



Universitetet  
i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

## MASTEROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering: Konstruksjoner og Materialer / Bygg	Vårsemesteret, 2013  Åpen
Forfatter: Kristoffer Sandvand	..... (signatur forfatter)
Fagansvarlig: Jasna Bogunovic Jakobsen  Veileder(e): Jasna Bogunovic Jakobsen og Kristian Bruaset	
Tittel på masteroppgaven: Jordskjelvanalyser i FEM-Design og Robot Structural Analysis Professional  Engelsk tittel: Seismic Analysis in FEM-Design and Robot Structural Analysis Professional	
Studiepoeng: 30	
Emneord: Jordskjelv Dynamisk analyse Analyseverktøy FEM-Design Robot Structural Analysis Professional	Sidetall: 120  + vedlegg: 150  Stavanger, 14.06.2013

## Forord

Denne rapporten er mitt avsluttende arbeid på mastergraden ved Institutt for konstruksjonsteknikk og materialteknologi med fordypning i byggkonstruksjoner på Universitetet i Stavanger. Oppgaven er utført våren 2013 og omfatter 20 ukers arbeid, tilsvarende 30 studiepoeng.

På andre året av min bachelorgrad utvekslet jeg til Griffith University på østkysten i Australia. Det var her jeg først ble introdusert for dynamiske laster på konstruksjoner. I løpet av de fire resterende studieårene har jeg hatt minimal opplæring i jordskjelv og siden jeg synes det er et interessant fagområde ønsket jeg en oppgave innenfor dette temaet. Etter kontakt med Rambøll ble vi fort enige om at en oppgave som sammenligner forskjellige elementmetode program både ville være nyttig i arbeidslivet, samt en interessant og lærerik oppgave.

Oppgaven er skrevet på et nivå som skal være fullt forståelig for andre med konstruksjonsfaglig bakgrunn.

Jeg vil takke mine veiledere Jasna Bogunovic Jakobsen på Universitetet i Stavanger for innspill om teoridelen av oppgaven og Kristian Bruaset i Rambøll som har vært behjelpelig både med å lyse ut problemstillinger og hjelp i analyseprogrammet Robot. Rambølls avdelingsleder for byggeteknikk i Stavanger, Kjetil Eltervaag, skal ha takk som har gitt meg kontorplass mens oppgaven skrives. Spesielt takknemlig er jeg for at min familie har støttet meg under hele utdannelsen.

Stavanger, juni 2013

Kristoffer Sandvand

## Sammendrag

Dimensjonering for jordskjelv i Norge ble først påkrevd i 2004 da NS 3491-12 ble innført. Regelverket omfattet seismiske laster på konstruksjoner og var gjeldende fram til 2010 da NS-EN 1998-1:2004+NA:2008 tok over. Dimensjoneringen for jordskjelv er, for mange konstruksjoner, både komplisert og tidkrevende. Utviklingen av spesialiserte dataprogrammer har gjort beregningene både enklere og tidsbesparende. Til tross for inntreden av analyseprogram stilles det fortsatt krav til brukeren både når det gjelder teorien som ligger bak og at dimensjoneringen skjer i henhold til NS-EN 1998-1:2004+NA:2008.

I denne oppgaven ble to av de ledende analyseprogrammene FEM-Design og Robot anvendt og sammenlignet. Oppgaven er skrevet i samarbeid med Rambøll, hvor begge programmene blir brukt til jordskjelvanalyser. Formålet med oppgaven var å se nærmere på hvordan dimensjoneringen for jordskjelv foregår i de to programmene. Hovedfokuset var tidsforbruk, brukervennlighet og resultater fra de forskjellige analysene.

Det ble utført analyser av to enkle rammekonstruksjoner. Den første rammen var på to etasjer, og for denne ble det undersøkt betydningen av stivheten i dekket (i dette tilfellet bjelken) for konstruksjonens vinkelfrekvens og egenperiode. Analysen ble utført i FEM-Design, Robot og ved håndberegninger.

Resultatene viser at for første svingeform reduseres vinkelfrekvensen med nesten 38 prosent ved bruk av realistisk bjelkestivhet i forhold til uendelig stive bjelker. Rammen ble så utvidet til fem etasjer. Her ble tverrkraftene regnet ut for hver etasje ved hjelp av tverrkraftmetoden og modal-responsspektrum analyse. Det viser seg at Robot ikke har det nasjonale tillegget i NS-EN 1998-1:2004 og at FEM-Design ikke korrigerer massen for konstruksjoner over to etasjer og med egenperiode lavere enn  $2T_c$ . Derfor ble det kun gjennomført modal-responsspektrum analyse for rammen. Resultatene samsvarer bra med håndberegningene for begge rammekonstruksjonene.

Den mer komplekse konstruksjonen ble modellert i Revit og importert til FEM-Design og Robot. Importen foregår uten problemer i begge programmene. Resultatene fra den modale analysen viser at FEM-Design har lavere effektiv modal masse enn Robot. Kravet på 90 % effektiv modal masse for konstruksjonen ble ikke oppfylt i FEM-Design. Kraftene ble for de 13 bjelkene vi undersøkte, litt over 5 % høyere i FEM-Design enn Robot uten utilsiktet eksentrisitet, og ca 12 % høyere når det tas hensyn til utilsiktet eksentrisitet. Praktiseringen av utilsiktet eksentrisitet er noe som bør ses nærmere på i de to programmene. Forskyvningene viser seg å bli omtrent 1 millimeter større i Robot enn FEM-Design. Analysene i denne oppgaven viser til at FEM-Design er det mest brukervennlige programmet, i tillegg er det noe kjappere og mer stabilt enn Robot. I Robot har brukeren større valgmuligheter og det er også mulig å utføre flere typer analyser enn i FEM-Design, blant annet ikke-lineære analyser.

# Innhold

<b>FORORD .....</b>	<b>I</b>
<b>SAMMENDRAG.....</b>	<b>II</b>
<b>NOTASJONER .....</b>	<b>VI</b>
<b>1.0 INNLEDNING.....</b>	<b>1</b>
1.1 BAKGRUNN.....	1
1.1.1 Generelt om jordskjelv .....	2
1.1.2 Jordskjelv i Norge .....	3
1.2 FORMÅL.....	4
1.3 STRUKTUR .....	4
1.4 BEGRENSNINGER .....	5
<b>DEL I: TEORI.....</b>	<b>6</b>
2.0 DYNAMIKK .....	7
2.0.1 UDEMPET SYSTEM MED FRI VIBRASJON.....	8
2.0.2 DEMPET SYSTEM MED FRI VIBRASJON .....	11
2.0.3 UDEMPET SYSTEM MED TVUNGEN VIBRASJON .....	15
2.0.4 DEMPET SYSTEM MED TVUNGEN VIBRASJON .....	18
2.0.5 FRA FJÆRSYSTEM TIL RAMMEKONSTRUKSJON .....	21
2.0.6 EFFEKTIV JORDSKJELVLAST.....	22
<b>2.1 FRIHETSGRADER OG MASSEFORDELING .....</b>	<b>23</b>
2.1.1 GENERALISERT EN-FRIHETSGRADSYSTEM .....	26
2.1.2 FLER-FRIHETSGRADSYSTEM .....	27
<b>2.2 MASSE- OG STIVHETSMATRISER.....</b>	<b>29</b>
<b>2.3 DUKTILITET .....</b>	<b>33</b>
<b>3.0 FRAMGANGSMÅTE FOR DIMENSJONERING I HENHOLD TIL NS-EN 1998-1:2004+NA:2008</b>	<b>35</b>
3.0.1 RESPONSSPEKTRUM.....	35
3.0.2 LASTFAKTOR OG LASTKOMBINASJONER .....	37
3.0.3 UTFORMING AV KONSTRUKSJONEN.....	40
3.0.3.1 Regularitet i plan .....	41
3.0.3.2 Regularitet i oppriss.....	42
3.0.4 UTILSIKTET EKSENTRISITET .....	44
<b>3.1 ANALYSEMETODER .....</b>	<b>45</b>
3.1.1 TVERRKRAFTMETODEN .....	45
3.1.1.1 Egensvingeperiode .....	46
3.1.1.2 Skjærkraft ved fundamentnivå.....	47

3.1.1.3 Fordeling av krefter i konstruksjonen.....	47
3.2 MODAL RESPONS-SPEKTRUM ANALYSE .....	49
3.2.1 Kreftene i fundamentet eller ved stiv kjeller .....	50
3.2.2 Effektiv modal masse .....	50
3.3 IKKE-LINEÆR ANALYSE .....	52
<b>DEL II: ANALYSER .....</b>	<b>53</b>
4.0 INTRODUKSJON.....	54
4.1 ANALYSE AV RAMME PÅ TO ETASJER.....	55
4.1.1 Analytisk løsning.....	56
4.1.1 FEM-Design .....	61
4.1.3 Robot .....	61
4.1.4 Evaluering .....	62
4.2 ANALYSE AV RAMME PÅ FEM ETASJER.....	63
4.2.1 Analytisk løsning.....	63
4.2.2 FEM-Design .....	68
4.2.3 Robot .....	72
4.2.3 Evaluering .....	76
4.3 ANALYSE AV KONSTRUKSJON I 3D .....	80
4.3.1 Introduksjon.....	80
4.3.2 Import fra Revit .....	83
4.3.2 Laster og lastkombinasjoner.....	88
4.3.2 Elementstørrelse og type element.....	89
4.3.3 Analyser .....	93
4.3.4 Utsikt eksentrisitet.....	103
4.3.5 Evaluering .....	106
<b>DEL III: DISKUSJON OG KONKLUSJON.....</b>	<b>113</b>
5.1 ANALYSER OG RESULTATER .....	114
5.2 PROGRAMMENES BRUKERVENNLIGHET .....	116
5.3 KONKLUSJON.....	117
5.4 FORSLAG TIL VIDEREFØRING AV OPPGAVEN .....	117
<b>REFERANSER.....</b>	<b>118</b>
<b>VEDLEGG.....</b>	<b>120</b>
VEDLEGG A: BJELKEFORMLER .....	121
VEDLEGG B: MATHCAD BEREGNINGER .....	122
B.1 Analytisk løsning av ramme på to etasjer .....	122
B.2 Analytisk løsning av ramme på fem etasjer .....	126
VEDLEGG C: MATERIALDATA (HENTET FRA REVIT).....	130
VEDLEGG D: RESULTATER .....	132

D.1: Egenperioder og effektive modal masser .....	132
D.2: Krefter .....	136
D.3: Forskyvninger.....	139
D.4: Dansekasser med kobling .....	140
D.5: Endring i elementnettet.....	141
D.6: Robot: «Core walls».....	150

## Notasjoner

### Symboler

$A_c$	totalt tverrsnittareal av skjærvegger
$A_i$	effektivt tverrsnittareal av skjærveggen i, langs vurdert retning
$C_t$	faktor som avhenger av byggets horisontale avstivningssystem
$E$	elastisitetsmodul
$E_E$	total respons av seismisk påkjenning
$E_{Edx}$	seismisk lastvirkning i x-retning
$E_{Edy}$	seismisk lastvirkning i y-retning
$E_{Edz}$	seismisk lastvirkning i z-retning
$F$	kraft
$F_b$	skjærkraft ved fundament eller ved toppen av stiv kjeller
$F_D$	dempingskraft
$F_{eff}$	effektiv jordskjelvlust
$F_i$	horisontal kraft i etasje i
$H$	byggets høyde
$I$	treghetsmoment
$L_i$	lengden av gulvet vinkelrett på seismisk påkjenning for etasje i
$L_x$	avstanden mellom avstivende skiver
$M^{eff}$	effektiv modal masse
$M_{ai}$	torsjonsmoment i etasje i
$S$	forsterkningsfaktor som avhenger av grunnforholdene
$S_d(T)$	dimensjonerende responsspekter
$T$	naturlig svingeperiode
$T_B$	nedre grenseverdi av området med konstant spektralakselerasjon
$T_C$	øvre grenseverdien av området med konstant spektralakselerasjon
$T_D$	definerer begynnelsen på spektrets område for konstant forskyvning

$W_d$	arbeid gjort av demping
$a_g$	dimensjonerende grunnakselerasjonen
$a_{g40HZ}$	spissverdi for berggrunnens akselerasjon
$c$	viskøs dempingskoeffisient
$c_c$	kritisk demping
$d$	elastisk forskyvning
$e_a$	utilsiktet eksentrisitet av massen i en etasje i forhold til nominell posisjon
$f$	naturlig frekvens
$h$	høyde
$k$	stivhet
$l$	lengde
$m$	masse
$q$	konstruksjonsfaktor
$r$	frekvensforhold
$x$	relativ forskyvning
$x_g$	grunnens forskyvning
$x_h$	homogen løsning
$x_p$	partikulær løsning
$x_t$	total forskyvning
$\lambda$	korreksjonsfaktor
$\omega$	vinkelfrekvens
$\omega_n$	naturlig vinkelfrekvens
$\omega_d$	dempet vinkelfrekvens
$\beta$	nedre grenseverdier for det horisontale dimensjonerende spektret
$\xi$	dempingsraten
$\varphi$	faseforskyvning



$\psi_n$	forskyvningsform for generalisert en-frihetsgradsystem
$\rho$	korrelasjonskoeffisient
$\phi_j$	vektor for svingeform j
$\Phi$	modal matrise
$\iota$	modal influensvektor

#### Forkortelser

2D	todimensjonal
3D	tredimensjonal
2DOF	to frihetsgrader
3DOF	tre frihetsgrader
CQC	komplett kvadratisk kombinasjon
DAF	dynamisk forsterkningsfaktor
DCH	duktilitetsklasse for høy duktilitet
DCL	duktilitetsklasse for lav duktilitet
DCM	duktilitetsklasse for middels duktilitet
SRSS	kvadratroten av summen av kvadratene
EC0	NS-EN 1990:2002+NA:2008
EC1	NS-EN 1991-1-1:2002+NA:2008
EC8	NS-EN 1998:1:2004+NA:2008
EN	europaisk norm/standard
NS	norsk standard
NA	nasjonalt tillegg
Robot	Robot Structural Analysis Professional

## 1.0 Innledning

### 1.1 Bakgrunn

De første jordskjelvene som er registrert kommer fra Kina og er hele 3000 år gamle. Det var på den tiden vanskelig å forstå hvordan og hvorfor slike skjelvinger i jorden oppsto. Det finns flere sagn om jorden som straffet menneske, mens i Japansk mytologi ble jordskjelv forklart ved at det var en stor malle som slo halen så hardt ned i grunnen at den beveget seg. Greske filosofer var de første til å forklare jordskjelv ved mekaniske forklaringer. Det ble oppdaget at jordskjelv ofte oppstår i nærheten av vulkaner og i mange tilfeller oppsto det også tsunamier i etterkant. Det ble også registrert at jordskjelvene oftere kom langs kysten enn innenlands [2].

Kunnskapen er i dag mye større. Vi vet hvordan og hvorfor jordskjelv oppstår, men vi vet ikke når og siden hvert jordskjelv er forskjellig er det også vanskelig å si hvilke følger et jordskjelv vil få. Vi har kunnskapen gjennom ingeniører som kan dimensjonere for forskjellige typer rystelser, men samtidig er det alltid et ønske om å presse grenser når det gjelder utforming av nye bygninger. Forskjellige konstruksjoner reagerer ulikt på like krefter. Ett jordskjelv kan gi store skader på en lav bygning mens skyskraperen rett ved siden av står uskadet. Det er heller ikke bare konstruksjonens utforming som er av betydning. Hva konstruksjonen er bygget på (fjell, sand, leire etc.) og hvor er den bygget (Norge, Dubai, Japan etc.) er blant to av de viktigste faktorene i dimensjoneringen for jordskjelv. Hvordan kunne ett jordskjelv på 8.8 Mw i Chile (27feb2010) ha 523 omkomne mens ett jordskjelv på 7.0 Mw på Haiti(12jan2010) hadde hele 316 000 omkomne? [10,19].

Mye av forskjellen i ødeleggelser og antall omkomne ligger i praksisen for dimensjoneringen av jordskjell. Fattige land ligger ofte langt bak både når det gjelder kunnskap og økonomi, noe som gjenspeiler seg i ødeleggelser og liv tapt.

Jordskjelvanalyser er avansert og krever gode teoretiske kunnskaper. Forenklete metoder og dataprogrammer gjør beregningene lettere, men det kreves fortsatt at brukeren har en forståelse av hva programmene gjør og hvordan de skal brukes. I denne oppgaven vil det vises til hvordan slike programmer brukes og de forskjellige mulighetene de gir.

### 1.1.1 Generelt om jordskjelv

Jorden er bygd opp av flere lag hvor det ytterste laget er jordskorpen. Jordskorpen består totalt av syv store plater og et antall mindre plater. På grunn av enorme temperaturer i jordens indre kjerne oppstår det spenninger i platene som gjør at de beveger seg i forhold til hverandre. Hovedsakelig kan platene bevege seg på tre måter; forskyve seg fra hverandre, mot hverandre eller parallelt med hverandre. Store energimengder frigjøres når platene gir etter for spenningene. Denne energien brer seg ut som bølger og det er dette som er et jordskjelv. Vi kan registrere størrelsen på jordskjelv ved hjelp av et seismometer. Et seismometer finns i flere varianter, men de er alle basert på et lodds bevegelse i et fjærende oppheng eller på en pendel. Siden energien som frigjøres er så stor benyttes en logaritmisk skala til å måle jordskjelvet. Richters skala er den mest kjente, mens momentmagnitudo er den mest korrekte, da den er nøyaktig også på kraftige jordskjelv. Det er stor variasjon i styrkene til jordskjelv. Små jordskjelv registreres daglig, mens store jordskjelv oppstår mye sjeldnere. Det er ikke bare ødeleggelse av bygninger som er farlige ved jordskjelv, rystelsene i bakken kan blant annet føre til rasfare, tunneler som blir overfylt av vann og ikke minst tsunamier. En tsunami oppstår ved at platene som glir i forhold til hverandre forflytter store mengder vann som skaper høye bølger som ofte beveger seg over lengre avstander enn selve rystelsen i bakken [5]. Av alle naturkatastrofer blir jordskjelv sett på som den mest destruktive. På verdensbasis har over en million mennesker omkommet av jordskjelv og flere hundre milliarder dollar har gått tapt i løpet av de siste hundre årene [4].



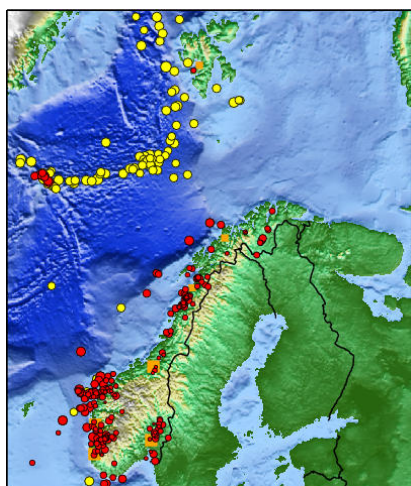
**Figur 1.1:** Hardt rammede jordskjelvområder. Bildet til høyre viser hvordan noen bygninger responderer forskjellig på jordskjelv [18].

Typisk virkning av grunne skjelv i befolkede områder	Tilnærmet styrke	Antall jordskjelv pr år
Totalt ødeleggelse	8,0	0,1 – 0,2
Stor skade	7,4	4
Alvorlig skade, jernbanespor bøyd	7,0 - 7,3	15
Betydelig skade på bygninger	6,2 - 6,9	100
Noe skade på bygninger	5,5 – 6,1	500
Merket av alle	4,9 – 5,4	1 400
Merket av mange	4,3 – 4,8	4 800
Merket av noen	3,5 – 4,2	30 000
Ikke merket, men registrert	2,0 – 3,4	800 000

Tabell 1.1: Typiske virkninger av grunne skjelv i befolkede områder [9]

### 1.1.2 Jordskjelv i Norge

Det er umulig å vite når et jordskjelv kommer til skje, men siden jordskjelvfaren er størst ved randsonene til platene vet vi hvilke områder som er mest utsatt. Området rundt Stillehavet, Tyrkia, Hellas og Italia ligger mer utsatt til en Norge siden de ligger ved skillene mellom platene (se figur 1.3). Til tross for at faren for store jordskjelv i Norge anses som lav i forhold til andre land er faktisk Norge det landet i Nord-Europa hvor flest jordskjelv inntreffer. De fleste er små jordskjelv som nesten ikke merkes, men det har også vært kraftigere skjelv i Norge. Det har vært to skjelv på rundt 6 på Richters skala. I Helgeland i 1819 ble et jordskjelv målt til i underkant av 6, mens det største registrerte skjelvet i Norge var i 2008 på Svalbard og ble målt til 6.2 på Richters skala [4,5].



Figur 1.2: Jordskjelvmålinger gjort i Norge fra 1979 fram til i dag [5].



Figur 1.3: Jordens tektoniske plater [11].

## 1.2 Formål

Formålet med oppgaven var å anvende og sammenligne to av de ledende analyseprogrammene i dimensjoneringen for jordskjelv; FEM-Design og Robot. Det ble lagt vekt på hvilke muligheter programmene gir, resultater, tidsforbruk og brukervennlighet.

## 1.3 Struktur

Oppgaven er delt i tre deler. Den første delen tar for seg den grunnleggende teorien som er nødvendig for å kunne bruke og utnytte analyseprogrammer til dimensjoneringen for jordskjelv. I neste del blir analyser utført analytisk og ved hjelp av FEM-Design og Robot, for konstruksjoner av variende kompleksitet. Siste del inneholder en diskusjon og konklusjon av arbeidet gjort i denne oppgaven.

Den innledende delen av oppgaven utgjør kapittel 1.

Del I inneholder to kapitler, hvor kapittel 2 tar for seg dynamikken. Her blir sentrale ligninger utledet ved hjelp av ett idealisert system. I tillegg vil kapitlet inneholde forklaring av frihetsgrader, duktilitet, samt masse- og stivhetsmatrise. Kapittel 3 er en gjennomgang av hvordan jordskjelv dimensjoneres etter NS-EN 1998-1:2004+NA:2008. Det blir sett nærmere på responsspektrum, lastfaktor og lastkombinasjoner, utforming av konstruksjonen, utilsiktet eksentrisitet og analysemetoder.

Del II inneholder analysene som er gjennomgått i del I. Delen består av tre delkapitler hvor delkapittel 4.1 inneholder analyse av en enkel ramme på to etasjer utført analytisk og ved analyseprogrammene. Det vil bli sett nærmere på hvordan stivheten i dekket (bjelkene) påvirker vinkelfrekvensen og egenperioden til systemet.

Delkapittel 4.2 tar for seg en enkel ramme på fem etasjer. I dette delkapittelet vil det i tillegg til vinkelfrekvenser og egenperioder også bli utregnet tverrkrefter i etasjene. Analysen vil bli gjennomført ved bruk av tverrkraftmetoden og modal-responsspektrum analyse. Delkapittel 4.3 tar steget videre fra enkel rammekonstruksjon til en mer kompleks konstruksjon. Konstruksjonen modelleres i Revit og importmulighetene fra modelleringsprogrammet til analyseprogrammene vil bli testet. Videre så utføres det en modal-responsspektrum analyse og seismisk analyse av konstruksjonen.

Del III diskuterer resultatene fra del II. Tidsforbruket og brukervennlighet er to av faktorene som også drøftes her. Denne delen ender med en konklusjon og forslag til viderføring av oppgaven.

## 1.4 Begrensninger

Det er i denne oppgaven kun blitt utført lineære dynamiske analyser. Programmenes muligheter for ikke-lineære analyser blir nevnt og kort forklart, men uten videre gjennomføring.

Alle analysene er utført på konstruksjoner med lav duktilitet (DCL), og det er ikke tatt hensyn til samvirke mellom jord og konstruksjon (SSI analyse).

# **Del I: Teori**

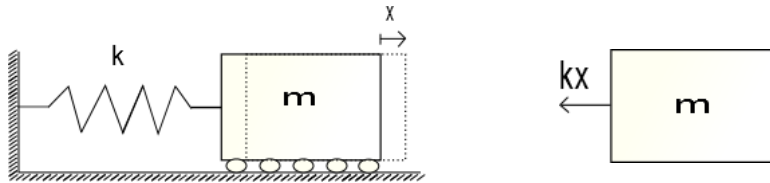
## 2.0 Dynamikk

Kreftene som virker i et jordskjelv kommer altså som bølger av energi som setter bakken i bevegelse. Kreftene er dynamiske og vil påvirke alt som er i kontakt med bakken. Fra bakken overføres energien til konstruksjonen gjennom bunnen og fra der går den opp til toppen og så ned til bakken igjen. Dette fører til vibrasjoner som kan ødelegge konstruksjonen eller i verste fall føre til total kollaps. Det er derfor viktig som ingeniør å forstå hvordan seismiske krefter virker i en konstruksjon og hvordan en konstruerer en motstandsdyktig konstruksjon. To bygninger som står ved siden av hverandre og ser like ut kan ha totalt ulik respons ved jordskjelv. Massen og stivheten til bygningene er to av hovedårsakene til dette. I dette kapitlet vil vi se nærmere på blant annet dette. Vi begynner med en enkel modell for å utlede den dynamiske likevektsligningen, som heretter vil bli referert som bevegelsesligningen. Denne ligningen står helt sentralt i dynamikken. I løpet av kapitlet skal vi ha en forståelse av udempet- og dempet system med og uten ytre vibrasjoner, konstruksjonsstivhet, frihetsgrader og duktiliteten til materialer. Uten en god forståelse av denne teorien vil det være vanskelig å få nytte av analyseprogrammer.



## 2.0.1 Udempet system med fri vibrasjon

Vi begynner med en enkel modell som vi skal senere se er videre overførbart for rammekonstruksjoner. Modellen vi ser på består kun av en kloss festet til en fjær. Vi tenker oss at fjæren er uten masse slik at hele massen til systemet ligger i klossen. Det er heller ingen andre krefter som virker på systemet utenom kraften som kommer fra fjæren. Når vi da drar klossen enten mot høyre eller venstre og så slipper opp, vil klossen eksitere fram og tilbake i en harmonisk bevegelse.



Figur 2.1: Et idealisert fjærsystem (t.v.) og ett «free body diagram» (t.h.)

I et lineært system er kraften og forskyvningen proporsjonale:

$$F = k * x \quad (2.1)$$

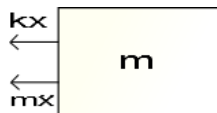
Hvor  $k$  er stivheten til fjæren og  $x$  er avstanden fra likevektspunktet.

For at vi skal kunne bruke lineær teori må følgende forutsetninger innfris [8]:

1. Forskyvningene må være så små at likevekten og kompatibiliteten kan med tilfredsstillende nøyaktighet baseres på den uderformerte geometrien til materialet.
2. Materialet må være i elastisk sone. Det vil si at forholdet mellom spenning og tøyning forblir lineært og alle tøyninger er reverserbare.

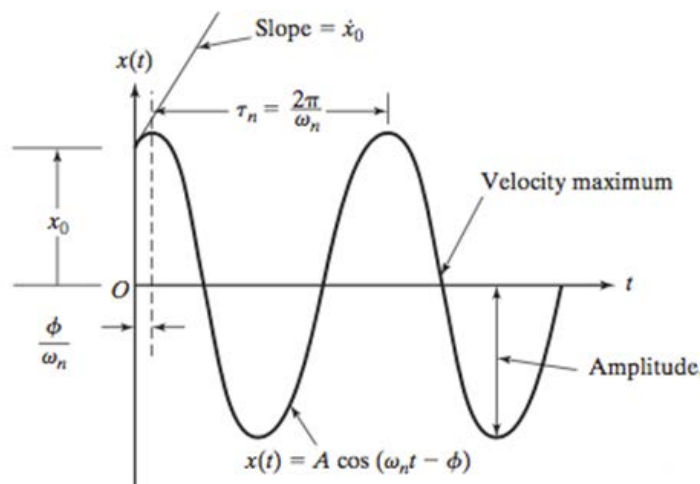
Et objekt utsatt for akselerasjon vil ifølge D'Alamberts prinsipp motvirke denne med en motsatt rettet kraft (treghetskraft):

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.2)$$



Figur 2.2: «Free-body diagram» for ett udempet system med en frihetsgrad

Vi tenker oss at klossen er utsatt for en startkraft som forlenger fjæren. Denne startkraften slipper vi opp og ingen andre krefter virker så på systemet utenom fjærkraften. I teorien vil nå klossen eksitere fram og tilbake evig. Dette skjer fordi det ikke er noe energitap i løpet av bevegelsen til klossen, og derfor vil amplituden på første svingesyklus være lik de neste. Klossen kan nærmest tenkes på som en gravitasjonsspendel som fortsetter bevegelsen fram og tilbake uten synlig tap av fart [7]. Dette kan skisseres grafisk som en cosinus funksjon i en harmonisk bevegelse:



Figur 2.3 Klossens harmoniske bevegelse [7].

Posisjonen til klossen kan til enhver tid finnes ved en andre ordens lineær homogen differensialligning. Vi antar en ligning og finner så de ukjente konstantene:

$$x(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t) \quad (2.3)$$

Alternativt kan vi bruke en funksjon som kun styres av en sinusfunksjon med en faseforskyvning,  $\phi$ :

$$x = A\sin(\omega_n t - \phi) \quad (2.4)$$

Hvor A er amplituden og  $\omega_n$  er den naturlige vinkelfrekvensen til systemet. Vinkelfrekvensen styres av massen og stivheten til systemet:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.5)$$

Vinkelfrekvensen er en viktig parameter innen jordskjelv, selv om den oftest brukes kamouflert gjennom den naturlige egenperioden  $T_n$ . Den naturlige egenperioden er tiden det tar for konstruksjonen å gjennomføre en svingesyklus:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.6)$$

Påføres konstruksjonen en kraft som gir forskyvning og denne kraften tas bort vil konstruksjonen svinge i et «eget» naturlige tempo. Det er dette tempoet den naturlige vinkelfrekvensen og egenperioden beskriver. Grunnen til at dette er en så viktige parametere er at kreftene i konstruksjonen varierer med frekvensen. Ikke minst benyttes parameterne for å unngå resonans i konstruksjonen. Resonans oppstår når konstruksjonen vinkelfrekvens er i nærheten av frekvensen til påkjenningen den utsettes for. Forskyvningen til konstruksjon kan da bli svært store. Seismiske krefter kommer i periodiske bølger og faren er at disse virker i samme frekvens som konstruksjonen helst svinger. Vi skal se nærmere på dette seinere i kapitlet.

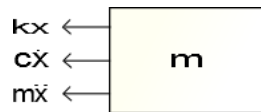
## 2.0.2 Dempet system med fri vibrasjon

I virkeligheten vil ikke klossen fortsette bevegelsen i det uendelige. Krefter fra omgivelsene vil motvirke bevegelsen helt til klossen stopper. Denne dempingen kan komme fra flere ting og derfor er det umulig å fastsette en eksakt demping for konstruksjonen. Istedenfor blir dempingen som regel bestemt ved testing på lignende konstruksjoner. Det finnes flere typer demping, og ofte bidrar flere enn en type [7]. Analyseprogrammene FEM-Design og Robot bruker viskøs demping. Ved viskøs demping er dempingskraften proporsjonal med hastigheten til konstruksjonen:

$$F_D = c * \dot{x} \quad (2.7)$$

Hvor  $c$  kan ses på som en konstant som varierer avhengig av materialet som er brukt og geometrien til konstruksjonen som bidrar til dempingen. Bevegelsesligningen for et dempet system uten ytre kraft blir da:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.8)$$



Figur 2.4: «Free-body diagram» for ett dempet system med en frihetsgrad

Før vi går videre og ser på klossen med påført ytre kraft skal vi først se litt nærmere på kritisk demping og energitapet i løpet av en syklus grunnet demping.

Et systems kritiske demping  $c_c$  styres av massen og den naturlige vinkelfrekvensen til systemet:

$$c_c = 2m\omega_n \quad (2.9)$$

Dempingsraten er forholdstallet mellom den virkelige dempingen til systemet og kritisk demping:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (2.10)$$

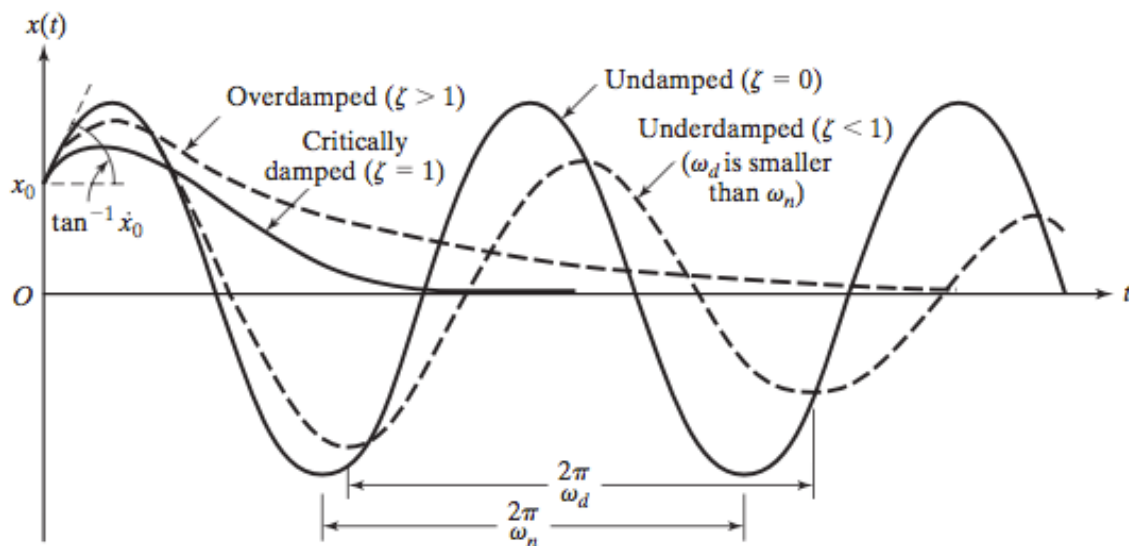
Vi ser nærmere på tre mulige situasjoner:

$\xi = 1$  – kritisk dempet system

$\xi > 1$  – overdempet system

$\xi < 1$  – underdempet system

Ser vi for oss klossen igjen så vil den i et kritisk dempet system returnere til likevektsposisjonen uten å svinge fram og tilbake. For et overdempet system vil det samme skje, men klossen bruker lengre tid tilbake til likevektsposisjonen. Den mest aktuelle situasjonen for oss er et underdempet system hvor klossen svinger fram og tilbake om likevektsposisjonen med mindre og mindre amplitude. Bygninger, dammer, broer og andre konstruksjoner er vanligvis underdempede systemer med en dempingsrate på mindre enn 0,10. [12]



Figur 2.5: Sammenligning av bevegelsen med forskjellig type demping [7]

Av figuren kan vi se at den stiplede linjen som gjelder for et dempet system bruker lenger tid på en syklus enn den udempede gjør. Det vil si at dempingen øker egenperioden, noe som betyr at frekvensen minker desto større dempingen er:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.11)$$

Vi følger referanse [20] som leder oss fram til energitapet i løpet av en svingesyklus. Arbeid er som vanlig kraft multiplisert med strekning og når dette utføres av demping blir arbeidet som følger:

$$W_d = \oint F_d dx = \oint c \dot{x} dx = \oint c x \dot{x} dt \quad (2.12)$$

Vi deler ligning (2.8) med massen og får:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (2.13)$$

Ligningen (2.10) satt inn i (2.13) gir:

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{\omega}_n x + \omega_n^2 x = 0 \quad (2.14)$$

Med tanke på at vi antar at  $x = A \sin(\omega t - \phi)$  og den deriverte blir:  $\dot{x} = \omega A \cos(\omega t - \phi)$ , er arbeidet lik:

$$W_d = c \omega^2 A^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - \phi) dt = \pi c \omega A^2 \quad (2.15)$$

Ved resonans er byggets naturlige vinkelfrekvens lik den ytre påkjenningen,  $\omega = \omega_n$ :

$$W_d(\omega_n) = 2\xi \pi k A^2 \quad (2.16)$$

$$\dot{x} = \pm \omega A \sqrt{1 - \sin^2(\omega t - \phi)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad (2.17)$$

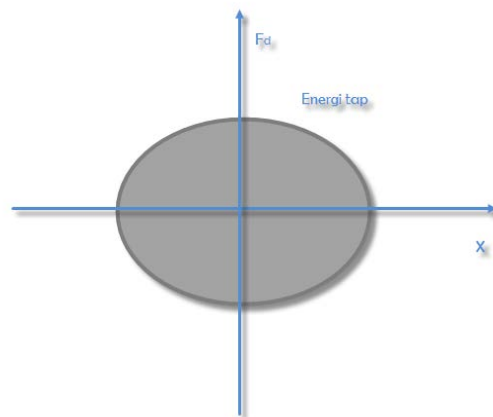
Setter vi dempingen  $F_d$  til å være lik kritisk demping som er;  $F_d = c \omega A * \left(\frac{\dot{x}}{A}\right)$  får vi:

$$F_d = c \dot{x} = \pm c \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad (2.18)$$

Denne ligningen kan omroteres:

$$\left(\frac{F_d}{c \omega A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 \quad (2.19)$$

Energitapet for en syklus i ligning (2.19) kan vi ved grafisk framstilling se at blir en ellipse:



**Figur 2.6** Energitapet for en syklus

### 2.0.3 Udempet system med tvungen vibrasjon

Tvungen vibrasjon vil si at systemet blir utsatt for en ytre kraft eller påtvunget forskyvning. Vibrasjonene kan være harmoniske/ ikke harmoniske, periodiske /ikke periodiske, eller helt tilfeldige vibrasjoner [7].

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (2.20)$$



Figur 2.7: «Free-body diagram» for ett udempet system med tvungen vibrasjon og en frihetsgrad

Ligningen er ikke lenger homogen og differensialligningen vi antok for et udempet system med frie vibrasjoner beskriver ikke bevegelsesløpet lenger. Vi må anta en differensialligning som inneholder både en homogen del og en partikulær del. Vi bruker ligning (2.3) som den homogene løsningen:

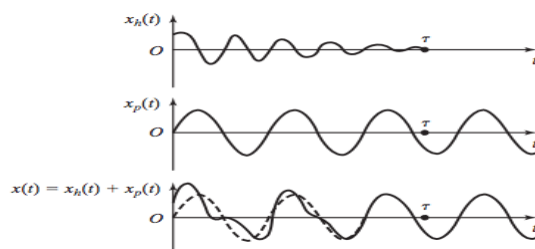
$$x_h(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t) \quad (2.21)$$

For den partikulære løsningen er det viktig å anta en ligning som er på samme form og frekvens som vibrasjonen konstruksjonen er utsatt for. Hvis klossen er utsatt for en harmonisk kraft  $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ , vil det være naturlig å anta den partikulære løsningen til å være:

$$x_p(t) = C\cos(\omega t) \quad (2.22)$$

Hvor C er amplituden. Den generelle løsningen består av den homogene- og den partikulære løsningen summert:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t) + C\cos(\omega t) \quad (2.23)$$



Figur 2.8: Homogen-, partikulær- og generell løsning for et underdempet system [7]



For et dempet system så vi at klossen etter hvert stoppet opp. Vi hadde da den samme homogene ligningen som i dette tilfellet. Altså vil den homogene ligningen kun gi bidrag i begynnelsen før den «dør» ut på grunn av demping. Ligning (2.23) vil da etter en tid  $\tau$  kun være påvirket av den partikulære delen:

Setter vi den partikulære løsningen i (2.22) inn i bevegelsesligning (2.20) ender vi opp med:

$$-\omega^2 m C \cos(\omega t) + k C \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.24)$$

Løser ut med hensyn på C får vi:

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad (2.25)$$

Videre kan vi bli kvitt konstantene A og B hvis vi har startbetingelser. Vi bruker at  $x(t = 0) = x_0$  og at  $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ :

$$A = x_0 - C = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

Dermed ender vi opp med denne ligningen for et udempet system med tvungen vibrasjon:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos(\omega_n t) + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right) \sin(\omega_n t) + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos(\omega t) \quad (2.26)$$

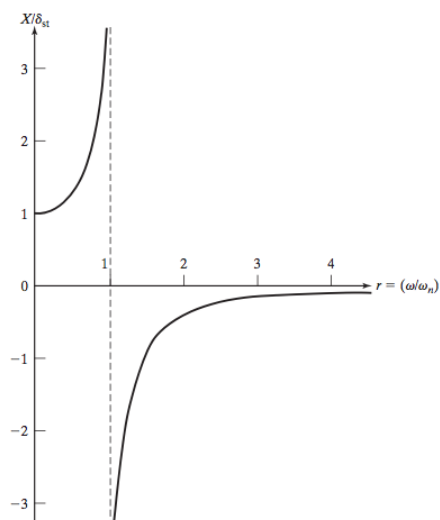
Dynamiske laster kan gi mye større forskyvninger enn statiske laster. Den dynamiske forsterkningsfaktor (DAF) brukes til å vise dette:

$$DAF = \frac{C}{\delta_{sd}} \quad (2.27)$$

Hvor C er maksimal amplitude til den partikulære dynamiske løsningen og  $\delta_{sd}$  er den statiske deformasjonen. Når kraften er konstant  $F_0 = \delta_{sd} * k$  og ved hjelp av ligningene (2.5) og (2.25), kan forsterkningsfaktoren skrives som:

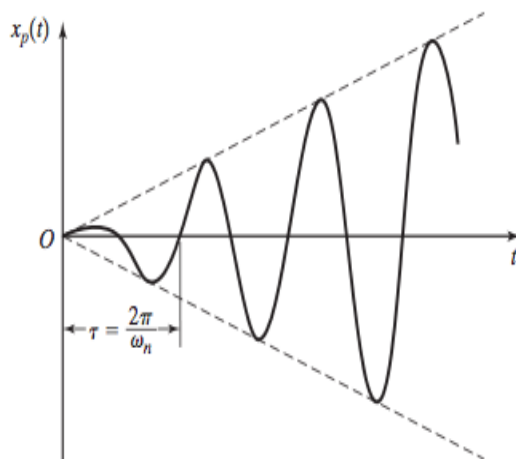
$$DAF = \frac{C}{\delta_{sd}} = \frac{\frac{F_0}{k-m\omega^2}}{\frac{F_0}{k}} = \frac{k}{k-m\omega^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.28)$$

Forsterkningsfaktoren blir tydeligere når den skisserer opp:



Figur 2.9: Forsterkningsforhold for et udempet system. [7]

Vi ser at når frekvensforholdet  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$  nærmer seg 1 går forsterkningsforholdet mot uendelig. Dette kalles resonans og medfører store vibrasjoner (figur 2.10). Når  $r < 1$  virker den ytre påkjenningen i samme retning som forskyvningen til konstruksjonen. Konstruksjonen virker i takt med den ytre påkjenningen ( $F(t)$  er positiv når  $x_p(t)$  er positiv og negativ når  $x_p(t)$  er negativ). Dette medfører større forskyvninger. Når  $r > 1$  vil den ytre påkjenningen virke motsatt rettet av forskyvningene til konstruksjonen ( $F(t)$  og  $x_p(t)$  har motsatt matematisk tegn). Dette vil si at påkjenningen virker ute av takt med konstruksjonens bevegelse og forsterkningen minker [12].

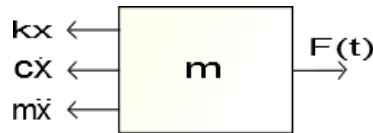


Figur 2.10: Resonsen ved resonans [7]

## 2.0.4 Dempet system med tvungen vibrasjon

Konstruksjonen vi ser på er fortsatt utsatt for en ytre påkjenning som virker harmonisk med kraft  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , men nå virker også en dempingskraft. Kraften tas med på høyre side av ligning (2.8):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.29)$$



Figur 2.11: Figur 2.2: «Free-body diagram» for ett dempet system med en frihetsgrad

Den partikulære løsningen til ligningen vil fortsatt være styrt av den ytre påkjenningen, men på grunn av dempingen vil det ligge en faseforsinkelse som vi uttrykker ved  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} x_p(t) &= C \cos(\omega t - \varphi) \\ \dot{x}_p(t) &= -\omega C \sin(\omega t - \varphi) \\ \ddot{x}_p(t) &= -\omega^2 C \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Vi setter ligningene (2.30) inn i (2.29) og får:

$$\begin{aligned} m[-\omega^2 C \cos(\omega t - \varphi)] + c[-\omega C \sin(\omega t - \varphi)] + k[C \cos(\omega t - \varphi)] &= F_0 \cos(\omega t) \\ [k - m\omega^2]C \cos(\omega t - \varphi) - [c\omega]C \sin(\omega t - \varphi) &= F_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Fra matematikken vet vi:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - \varphi) &= \cos(\omega t) \cos\varphi + \sin(\omega t) \sin\varphi \\ \sin(\omega t - \varphi) &= \sin(\omega t) \cos\varphi - \cos(\omega t) \sin\varphi \end{aligned}$$

Bruker vi dette i ligning (2.31):

$$(k - m\omega^2)C[\cos(\omega t) \cos\varphi + \sin(\omega t) \sin\varphi] - c\omega C[\sin(\omega t) \cos\varphi - \cos(\omega t) \sin\varphi] = F_0 \cos(\omega t)$$

Siden den harmoniske påkjenningen er en cosinusfunksjonen så vil det være lurt å dele ligningen inn etter  $\cos(\omega t)$  og  $\sin(\omega t)$ :

$$C[(k - m\omega^2)\cos\varphi + c\omega\sin\varphi]\cos(\omega t) + C[(k - m\omega^2)\sin\varphi - c\omega\cos\varphi]\sin(\omega t) = F_0\cos(\omega t)$$

For at venstre side av ligningen skal være lik høyre må delen som inneholder  $\sin(\omega t)$  være lik null og delen som inneholder  $\cos(\omega t)$  være lik  $F_0\cos(\omega t)$ :

$$C[(k - m\omega^2)\cos\varphi + c\omega\sin\varphi] = F_0 \quad (2.32)$$

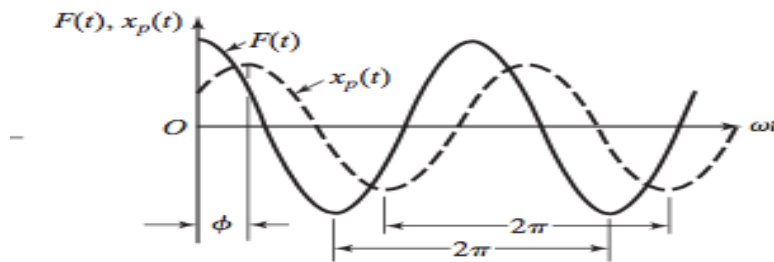
$$C[(k - m\omega^2)\sin\varphi - c\omega\cos\varphi] = 0 \quad (2.33)$$

Bruker (2.33) for å finne faseforskyvningen  $\varphi$ :

$$(k - m\omega^2)\sin\varphi = c\omega\cos\varphi$$

$$\tan\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (2.34)$$



Figur 2.12: Grafisk visning av fasen mellom tvungen vibrasjon og systemets respons [7]

For å finne amplituden  $C$  summerer og opphever vi ligning (2.32) og (2.33) i andre:

$$C^2[(k - m\omega^2)^2\cos^2\varphi + 2(k - m\omega^2)\cos(\varphi)c\omega\sin\varphi + (c\omega)^2\sin^2\varphi + (k - m\omega^2)^2\sin^2\varphi - 2(k - m\omega^2)\cos(\varphi)c\omega\sin\varphi + (c\omega)^2\cos^2\varphi] = F_0^2$$

To av leddene går mot hverandre:

$$C^2[(k - m\omega^2)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (c\omega)^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)] = F_0^2$$

Vi vet at  $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$  så da får vi:

$$C^2[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2] = F_0^2$$

$$C^2 = \frac{F_0^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

$$C = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.35)$$

Vi er interessert i å få tak i den dynamiske forsterkningsfaktoren  $DAF$  for dempet system så vi må gjøre noe om på ligningen. Hvis vi dividerer høyre side med  $k$  både i teller og nevner ender vi opp med:

$$C = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)^2 + \left(\frac{c}{k}\omega\right)^2}}$$

Vi minnes fra tidligere at:

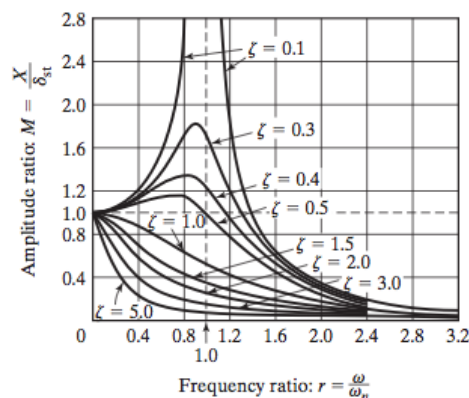
$$\delta_{sd} = \frac{F_0}{k} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_n} \rightarrow \frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$$

$$C = \frac{\delta_{sd}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(c \frac{\omega}{k}\right)^2}}$$

$$\frac{C}{\delta_{sd}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{c}{m} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\frac{c}{\delta_{sd}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2}} = \frac{1}{\sqrt{[1-r^2]^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.36)$$

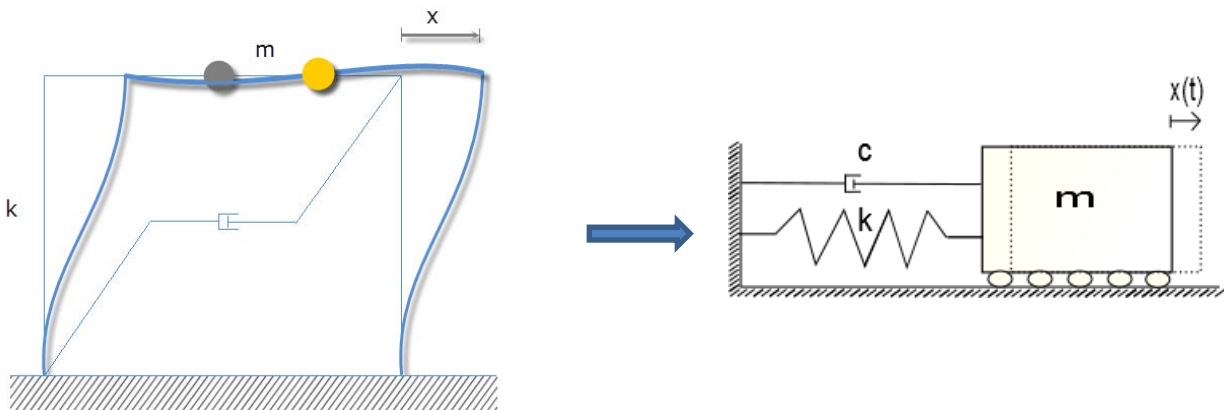
Ved  $\xi = 0$  har vi ingen demping og vi ser at (2.36) blir helt lik den vi hadde i ligning (2.28) for ett udempet system med tvungen vibrasjon. Det vi også kan se er at den dynamiske forsterkningsfaktoren reduseres for alle verdier demping ( $\xi > 0$ ). Spesielt i området nær eller på resonans reduserer dempingen forsterkningen [7].



