Universitetet i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master matematikkdidaktikk	Vårsemesteret, 2014 Åpen
Forfatter: Linn Marie Nordbø	………………………………………… (signatur forfatter)
Veileder: Raymond Bjuland	
Tittel på masteroppgaven: Problemløsning i smågrupper på ungdomstrinnet – en studie av elevers problemløsningsstrategier og deres appropriering av ulike medierende verktøy i problemløsningsfasen. Engelsk tittel: Problem solving in collaborative small groups with students from junior high school – a study of student´s problem solving strategies and their appropriating of different mediating tools in the problem solving phase	
Emneord: Problemløsning i smågrupper Grunnskole Medierende verktøy Problemløsningsstrategier	Sidetall: 72 + vedlegg/annet: 106 Stavanger, 16. mai 2014

Forord

Masterstudiet i matematikkdidaktikk har vært som en spennende reise inn i matematikken, didaktikken og forskningen som ligger bak. Nå er en spennende reise kommet til veis ende. Resultatet av reisen er et ferdig produkt i form av en masteroppgave, en oppgave jeg håper kan inspirere andre til videre forskning og arbeid med problemløsning i skolen, for det er nettopp dette denne oppgaven handler om. Allerede første semester på masterstudiet i matematikkdidaktikk ble jeg presentert for problemløsning. Med syv år som lærer på ungdomstrinnet hadde jeg hørt og arbeidet med problemløsning tidligere, men jeg hadde ikke sett alle mulighetene med problemløsning som nå ble presentert. Jeg begynte å arbeide regelmessig med problemløsning i smågrupper med elevene og oppdaget raskt hvor spennende og inspirerende dette var, både for meg som lærer og elevene i klassen. Det var dette arbeidet som dannet grobunnen for det videre arbeidet med problemløsning som nå fremstår som en masterstudie knyttet til problemløsning i smågrupper med elever på 8. trinn.

Først og fremst vil jeg takke min fantastiske familie som har gjort det mulig for meg å fullføre dette studiet. En spesiell takk til min kjære mann som har holdt fortet hjemme alle de sene kveldene og helgene hvor jeg har arbeidet med studier. Takk for at du har vist interesse og engasjement for det arbeidet jeg har gjort, og støttet meg når jeg har gått i motbakke.

Allerede første samling i første semester ble jeg kjent med Aina Lygre, du ble en uvurderlig studievenninne og ikke minst en nær venn. Du gjorde studiet til den spennende reisen dette har vært. Du fikk meg til å strekke meg lenger enn jeg trodde var mulig, og var en uvurderlig støtte når jeg trengte deg som mest.

Jeg vil også rette en stor takk til lærer og elever i klassen jeg observerte, uten dere hadde det ikke vært mulig å gjennomføre studien. Videre ønsker jeg å takke kolleger og ledelse ved Gautesete skole for at dere har hatt troen på arbeidet mitt og lagt til rette for studiene mine.

Sist, men ikke minst, ønsker jeg å takke veilederen min, Raymond Bjuland. Allerede første semester åpnet du døren inn til problemløsningens verden og rokket ved mine faglige overbevisninger. I arbeidet med denne studien har du kommet med konstruktive og konkrete tilbakemeldinger, samt gitt inspirasjon til det videre arbeidet med studien. Ditt arbeid med problemløsning har vært en stor inspirasjon til denne studien, og danner grunnlaget for valgt emne. Takk for alle timene du har investert i arbeidet mitt.

Stavanger, 15. mai 2014

Sammendrag

Dette er en kvalitativ case-studie som omhandler problemløsning i smågrupper med elever fra 8. trinn i en norsk ungdomsskole. Studien belyser elevers bruk av problemløsningsstrategier og medierende verktøy, samt metakognitive ferdigheter knyttet til problemløsning i matematikk.

Studien forsøker å svare på følgende to forskningsspørsmål:

1. Hvilke strategier kan identifiseres når elever på 8. trinn samarbeider om problemløsning i smågrupper?
2. Hvilket utbytte vil elever på 8. trinn kunne ha av økt fokus på problemløsning, problemløsningsstrategier og metakognisjon som medierende verktøy i matematikkundervisningen?

Studiens empiriske materiale bygger på observasjon, semistrukturerte gruppeintervju av elevgruppen før og etter arbeid med problemløsning, intervju av lærer etter endt observasjonsperiode samt innsamling av elevers inskripsjoner.

Det ble i forkant av observasjonsperioden utarbeidet et undervisningsopplegg som lærer kunne benytte seg av ved oppstart av arbeid med problemløsning i klassen. I undervisningsopplegget ble det lagt vekt på elevers arbeid med matematiske problem i smågrupper, men det var også en felles undervisningsøkt for hele klassen ved oppstart, samt en felles oppsummering avslutningsvis. Både felles gjennomgang i hel klasse og arbeid i smågrupper ble observert. Det ble lagt fokus på én gruppe bestående av fem elever når elevene arbeidet i smågrupper.

Studien bygger på et kognitivt og sosiokulturelt læringssyn, der hovedvekten er lagt til det sosiokulturelle læringssynet. Problemløsningsstrategier og metakognitive ferdigheter sees gjerne i lys av et kognitivt læringssyn, der fokus ofte er den enkeltes læring. Hovedfokus i denne oppgaven er elevers arbeid med matematiske problem i smågrupper, og det er derfor naturlig å betrakte problemløsningsstrategier og metakognitive ferdigheter med utgangspunkt i elevgruppa, snarere enn det enkelte individ. Studien ser også nærmere på elevers appropriering av medierende verktøy, der blant annet elevenes inskripsjoner og bruk av strategier i gruppa er eksempler på medierende verktøy.

I lys av et sosiokulturelt læringssyn der samtalen står sentralt, er det foretatt en dialogisk tilnærming til datamaterialet. Her er episoder delt inn i sekvenser som siden er delt inn i mindre enheter slik at man kan indentifisere hvordan elever gjennom ytringer gir uttrykk for matematisk resonnering og forståelse i den gitte konteksten (Bjuland, 2002).

Det teoretiske grunnlaget i oppgaven bygger på ulike problemløsningsmodeller (Borgersen, 1994; Polya, 1945), Schoenfelds (1992) fem kategorier for matematisk tenkning, samt teorier knyttet til medierende verktøy og appropriering av disse.

Studiens analyser viser en sammenheng mellom elevenes bruk av problemløsningsstrategier, hvordan disse approprieres som medierende verktøy i gruppa og fremgang i problemløsningsprosessen. Det ble også observert en merkbar fremgang i hvordan elevene benyttet ulike strategier og medierende verktøy til problemløsning i løpet av de timene som ble observert. Dette kan ha vært tilfeldigheter knyttet til typen problem som elevene arbeidet med. Elevenes dagsform, tidspunkt på dagen og i uka kan også være variabler som spiller inn her. Videre forskning vil derfor være nødvendig for å kunne konkludere noe i denne studien.

Interessante spørsmål til videre forskning vi være hvordan elever og lærere opplever å arbeide med problemløsning, og hvilket utbytte de selv mener at en slik arbeidsform kan føre med seg. Videre vil det også kunne være interessant å se på hvordan regelmessig arbeid med problemløsning i smågrupper kan påvirke elevenes problemløsningsferdigheter på lang sikt.

Innhold

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Det har vært rettet mye kritikk til matematikkfaget i skolen. Både faglig nivå hos elever og hos lærere og lærerstudenter har vært gjenstand for kritikk i media. Mange har selv en negativ opplevelse fra matematikkundervisningen og kan således lett relatere seg til kritikken som blir rettet mot faget. Det er likevel viktig å merke seg at matematikkundervisningen i Norge er i gradvis endring. Tidligere var det større fokus på rutineoppgaver og pugging av algoritmer. Med Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2013) ble det igjen rettet større fokus på grunnleggende ferdigheter, men denne gangen med et litt annet utgangspunkt. Gjennom kunnskapsløftets mål legges det større vekt på forståelse enn at elevene skal følge gitte algoritmer for å komme frem til svaret. Elevene oppfordres til å bruke logisk tankegang når de arbeider.

Problemløsning har siden M87 (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987) hatt en plass i grunnskolens matematikkundervisning. Men synet på problemløsning og problemløsningens plass i grunnskolen har vært varierende. De ulike læreplanene legger opp til ulik praksis knyttet til undervisning og problemløsning. Kunnskapsløftet som er siste læreplan legger opp til grunnleggende ferdigheter i alle fag, der regning betegnes som en av disse. Samtidig ser vi også at problemløsning er noe som vektlegges i læreplanen.

Å drive matematikkundervisning der lærer kun fungerer som en veileder, og ikke som en person som har alle svarene lett tilgjengelig for elevene kan være krevende for både lærer og elever. Dette er en undervisningsform som bryter med den tradisjonelle klasseromsundervisningen og krever at både lærer og elever omstiller seg. Elevene må kunne arbeide systematisk med oppgaver som er langt mer krevende enn det de finner i arbeidsbøkene, noe som krever både økt innsats og engasjement. Ved å la elevene arbeide i par eller i smågrupper vil de ha flere å støtte seg til. Det er i fellesskap at den matematiske samtalen skjer, og gjennom den matematiske samtalen kombinert med bruken av medierende verktøy legges det til rette for læring (Säljö R. , 2001)

Polya (1945) var blant de første som skrev om problemløsning og problemløsningsstrategier slik vi kjenner det i dag. Med utgangspunkt i hans arbeid har flere forskere studert problemløsning i skolen (Bjuland, 2002; Borgersen, 1994; Carlsen, 2009; Mason og Davis, 1991; Schoenfeld, 1992). Flere har utviklet egne problemløsningsmodeller (Borgersen, 1994; Mason og Davis 1991) med utgangspunkt i Polya (1945) sine fire faser for problemløsning. Videre har flere forskere sett på hvilke strategier som brukes når elever arbeider med problemløsning i grupper (Bjuland, 2002; Carlsen, 2009). Mye av forskningen er gjort i forhold til lærerstudenter (Bjuland, 2009; Bjuland, 2004) eller elever i videregående skole (Carlsen, 2009; Schoenfeld 1992)

Å la elevene få mulighet til å arbeide med problemløsning i skolen fører matematikkundervisningen nærmere slik matematikerne arbeider med matematikk (Polya, 1945; Schoenfeld, 1992; Stanic og Kilpatrick, 1989).

Ut ifra et matematikkdidaktisk perspektiv er det interessant å se hvilke strategier elevene tar i bruk når de arbeider med problemløsning. Læreren skal i denne situasjonen fungere som en veileder, noe som forutsetter kunnskaper knyttet til hvordan elevene arbeider og hvilke utfordringer de møter. Ut ifra dette kan det være interessant å se på hvilke strategier elevene tar i bruk når de arbeider med problemløsning. Oppgaven tar utgangspunkt i elever på 8. trinn i norsk grunnskole, fokuset er rettet mot problemløsning i grupper og hvilke strategier elevene tar i bruk når de arbeider med problemløsning.

1.2 Studiens formål

Hensikten med denne studien er å se på elevers arbeid med problemløsning i smågrupper. For å kunne se nærmere på hvordan elevene arbeider med problemløsning har jeg valgt å rette hovedfokus på å identifisere strategier i elevgruppa når de arbeider med problemløsning.

Det er utarbeidet to forskningsspørsmål som danner grunnlaget i studien:

1. Hvilke strategier kan identifiseres når elever på 8. trinn samarbeider om problemløsning i smågrupper?
2. Hvilket utbytte vil elever på 8. trinn kunne ha av økt fokus på problemløsning, problemløsningsstrategier og metakognisjon som medierende verktøy i matematikkundervisningen?

Første forskningsspørsmål er relativt konkret, her ønsker jeg å se nærmere på hvordan elevene arbeider med problemløsning gjennom å identifisere de strategiene som blir brukt.

Forskningsspørsmål nummer to stiller spørsmål til utbytte. Dette er et rimelig vidt begrep, som kan inneholde flere elementer. Når jeg her snakker om utbytte, mener jeg i form av utvikling av matematiske ferdigheter, mer bevisst bruk av strategier og bedret systematisk arbeid med problemløsningsoppgaver. Jeg kommer til å se nærmere på arbeidet elevene gjør med to av de fire problemene elevene arbeidet med. Først ser jeg på hvordan elevene arbeider med første problem, deretter tar jeg utgangspunktet i siste problem. Gjennom å velge første og siste problem som elevene arbeidet med, får jeg størst mulig spenn i tidsaspektet, selv om dette i utgangspunktet er marginalt. Forskningsspørsmålet legger til rette for å lete etter utvikling, noe som i utgangspunktet krever mer tid enn denne oppgavens rammer legger til rette for, det er likevel spennende å se om det er mulig å identifisere små endringer som kan indikere en slik utvikling.

Mange lærere har ulike syn på problemløsning og problemløsningens rolle i matematikkundervisningen (Schoenfeld, 1992; Stanic og Kilpatrick, 1989). Studiens formål forutsetter at undervisningen samsvarer med studiens syn på problemløsning, slik at elevene får mulighet til å arbeide med problemløsning slik det defineres av blant annet Polya (1945) og Schoenfeld (1992). I denne anledning ble det utarbeidet et undervisningsopplegg i forkant av studien, dette undervisningsopplegget var ment som et utgangspunkt som klassens lærer fritt kunne tilpasse slik at det passet til den aktuelle klassen. Med dette undervisningsopplegget som utgangspunkt vil jeg i slutten av oppgaven betrakte pedagogiske implikasjoner.

Forskningsspørsmålene retter fokus mot strategier og metakognitive ferdigheter hos elever som arbeider i smågrupper. I denne anledning vil det også være hensiktsmessig å se nærmere på medierende verktøy og appropriering av disse. Bruken av medierende verktøy kan i enkelte tilfeller sees på som ulike strategier når elevene arbeider i smågrupper, og vil være essensielt for samarbeidet i gruppa.

I forskningsspørsmålene er det brukt begreper som gjerne kjennetegnes av en kognitiv tradisjon og et kognitivt læringssyn. Hensikten med studien er å belyse forskningsspørsmålene ut ifra et kollektivt ståsted, der arbeidet i smågrupper er sentralt. I denne anledning er det ønskelig å se på problemløsningsstrategier og metakognitive ferdigheter på gruppenivå fremfor individnivå. Man kan si at studien derfor kombinerer et kognitivt og sosiokulturelt læringssyn med vekt på det sosiokulturelle læringssynet.

Ut ifra oppgavens omfang har jeg har valgt å begrense studien til én elevgruppe. Som nevnt tidligere har jeg valgt å ha fokus på arbeidet som elevene gjorde med to av problemene de arbeidet med. Dette begrenser oppgavens omfang betydelig, men dette gir samtidig spillerom for å gå dypere inn i arbeidet med de to problemene slik at man får mulighet til å lete etter svar på de aktuelle forskningsspørsmålene uten å gå utover denne oppgavens omfang.

I teoridelen går jeg nærmere inn på Schoenfeld (1992) sin inndeling av fem kategorier for matematisk tenkning. Alle de fem områdene spenner over store tema som i utgangspunktet er egne forskningsområder. I denne anledning har jeg valgt å skrive kortfattet om alle fem områdene, etter som det er områder som bør nevnes. Jeg har likevel valgt å ha et hovedfokus på de områdene som er spesielt relevante for oppgaven og oppgavens forskningsspørsmål.

2 Teoretisk bakgrunn

Jeg vil i dette kapittelet legge frem relevant teori og forskning knyttet til problemstillingen. Kapittelet er delt inn i fire hoveddeler der første del av kapittelet viser en historisk oversikt over tidligere forskning, samt tidligere læreplaner og deres syn på problemløsning. I denne delen bruker jeg Stanic og Kilpatricks (1989) tre kategorier for syn på problemløsning. Andre del av kapittelet omhandler problemløsning og ulike problemløsningsmodeller. Her har jeg brukt Polyas (1945) modell for problemløsning og Borgersens (1994) problemløsningsmodell som eksempler. Tredje handler om matematisk tenkning, her har jeg brukt Schoenfelds (1992) fem kategorier for matematisk tenkning. Siste del av kapittelet omhandler medierende verktøy og appropriering. Appropriering er en fornorsking av det engelske begrepet «appropriation» innenfor det sosiokulturelle læringsperspektivet.

Studien har elementer fra både et kognitivt og sosiokulturelt læringsperspektiv. Hovedfokuset er rettet mot elevers arbeid med problemløsning i smågrupper, der diskurs og metakognisjon brukes som medierende verktøy. Studien legger også vekt på metakognitive ferdigheter, noe som trekker klare linjer til et kognitivt læringssyn. Studiens læringssyn vil derfor være preget av en kombinasjon av disse læringssynene. Det er likevel en hovedvekt på det sosiokulturelle læringssynet, etter som de kognitive begrepene også sees i lys av problemløsningsprosessen i elevgruppa.

Studiens mål er å se på hvordan elever i smågrupper arbeider med problemløsning. I denne sammenheng er det naturlig å trekke frem medierende verktøy og appropriering. Dette er begrep som er sterkt forankret i det sosiokulturelle læringsperspektivet, der læring skjer i samhandling med andre.

2.1 Problemløsning i et historisk perspektiv

Problemløsning har lange røtter i matematikken, i et historisk perspektiv. Ved å studere hvordan ulike matematikere gjennom historien har arbeidet med problemløsning gjennom ulike matematiske problem, får vi kjennskap til viktige aspekter ved selve problemløsningsprosessen.

I moderne tid er det naturlig å nevne Polya, som gjennom sitt arbeid med problemløsning har dannet grunnlaget for mye av den moderne forskningen innen emnet. I 1945 ga han ut boken

«How to solve it; a new aspect of mathematical method.” Her forklarer han ulike trinn som må ligge til grunn for at man skal kunne arbeide med problemløsning. Disse trinnene er siden blitt omtalt som Polyas problemløsningsmodell. Denne modellen vil jeg beskrive mer detaljert i kapittel 2.3.

I skolen kan man, gjennom de ulike læreplanene, få et innblikk i hvilken rolle problemløsning i matematikk har hatt gjennom de siste tiårene. Stanic og Kilpatrick (1989) beskriver tre ulike syn på problemløsning som igjen får konsekvenser for hvordan problemløsning brukes i undervisningen. I lys av Stanic og Kilpatricks (1989) tre syn på problemløsning, vil jeg i løpet av de neste delkapitlene se på ulike læreplaner for matematikk og deres syn på problemløsning.

2.1.1 Problemløsning som kontekst

Ved å bruke problemløsning som kontekst, ser man på problemløsning som et redskap som skal bidra til økt forståelse for bestemte områder innenfor matematikken. Man ser gjerne at problemløsning knyttes til praktiske oppgaver og gjøremål som kan knyttes til dagliglivet. Problemene presenteres gjerne som tekstoppgaver i egne kapitler der man arbeider med «matematikk i dagliglivet» eller lignende (Stanic & Kilpatrick, 1989).

Et slikt syn på problemløsning kan man se igjen fra læreplanen L-97. Denne læreplanen har ikke problemløsning som eget hovedområde som M-87, men man finner igjen elementer fra problemløsning i alle planens hovedområder. Problemløsning blir her brukt som et verktøy for å hjelpe elevene til å forstå matematikken, samt se større sammenhenger og trekke paralleller mellom de ulike områdene innenfor matematikk.

Ved siste læreplan, Kunnskapsløftet, videreføres synet fra L-97, der fokuset er rettet mot problemløsning som kontekst. Kunnskapsløftet definerer fem områder for grunnleggende ferdigheter som skal representeres i alle fag; digitale ferdigheter, muntlige ferdigheter, å kunne lese, å kunne skrive og å kunne regne. Problemløsning inngår som en sentral komponent knyttet til regneferdigheter. Sitatet under viser hvordan problemløsning blir nevnt under i forbindelse med formålet med læreplanen i matematikk:

> Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er.

> Dette har òg språklege aspekt, som det å formidle, samtale om og resonnere omkring idear. (Utdanningsdirektoratet, 2013)

Sitatet over understreker hvor viktig problemløsning og modellering er i forbindelse med matematisk kompetanse. Videre begrunnes dette ut i fra et språklig aspekt der sammenhengen mellom regneferdigheter og språklige ferdigheter knyttes sammen. For å kunne arbeide med problemløsning må man kunne bruke språket aktivt for å kunne formidle, samtale om og resonnere. På den andre siden kan man tolke utsagnet som at man gjennom matematisk problemløsning nettopp får trening i å formidle, samtale om og resonnere rundt ulike idéer.

