2$$



Figur 2: Sammenligning av en kjedelinje, $y(x)$, og en parabel, $z(x)$, for en kabel med større sag enn i figur 1. Det er lettere å se forskjellen på de to kurvene i dette tilfellet.

APPENDIKS C

BEREGNING AV FORMFAKTORER FOR HARDANGERBRUA

En del formfaktorer er funnet ved hjelp av vindtunnelforsøk, og er hentet fra vindtunnelrapporten [14]. Disse formfaktorene er oppsummert i matrisen "data" under.

GITTE FORMFAKTORER FRA VINDTUNNELTESTINGEN [14]:

(Dataene gjelder for når gang-/sykkelstien er nedstrøms (på le side) og inkluderer virvelreduksjonsanretninger.)

α	CD	CL	CM
-10	1.086	-0.735	-0.137
-8	0.943	-0.619	-0.108
-6	0.866	-0.522	-0.076
-4	0.822	-0.437	-0.051
-3	0.814	-0.378	-0.039
-1.5	0.783	-0.321	-0.022
0.0	0.704	-0.250	0.007
1.5	0.761	-0.190	0.023
3	0.768	-0.128	0.036
4	0.777	-0.092	0.056
6	0.780	-0.022	0.076
8	0.818	0.047	0.101
10	0.877	0.102	0.122

data := csort(data, 0)

Innfallsvinkel: $\alpha := \text{data} \langle 0 \rangle$

Dragkoeffisienter: $\text{CD} := \text{data} \langle 1 \rangle$

Løftkoeffisienter: $\text{CL} := \text{data} \langle 2 \rangle$

Momentkoeffisienter: $\text{CM} := \text{data} \langle 3 \rangle$

TILPASSING AV 3.GRADSPOLYNOMER FOR FORMFAKTORENE CD, CL og CM

Her tilpasses 3.gradspolynomer for de gitte verdiene av formfaktorene fra matrisen "data" ved hjelp av funksjonen *regress*.

Funksjonen "regress" gir en vektor hvor de tre første elementene (z_0 til z_2) er verdier som brukes av interp-funksjonen, mens *de resterende elementene* (z_3 til z_6) er konstantene i det tilpassede polynomet.

Tilpasset 3.gradspolynom for dragkoeffisienten:

Tilpasser et polynom til verdiene gitt i matrisen "data". Prøver med et 3.gradspolynom, dvs $k := 3$

$z := \text{regress}(\alpha, CD, k)$

$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0.754 \\ -5.341 \times 10^{-3} \\ 2.183 \times 10^{-3} \\ -4.861 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Det vil si at det tilpassede 3.gradspolynomet for dragkoeffisienten er:

$$CD_{tp}(v) := z_3 + z_4 v + z_5 v^2 + z_6 v^3$$

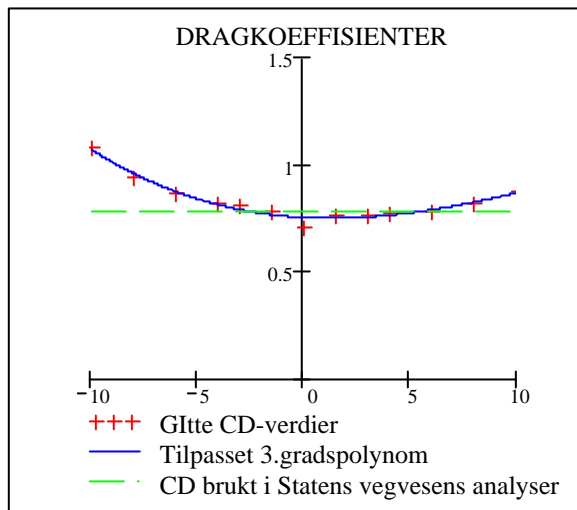
hvor

$$z_3 = 0.754 \quad z_4 = -5.341 \times 10^{-3} \quad z_5 = 2.183 \times 10^{-3} \quad z_6 = -4.861 \times 10^{-5}$$

og v er innfallsvinkelen (α).

I analysene fra Statens vegvesen antas CD å være konstant:

$CD_{ab} := 0.783$



$$\frac{\sum (CD_{tp}(\alpha) - \text{mean}(CD))^2}{\sum (CD - \text{mean}(CD))^2} = 0.96$$

Figur 1: Figuren viser gitte dragkoeffisientverdier fra vindtunnelrapporten [14] (røde kryss), et tilpasset 3.gradspolynom for dragkoeffisientene (blå heltrukket linje) og dragkoeffisienter brukt i analysene til Statens vegvesen (grønn stiplet linje).

Tilpasset 3.gradspolynom for løftkoeffisienten:

Tilpasser et polynom til verdiene gitt i matrisen "data". Prøver med et 3.gradspolynom, dvs $k := 3$

$z := \text{regress}(\alpha, CL, k)$

$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -0.251 \\ 0.042 \\ -6.24 \times 10^{-4} \\ -4.306 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Det vil si at det tilpassede 3.grads-polynomet for løftkoeffisienten er:

$$CL_{tp}(v) := z_3 + z_4 v + z_5 v^2 + z_6 v^3$$

hvor

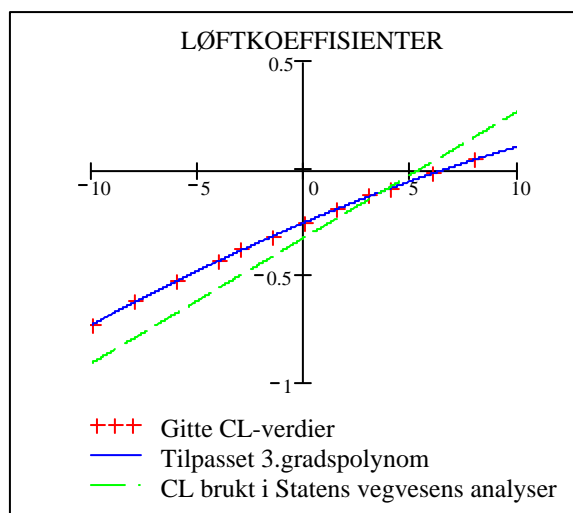
$$z_3 = -0.251 \quad z_4 = 0.042 \quad z_5 = -6.24 \times 10^{-4} \quad z_6 = -4.306 \times 10^{-6}$$

og v er innfallsvinkelen (α).

I analysene fra Statens vegvesen antas CL å følge en rett linje gitt ved formelen:

$$CL_{lab}(v) := -0.321 + 3.38 \left(\frac{v \cdot 2\pi}{360} \right)$$

(Formelen gjelder for når gang-/sykkelstien er nedstrøms (på le side) og inkluderer virvelreduksjonsanretninger.)



$$\frac{\sum (CL_{tp}(\alpha) - \text{mean}(CL))^2}{\sum (CL - \text{mean}(CL))^2} = 1$$

Figur 2: Figuren viser gitte løftkoeffisientverdier fra vindtunnelrapporten [14] (røde kryss), et tilpasset 3.gradspolynom for løftkoeffisientene (blå heltrukket linje) og løftkoeffisienter brukt i analysene til Statens vegvesen (grønn stiple linje).

Tilpasset 3.gradspolynom for momentkoeffisienten:

Tilpasser et polynom til verdiene gitt i matrisen "data". Prøver med et 3.gradspolynom, dvs

$z := \text{regress}(\alpha, \text{CM}, k)$

$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2.383 \times 10^{-3} \\ 0.013 \\ -9.457 \times 10^{-5} \\ -5.606 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

Det vil si at det tilpassede 3.grads-polynomet for momentkoeffisienten er:

$$\text{CMtp}(v) := z_3 + z_4 v + z_5 v^2 + z_6 v^3$$

hvor

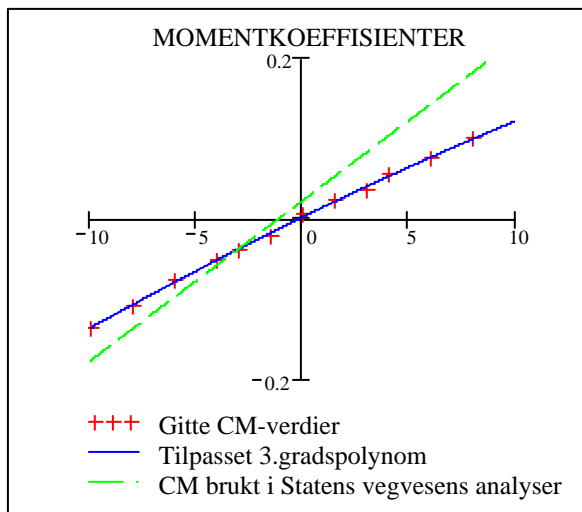
$$z_3 = 2.383 \times 10^{-3} \quad z_4 = 0.013 \quad z_5 = -9.457 \times 10^{-5} \quad z_6 = -5.606 \times 10^{-7}$$

og v er innfallsvinkelen (α).

I analysene fra Statens vegvesen antas CM å følge en rett linje gitt ved formelen:

$$\text{CMab}(v) := 0.023 + 1.15 \frac{v \cdot 2\pi}{360}$$

(Formelen gjelder for når gang-/sykkelstien er nedstrøms (på le side) og inkluderer virvelreduksjonsanretninger.)



$$\frac{\sum (\text{CMtp}(\alpha) - \text{mean}(\text{CM}))^2}{\sum (\text{CM} - \text{mean}(\text{CM}))^2} = 0.999$$

Figur 3: Figuren viser gitte momentkoeffisientverdier fra vindtunnelrapporten [14] (røde kryss), et tilpasset 3.gradspolynom for momentkoeffisientene (blå heltrukket linje) og momentkoeffisienter brukt i analysene til Statens vegvesen (grønn stiple linje).

Man ser av figuren over at for små vinkler (under 1 grad) gir 3.gradspolynomet for små verdier for CM.