Figur 2.13 Forsterkningsforhold for forskjellige verdier av demping [7]

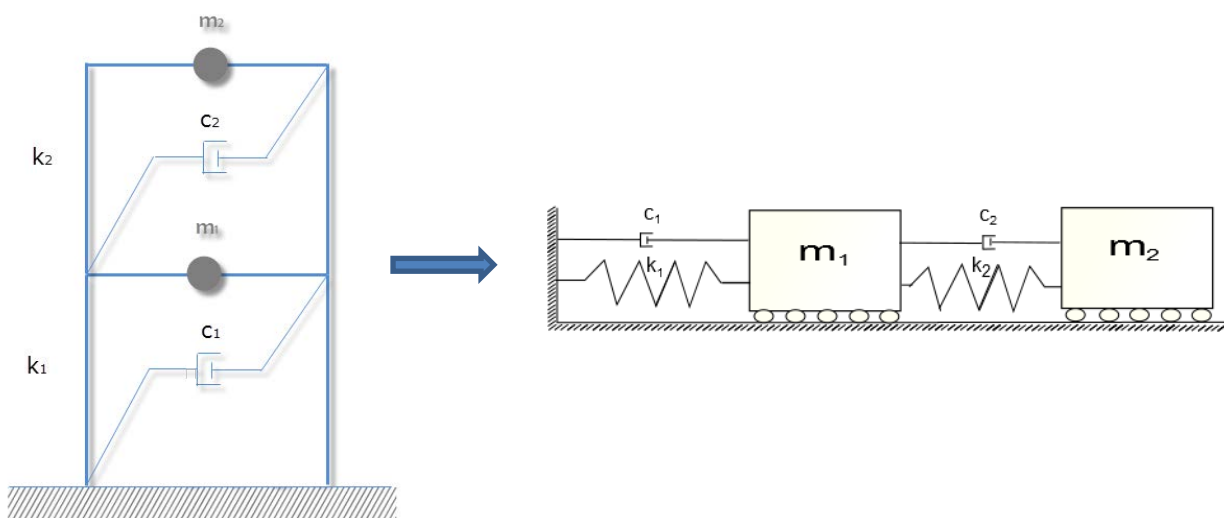
## 2.0.5 Fra fjærsystem til rammekonstruksjon

Til nå har vi sett på et kloss-system hvor klossen har en masse og stivheten ligger i fjæren. Dette er et idealisert system som er overførbart til flere konstruksjoner. I første omgang tenker vi at systemet kun kan forflytte seg i horisontal retning (en frihetsgrad – SDOF). Figuren under viser hvordan en ramme på en etasje, som kan forestille en en-etasjers bygning med en frihetsgrad, kan idealiseres som fjærsystemet vi har brukt.



Figur 2.14: En-etasjers ramme idealisert som fjærsystem

Massen i søylene kan legges til som ekstra masse i bjelkene eller neglisjeres hvis bidraget fra massen i søylene er så lavt i forhold til massen i bjelkene. Vi skal i neste kapittel se nærmere på hvordan og hvorfor dette gjøres. På samme måte som rammen på en etasje kan en to-etasjers ramme forenkles med to klosser med masse  $m_1$  og  $m_2$  og fjærstivhet  $c_1$  og  $c_2$ :

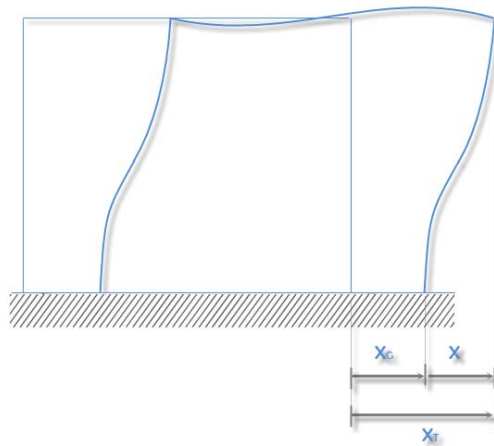


Figur 2.15: To-etasjers ramme idealisert som fjærsystem

## 2.0.6 Effektiv jordskjelvlast

Kraften i bevegelsesligning (2.20) og (2.29) vil i et jordskjelv komme fra vibrasjoner i bakken. Hvis vi ser på den totale forskyvningen er den lik grunnens- og konstruksjonens forskyvning summert:

$$x_t = x + x_g \quad (2.37)$$



Figur 2.16: Forskyvning av grunnen og konstruksjonen

Stivheten og dempingen til konstruksjonen vil bare motvirke massens forskyvning i forhold til basen  $x$ , mens treghetskrefter også vil prøve å motvirke konstruksjonens translasjon  $x_g$  fra bakkens forskyvning. Vi får at  $m\ddot{x}_t = m\ddot{x} + m\ddot{x}_g$  og bevegelsesligningen blir:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} + \ddot{x}_g) + c\dot{x} + kx &= 0 \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= -m\ddot{x}_g \end{aligned} \quad (2.38)$$

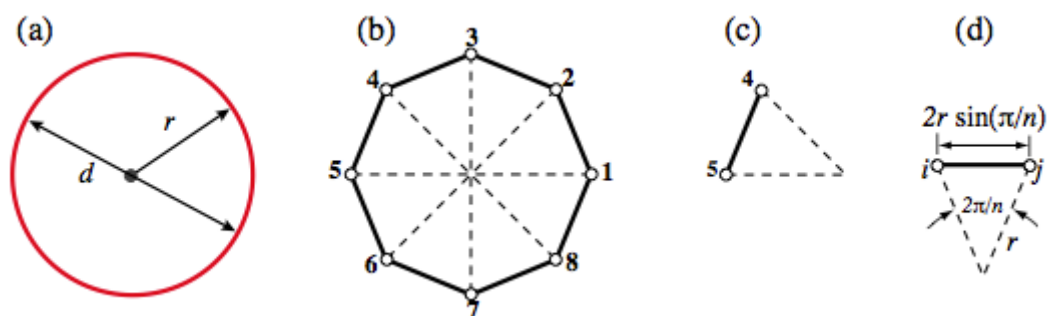
Leddene på høyre side som kommer fra treghetskrefter kalles ofte for effektiv jordskjelvlast  $F_{eff} = -m\ddot{x}_g$ .

## 2.1 Frihetsgrader og massefordeling

Frihetsgradene beskriver hvilke muligheter et system har for å bevege seg i ulike retninger målt ut ifra massens opprinnelige posisjon. Eksemplet vi har brukt så langt er en kloss som kun har mulighet for bevegelse i horisontalretning, den har derfor en frihetsgrad (SDOF- «Single Degree Of Freedom»). Et punkt i et to-dimensjonalt plan (2D) har mulighet for å bevege seg i to ortogonale retninger (2DOF), mens et punkt i 3D har tre mulige bevegelsesretninger (3DOF). I tillegg til forskyvninger kan objekter også rotere. I 3D vil en rammekonstruksjon kunne forskyve seg i tre retninger og rotere i tre retninger (6DOF).

Siden frihetsgradene er knyttet til massen i konstruksjonen vil vi få et uendelig antall frihetsgrader fordi massen er fordelt i uendelig mange punkter utover konstruksjonen. Analytisk kan vi kun løse enkle situasjoner ved hjelp av differensialligninger. Vi må derfor gjøre forenklinger slik at vi kan beregne dette analytisk. Vi søker en modell som gir oss et overkommelig antall frihetsgrader og som samtidig beskriver den virkelige modellen godt nok slik at resultatene ikke blir påvirket i stor grad. For å redusere antall frihetsgrader antar vi at massen blir samlet i diskrete punkter i konstruksjonen [8]. Disse plasseres vanligvis i tyngdepunktet til etasjene hvor en eller flere punktmasser består av den totale massen til en etasje (se figur 2.18). I bygninger ligger ofte vekten hovedsakelig i etasjedekket og bidraget fra vegger og søyler er så lavt i forhold at denne kan i mange tilfeller neglisjeres. Det er likevel vanlig å regne med denne massen, ved at den legges til som et tillegg til massen i etasjene [12].

Siden det er i frihetsgradene vi finner krefter, forskyvninger, rotasjoner etc. må modellen deles inn i mindre deler. Dette gjøres ved hjelp av elementmetoden som er en numerisk metode som brukes for å løse komplekse matematiske differensial- og integralligninger. Metoden går ut på at legemer blir delt inn i mindre deler (elementer) som knyttes sammen i punkter (noder). Antall elementer og noder vil derfor ha en stor innvirkning på hvor nøyaktige resultater vi får [3]. Eksemplet under er hentet fra referanse [13] og viser hvordan en diskre matematisk modell tilnærmes ved hjelp av 8 noder og 8 elementer:



Figur 2.17: a) En sirkel b) sirkelen delt inn i elementer c) ett av elementene d) lengden av elementene [13]



Når antallet noder og elementer øker vil figur 2.17 b) ligne mer og mer på figur 2.17 a). Ser vi for eksempel nærmere på lengden av sirkelen så er den for a) beskrevet som  $L = \pi d$ , og b)  $L_n = \pi_n d$ . Med tanke på at  $d = 2r$  og  $L_n = n * 2r \sin(\frac{\pi}{n})$  får vi at  $\pi_n = n \sin(\frac{\pi}{n})$ . Tabellen under viser hvor mange elementer som må til for at  $\pi_n$  konvergerer mot  $\pi$ :

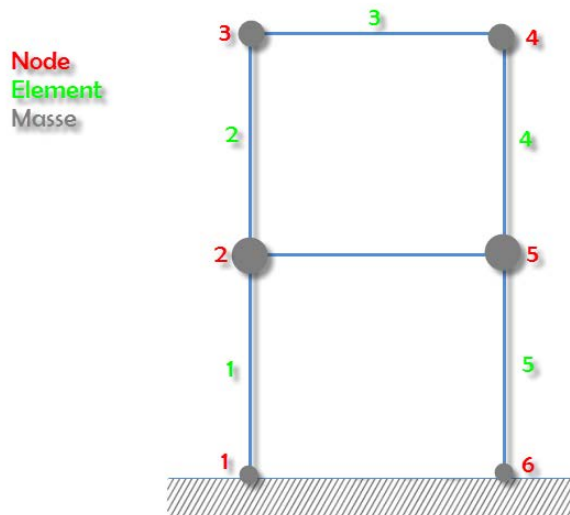
$n$	$\pi_n = n \sin(\pi/n)$	Extrapolated by Wynn- $\epsilon$	Exact $\pi$ to 16 places
1	0.0000000000000000		
2	2.0000000000000000		
4	2.828427124746190	3.414213562373096	
8	3.061467458920718		
16	3.121445152258052	3.141418327933211	
32	3.136548490545939		
64	3.140331156954753	3.141592658918053	
128	3.141277250932773		
256	3.141513801144301	3.141592653589786	3.141592653589793

Tabell 2.1:  $\pi_n$  konvergerer mot  $\pi$ . [13]

Metoden er kun en tilnærming, så uansett om  $n$  går mot uendelig vil aldri  $\pi_n$  bli helt lik  $\pi$ .

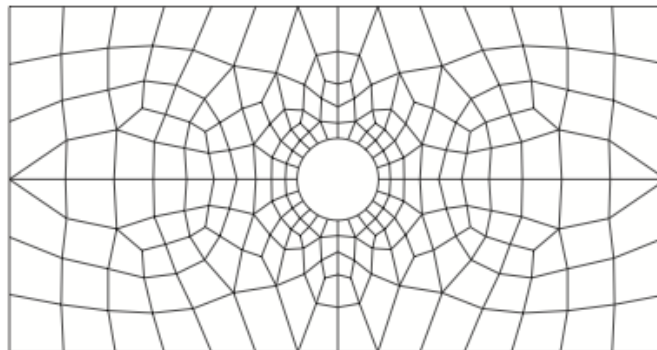
Tilnærmingen vil likevel bli nøyaktig nok for de fleste formål. Utfordringen ligger i å finne et antall  $n$  som gir en god nok tilnærming uten at det blir for tidkrevende å løse problemet.

Utforming av legeme har mye å si for hvor mange elementer og noder som må til. Det var tydelig at for sirkelen så ble antallet elementer høyt, mens for rette elementer som en bjelke eller søyle kan det ofte holde med to. Ser vi på en ramme med to etasjer så vil den, uten videre inndeling elementene, se slik ut:



Figur 2.18: To-etasjers ramme inndelt i noder, elementer og med punktmasser

For plater kan inndelingen bli vanskeligere, spesielt rundt åpninger. For eksempel er området rundt døråpningen i en vegg et område som kan vise seg å være vanskelig å få en bra elementinndeling. Figuren under viser hvordan en plate med hull er inndelt i trekkanter og firkanter for å få et mest mulig optimalt elementnett:

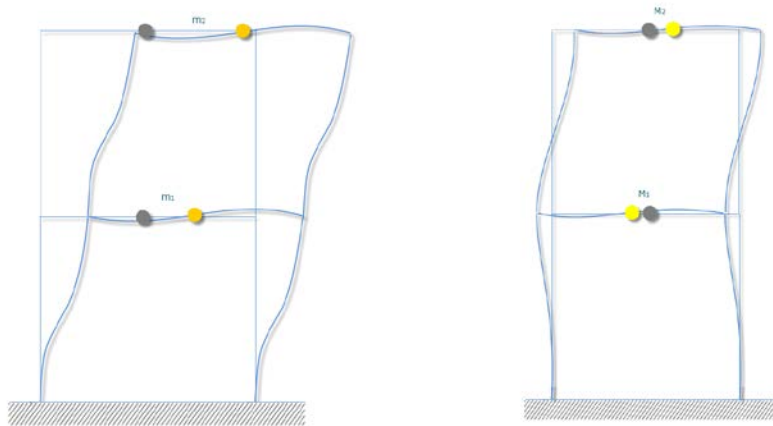


Figur 2.19: Elementinndeling for en plate med sirkulært hull [3]

Både massen og frihetsgradene til konstruksjonen ligger nå i nodene. Hvordan massen og stivheten settes opp i matriser vil bli gjennomgått i kapittel 2.2.

### 2.1.1 Generalisert en-frihetsgradsystem

Vi har til nå sett på hvordan en ramme på en etasje kan forenkles ved at en plasserer massen samlet i et punkt med en frihetsgrad. Når massen er kjent og stivheten er funnet har vi det vi trenger i bevegelsesligningen for å regne ut systemets naturlige egenperiode. Nå skal vi se på en ramme på to etasjer hvor vi da plasserer en punktmasse i hver etasje. Tenker vi oss at massen kun kan bevege seg i planet vil det gi oss to svingeformer:



Figur 2.20: Generaliserte en-frihetsgradsystem hvor massen er fordelt i to punkter

I noen tilfeller vil responsen til systemet være dominert av bare en av svingeformene. Et system hvor vi kan gjøre en tilnærming ved å si at massene kun vil følge den ene svingeformen kalles et generalisert en-frihetsgradsystem. For et slikt system kan vi regne ut naturlige vinkelfrekvenser på samme måte som for et en-frihetsgradsystem. Metodens nøyaktighet avhenger av hvor dominerende den ene svingeformen er. Når svingeformen kun antas til å ha en form og vi har den generaliserte forskyvningen i et punkt, kan forskyvningen til hele systemet beskrives av følgende ligning:

$$x(y, t) = \boldsymbol{\psi}(y)z(t) \quad (2.39)$$

Hvor  $x(y, t)$  er systemets forskyvning i punktene  $y$  til tiden  $t$ , vektoren  $\boldsymbol{\psi}(y)$  er forskyvningsformen som er uavhengig av tiden og  $z(t)$  er den generaliserte forskyvningen. Siden vi «låser» systemet til kun en svingeform får vi økt stivhet og vi oppnår dermed større vinkelfrekvenser enn vi hadde fått om vi behandlet systemet som et fler-frihetsgradsystem. [1]

## 2.1.2 Fler-frihetsgradsystem

For mange systemer vil det være urealistisk at responsen kan beskrives med bare en svingeform. For slike systemer må det tas hensyn til flere svingeformer. Ser vi på rammen på to etasjer (figur 2.20) og tenker at den kun har to horisontale translasjons-frihetsgrader  $x_1$  og  $x_2$ , må vi finne begge verdier for å beskrive responsen til konstruksjonen. Rammen har to frihetsgrader og to mulige svingeformer.

Forskyvningsvektoren for systemet blir da som følger:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)] \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

Matrisen med svingeformene kalles modal matrise  $\Phi$ . Hver kolonne i den modale matrisen tilsvarende en svingeform. Vi kan skrive ligningen for  $k$  antall frihetsgrader på generell form:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^k x_j(t) \phi_j = \mathbf{x}(t) \Phi \quad (2.40)$$

Hvor  $j$  er frihetsgradene,  $\phi_j$  er svingeformene og  $x_j(t)$  er forskyvningen i frihetsgradene. Vi antok forskyvningen og bevegelsesligningen for et udempet lineært system i henholdsvis formel (2.2) og (2.4) til å være:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = 0$$

$$x_j(t) = A_j \sin(\omega_n t - \phi)$$

Ligning (2.4) satt inn i (2.40) gir:

$$\begin{aligned} x_j(t) &= A_j \sin(\omega_n t - \phi) \phi_j \\ \dot{x}_j(t) &= \omega_n A_j \cos(\omega_n t - \phi) \phi_j \\ \ddot{x}_j(t) &= -\omega_n^2 A_j \sin(\omega_n t - \phi) \phi_j \end{aligned} \quad (2.41)$$

Setter så (2.41) inn i bevegelsesligningen (2.2):

$$[-\mathbf{m}\omega_n^2 \phi_j + \mathbf{k}\phi_j] x_j(t) = 0 \quad (2.42)$$

Den trivielle løsningen på ligningen får vi når konstruksjonen ikke er i bevegelse  $x_j(t) = 0$ , men denne er selvfølgelig ikke av interesse. Vi ønsker å se på når leddet  $[-\mathbf{m}\omega_n^2\boldsymbol{\phi}_j + \mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_j] = 0$ . Vi skriver denne ligningen om:

$$[\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m}]\boldsymbol{\phi}_j = 0 \quad (2.43)$$

Massen og stivheten er kjent, det er vinkelfrekvensen  $\omega_n$  og svingeformene som er ukjente. Vi kan ta determinanten til ligningen og ende opp med bare vinkelfrekvensen som ukjent:

$$\det[\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m}] = 0 \quad (2.44)$$

Ved hjelp av disse egenverdiproblemene har vi nå det som trengs for å finne vinkelfrekvenser og svingeformer.

## 2.2 Masse- og stivhetsmatrise

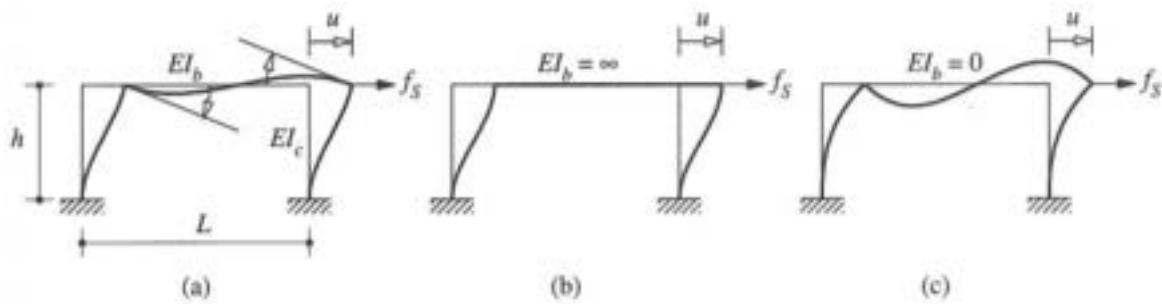
Responsten til en konstruksjon som er utsatt for dynamiske krefter er hovedsakelig bestemt av stivheten og massen til konstruksjonen. Stivheten er konstruksjonens evne til å motstå forskyvning. Geometrien og elastisiteten til materialene er to av de viktigste faktorene. En av metodene for å komme fram til en konstruksjon stivhet er å påføre små laster (enhetslast) og så dokumentere forskyvningen. I et lineært system regnes verdien for forskyvning og kraft som proporsjonal og vi kan dermed bruke den for større verdier. Vi begynner med å sette opp en generell stivhets- og massematrise:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ij} \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Både massematrisen og stivhetsmatrisen har den egenskapen at de er symmetriske. Altså vil  $k_{12} = k_{21}$  og  $m_{12} = m_{21}$  eller skrevet mer generelt:

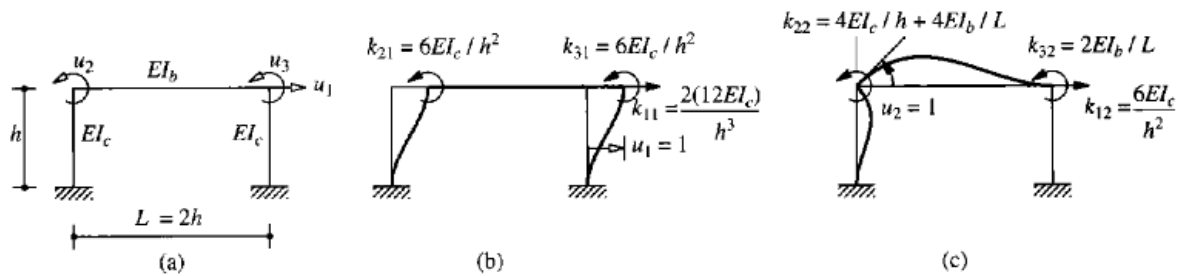
$$k_{ij} = k_{ji} \quad m_{ij} = m_{ji} \quad (2.46)$$

Ser vi på massen som plassert i punkter vil massematrisen være diagonal med  $m_{ij} \neq 0$  når  $i = j$  og  $m_{ij} = 0$  når  $i \neq j$ . Treghtskraftene som motvirker massenes rotasjon gir så liten innvirkning på dynamikken at de kan neglisjeres [12]. Det vil si at vi for to-etasjers ramme kun får verdier for  $m_{11}$  og  $m_{22}$ . For å komme fram til stivhetsmatrisen kreves det litt mer arbeid. Vi bruker et eksempel hentet fra referanse [12] hvor vi har en ramme på en etasje (figur 2.14). Rammen er utsatt for en horisontalkraft som vil føre til deformasjon. Hvordan rammen deformeres avhenger av stivheten til søylene og bjelken. Siden kraften virker horisontalt neglisjerer vi den vertikale frihetsgraden. Vi står da igjen med tre frihetsgrader; horisontal translasjon, og rotasjoner i overgangene bjelke-søyle. Vi ser for oss tre tilfeller hvor bjelkestivheten varierer:



Figur 2.21: Konstruksjonens deformasjon med a)realistisk bjelkestivhet b) uendelig stiv bjelke ( $EI_b = \infty$ ) c) ingen bjelkestivhet ( $EI_b = 0$ ) [12]

Den totale sidestivheten for konstruksjonene på figur 2.21 b) og c) er lette å finne ved hjelp av bjelkeformlene som ligger i vedlegg A, mens sidestivheten for figur 2.21 a) krever at vi setter opp stivhetsmatrisen for rammen. For å finne stivhetsmatrisen påfører vi enhetsforskyvninger i hver av de tre frihetsgradene. Vi påtvinger dermed rammen deformasjon i ulike mønstre for å se hvilke elementer og punkter i rammen som har en tilknytning til frihetsgraden. Punktene uten deformasjon har ingen tilknytning til frihetsgraden. Metoden er basert på lineær teori siden vi antar at den lille deformasjonen som påføres skaper et kraft-forskyvningsforhold som også gjelder for større deformasjoner. Vi tar for oss en og en frihetsgrad hvor enhetsforskyvningen i de øvrige punktene er null. Til slutt bruker vi superposisjonsprinsippet og summerer opp. På den måten kommer vi fram til en mer realistisk stivhet for rammen:



Figur 2.22: a) De tre frihetsgrader (her beskrevet ved  $u_1, u_2, u_3$ ) b) Enhetskraft i  $u_1$  c) Enhetskraft i  $u_2$  [12]

For å oppnå stivhetsmatrisen for rammen må vi påføre enhetslast i de tre frihetsgradene (figur 2.22 a). Vi ser på de tre tilfellene:

$$u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0 \quad (\text{vist i figur 2.22 b}) \quad (2.47)$$

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0 \quad (\text{vist i figur 2.22 c}) \quad (2.48)$$

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1 \quad (2.49)$$

Stivheten i frihetsgradene for hvert av tilfellene finnes ved hjelp av bjelkeformlene i vedlegg A.

Vi begynner med tilfelle i (2.47) som gir oss første kolonne i stivhetsmatrisen:

$$k_{11} = 2 \frac{12EI_s}{h^3}, k_{21} = \frac{6EI_s}{h^2}, k_{31} = \frac{6EI_s}{h^2} \quad (2.50)$$

Tilfelle (2.48) gir oss andre kolonne:

$$k_{12} = \frac{6EI_s}{h^2}, k_{22} = \frac{4EI_s}{h} + \frac{4EI_b}{L}, k_{32} = \frac{2EI_b}{L} \quad (2.51)$$

Tilfelle (2.49) gir oss så den siste kolonnen:

$$k_{13} = \frac{6EI_s}{h^2}, k_{23} = \frac{2EI_b}{L}, k_{33} = \frac{4EI_b}{L} + \frac{4EI_s}{h} \quad (2.52)$$

Den totale stivhetsmatrisen fra blir da:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{24EI_s}{h^3} & \frac{6EI_s}{h^2} & \frac{6EI_s}{h^2} \\ \frac{6EI_s}{h^2} & \frac{4EI_s}{h} + \frac{4EI_b}{L} & \frac{2EI_b}{L} \\ \frac{6EI_s}{h^2} & \frac{2EI_b}{L} & \frac{4EI_b}{L} + \frac{4EI_s}{h} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

For en ramme med lik stivhet i søyle som bjelke ( $EI_s = EI_b$ ) og dobbelt så lange bjelker som søyler ( $2h=L$ ) blir stivhetsmatrisen i (2.47):

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Fra formel (2.1) har vi at kraft er lik stivhet multiplisert med forskyvning:

$$\begin{bmatrix} f_h \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$



Rammen er kun påført horisontal kraft og det virker ingen ytre momenter:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6h \\ 6h \end{bmatrix} u_1 \quad (2.56)$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -\frac{6}{7h} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \quad (2.57)$$

Setter vi (2.57) inn i (2.55) kan vi finne den horisontale kraften  $f_s$  med kun en ukjent,  $u_1$  :

$$f_s = \left( \frac{24EI_s}{h^3} - \frac{EI_s}{h^3} \frac{6}{7h} (6h \quad 6h) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) u_1 \quad (2.58)$$

$$f_s = \frac{96EI_s}{7h^3} u_1 \quad (2.59)$$

Fra formel (2.1) har vi også at stivheten er lik kraften dividert med forskyvningen:

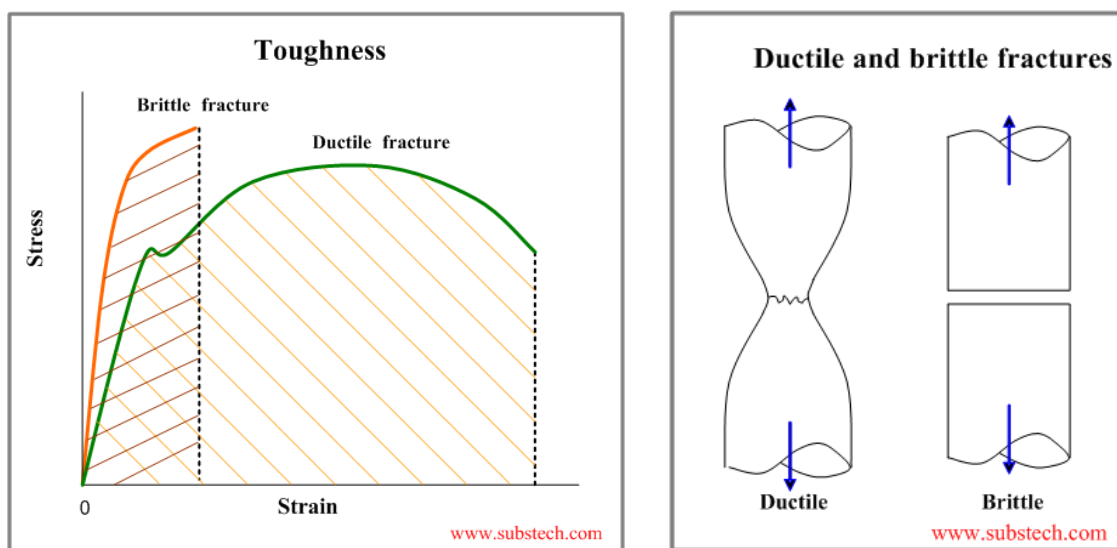
$$k = \frac{F}{u} = \frac{96EI_s}{7h^3} \quad (2.60)$$

Stivheten i (2.60) er for en ramme hvor stivheten i bjelkene er lik stivheten i søylene og hvor bjelkene har dobbel lengde av søylene. Stivhetsmatrisen endrer seg hvis man endrer lengde- eller stivhetsforholdet mellom søyle og bjelke.

## 2.3 Duktilitet

Jordskjelv fører til akselerasjoner i grunnen og energien denne skaper overføres fra grunnen til konstruksjonene som står oppå. Både byggets masse og stivhet har stor betydning for hvor store svingninger bygget vil få. Større masse gir naturlig nok større krefter i konstruksjonen, mens høyere stivhet vil korte ned tiden på svingesyklusen, noe som også fører til høyere krefter. Det vil si at det er ønskelig med en konstruksjon som ikke er for stiv eller tung. Dette er direkte motsatt av det som gjelder for en vindbestandig konstruksjon. Duktiliteten er en annen faktor som spiller inn både i dimensjonering for vind og jordskjelv. Duktilitet blir definert som «evnen til å deformere seg utover elastisk grense uten å miste styrke eller funksjon» [1]. Akselerasjonen i grunnen vil føre til at bygget forskyves gjentatte ganger i flere retninger. Stort sett er påkjenningene like store i motsatte retninger. Det er veldig viktig at bygget kan absorbere og fordele denne energien som brer seg fra bunnen og opp. Mesteparten av konstruksjonen ønsker vi at skal holde seg i elastisk sone, men i noen utsatte steder kan materialet overstige flytegrensen og gå over i plastisk sone. Materialet må derfor være konstruert for å tåle dette. Dette gjøres ved å sikre at materialet har tilstrekkelig deformasjonsevne. Alle komponenter (bjelker, søyler, knutepunkt) må kunne tåle gjentatte krefter og deformasjoner i flere retninger, og de duktile konstruksjonsdelene skal opptre som en mekanisme som virker sammen for å ta opp påkjenningen den blir utsatt for [1].

Vi skal se nærmere på det som skiller ett duktilt og ett sprøtt material. Et duktilt materiale kan ta opp spenninger selv etter flytegrensen for materialet er nådd. Materialet vil få en deformasjon som ikke er reversibel, men det viktigste er at krefter fortsatt blir tatt opp slik at konstruksjonen ikke kollapser. Et sprøtt materiale derimot vil ha liten eller ingen mulighet for å ta opp spenninger over flytegrensen. Ofte vil et sprøtt materiale ha en høyere flytegrense enn et duktilt materiale (se figur 2.23 t.v.). Et sprøtt materiale er likevel ikke ønskelig fordi når maksimal spenning er nådd går materialet kjapt til brudd, noe som er svært farlig. Duktile materiale redistribuerer kreftene ved at materialets geometri endres og vi får et forvarsel på brudd ved deformasjoner som kan oppdages ved testing, eller ved at det blir synlige deformasjoner som kan ses med det blotte øyet.



Figur 2.23: T.v.: Viser kraft-tøyningsforhold [14]. T.h.: hvordan materialet oppfører seg ved bruddlast [14].

Duktiliteten til materialer varierer. Som vi ser i tabell 2.2 bryter lav- og medium stål i plastisk sone, mens stål med høyere styrke bryter i elastisk sone. Andre innvirkninger på duktiliteten til stålet er hvordan det er bygd opp. Legeringer, korngrenser, fremmedatomer, partikler og dislokasjoner kan styres slik at materialet blir mer duktilt. Temperaturen har også stor betydning. Ved høyere temperatur blir materiale mer duktilt og ved lave temperaturer blir materiale sprøtt. Dette er noe som må tas hensyn til ved for eksempel brann.

Betong er et sprøtt materiale som tåler strekk veldig dårlig. Her er det armeringen som tar opp strekket og uten denne ville betong fått et kjapt brudd som er veldig synlig ved et brudd som går på tvers av lasten. Betongsøyler utsatt for store krefter kan se helt ødelagt ut, men ved hjelp av armeringen er betongen holdt på plass og søylens bæreevne er i behold.

Material	Duktil oppførsel
Stål: høy styrke	Lineær elastisk
Stål: lav-medium styrke	Elastisk-plastisk/fullt plastisk
Stål: rustfritt	Fullt plastisk
Aluminium: varmeherdet	Lineær elastisk
Metall med høy temperatur	Viskoplastisk
Polymerer	Lineær elastisk/viskoplastisk

Tabell 2.2: Materialers duktile oppførsel [6]

## 3.0 Framgangsmåte for dimensjonering i henhold til NS-EN 1998-1:2004+NA:2008

Dette kapitlet er ment å gi de viktigste punktene for framgangsmåten for dimensjonering for jordskjelv i Norge. Innholdet er basert på referanse betongelementboken bind H og NS-EN 1998-1:2004+NA:2008 (referanse [1] og [17]). NS-EN 1998-1:2004+NA:2008 blir heretter forkortet til EC8 og definisjoner og formler som er benyttet er referert til med punkt- og/eller kapittelnummer i EC8.

### 3.0.1 Responsspektrum

Det dimensjonerende responsspektret  $S_d(T)$  er gitt i kapittel 3.2.2.5 i EC8 og bestemmes av følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} 0 \leq T \leq T_B: \quad S_d(T) &= a_g * S * \left[ \frac{2}{3} + \frac{T}{T_B} * \left( \frac{2,5}{q} - \frac{2}{3} \right) \right] \\ T_B \leq T \leq T_C: \quad S_d(T) &= a_g * S * \frac{2,5}{q} \\ T_C \leq T \leq T_D: \quad S_d(T) &= a_g * \begin{cases} = a_g * S * \frac{2,5}{q} * \left[ \frac{T_C}{T} \right] \\ \geq \beta * a_g \end{cases} \\ T_D \leq T: \quad S_d(T) &= a_g * S * \begin{cases} = a_g * S * \frac{2,5}{q} * \left[ \frac{T_C * T_D}{T^2} \right] \\ \geq \beta * a_g \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Hvor

$a_g$  er den dimensjonerende grunnakselerasjon

$S$  er forsterkningsfaktor som avhenger av grunnforholdene

$q$  er konstruksjonsfaktoren som avhenger av duktiliteten til konstruksjonen

$T$  er den dimensjonerende seismiske akselerasjonen

$T_B$  er nedre grenseverdi av området med konstant spektralakselerasjon

$T_C$  er den øvre grenseverdien med konstant spektralakselerasjon

$T_D$  er verdien som definerer begynnelsen på spektrets område for konstant forskyvning

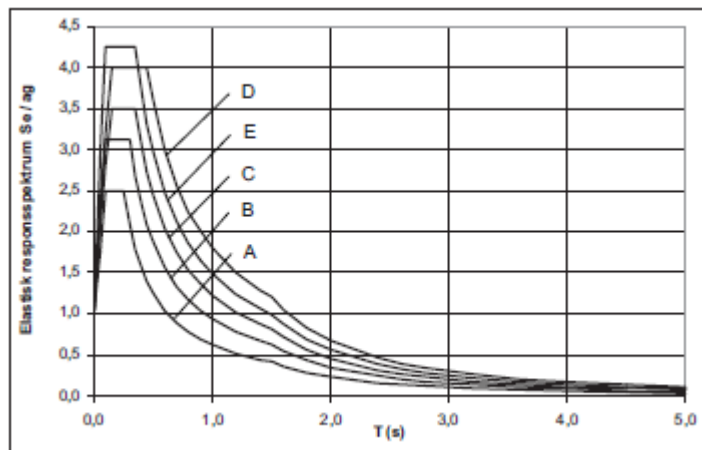
$\beta$  er faktoren for nedre grenseverdier for det horisontale dimensjonerende spektret (NA 3.2.2.5(4) gir verdien  $\beta = 0.2$ )

Det anbefalte elastiske responspekter skal bestemmes etter tabell NA.3.3:

Grunntype	S	$T_B$	$T_C$	$T_D$
A	1,0	0,10	0,25	1,5
B	1,25	0,10	0,30	1,5
C	1,4	0,15	0,35	1,5
D	1,6	0,15	0,45	1,5
E	1,7	0,10	0,35	1,5

Tabell 3.1: Parameterne for det elastiske responspekter i Norge. [17]

Tilpassede verdier for parameterne over er gitt for Norge i det nasjonale tillegget i EC8. Disse parameterne gir det elastiske responsenteret en form som figur 3.1 viser:



Figur 3.1: Elastisk responspekter for de forskjellige grunntyper [17]

Den dimensjonerende grunnakselerasjonen  $a_g$  settes i Norge lik  $0,8 * a_{g40Hz}$ . Spissverdien for berggrunnens akselerasjon  $a_{g40Hz}$  varierer etter seismiske soner. De seismiske sonene og verdier for hele Norge finnes i EC8, figur NA.3(901-902).

Konstruksjonsfaktoren  $q$  avhenger av konstruksjonens duktilitet. I kapittel 2.3 definerte vi duktilitet som materialets evne til å absorbere og fordele energi. Det deles inn i tre klasser; lav, middels og høy. I Norge har vi kun lav (DCL- Ductility Class Low) og medium (DCM- Ductility Class Medium). Lav duktilitet tilsier  $q \leq 1,5$  og dimensjoneringen kan i denne klassen foregå etter vanlige standarder for beregning av kapasiteter. Dimensjoneringen for lav duktilitet gir den ulempen at resultatene blir konservative, altså blir de seismiske kreftene store og fort dimensjonerende framfor vind. Middels duktilitet krever duktil oppførsel av konstruksjonen, men til gjengjeld reduseres de seismiske kreftene. Konstruksjonsfaktoren ligger på mellom  $1,5 < q \leq 4$  for denne klassen. Det vanligste i Norge er middels duktilitet, da det svært sjeldent bygges sprø konstruksjoner med  $q \leq 1,5$  [1].

### 3.0.2 Lastfaktor og lastkombinasjoner

Jordskjelvlaster blir i Norge sett på som en ulykkeslast. Krefteene skal kombineres med andre laster i bruddgrensetilstand. Lastfaktoren for seismiske laster finnes i tabell NA.A1.3 i NS-EN 1990:2002:

	<b>Permanente laster</b>	<b>Jordskjelv last</b>	<b>Dominerende laster</b>	<b>Andre variable</b>
<b>For krefter i konstruksjonen</b>	1,0	1,0	0,0 - 0,8 (se tabell under)	0,0 - 0,8 (se tabell under)
<b>For brudd i grunnen</b>	1,0	1,0	1,0 eller 0,0	1,0 eller 0,0

Tabell 3.2: Lastfaktorer for seismiske laster. [15]

Andre variable laster:

- Vindlaster regnes ikke samtidig med jordskjelv
- Snølaster kan inkluderes med 20 % av maksimalverdi
- Nyttelaster i bygninger som skal medtas i jordskjelvhendelsen er avhengig av type bygg

Tabell NA.A1.1 i NS-EN 1990:2002 gir lastfaktor for permanent lastandel av nyttelaster:

<b>Boliger</b>	<b>Kontorer</b>	<b>Forsamlingslokale</b>	<b>Butikker</b>	<b>Lager</b>
0,3	0,3	0,6	0,6	0,8

Tabell 3.3: Lastfaktor for permanent lastandel av nyttelast. [15]

På grunn av at jordskjelv kan komme fra alle mulige retninger kan vi ikke se på virkningene i retningene hver for seg. I EC8 punkt 4.3.3.5.2(4) står det derfor at lastvirkningene fra den ene retningen skal kombineres med 30 % av lastvirkningene fra de andre retningene:

$$\begin{aligned}
 1) & E_{Edx}'' + 0,3E_{Edy}'' + 0,3E_{Edz}'' \\
 2) & 0,3E_{Edx}'' + E_{Edy}'' + 0,3E_{Edy}'' \\
 3) & 0,3E_{Edx}'' + 0,3E_{Edy}'' + E_{Edy}''
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Hvor  $E_{Edx}$ ,  $E_{Edy}$  og  $E_{Edz}$  er den seismiske lastvirkningen (kraft, forskyvning, etc.) i henholdsvis x-, y- og z-retning. Fortegnet til retningene skal fastsettes slik at lastvirkningen blir mest ugunstig.

Unntak gjelder for konstruksjoner som tilfredsstillt kravet om regularitet i planet (kapittel 3.0.3.1), hvor en kan se på retningene hver for seg uten å kombinere retningene som i (3.2).

I vertikal retning skal det elastiske responspekteret ifølge tabell NA.3.4 i EC8 settes lik 60 % av det horisontale. På grunn av utelatelseskravet i punkt NA.3.2.1(5) som sier at dersom

$a_g S < 0,05g = 0,49 \frac{m}{s^2}$  vil de vertikale rystelsene bli utelatt i de fleste tilfeller. Vi står da igjen med to horisontale retninger som skal kombineres:

$$\begin{aligned} 1) & E_{Edx}'' + 0,3E_{Edy}'' \\ 2) & 0,3E_{Edx}'' + E_{Edy}'' \end{aligned} \quad (3.3)$$

I kapittel 2.1.2 gikk vi gjennom fler-frihetsgradssystem og at responsen for disse sjeldent kan beskrives kun ved hjelp av en svingeform. Siden vi da ender opp med flere svingeformer med maksimale verdier som ofte opptrer på forskjellige tidspunkt blir det for konservativt å summere maks verdi for hver svingeform. Punkt 4.3.3.2 i EC8 står det at den totale responsen  $E_E$  kan regnes etter SRSS (Square Root of the Sum of the Squared) metoden:

$$E_E = \sqrt{\sum_{i=1}^k E_{Ei}^2} \quad (3.4)$$

hvor  $E_{Ei}$  er lastvirkningen for svingeformen  $i$ . For at formelens skal kunne brukes må alle svingeformer være uavhengig av hverandre. To svingeformer ( $T_j \leq T_i$ ) er uavhengige hvis den høyeste svingeformen har en egenperiode som er på maksimalt 90 % av den forrige ( $T_j < 0,9T_i$ ). SRSS metoden gir gode resultater for konstruksjoner hvor egenperiodene er uavhengige og de naturlige egenperiodene ikke ligger nærme hverandre. Dersom dette ikke er tilfellet, krever EC8 en mer nøyaktig metode. Fullstendig kvadratisk metode (CQC - Complete Quadratic Combination) tar hensyn til at svingeformene avhenger av hverandre. Det brukes derfor en korrelasjonskoeffisient  $\rho_{ij}$  som reduserer den totale responsen til en mer nøyaktig verdi:

$$E_E = \sqrt{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \rho_{ij} * E_{Ej} * E_{Ei}} \quad (3.5)$$

Korrelasjonskoeffisienten er gitt av:

$$\rho_{ij} = \frac{8(\xi_i \xi_j)^{0,5} (\xi_i + r \xi_j)^{1,5}}{(1 - r^2) + 4 \xi_i \xi_j r (1 + r^2) + 4(\xi_i^2 \xi_j^2) r^2} \quad (3.6)$$

hvor  $\xi_i$  og  $\xi_j$  er dempingsraten for henholdsvis svingform i og j og frekvensforholdet  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ . Når dempingen er konstant vil  $\xi_i = \xi_j$  og vi får redusert ligningen:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1+r)^{1,5}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2r(1+r^2)} \quad (3.7)$$

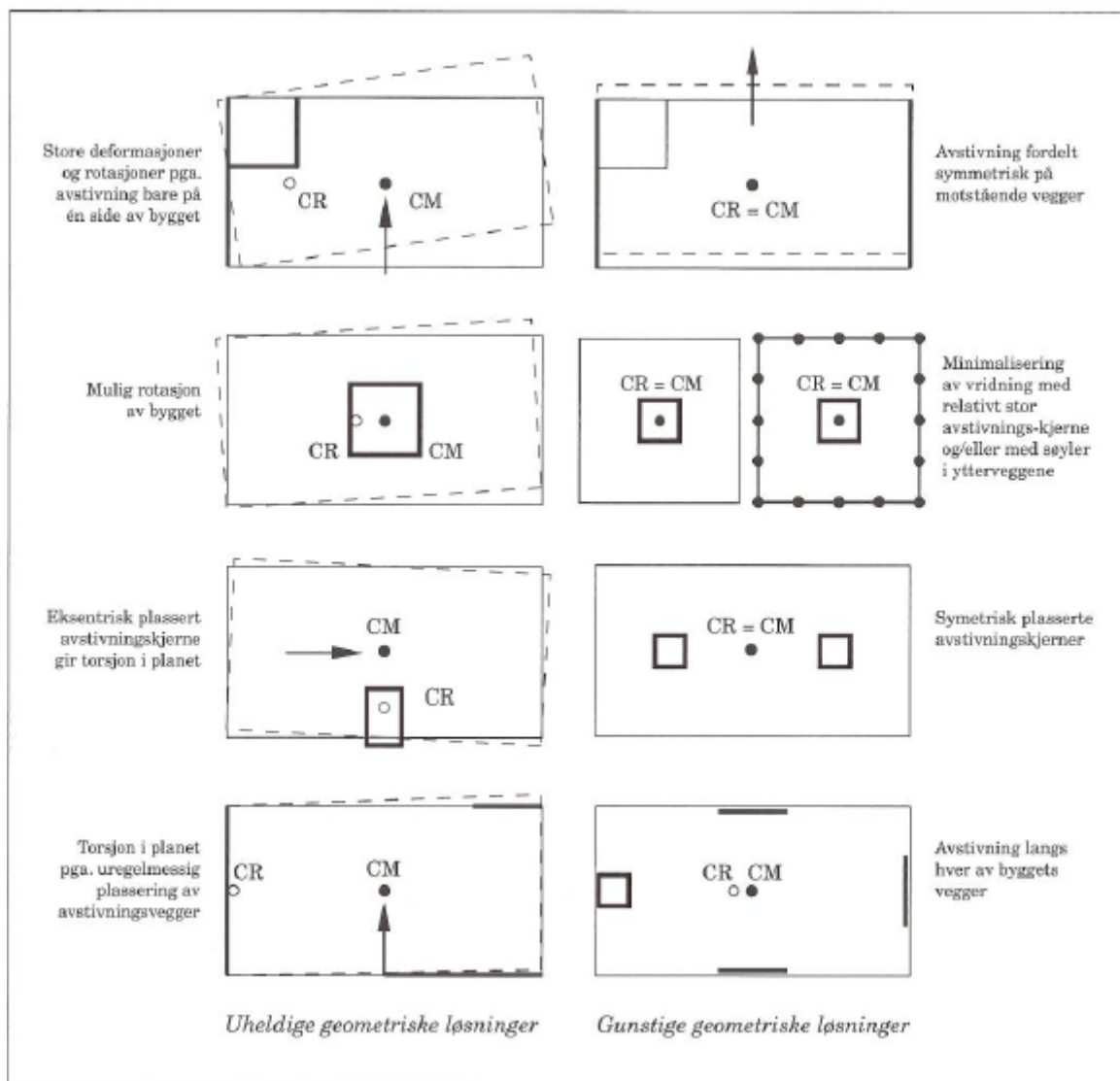


### 3.0.3 Utforming av konstruksjonen

I prosjekteringen er det flere viktige prinsipper som må tas hensyn til for å oppnå en konstruksjon som er utformet for å tåle seismiske krefter. Styrende prinsipper står i EC8 punkt 4.2.1 som går ut på å utforme konstruksjonen regelmessig, symmetrisk og enkel både vertikalt og horisontalt. Ved å tilfredsstille prinsippene vil en få en konstruksjon som er forutsigbar og pålitelig skulle et jordskjelv inntreffe. En enkel konstruksjon er lett å dimensjonere fordi lastvirkningene er oversiktlige og byr på liten usikkerhet. Et regulært og symmetrisk bygg fordeler kreftene godt slik at en unngår store spenningskonsentrasjoner i deler av bygget. Vi skal se at forenklinger kan gjøres for konstruksjoner som er regulære i plan og oppriss.

### 3.0.3.1 Regularitet i plan

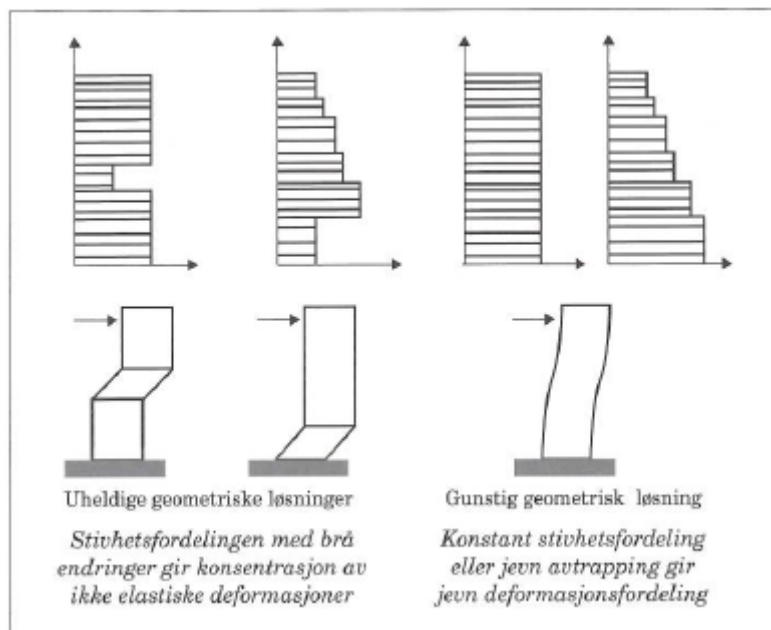
Regularitet i planet er viktig for å unngå store torsjonskrefter i bygget. Det er avstanden mellom massesenter og stivhetssenter som gjør at vi får torsjonskrefter, og det er derfor ønskelig at disse er så nærme hverandre som mulig. Stor avstand kan føre til så store krefter at bygget roterer og da deformeres, noe som kan føre til kollaps. Det er viktig med enkle løsninger og en bevisst plassering av vegger, sjakter og andre konstruksjonsdeler som skal ta opp de horisontale kreftene. Bygget skal være tilnærmet symmetrisk i plan i forhold to ortogonale retninger. Figuren under er hentet fra [1] og viser heldige og uheldige løsninger:



Figur 3.2: Regularitet i plan. Heldige og uheldige geometriske løsninger [1]

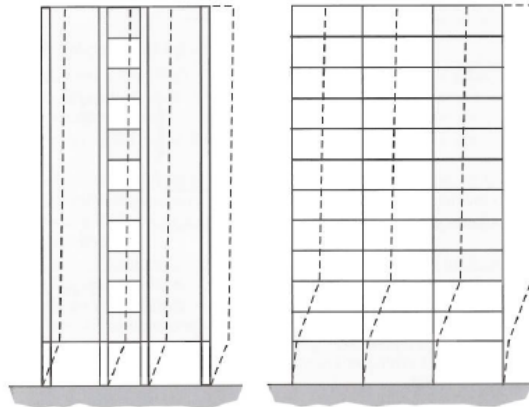
### 3.0.3.2 Regularitet i oppriss

I vertikalretning skal avstivningssystemet som tar opp kreftene være kontinuerlige fra fundament til toppen av bygningen. Både massen og stivheten til konstruksjonen bør forbli noenlunde konstant og uten brå endring fra etasje til etasje. Det er også ønskelig med likhet mellom bæresystemet i to ortogonale retninger. Konstruksjonsfaktoren som brukes i dimensjoneringen er avhengig av regulariteten i opprisset. Punkt 5.2.2.2(3) i EC8 sier at en reduksjon på 20 % bør innføres for et system som ikke er regulært i oppriss.



Figur 3.3: Regularitet i oppriss. Heldige og uheldige løsninger [1]

Soft story er betegnelsen på en konstruksjon hvor det er manglende regularitet i oppriss. En etasje har lavere stivhet enn de andre og spenningene blir da konsentrert her.