2.1.2 Problemløsning som ferdighet

Mønsterplanen M74 legger opp til at matematikken skal undervises i en gitt rekkefølge der ulike tema kommer naturlig tidligere i forløpet enn andre tema. Problemløsning er ikke nevnt i denne læreplanen. Først i M87 får problemløsning en egen plass i læreplanen, «Problemløsning er tatt med som eget hovedemne og skal være en del av all matematikkopplæring.» (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987). Problemløsning beskrives som «(…) en prosess med flere ledd (…)» (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987). Videre deles denne prosessen inn i fire deler som har klare likhetstrekk med Polyas problemløsningsmodell. Polyas arbeid med problemløsning viser til et syn på problemløsning som en kunst (Stanic & Kilpatrick, 1989). Selv om M87 trekker frem fire faser i problemløsningsprosessen som kan minne om Polyas problemløsningsmodell, illustrerer dette ulike syn på problemløsningen. Polyas syn representerer synet på problemløsning som en kunst, noe som kanskje ikke helt gjenspeiles i læreplanen. Vi ser her at problemløsning representerer noe elevene skal øves i, og på den måten bli flinke til. Ut i fra dette kan man si at problemløsningen i M87 kan minne om problemløsning som ferdighet. Dette ble også utslagsgivende i lærebøkene som ble produsert i henhold til læreplanen. Undervisningen ble ofte strukturert på en slik måte at hvert av de ti hovedområdene ble behandlet hver for seg. Dette førte også til at problemløsning ble et eget emne, der hovedfokus var at elevene arbeidet med problemløsning, for så å bevege seg videre til et av de andre emnene. Problemløsning ble på denne måten et isolert hovedtema som var fjernet fra resten av matematikken.

2.1.3 problemløsning som kunst

Synet på problemløsning som kunst finner vi blant annet igjen hos Polya (1945), Schoenfeld (1992) og Mason og Davis (1991). Dette synet ser på problemløsning som noe som ikke kan læres bort gjennom fastsatte regler og oppsett. For å mestre problemløsning sett ut i fra dette synet trenger man erfaring. Problemløsning blir her sett på som det øverste nivået av matematikk, det er her den virkelige matematikken blir utøvd (Polya, 1945).

Problemløsning som kunst kommer ikke helt frem i de ulike læreplanene. Det kan være mange årsaker til dette. Å gå nærmere inn på mulige forklaringer og årsaker til dette vil innebære en rekke større undersøkelser og vil derfor strekke seg utenfor denne oppgavens omfang. Jeg har derfor valgt å ikke fokusere på dette i oppgaven.

Kunst kan blant annet defineres slik:

> Kunst i vid betydning står for spesiell ferdighet og dyktighet på vidt forskjellige felter. I snevrere betydning betegner det skapende eller utøvende, tolkende estetisk virksomhet, f.eks. dans, musikk, litteratur, billedkunst. (Store Norske Leksikon, 2009)

Ved å overføre denne definisjonen på kunst til problemløsning ser vi at problemløsning som kunst vil innbefatte en spesiell ferdighet og dyktighet innenfor ulike felter i matematikken. Ved problemløsning kreves det at matematikken brukes på en ny og kreativ måte, ulikt det problemløseren tidligere har erfart. Det er ferdigheter knyttet til å benytte ulik kunnskap innenfor matematikken sammen på en kreativ og fruktbar måte, ulikt de metodene problemløseren kjenner fra før som innehar den kunstneriske dimensjonen. Hvis man går lenger inn i definisjonen ser man at kunst både er skapende, utøvende og tolkende. Dette er elementer som man tydelig finner igjen i ulike problemløsningsmodeller, der det kreves at problemløseren både tolker og analyserer problemet. Videre skaper problemløseren gjennom å utvikle hypoteser på bakgrunn av kunnskap og ferdigheter knyttet sammen på en ny og utradisjonell måte, samt utøvende i den forstand at man utfører planer og iverksetter strategier som igjen fører til nye hypoteser, løsninger og bevis.

Et viktig kriterium for et matematisk problem, sett ut ifra dette synet på problemløsning er at metoden for å løse problemet ikke allerede er kjent for problemløseren (Mason og Davis, 1991;

Schoenfeld, 1992). Dette krever en kreativitet og oppfinnsomhet kombinert med kunnskaper som problemløseren selv må administrere for å komme videre med problemet.

Med bakgrunn i teorien vil også denne oppgaven forsøke å fokusere på problemløsning som kunst.

2.2 Sentrale kjennetegn ved problemløsning og problemløsningsoppgaver

Problemløsning som begrep er ikke nødvendigvis entydig. Ifølge Schoenfeld (1992) har begrepet problemløsning vært brukt til alt fra øvingsoppgaver til å arbeide med mer «profesjonelle» matematiske oppgaver. I tillegg har ofte problemløsningsoppgaver blitt brukt synonymt med tekstoppgaver (Björkqvist, 2007). Mason og Davis (1991) beskriver problemløsningsoppgaver i matematikk som en oppgave der personen som skal løse oppgaven ikke umiddelbart vet hvordan denne kan løses. Dette innebærer at nesten hvilken som helst matematikkoppgave kan være et matematisk problem. Det er altså ikke oppgaven i seg selv som danner kriteriet for hvorvidt det dreier seg om en problemløsningsoppgave eller ikke, men hvem oppgaven presenteres for. Et annet kriteria som må ligge til grunn for at en oppgave skal kunne karakteriseres som problemløsning er at oppgaven må engasjere (Mason og Davis, 1991; Schoenfeld, 1992). Björkqvist (2007) understreker nødvendigheten av at problemløseren opplever et eierforhold til det matematiske problemet. I en slik situasjon vil ofte problemløseren drives av indre motivasjon og arbeidet med problemet kan på mange måter sammenlignes med arbeidet til den viderekomne matematikeren (Björkqvist, 2007). Med tanke på at det som oftest er læreren som legger frem problemene, kan dette ved første øyekast virke vanskelig å få til, spesielt med en elevgruppe på opptil 30 elever. I en slik sammenheng kan det være hensiktsmessig å snakke om åpne oppgaver. Det vil si oppgaver som ikke klart legger frem hva som skal gjøres eller løses. Ved hjelp av slike problem inviteres elevene til selv å begrense problemet samt å være med på å legge premissene for hva problemet innebærer (Björkqvist, 2007). Gjennom en slik tilpasning av problemet vil det være mulig for alle elevene i klassen, uavhengig av nivå, å arbeide med samme oppgavetekst, men de vil mest sannsynlig ende opp med å utarbeide ulike problem.

Problemløsning handler om mer enn bare definisjon av oppgaver, også selve problemløsningsprosessen er viktig. Det er i løpet av denne prosessen at læringen skjer. Å arbeide systematisk og reflektert med en problemløsningsoppgave er like viktig som selve løsningen i seg selv. Polya (1945) var blant de første som utarbeidet en modell for problemløsning. Senere har også flere andre forskere laget lignende modeller. Et eksempel på dette er Borgersen (1994). Borgersens problemløsningsmodell bygger på Polya (1945) sine fire faser for problemløsning, men fasene er ytterligere delt opp slik at modellen består av syv trinn, man kan med andre ord si at dette er en utvidelse av Polyas problemløsningsmodell.

I oppgaven har jeg valgt å bruke Borgersens (1994) problemløsingsmodell. Denne modellen er også presentert for elevene i studien. Det kan derfor være hensiktsmessig å gå litt nærmere inn på hva denne modellen dreier seg om. Som allerede nevnt bygger denne modellen på Polyas (1945) problemløsningsmodell, noe som også gjør denne modellen interessant. Jeg har derfor valgt å utdype de to modellene noe.

Polya (1945) forklarer hva problemløsning er, og deler problemløsningsprosessen inn i fire faser (Polya, 1945):

1. Forstå problemet
2. Legg en plan
3. Gjennomfør planen
4. Se tilbake

Første punkt handler om å analysere og forstå selve problemet. Hvilke opplysninger blir gitt i problemet, og om det er nødvendig med flere opplysninger eller betingelser for å løse problemet. I denne fasen er det avgjørende at problemløseren forstår ulike begreper og skrivemåter som fremgår av selve oppgaveteksten. Gjennom å lage en modell av problemet kan det være lettere å forstå hva problemet egentlig innebærer.

Det kan virke selvsagt at man må forstå problemet før man kan gå videre med å løse problemet, men faktum er at mange elever går i gang med problemet før de i det hele tatt har lest hele problemet, eller satt seg tilstrekkelig inn i problemet. Gjennom å understreke nødvendigheten av å forstå problemet, vil også elever som arbeider med problemløsning være mer bevisst på denne fasen (Mason & Davis, 1991, s. 37).

Andre punkt handler om å bestemme seg for hvordan man ønsker å løse problemet. Hvilke metoder og strategier vil være hensiktsmessige i forhold til problemets egenart. Hvis problemløseren har arbeidet med lignende problem tidligere kan kanskje samme- eller en lignende fremgangsmåte fungere. Kanskje er det deler av problemet som lettere lar seg løse enn andre deler, da kan det være hensiktsmessig å starte der. Kanskje vil delene av problemet som virker vanskeligere å identifisere virke lettere når man kommer i gang med problemet. I følge Mason og Davis (1991) bruker elever liten tid i denne fasen, og før man vet ordet av det har man allerede startet på neste punkt i problemløsningsmodellen; å gjennomføre det man har planlagt. Likevel ser man ofte at elever bestemmer seg for en fremgangsmåte, uten å vurdere andre metoder. I slike tilfeller risikerer man å gå overse metoder som kanskje kunne vært mer effektive, eller oppdage at fremgangsmåten man har bestemt seg for kanskje ikke vil føre til løsning av problemet (Mason & Davis, 1991).

Punkt tre utgjør selve gjennomføringen. Dette kan kanskje virke selvsagt, men i løpet av denne fasen er det fort gjort å «gå seg vill». Man glemmer hva man egentlig hadde tenkt å gjøre og fortsetter i en annen kurs enn det manført hadde tenkt. Ved å ha reflektert over selve gjennomføringen vil man da være mer bevisst over det man gjør, og på den måten minske risikoen for at man sporer av underveis uten at dette er tiltenkt.

Punkt fire handler om kontroll. Her skal problemløseren se gjennom det som er gjort og kontrollere at dette er gjort riktig. I denne fasen skal også problemløseren kunne utvikle bevis for at svarene man har kommet frem til er riktige.

Polyas problemløsningsmodell er ikke laget som en mal for hvordan problemløsning bør gjøres, men den skal bidra til å bevisstgjøre problemløseren over hvilke faser som inngår i problemløsning slik at problemløseren lettere kan strukturer arbeidet sitt (Mason & Davis, 1991). Videre kan det være hensiktsmessig å nevne at dette, i likhet med de fleste modeller for problemløsning, er en syklisk modell der problemløseren forflytter seg mellom fasene uavhengig av rekkefølgen de er nevnt. Man kan for eksempel veksle mellom planlegging og gjennomføring, for så å hoppe over til å forstå selve problemet for til slutt se tilbake.

Borgersens (1994) modell er, i likhet med, Polyas (1945) modell en syklisk modell. Modellen består av syv trinn:

1. Analysere og definere
2. Lage modell eller tegning
3. Kvalifisert gjetning gjennom prøving og feiling

4. Lage hypoteser
5. Utarbeide bevis
6. Se tilbake og reflektere og løsning og løsningsprosess
7. Generalisere og lage nye problem

Første trinn består av å analysere og definere. Forstår vi hva problemet er? Vet vi hva som skal undersøkes? Forstår vi alle ordene? Er det noe som er uklart, eller noe som trengs å defineres.

Modellerere eller tegne er neste trinn. Å kunne lage en modell av problemet, eller lage hjelpetegninger for å visualisere problemet vil være en viktig del av problemløsningen. Dette trinnet kan også bidra til å tydeliggjøre analysen av problemet.

Kvalifisert gjetning gjennom prøving og feiling utgjør trinn tre. Gjennom dette trinnet vil problemløseren få mulighet til å utforske problemet ytterligere. Her kan det være gunstig å bruke en modell som tydeligere viser ulike innfallsvinkler som bør utforskes nærmere ved hjelp av prøving og feiling.

Trinn fire består i å utvikle hypoteser. Gjennom prøving og feiling finner man gjerne mønster og idéer som kan være grobunn for hypoteser. Det er nå tid for å konsentrere seg om matematikken. På denne måten kan man arbeide mot å lage en generell løsning. Det er likevel viktig å presisere at det fremdeles kun er snakk om kvalifisert gjetning.

Etter at man har arbeidet med hypotesen(e) vil det være naturlig å forsøke å finne bevis for at hypotesen(e) er riktige. Dette er et trinn som kan kreve mye arbeid og man må gjerne gå tilbake til tidligere trinn for å se på problemet pånytt. I enkelte tilfeller vil man oppleve at man står fast og ikke kommer videre, det kan da være hensiktsmessig å legge problemet fra seg en tid for så å ta det frem på et senere tidspunkt. Enkelte ganger må man kanskje legge fra seg problemet flere ganger før man eventuelt kommer videre. Det er også viktig å merke seg at ikke alle problemer kan bevises, og at problemløseren derfor bør verdsette hele prosessen med problemløsning, ikke bare den delen der løsning og bevis er i fokus (Borgersen, 1994; Mason og Davis, 1991; Schoenfeld, 1992)

Gjennom å se tilbake vil man kunne knytte den generelle løsningen til det aktuelle problemet. Man får en bekreftelse på at løsningen samsvarer med det som er problemet, samt at vi får en oversikt over hva vi har gjort gjennom hele prosessen. Gjennom refleksjonen vil man kunne se tilbake og vurdere de valgene som ble gjort underveis, samt vurdere hva som var bra, og hvorfor enkelte elementer ble vanskelige.

Siste trinn vil være å lage en generell løsning. Til slutt er det problemløseren selv som videreutvikler problemet ved å stille nye spørsmål som igjen genererer nye problem. Dette er med på å skape et eierskap til problemet, noe som ifølge Mason og Davis (1991) er et av kriteriene som bør være oppfylt for å kunne karakterisere en oppgave som et matematisk problem.

2.3 En teoretisk forståelsesramme for matematisk tenkning

For å kunne drive med problemløsning, er den matematiske tenkningen essensiell. Matematisk tenkning inneholder flere ulike aspekter, og omfatter flere områder. Ulike forskere velger derfor å definere den matematiske tenkningen ut i fra ulike kategorier. På tross av dette kan man finne en viss konsensus blant forskere for at matematisk tenkning består av følgende fem elementer (Schoenfeld A. , 1992, s. 348):

1. Kunnskapsdatabase
2. Problemløsningsstrategier
3. Kontroll og monitorering
4. Oppfatninger og følelser
5. Praksis

Kunnskapsdatabasen representerer det man allerede har i minnet. Dette er ferdigheter og kunnskap som allerede ligger lagret og som man lett kan hente frem og anvende. For å løse et matematisk problem, trenger man en viss «kunnskapspakke». Ethvert problem krever at man han en viss basiskunnskap i bunn for å kunne komme videre, det er denne basiskunnskapen som danner kunnskapsdatabasen.

Det er viktig å merke seg at denne kunnskapsdatabasen innbefatter alt eleven har av kunnskaper, dette inkluderer også misoppfatninger og kunnskap som er feilaktig memorert (Schoenfeld A. , 1992).

På samme måte som man kan si at ulike problem krever ulike strategier, kan man også si at ulike elever tar i bruk ulike strategier. Eksempler på strategier kan være prøving og feiling, der elevene forsøker, gjennom kvalifisert gjetning å komme frem til hypoteser som de senere må forsøke å bevise eller motbevise. Elevene kan tegne/lage modeller, forsøke å finne mønster eller komme frem til hypoteser ved hjelp av logisk resonnement.

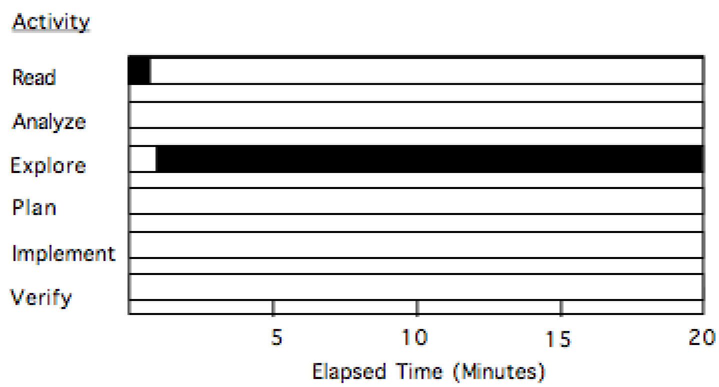
Elevene vil, gjennom arbeid med problemløsning, utvikle et større repertoar av problemløsningsstrategier etter hvert som de får mer erfaring med ulike typer problem. Polya (1945) understreker at man ikke kan drille elevene i en bestemt form for problemløsningsstrategi knyttet opp mot en bestemt type oppgaver. Dette vil da ikke lenger betraktes som en problemløsningsstrategi, men snarere som en algoritme for å løse en bestemt type oppgaver.

Kontroll og monitorering er punkt som faller inn under kategorien metakognisjon. Under dette punktet er det også naturlig å nevne selv-regulering (Schoenfeld A. , 1992).

Et eksempel på monitorering eller selv-regulering kan identifiseres når man i løpet av problemløsningsprosessen går tilbake til det opprinnelige problemet for å kontrollere at man har forstått problemet riktig, eller at man går tilbake for å sjekke at man har tatt de riktige avgjørelsene og foretatt de riktige beregningene for å komme videre med problemet (Schoenfeld A. , 1992).

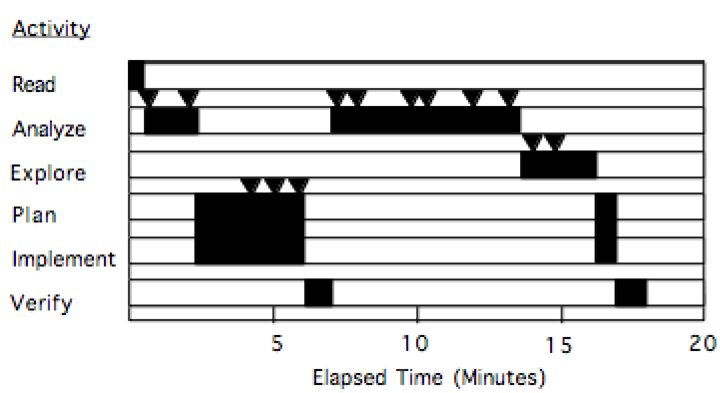
Metakognitive ferdigheter kan forklares som kunnskap om egen læring. Dette innebærer blant annet kunnskap om hvordan en selv lærer best og hvilke ferdigheter en mestrer bedre enn andre ferdigheter. En elev kan for eksempel vite at han er flinkere i matematikk enn i kroppsøving (Flavell, 1979).

Schoenfeld (1992) beskriver hvordan elever som ikke har erfaring med problemløsning arbeider med matematiske problem kontra hvordan en profesjonell matematiker arbeider. Han tar her utgangspunkt i hvilke strategier elevene og matematikeren bruker, for så å sette dette opp i ulike tabeller.



Figur 1: Oversikt over hvordan en person uten nevneverdig erfaring med problemløsning arbeider med et matematisk problem. (Schoenfeld A. , 1992)

Figuren viser hvordan en stor andel av elevene arbeider med problemløsning gjennom å først lese raskt gjennom problemet for så å bestemme seg for en metode de tror er riktig. Elevene fortsetter å holde fast ved denne metoden, selv om de ikke kommer frem til et svar. Schoenfeld (1992) forklarer at dette ikke nødvendigvis er en fremgangsmåte som lærere selv observerer ofte i klasserommet, dette forklarer han med at elever ofte arbeider med rutineoppgaver der fremgangsmåten allerede er bestemt på forhånd. I møte med problemløsning må elevene selv ta velge hvilke fremgangsmåter de ønsker å ta i bruk, og problemet er ikke lenger like entydig som rutineoppgavene. Videre forklarer Schoenfeld (1992)at denne fremgangsmåten ble brukt av omtrent 16% av elevene i datasettet. Dette er en metode som, nesten uten unntak, ikke fører til en løsning.