Prøver derfor å tilpasse et 5.gradspolynom CM-verdiene for vinkler mellom -4 og 4 grader.

$$\text{dataM2} := \begin{pmatrix} \alpha & \text{CM} \\ -4 & -0.051 \\ -3 & -0.039 \\ -1.5 & -0.022 \\ 0 & 0.007 \\ 1.5 & 0.023 \\ 3 & 0.036 \\ 4 & 0.056 \end{pmatrix}$$

$$\alpha2 := \text{dataM2} \langle 0 \rangle \quad \text{CM2} := \text{dataM2} \langle 1 \rangle \quad k := 5$$

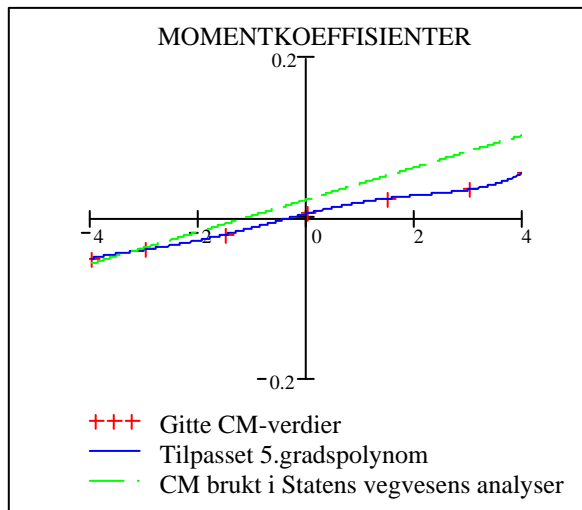
$$z := \text{regress}(\alpha2, \text{CM2}, k)$$

$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5.189 \times 10^{-3} \\ 0.017 \\ -1.673 \times 10^{-3} \\ -7.757 \times 10^{-4} \\ 9.482 \times 10^{-5} \\ 3.603 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\text{CMtp2}(v) := z_3 + z_4 \cdot v + z_5 \cdot v^2 + z_6 \cdot v^3 + z_7 v^4 + z_8 v^5$$

hvor

$$\begin{aligned} z_3 &= 5.189 \times 10^{-3} & z_4 &= 0.017 & z_5 &= -1.673 \times 10^{-3} & z_6 &= -7.757 \times 10^{-4} \\ z_7 &= 9.482 \times 10^{-5} & z_8 &= 3.603 \times 10^{-5} \end{aligned}$$



$$\frac{\sum (\text{CMtp2}(\alpha_2) - \text{mean}(\text{CM2}))^2}{\sum (\text{CM2} - \text{mean}(\text{CM2}))^2} = 0.999$$

Figur 4: Figuren viser gitte momentkoeffisientverdier fra vindtunnelrapporten [14] (røde kryss), et tilpasset **5.gradspolynom** for momentkoeffisientene for vinkler mellom -4 og 4 grader (blå heltrukket linje) og momentkoeffisienter brukt i analysene til Statens vegvesen (grønn stiptet linje).

APPENDIKS D

BEREGNING AV KREFTER FOR KONTROLL AV SUBRUTINE MED NYE FORMFAKTORER

For å kontrollere resultatene som er fått ved bruk av 3.gradspolynomer i stedet for rette linjer (som i Statens vegvesens analyser) for formfaktorene, beregnes her alle kreftene som virker på de ulike elementene ved en vindhastighet på 80m/s. Disse påføres så i en VG-fil (fil som ikke krever subrutine), for å kontrollere om forskyvningene blir de samme som ved bruk av FORTRAN-subrutinen.

Bredde brokasse: $B=18,3\text{m}$
 Høyde brokasse: $H=3,25\text{m}$
 Middelvindhastighet: $V=80\text{m/s}$
 Tetthet for luft: $\rho=1,25\text{kg/m}^3$
 Vindhastighetstrykk: $Q=0,5\rho V^2=4000\text{N/m}^2$

Momentkoeffisient: $CM=0,002383+0,013\cdot\alpha -0,00009457\cdot\alpha^2-0,0000005606\cdot\alpha^3$
 Løftkoeffisient: $CL=-0,251+0,042\cdot\alpha -0,000624\cdot\alpha^2-0,000004306\cdot\alpha^3$
 Dragkoeffisient: $CD=0,754-0,005341\cdot\alpha +0,002183\cdot\alpha^2-0,00004861\cdot\alpha^3$

MOMENT= $Q\cdot B^2\cdot CM-Q\cdot H\cdot 0,056\cdot CD$
Pzmom= $MOMENT/14,5$
LØFT= $Q\cdot B\cdot CL$
DRAG= $Q\cdot H\cdot CD$

Vinklene er de siste vinklene i log-filen fra analysen *med* subrutinen (med nye formfaktorverdier og $V=80\text{m/s}$).

Tabell 1: Tabellen viser de beregnede kreftene som virker på de ulike elementene ved en vindhastighet på 80m/s. Kreftene er beregnet i Excel med formlene som er gitt ovenfor.

ELEMENT	Q [N/m ²]	B [m]	H [m]	α [grader]	MOMENT [Nm/m]	Pzmom [N/m]	LØFT [N/m]	DRAG [N/m]	DRAGkab [N/m]
1	4000	18,3	3,25	1,28E-02	2866,55	-197,69	-18333,79	9801,11	1920
2	4000	18,3	3,25	2,42E-02	3065,11	-211,39	-18298,75	9800,33	
3	4000	18,3	3,25	3,51E-02	3253,92	-224,41	-18265,44	9799,60	
4	4000	18,3	3,25	4,45E-02	3418,53	-235,76	-18236,41	9798,96	
5	4000	18,3	3,25	5,25E-02	3557,38	-245,34	-18211,92	9798,43	
6	4000	18,3	3,25	5,89E-02	3668,37	-252,99	-18192,34	9798,01	
7	4000	18,3	3,25	6,37E-02	3751,79	-258,74	-18177,63	9797,69	
8	4000	18,3	3,25	6,68E-02	3806,07	-262,49	-18168,06	9797,49	
9	4000	18,3	3,25	6,82E-02	3831,22	-264,22	-18163,63	9797,39	
10	4000	18,3	3,25	6,81E-02	3828,55	-264,04	-18164,10	9797,40	
11	4000	18,3	3,25	6,63E-02	3797,27	-261,88	-18169,61	9797,52	
12	4000	18,3	3,25	6,29E-02	3737,93	-257,79	-18180,08	9797,75	
13	4000	18,3	3,25	5,80E-02	3652,88	-251,92	-18195,07	9798,07	
14	4000	18,3	3,25	0,05	3541,58	-244,25	-18214,70	9798,49	
15	4000	18,3	3,25	0,04	3406,41	-234,92	-18238,54	9799,01	

16	4000	18,3	3,25	0,03	3249,97	-224,14	-18266,14	9799,62
17	4000	18,3	3,25	0,02	3072,25	-211,88	-18297,49	9800,31
18	4000	18,3	3,25	0,01	2876,15	-198,36	-18332,10	9801,08
19	4000	18,3	3,25	0,00	2665,84	-183,85	-18369,21	9801,91
20	4000	18,3	3,25	-0,01	2441,85	-168,40	-18408,75	9802,81
21	4000	18,3	3,25	-0,02	2208,37	-152,30	-18449,98	9803,75
22	4000	18,3	3,25	-0,04	1969,32	-135,82	-18492,19	9804,73
23	4000	18,3	3,25	-0,05	1726,82	-119,09	-18535,02	9805,73
24	4000	18,3	3,25	-0,07	1484,80	-102,40	-18577,78	9806,74
25	4000	18,3	3,25	-0,08	1247,46	-86,03	-18619,71	9807,74
26	4000	18,3	3,25	-0,09	1019,02	-70,28	-18660,09	9808,72
27	4000	18,3	3,25	-0,11	803,68	-55,43	-18698,15	9809,64
28	4000	18,3	3,25	-0,12	605,66	-41,77	-18733,16	9810,50
29	4000	18,3	3,25	-0,13	429,44	-29,62	-18764,32	9811,28
30	4000	18,3	3,25	-0,14	280,02	-19,31	-18790,75	9811,93
31	4000	18,3	3,25	-0,14	162,95	-11,24	-18811,45	9812,45
32	4000	18,3	3,25	-0,15	82,44	-5,69	-18825,70	9812,81
33	4000	18,3	3,25	-0,15	42,18	-2,91	-18832,82	9812,99
34	4000	18,3	3,25	-0,15	43,23	-2,98	-18832,63	9812,99
35	4000	18,3	3,25	-0,15	85,33	-5,88	-18825,18	9812,80
36	4000	18,3	3,25	-0,14	164,79	-11,36	-18811,13	9812,44
37	4000	18,3	3,25	-0,14	278,18	-19,18	-18791,07	9811,94
38	4000	18,3	3,25	-0,13	419,96	-28,96	-18766,00	9811,32
39	4000	18,3	3,25	-0,12	585,40	-40,37	-18736,74	9810,59
40	4000	18,3	3,25	-0,11	768,96	-53,03	-18704,29	9809,79
41	4000	18,3	3,25	-0,10	966,69	-66,67	-18669,34	9808,94
42	4000	18,3	3,25	-0,08	1173,85	-80,96	-18632,72	9808,06
43	4000	18,3	3,25	-0,07	1386,76	-95,64	-18595,10	9807,15
44	4000	18,3	3,25	-0,06	1600,42	-110,37	-18557,35	9806,26
45	4000	18,3	3,25	-0,05	1812,73	-125,02	-18519,85	9805,37
46	4000	18,3	3,25	-0,04	2018,17	-139,18	-18483,56	9804,53
47	4000	18,3	3,25	-0,02	2214,66	-152,74	-18448,86	9803,73
48	4000	18,3	3,25	-0,01	2399,03	-165,45	-18416,31	9802,98
49	4000	18,3	3,25	0,00	2567,89	-177,10	-18386,50	9802,30
50	4000	18,3	3,25	0,00	2719,67	-187,56	-18359,71	9801,70
51	4000	18,3	3,25	0,01	2850,17	-196,56	-18336,68	9801,18
52	4000	18,3	3,25	0,02	2959,14	-204,08	-18317,45	9800,75
53	4000	18,3	3,25	0,02	3043,69	-209,91	-18302,53	9800,42
54	4000	18,3	3,25	0,03	3102,25	-213,95	-18292,20	9800,19
55	4000	18,3	3,25	2,83E-02	3135,60	-216,25	-18286,32	9800,06
56	4000	18,3	3,25	2,86E-02	3140,61	-216,59	-18285,43	9800,04
57	4000	18,3	3,25	2,72E-02	3117,00	-214,97	-18289,60	9800,13
58	4000	18,3	3,25	2,42E-02	3065,30	-211,40	-18298,72	9800,33
59	4000	18,3	3,25	1,96E-02	2984,43	-205,82	-18312,99	9800,65
60	4000	18,3	3,25	0,01	2875,46	-198,31	-18332,22	9801,08
61	4000	18,3	3,25	0,01	2737,57	-188,80	-18356,56	9801,62
62	4000	18,3	3,25	0,00	2571,28	-177,33	-18385,91	9802,29
63	4000	18,3	3,25	-0,02	2376,57	-163,90	-18420,28	9803,07
64	4000	18,3	3,25	-0,03	2152,13	-148,42	-18459,90	9803,98
65	4000	18,3	3,25	-0,04	1893,73	-130,60	-18505,54	9805,04
66	4000	18,3	3,25	-0,06	1655,53	-114,17	-18547,61	9806,03

Tabell 2: Tabellen viser forskyvningene på midten av avstivningsbjelken (i node 34) beregnet **med** (V80) og **uten** (VG80) FORTRAN-subrutine.