Figur 3.4: Soft story [1]

Det er regulariteten som avgjør hvilken metode vi kan bruke i analysen av seismiske laster. På en enkel og regulær konstruksjon kan det brukes forenklete metoder, disse skal vi se nærmere på i neste kapittel. Tabellen under viser hvilke forenklinger som kan gjøres alt etter regulariteten i plan og oppriss:

Regularitet		Tillatt forenkling	
I planet	I oppriss	Modell	Lineær elastisk analyse
Ja	Ja	Plan	Tverrkraft
Ja	Nei	Plan	Modal
Nei	Ja	Romlig	Tverrkraft
Nei	Nei	Romlig	Modal

Tabell 3.4: Tillatt forenkling etter regularitet [1]

### 3.0.4 Utsiktet eksentrisitet

Vi gikk i kapittel 3.0.3.1 gjennom at regulariteten i planet var viktig for å unngå store torsjonskrefter i bygget. Når stivhetssenteret ikke sammenfaller med massesenteret vil bygget rotere under påkjenning av krefter. Når vi forenkler konstruksjonen ved å sette massene i punkter istedenfor fordelt utenfor konstruksjonen, vil punktmassens plassering ha stor betydning for kreftene i konstruksjonen. For å ta hensyn til denne usikkerheten står det i EC8 punkt 4.3.2 at plasseringen av massen skal forskyves fra sin «nominelle plassering i hver retning av en utsiktet eksentrisitet»:

$$e_{ai} = \pm 0,05 * L_i \quad (3.8)$$

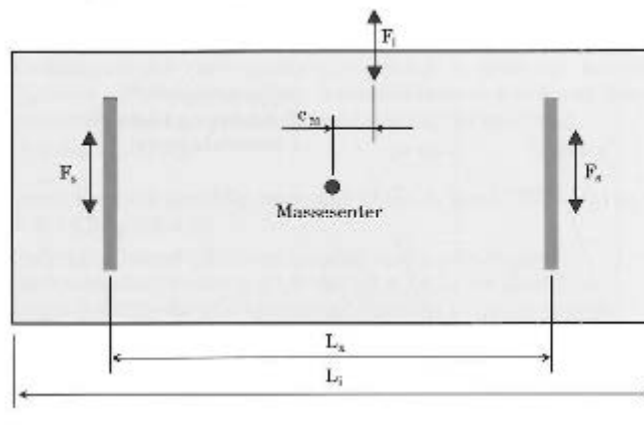
Hvor  $e_{ai}$  er den utsiktede eksentrisiteten for massen i etasje  $i$ , og  $L_i$  er lengden av gulvet vinkelrett på den seismiske påkjenningen i etasje  $i$ . Kraftene fra denne utsiktede torsjonen kommer altså som et tillegg i hver etasje. Dette tillegget kan vi legge til ved at massen forskyves i ugunstige retninger eller forenklet metode som legger til ekstra krefter i hver etasje. Krafttillegget  $\Delta F_{si}$  i hver etasje kan regnes etter punkt 4.3.3.3(1) i EC8:

$$\Delta F_{si} = \frac{e_{ai} * F_i}{L_x} \quad (3.9)$$

Hvor  $F_i$  er horisontal kraften som virker i etasje  $i$  og  $L_x$  er bredden mellom avstiverne (se figur 3.5).

Torsjonsmomentet  $M_{ai}$  i hver etasje blir da:

$$M_{ai} = e_{ai} * F_i \quad (3.10)$$



Figur 3.5: Krefter i planet fra utsiktet torsjon [1]

## 3.1 Analysemetoder

Det er flere metoder for å beregne de seismiske lastene på konstruksjonen. Avhengig av konstruksjonens utforming kan vi bruke en forenklet lineær elastisk metode som beregninger egensvingeperioder og krefter. De ikke-lineære metodene er mer nøyaktige, men er samtidig mer avanserte og tidkrevende. Metodene vil bli forklart i dette kapitlet.

### 3.1.1 Tverrkraftmetoden

Tverrkraftmetoden er en forenklingsmetode som kan brukes hvis konstruksjonen tilfredsstiller kravet om regularitet i oppriss som ble beskrevet i kapittel 3.0.3.2. Punkt 4.3.3.2.1 i EC8 stiller også krav til at første egenperioden er lavere enn  $4 T_c$  eller 2 s.

Når disse kravene er tilfredsstilt kan bygget analyseres med antakelsen at bygningens respons kun er avhengig av den første egensvingeperiode i hver horisontale retning. Metoden er konservativ, noe som vil si at egenperiodene blir kortere enn de er i virkeligheten.

Metoden er svært enkel fordi ved hjelp av noen forenklete formler finner en kjapt en tilnærmet egenperiode for konstruksjonen som videre brukes til å finne kreftene som virker i konstruksjonen. Den dynamiske responsen blir dermed tilnærmet ved statiske krefter som blir satt på etasje vis.

### 3.1.1.1 Egensvingeperiode

For bygg under 40 meter kan første egensvingeperiode  $T_1$  kan tilnærmes etter punkt 4.3.3.2.2(3) i EC8:

$$T_1 = C_t * H^{\frac{3}{4}} \quad (3.11)$$

Hvor H er byggets høyde fra fundament eller overkant stiv kjeller og  $C_t$  er byggets horisontal avstivningssystem. Verdier av  $C_t$  er gitt i punkt 4.3.3.2.2 og vist her i tabell 3.5:

Horisontal avstiving	Verdi av $C_t$
Stålramme (momentstivt stålfagverk)	0,085
Betongramme (innspenne søyler, betongfagverk)	0,075
Andre (betong veggskiver)	0,05

Tabell 3.5:  $C_t$  verdier for horisontale avstivinger [1]

For konstruksjoner med veggskiver i betong eller mur kan verdien av  $C_t$  alternativt settes til:

$$C_t = \frac{0,075}{\sqrt{A_c}} \quad (3.12)$$

Hvor  $A_c$  er det totale effektive arealet av skjærveggene i første etasje i bygningen [ $m^2$ ]

$$A_c = \sum_i A_i * \left[ 0,2 + \frac{l_{wi}}{H^2} \right] \quad (3.13)$$

$A_i$  er det effektive tverrsnittarealet av skjærveggen  $i$  langs den vurderte retningen i første etasje i bygningen [ $m^2$ ].  $l_{wi} \leq 0,9 * H$  er lengden på skjærveggen  $i$  i retning parallelt med de påførte med de påførte kreftene [m].

En alternativ formel for å tilnærme første egensvingeperiode er gitt i punkt 4.3.3.2.2(5):

$$T_1 = 2 * \sqrt{d} \quad (3.14)$$

hvor d er den elastiske forskyvningen av toppen av bygningen som følge av gravitasjonslastene som er påført i horisontalretning.

Felles for disse to tilnærmingene for første egenperiode er at de gir en lavere egenperiode enn det konstruksjonen har i virkeligheten. Dette er til sikker side da lavere egenperioder gir høyere krefter.

### 3.1.1.2 Skjærkraft ved fundamentnivå

Skjærkraften ved fundamentnivå eller ved stiv kjeller kan beregnes etter punkt 4.3.3.2.2(1):

$$F_b = S_d(T) * m * \lambda \quad (3.15)$$

Hvor

$S_d(T)$  er byggets dimensjonerende seismiske akselerasjon [ $m/s^2$ ]

T er byggets første egensvingeperiode

m er byggets totale masse over fundamentnivå [kg], beregnet i samsvar med 3.2.4(2)

$\lambda$  er korreksjonsfaktor (0,85 for  $T < 2 * T_c$  og mer enn to etasjer, ellers 1,0)

### 3.1.1.3 Fordeling av krefter i konstruksjonen

Skjærkraften vi fant over skal fordeles på hver etasje i bygget. Det finnes to måter å gjøre dette på; en med statisk lineær form og en med statisk modal form. Den statisk lineære formen antar at de horisontale kreftene bestemmes av produktet av massen og høyden i hver etasje:

$$F_i = F_b \frac{z_i * m_i}{\sum_{j=n} z_j * m_j} \quad (3.16)$$

En bedre tilnærming fås ved statisk modal form som bruker forskyvningene i etasjene istedenfor høyden:

$$F_i = F_b \frac{s_i * m_i}{\sum_{j=n} s_j * m_j} \quad (3.17)$$

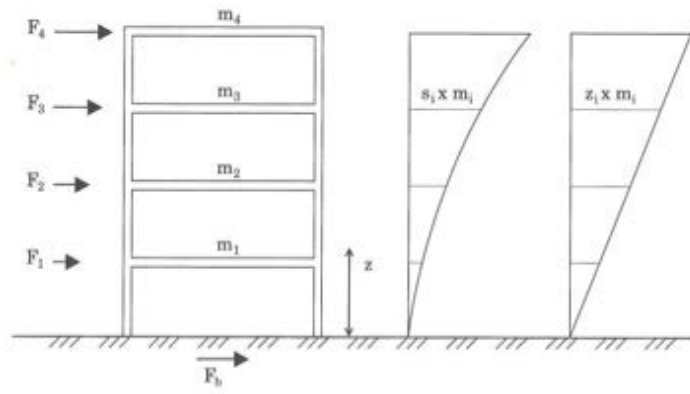
$F_i$  er horisontallasten fra jordskjelvet i betraktet etasje

$s_i, s_j$  er forskyvning av massen i betraktet etasje i første svingeform

$m_i, m_j$  er etasjemasse etter punkt 3.2.4 i EC8

$z_i, z_j$  er høyden til massene





Figur 3.6: Forskjellig fordeling av krefter etter tverrkraftmetoden:  
T.v.: statisk modal form, t.h.: statisk lineær form [1]

### 3.2 Modal respons-spektrum analyse

Hvis bygget ikke er regulært i oppriss vil bygget bevege seg i flere retninger og da gir ikke tverrkraftmetoden en god nok tilnærming for de seismiske lastene. En modal respons-spektrum analyse tar hensyn til at bygget er et fler-frihetsgradsystem med flere svingeformer. Svingeformene gir ulike bidrag til den globale responsen. Det er den effektive modale massen som gjør at en svingeform bidrar mer enn en annen. Den effektive modale massen kan ses på som den delen av massen som svingeformen klarer å sette i bevegelse og dermed gir et bidrag til skjærkraften som virker i fundamentet eller ved stiv kjeller. Summeres den effektive massen for alle svingeformer i en retning skal det gi lik den totale massen av konstruksjonen.

Det er i Eurokoden krav til hvor mange svingeformer med tilhørende svingende masse som må være med i beregningen for at analysen skal være en god nok tilnærming. Begge disse to må være oppfylt:

- Summen av de effektive modale massene for svingeformene som er medtatt, må være større enn 90 % av byggets seismiske masse.
- Alle svingeformer som bidrar med mer enn 5 % til byggets masse medtas.

Noen konstruksjoner er så irregulære at det ikke er mulig å oppnå kravene ovenfor. Punkt 4.3.3.3.1 i EC8 sier at minste antall  $k$  svingeformer som da skal inkluderes skal oppfylle begge kravene under:

$$k \geq 3\sqrt{n} \quad (3.18)$$

og

$$T_k \leq 0,20 \text{ s} \quad (3.19)$$

Hvor  $k$  er antall svingeformer,  $n$  er antall etasjer over fundament eller stiv kjeller og  $T_k$  er egenperioden av svingeform  $k$ .

### 3.2.1 Kreftene i fundamentet eller ved stiv kjeller

Når antallet svingeformer er bestemt så gjenstår det å regne ut hvor store krefter de gir i fundamentet.

Dette regnes etter formelen:

$$F_{bj} = M_j^{eff} * S_d(T_j) \quad (3.20)$$

$F_{bj}$  er skjærkraften i fundamentet eller ved stiv kjeller på grunn av svingeform  $j$ .

$M_j^{eff}$  er den effektive modale massen for svingeform  $j$

$S_d(T_j)$  er byggets dimensjonerende seismiske akselerasjon [ $m/s^2$ ]

$T_j$  er egenperioden til den enkelte svingeform  $j$

### 3.2.2 Effektiv modal masse

Vi har sett at antall svingeformer som må være med avgjøres av den effektive modale massen. En svingeform som får stor andel av totalmassen i sving, slik at den gir skjærkraft i fundamentet, har høy effektiv modal masse. Den effektive modale masse  $M_j^{eff}$  vil altså variere alt etter hvilken svingeform  $j$  en ser på:

$$M_j^{eff} = \gamma_j L_j = \frac{L_j^2}{M_j} \quad (3.21)$$

Hvor  $L_j$  er vektet masse:

$$L_j = \phi_j^T \mathbf{m} \mathbf{u} \quad (3.22)$$

Og  $M_n$  er den generaliserte massematrisen:

$$M_j = \phi_j^T \mathbf{m} \phi_j \quad (3.23)$$

Her beskriver  $\gamma_j = \frac{L_j}{M_j}$  det modale bidraget fra svingeformen til den totale responsen til

konstruksjonen.  $\mathbf{u}$  er en modal influensvektor som tar hensyn til om kreftene fra grunnakselerasjonen virker i massene:

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^k \Gamma_j \phi_j \quad (3.24)$$

Summeres de effektive modale massene vil en få konstruksjonens totale seismiske masse:

$$\sum_{j=1}^k M_j^{eff} = \sum_{j=1}^k m_j \quad (3.25)$$

Hvor stor den effektive modale massen blir, er direkte avgjørende for resultatet av analysen.

De effektive modale kreftene i etasjene kan så regnes ut:

$$F_j = \Gamma_j * m * \phi_j * S_d(T) \quad (3.26)$$

$S_d(T)$  er det dimensjonerende responspektret (se kapittel 3.0.1)

Den effektive modale massen blir som regel gitt i forhold til konstruksjonens totale modal masse.

Derfor vil vi som regel oppgi den effektive modale massen som følger:

$$m_j = M_j^{eff} / M_{tot}$$

Hvor  $m_j$  er forholdstallet mellom effektiv modal masse  $M_j^{eff}$  og total modal masse  $M_{tot}$ . Den totale modale massen er lavere enn den totale massen til konstruksjonen. Dette fordi den massen som ligger i tilknytning til fundamentet eller ved stiv kjeller og dermed gir veldig lite bidrag til skjærkreftene ikke medregnes i den modale massen.

### 3.3 Ikke-lineær analyse

Når kravene for bruk av forenklede metoder ikke oppnås eller det kreves mer nøyaktige resultater, brukes en ikke-lineær analyse for middels duktile konstruksjoner. Det er mulig å gjøre både statisk og dynamisk ikke-lineær analyse.

Den statiske analyse, også kalt «pushover» analyse, foregår ved at en påfører forskyvninger i horisontalretning for å stadfeste responsen til konstruksjonen. Konstruksjonen blir belastet med monotont økende krefter helt til brudd oppstår. Analysen gir et eksakt forhold mellom kraft og forskyvning, det oppdages hvilke plastiske mekanismer som oppstår, og det er mulig å påvise forholdet mellom første flytning og maksimal plastifisering ( $\alpha_u/\alpha_1$ ). Dette overstyrkeforholdet brukes i utregningen av konstruksjonsfaktoren  $q$ . Fordelen ved å bruke konstruksjonsfaktoren fra den ikke-lineære analysen er at den blir mer nøyaktig. Dette fordi den fastsettes ut ifra forsøk istedenfor ved antakelser om en uniform duktilitet i hele bygget, noe som gjøres i en lineær analyse. I en lineær analyse har  $q$  verdier lavere enn 1,5 for lav duktilitet (DCL) og mellom 1,5 og 4 for middels duktilitet (DCM).

Den dynamiske analysen, også kalt ikke-lineær tidshistorieanalyse, bruker tidsserier som representerer de seismiske bevegelsene i bakken for å fastsette responsen til konstruksjonen. Metoden avhenger av bruk av flere tidsserier, antallet og nøyaktigheten på disse er totalt avgjørende for et godt resultat. Analysen er den som gir et best bilde av hvordan konstruksjonen vil oppføre seg under jordskjelv.

## **Del II: Analyser**

## 4.0 Introduksjon

I dette kapitlet vil vi begynne med å se på analyser av to enkle rammekonstruksjoner i FEM-Design og Robot. Det er viktig å ha en god forståelse av hvordan programmene arbeider og enkle modeller er ofte en god start for å øke forståelsen. For vår del er det en god begynnelse for å kontrollere resultatene i de to analyseprogrammene med analytiske resultater gjort ved hjelp av håndberegninger. Vi begynner med en analyse av en ramme som kan forestille en bygning på to etasjer. Analysen gjøres både analytisk ved hjelp av håndberegninger og ved bruk av FEM-Design og Robot. I den analytiske løsningen brukes formler utledet i teoridelen til å komme fram til naturlige vinkelfrekvenser, egenperioder og svingeformer. Vi utvider deretter rammen til fem etasjer hvor vi i tillegg vil, ved hjelp av de to analysemetodene beskrevet i kapittel 3.1, finne tverrkraftene som virker i etasjene. Deretter går vi videre til en mer komplisert konstruksjon hvor tidsbesparelsen blir stor ved bruk av analyseprogram kontra håndberegninger. Mange konstruksjoner lar seg også vanskelig kontrollere ved håndberegninger for på grunn av konstruksjonens kompleksitet. Det vil på denne modellen kun bli gjort sammenligninger mellom FEM-Design og Robot. Modelleringen blir gjort i Autodesk Revit og modellen blir så eksportert til FEM-Design og Robot. Siden hovedfokuset i denne oppgaven tar for seg blant annet hvilke muligheter programmene gir, tidsforbruk på analysene og arbeidsflyt er versjonen av programvarene brukt av interesse. Vi begynner derfor med å stadfeste versjonen og produsenten av programmene:

### Revit:

Produsent: Autodesk

Versjon: 20121003\_2115

### Robot Structural analysis Professional:

Produsent: Autodesk

Versjon: 26.0.3.4375 2012

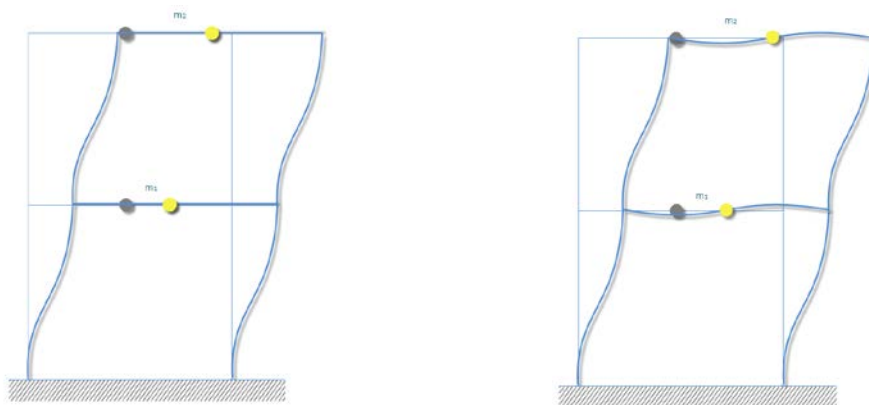
### FEM-Design:

Produsent: Strusoft

Versjon: 11.01.002 2013

## 4.1 Analyse av ramme på to etasjer

Vi begynner med å sammenligne en enkel ramme på to etasjer. Konstruksjonens vertikale forskyvning behandles som så liten at den neglisjeres. Vi så i kapittel 2.2 nærmere på en ramme hvor stivheten i bjelken varierte og vi utledet en realistisk stivhet for bjelken. Vi skal nå se videre på dette ved å sammenligne rammens vinkelfrekvenser og svingeformer med uendelig stive bjelker i forhold til rammen med uendelig bjelkestivhet:



Figur 4.1: To-etasjers ramme: t.v.) uendelig stive bjelker t.h.) realistisk stivhet i bjelkene

For å kunne regne ut dynamiske problemer analytisk bruker vi ligning (2.43) og (2.44). Disse gjentas her:

$$\begin{aligned}[-m\omega_n^2 + \mathbf{k}]\phi_j &= 0 \\ \det[-m\omega_n^2 + \mathbf{k}] &= 0\end{aligned}$$

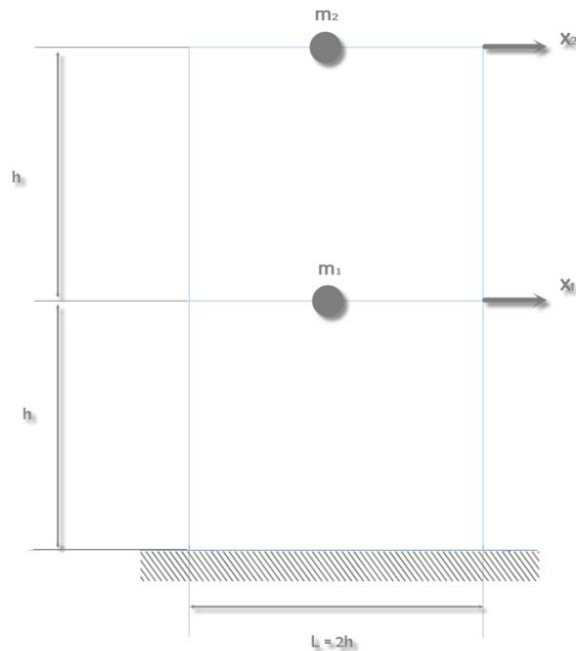
I eksemplene brukes stålprofilen HE300B s355 med materialdata hentet fra referanse [22]:

$$E = 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad I_y = 251,7 * 10^{-6} \text{m}^4, \quad m = 117 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad (4.1)$$



### 4.1.1 Analytisk løsning

Vi begynner med rammen hvor bjelkene er uendelig stive (figur 4.1 t.v.). Det betyr at vi bare har to frihetsgrader som figuren under viser:



Figur 4.2: Rammen med to frihetsgrader (2DOF)

To frihetsgrader vil si at både masse- og stivhetsmatrisen blir av størrelsen  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Matrisene i (4.2) settes inn i (2.44):

$$\begin{vmatrix} 2k - m_1\omega^2 & -k \\ -k & k - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

Skriver vi ut (4.3) gir det:

$$-km_1\omega^2 - 2km_2\omega^2 + m_1m_2\omega^4 + k^2 = 0 \quad (4.4)$$

Med tanke på at  $m = \frac{m_1}{4} = \frac{m_2}{3}$  får vi:

$$12m^2\omega^4 - 10km\omega^2 + k^2 \quad (4.5)$$

Ligningen i (4.5) kan vi løse på samme måte som en andregradsligning hvor vi har løsning for  $\omega_1^2$  og  $\omega_2^2$ :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 * 12 * 1}}{2 * 12} \quad (4.6)$$

Siden  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_n$  blir resultatene fra (4.6):

$$\omega_1^2 = 0,116 \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = 0,717 \frac{k}{m} \quad (4.7)$$

Vinkelfrekvensene får vi ved å ta kvadratroten av ligningene i (4.7):

$$\omega_1 = 0,341 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = 0,847 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.8)$$

Vi har antatt at bjelkene er uendelig stive hvor da  $k = \frac{24EI_s}{h^3}$  og setter vi da inn for materialdataen fra (4.1), får vi vinkelfrekvensene og egenperiodene til rammen:

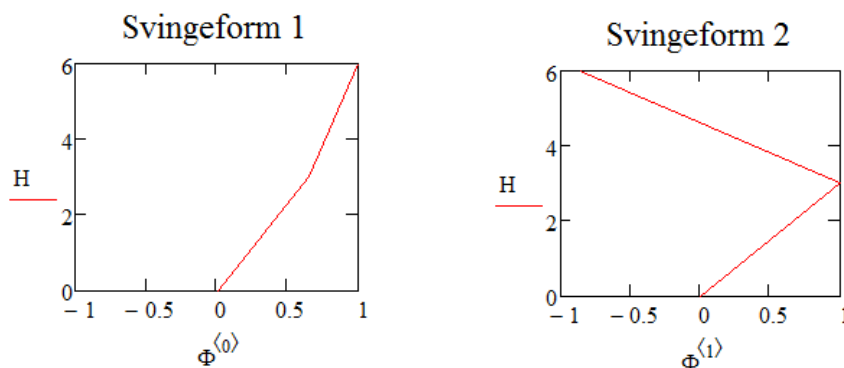
Svingeform	Vinkelfrekvens [rad/s]	Periode [s]
1	124,719	0,05
2	309,828	0,02

Tabell 4.1 Vinkelfrekvenser og egenperioder ved analytisk løsning

Svingeformene kan vi finne ved å sette inn verdien fra (4.8) i ligning (2.43):

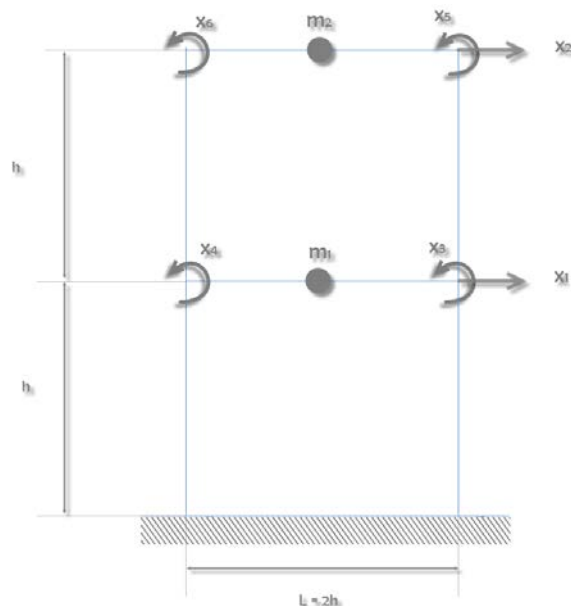
$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0,651 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,869 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Grafisk gir (4.9) følgende svingeformer:



Figur 4.3: Svingeformer for rammen med to frihetsgrader (2DOF)

Vi ser så på rammen med realistisk bjelkestivhet (figur 4.1 t.h.). Figuren under viser at rammen nå har seks frihetsgrader:



Figur 4.4: Rammen med seks frihetsgrader (6DOF)

Siden størrelsen på masse- og stivhetsmatrisen er lik antall frihetsgrader får vi 6\*6 matriser. I kapittel 2.2 nevnte vi at treghetskreftene som motvirker rotasjon i frihetsgradene er så små at de kan neglisjeres, så da får vi følgende massematrise:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Stivheten er regnet ut ved hjelp av bjelkeformler (vedlegg A):

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 48 & -24 & 0 & 0 & -6h & -6h \\ -24 & 24 & 6h & 6h & 6h & 6h \\ 0 & 6h & 10h^2 & h^2 & 2h^2 & 0 \\ 0 & 6h & h^2 & 10h^2 & 0 & 2h^2 \\ -6h & 6h & 2h^2 & 0 & 6h^2 & h^2 \\ -6h & 6h & 0 & 2h^2 & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Det er nå mulig å løse ut egenverdi problemet ved hjelp av formel (2.44), men siden treghetskreftene som virker i rotasjonsfrihetsgradene gir et så lite bidrag til totalresponsen kan de neglisjeres. Dette medfører at vi kan redusere massematrisen og stivhetsmatrisen ved statisk kondensering, noe som tilsvarer en reduksjon i ligninger i egenverdiproblemet og beregningstiden blir redusert. Metoden grupperer frihetsgradene etter om de har eller ikke har masse. Frihetsgradene med masse er de

primære frihetsgradene og de får derfor notasjonen  $x_p$  og frihetsgradene uten masse er de sekundære og noteres derfor  $x_s$ . Bevegelsesligningen på matrisform blir dermed som følger [12]:

$$\begin{bmatrix} m_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{tt} & k_{t0} \\ k_{0t} & k_{00} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Vi skriver ut ligningene i (4.12):

$$m_{tt}\ddot{x}_p + k_{tt}x_p + k_{t0}x_s = p_t(t) \quad k_{0t}x_p + k_{00}x_s = 0 \quad (4.13)$$

Siden  $x_p$  ikke er utsatt for noen ytre krefter får vi forbindelsen mellom  $x_p$  og  $x_s$  til å være:

$$x_s = -k_{00}^{-1}k_{0t}x_p \quad (4.14)$$

Setter vi (4.14) inn i (4.13) får vi:

$$m_{tt}\ddot{x}_p + k_{tt}x_p - k_{t0}k_{00}^{-1}k_{0t}x_p = p_t(t) \quad (4.15)$$

Eventuelt kan (4.15) skrives som:

$$m_{tt}\ddot{x}_p + \hat{k}_{tt}x_p = p_t(t) \quad (4.16)$$

Hvor sideveis stivhet av rammen  $\hat{k}_{tt}$  er gitt av:

$$\hat{k}_{tt} = k_{tt} - k_{t0}k_{00}^{-1}k_{0t} \quad (4.17)$$

Den totale stivhetsmatrisen fra (4.11) gruppert blir da:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{tt} & \vdots & k_{t0} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ k_{0t} & \vdots & k_{00} \end{bmatrix} = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 48 & -24 & \vdots & 0 & 0 & -6h & -6h \\ -24 & 24 & \vdots & 6h & 6h & 6h & 6h \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 6h & \vdots & 10h^2 & h^2 & 2h^2 & 0 \\ 0 & 6h & \vdots & h^2 & 10h^2 & 0 & 2h^2 \\ -6h & 6h & \vdots & 2h^2 & 0 & 6h^2 & h^2 \\ -6h & 6h & \vdots & 0 & 2h^2 & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Vi ser nå at inndelingen i (4.18) gjør at matrisen vi hadde i (4.11) kan reduseres til en  $2 \times 2$  matrise for sideveis stivhet:

$$\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 37,151 & -15,123 \\ -15,123 & 10,192 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Massematrisen i (4.10) reduseres også til  $2 \times 2$  matrise:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Vi kan nå sette inn matrise (4.19) og (4.20) i egenverdi-problemet gitt i formel (2.44) og komme fram til vinkelfrekvenser og egenperioder:

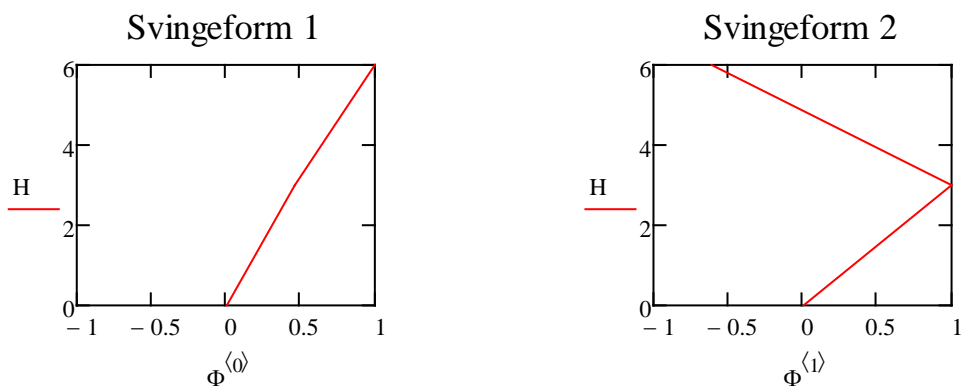
Svingeform	Vinkelfrekvens [rad/s]		Periode [s]		6DOF/2DOF [%]
	2DOF	6DOF	2DOF	6DOF	
1	124.719	77.475	0,050	0,081	62,12
2	309.828	254.454	0,020	0,025	82,13

Tabell 4.2 Vinkelfrekvenser og egenperioder for rammen med to- og seks frihetsgrader ved analytisk løsning

Svingeformene kan vi finne ved å sette inn vinkelfrekvensene fra tabell 4.2 i ligning (2.43):

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0,460 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,614 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Grafisk gir dette følgende svingeformer:



Figur 4.5: Svingeformer for rammen med seks frihetsgrader (2DOF)

### 4.1.1 FEM-Design

Den samme rammen modelleres i Robot. For å få dekket uendelig stivt settes elastisitetmodulen til de to bjelkene til tilnærmet lik uendelig ( $E \approx \infty$ ). Vi får da følgende vinkelfrekvenser og egenperioder:

Svingeform	Vinkelfrekvens [rad/s]		Periode [s]		6DOF/2DOF [%]
	2DOF	6DOF	2DOF	6DOF	
1	122,422	76,975	0,051	0,082	62,88
2	305,218	252,810	0,021	0,025	82,83

Tabell 4.3: FEM-Design: Vinkelfrekvenser og egenperioden for rammen med to- og seks frihetsgrader

### 4.1.3 Robot

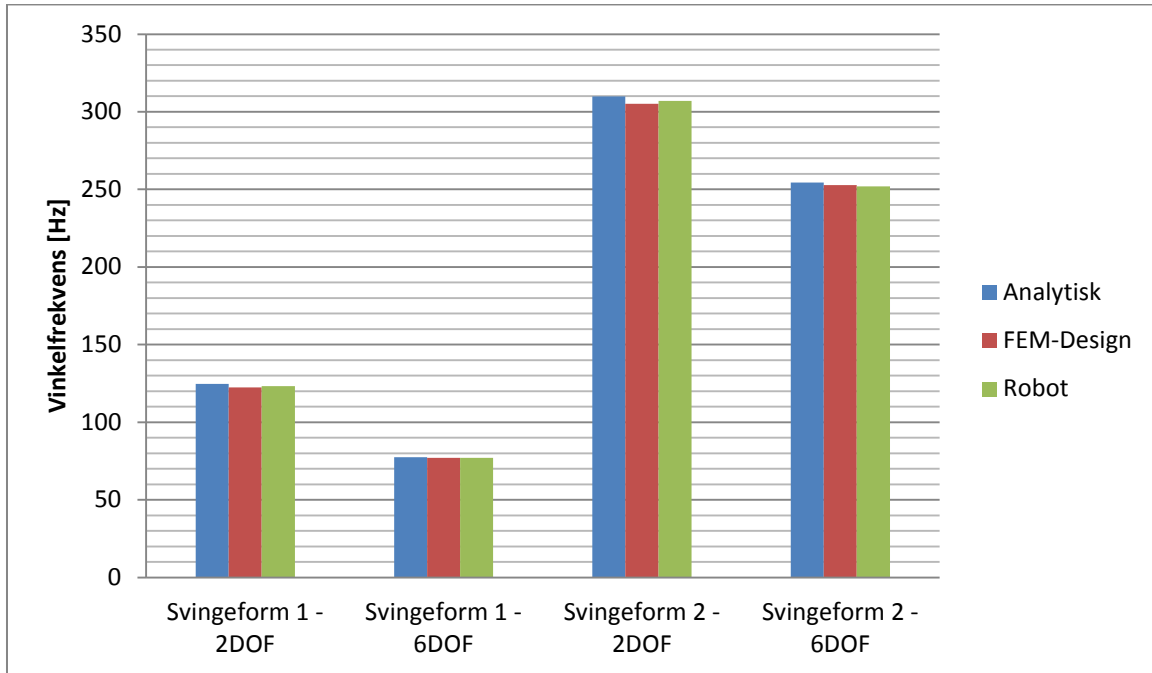
På samme måte som i Robot så settes bjelkene uendelig stive ved å justere E-modulen i FEM-Design. Analysen gir oss svingeformer med tilhørende vinkelfrekvenser:

Svingeform	Vinkelfrekvens [rad/s]		Periode [s]		6DOF/2DOF [%]
	2DOF	6DOF	2DOF	6DOF	
1	123,158	77,041	0,051	0,082	62,55
2	307,050	251,966	0,021	0,025	82,06

Tabell 4.4: Robot: Vinkelfrekvenser og egenperioden for rammen med to- og seks frihetsgrader

#### 4.1.4 Evaluering

Verdiene i tabell 4.2, 4.3 og 4.4 for rammen med uendelig stiv bjelke (2DOF) og realistisk bjelkestivhet (6DOF) er vist i diagrammet under. Vi ser at resultatene fra analyseprogrammene Robot og FEM-Design samsvarer bra med håndberegningene gjort etter formlene utledet i teoridelen.



Figur 4.6: Sammenligning av vinkelfrekvenser i FEM-Design, Robot og analytisk løsning

Rammen med realistisk bjelkestivhet har en vinkelfrekvens som er omtrent 38 prosent lavere enn med uendelig stiv bjelke for første svingeperiode og litt under 18 % lavere for andre svingeform. Vi registrerer også at håndberegningen gir noe høyere frekvenser enn programmene, dette kommer av at programmene bruker eksakte verdier for massen, mens analytisk er verdiene hentet fra referanse [22], hvor massen er rundet ned. Forskjellen i resultatene er likevel neglisjerbar.

## 4.2 Analyse av ramme på fem etasjer

Rammen fra figur 4.1 utvides til fem etasjer. I forrige delkapittel så vi bare på vinkelfrekvenser og egenperioder med rammens tilhørende svingformer. Nå ønsker vi i tillegg å se på fordelinger av krefter i etasjene ved hjelp av de lineære analysemetodene som ble introdusert i kapittel 3.1.

### 4.2.1 Analytisk løsning

Vi reduserer matrisene på samme måte som for rammen på to etasjer (se vedlegg B.2). Vi ender da opp med følgende massematrise:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

og stivhetsmatrise:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 40,92 & -23,95 & 6,76 & -1,25 & 0,18 \\ -23,95 & 34,67 & -22,74 & 6,42 & -0,93 \\ 6,76 & -22,74 & 34,33 & -22,05 & 4,94 \\ -1,25 & 6,42 & -22,05 & 30,87 & -14,21 \\ 0,18 & -0,93 & 4,94 & -14,21 & 10,06 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

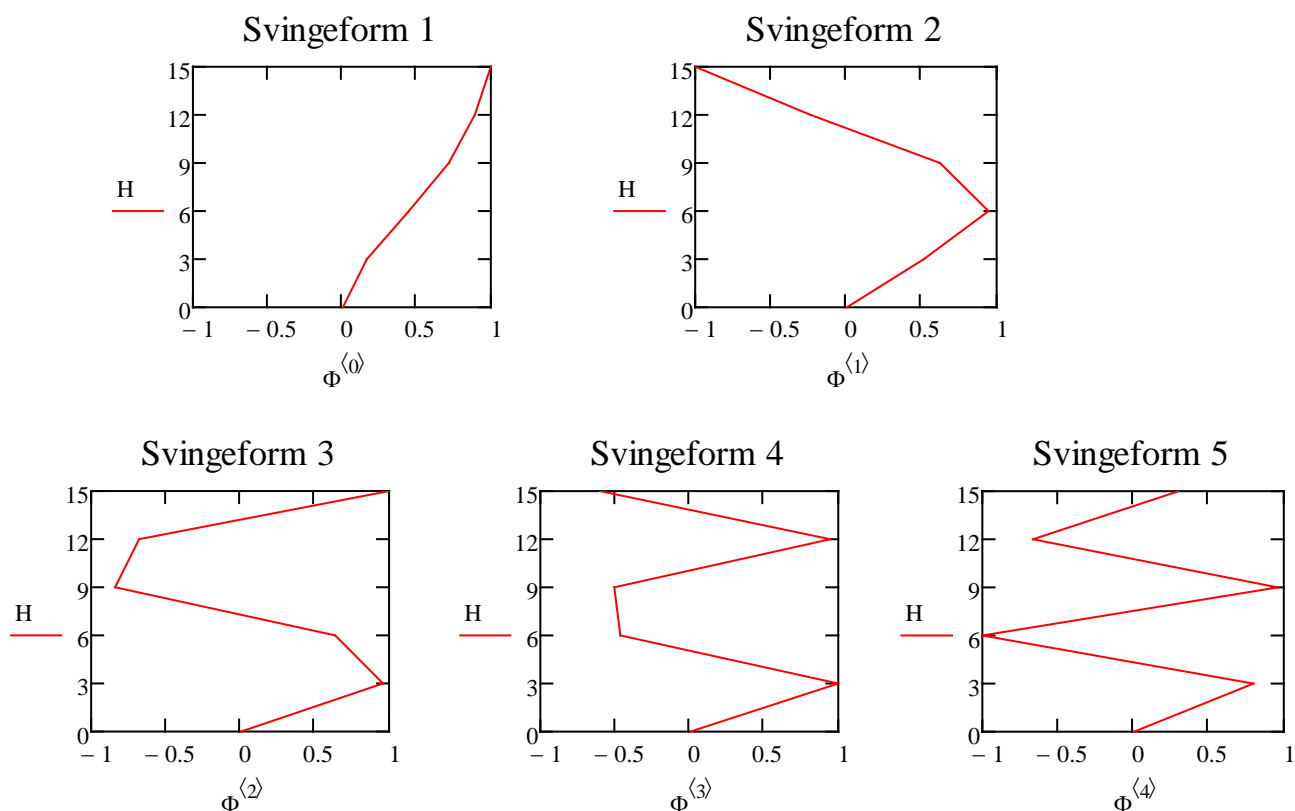
Setter (4.22) og (4.23) i ligning (2.44) og får ut vinkelfrekvenser og egenperioder:

Svingeform	Vinkelfrekvens [rad/s]	Periode [s]
1	27,995	0,224
2	90,506	0,069
3	167,890	0,037
4	256,814	0,024
5	334,636	0,019

Tabell 4.5: Analytisk løsning: Vinkelfrekvenser og egenperioder



De tilhørende svingeformene får vi ved å sette inn vinkelfrekvensene fra tabell 4.5 inn i ligning (2.43):



Figur 4.7: Svingeformer for rammen på fem etasjer.

Vi ønsker videre å se på tverrkreftene som virker i konstruksjonens etasjer. I kapittel 3.1 introduserte vi to lineære analysemetoder; en forenklet- og en fullverdig metode. Vi skal se nærmere på begge de to og så sammenligne resultatene. Vi begynner med å regne ut den dimensjonerende grunnakselerasjonen. Vi antar at konstruksjonen er i Stavanger og ved hjelp av NA.3.2.1 i EC8 som angir spissverdier for berggrunnens akselerasjon  $a_{g40Hz}$  ut ifra seismiske soner finner vi den dimensjonerende akselerasjonen  $a_g$ :

$$a_g = 0,8 * a_{g40Hz} = 0,8 * 0,55 \frac{m}{s^2} = 0,44 \frac{m}{s^2} \quad (4.24)$$

Hvis vi i tillegg antar gode grunnforhold (type A) ser vi at parameterne som brukes for å bestemme det dimensjonerende responspekteret, gitt i tabell 3.1, blir som følger:

Grunntype	S	$T_B$	$T_C$	$T_D$
A	1,0	0,10	0,25	1,5

Tabell 4.6 Parametere for å bestemme det dimensjonerende responspekter

I kapittel 2.3 ble duktilitet gjennomgått. Vi antar at denne konstruksjonen er av veldig lav duktilitet ( $q = 1,0$ ). Da har vi det som trengs for å regne ut det dimensjonerende responspekteret gitt i (3.1).

Første svingeform ligger mellom parameterne  $T_B$  og  $T_C$ :

$$T_B \leq T \leq T_C: \quad S_d(T) = a_g * S * \frac{2,5}{q}$$

$$S_d(T_1) = S_d(0,224) = 0,44 \frac{m}{s^2} * 1,0 * \frac{2,5}{1,0} = 1,1 \frac{m}{s^2} \quad (4.25)$$

De fire neste svingeformene har lavere verdi enn  $T_B$ :

$$0 \leq T \leq T_B: \quad S_d(T) = a_g * S * \left[ \frac{2}{3} + \frac{T}{T_B} * \left( \frac{2,5}{q} - \frac{2}{3} \right) \right]$$

$$S_d(T_2) = S_d(0,069) = 0,44 \frac{m}{s^2} * 1,0 * \left[ \frac{2}{3} + \frac{0,069}{0,10} * \left( \frac{2,5}{1,0} - \frac{2}{3} \right) \right] = 0,850 \frac{m}{s^2}$$

$$S_d(T_3) = S_d(0,037) = 0,44 \frac{m}{s^2} * 1,0 * \left[ \frac{2}{3} + \frac{0,037}{0,10} * \left( \frac{2,5}{1,0} - \frac{2}{3} \right) \right] = 0,592 \frac{m}{s^2} \quad (4.26)$$

$$S_d(T_4) = S_d(0,024) = 0,44 \frac{m}{s^2} * 1,0 * \left[ \frac{2}{3} + \frac{0,024}{0,10} * \left( \frac{2,5}{1,0} - \frac{2}{3} \right) \right] = 0,487 \frac{m}{s^2}$$

$$S_d(T_5) = S_d(0,019) = 0,44 \frac{m}{s^2} * 1,0 * \left[ \frac{2}{3} + \frac{0,019}{0,10} * \left( \frac{2,5}{1,0} - \frac{2}{3} \right) \right] = 0,447 \frac{m}{s^2}$$

Vi begynner med den forenklete metoden hvor responsen kun er avhengig av første svingeform.

Kraften i fundamentet for en konstruksjon på over to etasjer og med første egenperiode lavere enn  $2T_c$  blir etter formel (3.15):

$$F_b = S_d(T_1) * m * \lambda = 1,1 \frac{m}{s^2} * 7020 \text{ kg} * 0,85 = 6,564 \text{ kN} \quad (4.27)$$

Kreftene kan fordeles etter forholdet mellom produktet av høyden og massen i hver etasje, eventuelt kan fordelingen styres av produktet mellom forskyvningen og massen som ble forklart i kapittel 3.1.1.3. Foreløpig har vi massen og høyden så da bruker vi formel (3.16) og får tverrkreftene i hver etasje til å være:

Etasje	Høyde $z_i$ [m]	Masse $m_i$ [kg]	Kraft $F_i$ [kN]
1	3,0	1404	0,477
2	6,0	1404	0,955
3	9,0	1404	1,432
4	12,0	1404	1,910
5	15,0	1053	1,790
Sum	-	6669	6,564

Tabell 4.7: Tverrkraftmetoden: Tverrkraft etasjene

Den modale analysen tar hensyn til at konstruksjonen har flere svingeformer. Det er den effektive modale massen som styrer hvor mye svingeformene bidrar til responsen. Vi begynner derfor med å regne ut effektiv modal masse for hver svingeform:

$L_j = \phi_j^T m u$	$M_j = \phi_j^T m \phi_j$	$M_j^{eff} = L_j^2 / M_j$	$m_j = M_j^{eff} / M_{tot}$
$L_1 = 4196,047$ kg	$M_1 = 3229,417$ kg	$M_1^{eff} = 5452,008$ kg	$m_1 = 0,812$
$L_2 = 1545,844$ kg	$M_2 = 3310,908$ kg	$M_2^{eff} = 721,746$ kg	$m_2 = 0,108$
$L_3 = 1172,622$ kg	$M_3 = 4583,416$ kg	$M_3^{eff} = 300,004$ kg	$m_3 = 0,045$
$L_4 = 738,434$ kg	$M_4 = 3697,048$ kg	$M_4^{eff} = 147,492$ kg	$m_4 = 0,022$
$L_5 = 454,782$ kg	$M_5 = 4331,472$ kg	$M_5^{eff} = 47,75$ kg	$m_5 = 0,007$

Tabell 4.8: Analytisk: Effektive modale masser

Hvor  $m_j$  er effektiv modal masse for svingeform  $j$  sett i forhold til total modal masse. Den totale seismiske massen regnes etter  $M_{tot} = u^T m u = 6669$  kg.

For å komme over kravet på 90 % effektiv modal masse trenger vi egentlig kun å inkludere de to første svingeformene i analysen. Siden vi ønsker å se effekten av høyere svingeformer vil vi inkludere alle fem svingeformer og se på kreftene de bidrar hver for seg. Fra formel (3.20) har vi at kraften i fundamentet fra svingeform  $j$  er:

$$F_{bj} = M_j^{eff} * S_d(T_j) = \text{diag} \left[ \begin{matrix} 5452,008 \\ 721,746 \\ 300,004 \\ 147,492 \\ 47,75 \end{matrix} \right] \text{ kg} * \left[ \begin{matrix} 1,100 \\ 0,850 \\ 0,592 \\ 0,487 \\ 0,447 \end{matrix} \right]^T \frac{m}{s^2} = \left[ \begin{matrix} 5,997 \\ 0,613 \\ 0,178 \\ 0,072 \\ 0,021 \end{matrix} \right] \text{ kN} \quad (4.28)$$

Formel (3.26) gir fordelingen av tverrkreftene i etasjene. Tabellen under viser kreftene fra hver svingeform i etasjene:

Svingeform	1.etg. [kN]	2.etg. [kN]	3.etg [kN]	4.etg [kN]	5.etg [kN]
1	0,349	0,913	1,429	1,802	1,505
2	0,291	0,527	0,346	-0,132	-0,418
3	0,205	0,137	-0,179	-0,145	0,159
4	0,137	-0,063	-0,069	0,129	-0,062
5	0,053	-0,066	0,064	-0,044	0,015

Tabell 4.9: Modal analyse: Tverrkrefter i etasjene

Som vi så på den effektive modale massen så er det de to første svingeformene som gir de største kreftene i etasjene. De neste svingeformene er både lave i verdi og har i tillegg en tendens til å utlikne hverandre.

Kreftene fra de forskjellige svingeformene skal så kombineres. To metoder er gitt i kapittel 3.0.2; SRSS og CQC. Hvis svingeformerne regnes som uavhengige av hverandre kan vi bruke SRSS, hvis ikke må vi bruke CQC. To svingeformer er uavhengige hvis den høyeste svingeformen har en egenperiode som er på maksimalt 90 % av den neste. I vårt tilfelle er  $T_1 = 0,224$  s og  $T_2 = 0,069$  s noe som tilsvarer at  $\frac{T_2}{T_1} = 30,8 < 90$  % og vi kan bruke SRSS:

	1.etg. [kN]	2.etg. [kN]	3.etg [kN]	4.etg [kN]	5.etg [kN]
<b>SRSS</b>	0,520	1,067	1,484	1,818	1,571

Tabell 4.10: Modal analyse: Tverrkrefter i etasjene kombinert med SRSS

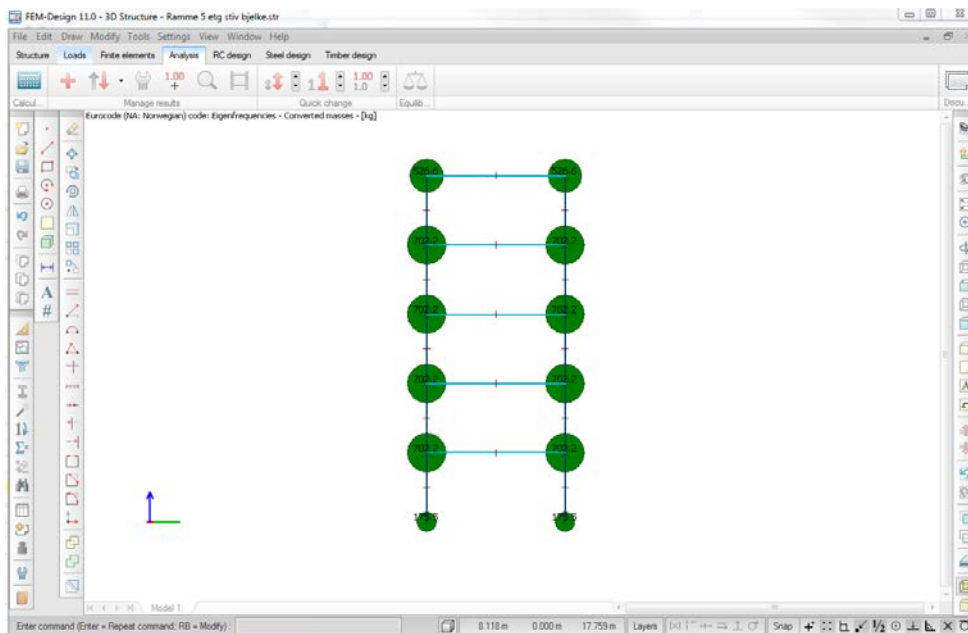
## 4.2.2 FEM-Design

Den samme rammen modelleres i FEM-Design. Den første analysen vi kjører i FEM-Design er en egenfrekvensanalyse. Analysen gir oss svingeformer med tilhørende frekvenser:

Svingeform	Vinkelfrekvens [rad/s]	Periode [s]
1	27,527	0,228
2	89,297	0,070
3	166,837	0,038
4	255,135	0,025
5	332,443	0,019

Tabell 4.11: FEM-Design: Vinkelfrekvenser og egenperioder (listet etter høyest effektiv modal masse)

I tillegg gir analysen en mulighet til å se hvordan FEM-Design tilegner massen i de forskjellige nodene. Dette kan være nyttig hvis en ønsker å sammenligne med massefordeling gjort i den analytiske analysen.