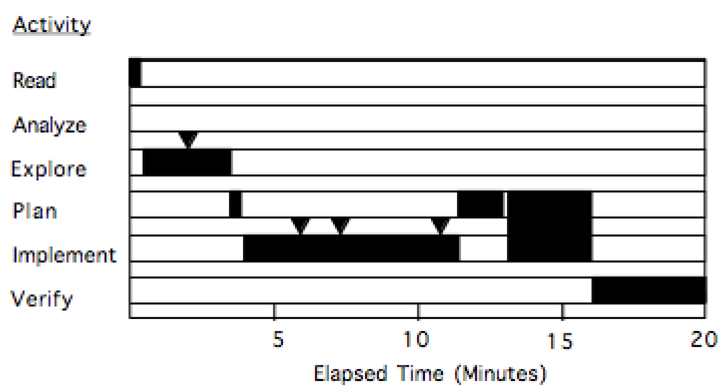


Figur 2: Oversikt over hvordan en matematiker arbeider med et matematisk problem (Schoenfeld A. , 1992)

Figuren over viser hvordan en matematiker arbeider med et matematisk problem. Ut i fra figuren kan vi se at det blir brukt betraktelig mindre tid til å utforsking, og at selv utforskingen skjer på et mye senere tidspunkt. Det neste som skiller de to løsningsmetodene fra hverandre er at matematikeren bruker betraktelig lenger tid til å analysere problemet. Trekantene som er skissert over ulike faser indikerer hvor matematikeren sier noe om selve løsningsprosessen knyttet til det aktuelle problemet.

Schoenfeld (1992) forklarer at de fleste elever ikke er klar over hvordan de skal gå frem når de arbeider med et matematematisk problem. Han forklarer videre at man, gjennom metakognitive ferdigheter og veiledning, kan hjelpe elevene til selv å bli bevisst på hvordan de bør gå frem når de arbeider med problemløsning.

Læreren som veileder bør da stille monitorerende spørsmål som hjelper elevene å tenke gjennom hva de gjør og hvorfor de gjør akkurat dette. Gjennom å stille slike spørsmål vil elevene selv etter hvert utvikle ferdigheter i forhold til selvmonitorering.



Figur 3: Oversikt over hvordan elever arbeider med matematiske problem etter at de har gjennomgått problemløsningskurs med fokus på monitorering (Schoenfeld A. , 1992)

Figuren over viser hvordan en gruppe elever arbeidet med problemløsning etter at de hadde fullført et kurs i problemløsning der læreren veiledet elevene gjennom å stille monitorerende spørsmål. Etter hvert som elevene forsto at dette var spørsmål de måtte forsøke å svare på i forhold til læreren, begynte de etter hvert selv å stille de samme spørsmålene til seg selv slik at de kunne være forberedt når læreren kom til dem. Figuren viser tydelige endringer i fra første figur der elevene stort sett forsøkte seg på prøving og feiling, uten egentlig å reflektere over hvorfor det gjorde det de gjorde. Vi ser også at elevene etter endt kurs stilte flere monitorerende spørsmål eller reflekterte over arbeidet de drev med sammenlignet med tidligere.

Det kan være vanskelig å undervise i metakognitive ferdigheter isolert sett. Metakognitive ferdigheter er likevel noe som er tett vevd sammen med problemløsning i matematikk. De blir derfor en naturlig del av problemløsningsprosessen og lærerens oppgave blir å hjelpe elevene til å bli bevisst på dette. I forbindelse med metakognisjon er det naturlig å snakke om strategier. Polya (1945) beskriver blant annet en rekke strategier som kan brukes i forbindelse med ulike typer problem. Disse beskrivelsene er siden blitt kritisert nettopp fordi de er deskriptive (Mason & Davis, 1991, Schoenfeld, 1992).

Ved arbeid i smågrupper vil elevene kunne stille monitorerende spørsmål til hverandres teorier og gruppas arbeid og fremgang. På denne måten får elever mulighet til å argumentere for egne og andres forståelse, sette ord på det de tenker og forsøke å sette tanker og idéer inn i en matematisk kontekst (Bjuland 2002, 2007a, 2012; Carlsen 2008, 2010)

Fjerde kategori omhandler oppfatninger og følelser, dette er et stort forskningsfelt, og det vil være vanskelig å gå dypt inn i dette feltet innenfor de rammene som ligger til grunn for denne oppgaven. Etter som dette likevel er en del av Schoenfeld (1992) sine fem kategorier for matematisk tenkning, har jeg likevel valgt å, i korthet, skrive litt om hvordan oppfatninger og følelser spiller en sentrale rolle for den matematiske tenkningen.

Schoenfeld og Spring (i Schoenfeld 1989) beskriver hvordan elever gjennom tolvårig skolegang har arbeidet med tusenvis av matematiske «problem» som i bunn og grunn har vært rutineoppgaver. Elevene har, på forhånd, blitt gitt en fremgangsmåte for hvordan disse oppgavene skal løses, for så å sette i gang med å løse dusinvis av oppgaver som krever samme fremgangsmåte. Dette gir et inntrykk av at elevene mestrer en viss oppgavetype så sant den kan løses innenfor en viss tidsramme. Oppgaver som krever lenger tid, slik som problemløsningsoppgaver der fremgangsmåten ikke er kjent for elevene på forhånd, vil derfor komme inn under kategorien oppgaver som elevene ikke mestrer. Man ser her at tidsaspektet i forbindelse med løsningsprosessen blir en målestokk for hvorvidt elevene opplever mestring.

Schoenfeld understreker også at lærerens oppfatninger spiller en sentral rolle, både for praksis og for hvordan elever utvikler oppfatninger knyttet til faget. Studier gjort av blant annet Leatham (2006) og Skott (2001) bekrefter at lærerens oppfatninger spiller en rolle i forhold til praksis i klasserommet.

Vi ser her at både oppfatninger og tidligere erfaringer spiller en rolle når elevene møter problemløsning. Dette er momenter som er viktig å merke seg. Gjennom bevisstgjøring kan elevene bli bevisste dette slik at de kan kjenne igjen tankemønstre og følelser knyttet til ulike oppgaver (Flavell, 1979).

Lampert (1990) beskriver hvordan undervisningspraksis reflekterer både læreres og elevers oppfatninger knyttet til matematisk tenkning. Hun beskriver et klasserom der svaret ikke er det viktigste, men prosessen og tankene som ligger bak resonnementet. Gjennom å oppfordre elever til å delta i matematisk diskurs sammen med medelever eller lærere, vil man kunne utvikle et syn på matematisk tenkning som oppfordrer til induktiv læring. Polya (1954 i Lampert,1990) fremhever tre «moralske kvaliteter» som kreves for å gjøre matematikk: Intelligent mot, intelligent ærlighet og vis tilbakeholdenhet. Disse tre egenskapene gjenspeiler en praksis der man skal ha mot til å prøve noe nytt og være villig til å endre våre oppfatninger dersom det er en god grunn for det, men likevel ikke være ukritiske.

Praksis henger nøye sammen med undervisningskunnskap og undervisningskvalitet. Ball, Hill og Bass (2005) definerer dette som spesiell fagkunnskap. Dette er en dybdekunnskap som blant annet innbefatter kunnskaper om hvordan matematikk best kan undervises. Studien viste klar sammenheng mellom lærers spesielle fagkunnskaper og elevers prestasjoner i matematikk. Schoenfeld (1992) og Lampert (1990) fremhever blant annet undring som en viktig komponent for matematisk tenkning.

Gjennom Schoenfelds (1992) fem faser for matematisk tenkning ser vi hvordan metakognisjon og individuelle tankeprosesser er essensielle for den matematiske tenkningen. Vi ser også at denne tankegangen er avhengig av den sosiale dimensjonen der den matematiske diskursen spiller en sentral rolle. Lampert (1990) viser hvilken rolle den matematiske diskursen kan ha som et medierende verktøy. Lampert (1990) viser til hvordan elever på femte trinn var i stand til sammen å komme frem til hvilket tall som ville bli siste siffer i ulike kvadrattall. Schoenfeld (1992) understreker også nødvendigheten av den matematiske diskursen i klasserommet, samt det å skape en spørrende atmosfære der det legges til rette for undring og begeistring i matematikkfaget. Dette er elementer som er vanskeligere å få til gjennom individuelt arbeid der hver elev arbeider for seg selv siden den sosiale rammen for læring hjelper elevene til å utvikle forståelse sammen

Teoriene som har blitt presentert i dette delkapittelet og foregående delkapittel passer hovedsakelig inn under et kognitivt læringssyn, der fokus i hovedsak rettes mot læring hos det enkelte individ. Etter som fokus er på gruppenivå, vil disse teoriene bli behandlet ut fra diskusjonen og problemløsningsprosessen som foregår kollektivt i gruppa.

2.4 Problemløsning i smågrupper

Resnick i Shoenfeld (1992) fremhever problemløsning og tenking generelt som en sosial prosess. Synet på matematikk og matematisk tenkning som sosiale prosesser får også konsekvenser for matematikkundervisningen som følgelig bør struktureres i henhold til den kunnskapen og de oppfatningene som ligger til grunn. Man ser blant annet at matematikkundervisningen sakte omstruktureres slik at matematikk kan læres sammen med andre. Vi ser gjerne at der det tidligere var enighet om at oppgavene skulle løses individuelt, er det nå en voksende forståelse for at også matematisk tenkning gjøres best sammen med andre. Dette gir godt grunnlag for blant annet problemløsning i smågrupper der elevene får mulighet til å tenke sammen.

Med smågrupper menes elevgrupper bestående av 3-5 elever. En slik organisering gir rom for diskusjon mellom elevene. Det kan være hensiktsmessig at elevene er på samme faglige nivå. Med dette menes at elevene i gruppa skiller fra middels til høyt nivå eller fra lagt til middels faglig nivå i matematikk (Bjuland, 2002). Det advares likevel mot å danne grupper basert kun ut i fra faglig nivå, også elevers personlighet og erfaring knyttet matematikk bør spille en rolle (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012)

Problemløsning i smågrupper krever at elevene selv er aktive deltakere. Gjennom diskusjon knyttet til problemet vil de kunne bidra med ulike perspektiver og kunne sette ord på tanker og vansker som de støter på i løpet av prosessen. Elevene vil kunne dra utbytte fra hverandres styrker og svakheter, samt at diskusjonen vil kunne bidra til nye oppdagelser knyttet til problemet de arbeider med (Bjuland, 2012; Carlsen, 2009; Carlsen, 2010)

Arbeid i smågrupper sees i lys av et sosiokulturelt læringssyn, der medierende verktøy spiller en sentral rolle for læring. Medierende verktøy kan være alt fra kulturelle verktøy som tekstbøker, skrivebøker, matematiske symboler, ulike kalkulatorer eller elevenes egne inskripsjoner (Carlsen, 2008). Säljö (2005) sier at læring handler om hvordan mennesker drar nytte av hensiktsmessige verktøy og handlinger i en sosial setting. Det er gjennom denne nyttiggjøringen at vi blir sosiale vesener. Säljö (2005) forklarer videre at medierende verktøy kan både være andre mennesker og gjenstander. Vi ser her at de medierende verktøyene genererer aktivitet slik at de blir et redskap for tankeprosesser.

Inskripsjoner kan sees på som skriftlige tegninger og modeller som elevene konstruerer i forbindelse med problemløsningen (Carlsen, 2009). I studien er både modellering og inskripsjoner nevnt. Modellering kan være i form av inskripsjoner, men det kan også være i form av praktisk gjennomføring av problemet eller andre representasjoner. Bruken av inskripsjoner som medierende verktøy kan hjelpe elevene til å lettere forstå problemet, og i enkelte tilfeller føre direkte til løsning og bevis (Arcavi, 2003).

Carlsen (2008) beskriver bruken av medierende verktøy som relasjoner mellom tre vitale komponenter; subjekt, objekt og medierende verktøy. Subjektet er her eleven, objektet er det matematiske problemet og de medierende verktøyene er redskaper som er med på å knytte subjekt og objekt sammen.

Vygotsky (1978) snakker om den proksimale utviklingssonen. Dette er sonen som ligger utenfor det en person kan klare alene. For å nå ut i den proksimale sonen trenger man medierende verktøy. Eksempler på dette kan være problemløsning i smågrupper der medelevene fungerer som medierende verktøy for hverandre. Andre elementer kan være kulturelle verktøy som problemløsningsbøker der de noterer ned tanker og refleksjoner parallelt med problemløsningsarbeidet.

Et synonym til mediering er mekling (Mediering, 2014) Ved å bruke ordet meklende verktøy ser vi tydeligere hvordan disse redskapene fungerer som meklende redskaper mellom eleven og det matematiske problemet. Dette er med andre ord verktøy som bidrar til å organisere og aktivere tankeprosesser som igjen kan omdannes til kunnskap og læring hos det enkelte individ.

Innenfor et sosiokulturelt læringssyn kan man se at begrepet appropriering innebærer mer enn det som defineres i ordbøkene. Moschkovich (2004) definerer begrepet slik:

> Appropriation involves joint productive activity, a shared focus of attention, and shared meanings (Rogoff, 1990). Appropriation also involves taking what someone else produces during joint activity for one's own use in subsequent productive activity while using new meanings for words, new perspectives, and new goals and actions. (side 51)

Vi ser her at appropriering er sentralt for den matematiske tenkningen i gruppa. Gjennom appropriering vil elevene være i stand til å dra nytte av hverandres idéer og videreutvikle disse gjennom å trekke inn nye perspektiver til løsningsprosessen. For at elevene skal kunne approprieres i gruppa, er det nødvendig at de har samme fokus og delt forståelse for arbeidet. Elever som er på samme faglige nivå, eksempelvis lavt/middels eller middels/høyt vil da kunne arbeide med problemløsningsoppgaver med en felles enighet om fokus og delt forståelse. Ut i fra dette kan vi si at appropriering også innebærer samhandling og interaksjon, både i forhold til elevene i gruppa, men også i forhold til medierende verktøy.

Carlsen (2008) legger fire betingelser til grunn for at elever skal kunne appropriere kulturelle og medierende verktøy:

> Student appropriation of cultural tools is dependent on five sociocultural aspects: involvement in joint activity, shared focus of attention, shared meanings for utterances, transforming actions and utterances and use of pre-existing cultural knowledge from the classroom in small-group problem solving. (side 95)

Carlsen (2008) sier videre at denne approprieringen skjer gjennom en gradvis prosess:

> A basic assumption here is that individuals do not immediately appropriate the full and exact meanings of concepts or cultural tools. Rather, they appropriate aspects of the concepts and the problem-solving approaches within particular mathematical practices in which they interact with artefacts and other people. The process of appropriating concepts and tools is not straightforward, but partial and gradual. (side 97)

Etter hvert som elevene approprierer mer av meningen bak begrepet og de medierende verktøyene vil de være i stand til å hjelpe de andre elevene videre. Vi ser da at elevene på gruppa sammen bidrar til å utvikle en felles forståelse for arbeidet de gjør, verktøyene de bruker og problemets karakter. For å få til dette er samhandling essensielt.

Et viktig medierende verktøy er diskursen som foregår i elevgruppa. Det er her tanker blir presentert for medelever, og det er gjennom diskusjonen at forståelsen for problemet utvikles. Det er også gjennom elevenes diskurs at det er mulig å identifisere ulike strategier som blir tatt i bruk.

Appropriering og medierende verktøy er nært knyttet sammen. På den ene siden ser vi at medierende verktøy er med på å bygge bro mellom elever og fagstoff På den andre siden er det viktig at elevene på gruppa har en delt forståelse for hva de arbeider med, samt at de har en felles forståelse for hvilken rolle medierende verktøy skal ha i løsningsprosessen. En kollektiv oppfatning av både problemet, språket, og andre medierende verktøy dannes gjennom samhandling mellom elevene på gruppa slik at de gjennom tilbakemeldinger gir uttrykk for egen forståelse, samt at dette gjør det mulig for resten av elevene på gruppa å få innsikt i hvordan den enkelte elev forstår problemet og elementene rundt. Det dannes da en dynamisk prosess der meningsskapende og –bærende elementer er i fokus for å kunne komme videre i lærings- og løsningsprosessen.

3 Metodisk tilnærming

Denne studien er et kvalitativt case studie som hovedsakelig bygger på et sosiokulturelt læringsperspektiv. For å forsøke å svare på spørsmålene har jeg foretatt klasseromsobservasjoner og gjennomført semistrukturerte intervjuer med lærer og elever der elevene var samlet i gruppa. I dette kapittelet vil jeg forsøke å begrunne metodevalg. Videre vil jeg redegjøre for innsamling av data, utvalg samt drøfte styrker og svakheter med det samlede datamaterialet.

3.1 Metodevalg

Målet med denne oppgaven var å se hvilket utbytte elever kan ha av økt fokus på problemløsning og metakognisjon i matematikkundervisningen. For å gjøre dette målbart var det hensiktsmessig å ta utgangspunkt i elementer som kunne observeres, i dette tilfellet hvilke strategier som kunne identifiseres gjennom elevenes arbeid med problemløsning og metakognisjon. Til slutt ønsket jeg også å se nærmere på hvordan en slik arbeidsmetode burde implementeres i matematikkundervisningen.

Med bakgrunn i studiens problemstilling er det foretatt en kvalitativ case-studie. Begrunnelsen for å velge kvalitativ metode fremfor kvantitativ metode er i dette tilfellet problemstillingens karakter og studiens tidsramme (Yin, 2014).

«Svært forenklet kan man si at kvalitative metoder forholder seg til data i form av tekster, lyd og bilde og legger vekt på fortolkning av dataene, mens kvantitative metoder forholder seg til data i form av kategoriserte fenomener og legger vekt på opptelling og utbredelse av fenomenene.» (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2010, s. 99)

En kvalitativ studie kan være hensiktsmessig hvis man ønsker å komme nærme inn på de fenomenene man ønsker å undersøke, mens en kvantitativ studie gjerne har større fokus på hvor ofte enkelte fenomener forekommer i en gitt situasjon (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2010; Yin, 2014)

3.2 Oversikt over studiens datagrunnlag.

Studiens grunnlag bygger på observasjon av en elevgruppe bestående av fem elever, samt elev- og lærerintervju, der elevintervjuene ble gjennomført i gruppe, i tillegg ble også elevenes arbeidsbøker samlet inn for å supplere observasjonen.

Tabellen under viser en mer strukturert oversikt over det innsamlede materialet:

Tabell 1: Oversikt over innsamlet empirisk materiale.

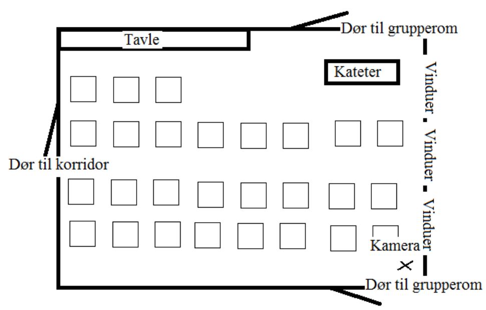
Tidspunkt	Hva	Hvilken form
Før observasjonen:	Samtale med lærer	Utenom undervisning
	Intervju med elevgruppe	Gruppe
1. time observasjon	Håndtrykksoppgaven, elevene arbeider i grupper	Gruppe
2. time observasjon	Introduksjon til problemløsning	Hel klasse
3.-5. time observasjon	Elevene arbeider med problemløsningsoppgaver i grupper	Gruppe
6. time	Oppsummering	Hel klasse
Etter observasjonen:	Intervju med elevgruppe	Gruppe
	Innsamling av problemløsningsbøker	Utenom undervisning
	Intervju med lærer	Utenom undervisning

3.3 Observasjon

Observasjonene som er gjort, er foretatt på 8. trinn på en ungdomsskole på Vestlandet. Klassen besto av 27 elever, hvorav to av elevene hadde individuell opplæringsplan i matematikk. Alle elevene deltok i arbeidet med problemløsning uavhengig av nivå og opplæringsplan.

Hoveddelen av det innsamlede materialet bygger på videoobservasjon, hvorav en stor andel av observasjonene er av en elevgruppe bestående av fem elever. Det ble totalt observert i seks undervisningstimer à 45 minutter. To av disse undervisningstimene forgikk i full klasse, de resterende fire timene var observasjon av en fast elevgruppe bestående av fem elever.

«Observasjon som metode egner seg godt når forskeren ønsker direkte tilgang til det han undersøker» (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2010, s. 118) I og med at denne studien har som hensikt å identifisere ulike strategier hos elevene, var det derfor naturlig å legge hovedvekt på observasjon som metode. Under observasjonen ble det foretatt feltnotater samt videoopptak ved hjelp av et kamera på stativ. Ved observasjon av full klasse ble kameraet plassert bakerst i hjørnet av klasserommet. Dette ble satt opp i forkant av undervisningen slik at dette allerede sto klart når elevene kom inn. Kameraet var ikke betjent i løpet av timen. Hensikten med kameraet var å fange opp mest mulig av elevene i klasserommet, men det var likevel enkelte deler av klasserommet som ikke ble dekket. Det ble likevel besluttet å ikke betjene kameraet, for på denne måten å rette minst mulig fokus på selve kameraet. Første dag virket elevene veldig bevisst på at det var et kamera tilstede, men etter hvert som tiden gikk fikk dette gradvis mindre oppmerksomhet og det virket som om elevene hverken enset kameraet eller meg som observatør i timene.