	Node	U1 [m]	U2 [m]	U3 [m]	UR1 [rad]	UR2 [rad]	UR3 [rad]
V80	34	0.2169	11.68	-0,875	2.6104E-03	4.4330E-04	2.8590E-05
VG80 (Kontroll)	34	0.2169	11.68	-0,875	2.6078E-03	4.4339E-04	2.8488E-05

Tabellen over viser at kontrollen (VG80) gir svært like deformasjoner som analysen med FORTRAN-subrutinen (V80), hvilket betyr at FORTRAN-subrutinen påfører lastene som tiltenkt. De små ulikhetene kommer av at kreftene beregnet i *Tabell 1* er avrundet til hele tall ved påføring i VG-filen.

APPENDIKS E**FORTRAN-SUBROUTINE MED 3.GRADSPOLYNOMER FOR FORMFAKTORENE**

```

SUBROUTINE DLOAD(F,KSTEP,KINC,TIME,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,
  1 COORDS, JLTYP,SNAME)
  INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
  DIMENSION TIME(2),COORDS(3)
    CHARACTER*80 SNAME
    REAL C1D,C2D,C3D,C4D,C1L,C2L,C3L,C4L,C1M,C2M,C3M,C4M
  REAL H,B,DRAG,LIFT,MOM,Q,DIAM,CDKAB,D
  REAL CM(66),CL(66),CD(66)
  REAL VINKEL(66),YA(66),YB(66),ZA(66),ZB(66)
  INTEGER IV
C
C
C
  IF (KINC.EQ.0)THEN
C
C   KONSTANTER I 3.GRADSPOLYNOMER FOR BEREGNING AV
C   FORMFAKTORENE:
C
    C1D=0.754
    C2D=-5.341E-3
    C3D=2.183E-3
    C4D=-4.861E-5
C
    C1L=-0.251
    C2L=0.042
    C3L=-6.24E-4
    C4L=-4.306E-6
C
    C1M=2.383E-3
    C2M=0.013
    C3M=-9.457E-5
    C4M=-5.606E-7
C
C
C   2A) FØRST MÅ VINKELN BEREGNES.
C   BASERER VINKELN PÅ KOORDINATENE FRA SLUTTEN AV
C   FORRIGE STEP. MERK: FORRIGE STEP MÅ TILSVARE
C   EGENVEKT ALENE. DVS. FORRIGE STEP MÅ IKKE INNEHOLDE
C   VIND EL. ANDRE LASTER UTENOM EGENVEKT.
    IF(NOEL.GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
      IV=NOEL-12000;
      YA(IV)=COORDS(2)

```

```

      ZA(IV)=COORDS(3)
      END IF
C
      IF(NOEL.GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
          IV=NOEL-13000;
          YB(IV)=COORDS(2)
          ZB(IV)=COORDS(3)
      END IF

      DO IV=1,66
          VINKEL(IV)=(ATAN(-(ZA(IV)-ZB(IV))/(YA(IV)-YB(IV))))*180/3.14159265
          1 36
C
C      TILPASSEDE 3.GRADSPOLYNOMER FOR FORMFAKTORENE:
C
      CD(IV)=C1D+C2D*VINKEL(IV)+C3D*VINKEL(IV)**2+C4D*VINKEL(IV)**3
      CL(IV)=C1L+C2L*VINKEL(IV)+C3L*VINKEL(IV)**2+C4L*VINKEL(IV)**3
      CM(IV)=C1M+C2M*VINKEL(IV)+C3M*VINKEL(IV)**2+C4M*VINKEL(IV)**3
C
      END DO
C
      H=3.25
      B=18.3
      CDKAB=0.8
      D=0.6
C
      WRITE(*,*)'VINKEL',VINKEL

      Q=(TIME(1)**2)/1.6
C
C      1) DRAGLASTEN ER UAVHENGIG AV VINKEL OG
C      DEFINERES DIREKTE:
C
      IF(JLTYP.EQ.42)THEN
          IF(NOEL .GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
              IV=NOEL
                  DRAG=Q*H*CD(IV)
                  F=DRAG
          END IF
          IF(NOEL .GE. 1001 .AND. NOEL .LE.1066)THEN
              DRAG=Q*D*CDKAB
              F=DRAG
          END IF
          IF(NOEL .GE. 2001 .AND. NOEL .LE.2066)THEN
              DRAG=Q*D*CDKAB
              F=DRAG
          END IF
      END IF
      END IF

```

```

IF(JLTYP.EQ.43)THEN
C  2) MOMENT: OVERFØRT TIL VERTIKALKRAFTPAR
      IF(NOEL.GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
            IV=NOEL-12000;
            MOM=(Q*B*B*CM(IV))-(Q*H*CD(IV)*(1.956-1.9))
            F=-MOM/14.5
      END IF
C
      IF(NOEL.GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
            IV=NOEL-13000;
            MOM=(Q*B*B*CM(IV))-(Q*H*CD(IV)*(1.956-1.9))
            F=MOM/14.5
      END IF
C
C  3) LIFT:
      IF(NOEL.GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
            IV=NOEL
            LIFT=(Q*B*CL(IV))
            F=LIFT
      END IF
END IF
END IF
C
IF (KINC.GE.1)THEN
      Q=(TIME(1)**2)/1.6
C
C  1) DRAGLASTEN ER UAVHENGIG AV VINKEL OG
C  DEFINERES DIREKTE:
C
IF(JLTYP.EQ.42)THEN
      IF(NOEL .GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
            IV=NOEL
            DRAG=Q*H*CD(IV)
            F=DRAG
      END IF
      IF(NOEL .GE. 1001 .AND. NOEL .LE.1066)THEN
            DRAG=Q*D*CDKAB
            F=DRAG
      END IF
      IF(NOEL .GE. 2001 .AND. NOEL .LE.2066)THEN
            DRAG=Q*D*CDKAB

```

```
                F=DRAG
            END IF
        END IF

        IF(JLTYP.EQ.43)THEN

C   2) MOMENT:  ORVEFORT TIL VERTIKALKRAFTPAR
            IF(NOEL.GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
                IV=NOEL-12000;
                MOM=(Q*B*B*CM(IV))-(Q*H*CD(IV)*(1.956-1.9))
                F=-MOM/14.5
            END IF

C
            IF(NOEL.GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
                IV=NOEL-13000;
                MOM=(Q*B*B*CM(IV))-(Q*H*CD(IV)*(1.956-1.9))
                F=MOM/14.5
            END IF

C

C   3) LIFT:
            IF(NOEL.GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
                IV=NOEL
                LIFT=(Q*B*CL(IV))
                F=LIFT
            END IF
        END IF
    END IF

C
    RETURN

    END
```


APPENDIKS F

FORTRAN-SUBROUTINE, MED SVs FORMFAKTORER, SOM INKLUDERER STIVHETSENDRING

I denne subrutinen er momentet delt i to deler; en bevegelsesavhengig del og en bevegelsesuavhengig del (som i SVs VG-filer). Den bevegelsesavhengige delen påføres som *horisontale* kraftpar for å få med stivhetsreduksjonen grunnet bevegelsesavhengige krefter ved beregningen av svingeperiodene, se Kap.7.3.

```

SUBROUTINE DLOAD(F,KSTEP,KINC,TIME,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,
  1 COORDS, JLTYP,SNAME)
  INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
  DIMENSION TIME(2),COORDS(3)
    CHARACTER*80 SNAME
  REAL CD,CL,CM,DCL,DCM,H,B,DRAG,LIFT,MOM,Q,DIAM,CDKAB,D
  REAL CMOM(66),CLIFT(66)
  REAL VINKEL(66),YA(66),YB(66),ZA(66),ZB(66)
  INTEGER IV
C
C
C
C
C
C
  IF (KINC.EQ.0)THEN
    CD=0.783
    CL=-0.321
    CM=0.023
    DCL=3.38
    DCM=1.15
      H=3.25
      B=18.3
      CDKAB=0.8
      D=0.6
C
C  2A) FOR MOMENT OG LIFT MÃ... FÃ~RST VINKELN BEREGNES.
C  BASERER VINKELN PÃ... KOORDINATENE FRA SLUTTEN AV
C  FORRIGE STEP. MERK: FORRIGE STEP MÃ... TILSVARE
C  EGENVEKT ALENE. DVS. FORRIGE STEP MÃ... IKKE INNEHOLDE
C  VIND EL. ANDRE LASTER UTENOM EGENVEKT.
  IF(NOEL.GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
    IV=NOEL-12000;
    YA(IV)=COORDS(2)
    ZA(IV)=COORDS(3)

```

```

      END IF
C
      IF(NOEL.GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
          IV=NOEL-13000;
          YB(IV)=COORDS(2)
          ZB(IV)=COORDS(3)
      END IF

      DO IV=1,66
          VINKEL(IV)=ATAN(-(ZA(IV)-ZB(IV))/(YA(IV)-YB(IV)))
          CMOM(IV)= CM+VINKEL(IV)*DCM
          CLIFT(IV)=CL+VINKEL(IV)*DCL
      END DO

      Q=(TIME(1)**2)/1.6

      WRITE(*,*)VINKEL
C
C 1) DRAGLASTEN ER UAVHENGIG AV VINKEL OG
C DEFINERES DIREKTE:
C
      IF(JLTYP.EQ.42)THEN
          IF(NOEL .GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
              DRAG=Q*H*CD
              F=DRAG
          END IF
          IF(NOEL .GE. 1001 .AND. NOEL .LE.1066)THEN
              DRAG=Q*D*CDKAB
              F=DRAG
          END IF
          IF(NOEL .GE. 2001 .AND. NOEL .LE.2066)THEN
              DRAG=Q*D*CDKAB
              F=DRAG
          END IF
      END IF

C 2) MOMENTET DELES I TO DELER; EN BEVEGELSESUAVHENGIG DEL
C SOM PÅFØRES SOM VERTIKALT KRAFTPAR OG EN
C BEVEGELSESAVHENGIG
C SOM PÅFØRES SOM HORIZONTALT KRAFTPAR

C 2A) BEVEGELSESUAVHENGIG DEL:
      IF(JLTYP.EQ.43)THEN
          IF(NOEL .GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
              MOM=Q*B*B*CM-(Q*H*CD*(1.956-1.9))
              F=-MOM/14.5
          END IF
          IF(NOEL .GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
              MOM=Q*B*B*0.023-(Q*H*CD*(1.956-1.9))