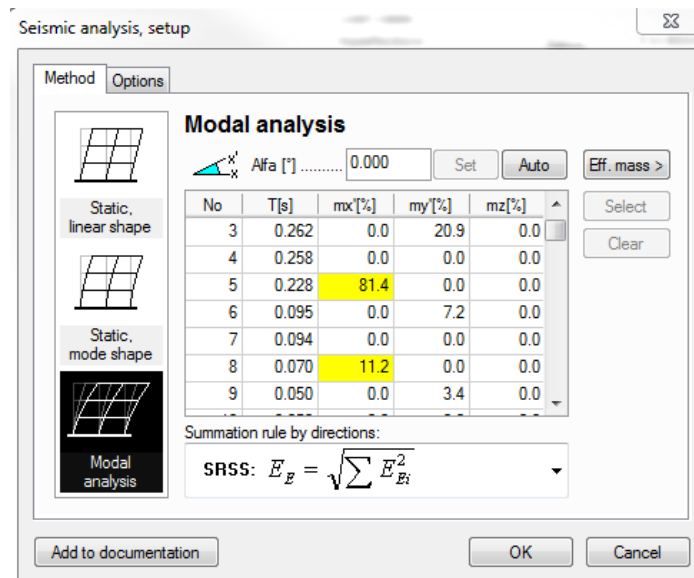


Figur 4.8: Massen plassert i noder, FEM-Design

Vi satte massen i de fire nederste etasjene til å være;  $m_{1...4} = 4 * m = 4 * 117 \frac{kg}{m} * 3m = 1\,404\,kg$ , og i femte etasje;  $m_5 = 3 * m = 1053\,kg$ , mens FEM-Design har;  $2 * 702,2 = 1\,404,4\,kg$  og i øverste etasje;  $2 * 526,6 = 1\,053,2\,kg$  noe som stemmer bra. Den lille forskjellen kommer i at FEM-

Design bruker en helt eksakt verdi på massen per meter, mens vi har i den analytiske regningen bruker referanse [22] hvor verdiene er noe avrundet.

Når vi nå skal kjøre seismisk analyse i FEM-design får vi valg av tre metoder:

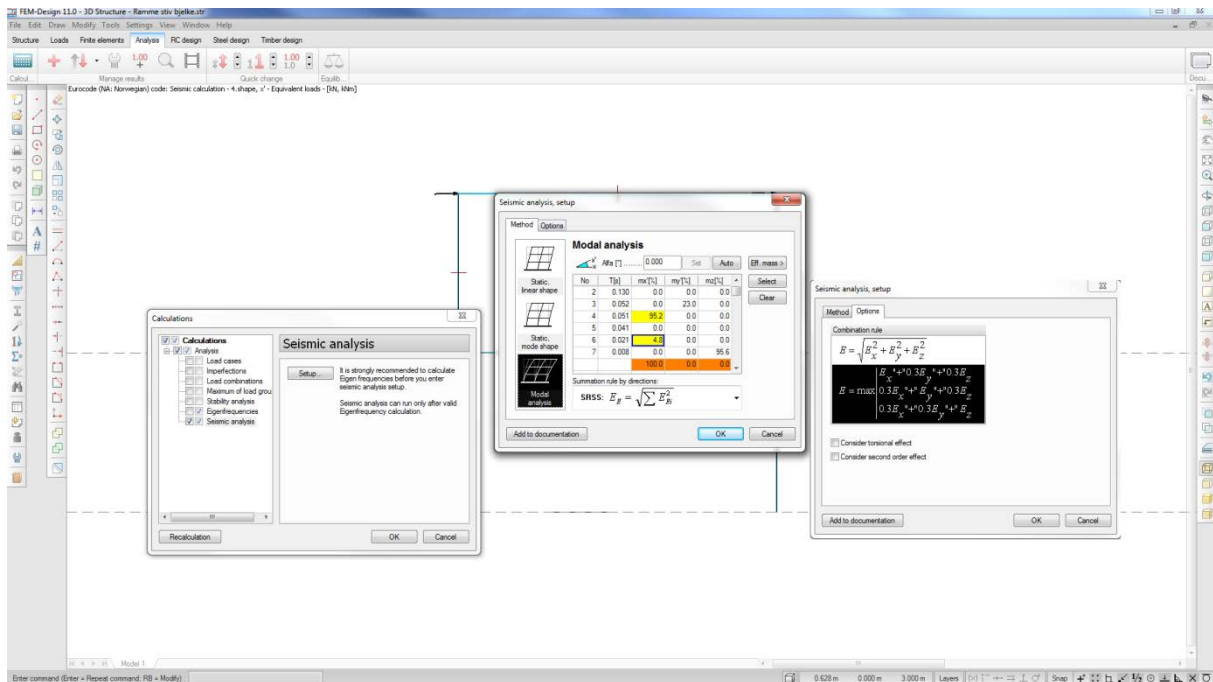


Figur 4.9: Seismisk analyse i FEM-Design

Både **static linear shape** og **static mode shape** gir fordeling av kreftene etasje vis etter tverrkraftmetoden som ble introdusert i kapittel 3.1.1. Forskjellen er at **static mode shape** bruker verdier for forskyvningen etter dynamisk analyse av konstruksjonen, mens **static linear shape** fordeler krefter lineært etter forholdstallet mellom produktet til høyden og massen i hver etasje. Fordelingen er vist på figur 3.6 i kapittel 3.1.1.3. For å bruke **static mode shape** må det først kjøres en egenfrekvensanalyse som vi begynte med i dette kapitlet. Dette er nødvendig fordi egenfrekvensene og forskyvningene brukes videre i analysen. **Static linear shape** derimot bruker ikke verdiene egenfrekvensanalysen. Brukeren kan selv legge inn egenperiode i to ortogonale retning. Selv om det står i FEM-Design manualen [24] at en korreksjonsfaktor skal, i henhold til punkt 4.3.3.2.2 i EC8, reduseres for konstruksjoner som er på over to etasjer og med egenperiode lavere enn  $2T_c$ , blir ikke dette gjort i vår versjon av programmet (v11.01.002). Vi står derfor igjen med modal analyse som den eneste aktuelle lineære analysen i FEM-Design. I motsetning til tverrkraftmetoden hvor det stilles krav til regulariteten i oppriss, så kan vi alltid bruke den modale analysen. Det er også en mer fullverdig analyse som tar hensyn til flere svingeformer og gir et mer nøyaktig resultat. Hvor mange svingeformer vi må inkludere er avhengig av den effektive modale massen til svingeformene. I FEM-Design er det mulig å endre retningen jordskjelvbevegelsen virker i. Det er ikke alltid den mest ugunstige responsen er den som sammenfaller med x- og y-retning. På figur 4.9 kan alfa vinkelen bli

endret manuelt eller automatisk. For automatisk endring av alfa vinkelen så finner programmet den raden med høyest effektiv modal masse og så vil retningen jordskjelvet virker i bli endret til en vinkel som gjør at svingeformen har maksimal effektiv modal masse i den ene retningen og null effektiv modal masse i den andre retningen. Begrensingen for denne funksjonen er at programmet kun baserer seg på den svingeformen med høyest effektiv modal masse, noe som gjør at den totale responsen ikke nødvendigvis blir større.

Vi ser på figur 4.9 at svingeform fem og åtte til sammen gir 92,6 % effektiv modal masse, noe som da tilfredsstiller kravet som er på 90 %. Vi må også sjekke om noen av de gjenværende svingeformene har høyere enn 5 % modal masse. Det har de ikke i dette tilfellet og vi kan velge å bruke kun de to svingeformene. Som i den analytiske delen vil vi inkludere alle for å se på bidraget fra høyere svingeformer. Legg merke til på figur 4.9 at man her kan velge hvordan en ønsker at kreftene skal kombineres. Vi har valget mellom SRSS og CQC som ble forklart i kapittel 3.2.2. Siden  $\frac{T_1}{T_2} < 90\%$  bruker vi SRSS. Her får brukeren også valget om utilsiktet eksentrisitet eller andre ordens effekter skal inkluderes i beregningene.



Figur 4.10: Valg under seismisk analyse i FEM-Design

Resultatene for hver svingeform fra den modale analysen samt en SRSS kombinasjon av disse i FEM-Design ser vi under:

Svingeform	Fundament [kN]	1.etg [kN]	2.etg [kN]	3.etg [kN]	4.etg [kN]	5.etg [kN]
<b>1</b>	5,970	0,342	0,900	1,416	1,798	1,514
<b>2</b>	0,642	0,298	0,542	0,360	-0,130	-0,430
<b>3</b>	0,180	0,208	0,140	-0,180	-0,148	0,160
<b>4</b>	0,073	0,138	-0,064	-0,070	0,130	-0,062
<b>5</b>	0,021	0,052	-0,066	0,064	-0,044	0,014
<b>SRSS</b>	<b>6,008</b>	<b>0,520</b>	<b>1,064</b>	<b>1,476</b>	<b>1,814</b>	<b>1,584</b>

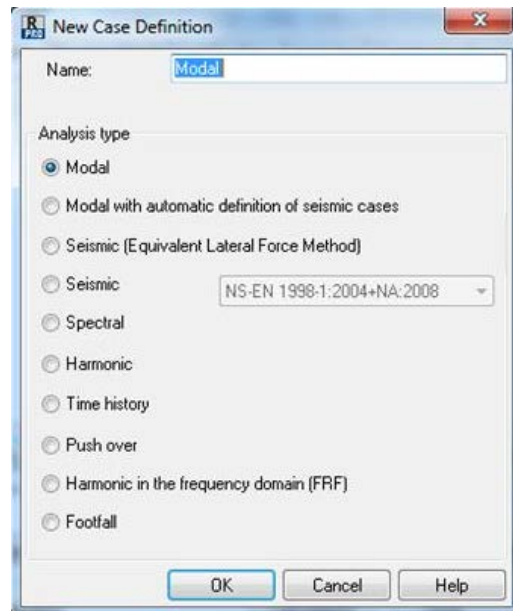
Tabell 4.12: Modal analyse: Kreftene i etasjene

Resultatene vil bli sett nærmere i evalueringen i slutten av delkapitlet.



### 4.2.3 Robot

Modellen tegnes så i Robot. Når vi har lagt inn geometrien, randbetingelser og laster så er neste steg valg av analyse:



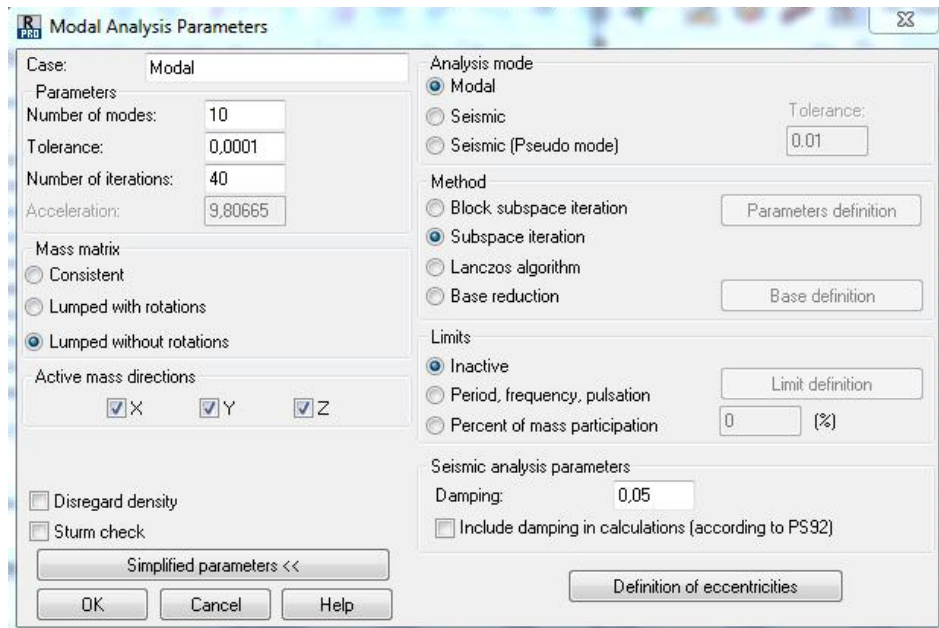
Figur 4.11: Analyser i Robot

En **modal** analyse vil regne egenfrekvenser, svingeformer og effektive modale masser. Det er ikke mulig å velge de syv nederste analysene før man har kjørt en modal analyse. **Modal with automatic definition of seismic cases** vil si at en kan sette parameterne for modal analyse samtidig som verdier for den seismiske analysen. **Seismic (Equivalent Lateral Force Method)** er den forenklete tverrkraftmetoden som ble forklart i kapittel 3.1.1, hvor en kan velge om kreftene skal fordeles etter (3.16) eller (3.17). Siden det nasjonale tillegget i EC8 ikke ligger inne for denne analysen i Robot vil ikke det dimensjonerende spekteret blir riktig og analysen blir derfor ikke gjennomført i Robot.

**Spectral** analyse skiller seg fra den modale analysen ved at responsspektrumet defineres manuelt istedenfor å bli hentet fra standarder som gjøres ved modal analyse. **Harmonic** analyse utføres for harmoniske laster hvor brukeren setter øvre og nedre verdier for frekvensen. Målet med denne analysen er å se på responsen til valgte deler/noder i konstruksjonen når kreftene påføres ved krefter som varierer i frekvens. Forskyvningene og kreftene plottes og den maksimale vibrasjonen kan finnes. **Time history** analyse ser på konstruksjonens respons i tidsintervaller for en definert påkjenning. Denne skiller seg derfor fra de andre som gir resultater ut ifra et visst tidspunkt. Metoden er svært nøyaktig, men kalkulasjonene er kompliserte og tidkrevende. **Pushover** analyse er, som forklart i kapittel 3.3, en statisk ikke-lineær analyse hvor konstruksjonen påføres monotont økende krefter helt

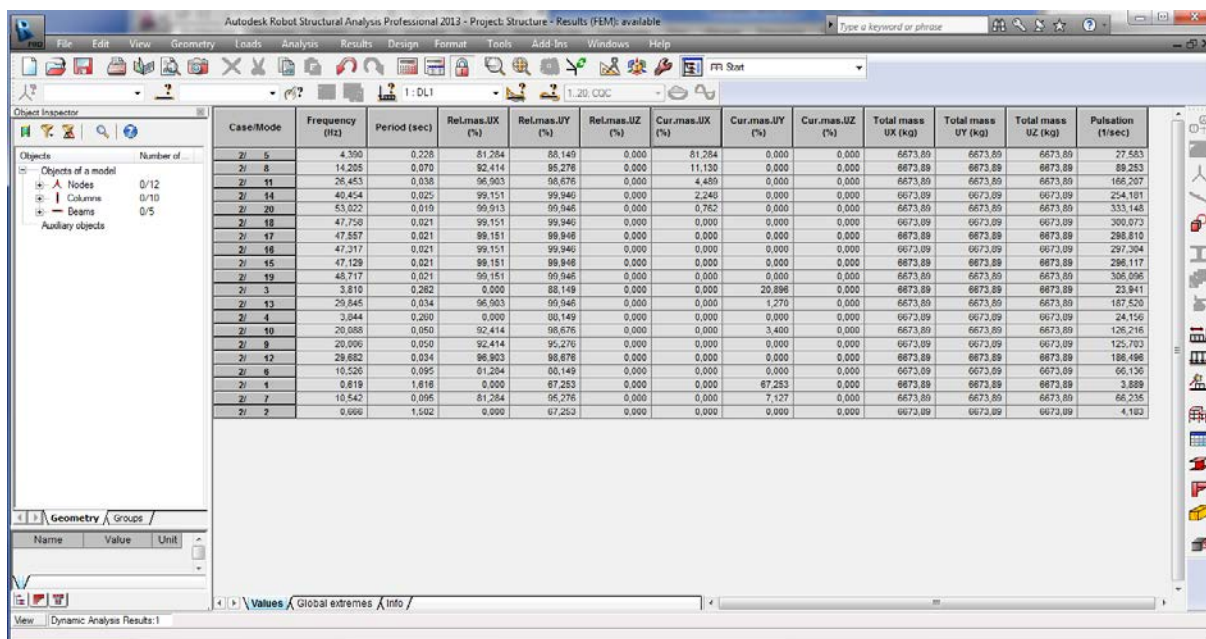
til brudd oppstår. Analysen gir oss blant annet et eksakt forhold mellom kraft og forskyvning og konstruksjonsfaktoren  $q$  kan settes ut ifra forsøk og duktilitet blir dermed mer nøyaktig enn ved bruk av en uniform duktilitet. **Footfall** analyse ser på effekten fra vibrasjonen som skapes når personer beveger seg i en konstruksjon. Analysen kan kun gjøres lineært og brukeren setter etter frekvensområde som lastene virker innenfor [25].

Vi skal nå bare se på den modale- og den seismiske analysen. Vi må begynne med den modale analysen hvor vi i Robot har følgende valg:



Figur 4.12: Modal analyse i Robot

Her er det mulig å velge hvor mange svingeformer en ønsker. Det er også mulig å sette grenser for svingeformer under en viss frekvens eller med effektiv modal masse under en viss prosent skal utelukkes. Massen kan velges å være konsistent eller plassert i punkter med eller uten rotasjonsmuligheter. Som nevnt i kapittel 2.2 gir massens rotasjonsmulighet veldig lite bidrag til responsen. Det er fire metoder for å løse egenverdi-problemet. Lanczos er standardmetoden som kan brukes for både enkle og komplekse konstruksjoner. For separerte konstruksjoner eller med massematrise hvor punktlaster ikke kan rotere kan ikke Lanczos brukes, da er derimot subspace iterasjonen anbefalt. Vi bruker Lanczos algoritme siden denne metoden anbefales for ikke separerte konstruksjoner [25].



Figur 4.13: Resultater i Robot gitt i tabellform

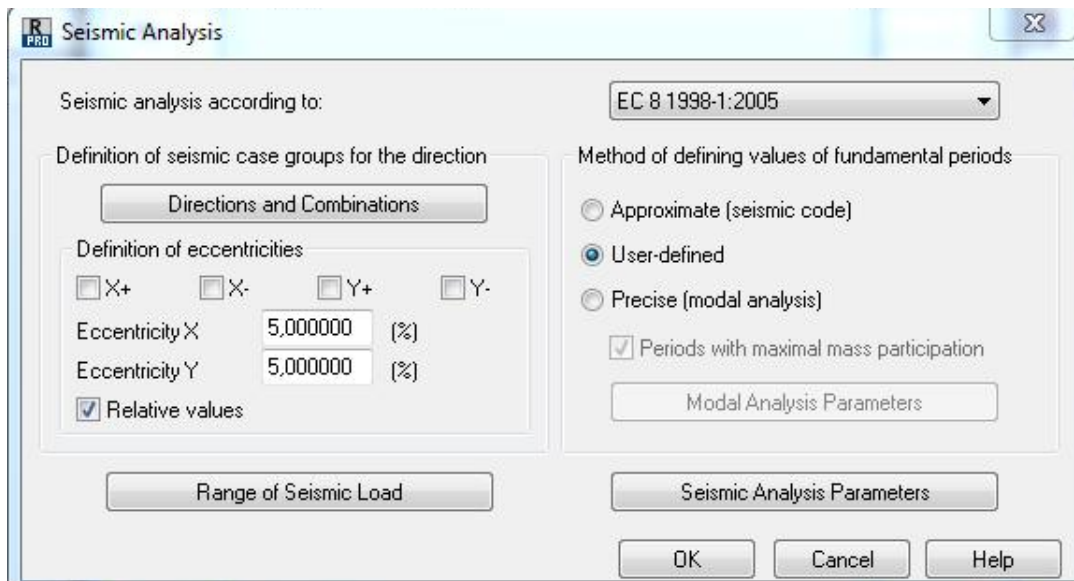
Når analysen er gjennomført har brukeren flere valg om hvordan og hvilke resultater som skal vises. En kan ekskludere svingeformer, velge kombinasjonsmetode (SRSS eller CQC), effektiv- eller relativ modal masse, forholdet mellom en svingeform og neste svingeform ( $\frac{T_1}{T_2}$ ) osv. Verdiene for vinkelfrekvensen og egenperioden er de vi spesielt er interessert i her, så de er oppsummert i tabellen under:

Svingeform	Vinkelfrekvens [rad/s]	Periode [s]
1	27,583	0,228
2	89,253	0,070
3	166,207	0,038
4	254,181	0,025
5	333,148	0,019

Tabell 4.13: Robot: Vinkelfrekvenser og egenperioder (listet etter høyest effektiv modal masse)

På figur 4.13 ser vi at vi kommer rett i overkant av 92,4 % i effektiv modal masse på svingeform 5 og 8. Dette samsvarer ganske bra med FEM-Design hvor verdien ble 92,6 %.

Når den modale analysen er gjennomført kan vi gjennomføre en seismisk analyse:



Figur 4.14: Seismisk analyse i Robot

Kreftene kan kombineres med SRSS eller CQC, siden svingeformene også i Robot regnes som uavhengige  $\frac{T_1}{T_2} < 90 \%$ , så velges SRSS:

Svingeform	Fundament [kN]	1.etg [kN]	2.etg [kN]	3.etg [kN]	4.etg [kN]	5.etg [kN]
1	5,968	0,342	0,900	1,416	1,798	1,514
2	0,638	0,296	0,540	0,360	-0,128	-0,428
3	0,180	0,206	0,140	-0,178	-0,148	0,158
4	0,074	0,138	-0,062	-0,072	0,130	-0,062
5	0,022	0,054	-0,068	0,064	-0,044	0,014
<b>SRSS</b>	<b>6,005</b>	<b>0,518</b>	<b>1,062</b>	<b>1,474</b>	<b>1,814</b>	<b>1,582</b>

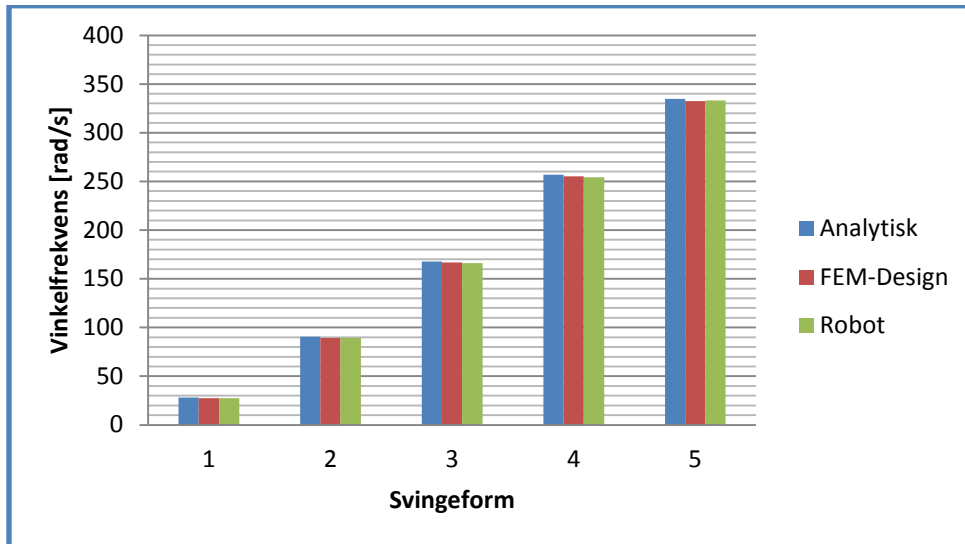
Tabell 4.14: Modal analyse: Tverrkrefter fra svingeformene

Tabellen viser som forventet at de to første svingeformene er dominerende. En grafisk sammenligning av kreftene finnes i evalueringen (figur 4.18).

### 4.2.3 Evaluering

I denne evalueringen vil det bli gjort en oppsummering av delkapittelet. En sammenligning av svingeformenes vinkelfrekvenser samt tverrkrefter i etasjene fra forenklet metode og modal analyse vil bli vist i diagrammer.

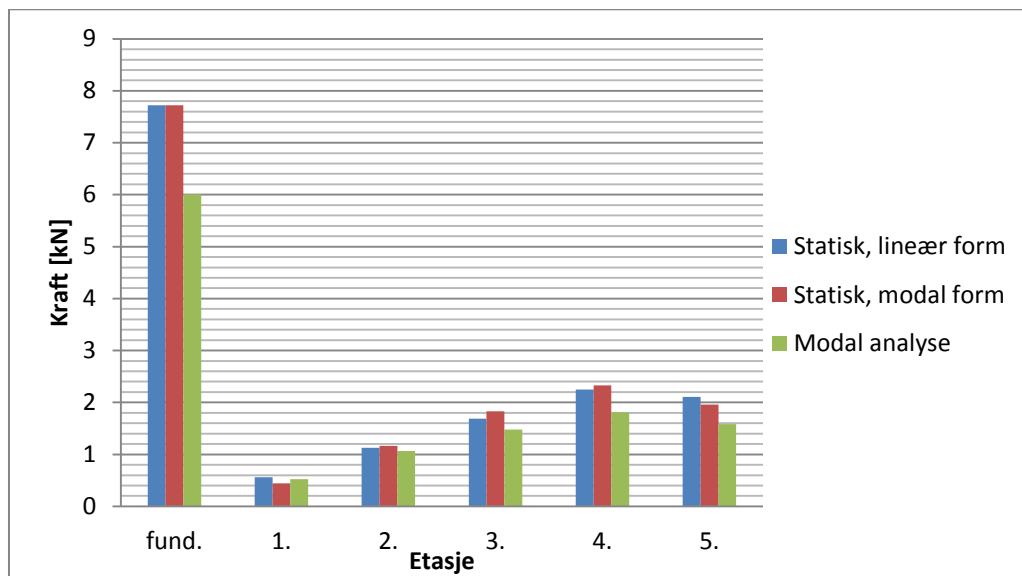
Vinkelfrekvensen fra FEM-Design, Robot og ved håndberegninger er gitt i diagrammet under:



Figur 4.15: Sammenligning av vinkelfrekvenser i FEM-Design, Robot og ved analytisk løsning

Vi ser på diagrammet at det er lite som skiller disse fra programmene utregning av vinkelfrekvenser. Som vi registrerte for rammen på to etasjer vil håndberegningene gi litt høyere frekvenser enn programmene på grunn verdien for massen er avrundet. Fullstendig analytisk utregning finnes i vedlegg B.2.

Vi har nå regnet kreftene i etasjene ved hjelp av to forenklede metoder og en modal analyse i FEM-Design. For å bedre se fordelingen de tre metodene gir vises kreftene grafisk i tabellen under:

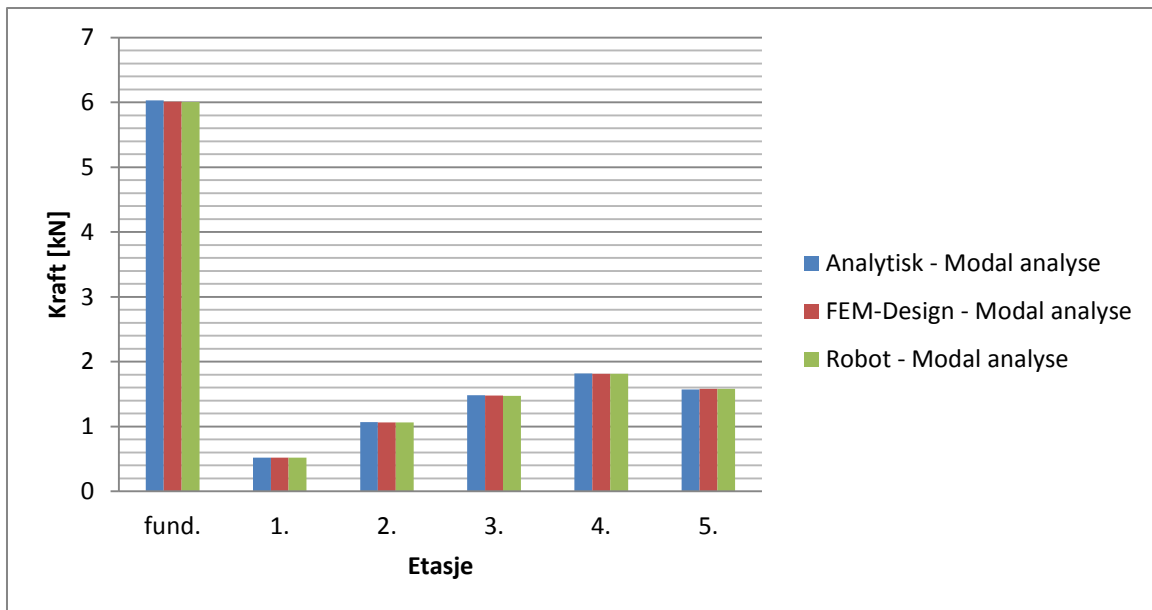


Figur 4.16: Analytisk løsning av fordelingen av krefter etter tverrkraftmetoden og modal analyse

De to forskjellige metodene for å fordele krefter på med tverrkraftmetoden ble gjennomgått i kapittel 3.1.1. Forskyvningene brukt i tverrkraftmetoden med modal form er hentet fra FEM-Design.

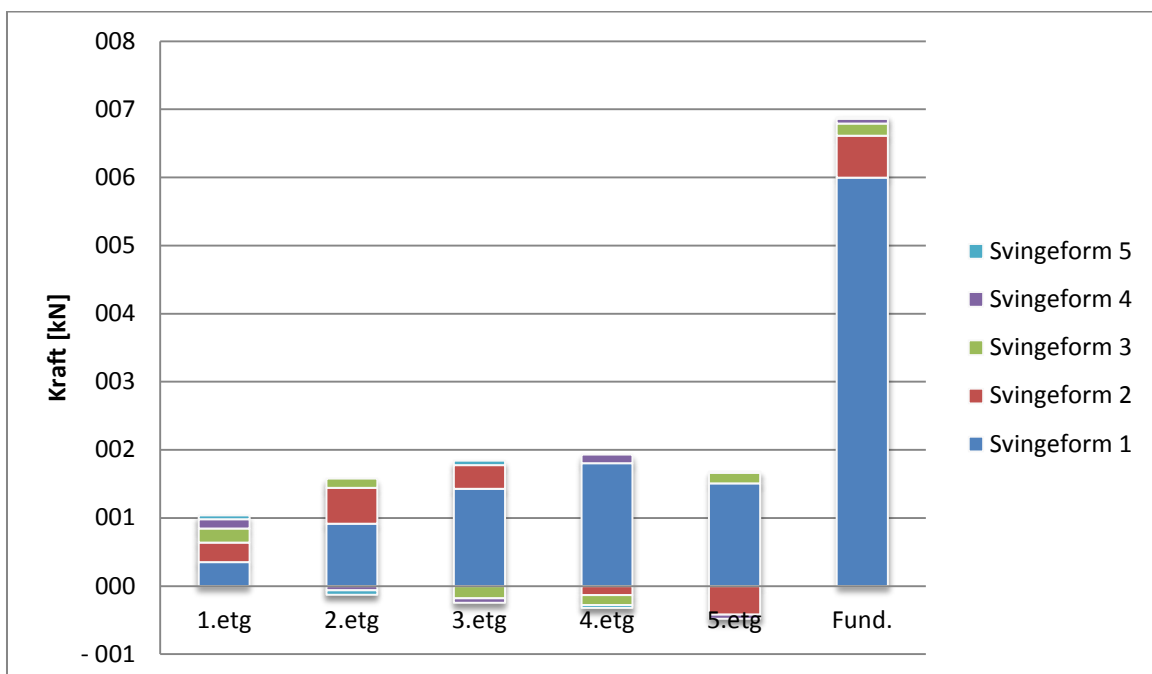
Ser vi på tverrkreftene vi kom fram til ved hjelp av tverrkraftmetoden og modal analyse så gir totalt sett tverrkraftmetoden høyere krefter enn modal analyse. Det har med at modal analyse bruker modal masse istedenfor totalmassen til konstruksjonen. Det gjør at tverrkraftmetoden vil gi konservative verdier som da tilsvarer høyere krefter i konstruksjonen.

Siden både FEM-Design og Robot har mangler som gjør at tverrkraftmetoden ikke vil gi riktige resultater for konstruksjoner i Norge, så er på dette tidspunkt modal analyse den eneste riktige lineære analysen. Sammenligning av resultatene fra den modale analysen i FEM-Design, Robot og ved håndberegninger vises i tabellen under:



Figur 4.17: Sammenligning av resultater fra FEM-Design, Robot og analytisk fra den modale analysen

For den modale analysen har vi tatt hensyn til alle de fem svingeformene selv om vi egentlig, etter EC8, kunne brukt valgt å kun bruke de to første svingeformene. Siden kreftene fra den modal analysen ved analytisk utregning (tabell 4.9) og ved analyseprogrammene (tabell 4.12 og 4.14) er så like, bruker vi kun verdiene fra tabell (4.9) for å vise bidraget fra høyere svingeformer:



Figur 4.18: Tverrkreftene fra hver svingeform ved modal analyse

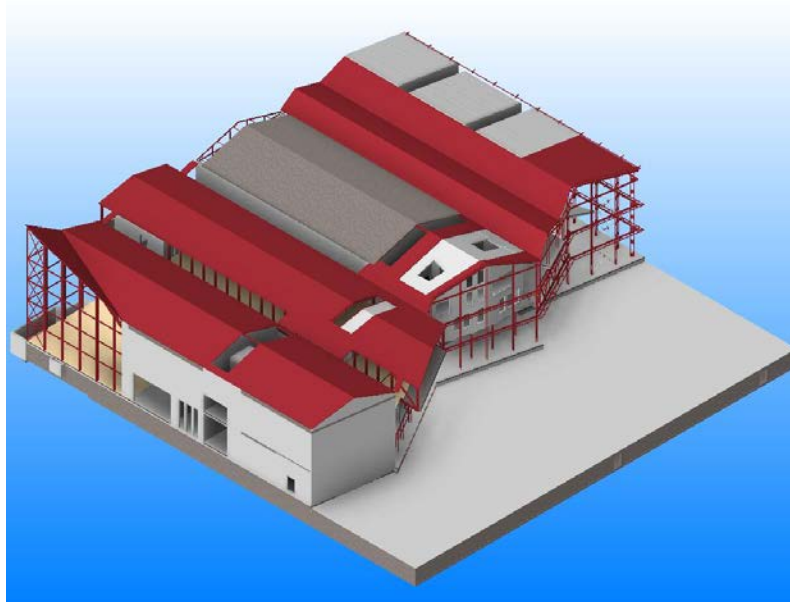
Figuren bekrefter det vi så etter utregning av de effektive modale massene. Det er helt klart de to første svingeformene som gir de største kreftene. Det er også verdt å merke seg er at selv om noen av kreftene virker i motsatt retning av hverandre vil de når de kombineres med SRSS og CQC få samme fortegn og da gi krefter i samme retning.



## 4.3 Analyse av konstruksjon i 3D

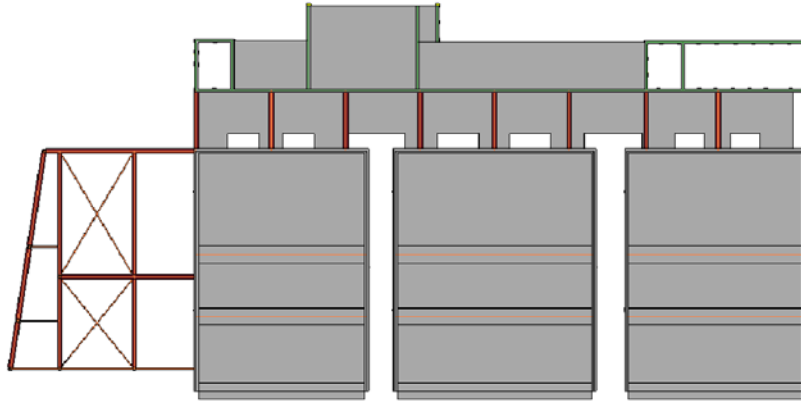
### 4.3.1 Introduksjon

Vi skal nå se på en mer fullverdig konstruksjon hvor analysene kun blir utført i FEM-Design og Robot. Konstruksjonen er en del av Stjørdal Kulturhus prosjektet som Rambøll har jobbet med i Trondheim. Totalt areal er på 11 500 m<sup>2</sup> som går over tre plan og med en parkeringskjeller. Bygget inneholder blant annet kultursaler, bibliotek, øvingsaler, kinosaler, galleri og kontorarealer.

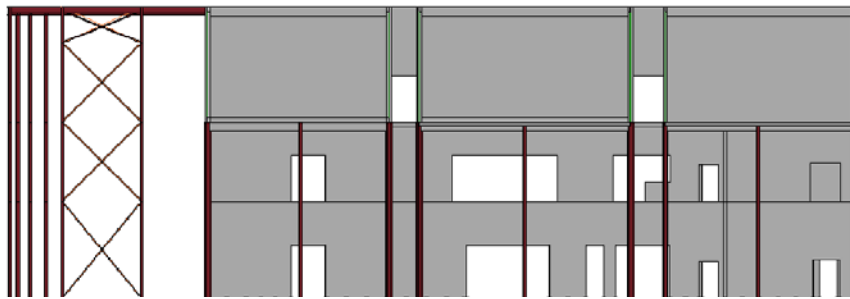


Figur 4.19: Revit 3D modell av Stjørdal kulturhus

Bygget er enormt kompleks, hvor blant annet deler av konstruksjonen står på peler. På figur 4.19 ser vi kulturhuset modellert i Revit. De tre boksene på toppen av bildet er av spesiell interesse for jordskjelv analyser. Boksene, som skal brukes av en danseskole, står på peler og er knyttet til resten av konstruksjonen gjennom ett betongdekke. Den horisontale avstivningen skjer gjennom ni stålbejler i toppen av veggene, ett vindkryss i stål og det nevnte gulvdekket som går til to heissjakter. Figuren under viser den delen vi ønsker å analysere, samt de horisontale avstiverne:



Figur 4.20: Modellen som analyseres, sett fra toppen



Figur 4.21: Modellen som analyseres, sett forfra

Både Robot og FEM-Design har gjort det mulig å importere filer fra Revit. Siden bygningen er så kompleks vil vi få testet hvor kompatible modelleringsprogram og analyseprogram er med hverandre.

Materialdata ligger i vedlegg C.

Vi har tatt følgende antakelser før analysestart:

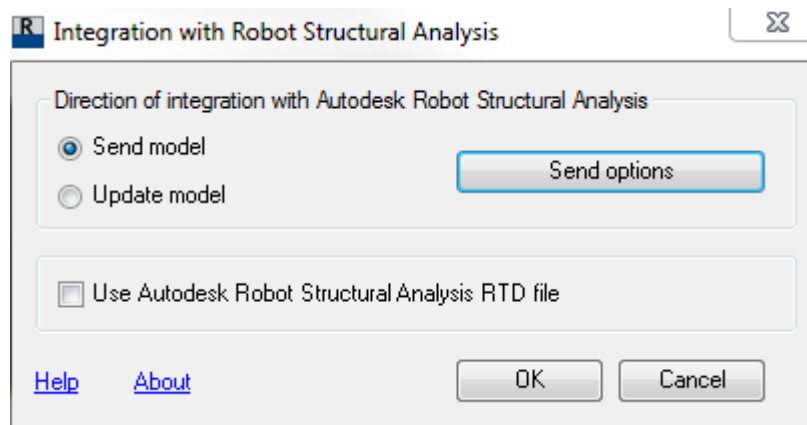
- Bygningen er fundamentert på peler og det er krav til SSI-analyse. På grunn av hvor tidkrevende en slik analyse er, antar vi helt stivt fundament (type A).
- Pelene danseboksene står på er leddet, det vil si at de ikke tar opp moment, kun krefter i søyleretning. Det samme gjelder for pelene helt til venstre på figur 4.21. De eneste pelene som tar opp andre krefter enn normalkrefter er de to søylene som er koblet til vindkrysset.
- En forenkling er gjort ved at det opprinnelige skråtaket er modellert i høyden til massepunktet for å unngå problemene analyseprogram har med å fordele kreftene på skråtak.
- Konstruksjonen antas å ha lav duktilitet ( $q=1,5$ ) og dimensjoneringen kan da foretas i henhold til vanlige standarder for beregning av kapasiteter.
- Dempningsforholdet settes til 5 %.

Vi har tatt følgende valg underveis:

- Etter å ha kjørt analysen med modellen vist i figurene 4.20 og 4.21, ser vi at i programmene knekker ut i vindkryssene. Poenget med vindkryssene er at den staven som får strekk skal ta opp kraften. Dette kan vi løse på to måter:
  1. Sette stavene til «tension bars» som da bare tar opp strekk-krefter. I Robot innebærer det at analysen blir ikke-lineær og da tidkrevende. Den ikke-lineære analysen kan heller ikke kombineres med den lineære modale analysen så derfor ser vi bort ifra denne.
  2. Fjerne halvparten av vindstagene. På grunn av at seismiske krefter gjør at konstruksjonen svinger fram og tilbake, noe som fører til at stagene veksler mellom trykk og strekk, er det ikke mulig å ta bort noen og kun sitte igjen med strekk-krefter. Vindstagenes oppførsel i svingeformene gitt av programmene vil derfor ikke være reelle. Derimot er stivheten reell om vi gjør dette, fordi det reelt sett bare er et av vindstagene som til enhver tid tar opp kreftene. Vi kommer til å bruke denne metoden og anta at alle krefter virker som strekk-krefter, noe som er både logisk og reelt.
- Modellen er først blitt analysert uten at danseboksene er koblet sammen på andre måter enn gjennom betongdekket. Danseboksene vil da svinge så og si uavhengig av hverandre. En videre modell er blitt laget hvor boksene er koblet sammen i toppen med en stålbjelke. Dette gjøres i et forsøk på å fordele stivheten bedre og da oppnå en mindre forskyvning av boksene.

### 4.3.2 Import fra Revit

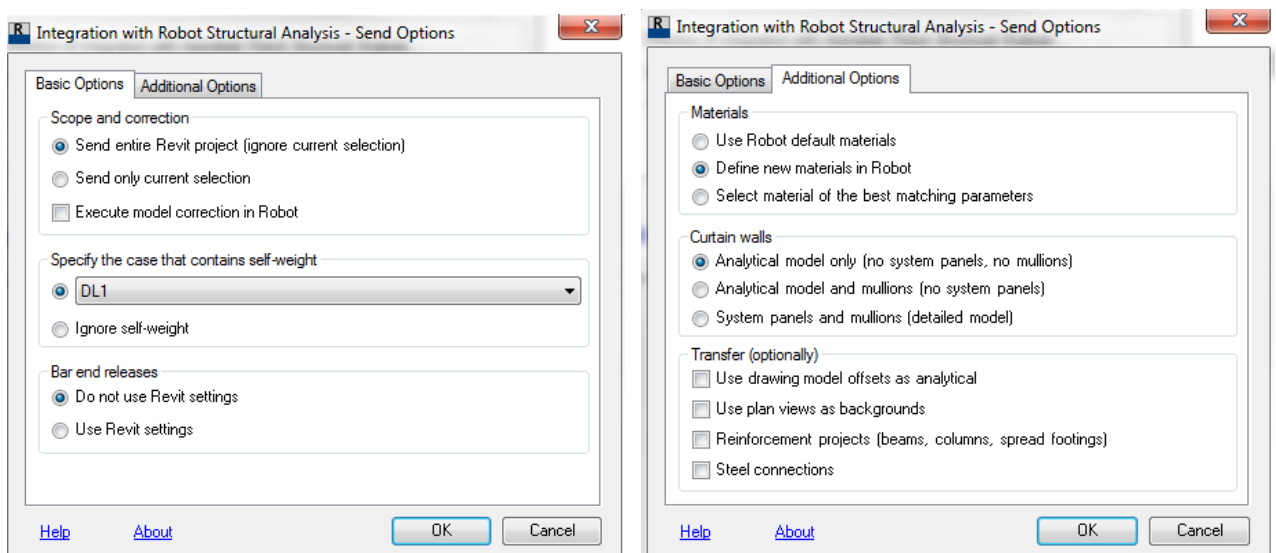
Som tidligere nevnt er Autodesk firmaet som står bak både Revit og Robot. Det er derfor lagd en innebygd funksjon som eksporterer modellen fra det ene programmet til det andre. Importen er lagt opp slik at en kan velge om en vil begynne med alle detaljene på modelleringen i Revit og så analysere konstruksjonen i Robot, eventuelt så kan konstruksjonen tegnes i Robot og så importeres til Revit hvor detaljene så gjøres (figur 4.22). Hvor en ønsker å begynne er opp til brukeren. Det vanligste er å begynne med designprosessen og det gjør vi i denne oppgaven også. Vi må ta noen valg på veien før vi får eksportert:



Figur 4.22: Import fra Revit til Robot

De to første er forklart over, mens det siste valget vil si at Robot og Revit jobber i to forskjellige filer. Det vil si at en person kan fortsette med Revit modellen mens en annen person jobber med Robot modellen [26].

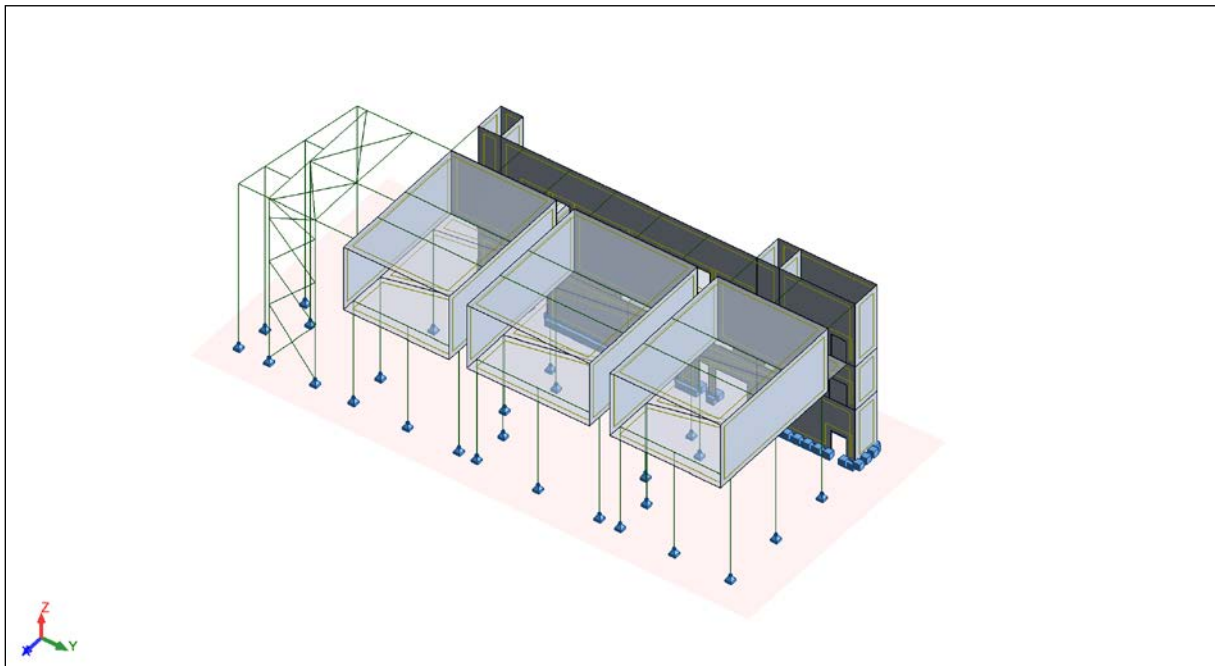
Andre valg brukeren må gjøre er å bestemme om hele eller bare deler av konstruksjonen skal sendes, hvilken lastkombinasjon egenvekten ligger i, og hvordan elementene er innspent (figur 4.23):



Figur 4.23: Innstillinger for importen fra Revit til Robot

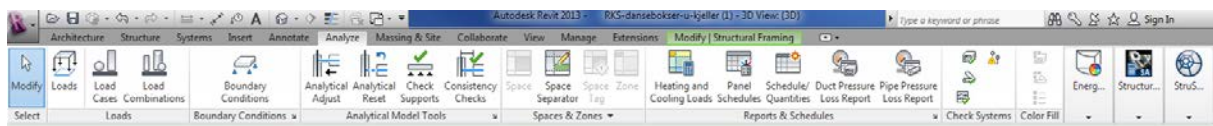
Skjermbildet til høyre på figur 4.23 viser hvordan brukeren kan velge om Revit, Robot eller brukeren selv skal tilegne materialdata. Det er også mulig å velge og ikke eksportere ikke bærende konstruksjonsdeler til Robot.