Figur 4: Oversikt over klasserommet og plassering av kamera og observatør.

Jeg har valgt å ha en åpen observasjonstilnærming der både lærer og elever kjente til hensikten med studien. Min observatørposisjon kan sies å være til dels vekslende mellom aktiv og passiv. Målet var å ha en passiv observatørposisjon i den grad dette lot seg gjøre. Med tanke på at jeg i forkant hadde lagt en del føringer for hva som skulle observeres både ved å utarbeide et eget undervisningsopplegg, samt klargjøre problem som elevene skulle arbeide med, kan det sies at min forskerrolle allerede var svært aktiv. På bakgrunn av dette oppsto det enkelte situasjoner der jeg valgte å gripe inn og dermed gikk over til en mer aktiv observatørrolle. Det er, ifølge Johannessen, Tufte og Christoffersen (2010) ikke uvanlig å variere mellom å være observerende deltaker og tilstedeværende observatør. Jeg ønsker likevel å presisere at jeg som observatør i hovedsak har hatt en passiv, tilstedeværende observatørrolle.

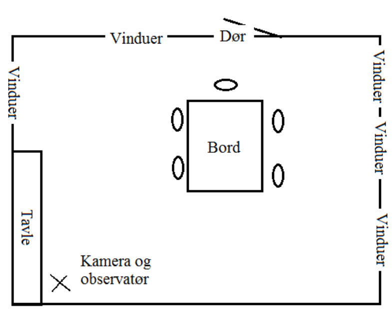
3.3.1 Observasjon av elevgruppe

Som nevnt i innledende avsnitt ble fire av de seks observerte undervisningstimene gjennomført på eget grupperom med en elevgruppe bestående av fem elever. Det var de samme fem elevene som ble observert gjennom alle de fire timene. I løpet av denne perioden samarbeidet elevene om fire ulike problem som de selv valgte ut i fra et problemløsningsark bestående av ti problem (vedlegg 8).

I forkant av selve observasjon bestemte jeg meg for å filme to av elevgruppene, i tilfelle noe uforutsett skulle skje med den ene gruppen elever. Jeg rettet hovedfokus mot hovedgruppen med elever, og det var også her jeg var tilstede og foretok feltnotater underveis. Det er arbeidet i denne gruppen som er gjenstand for videre arbeid med masteroppgaven.

Elevgruppen hadde fått tildelt eget, lydtett grupperom med glassvegger mellom grupperom og klasserom, dette gjorde at elevene i gruppa kunne arbeide relativt isolert fra de andre elevene i klassen, uten innspill eller forstyrrelser fra de andre elevgruppene.

Grupperommet var stort nok til at jeg kunne sitte litt fratrukket fra selve gruppen, og kameraet trengte ikke å stå helt nært mot elevene. Dette styrket min rolle som tilstedeværende observatør, og kameraet fikk liten eller ingen oppmerksomhet etter første time



Figur 5: Oversikt over grupperommet med kamera og observatør

En svakhet ved å isolere gruppen på eget grupperom kan ha vært at elevene ble mer fjernet fra resten av klassen. Denne gruppen fikk også mindre oppmerksomhet av klassens lærer, dette kan enten forklares av gruppens fysiske plassering utenfor klasserommet, min tilstedeværelse eller en kombinasjon av disse

3.3.2 Observasjon av klasse

To av timene som ble satt av til observasjon ble gjennomført i full klasse. Disse to timene var i hovedsak en del av innledningen til temaet, samt en oppsummeringstime til slutt. Det ble brukt digitalt kamera for å filme de to undervisningstimene, samt at jeg hadde en passiv, tilstedeværende observatørrolle.

I forbindelse med utdeling av samtykkeskjema hadde jeg, på forhånd, vært på besøk i klassen for å presentere meg og mitt arbeid. I følge Johannessen mfl. (2010) bør man, ved åpen observasjon, forsøke å gi mest mulig fullstendig informasjon i forkant av studien. Ved å møte opp personlig fikk jeg mulighet til å forklare hva min rolle kom til å være i klasserommet, samt svare på spørsmål fra elevene. Det ble videre presisert at min rolle var å være observatør og at jeg ikke var en ekstra lærer i klasserommet. Elevene skulle forsøke å vie så liten oppmerksomhet som mulig i forhold til meg.

3.4 Utvalg

Når det gjelder utvalg, var målet å finne en klasse på ungdomstrinnet. Klassen og læreren meldte seg frivillig til å delta i studien etter å ha hørt litt om arbeidet jeg har gjort i egen klasse knyttet til problemløsning via felles bekjente. Læreren hadde lenge ønsket å starte opp et mer systematisk arbeid med problemløsning, men hadde ikke hatt tid til å sette planene ut i livet. Gjennom intervjuet i etterkant fortalte hun at hun så på deltakelse i studien som en inngangsport til problemløsning, og at hun ønsket å fortsette arbeidet på egenhånd etter at opplegget i forhold til studien var ferdig.

Klassen hun ønsket at skulle delta var en 8. klasse. Denne klassen hadde arbeidet mye med klassemiljø for å styrke samholdet i klassen. Læreren mente at deltakelse i denne studien kunne være med å styrke samholdet i klassen ytterligere i og med at de fikk delta i noe som, i første omgang, kun var forbeholdt dem. Elevene i denne klassen ytret også dette synet og var svært positive til å delta, samt lære noe som de andre elevene på trinnet ikke fikk innblikk i på dette tidspunktet.

Utvalget i studien begrenser seg til denne aktuelle klassen og konsentrerer seg videre om en mindre elevgruppe bestående av fem elever. Johannessen mfl. (2010) sier at kjennetegnet med kvalitative studier blant annet er å hente ut mest mulig informasjon fra et begrenset antall informanter. Dette er også tilfellet i denne studien. For å få enda mer informasjon kunne det vært aktuelt og rette mer oppmerksomhet mot den andre gruppen også. Dette ville imidlertid krevd betydelig mer arbeid, og dermed også mer tid, noe denne oppgavens omfang ikke tillater. Det har derfor vært hensiktsmessig å begrense det empiriske materialet til den ene elevgruppen slik at målet kunne være å hente mest mulig empirisk materiale fra samme gruppe, i stedet for bruddstykker med informasjon fra flere ulike elevgrupper.

3.5 Undervisningsopplegg

I forbindelse med denne studien ble det utviklet et eget undervisningsprosjekt. Studien legger klare rammer for hva som skal undersøkes. Problemløsning som metode brukes med varierende grad i norsk skole. Flere lærere oppfatter problemløsning i matematikk som «mattenøtter» og graden av elevers opplæring i metakognisjon er varierende. (Schoenfeld A. , 1992)

Som praktiserende lærer vet jeg at arbeidshverdagen kan være hektisk. Å forvente at den aktuelle læreren skulle sette seg inn i teori knyttet til metakognisjon og problemløsning i forkant av studien, samt lage et undervisningsopplegg som skulle passe til min problemstilling var derfor uaktuelt. Jeg valgte derfor å lage et undervisningsopplegg som skulle passe for både elevgruppen og min problemstilling. På denne måten ble belastningen med min tilstedeværelse som forsker i klasserommet minimert.

Undervisningsopplegget bygger på en oppgave som ble gjennomført av oss studenter første semester av masterutdanningen i emnet Undervisningskvalitet. Gjennom denne oppgaven fikk vi egenhendig mulighet til å erfare positive effekter av problemløsning som metode. Oppgaven inspirerte meg til å implementere et lignende opplegg for mine egne elever på 8. trinn. Opplegget ble raskt implementert for alle elevene på 8. trinn. Med utgangspunkt i de erfaringene som ble gjort med egne elever, erfaringer fra kolleger og elever den gang, laget jeg et undervisningsopplegg som kunne passe til gjennomføringen av masteroppgaven. Problemene som ble brukt i dette opplegget var nøye vurdert i forhold til hvilke problem som hadde egnet seg best når jeg arbeidet med egne elever. På denne måten hadde jeg et utvalg problem som tidligere var prøvd ut og som da hadde vist seg å være egnet som problemløsningsoppgaver på dette nivået.

Undervisningsopplegget var utformet på en slik måte at læreren først fikk en enkel teoretisk oversikt knyttet til problemløsning og metakognisjon. Dette var nødvendig for å sikre at de nødvendige elementene ble implementert i undervisningen. Selve undervisningsopplegget gikk over seks undervisningstimer à 45 minutter. De to første timene ble brukt som en introduksjon til emnet, disse timene ble gjennomført som en dobbeltime med en liten pause mellom. Første- og deler av andre time arbeidet elevene med en problemløsningsoppgave uten å ha fått noen føringer for hvordan de skulle arbeide. Andre time fikk elevene en gjennomgang av Borgersens problemløsningsmodell (Borgersen, 1994) og hvordan de skulle bruke kladdebokens høyreside til metakognitive refleksjoner. Læreren knyttet denne teorien opp mot det elevene allerede hadde arbeidet med og fikk på denne måten konkretisert og eksemplifisert de ulike elementene. De neste tre timene arbeidet elevene mer selvstendig med et utvalg problemløsningsoppgaver. Siste time fikk elevene mulighet til å presentere et problem hver, der de fortalte hvordan de hadde arbeidet, hvilke vanskeligheter de hadde opplevd og hvordan de hadde kommet gjennom disse vanskelighetene. Resten av elevene i klassen fikk mulighet til å komme med innspill og spørsmål og eventuelt presentere alternative løsningsmetoder.

3.6 Valg av problemløsningsoppgaver

I teoridelen er det redegjort for hva som menes med en problemløsningsoppgave. Jeg ønsker derfor å trekke frem to av problemene som elevene arbeidet med i den tiden jeg var tilstede som observatør.

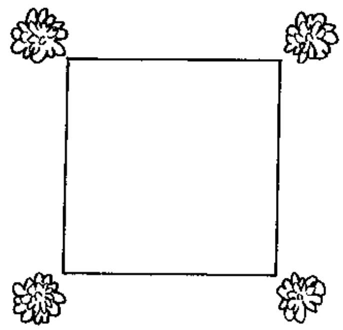
3.6.1 Håndtrykksoppgave

På en fest møtes ti ektepar. Alle håndhilser på hverandre én gang, unntatt de som er gift med hverandre. Hvor mange håndtrykk blir utvekslet på festen? (Abelkonkurransen, 2010)

Dette er et problem som i utgangspunktet går ut på kombinatorikk. Dette er et emne elevene ikke formelt sett har vært innom enda. Det er likevel ikke umulig å løse problemet uten kunnskap innenfor kombinatorikk. Elevene kan lage modeller og tegninger, for så å telle seg frem til hvor mange håndtrykk som utveksles. Et annet alternativ vil være å se etter tallmønster i modellene som lages. Ved å redusere antall ektepar kan gruppa selv dramatisere problemet for å finne ut hvor mange håndtrykk som blir utvekslet. Problemet kan videreutvikles gjennom å øke antall ektepar, eller endre reglene for hvem som kjenner hverandre fra før. Etter at problemet er utforsket med ulike antall ektepar er det mulighet for å generalisere gjennom å lage et uttrykk som kan brukes til å regne ut antall håndtrykk i forhold til antall ektepar. Problemet kan videreutvikles ved å endre antall ektepar, eller ved å endre reglene for hvem som kjenner hverandre, for eksempel gjennom at alle gjestene er single og ikke kjenner noen av de andre gjestene. Et annet alternativ er at to og to ektepar kjenner hverandre, og derfor ikke hilser på hverandre. Dette er bare eksempler, elevene kan komme opp med andre forslag som passer dem bedre. Ved å la elevene selv bestemme hvordan de ønsker å videreutvikle problemet, vil elevene få et større eierforhold til problemet, noe som er i tråd med Mason og Davis´ (1991) krav til problemløsningsoppgaver. Dette er et problem som enkelt kan videreutvikles gjennom å endre premissene for hvem som skal hilse på hverandre, eller hvor mange som kommer i bryllupet. Etter å ha kommet frem til en måte å regne ut dette spesifikke problemet, kan elevene utforske problemet ytterligere gjennom å endre antall ektepar, på denne måten vil de få mulighet til å lage en generell regel for å regne ut hvor mange håndtrykk som utveksles ut i fra hvor mange ektepar som er tilstede.

3.6.2 Sandkasseoppgave

De skal utvide sandkassa i barnehagen slik at den blir dobbelt så stor og fremdeles er kvadratisk. Men de vil ikke hogge ned de vakre buskene utenfor hjørnene av sandkassa. Det går an å få det til. Hvordan? (Bjuland, 2005)



Dette er et problem som krever analyse siden problemet i seg selv ikke sier noe om hvorvidt det er mulig å ha buskene i sandkassen, eller om disse må stå utenfor. Dette er noe elevene selv må bestemme. Begrepet dobbelt så stor kan også ha to betydninger, enten at sidekantene på sandkassen er dobbelt så lange, eller at arealet er dobbelt så stort.

Dette er et åpent problem der elevene inviteres til å være med å definere hva problemet spør etter. Dette kan være med på å skape et eierforhold til problemet. Mason og Davis (1991) fremhever åpne problem, der elevene selv får mulighet til å definere premissene for problemet.

En videreutvikling av problemet kan være å se på forholdet mellom sidelengde i kvadratet i forhold til arealstørrelse, et annet eksempel kan være at den nye sandkassen skal ha en annen form, hvilke beregninger må da gjøres?

3.7 Intervju

Gjennom å intervjue elevgruppen før- og etter gjennomføringen av selve undervisningsopplegget ønsket jeg å få et dypere innblikk i elevenes livsverden (Kvale & Brinkmann, 2009) Videre ønsket jeg i etterkant av undervisningsopplegget å intervjue den aktuelle læreren for å få innblikk i lærerens refleksjoner knyttet til arbeidet med problemløsning gjennom dette undervisningsopplegget.

3.7.1 Gruppeintervju

Elevene ble intervjuet som en samlet gruppe. Dette var et kvalitativt, semistrukturert gruppeintervju. En viktig forutsetning for selve intervjuet er at informantene føler seg trygge og komfortable i den settingen som legger rammene for selve intervjuet (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2010). Med tanke på at dette er elever i begynnelsen av tenårene, anså jeg det som ekstra viktig at elevene forsto hensikten med intervjuet, og at dette ikke ble oppfattet som en testsituasjon på tross av at de ville bli utfordret med både spørsmål og en konkret matematikkoppgave. For å synliggjøre dette valgte jeg derfor å ha et gruppeintervju sammen med elevene. En ulempe med slike gruppeintervju kan være at man ikke får frem alle meningene til informantene da de risikerer å bli farget at hverandre. Et eksempel på dette var da elevene skulle si sin mening om matematikkfaget, til å begynne med var svarene ulikt nyansert, men etter hvert ble svarene fra elevene mer og mer samstemt. En annen ulempe er at det gjerne er et par som fører ordet, og man må til enhver tid utfordre de mer tilbaketrukne elevene slik at man får alles oppfatninger og meninger frem i løpet av intervjuet. (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2010).

Valg av gruppeintervju var naturlig etter som studien retter fokus på elevers arbeid i smågrupper. Det er ikke den enkelte elevs problemløsningsprosess som skal identifiseres, men kollektive problemløsningsstrategier.

Gruppen ble intervjuet i to omganger. Første gang var hensikten å få litt innsikt i elevenes oppfatninger til matematikk generelt sett og vite litt om deres erfaringer i forhold til problemløsning (Vedlegg 3). I det siste intervjuet var det ønskelig å vite litt om hvordan elevene hadde opplevd arbeidet med problemløsning, og hvilke fordeler de selv så med å arbeide på denne måten. Til slutt skulle de arbeide med det samme problemet som de hadde arbeidet med i løpet av det første intervjuet (Vedlegg 4). Hensikten med dette var å se om elevene brukte andre strategier i arbeidet med problemet etter at de hadde arbeidet med problemløsning kombinert med metakognisjon.

3.7.2 Lærerintervju

Lærerintervjuet ble gjennomført i etterkant. Dette var et semistrukturert intervju som ble gjennomført etter skoletid på elevenes klasserom.

Etter som hovedfokus i denne oppgaven er elevenes arbeid med problemløsning og metakognisjon, var spørsmålene i intervjuguiden (vedlegg 5) også knyttet opp mot dette. Hensikten med intervjuet var å få vite litt om lærerens erfaringer og hennes observasjoner i perioden vi arbeidet med problemløsning og metakognisjon.

3.8 Bearbeiding av data

Alle intervju og undervisningstimer er transkribert ved hjelp av transkripsjons- og analyseprogrammet NVivo, versjon 10. Dette programmet legger automatisk til tidsstempler samt at det der mulig å legge til tilleggsnotater til enkelte utsagn eller enkeltord, også kalt annotasjoner. Videre er det mulighet for å kode ord, utsagn, utsagn og notater ved hjelp av noder, dette gir en oversiktlig fremstilling av det kodede materialet, noe som igjen kan lette analyseprosessen noe. Den kodede transkripsjonsteksten knyttes på denne måten sammen med den aktuelle filmsekvensen slik at man hele tiden har tilgang på både videoopptak og annet materiale man har knyttet sammen, for eksempel transkripsjonstekst og elevnotater som er gjort samtidig. På denne måten bevarer man en stor del av konteksten slik at minst mulig forsvinner under transkripsjonen. (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2010)

Transkripsjonen inneholder i liten grad gjetting av hva som blir sagt. De partiene som var vanskelige, eller umulige å høre det som ble sagt ble markert med en parentes der det sto utydelig/uforståelig tale. Begrunnelsen for å gjøre dette snarere enn å fylle ut resten av utsagnet med det som trolig ble ytret var at man da kunne lese transkripsjonen mer åpent, og at det på denne måten ble lagt minst mulig føringer. Transkripsjonen er gjort på dialekt med vekt på å gjengi det som ble sagt så ordrett som mulig. Enkelte områder er likevel forenklet noe, dette er partier der elevene eksempelvis teller antall håndtrykk ut i fra en modell og denne tellingen gjentas flere ganger. Der dette er forenklet er dette markert med en parentes der det står forklart at eleven teller.

3.9 Tilnærming til empirisk materiale

Kommunikasjon er en sosial aktivitet. Når noen samtaler med hverandre, er de avhengige av hverandre. Tidligere ytringer danner grunnlaget for nye ytringer, og deltakerne i samtalen er avhengige av en felles forståelse for det som blir sagt. Ut i fra disse forutsetningene dannes nye meninger og ytringer (Bjuland, 2002).

For å kunne undersøke hvordan elever arbeider med problemløsning i smågrupper, vil det være hensiktsmessig å ha en dialogisk tilnærming til datamaterialet. Dette er i tråd med oppgavens sosiokulturelle læringssyn der læring skjer i samhandling med andre gjennom bruk av kulturelle og medierende verktøy (Säljö R. , 2001). Gjennom observasjon vil det da være hensiktsmessig å analysere datamaterialet med utgangspunkt i dialogen som finner sted.

Säljö (2001) understreker forskjellen mellom tenking og språklig kommunikasjon. Dette er to fenomen som ikke kan sidestilles. Tenkningen er noe som er individuelt, det er ikke mulig for andre å få oversikt over andres tanker. Den språklige kommunikasjonen er det som personer sier. Dette kan vi observere og senere analysere, men det er likevel viktig at man skiller mellom det som blir sagt, og personer tanker. Det er ikke alltid at tanker stemmer overens med det vi sier eller gjør, og man kan derfor ikke bruke utsagn til å identifisere andres tanker. (Säljö R. , 2001)

Ut ifra et sosiokulturelt læringssyn vil tale bli sett på som en sosial handling som også er avhengig av kontekst, noe som også må vurderes ved dialogisk tilnærming til datamaterialet (Linell, 2007).

> " (…) meanings are always made (or at least completed) in contexts, and abstracted linguistic resources are designed to be used in and adapted to contexts. Aspects of meaning potentials cue or prompt situated meanings; the relative stability pertains to regularities in cueing." (Linell, 2007, s. 612)

Hver ytring bygger på tidligere ytringer, og blir sagt med tanke på fremtidige ytringer (Bjuland, 2002; Säljö, 2001).