```

```

      F=MOM/14.5
      END IF
END IF

C  2B) BEVEGELSESAVHENGIG DEL:
IF(JLTYP.EQ.42)THEN
  IF(NOEL.GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
    MOM=(Q*B*B*(VINKEL(IV)*DCM))
    IF(VINKEL(IV).EQ.0.00000)THEN
      F=0
    ELSE
      F=-MOM/(14.5*VINKEL(IV))
    END IF
  END IF
  END IF
  END IF

  IF(NOEL.GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
    MOM=(Q*B*B*(VINKEL(IV)*DCM))
    IF(VINKEL(IV).EQ.0.00000)THEN
      F=0
    ELSE
      F=MOM/(14.5*VINKEL(IV))
    END IF
  END IF
  END IF
  END IF

C

C  2C) LIFT:
IF(JLTYP.EQ.43)THEN
  IF(NOEL.GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
    LIFT=(Q*B*CLIFT(NOEL))
    F=LIFT
  END IF
END IF
END IF

C
IF (KINC.GE.1)THEN

Q=(TIME(1)**2)/1.6

C
C  1) DRAGLASTEN ER UAVHENGIG AV VINKEL OG
C  DEFINERES DIREKTE:
C
IF(JLTYP.EQ.42)THEN
  IF(NOEL .GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
    DRAG=Q*H*CD
    F=DRAG
  END IF
  IF(NOEL .GE. 1001 .AND. NOEL .LE.1066)THEN

```

```
                DRAG=Q*D*CDKAB
                F=DRAG
            END IF
            IF(NOEL .GE. 2001 .AND. NOEL .LE.2066)THEN
                DRAG=Q*D*CDKAB
                F=DRAG
            END IF
        END IF
```

```
C
C  2) MOMENTET DELES I TO DELER; EN BEVEGELSESAVHENGIG DEL
C  SOM PÅFØRES SOM VERTIKALT KRAFTPAR OG EN
UBEVEGELSESAVHENGIG
C  SOM PÅFØRES SOM HORIZONTALT KRAFTPAR
```

```
C  2A) BEVEGELSESAVHENGIG DEL:
IF(JLTYP.EQ.43)THEN
IF(NOEL .GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
    MOM=Q*B*B*CM-(Q*H*CD*(1.956-1.9))
    F=-MOM/14.5
END IF
IF(NOEL .GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
    MOM=Q*B*B*0.023-(Q*H*CD*(1.956-1.9))
    F=MOM/14.5
    END IF
END IF
```

```
C  2B) BEVEGELSESAVHENGIG DEL:
IF(JLTYP.EQ.42)THEN
    IF(NOEL.GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
        MOM=(Q*B*B*(VINKEL(IV)*DCM))
        IF(VINKEL(IV).EQ.0.00000)THEN
            F=0
        ELSE
            F=-MOM/(14.5*VINKEL(IV))
        END IF
    END IF
    END IF
```

```
    IF(NOEL.GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
        MOM=(Q*B*B*(VINKEL(IV)*DCM))
        IF(VINKEL(IV).EQ.0.00000)THEN
            F=0
        ELSE
            F=MOM/(14.5*VINKEL(IV))
        END IF
    END IF
    END IF
    END IF
```

```
C  2C) LIFT:
      IF(JLTYP.EQ.43)THEN
          IF(NOEL.GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
              LIFT=(Q*B*CLIFT(NOEL))
              F=LIFT
          END IF
      END IF
END IF

C
RETURN

END
```

APPENDIKS G

FORTRAN-SUBROUTINE, MED NYE FORMFAKTORER, SOM INKLUDERER STIVHETSENDRING

I denne subrutinen er momentet delt i to deler; en *bevegelsesavhengig* del og en *bevegelsesuavhengig* del. Den *bevegelsesavhengige* delen påføres som horisontalt kraftpar for å få med stivhetsreduksjonen grunnet *bevegelsesavhengige* krefter ved beregningen av svingeperiodene, se Kap.7.3.

```

SUBROUTINE DLOAD(F,KSTEP,KINC,TIME,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,
1 COORDS, JLTYP,SNAME)
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
DIMENSION TIME(2),COORDS(3)
      CHARACTER*80 SNAME
      REAL C1D,C2D,C3D,C4D,C1L,C2L,C3L,C4L,C1M,C2M,C3M,C4M
REAL H,B,DRAG,LIFT,MOM,Q,DIAM,CDKAB,D
REAL CM(66),CL(66),CD(66)
REAL VINKEL(66),YA(66),YB(66),ZA(66),ZB(66)
      INTEGER IV
C
C
C
C
C
C
      IF (KINC.EQ.0)THEN
C
C   KONSTANTER I 3.GRADSPOLYNOMER FOR BEREGNING AV
FORMFAKTORENE:
C
      C1D=0.754
      C2D=-5.341E-3
      C3D=2.183E-3
      C4D=-4.861E-5
C
      C1L=-0.251
      C2L=0.042
      C3L=-6.24E-4
      C4L=-4.306E-6
C
      C1M=2.383E-3
      C2M=0.013
      C3M=-9.457E-5
      C4M=-5.606E-7
C

```

```

C
C  FORST MÅ VINKELN BEREKNES
C  BASERER VINKELN PÅ... KOORDINATENE FRA SLUTTEN AV
C  FORRIGE STEP. MERK: FORRIGE STEP MÅ... TILSVARE
C  EGENVEKT ALENE. DVS. FORRIGE STEP MÅ... IKKE INNEHOLDE
C  VIND EL. ANDRE LASTER UTENOM EGENVEKT.

      IF(NOEL.GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
          IV=NOEL-12000;
          YA(IV)=COORDS(2)
          ZA(IV)=COORDS(3)
      END IF

C
      IF(NOEL.GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
          IV=NOEL-13000;
          YB(IV)=COORDS(2)
          ZB(IV)=COORDS(3)
      END IF

      DO IV=1,66
          VINKEL(IV)=(ATAN(-(ZA(IV)-ZB(IV))/(YA(IV)-YB(IV))))*180/3.14159265
          1 36

C
C  TILPASSEDE 3.GRADSPOLYNOMER FOR FORMFAKTORENE:
C
      CD(IV)=C1D+C2D*VINKEL(IV)+C3D*VINKEL(IV)**2+C4D*VINKEL(IV)**3
      CL(IV)=C1L+C2L*VINKEL(IV)+C3L*VINKEL(IV)**2+C4L*VINKEL(IV)**3
      CM(IV)=C1M+C2M*VINKEL(IV)+C3M*VINKEL(IV)**2+C4M*VINKEL(IV)**3
C
      END DO

C
      H=3.25
      B=18.3
      CDKAB=0.8
      D=0.6

C
      WRITE(*,*)'VINKEL',VINKEL

      Q=(TIME(1)**2)/1.6

C
C  1) DRAGLAST
C
      IF(JLTYP.EQ.42)THEN
          IF(NOEL .GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
              IV=NOEL
                  DRAG=Q*H*CD(IV)
                  F=DRAG
          END IF
          IF(NOEL .GE. 1001 .AND. NOEL .LE.1066)THEN
              DRAG=Q*D*CDKAB
          
```

```

                F=DRAG
            END IF
            IF(NOEL .GE. 2001 .AND. NOEL .LE.2066)THEN
                DRAG=Q*D*CDKAB
                F=DRAG
            END IF
        END IF
    END IF

```

C 2) MOMENTET DELES I TO DELER; EN BEVEGELSESUAVHENGIG DEL
 C SOM PÅFØRES SOM VERTIKALT KRAFTPAR OG EN
 BEVEGELSESAVHENGIG
 C SOM PÅFØRES SOM HORIZONTALT KRAFTPAR

```

C 2A) BEVEGELSESUAVHENGIG DEL:
IF(JLTYP.EQ.43)THEN
IF(NOEL .GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
    MOM=(Q*B*B*C1M-Q*H*C1D*0.056)
    F=-MOM/14.5
END IF
IF(NOEL .GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
    MOM=(Q*B*B*C1M-Q*H*C1D*0.056)
    F=MOM/14.5
    END IF
END IF

```

```

C 2B) BEVEGELSESAVHENGIG DEL:
IF(JLTYP.EQ.42)THEN
    IF(NOEL.GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
        MOM=(Q*B*B*(CM(IV)-C1M)-(Q*H*(CD(IV)-C1D)*(1.956-1.9)))
        IF(VINKEL(IV).EQ.0.00000)THEN
            F=0
        ELSE
            F=-MOM/(14.5*VINKEL(IV)*3.14159265/180)
        END IF
    END IF

    IF(NOEL.GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
        MOM=(Q*B*B*(CM(IV)-C1M)-(Q*H*(CD(IV)-C1D)*(1.956-1.9)))
        IF(VINKEL(IV).EQ.0.00000)THEN
            F=0
        ELSE
            F=MOM/(14.5*VINKEL(IV)*3.14159265/180)
        END IF
    END IF

```



```

      END IF
C
C
C 2C) LIFT:
      IF(JLTYP.EQ.43)THEN
          IF(NOEL.GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
              IV=NOEL
                  LIFT=(Q*B*CL(IV))
                  F=LIFT
          END IF
      END IF
      END IF
C
      IF (KINC.GE.1)THEN

          Q=(TIME(1)**2)/1.6
C
C 1) DRAGLASTEN ER UAVHENGIG AV VINKEL OG
C DEFINERES DIREKTE:
C
      IF(JLTYP.EQ.42)THEN
          IF(NOEL .GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
              IV=NOEL
                  DRAG=Q*H*CD(IV)
                  F=DRAG
          END IF
          IF(NOEL .GE. 1001 .AND. NOEL .LE.1066)THEN
              DRAG=Q*D*CDKAB
              F=DRAG
          END IF
          IF(NOEL .GE. 2001 .AND. NOEL .LE.2066)THEN
              DRAG=Q*D*CDKAB
              F=DRAG
          END IF
      END IF
      END IF
C
C 2) MOMENTET DELES I TO DELER; EN BEVEGELSESUAVHENGIG DEL
C SOM PÅFØRES SOM VERTIKALT KRAFTPAR OG EN
C BEVEGELSESAVHENGIG
C SOM PÅFØRES SOM HORIZONTALT KRAFTPAR
C
C 2A) BEVEGELSESUAVHENGIG DEL:
      IF(JLTYP.EQ.43)THEN
          IF(NOEL .GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
              MOM=(Q*B*B*C1M-Q*H*C1D*0.056)
              F=-MOM/14.5
          END IF
          IF(NOEL .GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN

```

```
MOM=(Q*B*B*C1M-Q*H*C1D*0.056)
F=MOM/14.5
  END IF
END IF
```

C 2B) BEVEGELSESAVHENGIG DEL:

```
IF(JLTYP.EQ.42)THEN
  IF(NOEL.GE. 12001 .AND. NOEL .LE.12066)THEN
    MOM=(Q*B*B*(CM(IV)-C1M)-(Q*H*(CD(IV)-C1D)*(1.956-1.9)))
    IF(VINKEL(IV).EQ.0.00000)THEN
      F=0
    ELSE
      F=-MOM/(14.5*VINKEL(IV)*3.14159265/180)
    END IF
  END IF
END IF
```

```
  IF(NOEL.GE. 13001 .AND. NOEL .LE.13066)THEN
    MOM=(Q*B*B*(CM(IV)-C1M)-(Q*H*(CD(IV)-C1D)*(1.956-1.9)))
    IF(VINKEL(IV).EQ.0.00000)THEN
      F=0
    ELSE
      F=MOM/(14.5*VINKEL(IV)*3.14159265/180)
    END IF
  END IF
END IF
```

C

C 2C) LIFT:

```
IF(JLTYP.EQ.43)THEN
  IF(NOEL.GE. 1 .AND. NOEL .LE.66)THEN
    IV=NOEL
    LIFT=(Q*B*CL(IV))
    F=LIFT
  END IF
END IF
END IF
```

C

```
RETURN
```

```
  END
```

APPENDIKS H

BEREGNING AV EKSTRALØFT PGA AKSIALLAST I BROBJELKEN

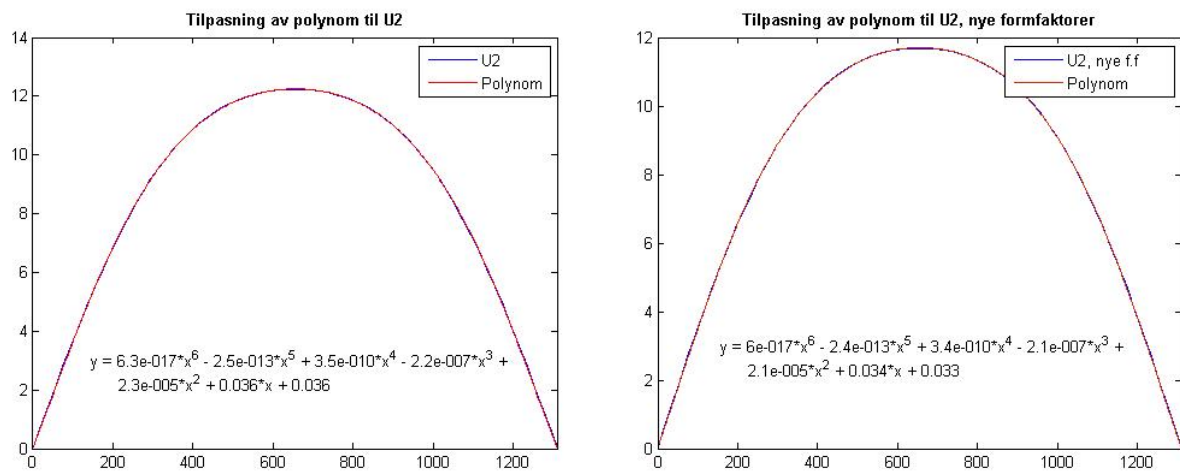
På grunn av den horisontale utbøyningen vil brobjelken komme i trykk på innersiden og i strekk på yttersiden. Disse aksialkreftene vil føre til en ekstraløft på brobjelken, se forklaring i Kap.7.4. Dette ekstraløftet beregnes her.

Ekstraløftet beregnes ved hjelp av formlene under.

$$M_z = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E \cdot I_z \quad \sigma_{\min} = \frac{M_z}{I_z} \cdot \left(-\frac{B}{2}\right) \quad N = \frac{1}{2} \sigma_{\min} \cdot \frac{A}{2} \quad L_N = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + N \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

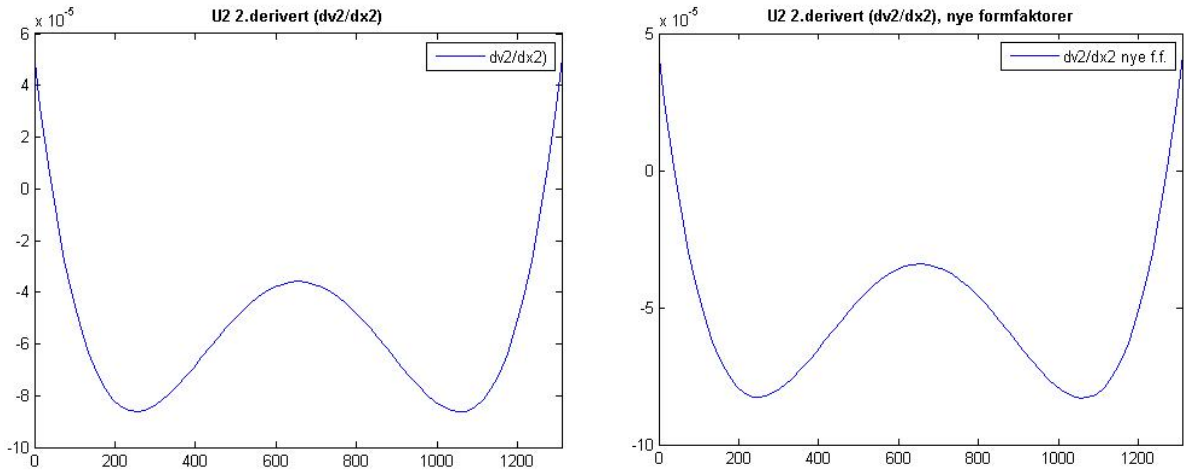
$E=210000000000\text{N/m}^2$, $I_z=16,877\text{m}^4$, $B=18,3\text{m}$, $A=0,596\text{m}^2$, v er horisontal forskyvning og w er vertikal forskyvning på grunn av tverrsnittets rotasjon.

Først tilpasses et 6.gradspolynom til den *horisontale forskyvningen*, v (U_2), se Figur 1. På denne måten kan man finne den 2.deriverte av forskyvningen, som behøves for å beregne M_z .



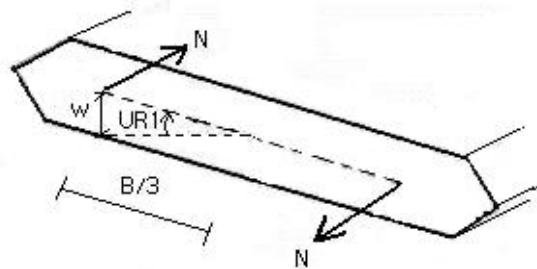
Figur 1: Tilpassing av 6.gradspolynom til den horisontale utbøyningen, U_2 , med gamle og nye formfaktorer.

For å finne M_z trenger vi den 2.deriverte av v , dvs den 2.deriverte av polynomet i Figur 1, se Figur 2. Da kan M_z , σ_{\min} og N beregnes for hver node (evnt per meter).

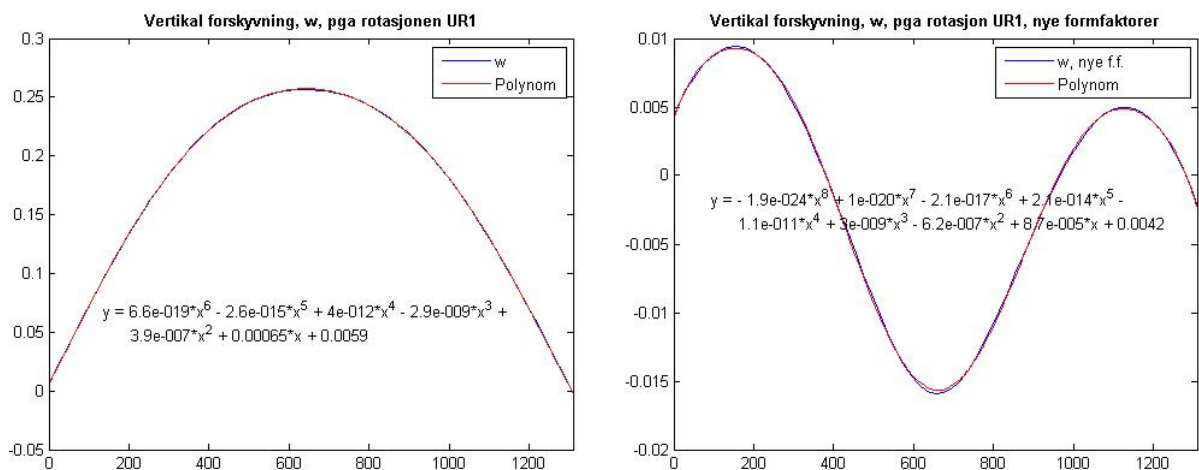


Figur 2: Figuren viser den 2.deriverte av den horisontale forskyvningen, U2.

For å finne løftkraften pga aksialkraften, L_N , tilpasses et polynom til den vertikale nedbøyningen, w , pga rotasjonen UR1, se figur 3. $w = UR1 \cdot B/3$, hvor B er tverrsnittets bredde, se Figur 3.

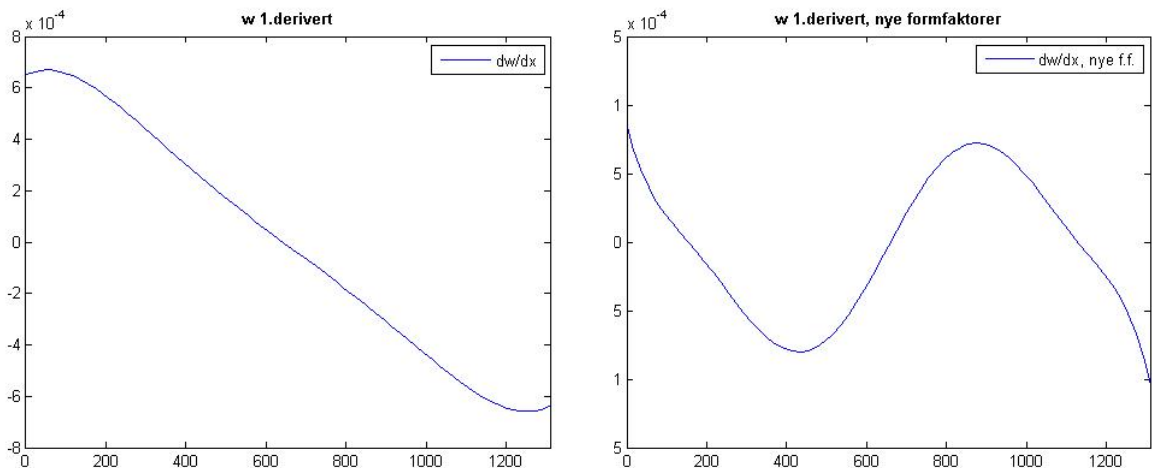


Figur 3: Figuren viser vertikal forskyvning, w , som følge av rotasjonen UR1 i punktene hvor aksialkreftene virker, det vil si $B/3$ fra midten av brokassen.