Når valgene er tatt så kan konstruksjonen sendes til Robot. Slik blir modellen av de tre danseboksene seende ut i Robot:



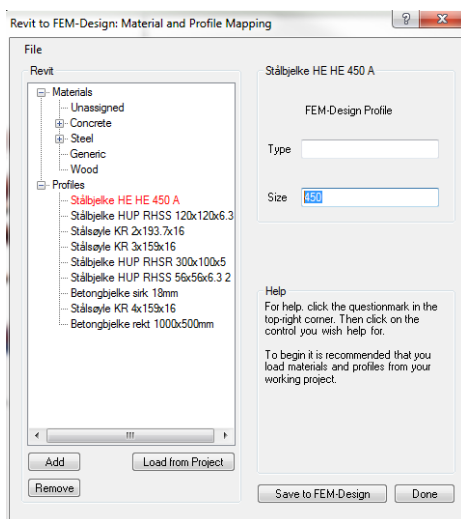
Figur 4.24: 3D-modellen i Robot

FEM-Design har også mulighet for import fra Revit. Dette gjøres ved å gå inn på Strusoft sine hjemmesider og laste ned filen «Revit to FEM-Design» [24]. Når det er gjort dukker ikonet for Strusoft opp i Revit:



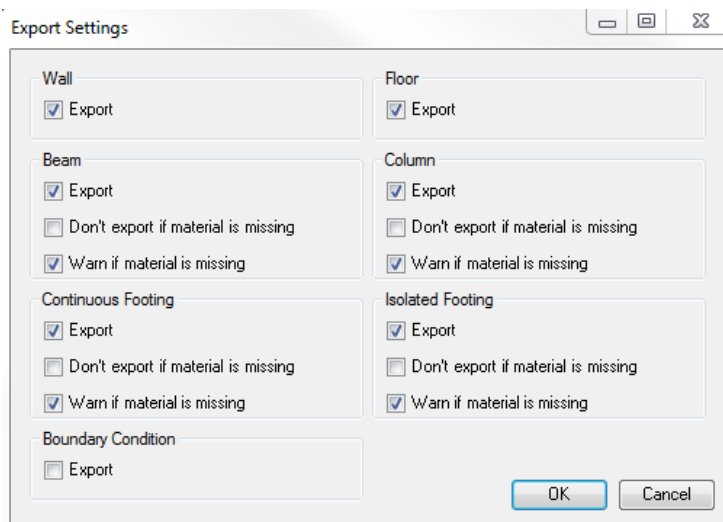
Figur 4.25: Menylinjen i Revit. Strusoft ikonet kan ses helt til høyre på figuren

Før vi sender modellen til FEM-Design må vi velge hvilke materialer som i FEM-Design tilsvarer materialene i Revit. Dette gjøres ved å velge **mapping** som kommer opp som et valg under Strusoft ikonet. Figuren under viser hvordan dette gjøres:



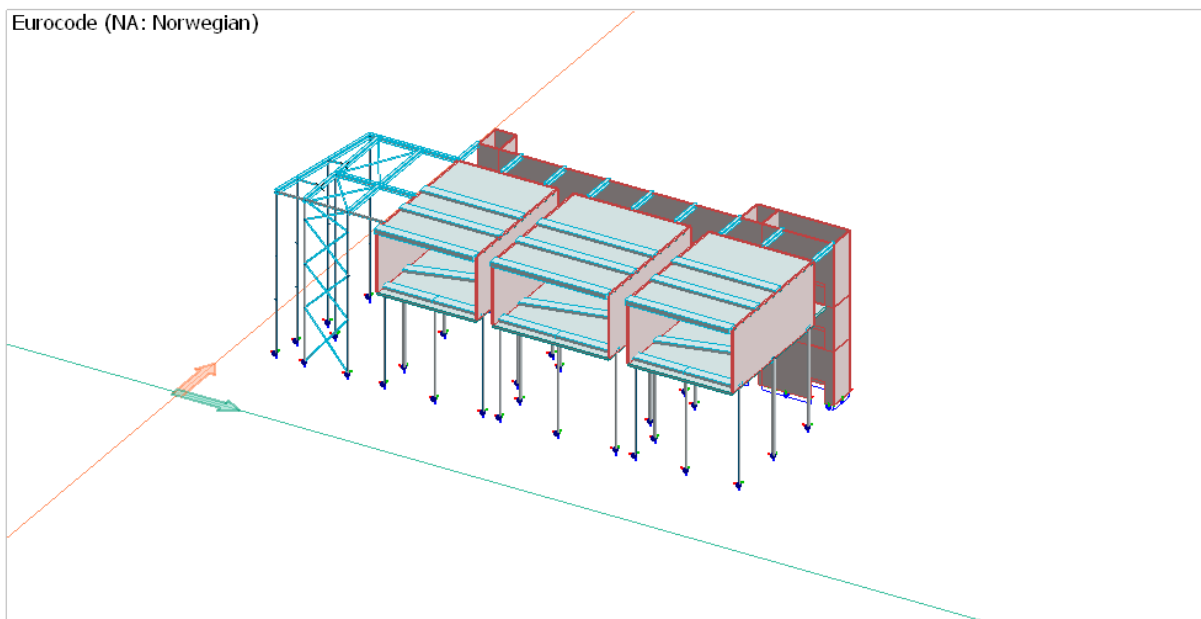
**Figur 4.26: Mapping av materialene fra Revit til FEM-design**

Materialene som har rød skrift har brukeren ikke definert i FEM-Design og de med svart skrift har blitt definert. Når materialer er valgt går skriften fra rød til svart (på figuren 4.26 er ikke HE 450 A blitt definert i FEM-Design). Når alle er profilene har svart skrift kan vi gå videre til å bestemme hvilke konstruksjonsdeler som skal eksporteres:



**Figur 4.27: Innstillinger for importen fra Revit til FEM-Design**

Når ønskede innstillinger er valgt kan en sende modellen til FEM-Design. Modellen av boksene blir som følger:



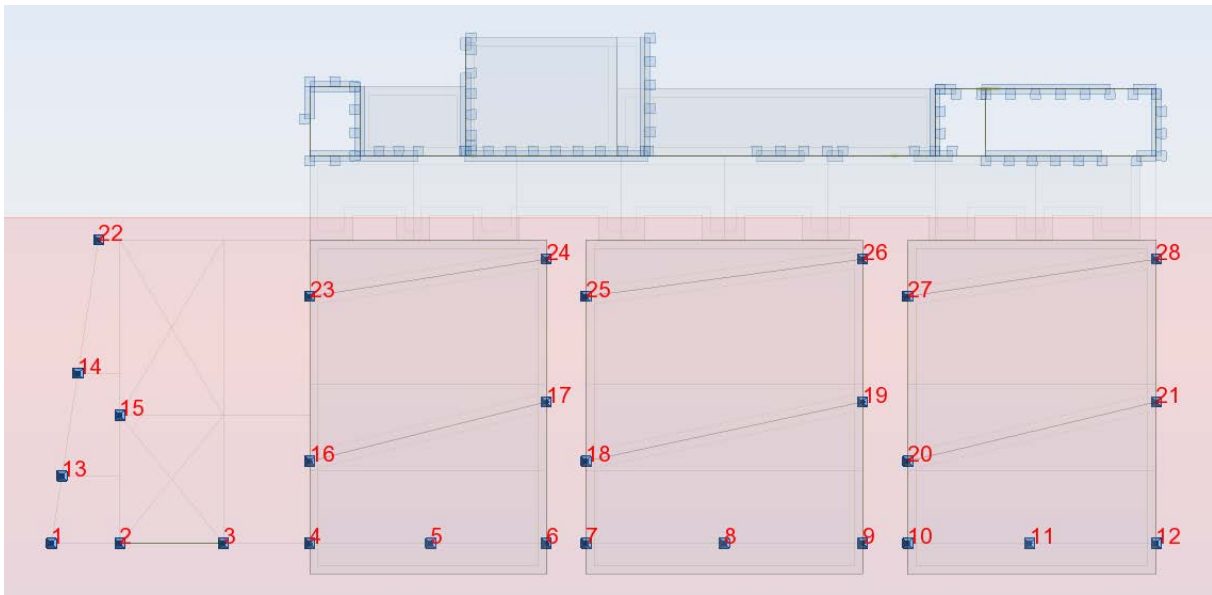
Figur 4.28: 3D-modellen i FEM-Design

Når importen er gjort er det viktig å kontrollere at alle konstruksjonsdeler er blitt importert. Dette kan gjøres på flere måter, men vi velger her å sammenligne totalvekten av konstruksjonen og opplagerkreftene i pelene i de to programmene. FEM-Design definerer tettheten til betong til å være  $2500 \frac{kg}{m^3}$ , mens denne i Robot er definert til  $25 \frac{kN}{m^3}$ . For at massen, og da responsen, skal bli sammenlignbar endres tettheten i FEM-Design til å samsvare med den i Robot. Vi får da følgende resultater:

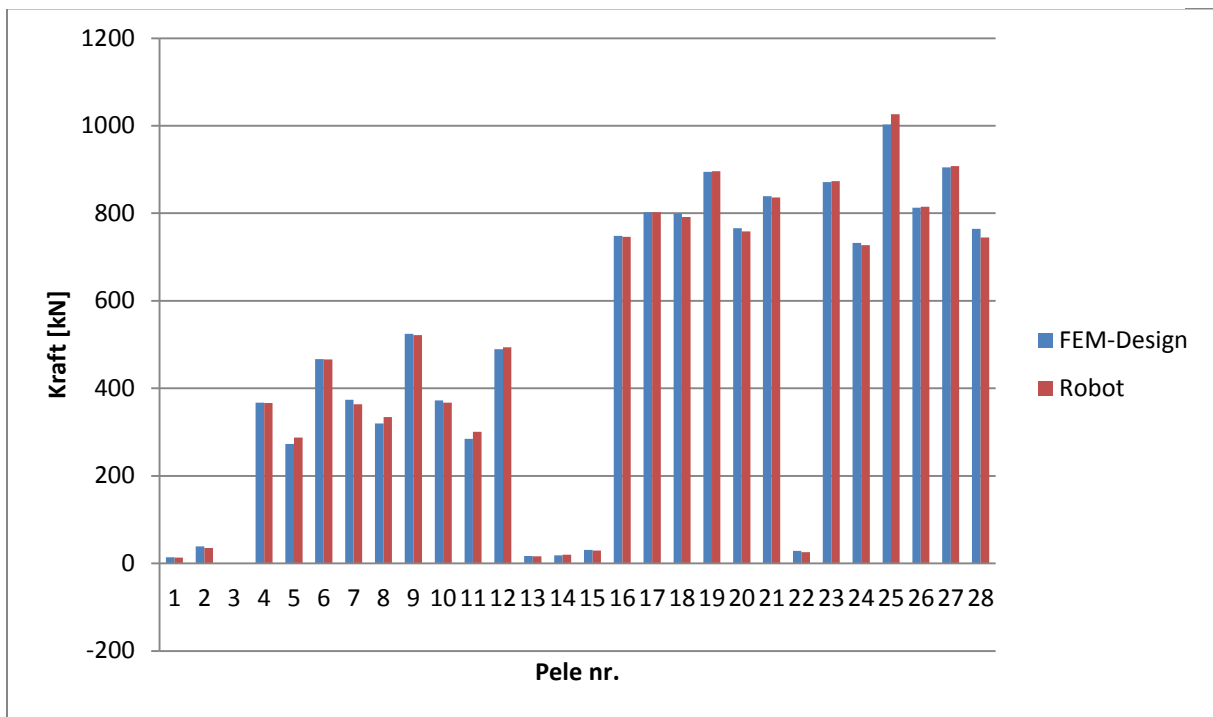
FEM-Design [kg]	Robot [kg]	Avvik [%]
2134571,95	2134216,07	0,017

Tabell 4.15 Totalvekten av konstruksjonen i FEM-Design og Robot

Vi ser at avviket på egenvekt i de to programmene er så lavt som 0,017 prosent. For å forsikre oss om at kreftene fordeles likt sammenlignes de vertikale opplagerkreftene i pelene. Figuren under viser kreftene som virker i vertikal retning i hver pele:



Figur 4.29: Pelene for danseboksene og den tilhørende rammen



Figur 4.30: Kraftene i pelene

Vi kan se av figuren at også opplagerkreftene i pelene samsvarer bra i de to programmene. Vi sier oss derfor fornøyde med at alle komponenter er importert fra Revit til de to analyseprogrammene. Før vi går videre er det også viktig å kontrollere randbetingelser og elementenes frihetsgrader. Vi endrer søylene til venstre på figur 4.21 til å kun ta opp normalkrefter («truss members») søylene i rammen som inneholder vindkrysset (til venstre på figur 4.21). Alle elementer må sjekkes for at konstruksjonens oppførsel i analyseprogrammene skal være reell.



### 4.3.2 Laster og lastkombinasjoner

Konstruksjonen har nyttelaster som må kombineres med egenlasten. Fra kapittel 3.0.2 har vi at 60 % av nyttelasten fra forsamlingslokale skal regnes som permanent. Siden den blir brukt med mulighet for fysisk aktivitet kommer konstruksjonen under kategori C4 og etter tabell NA.6.2 i NS-EN 1991-1-1:2002/NA:2008 gir det en nyttelast på  $q_k = 5 \frac{kN}{m^2}$ .

I tillegg er konstruksjonen deler av året utsatt for snølast. Fra kapittel 3.0.2 har vi at snølast kan inkluderes med 20 % av maksimalverdi. Snølasten regnes etter NS-EN 1991-1-1:2002/NA:2008 del 1-3 punkt 5.3 b):

$$s = \mu_i C_e C_t s_k$$

Hvor

$\mu_i$  er snølastens formfaktor.  $\mu_i = 0,8$  (pulttak  $0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$ )

$C_e$  er eksponeringskoeffisienten.  $C_e = 1,0$  (normal topografi)

$C_t$  er den termiske koeffisienten.  $C_t = 1,0$

$s_k$  er karakteristisk verdi for snølast på mark.  $s_k = 3,5 \frac{kN}{m^2}$  (Stjørdal)

$$s = 0,8 * 1,0 * 1,0 * 3,5 \frac{kN}{m^2} = 2,8 \frac{kN}{m^2}$$

Siden jordskjelvlaster regnes som ulykkeslast får vi da denne lastkombinasjonen for konstruksjonen:

$$1,0 * G + 0,2 * s + 0,6 * q_k$$

Hvor G er egenlast, s er snølast og  $q_k$  er nyttelasten.

Kreftene regnes etter to ortogonale retninger og disse kombineres etter formel (3.3):

$$1) E_{dx}'' + 0,3E_{dy}''$$

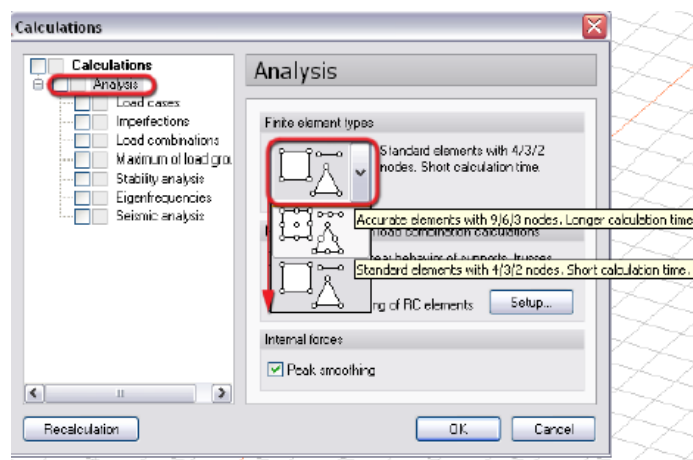
$$2) 0,3E_{dx}'' + E_{dy}''$$

Lastene legges inn i både Robot og FEM-Design på de opptredende områdene. Senere skal vi se nærmere på hvordan kombinasjonene behandles i de to programmene.

### 4.3.2 Elementstørrelse og type element

I kapittel 2.2 gikk vi gjennom at elementmetoden. Både FEM-Design og Robot genererer elementinndelingen (meshing) automatisk hvis en ikke endrer noe manuelt før analysen kjøres. En automatisk inndeling vil i FEM-Design si at programmet velger gjennomsnittlige elementstørrelser ut ifra konstruksjonens geometri og randbetingelser. Det er likevel anbefalt at brukeren kontrollerer meshingen i tilfelle den automatiske meshingen ikke er optimal [21]. Problemer i meshingen kan gi feil resultater og store problemer kan også medføre at analysen ikke vil kjøre.

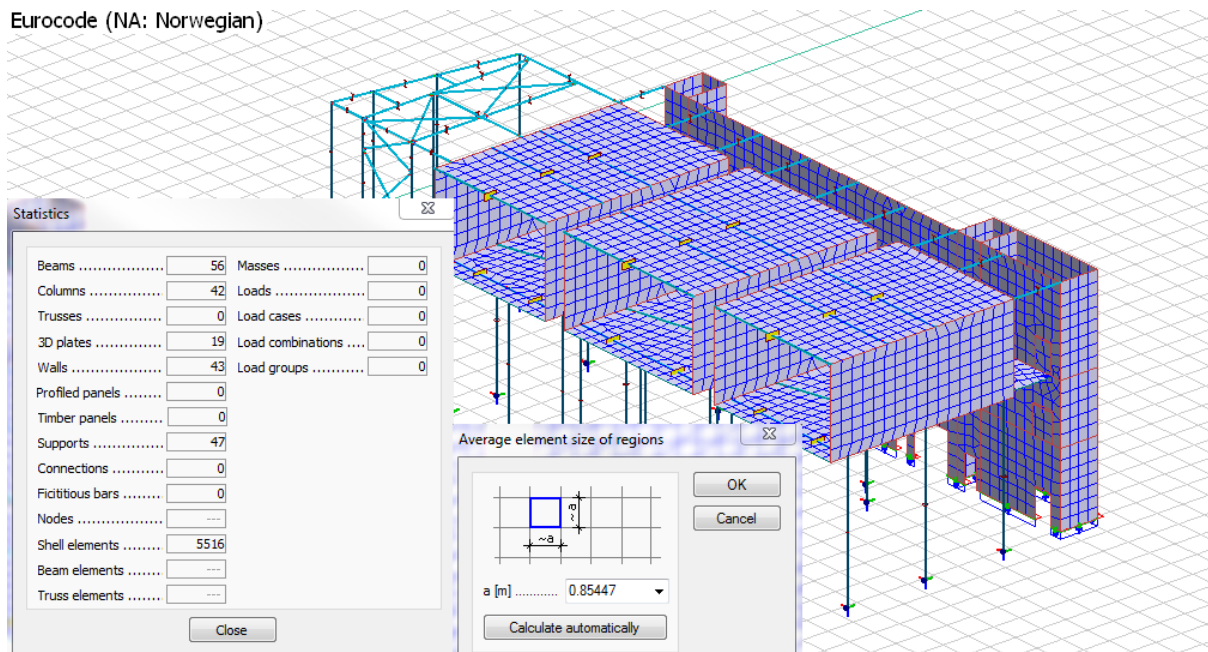
I FEM-Design har vi valget mellom to typer elementer:



Figur 4.31: Valg av elementtype i FEM-Design

Standard element deler elementene inn med 4 noder for rektangler, 3 for triangler og 2 for bjelker, søyler og barer. En mer nøyaktig inndeling får vi hvis vi velger inndeling med 9/6/3 noder. Ulempen med denne er analysen er at den kan ta opptil 4 ganger så lang tid å kjøre analysen [24].

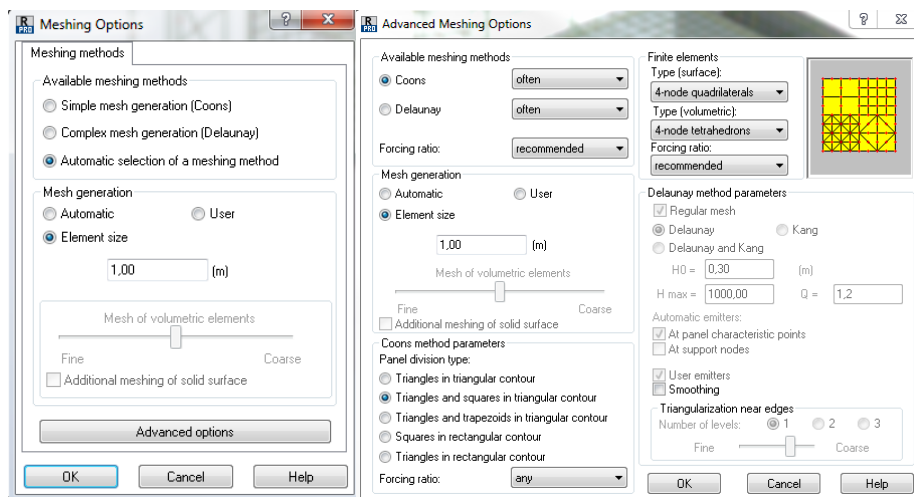
Automatisk meshing i FEM-Design gir oss denne modellen:



Figur 4.32: Automatisk meshing av modellen i FEM-Design

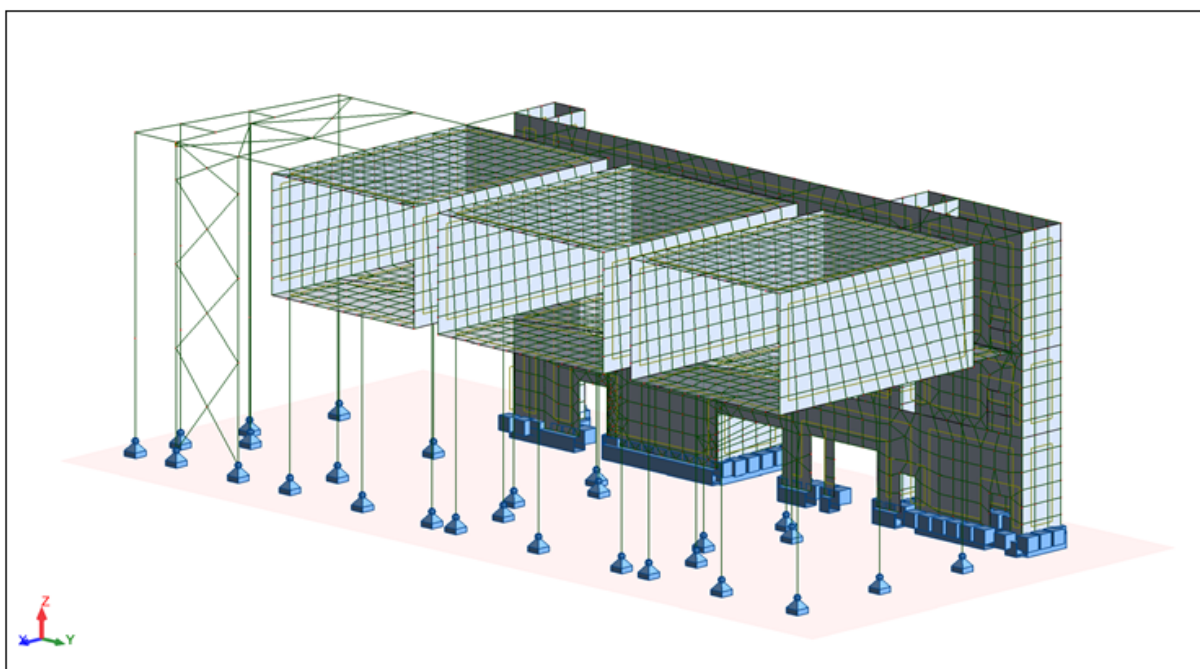
Vi ser at modellen først og fremst er delt inn i kvadratiske elementer med noen triangler innimellom. Vi har fått generert 5516 shell elements og med denne inndeling har programmet lagd gjennomsnittlig elementstørrelse på 0,85447 m. Denne størrelsen er uavhengig av om vi velger 4/3/2 eller 9/6/3 elementtyper. [21]. Peak smoothing er en funksjon som tar for seg kritiske områder som hjørner, utsparinger i vegger, overgang søyle til gulv ol. Det funksjonen gjør er å fordele kreftene til elementene rundt det kritiske området [24].

I Robot har vi flere valg når vi skal generere elementnettet. Som figuren til venstre under viser, så er det en enkel, en avansert metode og en automatisk metode. Under den enkle metoden velger en hvordan inndelingen skal være av rektangler, kvadrater og triangler. Hvis ikke annet velges så blir disse delt inn i 4/3/2 type elementer, men det er også mulig å velge inndelinger med flere noder. Den avanserte generatoren (Delaunays) bruker to metoder når den lager elementnettet (Kang's og Delaunays). Steder hvor konstruksjonen krever en mer presis inndeling bruker Kang's metode og det utenom regnes etter Delaunays metode. Hvilke områder som krever en finere inndeling kan enten brukeren velge, eller programmet gjør det automatisk [25].



**Figur 4.33: Valg av elementinnstillinger i Robot**

Vi bruker det siste automatiske valget hvor programmet for vår konstruksjon gir en enkel inndeling av elementnettet (Coons). Elementstørrelsen velges av brukeren og denne setter vi til å være 1,0 meter for alle elementer. Vi får da denne modellen:



**Figur 4.34: Elementnettet i Robot. Gjennomsnittlig elementstørrelse på 1,0 m.**

Vi ser at inndelingen hovedsakelig består av rektangler og noen triangler. Elementstørrelsen på 1,0 m. gir 3747 shell elements.

Modellene i Robot og FEM-Design ser ut til å være foruten store problemområder. Sjaktene kunne blitt delt inn med ett tettere elementnett, men med tanke på at en finere inndeling rundt åpningene i

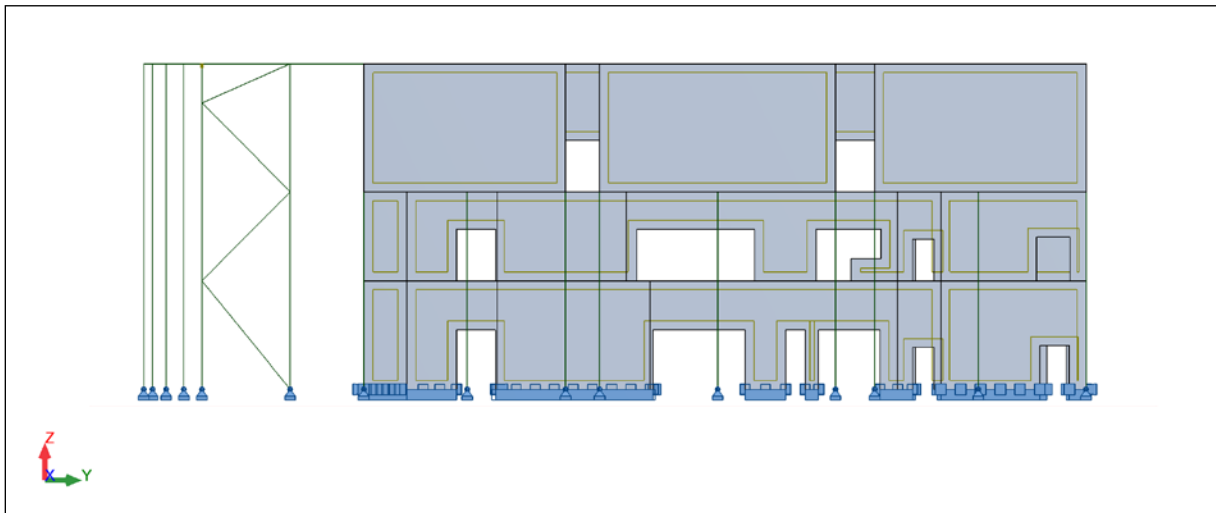
sjaktene har liten innvirkning for våre resultater (se vedlegg D.5) og at mindre elementer gjør analysen mer tidkrevende, velger vi å ikke endre elementstørrelsen for dette området. FEM-Design har regnet automatisk elementstørrelsen for sjaktene til å være 0,624 m og siden sjaktene hadde liten påvirkningen for de områdene vi er ute etter, endre vi denne til å bli lik den i Robot på 1,0 m. I FEM-Design endrer vi også elementstørrelsen på vegger, tak og gulv fra 1,025 til 1,0 m. Betongdekket mellom danseboksene ønsker vi en finere elementinndeling fordi vi etterhvert vil se hvordan de seismiske kreftene fordeler seg fra danseboksene til sjaktene. Vi endrer derfor størrelsen her fra 0,425 m til 0,3 m i FEM-Design og fra 1,0 m til 0,3 m i Robot.

Vi har nå modeller som likner mer på hverandre. Vi har nå økt antall shell elements fra 5516 til 6260 i FEM-Design og i Robot fra 3747 til 5622. Siden elementstørrelsen angir en gjennomsnittsverdi vil ikke det totale antall shell elements i de to programmene være helt like hverandre, men nærme nok til at resultatene ikke blir påvirket i stor grad.

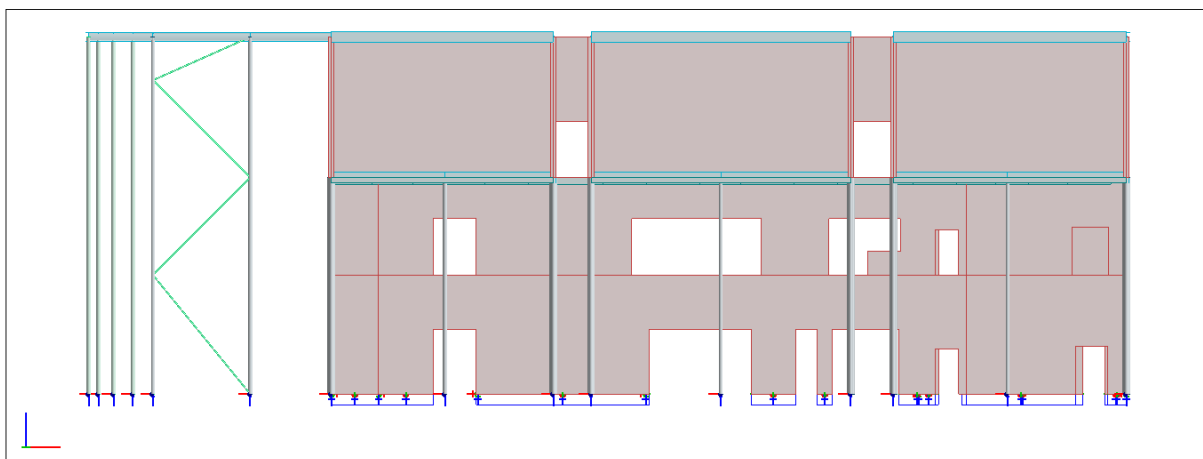
I vedlegg D.5 er analysene blitt gjennomført med forskjellige elementnett. Resultatene fra disse bekrefter at elementnettet vi har brukt gir tilstrekkelig nøyaktige resultater.

### 4.3.3 Analyser

I kapittel 3.1 gikk vi gjennom analysemetodene. Den forenklete tverrkraftmetoden krever regularitet i oppriss for at metoden skal kunne brukes. Det vil si at massen og stivheten til konstruksjonen bør forbli noenlunde konstant i høyden av konstruksjonen. Dette kan ikke sies å gjelde for vår konstruksjon, som derimot heller mot en «soft story» konstruksjon som ble forklart i kapittel 3.0.3.2. Dette gjør at kravene for bruk av tverrkraftmetoden ikke blir innfridd for denne konstruksjonen. Som nevnt i innledningen vil vindkryssene knekke ut når vi kjører den modale analysen siden det oppstår trykk-krefter. Det er mulig å gjøre vindkryssene om til stag som kun kan ta opp strekk-krefter, men da blir analysen ikke-lineær og vi ønsker en lineær modal analyse. Vi fjerner derfor halvparten av kryssene (uendret stivhet) og får modellen som ser som følger ut i henholdsvis Robot og FEM-Design:



Figur 4.35: 3D-modellen i Robot etter halvering av antall vindstaver



Figur 4.36: 3D-modellen i FEM-Design etter halvering av antall vindstaver

I vedlegg D.1 ligger verdier for de 100 første svingeformene fra både FEM-Design og Robot. De aktuelle retningene er x- og y-retning, og for å oppnå kravet på 90 % effektiv modal masse må vi i

Robot inkludere alle svingeformer fram til svingeform 21 i x-retning og svingeform 37 i y-retning. Vi har derfor muligheten til å se bort ifra svingeformene med høyere frekvens på grunn av at de gir så lavt bidrag til totalresponsen.

I FEM-Design oppnår vi ikke kravet på 90 % verken i x- eller y-retning. Figuren under viser hvilke av de 100 første svingeformene som gir bidrag i x- og y-retning:

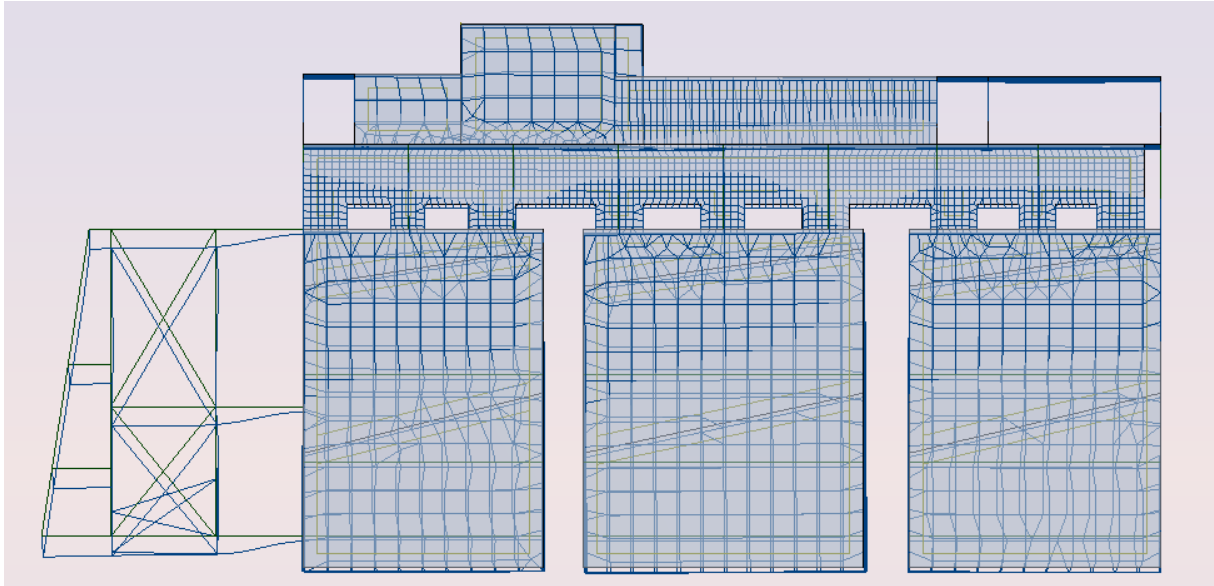
Shape no.	T	$m_{x'}$	$m_{y'}$	$m_{z'}$
[-]	[s]	[%]	[%]	[%]
1	0.577	0.6	-	-
2	0.453	-	9.6	-
3	0.365	4.5	25.3	-
4	0.357	-	0.7	-
6	0.321	0.7	1.1	-
7	0.316	-	1.8	-
8	0.267	78.1	2.8	-
9	0.200	1.6	4.4	-
10	0.196	1.8	1.3	-
21	0.122	-	6.1	-
22	0.116	-	1.2	-
23	0.110	-	17.4	-
25	0.099	-	1.1	-
26	0.096	-	4.0	-
28	0.093	-	1.4	-
32	0.089	-	1.2	-
38	0.077	-	8.8	-
67	0.053	1.0	-	-
84	0.043	0.7	-	-
Summa		89.0	88.2	0.0

Figur 4.37: Effektiv modal masse i FEM-Design

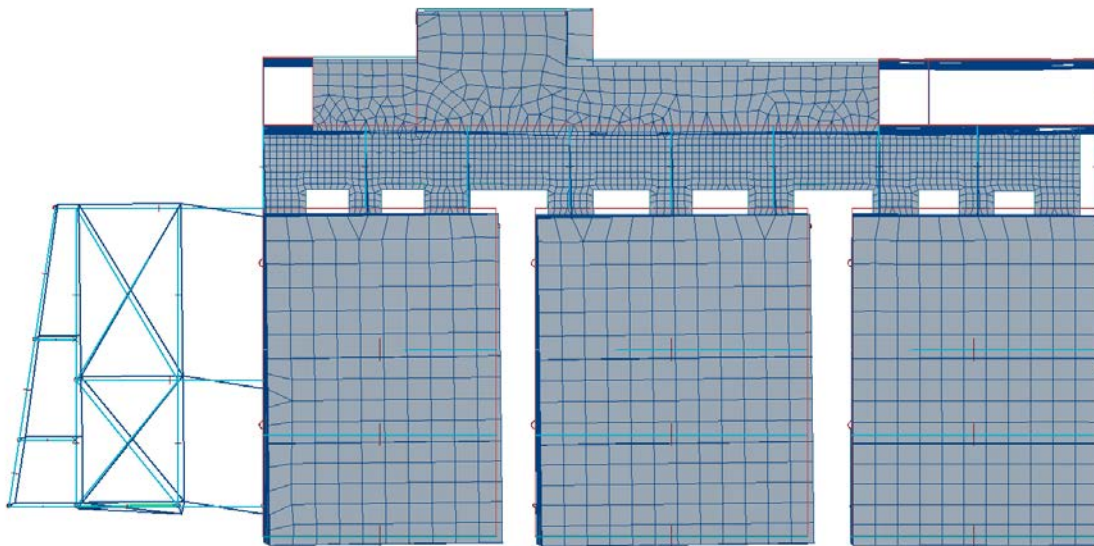
Vi ser av tabellen at av 100 svingeformer er det kun 8 i FEM-Design som har modal masse i x-retning. I Robot er det hele 65 svingeformer som har modal masse i x-retning. Selv om mange ligger på under 0,5 i modal masse, vil likevel et så høyt antall gi noe bidrag til den totale responsen. Noe som er synlig i vårt tilfelle ved at det gjør at vi kommer oss over kravet på 90 % effektiv modal masse. Grunnen til at FEM-Design ikke har flere svingeformer med lave verdier kan komme av numeriske feil i løsningen av egenverdi-problemet. Svingeformer med null modal masse er ofte også tegn på torsjonsvingeformer som roterer nøyaktig om massesenteret og dermed verken gir bidrag til den modal massen i x- eller y-retning. Siden vi ikke oppnår kravet på 90 % bruker vi formlene fra kapittel 3.2.2 som kan brukes på konstruksjoner med mye torsjon og kravet på 90 % er vanskelig å oppnå. Antall svingeformer bestemmes da ved at både  $k \geq 3\sqrt{n}$  og  $T_k \leq 0,20$  s tilfredsstilles. Hvor k er antall svingeformer, n er antall etasjer over fundament eller stiv kjeller og  $T_k$  er egenperioden av svingeform k. Vi ser at kravet først tilfredsstillers begge to når de ni første egensvingeformene medregnes. På grunn av at vi da hadde endt opp med veldig lav effektiv modal masse i y-retning så velger vi å ta med alle de 100 svingeformene. Totalt får vi da 89 % effektiv modal masse i x-retning og 88,2 % i y-retning. I Robot

bruger vi alle de 100 svingeformene som totalt gir 94,6 % og 93,65 % effektiv modal masse i henholdsvis x- og y-retning.

Svingeformene som har høyest effektiv modal masse i x- og y-retning er vist i figurene under:



Figur 4.38: Svingeform med høyest effektiv modal masse ( $T=0,298$  s,  $m_x=74$  %) i x-retning i Robot



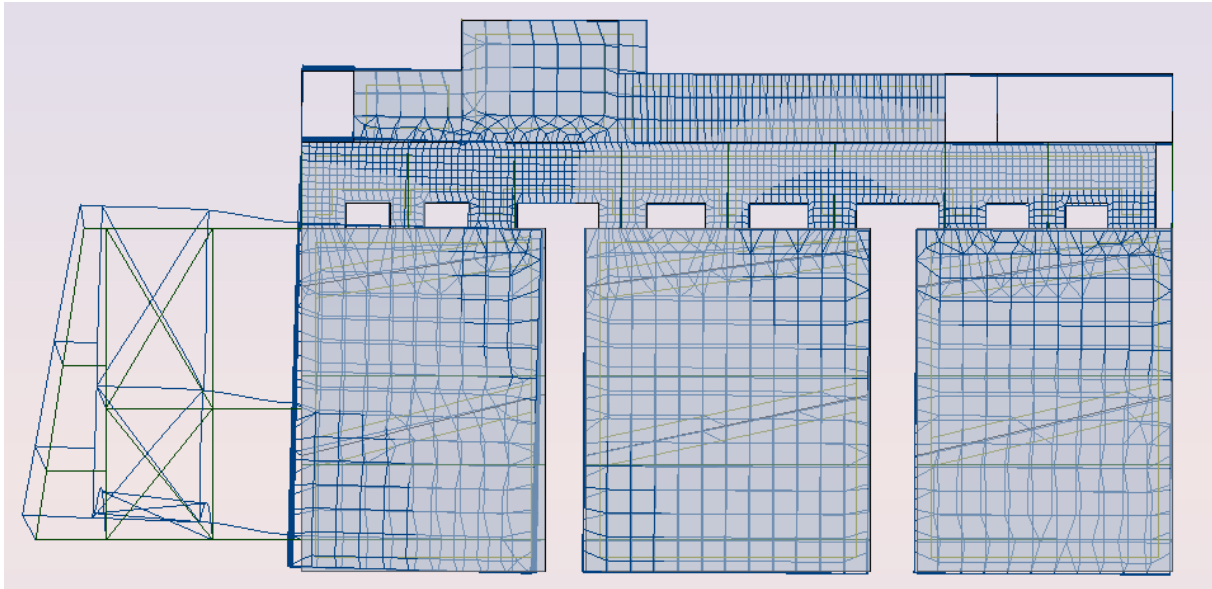
Figur 4.39: Svingeform med høyest effektiv modal masse i x-retning ( $T=0,267$  s,  $m_x=78,1$  %) i FEM-Design

Av figurene kan vi se at danseboksene forskyves i x-retning. Det fører til at store strekk-krefter overføres til sjaktene, noe vi ser resulterer i forskyvninger også her. Det er verdt å merke seg at Robot og FEM-Design viser utslaget noe forskjellig for rammekonstruksjonen til venstre, til tross for at geometrien, randbetingelser og frihetsgrader er satt til å være like i de to programmene. Robot viser en

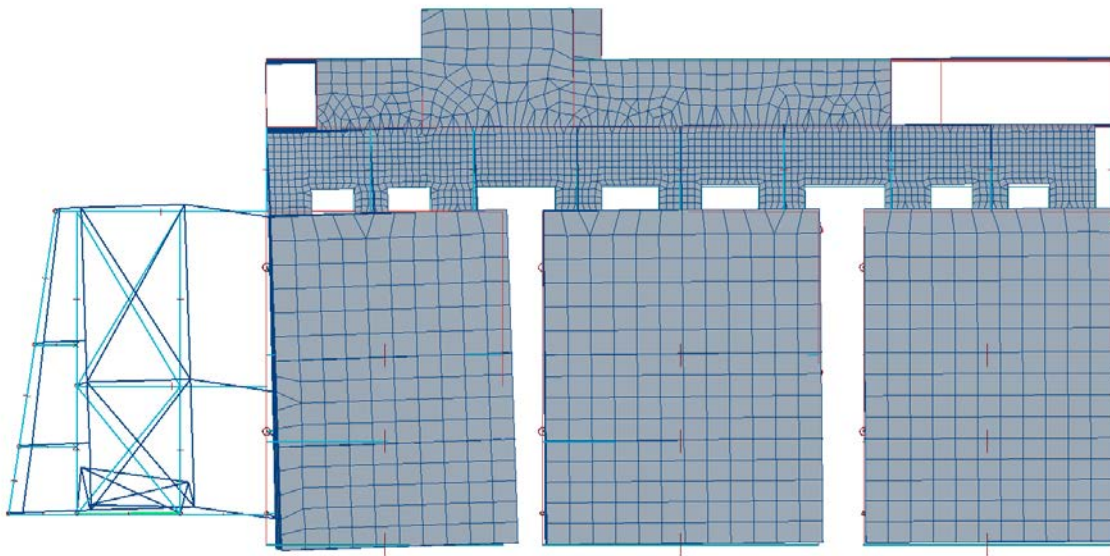


større forskyvning i x-retning og et større utslag på vindkrysset. I FEM-Design gis et noe feil bilde av opplagerbetingelsene til de tre bjelkene som er fast innspent i begge ender. Det er likevel uten betydning hva denne grafiske framstillingen viser så lenge den stivheten og responsen vi er ute etter (forskyvninger og krefter) er like i de to programmene.

Svingformene med høyest effektiv modal masse i y-retning er vist i figurene under:



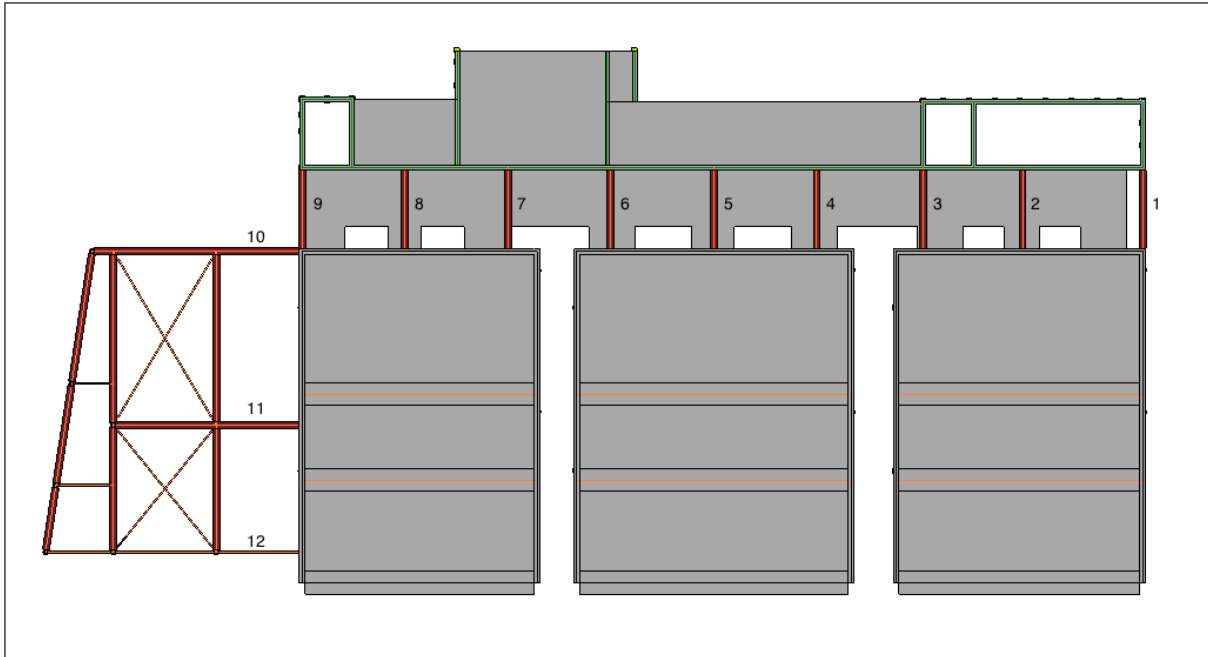
Figur 4.40: Svingform med høyest effektiv modal masse i y-retning ( $T=0,419$  s,  $m_y=23,38$  %) i Robot



Figur 4.41: Svingform med høyest effektiv modal masse i y-retning ( $T=0,365$  s,  $m_y=25,3$  %) i FEM-Design

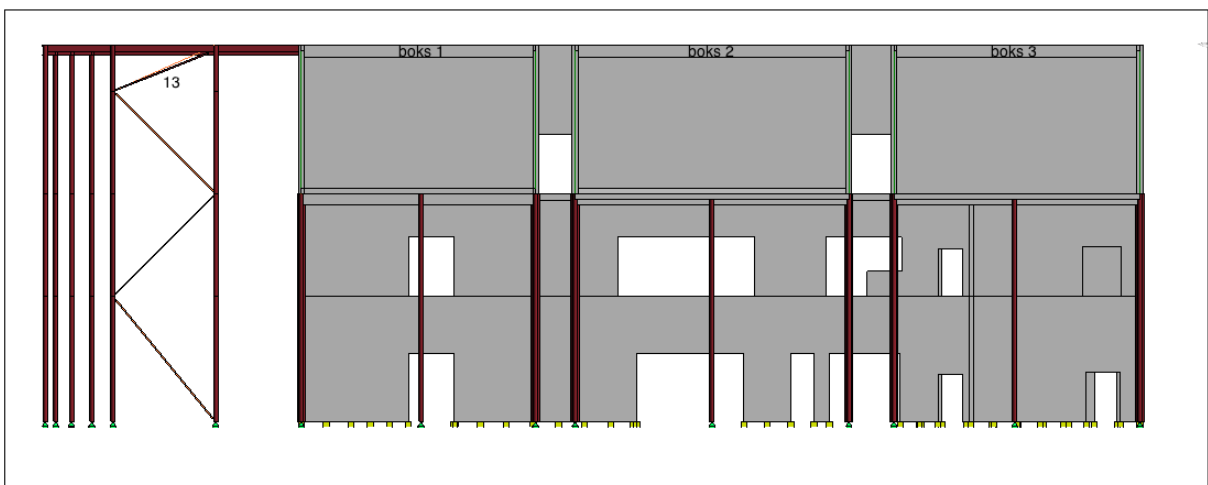
Vi ser at boksene svinger fram og tilbake i y-retning, hvor boksen til venstre får det største utslaget.

Vi ønsker videre å sjekke overføringen av krefter fra danseboksene til de delene av konstruksjonen som skal ta opp de seismiske kreftene. Dette kan gjøres på flere måter, men vi velger her å sammenligne kreftene i de ni bjelkene som kobler danseboksene og sjaktene sammen i toppen av konstruksjonen. I tillegg ser vi nærmere på kreftene i de tre bjelkene som går til rammekonstruksjonen med vindkrysset. Figuren under viser bjelkene nummerert:



Figur 4.42: Nummererte bjelker sett ovenfra i Revit

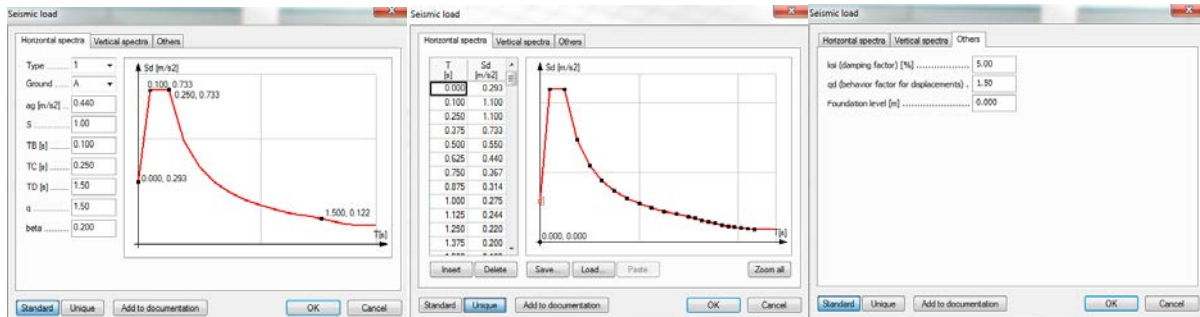
I tillegg vil vi se på kraften som går i øverste vindstag, som figuren under viser (nr. 13):



Figur 4.43: Nummerert vindstag og de tre boksene

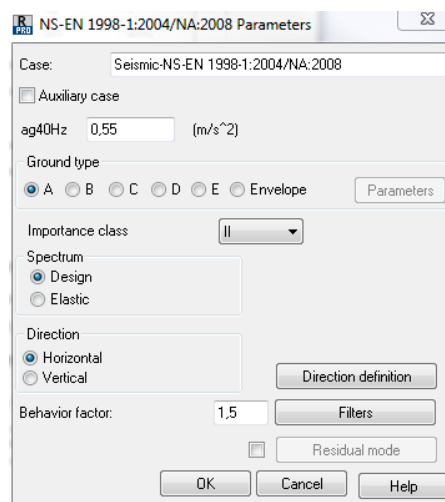
Forskyvningene av de tre boksene vil også sjekkes, så derfor nummeres disse i figuren over. Det er toppen av boksene som er av størst interesse siden forskyvningene her vil være de største.

Før vi kjører den seismiske analysen må vi fastsette responspekteret. I FEM-Design ligger type 1 og 2 fra EC8 inne. I tillegg er det mulig å endre verdiene manuelt. Vi må endre verdiene manuelt for å gjøre spekteret lik det som er i NA i EC8. På figuren til venstre under ser vi disse verdiene, samt den dimensjonerende grunnakselerasjonen  $a_g$  og at konstruksjonens duktilitet  $q$  legges inn:



Figur 4.44: Parametere for det horisontale spekteret (t.v.). Egendefinert spekter (i midten). Verdi for demping, duktilitet og fundamentthøyde (t.h.)

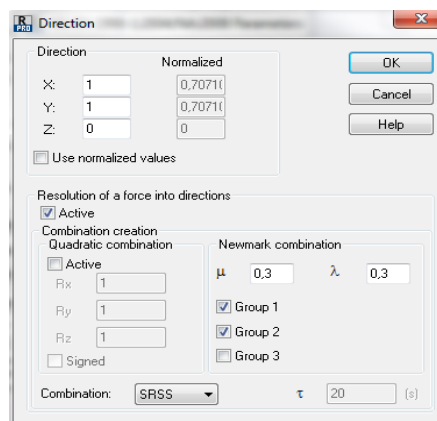
Det vertikale responspekteret bestemmes med et forholdstall til det horisontale spekteret. I EC8 er dette forholdstallet 60 % og det er også verdien som ligger inne som standard. Det er også mulig å legge inn et unikt spekter for både det horisontale- og det vertikale spekteret. Dempingsfaktoren settes til referanseverdien i EC8 på 5 %. I Robot er det verdt å merke seg at berggrunnens akselerasjon legges inn med spissverdien istedenfor referansespissverdien. I tillegg velges seismisk klasse, de to spektrene, hvilken retning jordskjelvet virker i og duktiliteten til konstruksjonen:



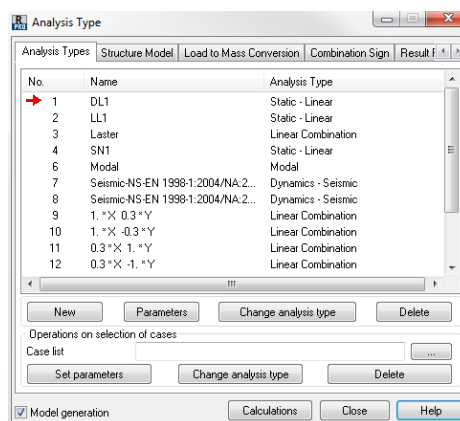
Figur 4.45: Innstillinger for seismisk analyse i Robot

Vi har to muligheter her som kan forkorte beregningstiden. **Auxiliary case** vil si at brukeren kan velge hvilke kombinasjoner som skal være med i analysen. Dette er blant annet nyttig i ikke-lineære analyser hvor bare noen kombinasjoner er av interesse [25]. Vi har også mulighet for å begrense analysetiden ved å filtrere moder under **filters**.

Kreftene i konstruksjonen skal så kombineres etter formel (3.2) i kapittel 3.0.2. Fortegnene skal styres slik at responsen blir mest ugunstig. Robot definerer trykk-krefter som positive verdier og strekk-krefter som negative verdier, mens i FEM-Design er trykk-krefter negative og strekk-krefter positive. Siden vi bare er ute etter største verdier brukes absoluttverdien. Figur 4.10 og 4.53 viser at FEM-Design automatisk tar den største responsen ved bruk av formel (3.3) hvor vertikal retning går under utelatelseskrevet noe som gjør formelen lik (3.2). I Robot regnes og presenteres hver kombinasjon. Figuren 4.46 viser at vi kan velge retninger og hvilken faktor disse skal kombineres med. Siden vi kan se bort ifra vertikale rystelser (satt til null i figur 4.46), får vi i Robot fire kombinasjoner, vist som tilfelle nr. 9, 10, 11 og 12 på figuren 4.47.