Wells (1999) I Bjuland (2002) forklarer hvordan man gjennom tre faser kan gjøre en dialogisk tilnærming til datamaterialet. Første fase går ut på å dele episoder inn i ulike sekvenser etter tema. Andre fase handler om å dele sekvensene opp i mindre fragmenter bestående av monitorerende ytringer med tilhørende respons. Den tredje fasen består i å dele opp fragmentene i ytinger. På denne måten får vi en systematisk inndeling av samtalen, samtidig som det etterstrebes å ivareta konteksten som hver ytring er preget av. Gjennom en slik inndeling vil man sitte igjen med mindre «byggesteiner» (Bjuland, 2007b) som siden kan analyseres for å identifisere ulike strategier som elevgruppa tar i bruk (Bjuland, 2007b).

3.10 Etiske refleksjoner

I denne studien har elever på 8. trinn, og deres læring vært hovedfokus. Dette innebærer at informantene er mindreårige, noe som også setter spesielle krav til etisk refleksjon. I forkant ble det søkt om godkjenning hos Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste, i tillegg fikk elevene levert ut et informasjonsskriv med krav om skriftlig godkjenning fra foresatte angående deltakelse i studien. I anledning dette skrivet valgte jeg å personlig møte klassen, slik at eventuelle spørsmål kunne besvares direkte. I løpet av dette møtet med elevene ble det presisert at all deltakelse var frivillig, og at man i løpet av studien kunne trekke seg fra deltakelse på ethvert tidspunkt uten spørsmål eller krav til begrunnelse. Dette er i tråd med den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humanioras forskningsetiske retningslinjer.

Ved kvalitative studier slik som denne, vil det komme frem detaljerte beskrivelser av personers i form av gjengivelse av samtaler og arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk. I slike tilfeller skal informantene anonymiseres (Dalland, 2013). Dette er gjort ved hjelp av fiktive navn. Videre er skolens navn ikke oppgitt, men lokalisert til Vestlandet, snarere enn å oppgi fylke eller kommune.

3.11 Kritiske bemerkninger

Ved enhver studie kan man stille spørsmål ved hvor mye forskeren skal gripe inn, samt i hvilken grad man, ved å gripe for mye inn i informantenes hverdag, kan overføre funnene til andre situasjoner, og andre elever i skolen.

Studiens formål var å undersøke hvilke strategier som kunne identifiseres hos elevene når de arbeidet i smågruppe med problemløsning og metakognitive ferdigheter. For å kunne undersøke dette var det nødvendig å sikre at elevene faktisk arbeidet med problemløsning og metakognisjon slik det er definert i teoridelen. Et alternativ kunne ha vært å være observatør hos en lærer som allerede hadde disse metodene godt forankret i praksisen sin, eller lagt ned betydelig arbeid i forkant for å sikre at læreren hadde en forståelse for emnet som er i tråd med det teoretiske rammeverket for oppgaven. Å utarbeide et undervisningsopplegg med en innledende, forenklet teoretisk innføring i emnet for læreren, samt en beskrivende del av selve undervisningsopplegget ble oppfattet som en middelvei mellom disse to ytterpunktene. Det kan i tillegg nevnes at det i denne studien ikke er selve undervisningen som er hovedfokus, men heller elevenes arbeid med problemene. Ved å velge problem som tidligere hadde vært prøvd på en større gruppe elever i samme alder og samme klassetrinn tidligere, ville man i større grad sikre seg at disse problemene ville kunne tjene som problemløsningsoppgaver blant elevgruppen.

Ettersom problemstillingen også stiller spørsmål til hvordan problemløsning og metakognisjon kan implementeres i skolen, vil undervisningsopplegget fungere som et konkret utgangspunkt.

4. Analyse av empirisk materiale

Dette kapittelet er delt inn i to hoveddeler der første og siste time med problemløsning danner grunnlaget for to hovedepisoder, episodene er videre delt inn i sekvenser og ytringer, der ulike ytringer sees i lys av de andre elevenes utsagn. Analyses sees i lys av relevant teori og vil bli diskutert videre i kapittel 5.

4.1 Introduksjon til problemløsning

De neste episodene er hentet fra første time med problemløsning. Elevene har på dette tidspunktet ikke fått noen innføring knyttet til problemløsning. Episodene er delt inn etter hvilke strategier som kan identifiseres.

De første episodene er hentet fra den første timen der elevene arbeidet med håndtrykksoppgaven. Trym forslår raskt at de kan multiplisere 18 med 20, etter som det er 20 personer og hver av dem må hilse på 18 personer. Læreren kommer inn og ber dem å forklare hva de har tenkt. Etter hvert finner Elin og Emil hver sitt løsningsforslag som de mener er riktig. De to får ulike svar, noe som skaper frustrasjon i gruppa. I friminuttet diskuterer elevene problemet med medelever og kommer frem til at Elins metode er riktig, de klarer likevel ikke å forklare hvorfor Emils metode ikke kommer frem til samme svar. Etter å ha gjennomført problemet i praksis med et mindre antall ektepar, der de både bruker Elins metode og Emils metode øker frustrasjonen når de ved første forsøk oppdager at de to metodene fremdeles fører til ulikt resultat. Etter 40 minutter forsøker de å gå nøye gjennom Emils løsningsforslag og forstår hva de har gjort galt.

I slutten av timen skal de presentere løsningsprosessen og den endelige løsningen for resten av klassen. Deler av denne episoden er også tatt med for å identifisere mulige refleksjoner knyttet til løsningsprosessen.

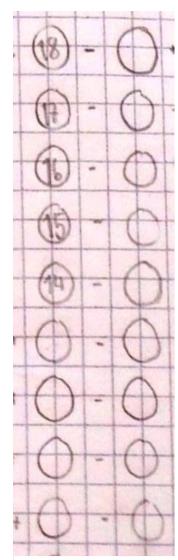
4.1.1 Å stille spørsmål fører til at nye idéer tvinges fram

Elevene har akkurat satt seg sammen for å arbeide med det første problemet. Trym kommer raskt opp med et løsningsforslag. Resten av gruppa er fornøyd med at de har funnet en løsning såpass raskt og venter på at læreren skal komme inn. I mellomtiden samtaler Kaja og Emil om svaret de har kommet frem til, dette fører til at Kaja etter hvert begynner å stusse litt på svaret.

30	Trym	hvis me tar vekk to etter hverandre og de håndhilser ikkje på hverandre så vil me få at de håndhilser atten ganger etter hverandre
31	Elin	mm, ja de gjør jo det, altså ein person håndhilser atten ganger, nei, ja håndhilser atten ganger
32	Kaja	for han hilser ikkje med seg sjøl eller den
33	Kaja	men det blir atten ganger 20?
34	Trym	rett og slett
35	Elin	ein to tre fir fem seks syv åtta.. (skriver i boka) eg bare tegne
36	Kaja	atten gange tjue som e, mm, vett ikkje eg?

Vi ser her at Trym foreslår hvordan problemet kan løses (30). Elin gjentar det Trym sier og bekrefter at hun forstår hva han mener (31). Kaja følger opp Tryms teori med et spørsmål (33).

Elin (35) forsøker å knytte Tryms løsningsforslag opp til det aktuelle problemet og bruker da inskripsjoner for å se sammenhengen mellom løsningsforslag og selve problemteksten (figur 6). Hver sirkel i figuren representerer en person, personene er satt sammen parvis for å indikere at disse er et ektepar som ikke hilser på hverandre. Tre av de andre elevene på gruppa tegner en lignende modell i problemløsningsbøkene sine. Denne modellen vil senere være utgangspunkt for Emils løsningsforslag. Modellen bidrar til å lettere kunne sortere informasjonen fra problemet slik at elevene kan tenke ut alternative metoder for å løse problemet.



Figur 6: Elins modell av håndtrykksoppgaven

48	Kaja	360 då, det e mange
49	Emil	det e jo ikkje per person då
50	Kaja	jaja, men det e jo mye fordet om

51	Emil	Mm

Kaja er ikke overbevist om at gruppa har kommet frem til riktig svar (48). Hun mener at antall håndtrykk er for høyt. Emil forsøker gjennom å forklare (49) at dette er et totalantall for å rettferdiggjøre Tryms resonnement for hvorfor antallet er såpass høyt som det er. Gjennom å indirekte stille spørsmål til gruppas løsningsforslag (48) kan det se ut som om Kaja får Emil til å tenke gjennom hvorvidt løsningsforslaget kan være riktig, ved å gjenta ytringen (50) forsterkes denne tanken og vi ser en antydning til at Emil begynner å tenke over svaret de har kommet frem til. På denne måten kan Kajas ytringer være både monitorerende og logisk resonerende. Kajas innspill kan dermed spille en monitorerende rolle siden det indikeres i dialogen at Emil begynner å revurdere løsningsforslaget (51). Samtidig oppstår det en oppfordring til logisk resonnement når Kaja gjentar at antall håndtrykk er for høyt, på tross av at dette er totalt antall håndtrykk. Emil blir ufordret til å tenke gjennom, uten beregninger, hva som kan være et passende antall håndtrykk for å kunne svare bekreftende på Kajas innspill (51)

Episoden blir avsluttet ved at lærer kommer inn for å høre elevenes løsningsforslag. Hun gjentar det de sier og ber dem bekrefte at hun har forstått dem riktig. Etter dialogsekvensen der Emil og Kaja diskuterte løsningsforslaget (48-51) har Emil forholdt seg stille og arbeidet i arbeidsboken imens resten av gruppa har forklart for lærer hvordan de har kommet frem til 360 håndtrykk. Dialogsekvensen under illustrerer imidlertid at Emil i løpet av denne samtalen kommer inn med et innspill i samtalen:

61	Emil	nei, eg kom på någe
62	Emil	det e jo fordi, hvis to stykk hilse på kverandre så e jo ikkje det to håndhils
63	Lærer	åja (nikker) ganske god tanke
64	Elin	så då må du dobla det 360 då?
65	Kaja	nei du må, det må ver mindre

66	Emil	hvis eg håndhilse med dåkkår så må jo
67	Kaja	så har jo du håndhilst med han allerede

Emil har tenkt ut hvorfor de har fått for høyt antall håndtrykk, og forklarer til resten av gruppa (62). Læreren bekrefter at de er inne på en god tanke og forlater, med denne kommentaren, grupperommet. Elin forstår ikke helt hva Emil prøver å forklare, og stiller et oppklarende spørsmål (64). Kaja forsøker gjennom et logisk resonnement å forklare at antall håndtrykk reduseres (65). Emil bruker modellering som strategi når han trekker hilsningene ut fra oppgaveteksten og overfører dem til gruppa (66). Kaja følger opp Emils forklaring (67). Dette kan også sees på som et logisk resonnement, der hun henviser til at hvis person nummer én går bort og hilser på person nummer to, vil det ikke være nødvendig for person nummer to å gå tilbake til person nummer én for å hilse én gang til.

Episoden over viser hvordan Kajas tvil i forhold til gruppas løsningsforslag fører revurdering av løsningen, samt at dette setter i gang nye idéer hos Emil.

Vi ser her hvordan elevene stiller hverandre spørsmål for å få klarhet i hvordan de skal definere «håndhils». Dette er et sentralt begrep som må avklares før elevene kan arbeide videre med problemet. Gruppa er i ferd med å danne et felles meningsgrunnlag (Moschkovich, 2004).

Emil (66) begynner å tegne en modell for å vise til resten av gruppa hvordan han tenker. Strategien modellering (Borgersen, 1994) fungerer her som et medierende verktøy, der selve modellen hjelper Emil til å forklare til de andre i gruppa hvordan han tenker (Carlsen, 2008)

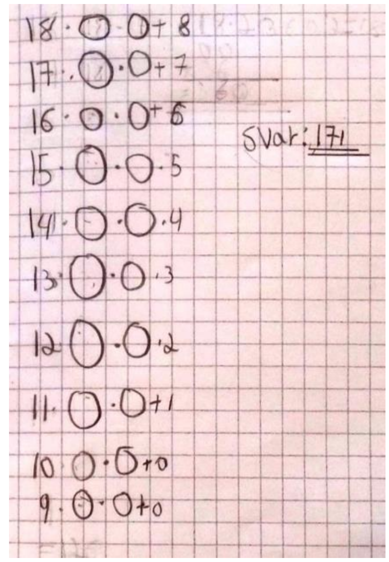
4.1.2 Monitorerende spørsmål i løsningsprosessen

Gruppa har arbeidet ut ifra to ulike løsningsmetoder. De to metodene fører til ulikt svar, og gruppa forstår ikke helt hvorfor de to metodene ikke munner ut i samme resultat.

Elevene arbeider for det meste alene, uten at læreren er innom for å høre hvordan fremdriften er. Elevene tar heller ikke selv kontakt med læreren for å få videre veiledning. Etter hvert stiger frustrasjonsnivået i gruppa, og elevene blir nødt til å revurdere arbeidet de har gjort.

Emil har kommet opp med en strategi der han har telt antall håndtrykk for de første tre personene nedover i Elins modell. For disse personene fikk han henholdsvis 18, 17 og 16 håndtrykk. Ut ifra dette har han konkludert med at mønsteret gjentar seg helt ned til null, og at de to siste personene ikke trenger å hilse på noen av de andre, etter som alle de andre hilser på dem. Malin har laget en modell som tydelig visualiserer Emils modell.

Den neste episoden viser hvordan Elin forsøker å forklare for resten av gruppa hvorfor hun mener at hennes metode også bør føre til riktig svar. Usikkerheten oppstår når hun oppdager at de to metodene ikke fører til samme svar.



Figur 7: Emils modell av håndtrykksoppgaven. Sirklene symboliserer personer. Tallene ved siden av sirklene indikerer antall håndtrykk for hver person.

129	Elin	men kan du ikkje egentlig bare ta 360 delt på to då? siden då har du liksom utveksla
130	Kaja	men e det 171?
131	Elin	-ja for liksom då har me tatt ein kver og då vett me kor mange ein per og då dele du bare på to
132	Emil	men det blir ikkje 171 ...
133	Kaja	360 delt på to ... det e 180 det (viser på kalkulatoren)
134	Elin	eg forstår liksom ikkje koffår det ikkje funke.

Elin forsøker gjennom logisk resonnement (179) å forklare hvorfor de egentlig bare kan dele 360 med to. Spørsmålet til Kaja (130)ser ut til å ha en monitorerende rolle i dialogen siden hun gjentar den forrige løsningen. Elevene har på dette tidspunktet akseptert Emils metode som riktig, og Elins metode blir derfor målt opp mot det «riktige» svaralternativet. Emil (132) refererer til eget svaralternativ for å bygge opp mot at Elins metode ikke kan være riktig.

Elin ser på dette tidspunktet logikken bak begge metodene, og klarer derfor ikke å avgjøre hvorfor de får ulike svar (134). Hvis begge metodene er like riktige skulle de ført til samme svar, noe som ikke er tilfellet her. Mangelen på forståelse for hva som kan være galt, samt usikkerhet knyttet til hvilken metode som gir riktig svar fører til at Elin begynner å bli frustrert.

Elevene har nå to metoder som de anser som like gode, problemet er bare at de to metodene fremdeles gir ulike svar, noe som danner grobunn for diskusjon i gruppa. Den neste episoden vi skal se nærmere på viser hvordan Elin forsøker å argumentere for at hennes metode er riktig.

149	Elin	18 ganger 10 e 180
150	Elin	og 360 delt på 2 e også 180 .. eg bare så litt logikk i det regnestykket (ler) (4 sek) eg vett ikkje om det var rett men (3 sek)
151	Emil	men, koffår skulle det ikkje vært 171 liksom?
152	Elin	altså 171 e ikkje et partall e det det?
153	Kaja	nei [Trym: nei]
154	Kaja	nei, det e et oddetall

Elin forsøker, gjennom logisk resonnement (149-150) å forklare for de andre på gruppa hvorfor hun mener at hennes metode er den riktige. Emil er enda ikke overbevist og stiller derfor et spørsmål som utfordrer de andre på gruppa til å reflektere over løsningen 171 (151). Dialogen fortsetter med at Elin forsøker å forklare hvorfor hun mener at dette svaret ikke kan være riktig. Elin tar raskt opp tråden og forsøker å finne ut hva som kan være riktig løsning på problemet.

162	Elin	men altså, då hadde det vært (4 sek) skjønne dåkkår ka eg meine ?
163	Elin	ja, men koffår ska det vær 180 koffår kan det ikkje vær 171 då?
164	Trym	171

165 Elin hadde dette vært 171 liksom? (Peker på modellen til Kaja)

Vi ser her at Elin (163) gjentar Emils spørsmål (151). Det kan se ut som om Elin begynner å tvile på sin egen løsning. De andre på gruppa har allerede gitt uttrykk for at de mener at Emils løsning er riktig. Etter å ha forsøkt å svare på spørsmålet sender hun spørsmålet i retur til gruppa. Gjennom å stille et slikt monitorerende spørsmål til resten av gruppa, blir resten av gruppas medlemmer involvert i løsningsprosessen.

Frem til nå har gruppa arbeidet frem og tilbake i Borgersens (1994) fire første faser for problemløsning. De har vekslet mellom å forstå og analysere problemet, laget modeller, drevet med kvalifisert gjetning og ut i fra dette kommet med hypoteser. På dette tidspunktet har elevene beveget seg over i neste fase, som kan være både tidkrevende og vanskelig. De skal nå utvikle et bevis for at hypotesene stemmer eller eventuelt ikke stemmer. For å lettere kunne utvikle disse bevisene og komme til en konklusjon vil det være hensiktsmessig å bruke monitorerende strategier. Gjennom monitorerende strategier vil elevene kunne se tilbake på det som er gjort og argumentere for at det som er blitt gjort har vært riktig. Hvis de monitorerende strategiene uteblir vil man i verste fall unngå å avdekke feil og mangler ved hypotesen(e), noe som kan føre til at man ikke kommer frem til riktig løsning, eller ikke kommer frem til en løsning i det hele tatt (Schoenfeld A. , 1992).

Elevene stiller, i denne prosessen, en begrenset mengde monitorerende spørsmål i knyttet til den videre løsningen. Grunnet dette kan vi anta at elevene bruker ekstra lang tid på å utvikle et bevis for at de har funnet riktig løsning. Vi kan med dette trekke paralleller til Schoenfelds (1992) modell (figur 1) der det kommer frem at utrente problemløsere ofte bruker unødig tid på å prøve og feile, noe som gjerne fører til at problemløseren ikke ender opp med riktig løsning, eller at de ender opp uten løsningsforslag i det hele tatt. I motsetning til dette mønsteret viser Schoenfeld (1992) hvordan en trenet matematiker (figur 2) raskt veksler mellom ulike faser, simultant med at han monitorerer eget arbeid, planer og det arbeidet som allerede er gjort.

Gjennom sekvensene over ser vi at elevene strever med å finne ut hva som kan være riktig løsning, de stiller flere monitorerende spørsmål og bruker ulike strategier for å komme videre i problemløsningsprosessen, likevel klarer ikke gruppa å trekke et optimalt utbytte fra strategiene som benyttes.

4.1.3 Spesialisering og forenkling av problemet

I slutten av første time forsøker elevene å utføre problemet i praksis. De forsøker å finne ut hvor mange håndtrykk som blir utvekslet med tre ektepar. Elevene håndhilser på hverandre og teller håndtrykkene. Ut i fra Emil teori skulle dette endt med 10 håndtrykk, men elevene gjør en overraskende oppdagelse:

318	Kaja	men det blir jo 12!
319	Elin	det blir 12
320	Kaja	nei, dette går ikkje . har me gjort heilt feil her foran då? (peker på oppgaven med 20 ektepar)
321	Elin	det har me sikkert, men .
322	Trym	det virke riktig
323	Elin	det virka så riktig, heh
324	Emil	ka hvis du gjør det (ser på Elin) og så gjør Trym det og så gjør eg det
325	Elin	ok 1 2 3 4
326	Trym	4 4 12
327	Kaja	altså Trym du må, eh, ska eg gjør det i stedet for Trym? så då e det 4 og eg hilse på 1 2 3 (peker på pennalet, Malin og Emil)
328	Emil	så e det meg så 1 2
329	Kaja	då blir det 4 3 2 (blar tilbake i arbeidsboka) og det e jo det me har-

330 Elin — og så e det disse her igjen (peker på Malin og Trym) og då må de hilsa ein gang

331 Kaja — då fikk me rett

332 Elin — ja, då får me rett, men hvis me tar det i sånn rekkefølge-

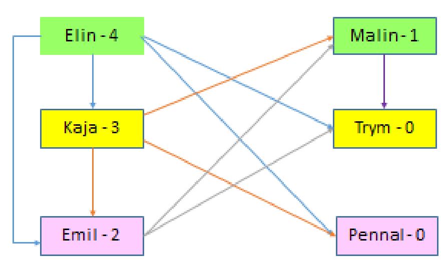
333 Kaja — -så blir det annerledes . det var skikkelig rart

334 Elin — ska me prøva å gjør det sånn ein gang?

Første forsøk teller elevene håndtrykk for hvert par og får da fire håndtrykk per ektefelle for første par og to håndtrykk per ektefelle for par nummer to. Det siste paret trenger ikke å hilse på noen, etter som de andre parene allerede har hilst på dem. Totalt sett får de da 12 ektepar.