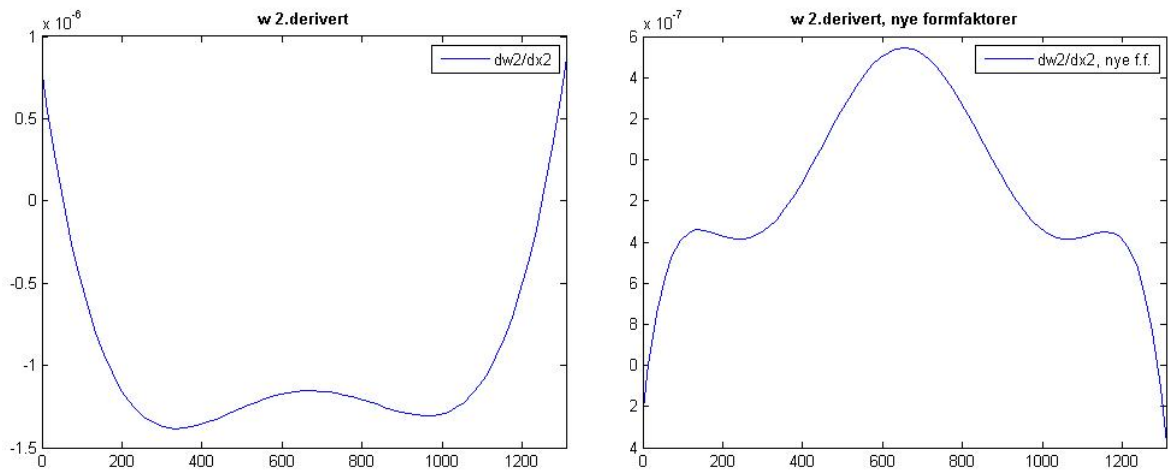


Figur 4: Figurene viser tilpassingen av et 6.gradspolynom og et 8.gradspolynom til den vertikale forskyvningen, w , pga rotasjonen UR1, for hhv gamle og nye formfaktorer. w i figurene er for **vindsiden** av brokassen, altså den siden som er i trykk. Lesiden vil få en tilsvarende w med motsatt fortegn.

For å finne løftkraften, L_N , trenger vi 1. og 2. deriverte av w , se figur 5 og 6.



Figur 5: Figuren viser den 1. deriverte av den vertikale nedbøyningen på grunn av rotasjon for gamle og nye formfaktorer (6.- og 8. gradspolynommet i Figur 4).



Figur 6: Figuren viser den 2. deriverte av den vertikale forskyvningen på grunn av rotasjon for nye og gamle formfaktorer (6.- og 8. gradspolynommet i Figur 4).

Tabell 1 og 2 viser de beregnede løftkreftene for alle nodene langs brobjelken. Krefteene er beregnet ved hjelp av formlene på side 1. dN/dx er funnet på samme måte som de deriverte av forskyvningene, det vil si ved å lage et tilpasset 6. gradspolynom for N og derivere dette.

$L_{N,TOT}$ er $L_N \cdot 2$, fordi at ekstraløftet på grunn av aksiallasten opptrer på begge sider av tverrsnittet, både den som er i trykk og den som er i strekk (se Kap.7.4). L_N på element er middelverdien av løftkraften i de to nodene elementet spenner mellom. Disse kreftene settes på elementene 1-66 i analysefilene, som løft i N/m.

Tabell 1: Beregning av løftkrefter på grunn av aksiallasten i broen, ved en vindhastighet på 80m/s, ved bruk av Statens vegvesens formfaktorer. Aksiallasten skyldes den horisontale utbøyningen.

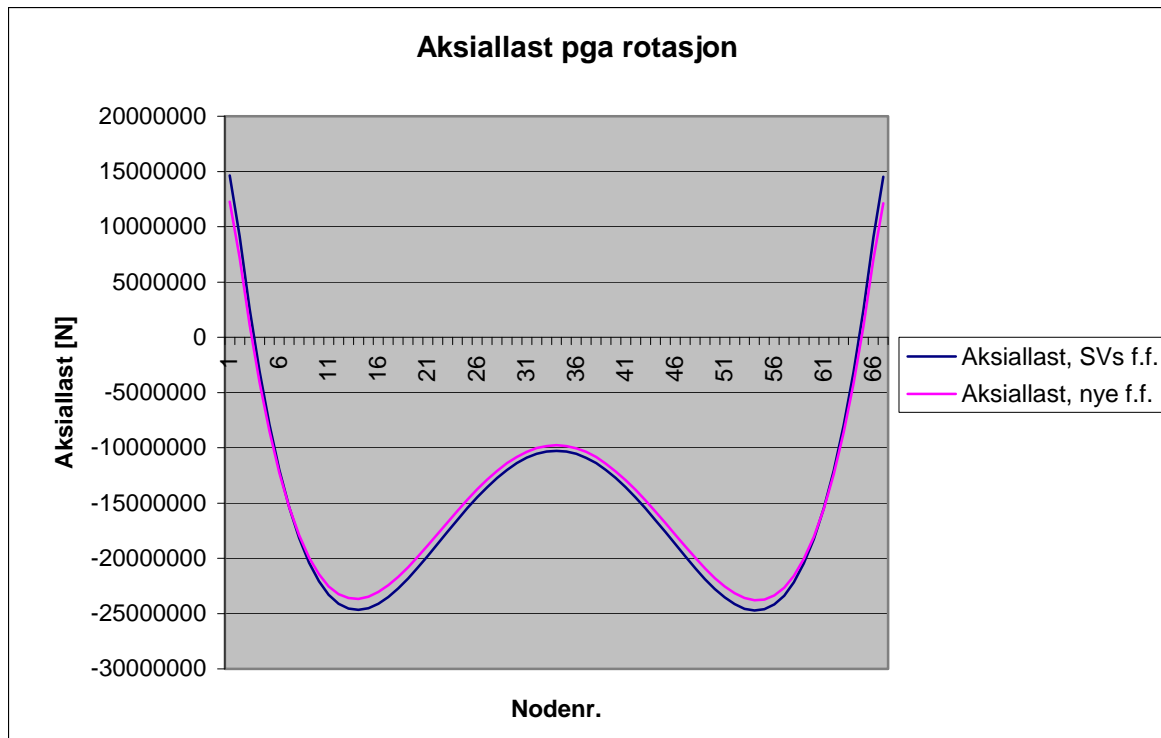
Node/ elementnr.	N [N]	d^2w/dx^2	dN/dx	dw/dx	L_N [N]	L_{Ntot} [N]	L_N på Element [N/m]
1	14636980,1	7,8904E-07	-385430	0,00064948	-238,78	-477,56	-464,14
2	9129486,18	5,40218E-07	-349229,121	0,00065942	-225,36	-450,72	-427,49
3	2603688,87	2,39885E-07	-303913,045	0,00066717	-202,14	-404,27	-377,31
4	-3048710,49	-2,67273E-08	-261873,528	0,00066924	-175,18	-350,35	-321,70
5	-7892188,03	-2,61947E-07	-223004,877	0,00066631	-146,52	-293,04	-264,27
6	-11989106	-4,68026E-07	-187201,401	0,00065896	-117,75	-235,49	-207,77
7	-15399712,8	-6,47138E-07	-154357,407	0,00064777	-90,02	-180,04	-154,21
8	-18182143	-8,01384E-07	-124367,204	0,00063324	-64,18	-128,37	-104,98
9	-20392417,3	-9,32788E-07	-97125,0977	0,00061586	-40,79	-81,59	-60,98
10	-22084442,5	-1,0433E-06	-72525,3975	0,00059607	-20,19	-40,38	-22,72
11	-23310011,5	-1,13478E-06	-50462,4109	0,00057426	-2,53	-5,05	9,65
12	-24118803,5	-1,20903E-06	-30830,4458	0,00055079	12,18	24,36	36,20
13	-24558383,7	-1,26778E-06	-13523,81	0,000526	24,02	48,04	57,19
14	-24674203,6	-1,31266E-06	1563,18874	0,00050017	33,17	66,34	73,03
15	-24509600,5	-1,34524E-06	14536,2425	0,00047357	39,86	79,71	84,19
16	-24105798,3	-1,36701E-06	25501,0435	0,00044644	44,34	88,67	91,24
17	-23501906,6	-1,37939E-06	34563,2838	0,00041896	46,90	93,80	94,73
18	-22734921,5	-1,38372E-06	41828,6556	0,00039131	47,83	95,65	95,23
19	-21839725	-1,38126E-06	47402,8511	0,00036365	47,40	94,81	93,31
20	-20849085,4	-1,37319E-06	51391,5625	0,0003361	45,90	91,81	89,48
21	-19793657	-1,36064E-06	53900,4819	0,00030876	43,57	87,15	84,22
22	-18701980,4	-1,34463E-06	55035,3014	0,0002817	40,65	81,30	77,99
23	-17600482,1	-1,32612E-06	54901,7132	0,00025499	37,34	74,68	71,16
24	-16513475	-1,306E-06	53605,4095	0,00022866	33,82	67,65	64,09
25	-15463158,1	-1,28508E-06	51252,0825	0,00020275	30,26	60,53	57,05
26	-14469616,2	-1,26408E-06	47947,4243	0,00017726	26,79	53,58	50,31
27	-13550820,8	-1,24366E-06	43797,127	0,00015219	23,52	47,04	44,06
28	-12722629,1	-1,2244E-06	38906,8828	0,00012751	20,54	41,08	38,46
29	-11998784,6	-1,20681E-06	33382,3839	0,0001032	17,93	35,85	33,66
30	-11390916,9	-1,1913E-06	27329,3225	7,9221E-05	15,74	31,47	29,75
31	-10908541,9	-1,17824E-06	20853,3907	5,553E-05	14,01	28,02	26,79
32	-10559061,3	-1,16789E-06	14060,2806	3,2073E-05	12,78	25,57	24,85
33	-10347763,4	-1,16046E-06	7055,68442	8,7945E-06	12,07	24,14	23,95
34	-10277822,2	-1,15607E-06	-54,70566	-1,4366E-05	11,88	23,77	24,10
35	-10350298,1	-1,15476E-06	-7165,1975	-3,7469E-05	12,22	24,44	25,30
36	-10564137,5	-1,15651E-06	-14170,0989	-6,0576E-05	13,08	26,15	27,51
37	-10916173,2	-1,16121E-06	-20963,7178	-8,3749E-05	14,43	28,86	30,69
38	-11401123,7	-1,16869E-06	-27440,362	-0,00010704	16,26	32,52	34,79
39	-12011594,1	-1,17868E-06	-33494,3393	-0,00013051	18,53	37,06	39,72
40	-12738075,3	-1,19085E-06	-39019,9575	-0,00015421	21,19	42,37	45,36
41	-13568944,5	-1,20479E-06	-43911,5245	-0,00017816	24,17	48,34	51,58
42	-14490465	-1,22002E-06	-48063,3482	-0,00020241	27,41	54,81	58,21
43	-15486786,3	-1,23598E-06	-51369,7364	-0,00022696	30,80	61,60	65,04
44	-16539944	-1,25203E-06	-53724,9969	-0,00025185	34,24	68,48	71,83
45	-17629859,8	-1,26745E-06	-55023,4375	-0,00027704	37,59	75,18	78,28
46	-18734341,5	-1,28146E-06	-55159,3661	-0,00030253	40,69	81,39	84,07
47	-19829083,3	-1,2932E-06	-54027,0906	-0,00032829	43,38	86,76	88,82
48	-20887665,1	-1,30172E-06	-51520,9188	-0,00035424	45,44	90,88	92,10