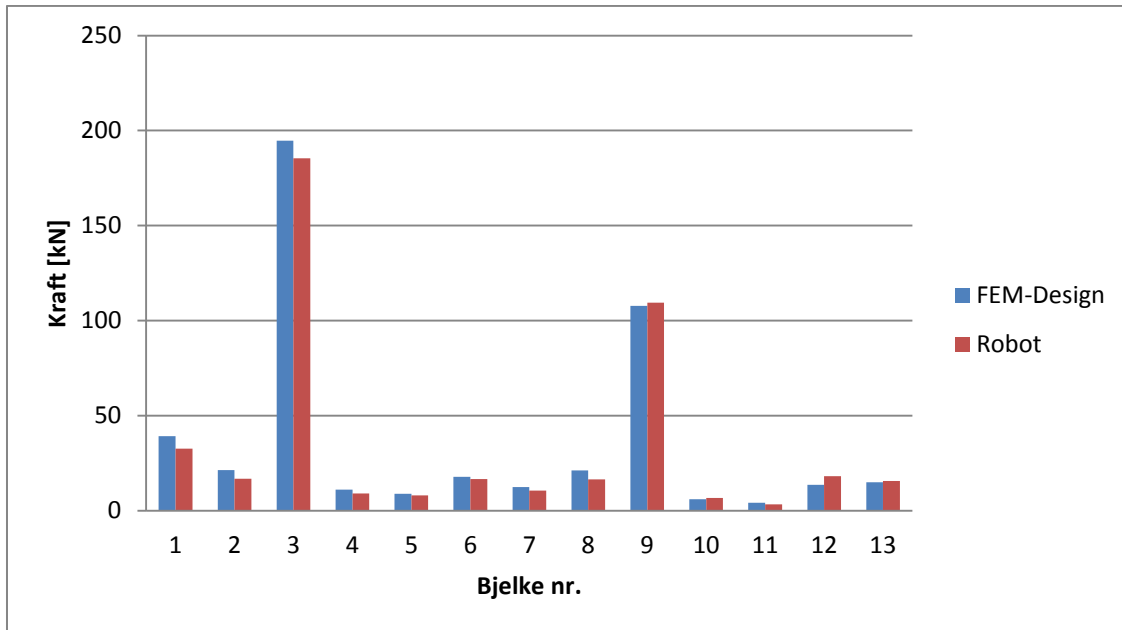
Figur 4.46: Valg av retning i Robot



Figur 4.47: Analysetyper i Robot

De totale kreftene fås ved å kombinere de permanente lastene med den av de fire kombinasjonene fra seismisk analyse som har høyest verdi. I mange tilfeller er det mulig å vite med en gang hvilken av de fire kombinasjonene som gir de største kreftene, mens andre ganger må en sjekke alle fire kombinasjoner. Selv om det finnes muligheter for å finne den kombinasjonen som har maksimal verdi for valgte elementer og noder, så blir det noe tungvint når en skal ha verdier for mange elementer/noder.

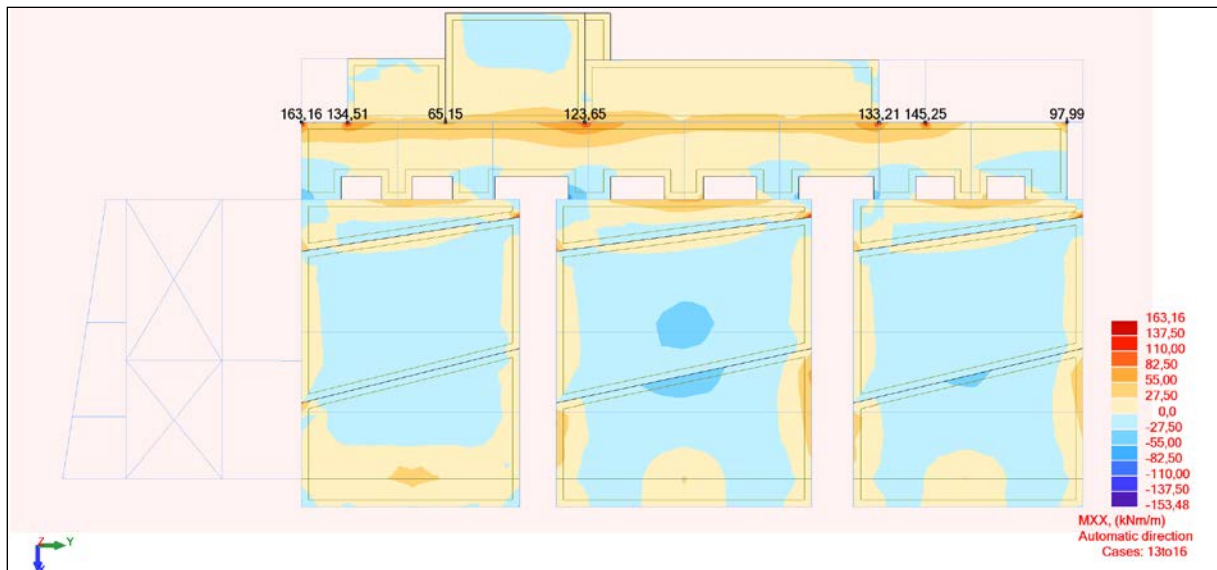
Figuren under viser kreftene i bjelkene. Den mest ugunstige kombinasjonen fra seismisk analyse er kombinert med de permanente lastene:



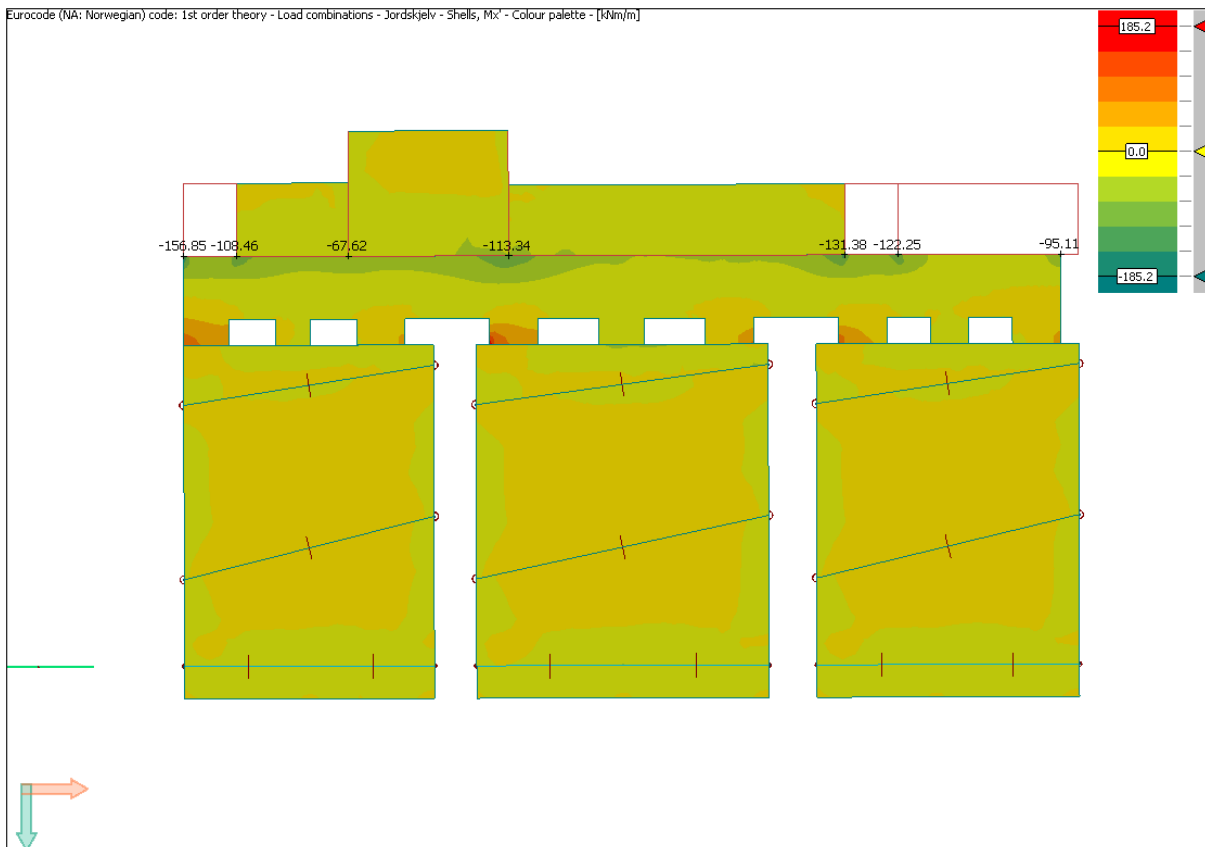
**Figur 4.48: Normalkreftene i bjelkene som knytter toppen av danseboksene med de horisontale avstiverne.**

Kreftene i bjelkene med både automatisk og fin elementinndeling ligger i vedlegg D.5.

Vi ønsker i tillegg å se på momentene som virker i betongdekket som knytter danseboksene og sjaktene sammen i første etasje. I Robot har vi her flere muligheter enn i FEM-Design. To nyttige funksjoner Robot har som FEM-Design ikke har er «panel cut» og «core wall». Her kan vi kutte paneler og se på kreftene som virker i snittet, og med «core wall» kan vi definere hvilke skiver som skal ta opp de seismiske kreftene og disse kreftene blir så presentert i tabeller eller i diagrammer (se vedlegg D.6). Når det gjelder diagram for paneler så har både FEM-Design og Robot gode muligheter her. Momenter for alle aksene samt torsjonsmomenter kan vises ved «contour palette» eller «contour lines». Under vises momentene i et «contour palette» som virker i x-retning om y-aksen for betongdekket:



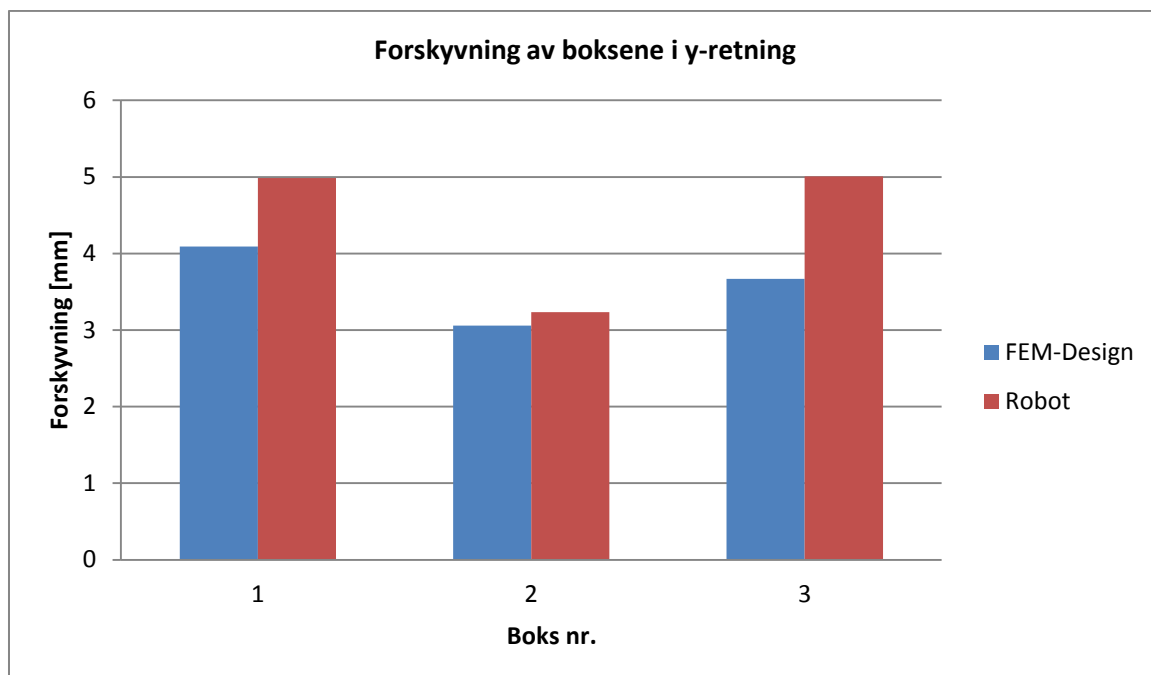
Figur 4.49: Momenter i x-retning om y-akse i Robot



Figur 4.50: Momenter i x-retning om y-akse i FEM-Design

Vi kan av figurene se at momentene i de to programmene samsvarer bra. Som tidligere nevnt, så er fortegnene motsatt av hverandre på grunn av at både krefter og momenter defineres med forskjellig positiv og negativ retning i de to programmene. Moment om x-akse og torsjonsmomenter finnes i vedlegg D.2. Momenter for automatisk og fin elementinndeling ligger i vedlegg D.5.

Vi ønsket også å se på forskyvningene i toppen av hver av de tre boksene. Figuren under viser den maksimale forskyvningen i y-retning for boksene.

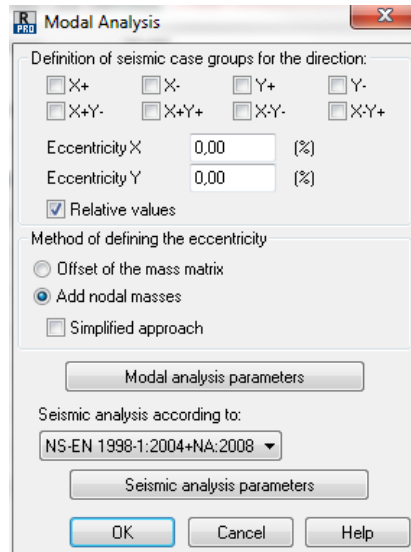


Figur 4.51: Forskyvningene i y-retning for de tre boksene

Vi ser at forskyvningen er på litt under en millimeter større i Robot enn FEM-Design for boks 1 og litt over en millimeter større for boks 3.

#### 4.3.4 Utsiktet eksentrisitet

Til nå har vi ikke tatt hensyn til utsiktet eksentrisitet. EC8 krever at det legges til 5 % tillegg for utsiktet eksentrisitet. Formel (3.9) er en forenklet metode, hvor krefter kan regnes som et tillegg i hver etasje på grunn av eksentrisitet som blant annet kan komme av usikkerheten i plassering av masse i konstruksjonen. I Robot har en mulighet til å behandle eksentrisiteten ved hjelp av forenklet eller nøyaktig metode:

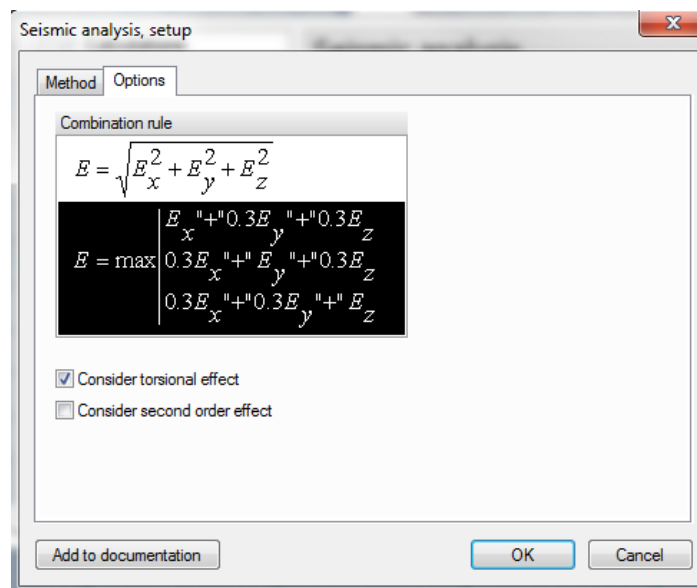


Figur 4.52: Definerings av utsiktet eksentrisitet i Robot

**Simplified approach** er forenklet metode som er beskrevet i kapittel 3.0.4 og den samme som brukes i FEM-Design. Metoden gir ingen innvirkning på egenfrekvenser eller svingformer fordi ingen endringer gjøres i massematrisen. Tillegget kommer først under den seismiske analysen hvor torsjonskreftene kommer som et tillegg til de seismiske kreftene. De to andre metodene gir derimot endringer i massematrisen og dermed innvirkninger disse på svingformer og egenfrekvenser. **Add nodal mass** vil si at tilleggs masse blir plassert i noder, mens **offset of the mass matrix** vil si at massen forskyves i en valgt retning og lengde. Siden den siste ikke krever at massen legges i nodene er det ikke mulig å kombinere denne med massen fordelt i punkter. Størrelsen på tillegget og i hvilken retning (+ eller -) bestemmes som vist øverst i figur 4.52. Velges flere retninger endres massematrisen for hver gang og den modale analysen må da kjøres for hvert tilfelle. Når den i tillegg skal kombineres med seismiske lastvirkninger som virker i forskjellige retninger (x, y, z) blir det en tidkrevende prosess. Til gjengjeld gir den mer nøyaktige resultat både for torsjonskrefter, egenfrekvenser og svingformer [25].

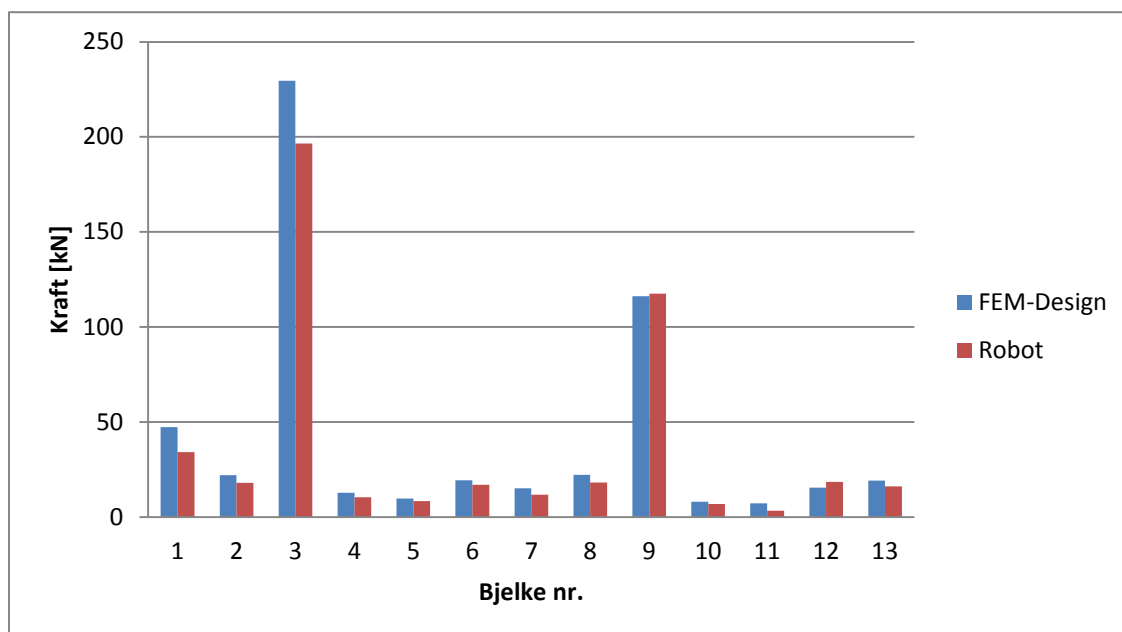


I FEM-Design er det bare mulig å beregne kreftene fra utilsiktet eksentrisitet etter forenklet metode:



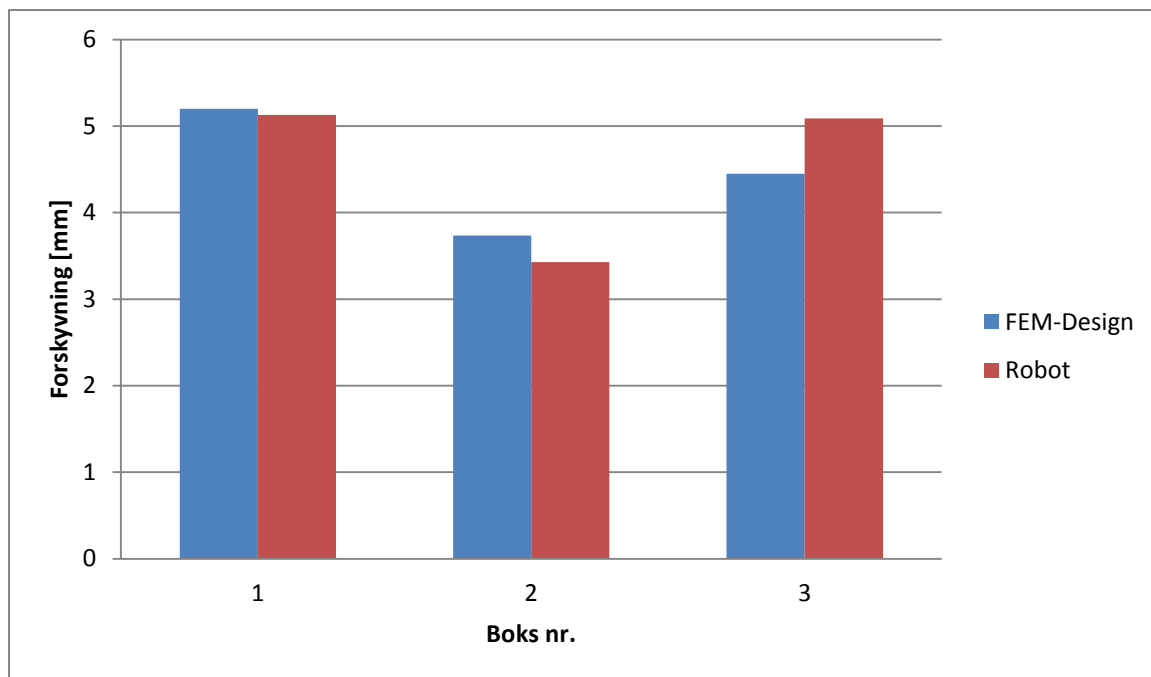
Figur 4.53: Utilsiktet eksentrisitet i FEM-Design

Eksentrisiteten legges i FEM-design kun til i retningen som er vinkelrett på jordskjelvbevegelsen (x+ og y+). Siden Robot regner eksentrisiteten i alle retninger blir det derfor 32 forskjellige kombinasjoner. Resultatene som ga størst krefter i analyse er presentert i figuren under:



Figur 4.54: Normalkrefter i bjelkene når det tas hensyn til utilsiktet eksentrisitet

Forskyvningene i de tre boksene når det tas med et 5 % tillegg for utilsiktet eksentrisitet:



Figur 4.55: Forskyvninger i boksene når det tas hensyn til utilsiktet eksentrisitet

Vi registrerer at forskyvningen øker mest for boks 1 i FEM-Design. Denne økningen vil vi se nærmere på i evalueringen.

### 4.3.5 Evaluering

Vi vil i denne evalueringen gå stegvis gjennom analysene som er blitt gjort i de to programmene i dette delkapittelet. Det blir sett nærmere på hvor godt de fungerer med tanke på resultater og tidsforbruk. Tidsforbruket er veldig avhengig av hvor kraftig datamaskin som brukes og hvor mange prosesser som kjøres samtid. Alle analyser er her gjort med kun de aktuelle programmene kjørende, samt at det er forholdet i tidsforbruk mellom de to programmene som vil bli vektlagt istedenfor den nøyaktige tiden for hver prosess.

#### Import fra Revit

Importen fra Revit fungerer veldig bra i både FEM-Design og Robot. Det er viktig å merke seg at alle elementer som ikke er definert i Revit som strukturelle med materialtype ikke vil importeres til FEM-Design. Det anbefales også å definere alle element før en importerer til Robot, men elementene importeres likevel hvis brukeren velger å la Robot bruke sine standardelement (se figur 4.23).

Tiden det tar å importere avhenger selvfølgelig av hvor stor modellen er og om alle materialene samsvarer i programmene. Det er også vanskelig å sammenligne fordi importen til FEM-Design skjer ved at en lagrer en FEM-Design eksport fil (\*.r2f) i Revit og så åpnes denne av brukeren i FEM-Design, mens importen til Robot skjer direkte. Likevel går importen kjappere i FEM-Design enn Robot. Det skal sies at maksimal importtid fra Revit til Robot var på rett under 50 sekund med alle innstillinger satt.

#### Lastkombinasjoner

I både FEM-Design og Robot kombineres lastene etter formel (3.3). I Robot får vi resultater for alle kombinasjoner, mens i FEM-Design skjer dette ved at programmet finner den mest ugunstige kombinasjonen og kun denne blir presentert. Når seismiske laster skal kombineres med permanente laster blir antall kombinasjoner mange i Robot mens i FEM-Design ender vi fortsatt opp med kun den ene.

Forskjellen i tid her går mest på behandling av resultater. Hvor vi i Robot har mange kombinasjoner og da mange forskjellige resultat har vi i FEM-Design kun ett resultat, nemlig det med maksimale verdier. Siden vi er ute etter maksimale krefter og forskyvninger trenger vi derfor å bruke mye mindre tid på resultatene i FEM-Design enn i Robot.

## Elementstørrelse og type element

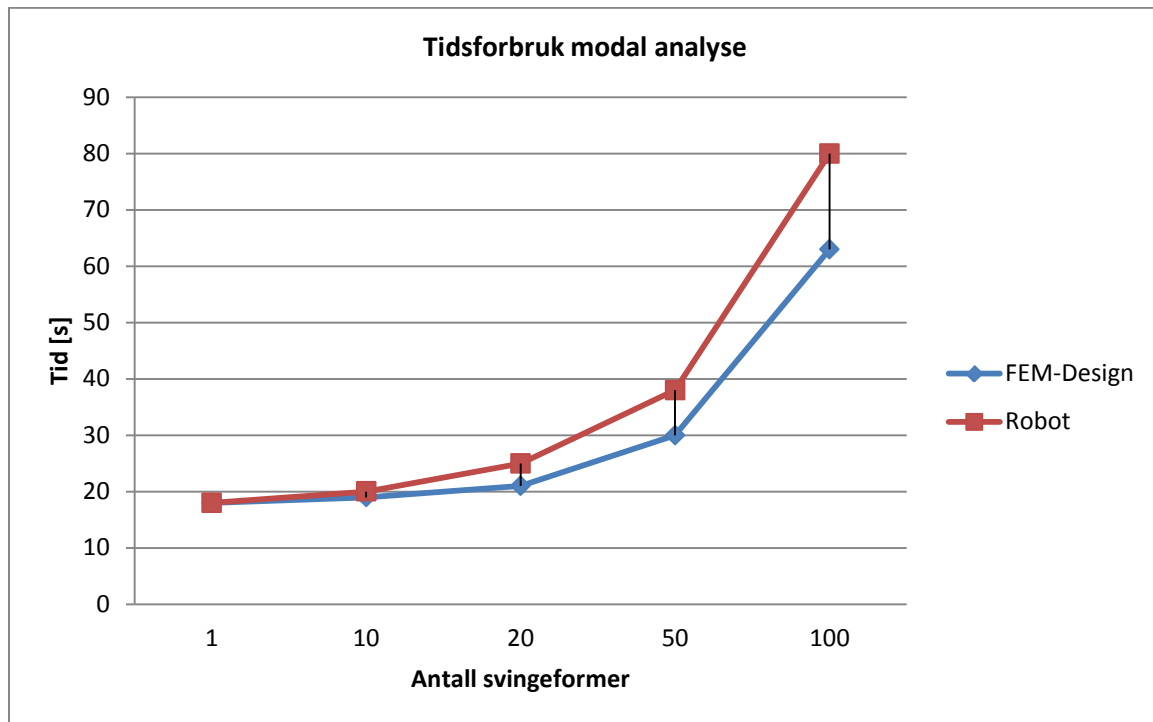
Som det ble gjennomgått i kapittel 4.3.2 har Robot flere mulighet når det kommer til å lage elementnett. Den automatiske genereringen fungerer for vår modell bra i begge program. Det skal sies at Robots automatiske generering egentlig burde sies å være halvautomatisk. Programmet velger meshing-metode og hvordan disse inndeles mens brukeren velger størrelsen på elementene. Det er derfor spesielt viktig at en etterpå sjekker modellen for å se om den valgte størrelsen passer for alle områder.

For brukere med lite kunnskap om elementmetoden kan den automatiske inndelingen i FEM-Design være enklere og by på færre områder hvor endringer må gjøres. På den andre siden kan Robots flere muligheter gi en bedre modell som er uten geometriske feil og da gi resultater som er mer nøyaktig.

Det ble gjort endringer i begge modeller for at de skulle samsvare bedre. Siden antall frihetsgrader er avhengig av antall elementer, påvirker inndelingen både beregningstid og kvaliteten på resultatene. I vedlegg D.5 ble det sett nærmere på resultatene for forskjellige elementstørrelser. Resultatene fra disse viser at en tettere inndeling rundt sjaktene ikke vil påvirke resultatene våre nevneverdig. Vedlegg D.5 viser også at den automatiske genereringen gjort i FEM-Design og elementenettet med 1,0 m gjennomsnittlige elementer i Robot kunne blitt brukt. For å gjøre modellene like, og for å få en bedre fordeling av momentene i betongdekket mellom danseboksene og sjaktene ble det egnedefinerte elementenettet brukt i både FEM-Design og Robot.

## Analyser

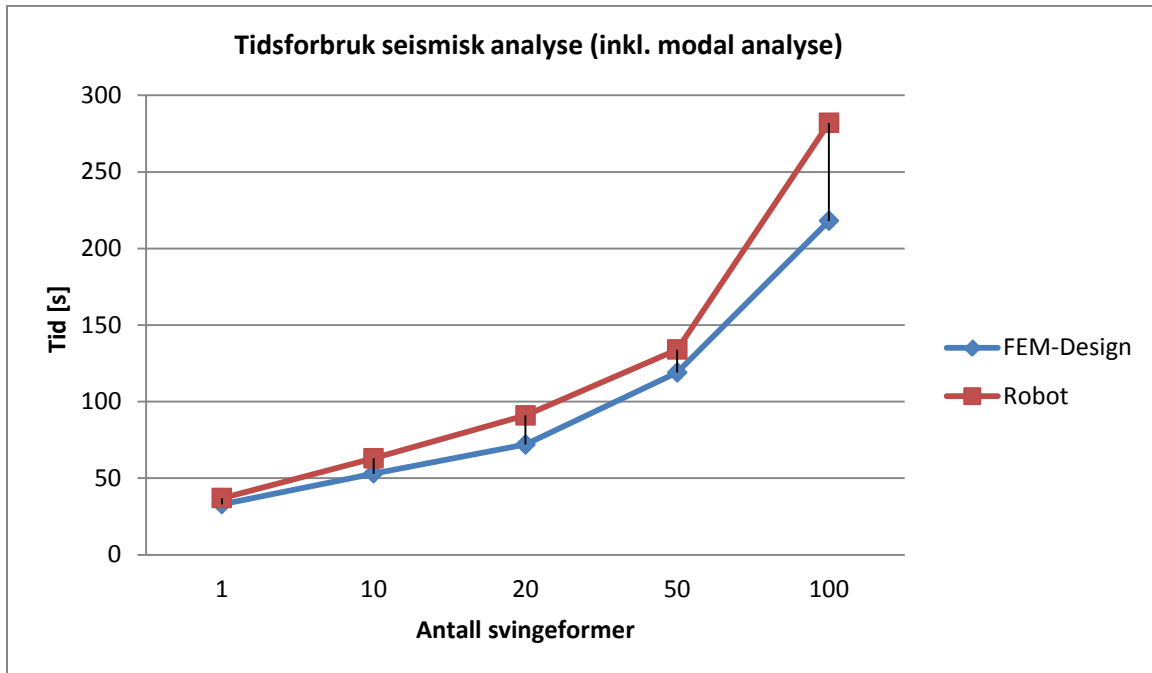
Tidsforbruket i analysene er blitt målt ved at analysen er utført tre ganger. Det er gjennomsnittsverdien av disse som blir presentert. Figuren under viser tidsforbruket for den modale analyse utført med forskjellig antall svingeformer i de to programmene:



Figur 4.56: Tidsforbruket FEM-Design og Robot i utførelsen av modal analyse

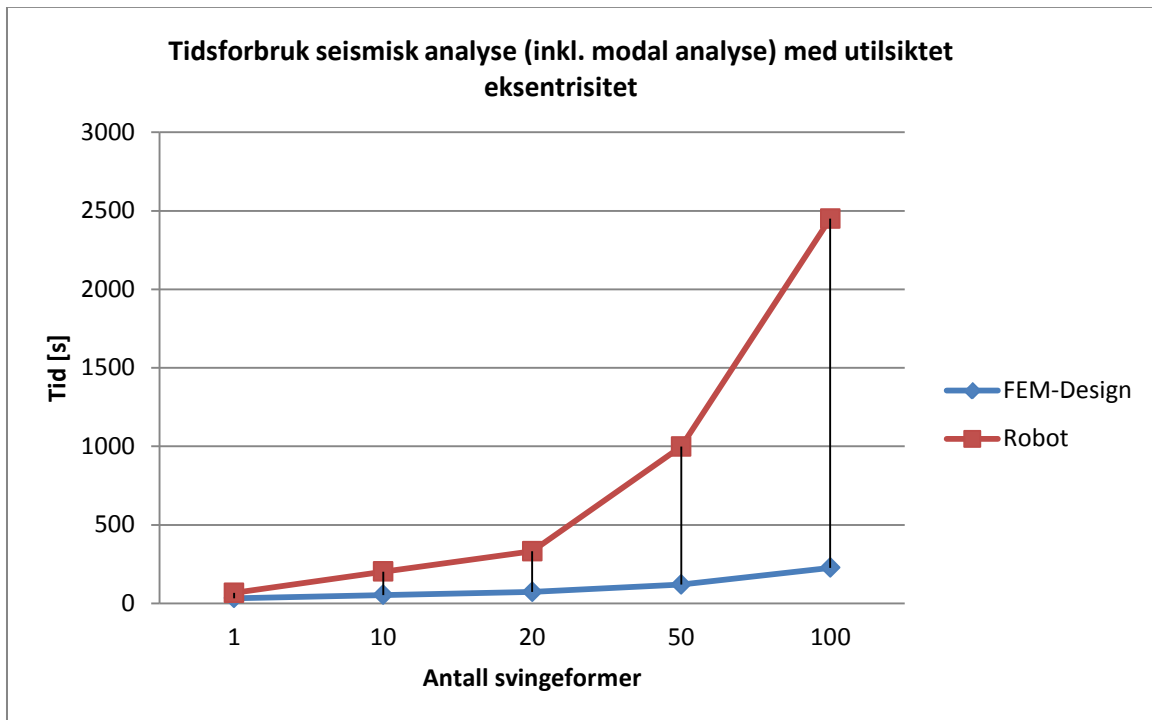
Det er verdt å merke seg at i Robot er det mulig å endre standardinnstillingene på toleransen for ønsket konvergens av egenverdiproblemet. Standardinnstillingene, som er brukt her, er på 0,0001 som er den laveste toleranseverdien og den som gir mest nøyaktige resultater. I FEM-Design er denne verdien også på 0,0001, men brukeren har ingen mulighet for å endre denne.

Tidsforbruket for den seismiske analysen (inkludert modal analyse) ble målt og er presentert i figuren under:



Figur 4.57: Tidsforbruket i utførelsen av seismisk analyse (uten utilsiktet eksentrisitet)

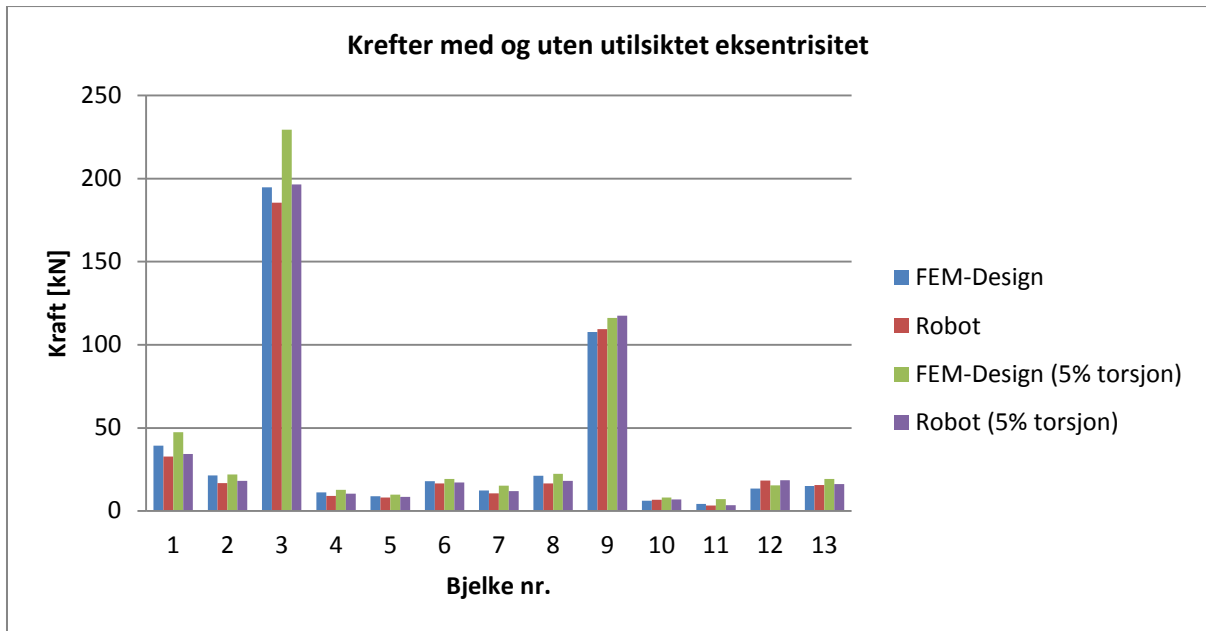
Tidsforbruket for den seismiske analysen (inkludert modal analyse) med utilsiktet eksentrisitet ble så utført:



Figur 4.58: Tidsforbruket i utførelsen av seismisk analyse (med utilsiktet eksentrisitet)

Det er viktig å merke seg at figur 4.58 viser tidsforbruket i Robot for alle retningene som ble forklart i kapittel 4.3.4, mens FEM-Design kun legger til eksentrisiteten i positiv x- og y-retning. Det er, som vist i figur 4.52, mulig å velge kun de to retningene i Robot også. Da viser det seg at tidsforbruket til de to programmene er av samme forhold som i figur 4.57, hvor FEM-Design er rundt minuttet kjappere enn Robot for 100 svingeformer.

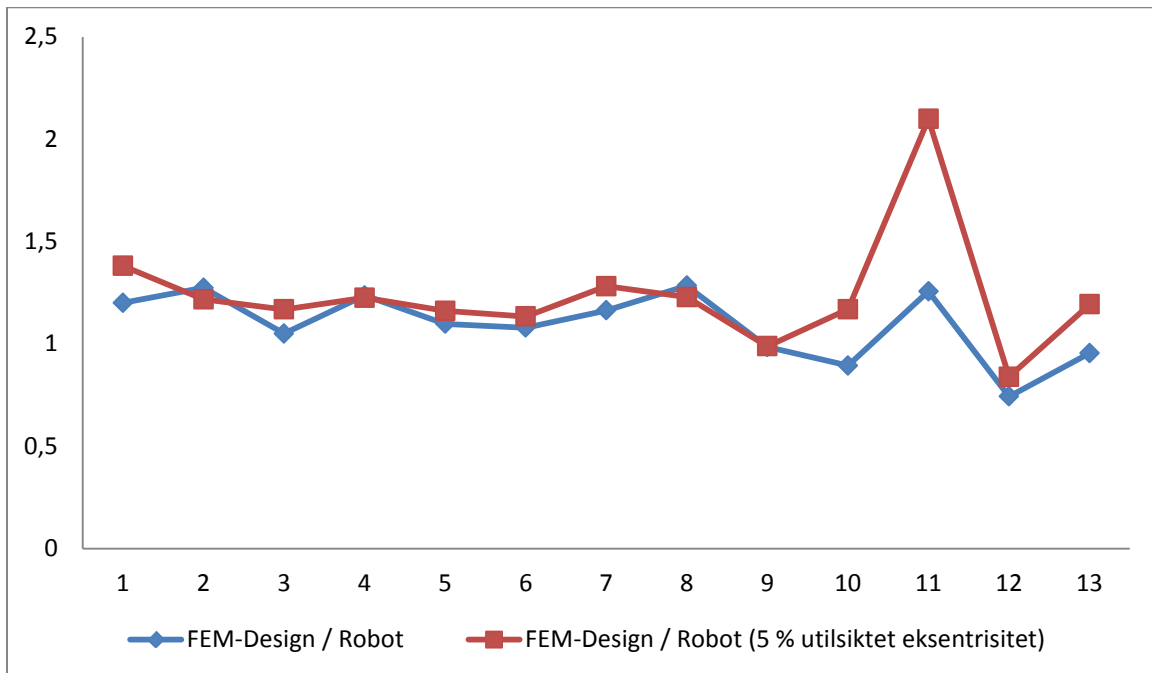
Kreftene i bjelkene med og uten utilsiktet eksentrisitet i FEM-Design og Robot ble som følger:



Figur 4.59: Sammenligning av normalkreftene i bjelkene med- og uten utilsiktet eksentrisitet

Krafttillegget fra den utilsiktede eksentrisiteten blir større i FEM-Design enn Robot. Det kan være flere grunner til det. Ser vi i kapittel 3.0.4 er det den utilsiktede eksentrisitets lengden, bredden mellom avstiverne, lengden av gulvet vinkelrett på den seismiske kraften og den horisontale kraften som avgjør hvor stor denne kraften skal være. I denne rapporten er det ikke undersøkt nærmere hvilken faktor det er som gjør at kreftene fra utilsiktet eksentrisitet blir større i FEM-Design. En antakelse er at den horisontale kraften i (3.9) er større i FEM-Design. Denne regnes etter svingeformen som gir størst effektiv modal masse, og i vedlegg D.1 ser vi at denne er større i FEM-Design enn i Robot.

Forholdstallet mellom disse kreftene kan ses i figuren under:

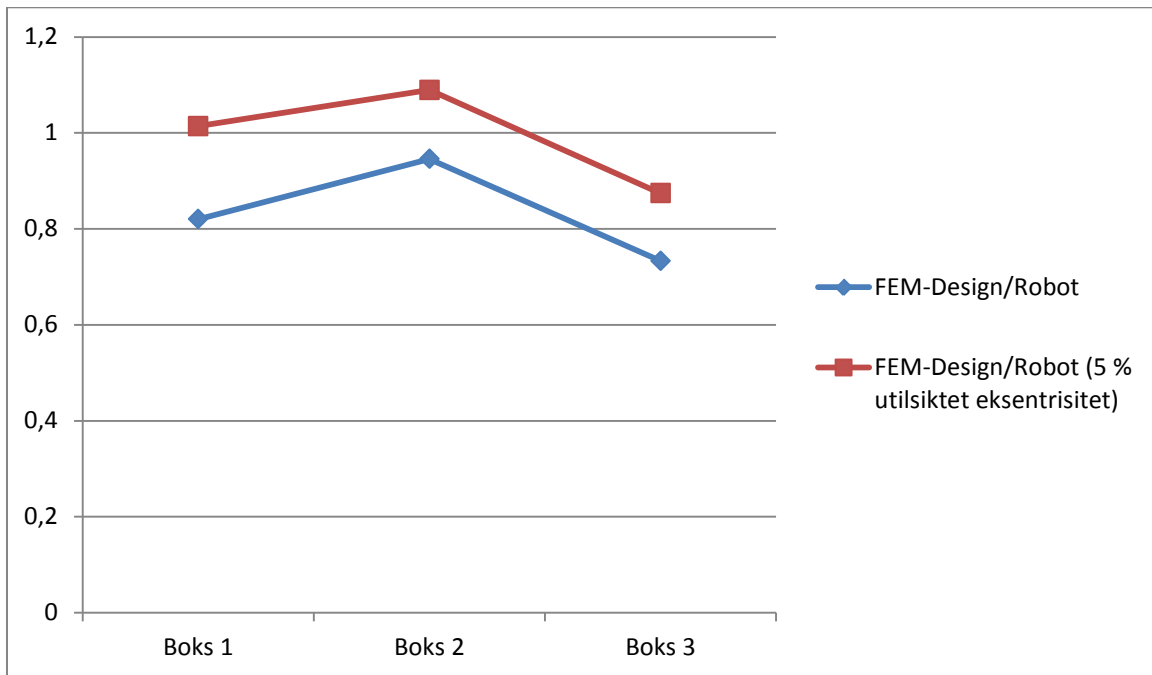


**Figur 4.60: Forholdstall mellom normalkreftene i bjelkene i FEM-Design og Robot med og uten utilsiktet eksentrisitet**

Totalt sett gir det, for de 13 bjelkene, 5,08 % høyere krefter i FEM-Design enn i Robot når det ikke tas hensyn til utilsiktet eksentrisitet, og 12,34 % høyere i FEM-Design når utilsiktet eksentrisitet medregnes. Selv om FEM-Design har lavere effektiv modal masse, så ser vi av figurene 4.38 til 4.41, at svingeformene med høyest effektiv modal masse har lavere egenperioder i FEM-Design og så lenge egenperioden er høyere enn den øvre grenseverdien med konstant spektralakselerasjon ( $T_C$ ), så medfører det høyere krefter.



Forholdstallet mellom forskyvningene med og uten eksentrisitet kan ses i figuren under:



**Figur 4.61: Forholdstallet mellom forskyvningen i FEM-Design og Robot med og uten utilsiktet eksentrisitet**

Vi registrerer at uten utilsiktet eksentrisitet så er forskyvningen som vist i figur 4.51 og 4.61, større i Robot enn FEM-Design. En av årsakene til dette kan være at svingeformene med høyest effektiv modal masse har lengre egenperioder i Robot enn FEM Design. Det tilsier en svingeform som er «stivere» i FEM-Design og forskyvningene blir mindre. Når det tas hensyn til utilsiktet eksentrisitet blir forskyvningene for boks 1 og boks 2 større i FEM-Design enn i Robot. Den største forskjellen i forskyvning er for boks 3, hvor det skiller litt over 1 millimeter uten utilsiktet eksentrisitet, og litt over 0,5 millimeter medregnet utilsiktet eksentrisitet.

I vedlegg D.4 er analysene gjennomført med to bjelker som kobler danseboksene sammen. På den måten fordeles stivheten. Forskyvningen i FEM-Design reduseres da til ca. 3,5 millimeter og 4,4 millimeter i Robot (uten utilsiktet eksentrisitet). Det er en reduksjon på omtrent 0,5 millimeter i begge programmene.

## **Del III: Diskusjon og konklusjon**

## 5.1 Analyser og resultater

I denne rapporten er det kun gjennomført lineære analyser. Disse er de mest anvendte og det er også grunnen til at FEM-Design kun har lineære analyser. Robot har vi valget om flere analysemetoder, både lineære og ikke-lineære. Vi ga i kapittel 4.23 en kort introduksjon til de forskjellige analysene det er mulig å gjennomføre i Robot. Kreves analyser som er ikke-lineære så er valget av programvare enkelt.

Av de lineære analysene har både FEM-Design og Robot mangler som gjør at den forenklede tverrkraftmetoden ikke ble gjennomført. Robot mangler det nasjonale tillegget i EC8 hvor tilpassede parametere for å bestemme det dimensjonerende responspekteret finnes. FEM-Design har i vår versjon av programmet (v.11.01.002) problemer med å redusere massen for konstruksjoner over to etasjer og med egenperiode lavere enn  $2T_c$ . Den forenklede metoden ble derfor kun gjennomført analytisk. Resultater fra denne og sammenligning av kreftene fra tverrkraftmetoden og modal analyse kan ses i evalueringen i kapittel 4.2.3.

Den modale analysen ble i kapittel 4.1 og 4.2 utført for rammekonstruksjoner på henholdsvis to og fem etasjer. Det ble sett på innvirkningen stivheten i dekket (i vårt tilfelle bjelkene) hadde på egenfrekvensen i konstruksjonen. Resultatene fra den modale analysen gjort i FEM-Design, Robot og ved håndberegninger ga neglisjerbare forskjeller. Robot har flere valg underveis enn FEM-Design. Blant annet kan massen defineres på flere måter (konsistent, i punkter med eller uten rotasjon) og egenverdiproblemet kan løses ved flere typer iterasjonsmetoder. Disse funksjonene finner vi ikke i FEM-Design, men til gjengjeld er standardinnstillingene i Robot, og de som brukes i de fleste tilfeller, de samme som FEM-Design bruker.

For den mer komplekse 3D konstruksjonen var det i FEM-Design for mange svingeformer som ga null i effektiv modal masse og vi kom derfor ikke over kravet på 90 % effektiv modal masse. Ved å innfri formel (3.18) og (3.19) kan likevel antall svingeformer bestemmes. For konstruksjoner som ligger lavt i effektiv modal masse så kan det gi unøyaktige resultater. I analysene i dette delkapitlet er de hundre første svingeformene blitt brukt. I Robot hadde vi da ingen problemer med å innfri kravet.

Seismiske analyser ble gjennomført både med og uten utilsiktet eksentrisitet. Standarden stiller krav til at det legges til 5 % utilsiktet eksentrisitet. Denne kan i Robot legges til tre måter, to nøyaktige og en forenklet metode, mens FEM-Design kun har den forenklete metoden. Den forenklete metoden tilfredsstiller standardens krav og er på grunn av tidsbruket også ofte å foretrekke. De to programmene praktiserer retningene av utilsiktet eksentrisitet på forskjellig måte. I FEM-Design legges tillegget fra utilsiktet eksentrisitet i retning vinkelrett på den retningen jordskjelvet opptrer. I Robot kan den utilsiktete eksentrisiteten legges til i alle retninger. Selv om FEM-Design tar seg av det som i de fleste tilfeller sannsynligvis gir maksimal verdi, så er dette er noe som burde bli undersøkt nærmere.

Jordskjelv skal kombineres etter innvirkning fra flere retninger, med andre laster og med utilsiktet eksentrisitet i to ortogonale retninger, noe som fører til mange kombinasjoner. Robot presenterer alle disse. Dette fører til et høyt antall resultater og en del tid må brukes for å bearbeide resultatene. FEM-Design gjør dette enkelt ved å bruke maksverdier. Kombinasjonen skjer i alle tilfeller slik at resultatet blir mest ugunstig.

Resultatene viser at FEM-Design totalt sett gir noe høyere krefter enn Robot. Totalt ble det i de 13 bjelkene som ble undersøkt i denne oppgaven litt over 4 % høyere krefter i FEM-Design enn Robot. Når det tas hensyn til utilsiktet eksentrisitet stiger denne verdien til omtrent 12 %. Vi kan se av formlene for utilsiktet eksentrisitet i kapittel 3.0.4 at dette kan komme fra flere faktorer. Det ble gjort en antakelse om at den horisontale kraften i etasjene regnes som større i FEM-Design. Som nevnt er den utilsiktede eksentrisiteten noe som bør undersøkes nærmere enn det har blitt gjort i denne rapporten.

Resultatene viser større forskyvninger i Robot enn i FEM-Design. Vi har dokumentert at konstruksjonens masse er lik, det kan derfor se ut til at stivheten er noe forskjellig i de to programmene, på tross av at de samme innstillingene er blitt satt for modellene. Dette kan forklare at svingeformene har lengre perioder i Robot og forskyvningene da blir større. Det er også naturlig da at kreftene blir større i FEM-Design.

## 5.2 Programmenes brukervennlighet

Erfaringen fra analysene gjort i denne oppgaven viser at FEM-Design har klart det mest moderne utseende av de to. De fleste funksjoner kan finnes ved gode forklarende symboler i hovedmenyen. Teoriboken, som følger med, forklarer de metodene som brukes bra, mens manualen derimot er rotete og vanskelig å finne fram i. Programmet er kjapt og vi hadde ingen problemer med at det hang seg opp eller ikke klarte å gjennomføre analysene.