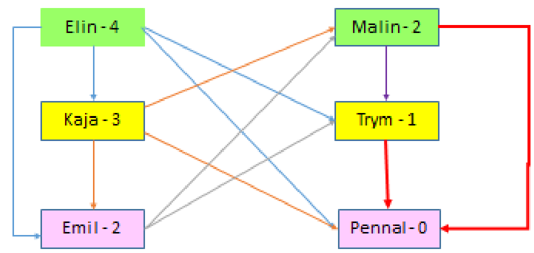
Gjennom Kajas monitorerende spørsmål (320) ser vi at Kaja forstår betydningen dersom svaret på siste forsøk viser seg å være riktig. Emil foreslår at de kan telle antall håndtrykk ut ifra samme strategi som de hadde gjort i forhold til de 20 ekteparene (324). Emil forslag kan sees på som to kombinerte strategier. Dette er en praktisk-visuell strategi som samtidig bygger på logisk resonnement.

Etter å ha håndhilst på hverandre etter Emils rekkefølge, kommer elevene frem til ti håndtrykk. For å finne ut hvordan elevene kan ha kommet frem til dette løsningsalternativet kan det være hensiktsmessig å se på en grafisk fremstilling av hvordan elevene hilste på hverandre 8. Boksene med samme farge indikerer hvem som er definert som ektepar under den praktiske gjennomgangen. Pilene viser hvem som hilser på hvem og tallet bak hvert navn forteller hvor mange hilsninger personen tar initiativ til. Vi ser her at elevene kommer frem til ti håndtrykk, Dette samsvarer med Emils teori om at de enkelt kan regne ut 4+3+2+1 for å finne ut hvor mange håndtrykk som blir utvekslet.



Figur 8: Oversikt over hvilke personer som hilser på hverandre når elevene gjennomfører en forenklet utgave av håndtrykksoppgaven. Tallene bak hver person viser antall håndtrykk

Figur 9 viser to røde linjer som indikerer hvem som enda ikke har hilst på hverandre. Ut i fra figuren ser vi at Malin og Trym ikke hilser på pennalet til Emil, noe som gjør at de står igjen med ti håndtrykk. Dette samsvarer med Emils løsningsforslag, og elevene godtar derfor svaret, uten å gå gjennom hvorfor denne metoden fører til færre håndtrykk enn hvis de teller antall håndtrykk i en annen rekkefølge.



Figur 9: Oversikt over hvilke personer som skulle ha hilst på hverandre når elevene gjennomførte en forenklet utgave av håndtrykksoppgaven. Tallene bak hver person viser antall håndtrykk hvis hver elev hadde hilst slik de skulle. De røde linjene viser håndtrykk som opprinnelig ikke ble gjennomført.

Dersom man antar at elevene er klar over at antall håndtrykk i utgangspunktet bør bli det samme uavhengig av rekkefølgen de telles i, er det interessant å se at elevene ikke stiller mer spørsmål til resultatene de finner. Vi ser at Kaja er tilfreds med at de endelig får «riktig» antall håndtrykk (331). Elin bekrefter Kajas resonnement (332), men samtidig er hun i ferd med å foreslå noe mer, hun blir avbrutt av Kaja (333) som fullfører resonnementet og samtidig bruker logisk resonnement da hun fullfører med å si at «dette var skikkelig rart». Vi ser her hvordan funnene brister med Kajas forventning til resultatene, noe som igjen er med på å bidra til ny frustrasjon hos elevene.

Episoden blir avbrutt av at det ringer ut til friminutt. Når elevene kommer inn fra friminuttet forstår en fra samtalen at elevene har diskutert problemet med de andre elevene i klassen. Man kan anta at frustrasjonen fra timen i forveien har bidratt til engasjement hos elevene. Elevene har erfart at de får ulike svar med ulike metoder, men ingen av elevene har klart å fortelle hvorfor de to metodene gir sprikende løsninger. De har etter hvert akseptert begge løsningene som fornuftige. Før friminuttet visste de ikke hvilken metode de skulle anse som minst riktig, noe som også førte til at de heller ikke visste hvor de skulle lete etter feilen.

Vi ser her at feilen elevene har gjort med det opprinnelige problemet følger med når de senere forenkler problemet og utfører det i praksis. Dette fører til at frustrasjonen opprettholdes og elevene er fremdeles ikke i stand til å si hvilken metode som er riktig eller gal.

Elevene står fast og vi ser at frustrasjonen melder seg hos flere av elevene, likevel tar de ikke kontakt med lærer for å få hjelp til nye innspill. Ved å ta kontakt med læreren kunne de fått veiledning som igjen kunne hjulpet dem videre i prosessen (Schoenfeld A. , 1992). Lærer tar heller ikke kontakt med gruppa for å høre hvordan det går.

Elevene bruker inskripsjoner, logisk resonnement og monitorerende spørsmål for å komme videre med problemet, men står fremdeles fast. Vi ser at problemet i utgangspunktet kun krever ferdigheter fra de fire regneartene. Dette er noe som er lett tilgjengelig i elevenes kunnskapsdatabase (Schoenfeld A. , 1992), og de som strevde med dette hadde kalkulator tilgjengelig.

Gjennom å forenkle problemet kan elevene bruke seg selv som medierende verktøy (Carlsen, 2008). Gjennom denne bruken av medierende verktøy ser vi at alle elevene i gruppa blir aktive, også de som vanligvis trekker seg bort. Alle er aktive deltakere i prosessen, noe som krever sosial samhandling og felles forståelse for problemet (Säljö R. , 2005)

4.1.4 Å se på problemet med «nye» øyne

Elevene kommer inn etter friminuttet og har snakket med andre elever. De andre gruppene har kommet frem til 180, noe som fører til diskusjon i gruppa.

6	Elin	ja, for du ser at de hadde lagt opp blyanter sånn, ok la oss tenka at, har eg 20 blyanter? (teller) kan ikkje tro at eg gjør dette her men (ler) herlighed (legger opp 10 par blyanter) ok her har me 10 par blyanter, de e litt urolig men
7	Elin	ok han her (peker på en blyant) han vil ikkje hilsa på hu her (teller antall håndtrykk) 18 på fysste ... så e det hennes tur hu kan ikkje hilsa på den (peker på blyanten ved siden av) (teller) det blir jo goså 18, eller har eg tatt feil nå?
8	Emil	ja, for det e når du telle sånn [Elin: åja, hu kan ikkje hilsa på seg sjøl] ett og ett par, så blir det annerledes

9	Elin	ok, la oss sei at de e sånn då (flytter littt på blyantene) eg tror det blir litt enklere å tenka sånn
10	Emil	ja men då tenke me på samme måden som me gjor før, for hvis me tenke ett og ett par så blir det et aent svar
11	Elin	(ordner med blyantene) ok han, det e ektepar nå, ei to, det e 18 og då, de kan ikkje hilsa på hverandre så ein

Elevene har hørt at de andre elevene har lagt frem blyanter for å konkretisere problemet med 20 ektepar, og tenker at dette kan være en god måte å forsøke å bevise hvilken metode som gir riktig svar.

Emil mener de bør telle antall håndtrykk i en bestemt rekkefølge for å få riktig resultat (8). Etter erfaringene fra forrige time der de telte antall håndtrykk med tre ektepar, er han overbevist om at rekkefølgen har noe å si for hvor mange håndtrykk som blir utvekslet. Han argumenterer med at det vil være hensiktsmessig å bruke samme metode som tidligere for å unngå å få et nytt løsningsforslag (10). Elin godtar Emils resonnement uten videre diskusjon. I dette tilfellet kunne det kanskje vært hensiktsmessig å diskutere hva som eventuelt ville vært en «riktig» rekkefølge, og hvorfor Emils rekkefølge skal anses som den riktige. Det reises ikke spørsmål eller tvil rundt Emils resonnement, og elevene fortsetter slik de har arbeidet sist time. Etter en stund blir elevene oppfordret av observatør til å telle antall håndtrykk for alle personene. Elevene diskuterer raskt seg imellom og blir enige om at de skal gjennomføre dette.

71	Emil	men eg tror det gir meining hvis me gjør sånn her at han går ner, og så begynne han på ni på ny . bare se, bare tell på ny på den der (viser i boka til Elin) så blir det 1 2 3 4 5 6 7 8 9 og då tror eg at det blir 180
72	Elin	(teller og noterer i arbeidsboken) nå gir det meining, og så e det bare ein som får null bare
73	Emil	så det blir +11+10+9+9+8

74	Elin	170 . du kan regna ut du, eg orke ikkje (ser på Malin)
75	Elin	då tar me 180 då
76	Emil	Mm
77	Emil	hadde me telt alt i starten så hadde det gitt meining ... e svaret 180 då?
78	Elin	Ja
79	Elin	me konne jo egentlig bare tatt 360 og delt på 2 (flirer) så hadde me jo svaret (ler) men det hadde jo ikje vært logisk og tenkt

Elevene har oppdaget at de ikke har gjort alt riktig i forhold til Emils metode. De har telt antall håndtrykk for de siste 10 personene og har oppdaget at ni av personene faktisk gjennomfører et ekstra håndtrykk i forhold til hva de først antok. Dette medfører at de nå, også med Emils metode får 180 håndtrykk. Elin bruker logisk resonnement når hun konkluderer med at det nye resultatet gir mening (72). Emil bruker et monitorerende resonnement (77) når han ser tilbake på hvordan de kunne løst problemet raskere gjennom å ha telt alle håndtrykkene helt i starten. Elin konkluderer med at også hennes metode var riktig (79) men trekker det raskt tilbake ved å legge til at dette ikke hadde vært en logisk fremgangsmåte.

Vi ser her at elevene har fått innspill fra andre medelever, noe som har bidratt til at elevene ser på problemet igjen for å kontrollere arbeidet de har gjort. Medelevers innspill fører til at elevene på gruppa inntar en monitorerende posisjon der de ønsker å finne ut om de selv har rett, eller om det er medelevene som har funnet riktig løsning. Slike innspill kan være hensiktsmessige så lenge man bevarer den spørrende stemningen, og ikke presenterer et fasitsvar for elevene. I dette tilfellet visste ingen av elevene hvem som hadde riktig svar, noe som førte til at de måtte argumentere for svarene de hadde funnet. Dette er i tråd med Schoenfelds (1992) studie, der læreren sirkulerte rundt i klasserommet og hadde den spørrende rollen.

4.1.5 Refleksjon etter problemløsningsprosessen

Etter at elevene har arbeidet med håndtrykksoppgaven i underkant av 50 minutter når de samles i klasserommet for å gå gjennom problemet. Læreren lar hver gruppe forklare hvordan de har tenkt for å komme frem til et svar. Hun legger vekt på at det ikke bare er de riktige svarene som er interessante, men at det er hele prosessen fra de begynte med problemet og frem til de kom frem til et svar som er viktig.

Elin og Emil forklarer hvordan gruppa har arbeidet med problemet, og hvilke svaralternativer de har kommet frem til underveis i prosessen.

148	Emil	så var me desverre heile tiden nesten
149	Lærer	ja, så då, dåkk brukte lange tid, men ka blei det endeliga svaret?
150	Emil	180
151	Lærer	180, dåkkår kvalitetsikra og med tre ektepar? Var det sånn at dåkkår fekk fram at det, at 180 måtte vera det retta svaret?
152	Elin	nei, me blei nesten bare ikkje sikker siden det var ikkje 171 heller så det var bare 180 som konne ver rett

Emil forklarer at de har brukt store deler av tiden til å forsøke å bekrefte at 171 var riktig svaralternativ (148). Dette er en retrospektiv refleksjon over prosessen som har vært. Lærer stiller et monitorerende spørsmål (151). Elin er usikker på hva hun skal svare læreren og gir ikke en klar forklaring på hvorfor gruppa endte med 180 håndtrykk og ikke 171 (152). Det kan virke underlig at ikke Elin forklarer hvorfor de til slutt kom frem til at 180 var riktig svaralternativ. Det kan være flere årsaker til dette, både at hun nå snakker for hele klassen i stedet for en liten gruppe. Det kan også være at hun ikke er sikker på hvordan hun skal forklare hvordan de kom frem til svaret for resten av klassen som ikke var en del av prosessen.

Refleksjon er en viktig del av problemløsningsprosessen. Det er her elevene får mulighet til å virkelig se tilbake på arbeidet de har gjort, samt reflektere over avgjørelsene som ble tatt.

Refleksjon sammen med de andre i gruppa kan bidra til å bevisstgjøre hva som er ny læring, både gjennom de feilene som er gjort, og oppdagelsene de har funnet.

4.2 Femte time med problemløsning

Elevene har nå arbeidet med problemløsning i fire timer, og begynner å få litt mer kontroll over arbeidet. De har fått noen spørsmål som de skal forsøke å svare på underveis i problemløsningsprosessen. Ofte ender det med at elevene forsøker å svare på noen av spørsmålene og i oppstarten for så å svare på resten av spørsmålene etter at de har funnet en løsning.

Elevene skal begynne med et nytt problem, og de bestemmer seg for å velge sandkasseoppgaven, der sandkassen skal utvides til dobbel størrelse uten å ødelegge de fine buskene utenfor hvert av hjørnene i sandkassen.

4.2.1 Analysere oppgaven og avklare begreper

Etter at elevene er blitt enige om hvilket problem de skal begynne å arbeide med, starter de umiddelbart med å analysere problemet.

37	Kaja	ehm, metoder, regne? eg vett ikkje?
38	Elin	regne, og så kan me, me må jo tegne, me bruke jo geo, geometri så du må jo, du kan jo tegn´an óg
39	Elin	så eg skrive tror eg regne slash, men me vente te alle e ferdige
40	Elin	. men de metodene eg ville brukt e regne [Kaja: mhm] . slash tegne, kanskje sånn parentes óg
41	Trym	ka e dette her egentlig?

Kaja (37) forsøker å avgjøre hva som kan være en egnet metode eller strategi for å løse problemet. Usikkerheten hennes indikerer at hun ikke helt har bestemt seg for hvilken strategi hun bør starte med. Utsagnet hennes bidrar til at Elin (38) kommer med forslag til metoder. Elin foreslår at det kan være greiest å regne eller tegne (40). Trym har enda ikke helt forstått hva problemet går ut på og spør de andre om hjelp til å forklare (41).

I denne sekvensen ser vi at Kaja starter med monitorerende strategi idet hun ønsker å avklare hvilke metoder som kan være nyttige når de skal løse dette problemet. Elin (38-40) forsøker å forklare de andre i gruppa hvordan hun tenker når hun svarer Kaja. Tryms spørsmål indikerer en spørrende strategi der han ber om en forklaring fra de andre i gruppa, på den måten må de andre i gruppa forsøke å forklare til Trym hvordan de forstår problemet og blir mer bevisste på hvordan hver enkelt forstår selve problemet.

Vi ser her at elevene er opptatt av at alle skal ha samme forståelse for problemet, noe som er nødvendig for det videre arbeidet. Gjennom delt forståelse danner de et felles meningsgrunnlag der alle på gruppa har samme oppfatning av problemet og begrepene i problemet (Carlsen, 2008; Säljö, 2005)

For å avklare hvordan de skal gå frem for å løse problemet, er det nødvendig å ha en felles forståelse av hva dobbelt så stor betyr. Den neste sekvensen viser hvordan elevene resonnerer seg frem til hvordan de skal tolke begrepet «dobbelt så stor»:

43	Elin	me må jo, kanskje me må finna ein radius sånn at me ser kor stor, me ser kor stor arealet blir av området
44	Kaja	eg syns egentlig at dette var vanskelig fordet atte eg vett jo ikkje, kor stor radius, ka dobbelt så stort areal e
45	Elin	dobbelt så stor e jo det dobbelte arealet, såå [Kaja: jaaa]. men me vente bare
46	Elin	.. så har me alle med oss i alle fall

Vi ser her at Elin (43) forsøker å forklare de andre på gruppa hvordan hun tenker. Når Elin bruker radius som begrep, ser man, ut i fra filmen, at hun mener sidekanten i kvadratet. Kaja plukker opp radiusbegrepet og bruker dette videre. Hun forklarer at hun syns det er vanskelig å bestemme hvordan hun skal finne ut hvor stor sidekantene skal være for at arealet skal bli dobbelt så stort.

Elin (45-46) stopper diskusjonen slik at de andre på gruppa, som fremdeles noterer i bøkene sine også kan delta i diskusjonen. På denne måten vil de også kunne få flere innspill.

Trym strever med å delta innenfor gruppas normer. Han har ikke bok eller skrivesaker og noterer derfor ikke. Han strever også med å sitte rolig og delta i diskusjonene på lik linje med de andre i gruppa, noe som også fører til en del avbrytelser i diskusjonene. Når Trym oppdager at de andre elevene bruker begrepet radius om sidekanten i kvadratet, bryter han inn for å forklare at dette ikke medfører riktighet, og ønsker å oppklare bruken av begreper i forbindelse med utregning av areal av et kvadrat. På dette tidspunktet er diskusjonen i gruppa såpass situert, og de andre elevene lytter ikke til hva Trym forsøker å forklare.

69	Trym	det går ´kje an å ha radius påå, eh, sandkassen
70	Trym	.. fordi den e firkanta
71	Trym	så hvis du har radiusen på ´an så blir det radiusen blir lengre hvis den går ut i kantene
72	Elin	(4 sek) eg bare regne det ut, på kalkis ... 7,84 blir det

Vi ser her at Trym bruker logisk resonnement når han forsøker å forklare de andre på gruppa hvorfor det ikke er mulig å bruke radius i forbindelse med et kvadrat (69-71). Det kan virke som om de andre på gruppa ikke hører etter hva Trym har å si etter som de bare fortsetter med diskusjonen de allerede har begynt på, uten å ta notis fra Tryms resonnement. Vi ser at Elin (72) fortsetter med utregningene uten å kommentere det Trym sier. Ingen av de andre på gruppa later til å ta notis av Tryms oppdagelse, men fortsetter å regne ut arealet av sandkassen. En ser likevel at elevene slutter å bruke begrepet radius for sidekantene.

Elevene er opptatt av at alle på gruppa skal få være med i diskusjonen og at det er viktig at alle har samme forståelse for problemet. På denne måten kan de dra nytte av hverandres synspunkter og idéer. Vi ser her hvordan elevene legger til rette for å kunne bruke hverandre som medierende verktøy i den videre prosessen med problemet.

Det er nødvendig for løsningsprosessen av alle på gruppa har delt fokus og forståelse for problemet (Carlsen, 2008; Säljö, 2005). Når Trym strever med å dele de andres fokus, gir dette seg utslag i at han ikke blir hørt av de andre. Han er med andre ord ikke lenger med i diskusjonen.

4.2.2 Prøving og feiling

Elevene har nå kommet til et punkt i løsningsprosessen der de trenger annen kunnskap enn det de allerede har tilgjengelig i kunnskapsdatabasen (Schoenfeld A. , 1992), for å komme videre forsøker de seg på prøving og feiling:

82	Elin	altså for at de ska bli, du kan jo, det må jo bli det dobbelte, sant? då tenke eg jo dobla sidene, må du ikkje det? så blir det 2,8 pluss 2,8? eller .. siden det dobbelta arealet e 15 så då må du finna någen som side gange side er lik 15
83	Kaja	blir ikkje det åtte komma (mumler)
84	Elin	nei, for dette e i andre, sant? for det e arealet me ska komma frem te [kaja: ja] så då må det vær någe som, då må du ta 15,68 delt på to sånn det e 7,8 gange 7,8 altså
85	Kaja	men dele me det på fira sider siden det e fire sider, eller?
86	Elin	eh for-
87	Kaja	kan me dele det, liksom på fire? 15,68 delt på fire, kan me gjør det sånn at me får fram fire sider? . eller kan me ikkje gjør det?
88	Elin	me får prøva då (trykker på kalkulatoren) 3,94

89	Kaja	det kan jo stemme det (ser på Emil) . kan det ikkje?
90	Kaja	fordi [Trym: 3,94] kver ein av de sidene var jo 2,8

Elin (82) forsøker å bruke logisk resonnement for å finne ut hvordan de skal finne sidekantene når arealet dobles. Kaja (83) fullfører Elins resonnement og foreslår at sidekantene da må bli 8 komma noe. Elin (84) kombinerer spørrende strategi og logisk resonnement for å fullføre utsagnene i 82 og 83. På dette tidspunktet ser vi at elevene prøver og feiler for å komme videre med problemet. Kaja (87) bruker spørrende strategi og kommer med et forslag om å dele arealet på fire for å se om det kan gi en sidekant som resulterer i dobbelt areal. I dette tilfellet ser vi at 15,68 ligger nært opp til 16, noe som gjør at de, gjennom å dividere med fire kommer nært opp mot kvadratroten av 15,68.