49	-21881553,4	-1,306E-06	-47535,1585	-0,00038033	46,66	93,31	93,44
50	-22780100,6	-1,30495E-06	-41964,1175	-0,00040644	46,78	93,57	92,35
51	-23550545,1	-1,29741E-06	-34702,1037	-0,00043248	45,56	91,13	88,29
52	-24158011,9	-1,28212E-06	-25643,425	-0,00045829	42,73	85,45	80,73
53	-24565511,6	-1,25777E-06	-14682,3892	-0,0004837	38,00	76,00	69,12
54	-24733941,3	-1,22296E-06	-1713,30406	-0,00050853	31,12	62,24	52,96
55	-24622084,1	-1,17621E-06	13369,5225	-0,00053254	21,84	43,68	31,80
56	-24186609,4	-1,11599E-06	30671,7827	-0,00055549	9,95	19,91	5,26
57	-23382072,4	-1,04065E-06	50299,1686	-0,00057708	-4,69	-9,39	-26,87
58	-22160914,8	-9,48507E-07	72357,3724	-0,000597	-22,18	-44,36	-64,64
59	-20473464,3	-8,37777E-07	96952,0863	-0,0006149	-42,46	-84,93	-107,84
60	-18267934,7	-7,06608E-07	124189,002	-0,00063038	-65,38	-130,76	-155,95
61	-15490425,9	-5,5307E-07	154173,813	-0,00064301	-90,57	-181,14	-208,03
62	-12084924,1	-3,75159E-07	187012,21	-0,00065234	-117,46	-234,92	-262,67
63	-7993301,58	-1,70793E-07	222809,886	-0,00065784	-145,21	-290,42	-317,84
64	-3155316,67	6,21854E-08	261672,533	-0,00065898	-172,63	-345,27	-370,79
65	2491386,07	3,26009E-07	303705,842	-0,00065515	-198,16	-396,32	-417,91
66	9011275,98	6,22986E-07	349015,507	-0,00064572	-219,75	-439,50	-451,58
67	14514196,9	8,68909E-07	385211,445	-0,00063455	-231,83	-463,65	

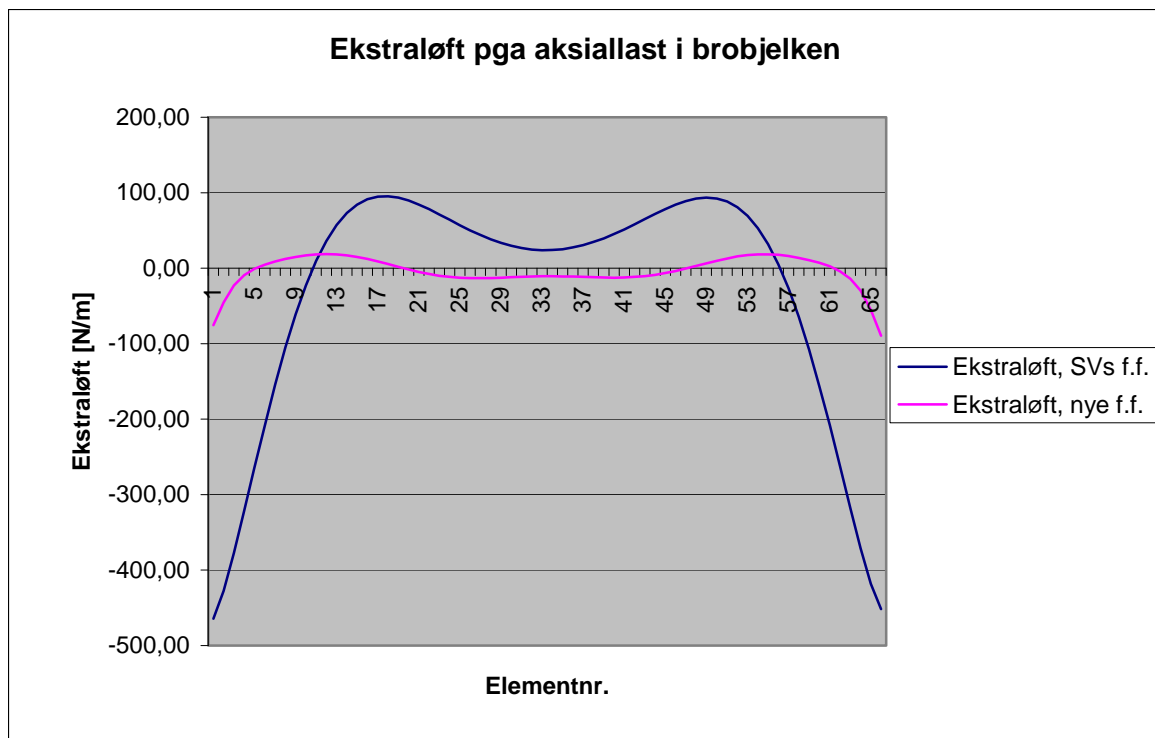
Tabell 2: Beregning av løftkrefter på grunn av aksiallasten i broen, ved en vindhastighet på 80m/s, ved bruk av de nye formfaktorene. Aksiallasten skyldes den horisontale utbøyningen.

Node-/ elementnr.	N [N]	d^2w/dx^2	dN/dx	dw/dx	L_N [N]	L_{Ntot} [N]	L_N på Element [N/m]
1	12274403,7	-1,23382E-06	-356280	8,6569E-05	-45,99	-91,97	-75,67
2	7185535,92	-9,91526E-07	-322541,887	6,9947E-05	-29,69	-59,37	-45,33
3	1162170,54	-7,4621E-07	-280316,296	5,2706E-05	-15,64	-31,28	-22,87
4	-4047504,72	-5,73993E-07	-241152,793	3,9612E-05	-7,23	-14,46	-9,34
5	-8503741,89	-4,5967E-07	-204952,594	2,936E-05	-2,11	-4,22	-0,92
6	-12264817,3	-3,89992E-07	-171616,915	2,0928E-05	1,19	2,38	4,72
7	-15387031,6	-3,53525E-07	-141046,972	1,354E-05	3,53	7,06	8,88
8	-17924710	-3,40508E-07	-113143,981	6,6311E-06	5,35	10,71	12,20
9	-19930201,6	-3,42712E-07	-87809,1578	-1,8185E-07	6,85	13,69	14,89
10	-21453880,2	-3,53315E-07	-64943,7188	-7,1331E-06	8,04	16,09	16,95
11	-22544143,9	-3,66768E-07	-44448,8798	-1,4333E-05	8,91	17,81	18,28
12	-23247415	-3,78682E-07	-26225,8568	-2,1793E-05	9,37	18,75	18,78
13	-23608140,2	-3,85703E-07	-10175,8658	-2,9448E-05	9,41	18,81	18,39
14	-23668790,5	-3,85405E-07	3799,87725	-3,7172E-05	8,98	17,96	17,10
15	-23469861,4	-3,76184E-07	15800,1562	-4,4804E-05	8,12	16,24	15,00
16	-23049872,4	-3,57153E-07	25923,7552	-5,2154E-05	6,88	13,76	12,22
17	-22445367,7	-3,28049E-07	34269,4582	-5,9023E-05	5,34	10,68	8,94
18	-21690915,7	-2,89137E-07	40936,0492	-6,5211E-05	3,60	7,20	5,38
19	-20819109	-2,41129E-07	46022,3122	-7,0528E-05	1,77	3,55	1,74
20	-19860564,7	-1,85096E-07	49627,0312	-7,4802E-05	-0,04	-0,07	-1,77
21	-18843924,2	-1,22399E-07	51848,9902	-7,7887E-05	-1,73	-3,46	-4,97
22	-17795853,2	-5,46081E-08	52786,9732	-7,9664E-05	-3,23	-6,47	-7,72
23	-16741041,7	1,65564E-08	52539,7642	-8,0049E-05	-4,48	-8,97	-9,93
24	-15702204,2	8,92897E-08	51206,1472	-7,8992E-05	-5,45	-10,89	-11,56
25	-14700079,3	1,61758E-07	48884,9062	-7,6479E-05	-6,12	-12,23	-12,62
26	-13753430,2	2,3215E-07	45674,8252	-7,2535E-05	-6,51	-13,01	-13,15
27	-12879044,2	2,98725E-07	41674,6882	-6,7219E-05	-6,65	-13,30	-13,24
28	-12091733,1	3,59853E-07	36983,2792	-6,0622E-05	-6,59	-13,19	-12,99