Robot er bygd for å kunne håndtere flere analyser enn FEM-Design og det kreves litt mer av brukeren å finne de funksjonen en skal fram til. Når en først vet hvor en finner de forskjellige funksjonene viser det seg at programmet er rimelig brukervennlig selv om det kunne trengt en oppdatering av både utseende og menyer. Vi hadde også noen problemer underveis når modellen var stor og det førte til at programmet til tider ikke responderte. Det endte et par ganger med at programmet ble lukket og det som ikke var lagret måtte gjøres på nytt. Hjelpesfilen er stor og beskriver det som ligger bak alle funksjonene. De kunne med fordel vært forklart enklere og med mer utdyping.

### 5.3 Konklusjon

Ut ifra analysen og begrensningene gjort i denne oppgaven kan det konkluderes med at brukervennligheten er bedre i FEM-Design enn Robot. Prosessene kjører noe raskere og programmet er mer stabilt enn Robot. FEM-Design har basert seg på at brukeren kun er ute etter maksimale verdier, noe som også stemmer for våre formål, og derfor blir presentasjonen av resultatene både ryddigere og brukeren trenger å bruke mindre tid på resultatene. Fordelen med Robot er at bruksområde er større enn i FEM-Design. Robot har også flere innstillinger å velge mellom i de forskjellige analysene.

### 5.4 Forslag til videreføring av oppgaven

- Nye versjoner av programvarene kommer snart ut og det kunne vært interessant å se om problemene med tverrkraftmetoden har blitt gjort noe med i programmene.
- Praktiseringen av utilsiktet eksentrisitet er noe som bør utforskes nærmere. Det kan også bli sett nærmere på analyser hvor den utilsiktede eksentrisitet blir lagt til som node-masse istedenfor lasttillegg som er gjennomført i denne oppgaven.
- En problemstilling som kan ses nærmere på er gevinsten ved Ritz-vektorer istedenfor naturlige svingeformer. Det kan være dette øker den effektive modale massen, som da vil være et argument for å bruke Robot som gir denne muligheten.

## Referanser

- [1] Løseth, Ø. Lurèn, H. Vinje, L. Betongelementboken bind H - Dimensjonering for jordskjelv. Betongelementforeningen. 2011.
- [2] Bruce A. Bolt, Earthquakes, W.H Freeman, 4<sup>th</sup> ed. 2000
- [3] David V. Hutton, Fundamentals of Finite Element Analysis, Mcgraw-Hill, 2003
- [4] Kaynia, Amir M. Jordskjelv. Offshore energi, Computational Geomechanics (CGM). Sitert 14.06.13. Tilgjengelig fra: <http://ngi.no/no/Fagomrader/Jordskjelv>
- [5] Norsar. Jordskjelv. Sitert 14.06.13. Tilgjengelig fra: <http://www.jordskjelv.no/jordskjelv/jordskjelv.html>
- [6] T.L. Anderson, Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications, CRC Press, 3<sup>th</sup> ed. 2005
- [7] Singiresu S. Rao, Mechanical Vibrations, Pearson Education Inc, Prentice Hall 5<sup>th</sup> ed. 2011
- [8] Kolbein Bell, Beregningsmetoder for fagverk og rammer (matrisestatikk), Tapir forlag, 1994
- [9] Geir Moe og Øivind Arntsen, Kompendium i faget 37074 Naturlaster GK, Division of Structural Engineering, NTH, Report No.: K-1-90
- [10] Earthquake Hazards Program. Sitert 14.06.13. Tilgjengelig fra: <http://earthquake.usgs.gov/>
- [11] Science@home, bilde hentet 14.06.13. Tilgjengelig fra: <http://science-at-home.org/wp-content/uploads/2010/02/tectonic-plates.jpg>
- [12] Anil K. Chopra, Dynamics of Structures, Pearson Prentice Hall. 2007
- [13] University of Colorado, Sitert 14.06.12. Tilgjengelig fra: <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/IFEM.Ch01.d/IFEM.Ch01.pdf>
- [14] SubsTech, bilde hentet 14.06.13. Tilgjengelig fra: [http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php?id=fracture\\_toughness](http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php?id=fracture_toughness)
- [15] Standard Norge, NS-EN 1990:2002+NA:2008 Eurokode – Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner. 2008
- [16] Standard Norge, NS-EN 1991-1-1:2002+NA:2008 Eurokode 1 – Del 1-1: Allmenne laster – Tetthet, egenvekt og nyttelaster i bygninger. 2008

- [17] Standard Norge, NS-EN 1998-1:2004+NA:2008 – Eurokode 8: Prosjektering av konstruksjoner for seismisk påvirkning – Del 1: Allmenne regler, seismiske laster og regler for bygninger. 2008
- [18] Øystein Løset, Earth quakes in Norway and NS-EN.1998-1 +NA v, Dr. techn.Olav Olsen
- [19] Farzin Shajrokhi, Rambøll Internkurs Eurokode 8. 2013
- [20] Dr. Daniel S. Stutts, Equivalent Viscous Damping. 2009
- [21] Norconsult Informasjonssystemer AS, FEM-Design 11, Kurs III/FEM-Design Avansert. 2012
- [22] Norsk Stålforbund, Stål Håndbok Del 1, Norsk Teknologistandardisering. 1997
- [23] StruSoft Structural Design Software, FEM-Design Applied Theory and Design 9.0. 2010
- [24] StruSoft Structural Design Software, FEM-Design User Manual. 2010
- [25] Autodesk Robot Structural Analysis, User's Guide. Sitert 14.06.13. Tilgjengelig fra:  
<http://docs.autodesk.com/RSA/2013/ENU/index.html>
- [26] Autodesk, Integrating Revit Structure and Robot Structural Analysis Professional. 2010



## **Vedlegg**

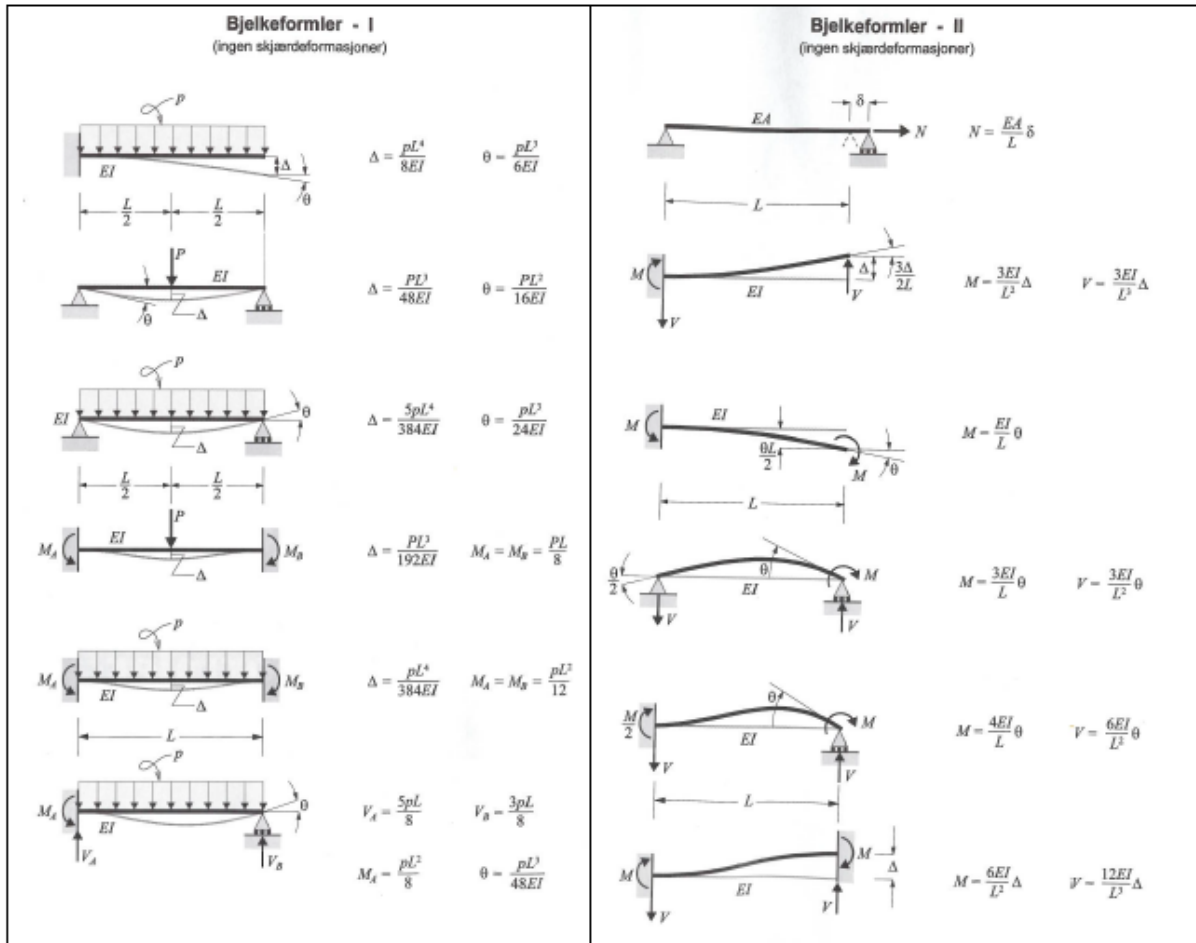
Vedlegg A: Bjelkeformler

Vedlegg B: Mathcad beregninger

Vedlegg C: Materialdata

Vedlegg D: Resultater

## Vedlegg A: Bjelkeformler



Figur A.1: Bjelkeformler (uten skjærdeformasjon) [8]

## Vedlegg B: Mathcad beregninger

### B.1 Analytisk løsning av ramme på to etasjer

#### Tilfelle a) 2DOF

##### Materialdata (HE300B):

$$E := 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad I_{\text{HE300B}} := 251.7 \cdot 10^{-6} \text{m}^4 \quad m_{\text{HE300B}} := 117 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad h := 3\text{m}$$

##### Masse:

$$\text{Masse 1. etg: } m_1 := 4 \cdot h \cdot m_{\text{HE300B}}$$

$$\text{Masse 2. etg: } m_2 := 3 \cdot h \cdot m_{\text{HE300B}}$$

$$m := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.404 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 1.053 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{kg}$$

##### Stivhet:

$$k_1 := \frac{24 \cdot E \cdot I_{\text{HE300B}}}{h^3} \quad k_2 := k_1$$

$$k := \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.397 \times 10^4 & -4.698 \times 10^4 \\ -4.698 \times 10^4 & 4.698 \times 10^4 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

##### Vinkelfrekvenser og egenperioder:

«Genvals» og «Genvec» løser egenverdi-problemet i Mathcad slik at vi ender opp med henholdsvis frekvensene og formfunksjoner

$$\lambda := \text{genvals}(k, m) = \begin{pmatrix} 9.599 \times 10^4 \\ 1.555 \times 10^4 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}^2}$$

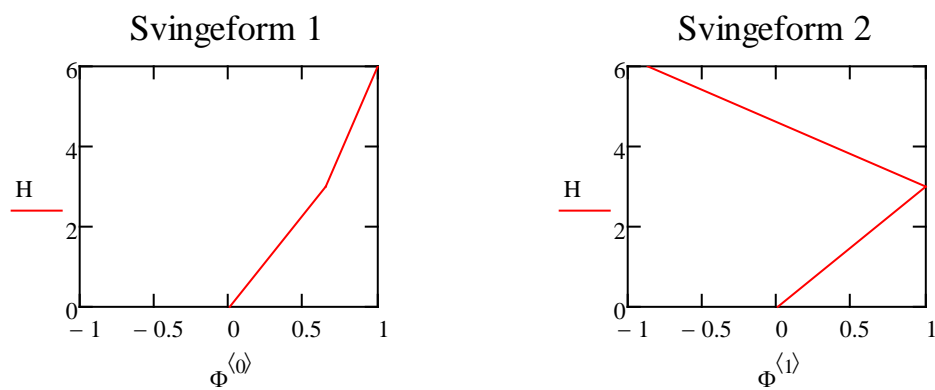
Siden  $\omega_1 < \omega_2$

$$\omega := \begin{pmatrix} \min(\sqrt{\lambda}) \\ \max(\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 124.719 \\ 309.828 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \quad T := \frac{2\pi}{\omega} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.02 \end{pmatrix} s \quad f := \frac{1}{T} = \begin{pmatrix} 19.85 \\ 49.311 \end{pmatrix} \frac{1}{s}$$

$$\phi := \text{genvecs}(k, m) = \begin{pmatrix} 1 & 0.651 \\ -0.869 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{0,1} & \phi_{0,0} \\ \phi_{1,1} & \phi_{1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.651 & 1 \\ 1 & -0.869 \end{pmatrix}$$

$$H := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Figur B.1.1: Svingeformer for ramme på to etasjer (2DOF)

## Tilfelle b) 6DOF

### Materialdata (HE300B):

$$E := 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad I_{\text{HE300B}} := 251.7 \cdot 10^{-6} \text{m}^4 \quad m_{\text{HE300B}} := 117 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad h := 3\text{m}$$

### Masse:

$$\text{Masse 1.etg: } m_1 := 4 \cdot h \cdot m_{\text{HE300B}}$$

$$\text{Masse 2.etg: } m_2 := 3 \cdot h \cdot m_{\text{HE300B}}$$

$$m := \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 \cdot 117 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 3 \cdot 117 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{kg} = \begin{pmatrix} 1404 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1053 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{kg}$$

$$m_r := \begin{pmatrix} m_{0,0} & 0 \\ 0 & m_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.404 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 1.053 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{kg}$$

### Stivhet:

$$k_{tt} := \begin{pmatrix} 2 \cdot 24 & -24 \\ -24 & 24 \end{pmatrix} \quad k_{t0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6l & -6l \\ 6l & 6l & 6l & 6l \end{pmatrix}$$

$$k_{0t} := \begin{pmatrix} 0 & 6l \\ 0 & 6l \\ -6l & 6l \\ -6l & 6l \end{pmatrix} \quad k_{00} := \begin{pmatrix} 10l^2 & l^2 & 2l^2 & 0 \\ l^2 & 10l^2 & 0 & 2l^2 \\ 2l^2 & 0 & 6l^2 & l^2 \\ 0 & 2l^2 & l^2 & 6l^2 \end{pmatrix}$$

$$k_{tt} := k_{tt} - k_{t0} \cdot k_{00}^{-1} \cdot k_{0t} = \begin{pmatrix} 37.151 & -15.123 \\ -15.123 & 10.192 \end{pmatrix}$$

$$k_r := \frac{E \cdot I_{\text{HE300B}}}{h^3} \cdot k_{tt} = \begin{pmatrix} 7.273 \times 10^4 & -2.961 \times 10^4 \\ -2.961 \times 10^4 & 1.995 \times 10^4 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

**Vinkelfrekvenser og egenperioder:**

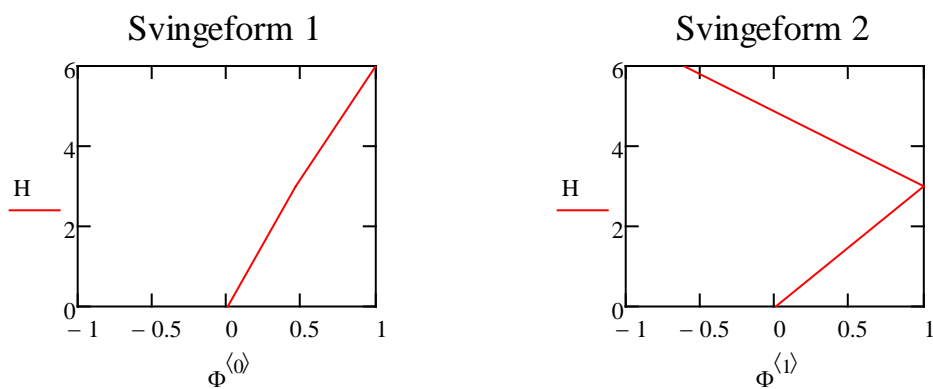
$$\lambda := \text{genvals}(k_T, m_T) = \begin{pmatrix} 6.475 \times 10^4 \\ 6.002 \times 10^3 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$

$$\omega_1 < \omega_2$$

$$\omega := \begin{pmatrix} \min(\sqrt{\lambda}) \\ \max(\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77.475 \\ 254.454 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \quad T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \begin{pmatrix} 0.081 \\ 0.025 \end{pmatrix} s \quad f := \frac{1}{T} = \begin{pmatrix} 12.33 \\ 40.498 \end{pmatrix} \frac{1}{s}$$

$$\phi := \text{genvecs}(k_T, m_T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.46 \\ -0.614 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{0,1} & \phi_{0,0} \\ \phi_{1,1} & \phi_{1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.46 & 1 \\ 1 & -0.614 \end{pmatrix} \quad H := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Figur B.1.2: Svingeformer for ramme på to etasjer (6DOF)

## B.2 Analytisk løsning av ramme på fem etasjer

### Materialdata (HE300B):

$$E := 210000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad I_{\text{HE300B}} := 251.7 \cdot 10^{-6} \text{m}^4 \quad m_{\text{HE300B}} := 117 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad h := 3\text{m}$$

### Masse:

$$\text{Masse 1.etg: } m_1 := 4 \cdot h \cdot m_{\text{HE300B}}$$

$$\text{Masse 2.etg: } m_2 := 4 \cdot h \cdot m_{\text{HE300B}}$$

$$\text{Masse 3.etg: } m_3 := 4 \cdot h \cdot m_{\text{HE300B}}$$

$$\text{Masse 4.etg: } m_4 := 4 \cdot h \cdot m_{\text{HE300B}}$$

$$\text{Masse 5.etg: } m_5 := 3 \cdot h \cdot m_{\text{HE300B}}$$

$$m := \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.404 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.404 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.404 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.404 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.053 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{kg}$$

### Stivhet:

$$k_{tt} = k_{tt} - k_{t0} \cdot k_{00}^{-1} \cdot k_{0t}$$

$$k_{tt} := \begin{pmatrix} 48 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 48 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 48 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 48 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 24 \end{pmatrix} \quad k_{t0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6l & -6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 6l & 0 & 0 & -6l & -6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6l & 6l & 0 & 0 & -6l & -6l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 6l & 0 & 0 & -6l & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 6l & 6l & 6l \end{pmatrix}$$

$$k_{0t} := \begin{pmatrix} 0 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 0 & 6l & 0 & 0 \\ -6l & 0 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & -6l & 0 & 6l & 0 \\ 0 & -6l & 0 & 6l & 0 \\ 0 & 0 & -6l & 0 & 6l \\ 0 & 0 & -6l & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & -6l & 6l \\ 0 & 0 & 0 & -6l & 6l \end{pmatrix} \quad k_{00} := \begin{pmatrix} 10l^2 & l^2 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l^2 & 10l^2 & 0 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2l^2 & 0 & 10l^2 & l^2 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l^2 & l^2 & 10l^2 & 0 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l^2 & 0 & 10l^2 & l^2 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l^2 & l^2 & 10l^2 & 0 & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & 0 & 10l^2 & l^2 & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & l^2 & 10l^2 & 0 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & 0 & 6l^2 & l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & l^2 & 6l^2 \end{pmatrix}$$

$$k := k_{tt} - k_{t0} \cdot k_{00}^{-1} \cdot k_{0t} = \begin{pmatrix} 40.98 & -23.95 & 6.76 & -1.25 & 0.18 \\ -23.95 & 34.67 & -22.74 & 6.42 & -0.93 \\ 6.76 & -22.74 & 34.33 & -22.05 & 4.94 \\ -1.25 & 6.42 & -22.05 & 30.87 & -14.21 \\ 0.18 & -0.93 & 4.94 & -14.21 & 10.06 \end{pmatrix}$$

$$k := \frac{E \cdot I_{HE300B}}{h^3} \cdot k = \begin{pmatrix} 8.023 \times 10^4 & -4.689 \times 10^4 & 1.324 \times 10^4 & -2.446 \times 10^3 & 354.544 \\ -4.689 \times 10^4 & 6.788 \times 10^4 & -4.452 \times 10^4 & 1.257 \times 10^4 & -1.821 \times 10^3 \\ 1.324 \times 10^4 & -4.452 \times 10^4 & 6.72 \times 10^4 & -4.317 \times 10^4 & 9.661 \times 10^3 \\ -2.446 \times 10^3 & 1.257 \times 10^4 & -4.317 \times 10^4 & 6.043 \times 10^4 & -2.782 \times 10^4 \\ 354.544 & -1.821 \times 10^3 & 9.661 \times 10^3 & -2.782 \times 10^4 & 1.969 \times 10^4 \end{pmatrix} \cdot \frac{N}{mm}$$

**Vinkelfrekvenser og egenperioder:**

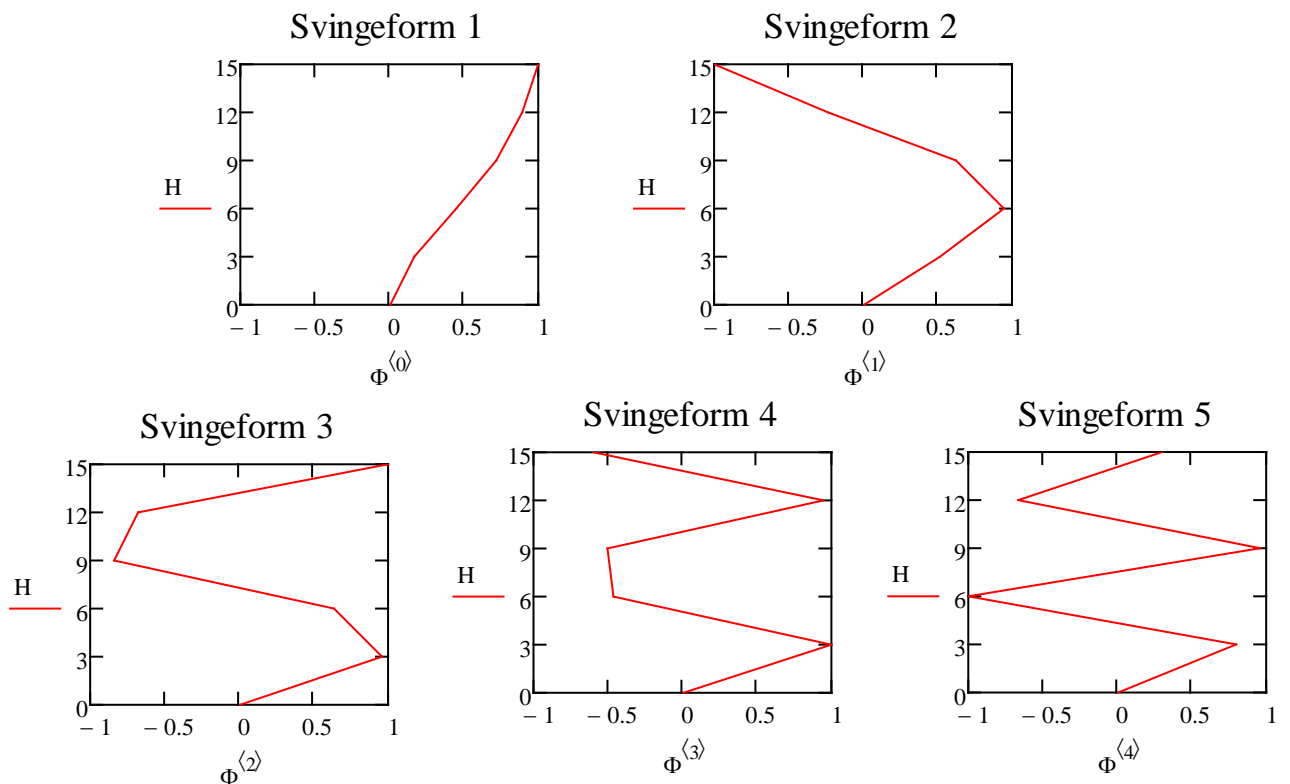
$$\lambda := \text{genvals}(k, m) = \begin{pmatrix} 1.12 \times 10^5 \\ 6.595 \times 10^4 \\ 2.819 \times 10^4 \\ 8.191 \times 10^3 \\ 783.747 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$



$$\omega := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_4} \\ \sqrt{\lambda_3} \\ \sqrt{\lambda_2} \\ \sqrt{\lambda_1} \\ \sqrt{\lambda_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.995 \\ 90.506 \\ 167.89 \\ 256.814 \\ 334.636 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \begin{pmatrix} 0.224 \\ 0.069 \\ 0.037 \\ 0.024 \\ 0.019 \end{pmatrix} \text{ s} \quad f := \frac{1}{T} = \begin{pmatrix} 4.456 \\ 14.405 \\ 26.721 \\ 40.873 \\ 53.259 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}}$$

$$\phi := \text{genvecs}(k, m) = \begin{pmatrix} 0.798 & 1 & 0.965 & 0.522 & 0.174 \\ -1 & -0.461 & 0.642 & 0.945 & 0.455 \\ 0.965 & -0.506 & -0.841 & 0.621 & 0.712 \\ -0.668 & 0.945 & -0.681 & -0.237 & 0.898 \\ 0.306 & -0.603 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{0,4} & \phi_{0,3} & \phi_{0,2} & \phi_{0,1} & \phi_{0,0} \\ \phi_{1,4} & \phi_{1,3} & \phi_{1,2} & \phi_{1,1} & \phi_{1,0} \\ \phi_{2,4} & \phi_{2,3} & \phi_{2,2} & \phi_{2,1} & \phi_{2,0} \\ \phi_{3,4} & \phi_{3,3} & \phi_{3,2} & \phi_{3,1} & \phi_{3,0} \\ \phi_{4,4} & \phi_{4,3} & \phi_{4,2} & \phi_{4,1} & \phi_{4,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.174 & 0.522 & 0.965 & 1 & 0.798 \\ 0.455 & 0.945 & 0.642 & -0.461 & -1 \\ 0.712 & 0.621 & -0.841 & -0.506 & 0.965 \\ 0.898 & -0.237 & -0.681 & 0.945 & -0.668 \\ 1 & -1 & 1 & -0.603 & 0.306 \end{pmatrix} \quad H := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$



Figur B.2.1: Svingformer for ramme på fem etasjer

Effektive modale masser:

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M_{\text{total}} := \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = 6669 \text{ kg}$$

$$\mathbf{M} := \text{diag}(\phi^T \cdot \mathbf{m} \cdot \phi) = \begin{pmatrix} 4331.472 \\ 3697.048 \\ 4583.416 \\ 3310.908 \\ 3229.417 \end{pmatrix} \text{ kg} \quad \mathbf{L} := \phi^T \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 454.782 \\ 738.434 \\ 1172.622 \\ 1545.844 \\ 4196.047 \end{pmatrix} \text{ kg}$$

$$\Gamma := \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0.105 \\ 0.2 \\ 0.256 \\ 0.467 \\ 1.299 \end{pmatrix}$$

$$m_1 := \Gamma_4 \cdot L_4 = 5452.01 \text{ kg}$$

$$m_2 := \Gamma_3 \cdot L_3 = 721.75 \text{ kg}$$

$$m_3 := \Gamma_2 \cdot L_2 = 300 \text{ kg}$$

$$m_1 := \frac{m_1}{M_{\text{total}}} = 0.818$$

$$m_2 := \frac{m_2}{M_{\text{total}}} = 0.108$$

$$m_3 := \frac{m_3}{M_{\text{total}}} = 0.045$$

$$m_4 := \Gamma_1 \cdot L_1 = 147.49 \text{ kg}$$

$$m_5 := \Gamma_0 \cdot L_0 = 47.75 \text{ kg}$$

$$m_4 := \frac{m_4}{M_{\text{total}}} = 0.022$$

$$m_5 := \frac{m_5}{M_{\text{total}}} = 0.007$$

## Vedlegg C: Materialdata (hentet fra Revit)

Materials Walls			
Type	Material: Nam	Material: Vol	Count
200mm	B35	197.54 m <sup>2</sup>	34
250mm	B35	194.92 m <sup>2</sup>	9
		392.46 m <sup>2</sup>	43

Figur C.1: Material vegger

Materials Columns							
Family	Type	Length	Material: Nam	Material: Vol	Base Level	Top Level	Count
Level 2							
CHS-Circ			S355	3.294 m <sup>2</sup>	Level 2		28
Level 3							
CHS-Circ	193.7x16	4500	S355	0.241 m <sup>2</sup>	Level 3	Level 4	6
Level 4							
CHS-Circ	193.7x16		S355	0.313 m <sup>2</sup>	Level 4		6
Level 5							
CHS-Circ	193.7x16	2000	S355	0.036 m <sup>2</sup>	Level 5	Level 6	2
				3.884 m <sup>2</sup>			42

Figur C.2: Material søyler

Materials Floors				
Type	Material: Nam	Material: Vol	Perimeter	Level
Level 3				
300mm	B35	27.064 m <sup>2</sup>		Level 3
Level 4				
250mm	B35	119.665 m <sup>2</sup>		Level 4
300mm	B35	59.440 m <sup>2</sup>		Level 4
Level 6				
250mm	B35	119.665 m <sup>2</sup>		Level 6
		325.835 m <sup>2</sup>		

Figur C.3: Material gulv

Materials Framing						
Family	Type	Kutt lengde	Material: Nam	Material: Vol	Reference L	Count
Level 2						
Circular H	KR60.3x8	13.402 m	S355	0.019 m <sup>2</sup>	Level 2	2
Level 3						
Circular H	KR60.3x8	12.282 m	S355	0.017 m <sup>2</sup>	Level 3	2
Level 4						
Betongbje	1000x500	96.736 m	B35	48.368 m <sup>2</sup>	Level 4	12
Circular H	KR60.3x8	12.282 m	S355	0.017 m <sup>2</sup>	Level 4	2
Level 5						
Circular H	KR60.3x8	8.842 m	S355	0.013 m <sup>2</sup>	Level 5	2
Level 6						
Betongbje	1000x500	96.894 m	B35	48.447 m <sup>2</sup>	Level 6	9
Rectangul	RHSR120	3.791 m	S355	0.006 m <sup>2</sup>	Level 6	2
Stålbjelke	HE 450 A	85.666 m	S355	1.525 m <sup>2</sup>	Level 6	18
Stålbjelke		40.602 m	S355	0.076 m <sup>2</sup>	Level 6	7
		370.497 m				56
				98.488 m <sup>2</sup>		

Figur C.4: Material rammer

Dekker	
Description	Area
300mm pl	1246 m <sup>2</sup>
	1246 m <sup>2</sup>

Figur C.5: Material dekke

Ståltabell					
Family	Type	Material: Nam	Material: Des	Material: Vol	Count
CHS-Circ	193.7x16	S355	Konstruks	1.84 m <sup>2</sup>	30
CHS-Circ	355.6x16	S355	Konstruks	2.05 m <sup>2</sup>	12
Circular H	KR60.3x8	S355	Konstruks	0.07 m <sup>2</sup>	8
Rectangul	RHSR120	S355	Konstruks	0.01 m <sup>2</sup>	2
Stålbjelke	HE 450 A	S355	Konstruks	1.53 m <sup>2</sup>	18
Stålbjelke	RHSR 300	S355	Konstruks	0.04 m <sup>2</sup>	3
Stålbjelke	RHSS 56x	S355	Konstruks	0.04 m <sup>2</sup>	4
				5.56 m <sup>2</sup>	77

Figur C.6: Ståltabell

## Vedlegg D: Resultater

### D.1: Egenperioder og effektive modale masser

Eksporterte egenperioder og effektive modale masser fra Robot:

Mode	Period (sec)	Rel,mas,UX (%)	Rel,mas,UY (%)	Cur,mas,UX (%)	Cur,mas,UY (%)
1	0,503	0,10	8,96	0,10	8,96
2	0,419	1,16	32,33	1,06	23,38
3	0,365	3,20	34,84	2,04	2,51
4	0,353	4,52	38,67	1,32	3,83
5	0,338	6,52	38,86	2,00	0,19
6	0,298	80,52	39,87	74,00	1,00
7	0,257	84,65	44,23	4,14	4,36
8	0,233	84,65	44,23	0,00	0,00
9	0,232	84,78	44,35	0,13	0,12
10	0,216	88,58	49,89	3,80	5,54
11	0,195	88,65	49,90	0,07	0,01
12	0,182	88,72	50,13	0,07	0,23
13	0,173	89,16	50,13	0,43	0,00
14	0,160	89,19	50,26	0,04	0,13
15	0,156	89,22	50,26	0,03	0,01
16	0,150	89,60	50,33	0,38	0,07
17	0,140	89,68	50,35	0,08	0,02
18	0,138	89,78	50,38	0,10	0,04
19	0,136	89,87	50,65	0,09	0,27
20	0,131	89,87	50,65	0,00	0,00
21	0,128	90,20	51,06	0,33	0,41
22	0,118	90,20	71,43	0,00	20,37
23	0,106	90,22	71,43	0,02	0,00
24	0,104	90,36	75,29	0,15	3,86
25	0,102	90,52	77,28	0,16	1,99
26	0,099	90,76	80,27	0,23	3,00
27	0,097	90,82	81,99	0,06	1,72
28	0,095	90,82	83,63	0,00	1,64
29	0,093	90,83	83,78	0,01	0,15
30	0,091	90,88	83,90	0,05	0,12
31	0,090	91,11	83,90	0,22	0,00
32	0,088	91,11	83,92	0,00	0,02
33	0,086	91,20	83,98	0,09	0,06
34	0,084	91,28	84,59	0,08	0,61
35	0,081	91,32	85,57	0,05	0,98
36	0,081	91,32	85,91	0,00	0,33
37	0,080	91,39	90,62	0,07	4,72
38	0,079	91,39	90,62	0,00	0,00
39	0,078	91,42	91,27	0,03	0,65
40	0,077	91,79	91,31	0,37	0,04
41	0,076	91,82	91,43	0,04	0,12
42	0,075	91,83	91,59	0,00	0,16
43	0,073	91,83	91,70	0,01	0,11
44	0,070	91,84	91,71	0,00	0,01
45	0,069	91,89	91,73	0,05	0,02
46	0,068	91,92	91,73	0,04	0,01
47	0,068	92,02	91,74	0,10	0,01
48	0,067	92,15	91,74	0,13	0,00

49	0,067	92,15	91,74	0,00	0,00
50	0,067	92,15	91,74	0,00	0,00
51	0,067	92,15	91,75	0,00	0,01
52	0,066	92,17	91,81	0,02	0,06
53	0,066	92,19	91,89	0,02	0,08
54	0,065	92,19	91,89	0,00	0,00
55	0,064	92,26	91,89	0,07	0,00
56	0,063	92,31	91,95	0,05	0,06
57	0,063	92,39	92,00	0,08	0,05
58	0,062	92,42	92,01	0,04	0,00
59	0,061	92,44	92,01	0,02	0,00
60	0,061	92,44	92,01	0,00	0,00
61	0,061	92,45	92,06	0,00	0,05
62	0,060	93,17	92,06	0,72	0,00
63	0,059	93,41	92,30	0,25	0,24
64	0,059	93,41	92,30	0,00	0,00
65	0,058	93,58	92,40	0,17	0,10
66	0,058	93,59	92,41	0,01	0,01
67	0,057	93,59	92,55	0,00	0,15
68	0,057	93,59	92,56	0,00	0,00
69	0,056	93,62	92,57	0,03	0,01
70	0,055	93,62	92,57	0,00	0,00
71	0,054	93,62	92,57	0,00	0,00
72	0,054	93,62	92,57	0,00	0,00
73	0,054	93,63	92,58	0,00	0,01
74	0,053	93,63	92,62	0,00	0,05
75	0,052	93,63	92,62	0,00	0,00
76	0,052	93,63	92,62	0,00	0,00
77	0,052	93,63	92,64	0,00	0,02
78	0,052	93,63	92,64	0,00	0,00
79	0,051	93,63	92,65	0,00	0,01
80	0,051	93,63	92,65	0,00	0,00
81	0,050	93,64	92,66	0,01	0,01
82	0,050	94,26	92,67	0,61	0,01
83	0,049	94,27	92,68	0,01	0,00
84	0,049	94,29	92,73	0,02	0,06
85	0,049	94,36	92,73	0,06	0,00
86	0,049	94,37	92,77	0,02	0,04
87	0,048	94,37	92,82	0,00	0,05
88	0,048	94,37	92,82	0,00	0,00
89	0,047	94,38	92,89	0,01	0,06
90	0,047	94,38	92,90	0,00	0,01
91	0,047	94,40	92,90	0,02	0,00
92	0,046	94,41	93,06	0,01	0,16
93	0,046	94,47	93,08	0,06	0,02
94	0,045	94,49	93,36	0,02	0,28
95	0,045	94,51	93,56	0,02	0,20
96	0,045	94,53	93,57	0,02	0,01
97	0,044	94,53	93,60	0,00	0,03
98	0,044	94,53	93,60	0,00	0,00
99	0,044	94,61	93,64	0,08	0,04
100	0,044	94,61	93,65	0,00	0,01

Tabell D.1.1: Egenperioder og effektive modale masser for de første hundre svingformer eksportert fra Robot

Eksporterte egenperioder og effektive modale masser fra FEM-Design:

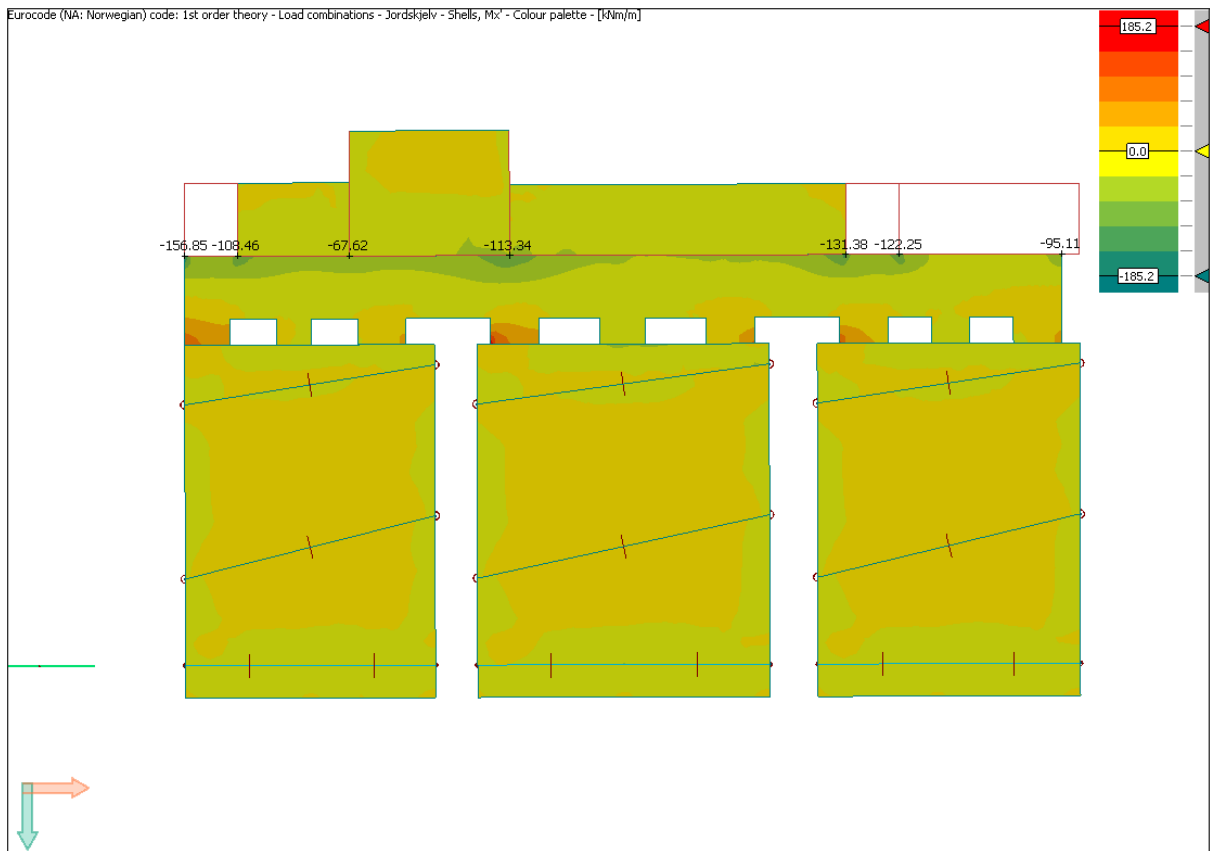
Shape no. [-]	T [s]	mx' [%]	my' [%]
1	0,577	0,60	0,00
2	0,453	0,00	9,60
3	0,365	4,50	25,30
4	0,357	0,00	0,70
5	0,328	0,00	0,00
6	0,321	0,70	1,10
7	0,316	0,00	1,80
8	0,267	78,10	2,80
9	0,200	1,60	4,40
10	0,196	1,80	1,30
11	0,183	0,00	0,00
12	0,168	0,00	0,00
13	0,166	0,00	0,00
14	0,165	0,00	0,00
15	0,154	0,00	0,00
16	0,147	0,00	0,00
17	0,146	0,00	0,00
18	0,143	0,00	0,00
19	0,139	0,00	0,00
20	0,122	0,00	0,00
21	0,122	0,00	6,10
22	0,116	0,00	1,20
23	0,110	0,00	17,40
24	0,102	0,00	0,00
25	0,099	0,00	1,10
26	0,096	0,00	4,00
27	0,094	0,00	0,00
28	0,093	0,00	1,40
29	0,092	0,00	0,00
30	0,090	0,00	0,00
31	0,090	0,00	0,00
32	0,089	0,00	1,20
33	0,086	0,00	0,00
34	0,085	0,00	0,00
35	0,084	0,00	0,00
36	0,081	0,00	0,00
37	0,079	0,00	0,00
38	0,077	0,00	8,80
39	0,075	0,00	0,00
40	0,075	0,00	0,00
41	0,074	0,00	0,00
42	0,073	0,00	0,00
43	0,072	0,00	0,00
44	0,072	0,00	0,00
45	0,071	0,00	0,00
46	0,071	0,00	0,00
47	0,069	0,00	0,00
48	0,068	0,00	0,00
49	0,067	0,00	0,00
50	0,067	0,00	0,00
51	0,065	0,00	0,00
52	0,064	0,00	0,00
53	0,063	0,00	0,00

54	0,063	0,00	0,00
55	0,062	0,00	0,00
56	0,061	0,00	0,00
57	0,060	0,00	0,00
58	0,059	0,00	0,00
59	0,059	0,00	0,00
60	0,058	0,00	0,00
61	0,058	0,00	0,00
62	0,057	0,00	0,00
63	0,056	0,00	0,00
64	0,056	0,00	0,00
65	0,055	0,00	0,00
66	0,054	0,00	0,00
67	0,053	1,00	0,00
68	0,053	0,00	0,00
69	0,052	0,00	0,00
70	0,052	0,00	0,00
71	0,052	0,00	0,00
72	0,051	0,00	0,00
73	0,050	0,00	0,00
74	0,049	0,00	0,00
75	0,049	0,00	0,00
76	0,048	0,00	0,00
77	0,048	0,00	0,00
78	0,047	0,00	0,00
79	0,046	0,00	0,00
80	0,046	0,00	0,00
81	0,045	0,00	0,00
82	0,045	0,00	0,00
83	0,044	0,00	0,00
84	0,043	0,70	0,00
85	0,043	0,00	0,00
86	0,043	0,00	0,00
87	0,043	0,00	0,00
88	0,042	0,00	0,00
89	0,042	0,00	0,00
90	0,042	0,00	0,00
91	0,041	0,00	0,00
92	0,041	0,00	0,00
93	0,041	0,00	0,00
94	0,040	0,00	0,00
95	0,040	0,00	0,00
96	0,040	0,00	0,00
97	0,040	0,00	0,00
98	0,040	0,00	0,00
99	0,040	0,00	0,00
100	0,039	0,00	0,00

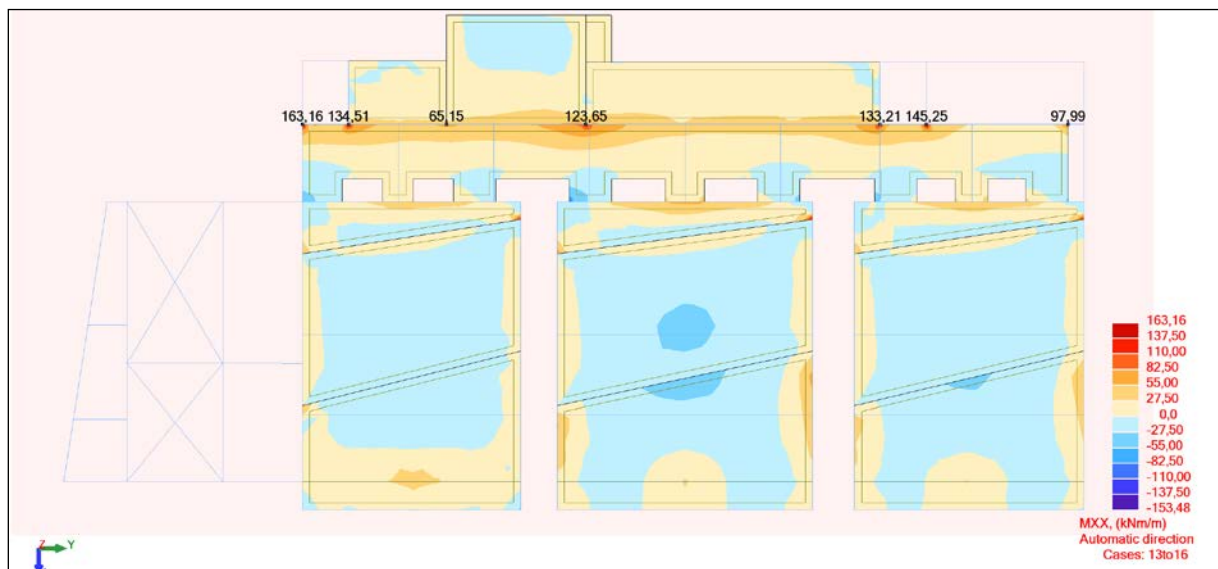
Tabell D.1.2 Egenperioder og effektive modale masser for de første hundre svingeformer eksportert fra FEM-Design



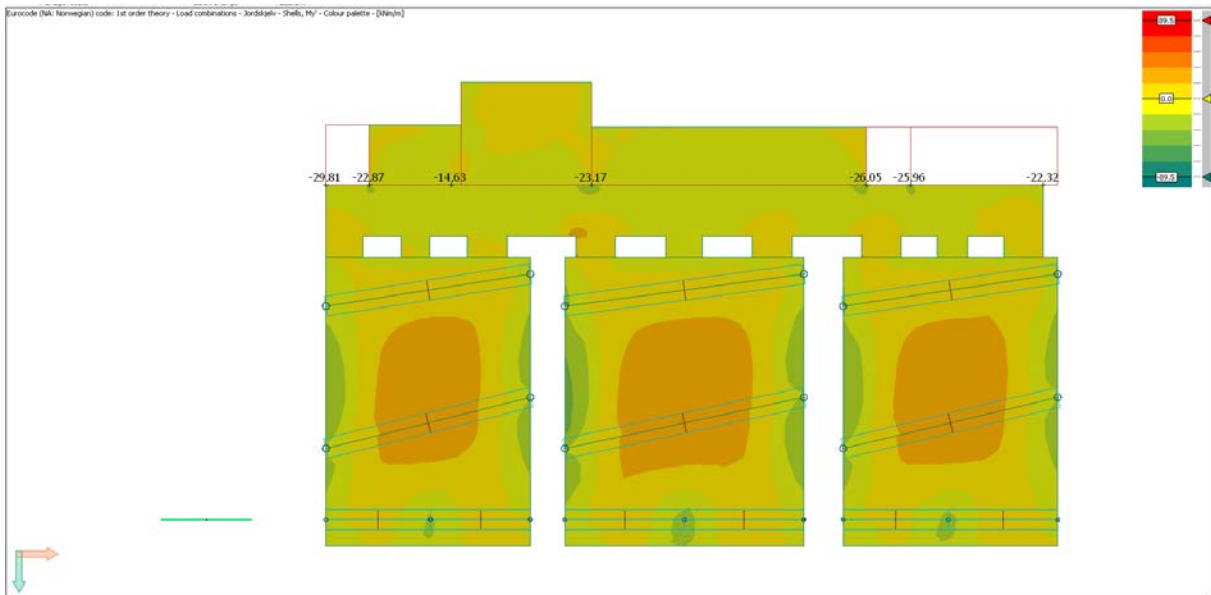
## D.2: Krefter



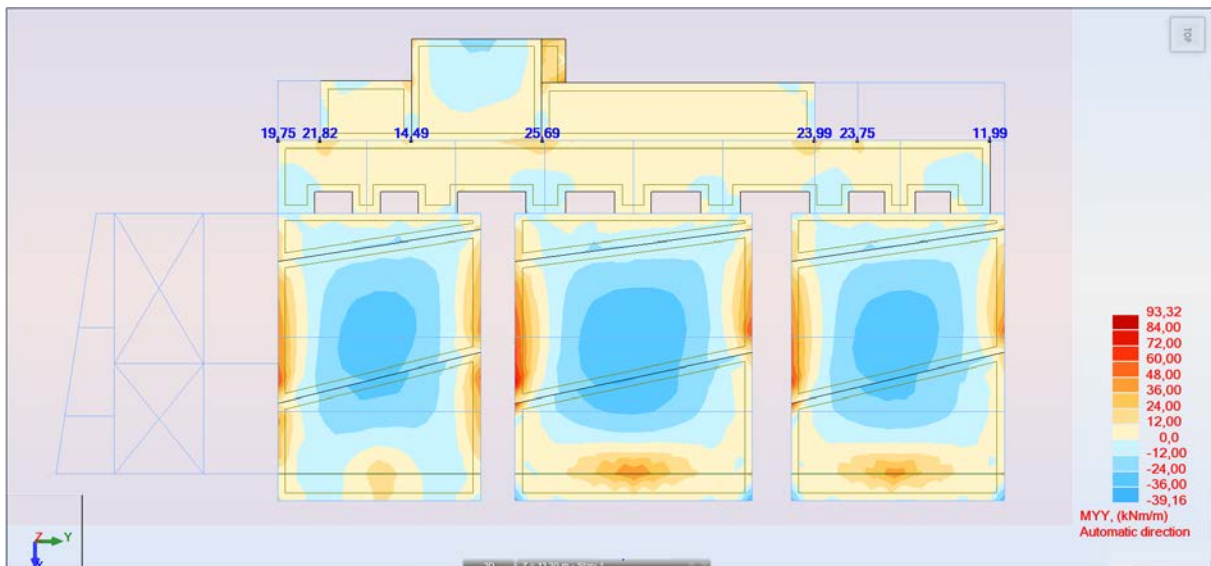
Figur D.2.1: Moment i x-retning om y-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i FEM-Design.