Vi ser at elevene vet hvordan de kvadrerer et tall, men de vet ikke at de kan bruke kvadratroten som en omvendt operasjon av kvadrering. På grunn av denne manglende kunnskapen må elevene bruke alternative strategier for å komme frem til et svar, og vi ser at de gjennom prøving og feiling kombinert med logisk resonnement og spørrestrategi kommer frem til et løsningsforslag som fungerer i dette tilfellet.

Schoenfeld (1992) beskriver hvordan kunnskapsdatabasen er sentral for den matematiske tankegangen. Når elevene ikke har den nødvendige kunnskapen som kreves, må de tenker nytt og forsøke å finne nye innfallsvinkler for å kompensere for den manglende kunnskapen.

4.2.3 Modellering for å forstå oppgaven bedre

Den neste episoden viser hvordan elevene, gjennom modellering i form av inskripsjoner fører til et gjennombrudd i løsningsprosessen:

95	Trym	regn først ut arealet [Kaja og Elin i kor: det har me gjort] så har dåkkår svar på-

96	Kaja	ja, men, me må jo, liksom tegn´an opp sånn dobbelt, det e jo det me ska finna ut, me ska ikkje
97	Elin	ka meine du?
98	Kaja	men se hvis at (tegner et kvadrat i lyfta) -nei vent litt, om me ikkje har (ser i boka til Elin) [Elin:det blir] ja men, det blir ikkje, me ska ikkje finn´ut me ska bare
99	Elin	men liksom [Kaja: me ska ikkje finn´ut] kossen går det an å få det te?
100	Kaja	det var bare det me sko finn´ut egentlig (ler)

Trym (95) bruker logisk resonnement for å forklare hvordan problemet kan løses, Kaja er ikke helt enig i Tryms resonnement og bringer modellering inn som en ny strategi. Til nå har elevene forsøkt å analysere problemet gjennom å lese problemteksten, stille spørsmål, bruke logisk resonnement og bruke prøving og feiling som strategier.

I følge problemløsningsmodellen hentet fra Borgersen (1994) bør elevene være innom en eller annen form for modellering for å sortere informasjonen i problemet. Elevene har allerede en modell av sandkassen i problemteksten og har derfor trolig tenkt at dette var tilstrekkelig. Når Kaja (96) nå foreslår at de skal tegne en ny modell i bøkene sine, oppdager hun at de tidligere har misforstått problemet. Dette skjer som et motargument til Tryms (95) resonnement for hvordan problemet best burde løses.

Elin forstår ikke helt hva Kaja har oppdaget, og følger derfor opp med et spørsmål for å få Kaja til å forklare nærmere.

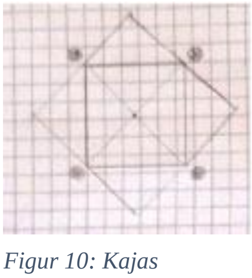
Kaja (98) sjekker med problemteksten i boka til Elin for å verifisere at hun har forstått problemet riktig. Dette kan ansees som en monitorerende strategi der hun sjekker at hun har forstått problemteksten riktig.

Elin (99) gjentar det Kaja sier (96 og 98) for å verifisere at hun har forstått riktig. Kaja avslutter med å bekrefte Elins antakelser.

Dette avsnittet viser hvordan bruk av ulike strategier kan føre til nye idéer og økt forståelse. Elevene har til nå vært i en fase med prøving og feiling, men idet Kaja tenker på å tegne en modell i boka, oppdager hun noe nytt ved problemet. Kaja er fremdeles ikke sikker på hvordan problemet skal løses, men hun oppdager at det ikke er nødvendig med beregninger for å komme frem til en løsning. Kajas innspill fører til en diskusjon om hvordan dette kan løses rent praktisk, og hvorvidt det er mulig å la trærne være inni sandkassen eller om disse skal være utenfor. I løpet av denne diskusjonen ser Elin en løsning på problemet, og diskusjonen om trær innenfor eller utenfor sandkassen blir mer uviktig.

Vi ser her at bruken av inskripsjoner fungerer som et medierende verktøy mellom det opprinnelige problemet og elevene. Ved å lage en modell i form av inskripsjoner blir Kaja bevisst nye elementer ved problemet som hun tidligere har oversett. Dette bekrefter hvordan problemet gradvis blir appropriert deltakerne i gruppa (Carlsen, 2008).

111	Elin	(tegner og viser i boka) det dobles då for det [Kaja: ja, det dobles jo] blir jo ein firkantdet dobles [Emil: eller!] uten å
112	Kaja	det gjør det jo
113	Elin	så gjør du bare sånt (tegner i boka) så treffe de ikkje buskene
114	Kaja	det gjør det jo
115	Kaja	då tror eg kanskje at me løys´an sånn då



Figur 10: Kajas inskripsjoner fra håndtrykksoppgaven

Elin har forstått at figuren kan dobles ved å «brette det ut» som en spå (figur 10). Hun skråstiller kvadratet slik at buskene blir stående langs sidekantene i stedet for ved hjørnene slik som tidligere. Kaja bekrefter at hun har forstått det Elin sier (114) og foreslår at dette er en mulig løsning på problemet (115).

Vi ser her hvordan Elin bruker Kajas inskripsjoner for å komme frem til en løsning. Bruken av hverandres utsagn og strategier kan sees på som en appropriering av de medierende verktøyene (Moschkovich, 2004, s. 51). Arcavi (2003) forklarer hvordan bruken av inskripsjoner kan føre til at elevene ser løsningen direkte, og hvordan inskripsjonene kan brukes som et ledd i bevisføringen.

4.2.4 Monitorerende spørsmål i sluttfasen

Monitorerende spørsmål kan bidra til å kvalitetssikre løsningsforslagene. Gjennom denne typen spørsmål må elevene argumentere for at funnene de har gjort, og beregningene de har foretatt er nødvendige og korrekte.

Neste episode viser hvordan monitorerende spørsmål kan generere forklaringer og logiske resonnement.

167	Elin	Men e me sikre då?
168	Emil	ja, for eg tror på at de ikkje konne ha sandkassen på, opp, nei under, eh, under buskene
169	Emil	då måtte de riva de
170	Elin	ja, men står det någe at, det skal fremdeles vær kvadratisk!
171	Kaja	ja, men det e kvadratisk
172	Kaja	jo! se då! (snur arket til Elin) hvis du snur ´an sånn så e
173	Elin	nei, det e ikkje det
174	Kaja	jo! se då! (snur arket til Elin) hvis du snur ´an sånn så e ´an jo et kvadrat
175	Elin	åja! ja, det var visst det (smiler)

Elin (167) stiller et monitorerende resonnement der hun får de andre på gruppa til å tenke gjennom hvorfor de mener at løsningsforslaget er riktig, eller om det er elementer de er usikre på.

Emil (168-169) begrunner hvorfor han mener at løsningsforslaget er riktig ut ifra hvordan han tolker problemet. Han legger premisser for hvordan han tolker problemet når han sier at han ikke tror at buskene kunne vært innenfor sandkassen. Emil bruker på denne måten et logisk resonnement der han begrunner hvorfor han mener at gruppa har funnet løsningen på problemet.

Kvadratet er nå skråstilt, noe som gjør at Elin (170) ikke oppfatter at den nye figuren fremdeles er et kvadrat. Hun er derfor usikker på hvorvidt de har funnet riktig løsning. Kaja (171-172) viser Elin, ved å snu arket, at figuren fremdeles er kvadratisk. Vi ser her hvordan Kajas og Elins kunnskapsdatabase i utgangspunktet ikke er like. Elin har en misoppfatning om at et kvadrat ikke lenger er et kvadrat når det skråstilles, dette er ikke Kaja enig i. Hun forklarer, gjennom å vise Elin, at dette ikke kan stemme. Det kan se ut som om Elin forstår hva Kaja mener og på denne måten får rettet opp i misoppfatningen sin.

Siste sekvens er hentet fra siste time. Denne timen fikk elevene anledning til å presentere en av problemene som de hadde arbeidet med. Elevene i denne gruppa valgte å presentere sandkasseoppgaven. Samtalesekvensen er hentet fra dialogen mellom lærer og elever etter at de har presentert problemet. Læreren lurer på om alle tolket dobbelt så stor som det samme som dobbelt areal, eller om noen av elevene tolket dette som dobbel omkrets.

83	Lærer	ja, og det e jo, då e det jo åbent for tolkning, men diskuterte dåkkår det? om det var omkrets eller -
84	Kaja	ja for me trodd-
85	Lærer	eller arealet som det skulle ver
86	Kaja	for me trodde fysst at me sko regna ut kor mye av arealet det hadde vært hvis me liksom hadde det dobbelt så stort, men så fant me ut at me liksom bare sko gjør det sånn [lærer: mhm]
87	Lærer	ja, for det står, det står faktisk i oppgaven bare at du ska utvida sandkassen sånn at den blir dobbelt så stor
88	Kaja	men då, me fant arealet sånt

Kaja (86) forklarer hvordan elevene først tenkte at de skulle finne det dobbelte arealet ved hjelp av regning, men at de etter en tid oppdaget at de skulle vise hvordan det var mulig å utvide sandkassen uten å flytte på buskene. Kaja (88) konkluderer til slutt med at de fant arealet gjennom å «brette ut» figuren. Kaja forklarte tidligere at de valgte å regne ut arealet av de to flatene for å kvalitetssikre at de hadde funnet en figur med dobbelt areal.

Vi ser her hvordan Kaja reflekterer over hvor viktig det er å lese problemet og forstå hva problemet innebærer før de går i gang med løsningsprosessen.

I løpet av denne sekvensen ser vi hvordan elevene nyttiggjør seg de ulike strategiene slik at de oppnår fremgang i løsningsprosessen. De stiller spørsmål underveis og legger vekt på at alle elevene i gruppa skal ha samme forståelse av problemet. Når de gjør nye oppdagelser forsøker de å forklare til de andre på gruppa hvordan de tenker, og de er opptatt av å forstå andres tankegang og resonnement. På denne måten approprierer de hverandre som medierende verktøy, og den matematiske tankegangen bygger på felles forståelse, felles aktivitet og felles fokus.

5 Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg samle trådene fra kapittel fire og se på disse i lys av forskningsspørsmålene fra kapittel 1. Kapittelet er delt inn i tre hoveddeler der hver av hoveddelene omhandler hvert av de tre forskningsspørsmålene.

5.1 Problemløsningsstrategier

Denne delen av kapittelet er todelt. Jeg vil først se på bruken av strategier som brukes i forbindelse med håndtrykksoppgaven, deretter vil jeg se på hvordan elevene benytter ulike strategier knyttet til sandkasseoppgaven.

I løpet av denne delen av kapittelet vil jeg forsøke å svare på første forskningsspørsmål:

Hvilke strategier kan identifiseres når elever på 8. trinn arbeider med problemløsning i smågrupper?

5.1.1 Strategier brukt i håndtrykksoppgaven

I løpet av første time benytter elevene seg av flere strategier. De bruker blant annet logisk resonnement, monitorerende spørsmål, modellering gjennom inskripsjoner og praktisk gjennomføring av problemet og forenkling av selve problemet.

Jeg vil i dette kapittelet benytte begrepene inskripsjoner om modeller som blir skrevet ned i bøkene. Dette gir et skille mellom den modelleringen elevene gjør i form av tegning og skriving og modellering ved hjelp av praktisk gjennomføring og bruk av blyanter.

Elevene starter med å arbeide med håndtrykksoppgaven. De har tidligere ikke arbeidet nevneverdig med problemløsning, og har heller ikke på dette tidspunktet fått noen tips til hvordan de kan arbeide med problemet. Gruppa kommer likevel raskt i gang med problemet, de bruker kort tid på å komme frem til et løsningsforslag. På dette tidspunktet stilles ingen spørsmål ved løsningen, og elevene virker tilfreds med at de har funnet en løsning såpass raskt.

Elever med manglende erfaring med problemløsning har gjerne erfaring med at matematikkoppgaver er oppgaver som skal løses innen rimelig kort tid. Hvis man ikke klarer dette, er dette ensbetydende med å feile. Dette kan forklares ut ifra elevenes erfaringer fra rutineoppgaver der de presenteres for en fremgangsmåte som siden skal benyttes til å løse en rekke gitte oppgaver (Schoenfeld A. , 1992). Når elevene nå finner en løsning rimelig raskt kan dette oppleves som en indikasjon på at de har mestret oppgaven.

Etter tilbakemeldingen fra lærer, oppdager blant annet Kaja at antall håndtrykk virker for høyt. Emil og Elin kommer frem til ulike løsninger og gruppa begynner å diskutere hvilken løsning som er riktig.

Elevene ender opp med to ulike metoder som i øyeblikket ender opp med to ulike svar. De strever lenge med å finne ut hvilken av metodene som er riktige, og klarer ikke helt å forstå hvorfor de to metodene fører til ulike svar.

Elins metode bygger på regning og logisk resonnement. Hun forklarer til de andre elevene i gruppa hvordan hun tenker, og etter en tid får hun de andre elevene på gruppa med på tankegangen.

Emil lager en modell som han aktivt bruker når han skal finne svaret på problemet. Hans figur synliggjør godt hvordan han tenker, og de andre elevene på gruppa lager lignende figurer i bøkene sine for å følge Emils resonnement. Bruken av inskripsjoner blir i denne sammenhengen et medierende verktøy som bygger bro mellom selve problemet og elevene. Modellen synliggjør hvordan Emil tenker noe som fører til at det dannes en felles forståelse og oppmerksomhet i gruppa. I følge Carlsen (2008) er et medierende verktøy noe som danner en bro mellom subjekt og objekt der subjektet er eleven og objektet er problemet. Emil bruker figuren til å videreformidle til de andre i gruppa hvordan han tenker og legger dermed til rette for felles aktivitet-, fokus- og forståelse. Dette er ifølge Säljö (2005) nødvendig for at inskripsjonen skal kunne approprieres.

Emil ser raskt et mønster når han teller antall håndtrykk for de ulike personene i gruppa, noe som gjør at han ikke teller antall håndtrykk for alle personene, men generaliserer etter at han har telt antall håndtrykk for tre av personene. Han kommer da frem til at totalt antall håndtrykk må være 171.

Elin trenger litt lenger tid til å klare å få de andre elevene med seg på sin tankegang. En av årsakene til dette kan være at hun kun bruker språket og logisk resonnement for å forklare hvordan hun tenker. Det er ikke sikkert at de andre elevene på gruppa fullt ut forstår helt hvordan hun tenker, i motsetning til Emil som bruker inskripsjoner for å forklare. Når elevene skjønner Elins resonnement, velger de å kontrollere svaret ut ifra Emils metode og strategi. De ser da at svarene ikke samstemmer, noe som må bety at én av metodene ikke medfører riktighet. Etter som Emils resonnement er såpass konkret og lett å følge, fører dette til at elevene på gruppa forkaster Elins metode.

Ved slutten av første time forenkler elevene problemet til å gjelde tre ektepar i stedet for ti, slik det er i det opprinnelige problemet. Elevene teller først antall håndtrykk per par og kommer frem til at dette blir 12 håndtrykk. Dette stemmer ikke med Emils metode, noe som gjør at elevene forsøker å telle etter samme rekkefølge som Emil brukte på det opprinnelige problemet. I denne seansen glemmer to av elevene å hilse på den fiktive personen i form av Emils pennal, noe som medfører et resultat på ti håndtrykk. Elevene godtar svaret de nå har, uten videre refleksjon på hvorfor de ved første forsøk fikk et annet svar. Vi ser her at gruppa ikke stiller monitorerende spørsmål slik man kanskje kunne forventet. En av årsakene til dette kan være mangel på erfaring knyttet til arbeid med problemløsning og arbeid i smågrupper. Elin har tidligere stilt kritiske spørsmål til Emils metode, men har da ikke fått gjennomslag fra de andre på gruppa, dette kan ha ført til at hun nå har resignert.

Elin forsøker å få de andre på gruppa med på å telle antall håndtrykk i en annen rekkefølge, men bruker da Emils inskripsjoner til å vise hvordan dette kan gjøres. De ser da at Elins metode kan overføres fra ti ektepar til tre ektepar. Denne oppdagelsen fører til forvirring i gruppa. De har allerede approprierte Emils metode og har en felles forståelse av logikken som ligger bak denne, når Elin da presenterer en lignende metode som bygger på de samme prinsippene, oppstår det usikkerhet i gruppa.

Elin har ved flere anledninger foreslått at de bør telle antall håndtrykk for hver av personene i bryllupet, men har blitt avbrutt av medelever. Dette kan skyldes mangel på delt fokus i gruppa. En annen forklaring kan være at elevene allerede har appropriert Emils metode kontra Elins, noe som gir Emil en høyere posisjon i gruppa på dette tidspunktet. Elin må derfor være mer tydelig når hun mener noe hvis hun ønsker å få gjennomslag i gruppa.

Vi ser at elevene bruker både inskripsjoner, logisk resonnement og monitorerende spørsmål. Likevel klarer ikke elevene å forklare hvorfor de får to ulike løsninger på problemet. Det kan se ut som om elevene står fast i den samme tankegangen, de stiller monitorerende spørsmål, men klarer ikke å svare tilstrekkelig på disse. Gjennom prosessen kan vi se en viss umodenhet knyttet til bruken av strategier, noe som er naturlig etter som elevene tidligere har hatt minimal erfaring med problemløsningsoppgaver. Vi ser her at elevenes arbeid kan minne om slik uerfarne problemløsere arbeider med problemløsning ifølge Schoenfeld (1992) (se figur 1).

I friminuttet får elevene tilbakemeldinger om at de andre gruppene har kommet frem til et annet svar. Dette svaret stemmer med Elins løsningsforslag, og elevene forsøker nå, mer målrettet å finne ut hvorfor Emils metode ikke fører frem til samme løsning. Elin har nå lagt frem blyanter som skal representere hver av personene i bryllupet, og elevene begynner å telle antall håndtrykk for hver av de 20 personene. De oppdager nå at de har antatt feil antall håndtrykk for de siste ti personene, og kommer til slutt frem til at riktig antall håndtrykk må være 180.

Elevene resonnerer ikke over hvorfor de fikk ulike svar når de forenklet problemet. I gjennomgangen i klassen forklarer Emil at noe av problemet var at gruppa store deler av tiden forsøkte å bevise at løsningen skulle være 171, noe som ikke var riktig løsning. Schoenfeld (1992) forklarer at en slik fremgangsmåte alltid vil føre til at problemløseren(e) ikke kommer frem til riktig løsning. Dette så vi også i prosessen med elevgruppa. Elevene klarte å snu denne tendensen etter at de hadde fått nye innspill fra de andre elevene i klassen.

Refleksjonen som gjøres i etterkant er viktig for den videre utviklingen av problemløsningsferdighetene hos elevene. Emil gjør en viktig oppdagelse da han ser hva som har gått galt, han reflekterer ikke over hvordan dette kunne vært unngått, og lærer stiller heller ikke spørsmål for å få klarhet i dette. Elin reflekterer minimalt over dette i klassen. Det kunne vært spennende å sett hvordan elevene hadde reflektert over løsningsprosessen sammen med gruppa. Dette gjøres imidlertid ikke.

5.1.2 Strategier brukt i sandkasseoppgaven

Dette er det siste problemet elevene arbeider med. Elevene starter med å forsøke å forstå hva problemet går ut på gjennom å definere hva som er dobbelt så stort. Elevene er opptatt av at alle på gruppa skal ha samme oppfatning av hva det vil si med «dobbelt så stor», de legger også premissene for problemet sammen slik at alle arbeidet ut ifra samme kriterier.

Elin forsøker å begrunne hvilke metoder hun ønsker å bruke, men gir uttrykk for at hun er usikker. Elevene på gruppa enes om å forsøke å bruke regning, noe som fører til at de møter utfordringer rent matematisk som ligger utenfor gruppas kunnskapsdatabase. Når jeg her henviser til gruppas kunnskapsdatabase, mener jeg summen av hver elevs kunnskapsdatabaser, der elevene kan dra nytte av hverandres kunnskaper.