29	-11404332,9	4,14052E-07	31699,3822	-5,2871E-05	-6,40	-12,80	-12,52
30	-10827704	4,6002E-07	25921,7812	-4,4115E-05	-6,12	-12,25	-11,96
31	-10370731,2	4,96662E-07	19749,2602	-3,4532E-05	-5,83	-11,67	-11,41
32	-10040323,5	5,2311E-07	13280,6032	-2,4317E-05	-5,58	-11,15	-10,97
33	-9841414,34	5,38744E-07	6614,59425	-1,368E-05	-5,39	-10,78	-10,70
34	-9776961,5	5,43198E-07	-149,98275	-2,8417E-06	-5,31	-10,62	-10,65
35	-9847947,02	5,3637E-07	-6914,34375	7,9727E-06	-5,34	-10,67	-10,80
36	-10053377,3	5,18426E-07	-13579,7048	1,8539E-05	-5,46	-10,93	-11,13
37	-10390283,2	4,89792E-07	-20047,2818	2,8638E-05	-5,66	-11,33	-11,56
38	-10853719,6	4,51149E-07	-26218,2908	3,8064E-05	-5,89	-11,79	-12,00
39	-11436766,1	4,03418E-07	-31993,9478	4,6624E-05	-6,11	-12,21	-12,34
40	-12130526,5	3,47744E-07	-37275,4688	5,4148E-05	-6,24	-12,47	-12,46
41	-12924128,7	2,85471E-07	-41964,0698	6,0489E-05	-6,23	-12,46	-12,25
42	-13804725,2	2,18115E-07	-45960,9668	6,5532E-05	-6,02	-12,05	-11,60
43	-14757492,8	1,4733E-07	-49167,3758	6,9191E-05	-5,58	-11,15	-10,43
44	-15765632,6	7,48701E-08	-51484,5128	7,1415E-05	-4,86	-9,71	-8,71
45	-16810370	2,5462E-09	-52813,5938	7,2187E-05	-3,86	-7,71	-6,44
46	-17870954,8	-6,78212E-08	-53055,8348	7,1529E-05	-2,58	-5,17	-3,66
47	-18924661	-1,34456E-07	-52112,4518	6,9499E-05	-1,08	-2,15	-0,48
48	-19946787,3	-1,95684E-07	-49884,6608	6,6187E-05	0,60	1,20	2,97
49	-20910656,2	-2,49998E-07	-46273,6778	6,1718E-05	2,37	4,74	6,51
50	-21787614,9	-2,96122E-07	-41180,7188	5,6242E-05	4,14	8,27	9,92
51	-22547034,9	-3,33088E-07	-34506,9998	4,9934E-05	5,79	11,57	13,01
52	-23156312	-3,60311E-07	-26153,7368	4,2984E-05	7,22	14,44	15,56
53	-23580866,2	-3,77676E-07	-16022,1458	3,5587E-05	8,34	16,67	17,40
54	-23784142	-3,85622E-07	-4013,44275	2,7939E-05	9,06	18,12	18,40
55	-23727608,2	-3,85236E-07	9971,15625	2,0218E-05	9,34	18,68	18,51
56	-23370758	-3,78355E-07	26030,4352	1,2573E-05	9,17	18,34	17,73
57	-22671108,7	-3,67663E-07	44263,1782	5,1097E-06	8,56	17,12	16,12
58	-21584202,3	-3,56802E-07	64768,1692	-2,1317E-06	7,56	15,13	13,79
59	-20063604,7	-3,50485E-07	87644,1922	-9,1924E-06	6,23	12,45	10,80
60	-18060906,6	-3,54616E-07	112990,031	-1,622E-05	4,57	9,14	7,11
61	-15525722,6	-3,76407E-07	140904,47	-2,3494E-05	2,53	5,07	2,41
62	-12405691,9	-4,24513E-07	171486,293	-3,1452E-05	-0,13	-0,25	-4,07
63	-8646478,03	-5,09161E-07	204834,284	-4,0718E-05	-3,94	-7,88	-13,81
64	-4191768,75	-6,42288E-07	241047,227	-5,2141E-05	-9,88	-19,75	-29,45
65	1016723,79	-8,37684E-07	280223,906	-6,6824E-05	-19,58	-39,15	-55,19
66	7039263,11	-1,11114E-06	322463,105	-8,6168E-05	-35,61	-71,22	-89,64
67	12127752,3	-1,37818E-06	356211,708	-0,00010477	-54,03	-108,07	



Figur 7: Figuren viser beregnet aksialkraft i **l** side av brobjelken, pga den horisontale utbøyningen, med bruk av Statens vegvesens formfaktorer og ved bruk av nye formfaktorverdier. Negativ aksiallast er trykk.



Figur 8: Figuren viser totalt beregnet ekstraløft pga aksiallasten som virker i brobjelken, ved bruk av Statens vegvesens formfaktorer og ved bruk av nye formfaktorverdier.

Beregning av elementkrefter for påføring i VG-filene

Tilleggsløftet pga aksiallasten påføres i VG-filene som et tillegg (eventuelt fradrag) til løftkreftene pga vinden. Hardangerbrua får bare negativt løft på grunn av vinden (ved rotasjonsvinkler under 5 grader), mens løftet på grunn av rotasjonen stort sett er positivt for analysene med Statens vegvesens formfaktorer (siden rotasjonen her er positiv langs hele bjelken, se figur 4). Dette fører til at ekstraløftet hovedsakelig har en gunstig effekt på broens deformasjon, siden det negative løftet fra vinden i praksis blir redusert. Ved bruk av de nye formfaktorene har man en mer varierende vertikal forskyvning pga rotasjon (figur 4), og ekstraløftet vil derfor virke i gunstig retning noen steder langs bjelken, og i ugunstig retning noen steder. Ekstraløftet utgjør imidlertid en liten del av det totale løftet, se tabell 3 og 4.

Total løft = Løft (vind) + Tilleggsløft.

Tabell 3: Beregning av nye løftkrefter for påføring i VG-filen. Løftkreftene er for en vindhastighet på 80m/s ved bruk av Statens vegvesens formfaktorer. Kraftene påføres elementene 1-66 i Abaqusmodellen som kraft per meter [N/m].

Elementnr.	Løft (vind) VG80, SVs f.f.	Tilleggsløft SVs f.f.	Total løft SVs f.f.
1	-23121	-464,14	-23585
2	-22578	-427,49	-23005
3	-22016	-377,31	-22393
4	-21463	-321,70	-21785
5	-20919	-264,27	-21183
6	-20385	-207,77	-20593
7	-19861	-154,21	-20015
8	-19350	-104,98	-19455
9	-18853	-60,98	-18914
10	-18370	-22,72	-18393
11	-17904	9,65	-17894
12	-17456	36,20	-17420
13	-17026	57,19	-16969
14	-16616	73,03	-16543
15	-16227	84,19	-16143
16	-15860	91,24	-15769
17	-15515	94,73	-15420
18	-15193	95,23	-15098
19	-14895	93,31	-14802
20	-14621	89,48	-14532
21	-14370	84,22	-14286
22	-14144	77,99	-14066
23	-13941	71,16	-13870
24	-13762	64,09	-13698
25	-13607	57,05	-13550
26	-13474	50,31	-13424
27	-13362	44,06	-13318
28	-13272	38,46	-13234
29	-13202	33,66	-13168
30	-13152	29,75	-13122
31	-13119	26,79	-13092
32	-13104	24,85	-13079
33	-13104	23,95	-13080

34	-13120	24,10	-13096
35	-13151	25,30	-13126
36	-13199	27,51	-13171
37	-13265	30,69	-13234
38	-13348	34,79	-13313
39	-13451	39,72	-13411
40	-13575	45,36	-13530
41	-13719	51,58	-13667
42	-13885	58,21	-13827
43	-14074	65,04	-14009
44	-14286	71,83	-14214
45	-14520	78,28	-14442
46	-14777	84,07	-14693
47	-15058	88,82	-14969
48	-15361	92,10	-15269
49	-15687	93,44	-15594
50	-16035	92,35	-15943
51	-16404	88,29	-16316
52	-16794	80,73	-16713
53	-17204	69,12	-17135
54	-17633	52,96	-17580
55	-18079	31,80	-18047
56	-18542	5,26	-18537
57	-19020	-26,87	-19047
58	-19512	-64,64	-19577
59	-20016	-107,84	-20124
60	-20531	-155,95	-20687
61	-21056	-208,03	-21264
62	-21590	-262,67	-21853
63	-22132	-317,84	-22450
64	-22684	-370,79	-23055
65	-23247	-417,91	-23665
66	-23713	-451,58	-24165

Tabell 4: Beregning av nye løftkrefter for påføring i VG-filen. Løftkreftene er for en vindhastighet på 80m/s ved bruk av de nye formfaktorene. Kreftene påføres elementene 1-66 i Abaqusmodellen som kraft per meter [N/m].

Elementnr.	Løft (vind) VG80, nye f.f.	Tilleggsløft nye f.f.	Total løft nye f.f.
1	-18334	-75,67	-18410
2	-18299	-45,33	-18344
3	-18265	-22,87	-18288
4	-18236	-9,34	-18245
5	-18212	-0,92	-18213
6	-18192	4,72	-18187
7	-18178	8,88	-18169
8	-18168	12,20	-18156
9	-18163	14,89	-18148
10	-18164	16,95	-18147
11	-18170	18,28	-18152
12	-18180	18,78	-18161
13	-18195	18,39	-18177
14	-18215	17,10	-18198

15	-18239	15,00	-18224
16	-18266	12,22	-18254
17	-18297	8,94	-18288
18	-18332	5,38	-18327
19	-18369	1,74	-18367
20	-18409	-1,77	-18411
21	-18450	-4,97	-18455
22	-18492	-7,72	-18500
23	-18535	-9,93	-18545
24	-18578	-11,56	-18590
25	-18620	-12,62	-18633
26	-18660	-13,15	-18673
27	-18698	-13,24	-18711
28	-18733	-12,99	-18746
29	-18764	-12,52	-18777
30	-18790	-11,96	-18802
31	-18811	-11,41	-18822
32	-18825	-10,97	-18836
33	-18833	-10,70	-18844
34	-18833	-10,65	-18844
35	-18825	-10,80	-18836
36	-18811	-11,13	-18822
37	-18791	-11,56	-18803
38	-18766	-12,00	-18778
39	-18737	-12,34	-18749
40	-18704	-12,46	-18716
41	-18669	-12,25	-18681
42	-18633	-11,60	-18645
43	-18595	-10,43	-18605
44	-18557	-8,71	-18566
45	-18520	-6,44	-18526
46	-18484	-3,66	-18488
47	-18449	-0,48	-18449
48	-18416	2,97	-18413
49	-18387	6,51	-18380
50	-18360	9,92	-18350
51	-18337	13,01	-18324
52	-18317	15,56	-18301
53	-18303	17,40	-18286
54	-18292	18,40	-18274
55	-18286	18,51	-18267
56	-18285	17,73	-18267
57	-18290	16,12	-18274
58	-18299	13,79	-18285
59	-18313	10,80	-18302
60	-18332	7,11	-18325
61	-18357	2,41	-18355
62	-18386	-4,07	-18390
63	-18420	-13,81	-18434
64	-18460	-29,45	-18489
65	-18506	-55,19	-18561
66	-18548	-89,64	-18638