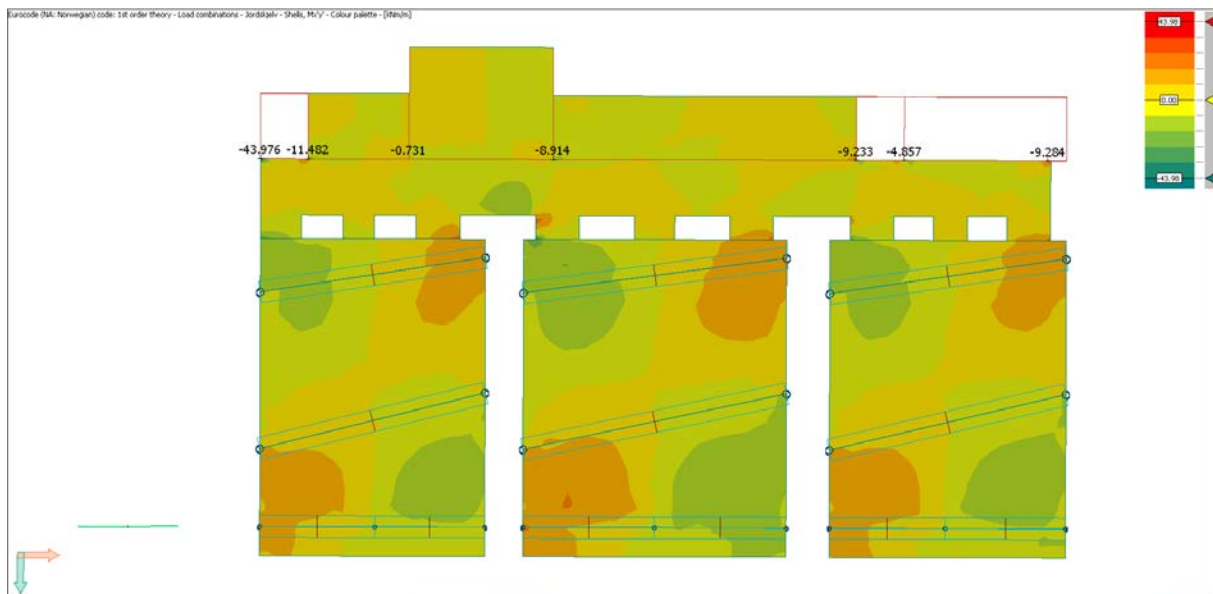
Figur D.2.2: Moment i x-retning om y-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i Robot.



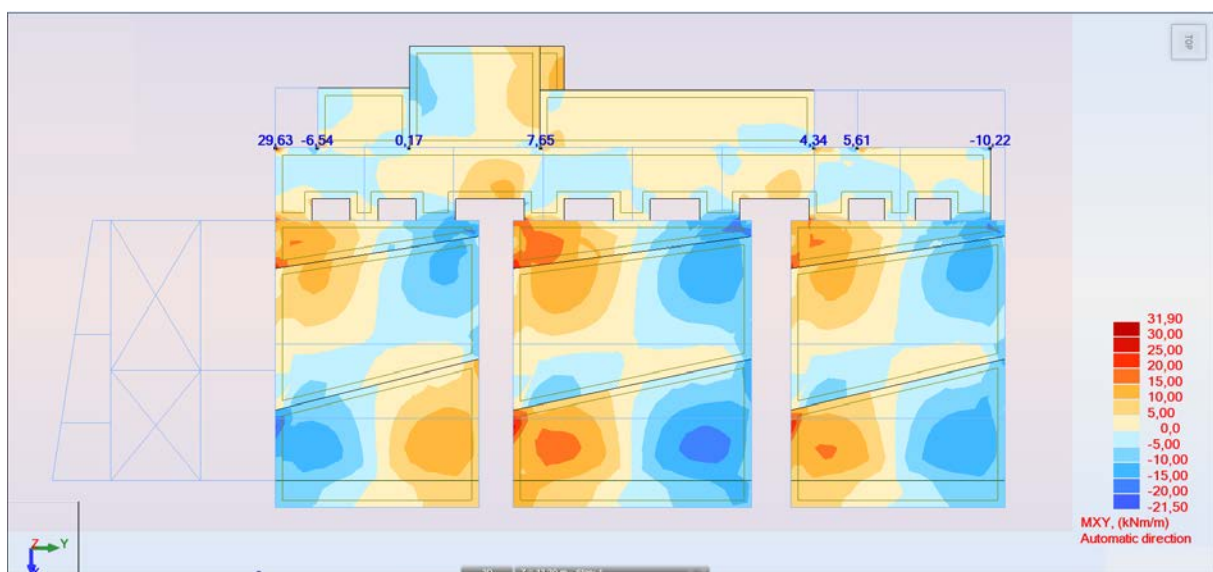
Figur D.2.3: Moment i y-retning om x-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i FEM-Design.



Figur D.2.4: Moment i y-retning om x-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i Robot.



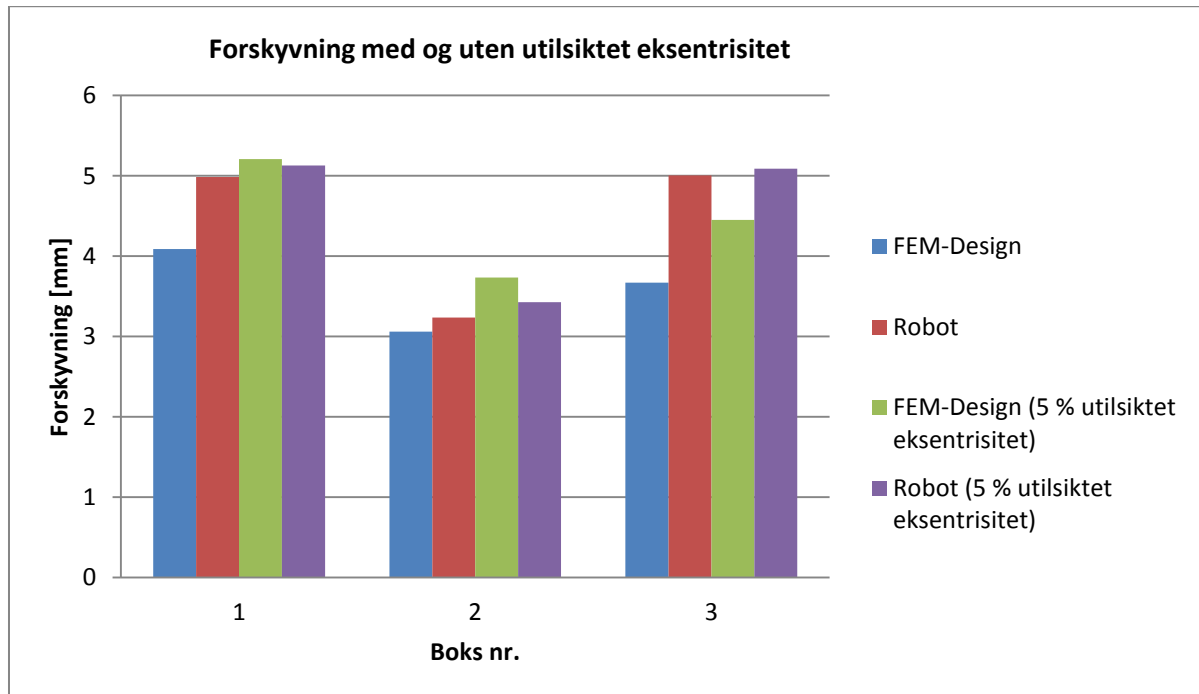
Figur D.2.5: Torsjonsmoment (uten utilsiktet eksentrisitet) i FEM-Design.



Figur D.2.6: Torsjonsmoment (uten utilsiktet eksentrisitet) i Robot.

### D.3: Forskyvninger

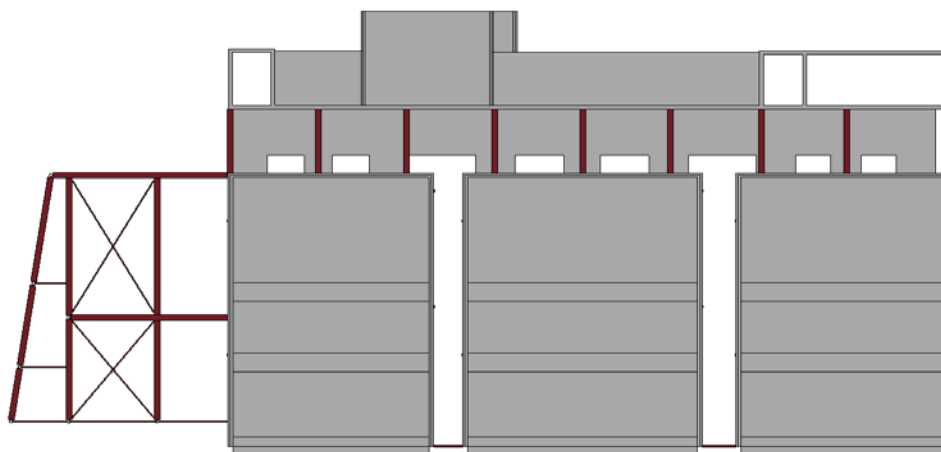
Figuren under viser forskyvningen av boksene med og uten utilsiktet eksentrisitet:



Figur D.3.1: Forskyvninger med og uten utilsiktet eksentrisitet.

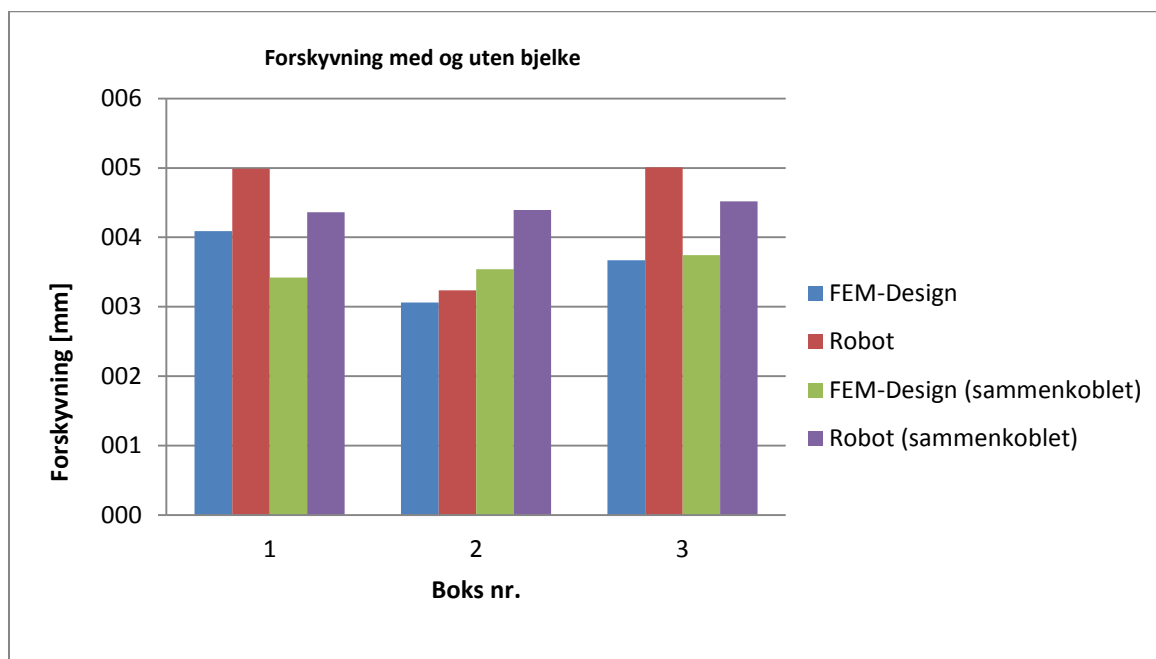
#### D.4: Dansebokser med kobling

For å sjekke om stivheten kunne fordeles bedre ved å koble sammen boksene i toppen ved to bjelker.



Figur D.4.1: Danseboksene er koblet sammen, modellert i Revit.

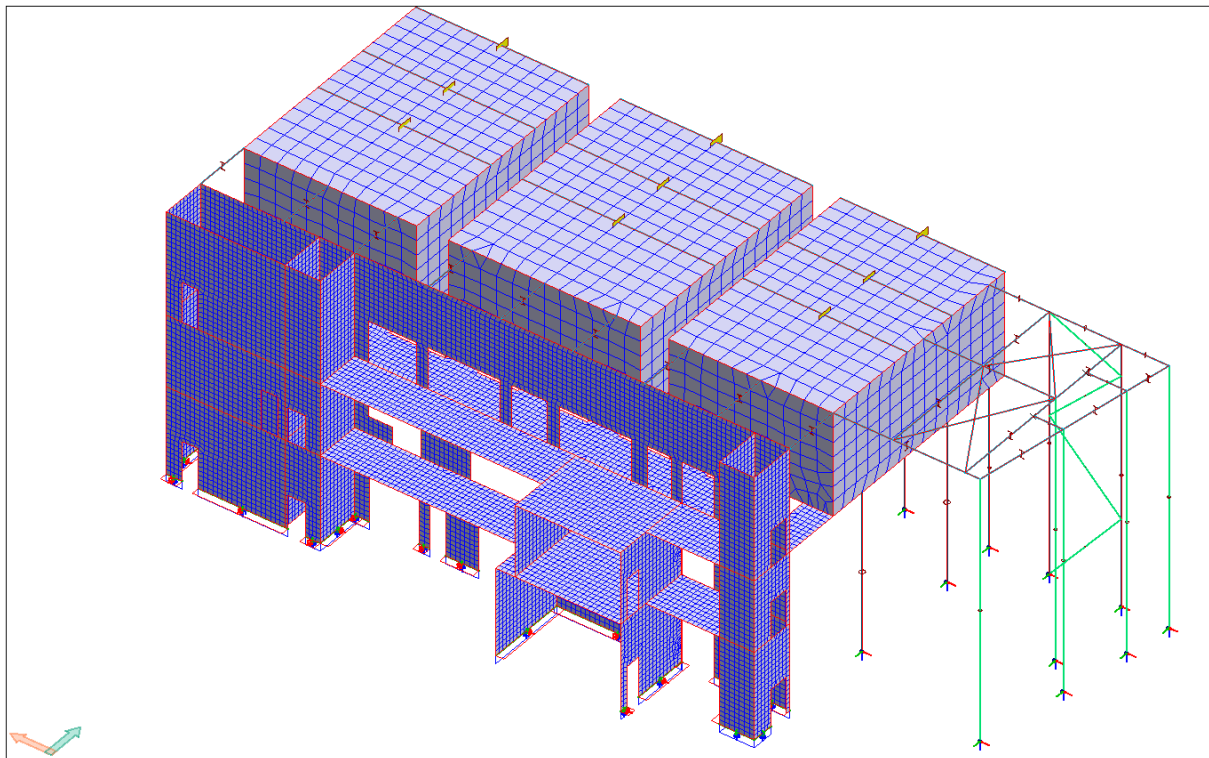
Vi ønsker å se om de største forskyvningene har blitt mindre. Verdiene for forskyvning er uten utilsiktet torsjon.



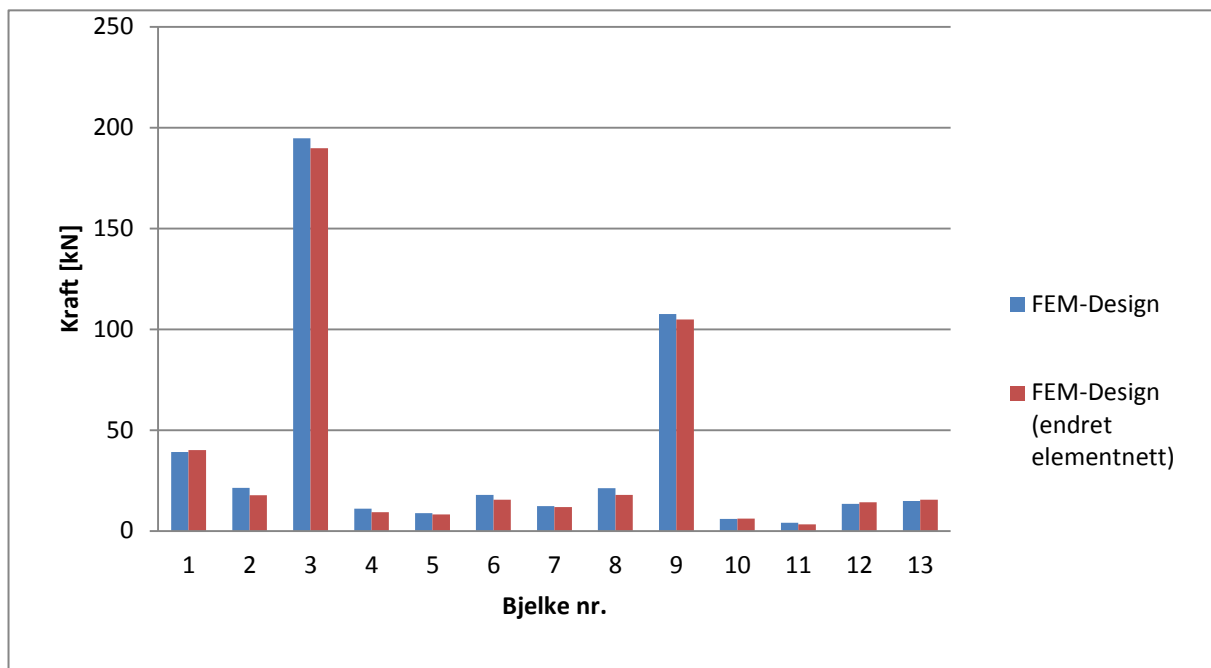
Figur D.4.2: Forskyvning med og uten sammenkobling.

Vi registrerer det skjer en reduksjon i forskyvningene i boks 1 og 3 hvor forskyvningene før sammenkobling var størst.

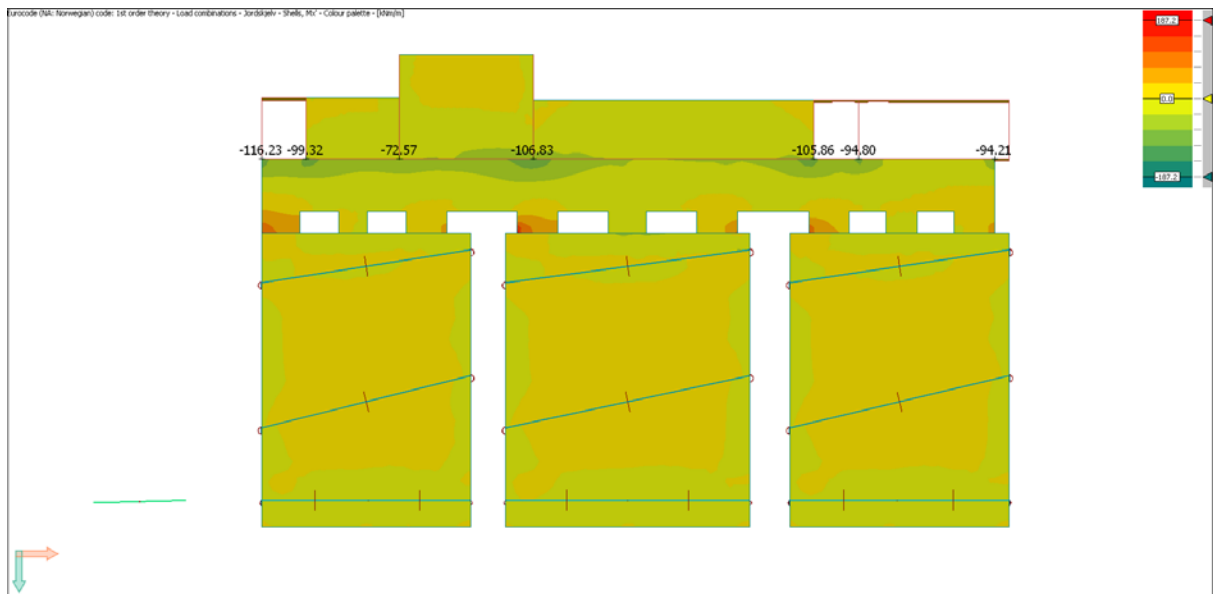
## D.5: Endring i elementnettet



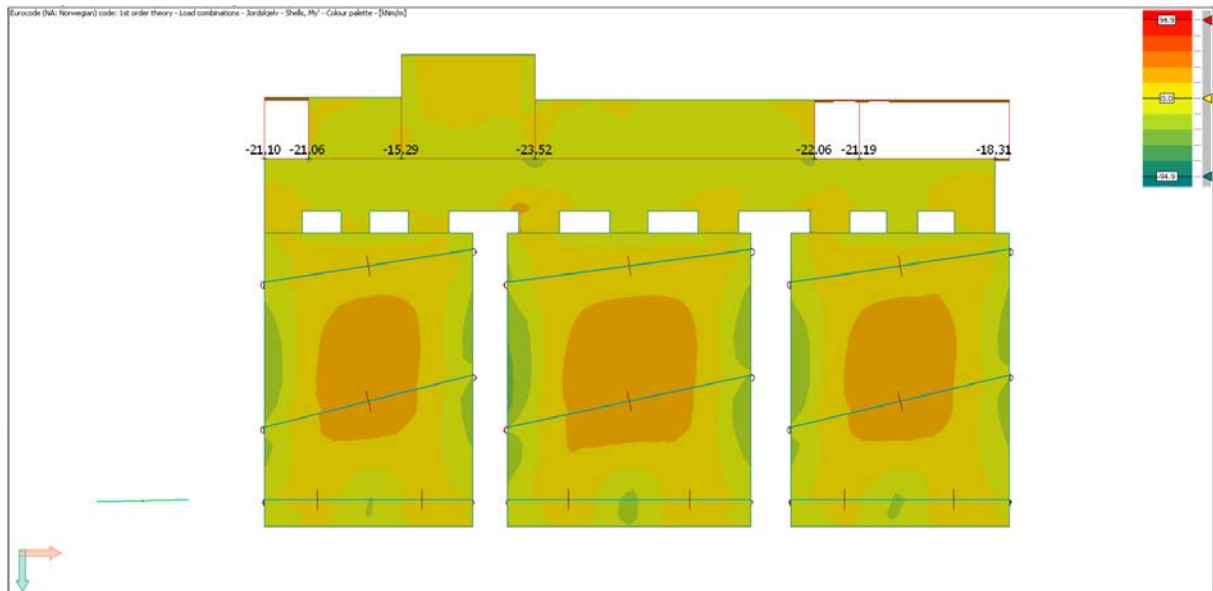
Figur D.5.1: Elementnettet er endret for alle deler utenom danseboksene til 0,3 m. i gjennomsnitt. Danseboksene har elementstørrelse på 1m. Totalt antall shell elements:



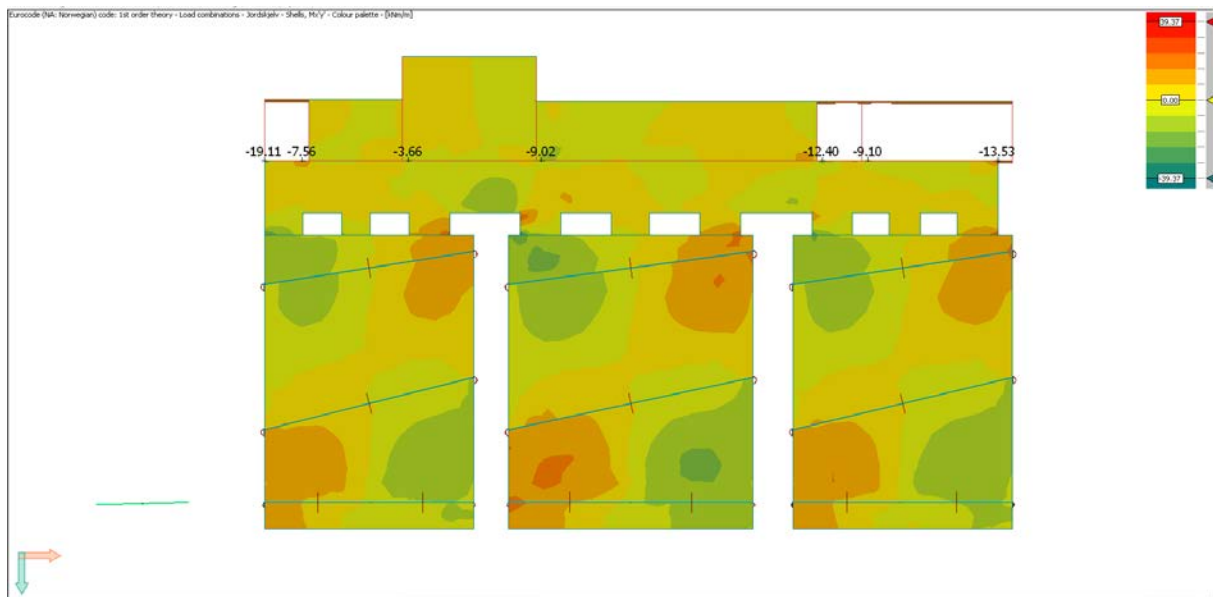
Figur D.5.2: Kraftene i bjelkene med og uten endret elementnett. Sammenligning er gitt i forhold til brukt elementnett i oppgaven (se kapittel 4.3.2)



Figur D.5.3: Med endret elementnett: Moment i x-retning om y-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i FEM-Design.

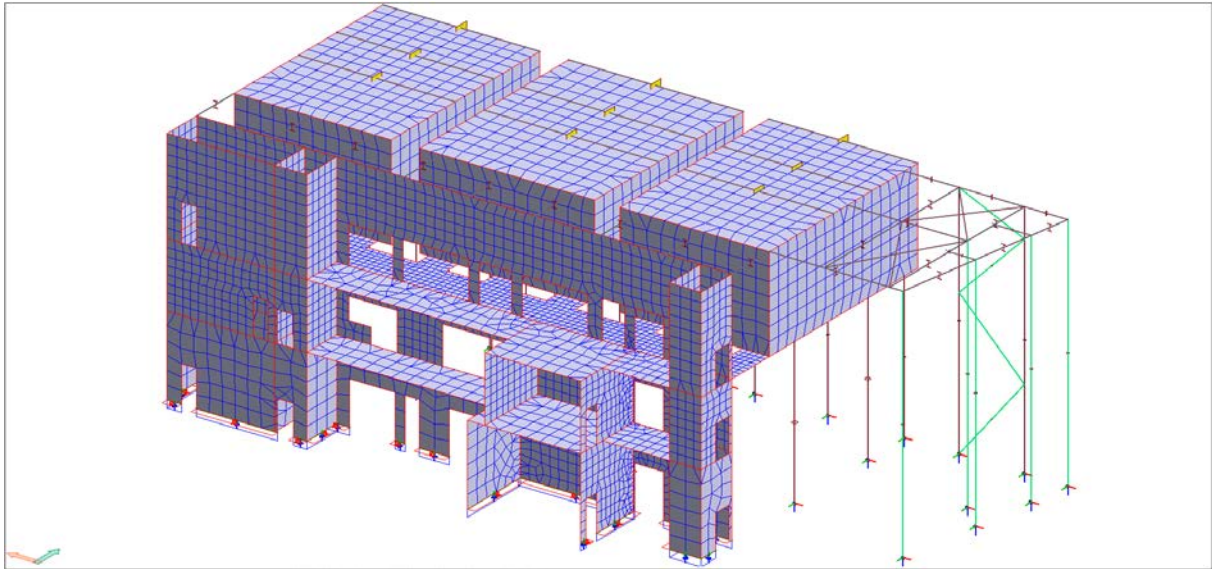


Figur D.5.3: Med endret elementnett: Moment i y-retning om x-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i FEM-Design.

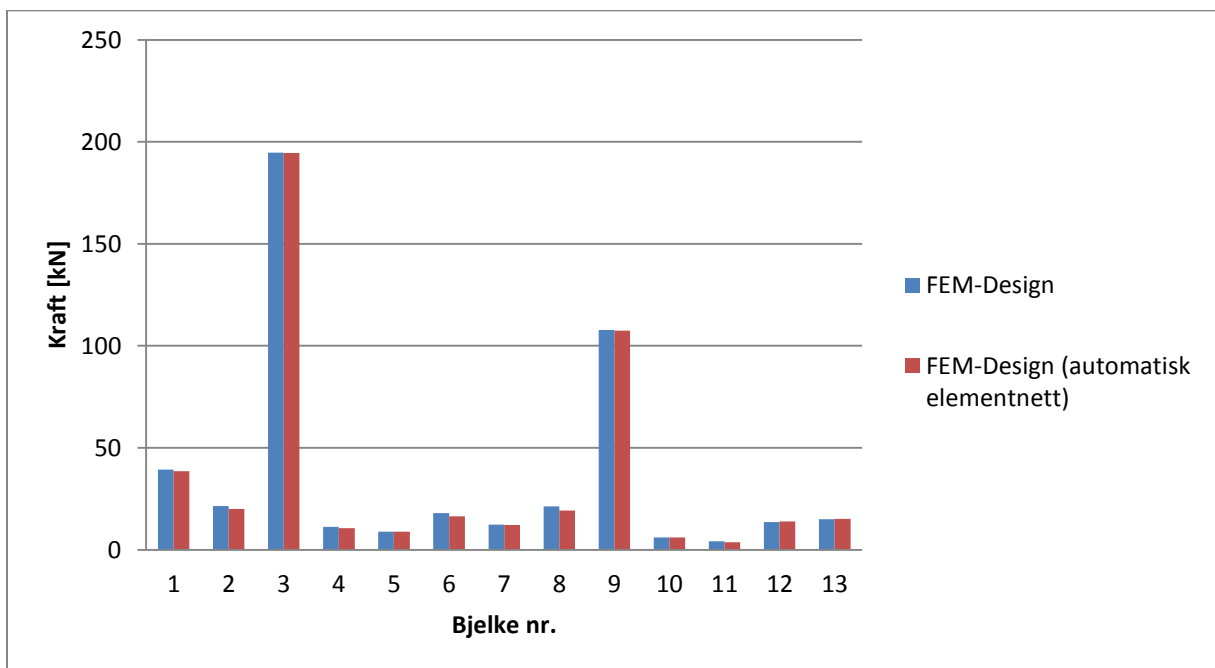


Figur D.5.3: Med endret elementnett: Torsjonsmoment (uten utilsiktet eksentrisitet) i FEM-Design.

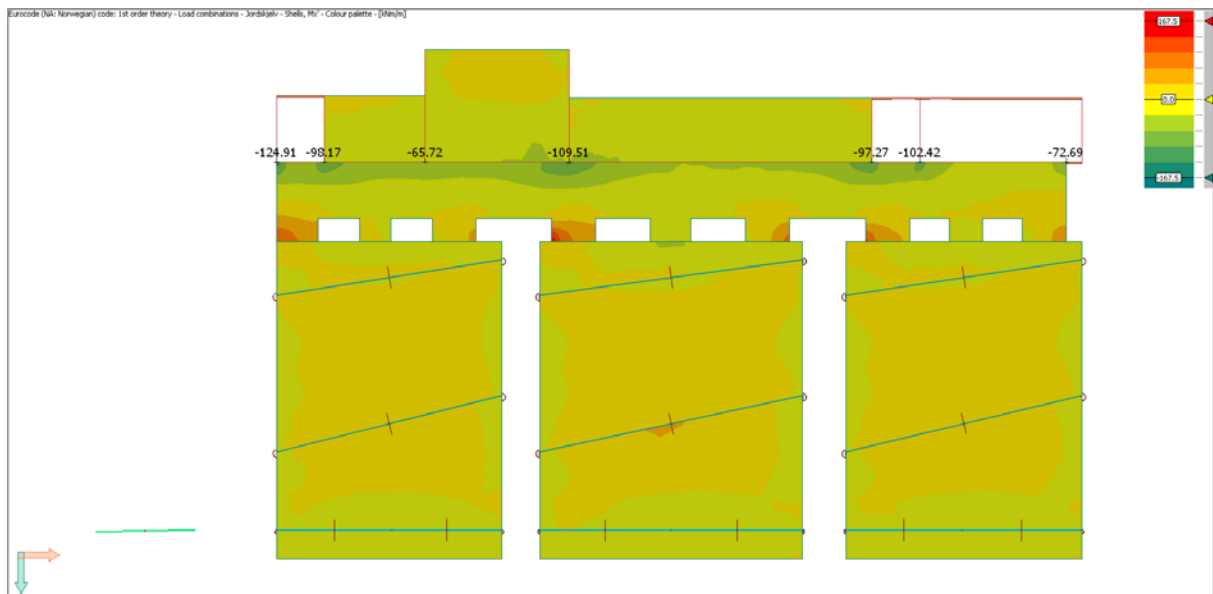




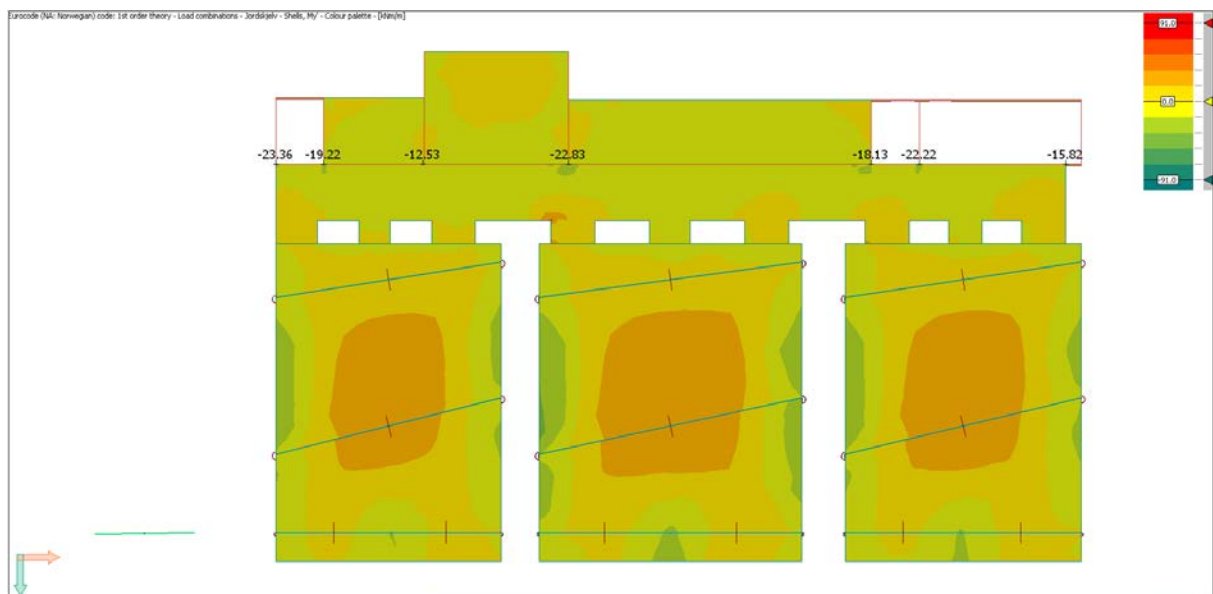
Figur D.5.4: Automatisk elementinndeling i FEM-Design. Totalt antall shell elements:



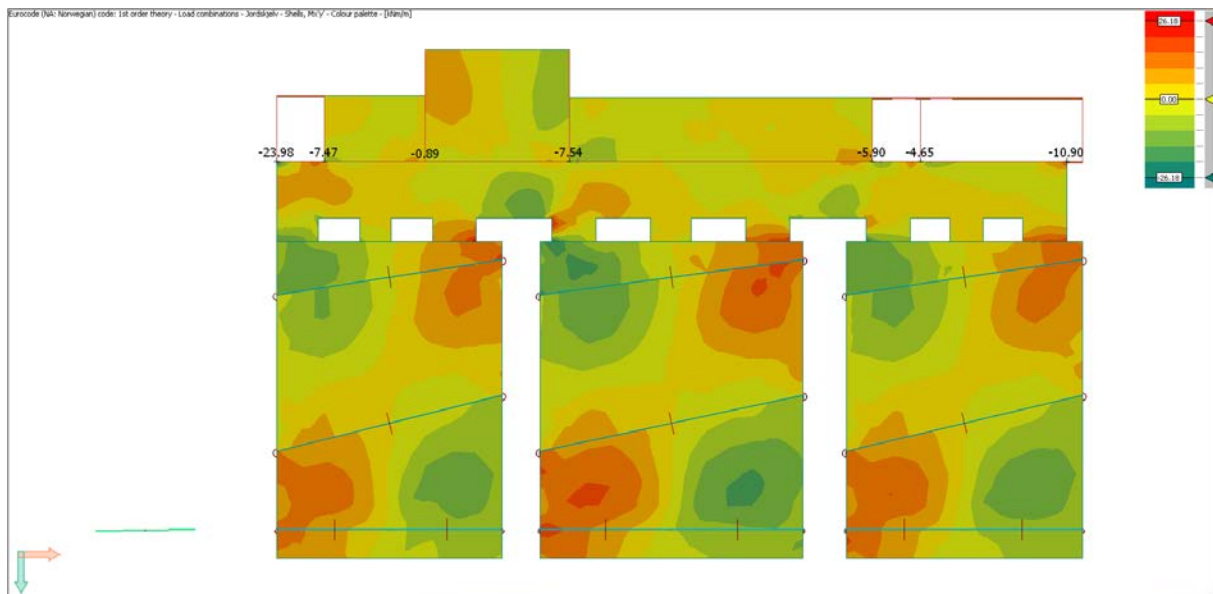
Figur D.5.5 Kraftene i bjelkene med brukt elementnett og automatisk laget elementnett i FEM-Design.



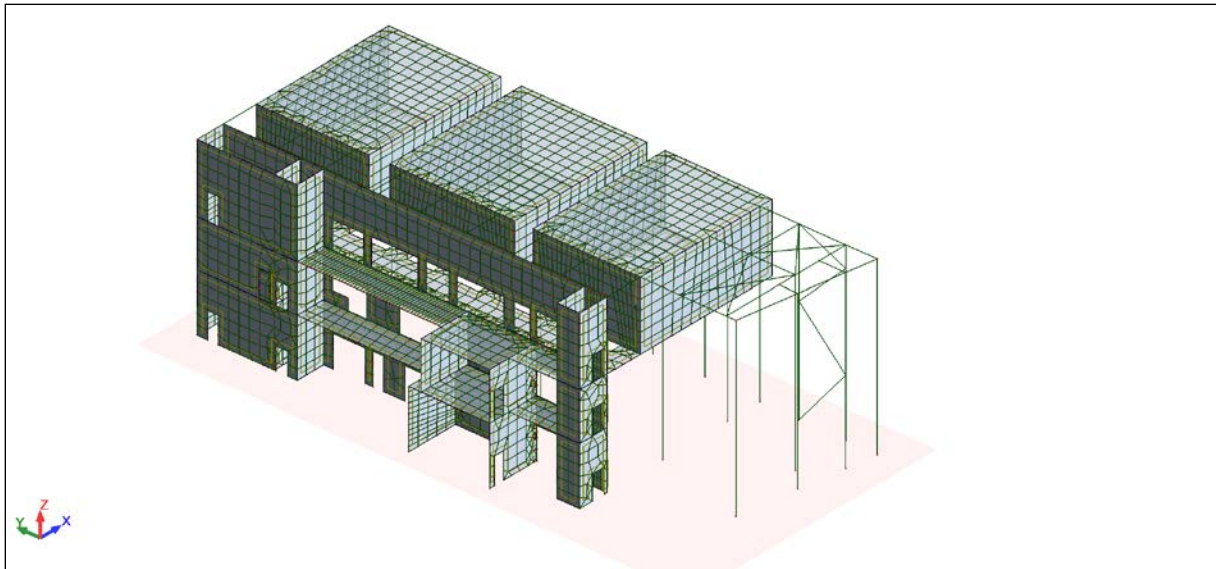
Figur D.5.6: Med automatisk elementnett: Moment i x-retning om y-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i FEM-Design.



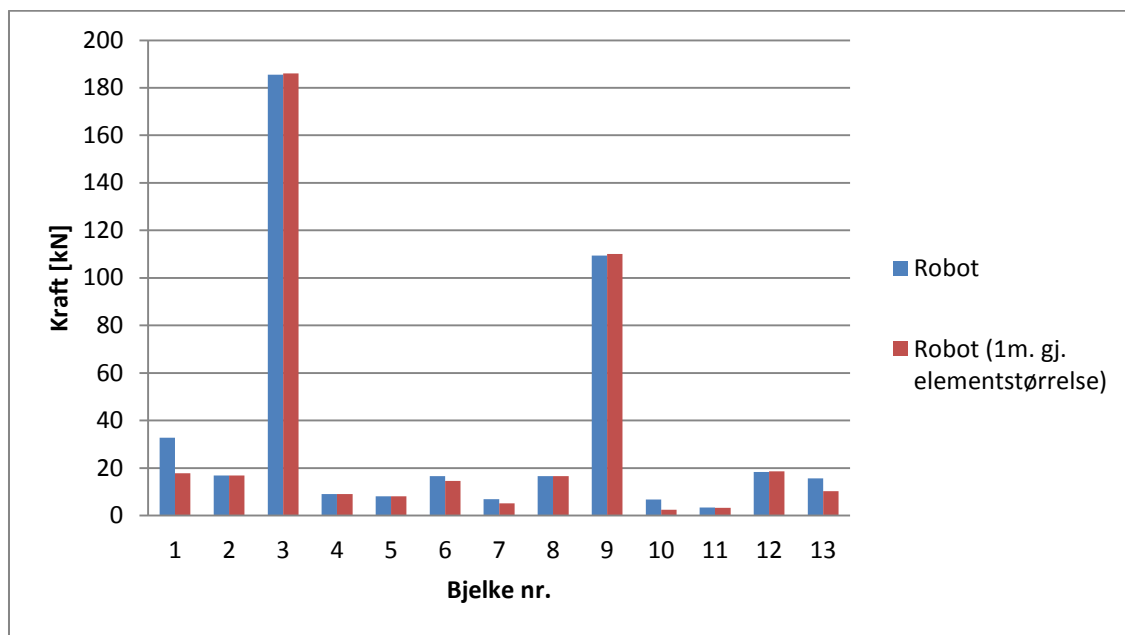
Figur D.5.7 Med automatisk elementnett: Moment i y-retning om x-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i FEM-Design.



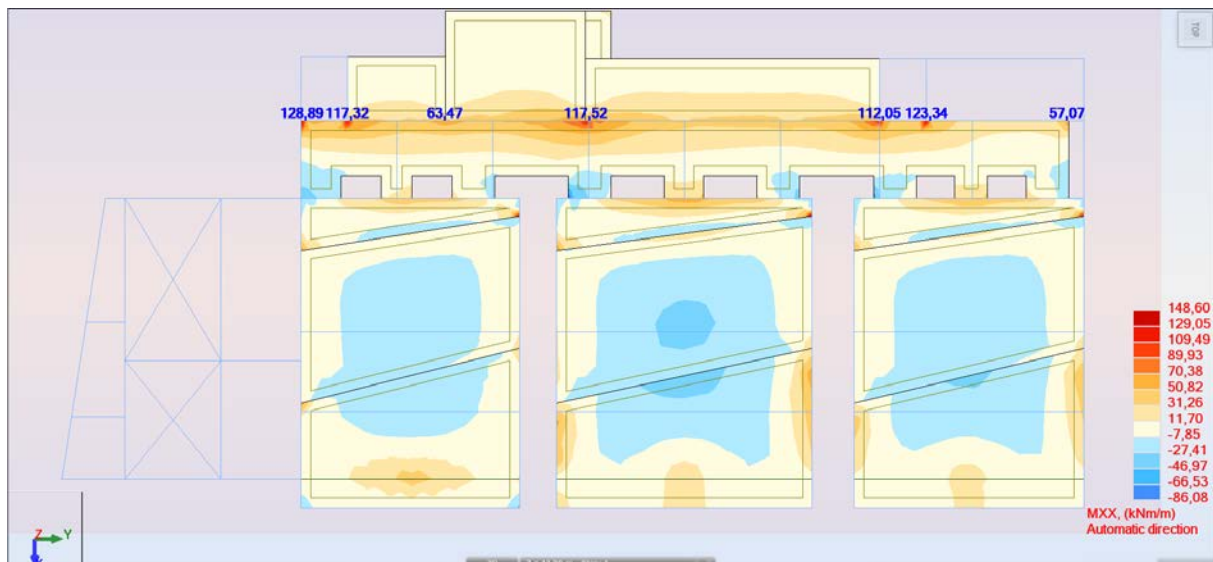
Figur D.5.8: Med automatisk elementnett: Torsjonsmoment (uten utilsiktet eksentrisitet) i FEM-Design.



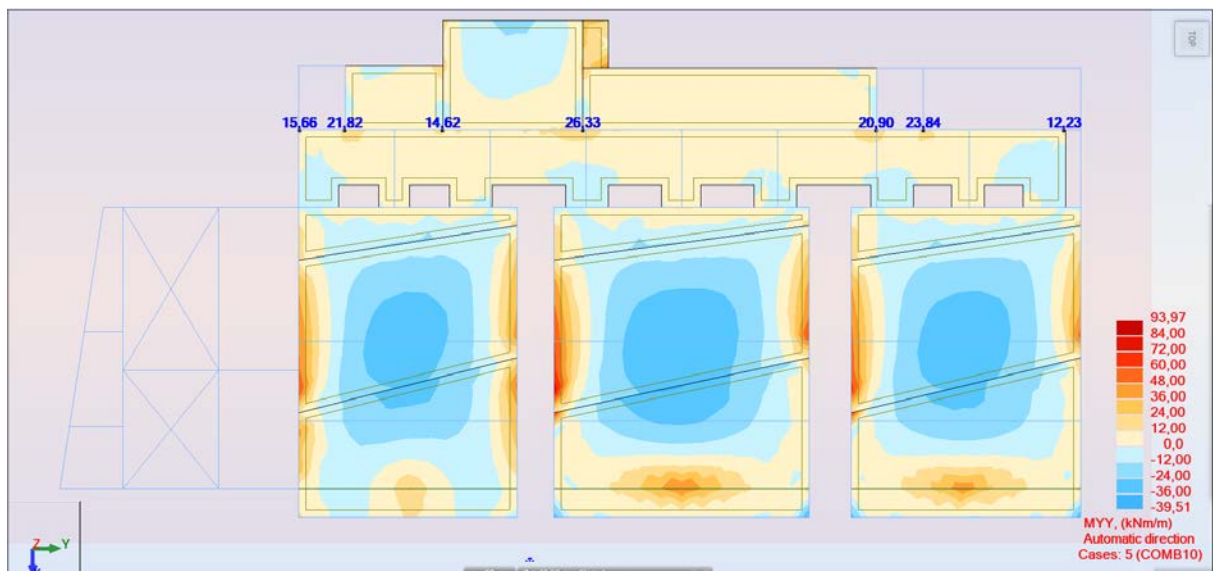
Figur D.5.9: Med «automatisk» elementnett (gjennomsnittlig størrelse på 1m.) i Robot.



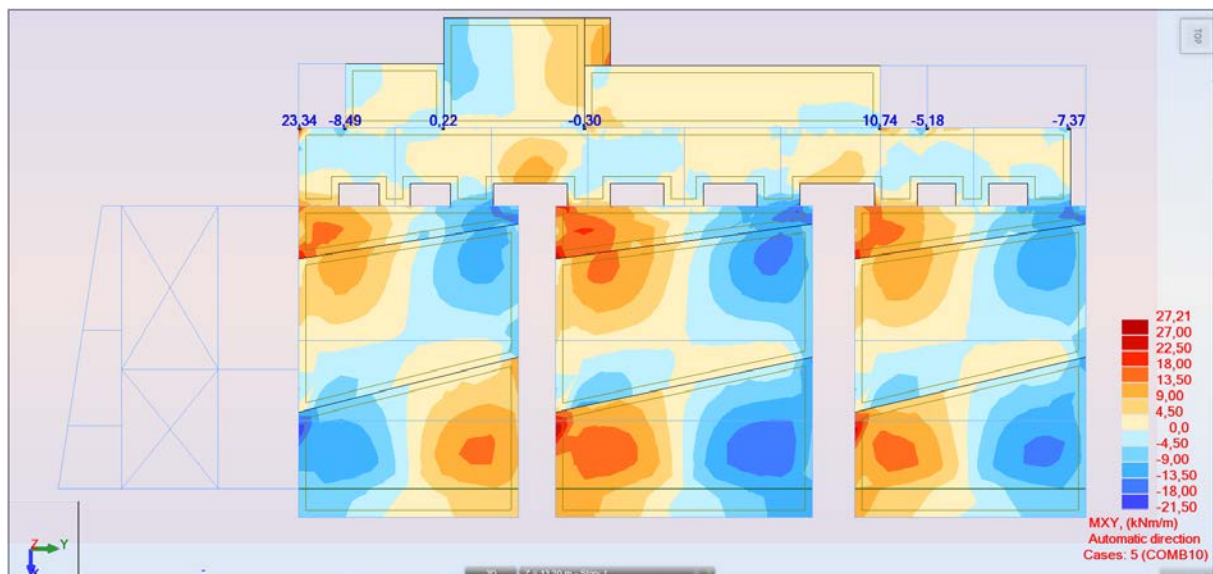
Figur D.5.10 Kraftene i bjelkene med brukt elementnett og «automatisk» laget elementnett i Robot. 1meter gjennomsnittlig elementstørrelse.



Figur D.5.11: Med «automatisk» elementnett (1 meter gjennomsnittlig elementstørrelse): Moment i x-retning om y-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i Robot



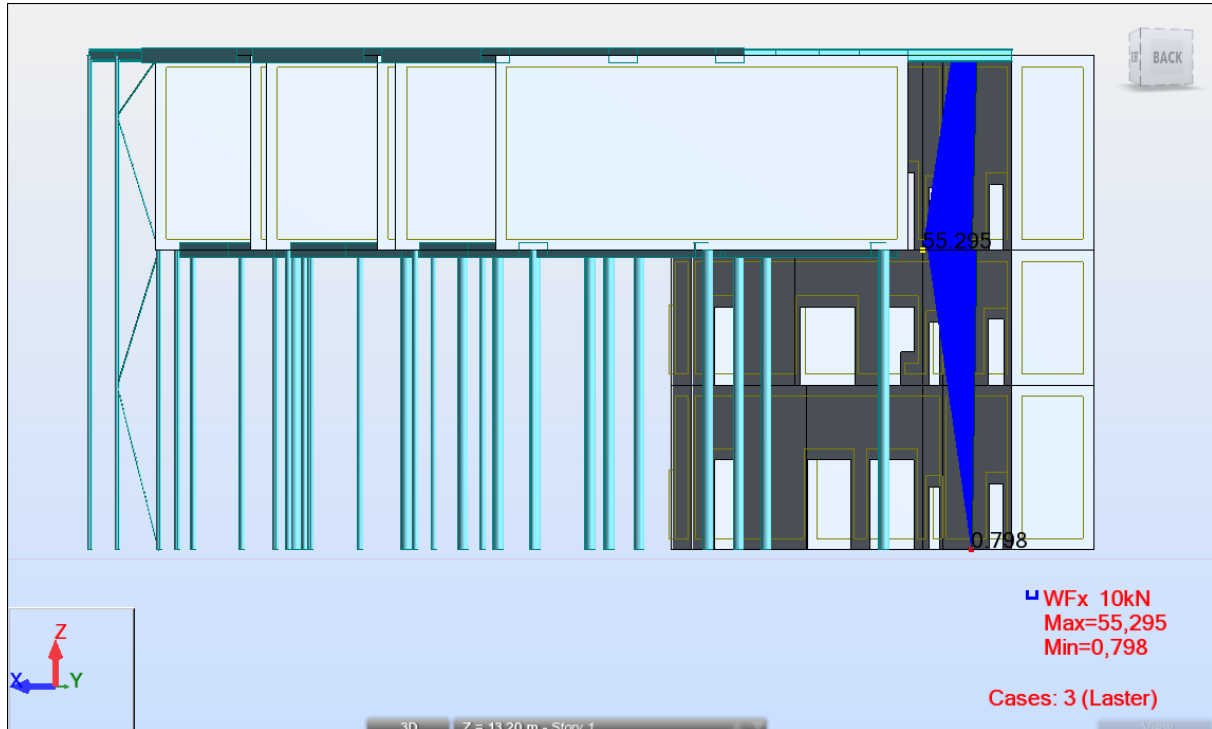
Figur D.5.12: Med «automatisk» elementnett (1 meter gjennomsnittlig elementstørrelse): Moment i y-retning om x-akse (uten utilsiktet eksentrisitet) i Robot



Figur D.5.13: Med «automatisk» elementnett (1 meter gjennomsnittlig elementstørrelse): Torsjonsmoment (uten utilsiktet eksentrisitet) i Robot

## D.6: Robot: «Core walls»

«Core wall» funksjonen i Robot brukes til å definere skiver som tar opp lastvirkningene. Resultatene kan gis i tabellform eller vises grafisk som figuren under viser:



Figur D.6.1: «Core wall» funksjonen i Robot