Elevene går over i en fase med prøving og feiling, og det er da at Kaja ønsker å lage en modell i form av inskripsjoner i boka. Inskripsjonen får da rollen som et medierende verktøy mellom henne og problemet. Hun oppdager noe nytt ved problemet som de tidligere har oversett, og videreformidler dette til de andre på gruppa. Elin approprierer raskt Kajas inskripsjon og lager en ny modell i boka si der hun kommer frem til et løsningsforslag.

Etter at Elin har forklart løsningsforslaget til resten av gruppa ved hjelp av inskripsjoner i arbeidsboka, forsøker elevene å bevise at dette stemmer ved hjelp av regning.

Elevene har, i løpet av arbeidet med sandkasseoppgaven, arbeidet systematisk ved hjelp av problemløsningsmodellen (Borgersen, 1994), de bruker modellering i form av inskripsjoner og regning, spørrende strategi og monitorerende strategier. Før problemet presenteres i klasserommet reflekterer elevene over løsningsprosessen og ser tilbake på arbeidet de har gjort. I klasserommet forteller Kaja hvordan de kunne brukt lengre tid på å forstå problemet før de gikk videre.

Det er relativt liten tid mellom håndtrykksoppgaven som var det første problemet og frem til sandkasseoppgaven som var siste problem elevene arbeidet med i løpet av tiden jeg var tilstede, vi ser likevel at elevene fremgangsmåte gradvis minner mer om arbeidsmåtene til mer rutinerte problemløsere (Schoenfeld A. , 1992) (se figur 2).

5.2 Utvikling av problemløsningsferdigheter

Jeg vil, gjennom denne delen av kapittelet se nærmere på hvordan elevene klarte å nyttiggjøre seg ulike problemløsningsstrategier, og hvorvidt det er mulig å identifisere en forskjell fra håndtrykksoppgaven til sandkasseoppgaven. I denne anledning vil jeg forsøke å svare på andre forskningsspørsmål:

> Hvilket utbytte vil elever på 8. trinn kunne ha av økt fokus på problemløsning, problemløsningsstrategier og metakognisjon i matematikkundervisningen?

Problemløsningsferdigheter er noe som utvikles over tid. For å bli en god problemløser trenger man erfaring (Schoenfeld A. , 1992). Elevgruppa hadde i underkant av to uker til å arbeide med ulike problem, og de fikk mulighet til å arbeide med fire problem i løpet av denne tiden. Dette kan ikke karakteriseres som god tid, eller noe som gir elevene tilstrekkelig med erfaring knyttet til problemløsningsoppgaver. Fra tidligere hadde elevene minimal erfaring med problemløsning, de hadde ved juletider arbeidet sporadisk med problem hentet fra en julekalender på nett, men dette var ikke systematisert. Når elevene nå fikk mulighet til å arbeide med problemløsning i grupper og fikk veiledning og krav til refleksjon rundt løsningsprosessen, var det likevel mulig å se en viss utvikling.

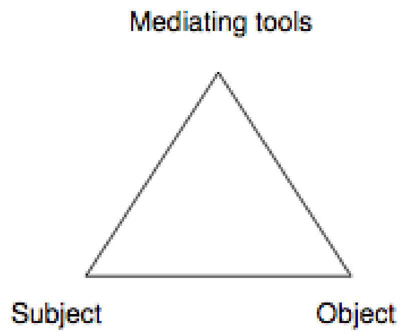
Første problem elevene arbeidet med var håndtrykksoppgaven. Elevene brukte flere strategier og arbeidet aktivt sammen om problemet, likevel brukte de betydelig tid før de oppdaget hvorfor de fikk ulike svar med de to løsningsmetodene.

Elevene stadfestet raskt at Emils metode var riktig, noe som førte til at andre metoder ble målt opp mot denne for å verifisere hvorvidt metoden var riktig eller gal. Etter å ha prøvd ulike metoder som ga motstridende svar i forhold til Emils metode, valgt elevene likevel å fastholde denne metoden. Det var først etter at elevene oppdaget at andre elever hadde fått et annet svar at elevene for alvor begynte å se på hvorfor Emils metode ikke førte til samme svar som de andre metodene.

Spørsmålet som reiser seg er hvorfor elevene brukte så lang tid til å komme frem til riktig konklusjon på tross av at de brukte en rekke ulike strategier, både i form av modellering av ulik karakter, ulike løsningsstrategier og monitorerende strategier? For å kunne svare på dette kan det være hensiktsmessig å se på hvordan elevene brukte strategiene.

For at strategier skal kunne ha en hensikt i gruppa, er det nødvendig at strategiene fungerer som medierende verktøy mellom elevene og problemet. Det medierende verktøyet må videre approprieres i gruppa for at gruppa skal kunne dra nytte av strategiene som medierende. Carlsen (2008) definerer fire betingelser for at et medierende verktøy skal kunne approprieres, her nevnes felles fokus og oppmerksomhet og felles forståelse for ytringer. Vi ser at de andre elevene har problemer med å forstå Elins metode, noe som fører til at de ikke deler samme oppmerksomhet eller forståelse for de ytringene Elin gjør.

Carlsen (2008) har utarbeidet en modell (figur 11) der han viser hvordan medierende verktøy fungerer mellom elvene og problemet:



Figur 11: Forhold mellom medierende verktøy, subjekt og objekt

For at elevene skal kunne appropriere medierende verktøy er det avgjørende at de kommuniserer med hverandre (Carlsen, 2008).

Man kan ut i fra diskusjonen over anta at elevene ikke klarte å appropriere de medierende verktøyene i tilstrekkelig grad, og at dette kan ha vært avgjørende for hvorfor de valgte å fastholde Emils løsningsforslag på tross av at de gjorde flere oppdagelser som skulle tilsi at dette var feil svar.

Da elevene arbeidet med sandkasseoppgaven, så vi at elevene var opptatt av at alle på gruppa skulle være med, og at avklaring av begreper og felles forståelse for problemet sto sentralt. Elevene vekslet mellom ulike strategier og kontroll med problemteksten. Da Kaja skulle lage en modell i form av inskripsjoner, førte dette til nye oppdagelser. Kajas inskripsjoner førte videre til at Elin fant en ny løsning.

I forkant av håndtrykksoppgaven har elevene ikke hatt noen form for presentasjon av problemløsning og problemløsningsstrategier. Dette får elevene presentert i etterkant slik at de kan trekke paralleller mellom arbeidet med håndtrykksoppgaven og teoriene som presenteres (vedlegg 6).

Løsningsprosessen til de to problemene fremtrer som ulik. Det kan være mange årsaker til dette. Blant annet at vi her sammenligner to forskjellige problem som stiller ulike krav til matematiske kunnskaper hos elevene. Det er likevel interessant å se på hvordan elevene nyttiggjør seg problemløsningsstrategier og approprierer seg disse som medierende verktøy i løpet av løsningsprosessen med de to problemene.

Et problem som kan oppstå i forbindelse med arbeid i smågrupper er at noen elever ikke deltar i samme grad som de andre elevene. I løpet av perioden elevene arbeidet med problemløsning ble det observert at Malin nesten aldri deltok i diskusjoner. Hun noterte stille ned det de andre på gruppa sa og gjorde, men hadde aldri forslag til hvordan problemene skulle løses. Ifølge lærer hadde Malin lav måloppnåelse i matematikk, og hun ønsket derfor å sette Malin sammen med denne gruppa i håp om at de andre elevene kunne være til hjelp. De andre elevene på gruppa forsøkte enkelte ganger å invitere henne med i diskusjonen uten resultat. I følge Bjuland (2002) vil arbeid i smågrupper fungere best hvis det ikke er for store forskjeller i nivå hos elevene. Dette kan være noe av forklaringen til at Malin ikke er deltakende i diskusjonen. Hvis den matematiske diskursen holder et for høyt nivå, kan det være at Malin ikke føler at hun har noe å bidra med. Man kan stille spørsmål til hvor stort utbytte Malin har hatt av å delta i denne gruppa når de har arbeidet med problemløsning. Et annet spørsmål som melder seg er hvorvidt Malin hadde hatt et bedre utbytte av å arbeide sammen med elever som lå nærere hennes nivå i matematikk.

I forbindelse med forskningsspørsmålet vil man, med bakgrunn i det empiriske materialet, kun kunne gjøre noen antakelser basert på tendenser som kan identifiseres. Bruken av problemløsningsstrategier i forbindelse med sandkasseoppgaven kan indikere en utvikling der elevene i større grad approprierer medierende verktøy. Det kunne vært interessant å sett hvordan elevene hadde utviklet disse ferdighetene over tid, og hvorvidt dette fører til andre ringvirkninger knyttet til matematisk tenkning og resonnement. En slik studie krever observasjon over tid, noe som strekker seg utover denne oppgavens rammer.

6 Konklusjon

Dette er en liten, kvalitativ studie, noe som gjør det vanskelig å generalisere på bakgrunn av det innsamlede materialet. Likevel er det gjort interessante funn som impliserer videre forskning. Jeg ønsker derfor å oppsummere de tendensene som er funnet i studien.

Flyveberg (2006) oppsummerer dette på en god måte:

> Social science has not succeeded in producing general, context-independent theory and, thus, has in the final instance nothing else to offer than concrete, context-dependent knowledge. (s. 223)

6.1 Resultat

For å kunne oppsummere de resultatene som er gjort i studien er det hensiktsmessig å se disse i lys av forskningsspørsmålene. Denne delen er derfor tredelt for å kunne svare på hvert av de tre forskningsspørsmålene.

Hvilke strategier kan identifiseres når elever på 8. trinn arbeider med problemløsning i smågrupper?

For å se nærmere på hvilke strategier som kan identifiseres når elever på 8. trinn arbeider med problemløsning i smågrupper kan det også være hensiktsmessig å se på hvordan de bruker de ulike strategiene.

Gjennom arbeidet med de to problemene som er presentert i studien finner vi flere eksempler på at elevene bruker ulike former for modellering. Dette viser seg gjennom inskripsjoner og blant annet praktisk gjennomføring av problemet.

Elevene bruker spørsmål og monitorerende strategier i varierende grad. Monitorerende strategier kan bidra til selvregulering i løsningsprosessen, og på denne måten kunne hjelpe elevene til å komme frem til riktig løsning (Schoenfeld A. , 1992). Mulige årsaker til at elevene benytter disse strategiene i varierende grad, kan være mangel på erfaring knyttet til dette. Gjennom videre arbeid med problemløsning vil elevene få mulighet til å utvikle bedre ferdigheter knyttet til monitorering. Dette kan være nyttig, både for problemløsning i seg selv, men også i forbindelse med andre typer oppgaver der elevene bør ha oversikt over hvordan de arbeider, og hvorfor de tar de valgene de tar.

I håndtrykksoppgaven ser vi at elevene forenkler problemet slik at de kan gjennomføre problemet i praksis, og på den måten komme frem til en løsning. I sandkasseoppgaven ser vi at de forsøker å lage nye problem med utgangspunkt i det opprinnelige problemet. Gjennom forenkling og spesialisering ser vi at elevene evner å tilpasse problemet til ulike nivå slik at det i størst mulig grad passer til gruppas faglige nivå.

I sandkasseoppgaven ser vi hvordan elevene går i gang med prøving og feiling når de er usikre på fremgangsmåten. Gjennom denne strategien kan elevene oppleve å få nye idéer til hvordan problemet kan løses.

Vi ser at elevene benytter en rekke ulike strategier når de skal løse matematiske problemer. Bruken av strategier alene er likevel ikke avgjørende for hvorvidt elevene kommer frem til riktig løsning. Etter å ha arbeidet med det innsamlede materialet, kan man finne tendenser som gjør det naturlig å spørre hvordan elevene klarer å nyttiggjøre seg disse strategiene. Vi snakker her om strategier som medierende verktøy og elevenes evner til å appropriere disse. Hvis elevene ikke klarer å appropriere de verktøyene de har tilgjengelig, spiller det liten rolle hvor mye verktøy de har. I håndtrykksoppgaven lager elevene en oversiktlig modell fra problemet i form av inskripsjoner, men i oppstarten er dette bare en modell i bøkene og fungerer i liten grad som et medierende verktøy fordi elevene i liten grad approprierer verktøyet og mulighetene som ligger i bruken av dette. Først etter friminuttet ser elevene ut til å nyttiggjøre seg inskripsjonene i større grad. Dette støttes også av teorien som sier at appropriering skjer som en gradvis prosess.

I løpet av den korte perioden jeg observerte elevene så jeg små endringer som kunne indikere en utvikling. Denne utviklingen kan knyttes til appropriering av medierende verktøy og bruken av monitorerende strategier i problemløsningsprosessen. Det er spennende å se disse endringene på så kort tid, og det hadde vært interessant å se hvorvidt denne utviklingen fortsatte utover en lengre periode eller om dette var en naturlig tilfeldighet knyttet til valg av problem.

6.2 Videre forskning

Dette er en studie som strekker seg over et kortere tidsrom. Det kan være interessant å se på hvilke fordeler elever vil kunne ha av å arbeide regelmessig med problemløsning gjennom en lengre periode. Man vil, i en slik studie, lettere kunne avdekke flere tendenser, fordeler og eventuelle ulemper ved å ha et økt fokus på problemløsning i undervisningen.

Carlsen har blant annet bidratt til betydelig forskning på bruken av medierende verktøy knyttet opp mot problemløsning i norsk, videregående skole. Det er likevel lite forskning på dette området knyttet opp mot norsk grunnskole. På samme tid legger Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2013) føringer for at regning, og herunder problemløsning skal inngå i flere fag enn matematikk. Videre forskning på dette området vil kunne bidra til økt kunnskap om matematikkundervisning som bryter med de tradisjonelle undervisningsmetodene i norsk skole, og kan, på sikt, bidra til en utvikling i norsk matematikkundervisning i grunnskolen

6.3 Pedagogiske implikasjoner

For å si noe om pedagogiske implikasjoner, kan det være hensiktsmessig å vite noe om lærer og elevers opplevelse av å arbeide med problemløsning. Gjennom intervjuene som ble gjennomført etter observasjonsperioden, fikk jeg mulighet til å spørre både elever og lærer om hvordan det hadde vært å arbeide på denne måten.

Elevene ga uttrykk for at de likte å arbeide med problemløsning, men at det også var svært krevende. Elin ga uttrykk for at hun skulle ønske at de fikk mer tid til å arbeide på denne måten, fordi hun mente at dette var noe som krevde mer øvelse enn det de hadde fått gjennom de seks timene jeg hadde vært tilstede.

Gjennom et uformelt, semistrukturert intervju med lærer, kunne lærer bekrefte elevenes opplevelser av å arbeide med problemløsning i smågrupper. Arbeidsformen krevde mye av læreren i den forstand at dette var en ny måte å arbeide på der lærer fikk en veiledende rolle i stedet for en rolle der hun hadde svarene klar til elevene. Hun ga uttrykk for at det til tider hadde vært vanskelig å holde tilbake når hun så at elevene gjorde samme feil gjentatte ganger, men at hun hadde tro på denne måten og arbeide på, og derfor heller forsøkte med veiledende spørsmål. Lærer har tro på at arbeid med problemløsning kan hjelpe elevene til å se koblinger i matematikken som de ellers ikke får mulighet til å oppdage gjennom vanlige rutineoppgaver, og at de derfor vil være bedre utrustet til å løse mange av oppgavene i del to på tentamener og avsluttende eksamen i matematikk for ungdomstrinnet. Hvorvidt dette er oppgaver som egner seg til problemløsning er ikke undersøkt i denne studien, men en slik sammenheng kunne vært interessant å undersøke nærmere, ikke minst med tanke på kunnskapsløftets fokus på matematisk problemløsning i flere fag.

Lærer fremhevet også det positive med å la alle elevene i klassen arbeide med samme utvalg oppgaver, uavhengig av nivå. Enkelte elever i klassen hadde vanligvis tilpasset matematikkundervisning i liten gruppe og deltok derfor vanligvis ikke i ordinær matematikkundervisning. Lærer hadde merket seg at disse elevene uttrykte en stolthet over å få være med og arbeide med matematikk sammen med klassen, og at også disse hadde bidratt med en aktiv rolle i elevgruppene. Hun fortale videre at dette var noe hun ønsket å bruke i andre klasser og sammen med en gruppe elever som fikk ekstra oppfølging i forbindelse med matematikkundervisningen. Dette var elever som tidligere hadde opplevd flere nederlag knyttet til matematikkfaget, og hun mente at arbeid med problemløsing i smågrupper kunne være en innfallsvinkel for å hjelpe elevene til å skape positive erfaringer og engasjement knyttet til matematikk.

Klassens lærer mente at dette var en aktivitet som, ikke bare førte med seg goder i matematikken, men også i form at et styrket sosialt samhold i klassen. Hun begrunnet dette med at hele klassen var samlet om én aktivitet og at elevene fikk trening i å samarbeide med flere elever i en liten gruppe.

Gjennom å la elevene presentere både det de mener er riktig løsningsforslag, men også det som viser seg å være feil, vil man kunne oppleve diskusjoner som avdekker vanlige misoppfatninger hos elevene. Elevene får selv mulighet til å reflektere rundt hvorfor de mener dette er vanlige misoppfatninger og hvordan slike misoppfatninger kan unngås i fremtiden. For å muliggjøre dette kreves det at settes av tid til å la elevene presentere arbeidet sitt med ulike problem, samt åpne for diskusjon i klassen knyttet til de aktuelle løsningsforslagene.

Implikasjoner til undervisningen vi være et enda større fokus på refleksjon og oppsummering i klasserommet. Samtidig kan det være hensiktsmessig å la elevene arbeide med problemløsning på jevnlig basis slik at dette ikke bare blir noe man arbeider med fordi det er gøy, eller fordi læreplanen legger opp til at dette skal inngå i undervisningen. Ved jevnlig problemløsning i undervisningen kan man anta at elevene gradvis utvikler ferdigheter som gjør dem bedre rustet til denne typen problem.

Referanser

Abelkonkurransen. (2010, November 2010). Hentet fra http://abelkonkurransen.no/problems/abel_1011_r1_prob_nb.pdf

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52: 215–241.

Ball, L. D., Hill, C. H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. *American Educator*, 14-46.

Björkqvist, O. (2007). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (red.), *Matematikk for skolen* (ss. 51-70). Bergen: Fagbokforlaget.

Bjuland, R. (2002). *Problem solving in geometry Reasoning processes of student teachers working in small groups: A dialogical approach.* Bergen: Publisert doktorgradsavhandling. Universitetet i Bergen.

Bjuland, R. (2005). Dialogiske tilnærminger i klasserommet: Utvikling av matematiske begreper gjennom lærer-elev dialog i klasserommet eller gjennom elevsamarbeid i smågrupper. *Voksenopplæringskonferansen i Trondheim 14.15. mars 2005* (ss. 66-76). Trodnheim: Senter for voksenopplæring.

Bjuland, R. (2007). Adult Students´ Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education. *The Montana Mathematics Enthusiast, Vol 4, no.1*, ss. 1-30.

Bjuland, R. (2007a). Adult Students´ Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education. *The Montana Mathematics Enthusiast, Vol 4, no.1*, ss. 1-30.

Bjuland, R. (2007b). Mathematically productive discourse among student teachers. *Nordic Studies in Mathematics Edycation*, 12(2), 33-55.

Bjuland, R. (2012). The mediating role of a teacher's use of semiotic resources in pupils' early algebraic reasoning. *ZDM - The Internastional Journal on Mathematics Education*, 44(5). doi:10.1007/s11858-012-0421-2.

Borgersen, H. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordisk matematikkdidaktikk vol 2, nr. 2*, ss. 6-35.

Carlsen, M. (2008). *Appropriating mathematical tools through problem solving in collaborative small- group settings.* Pubisert doktorgradsavhandling. Kristiansand: University of Agder.

Carlsen, M. (2009). Reasoning with Paper and Pencil:The Role of Inscriptions in Student Learning of Geometric Series. *Mathematics Education Research Journal.*, Vol. 21, No. 1; 58-84.

Carlsen, M. (2010). Appropriating geometric series as a cultural tool: a study of student collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, 74:95–116.

Dalland, O. (2013). *Metode og oppgaveskriving.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Flavell, J. H. (1979, Oktober). Metacognition and Cognitive Monitoring A Nwe Area of Conitiv-Developmental Inquiry. *American Psycologist Vol. 34, nr. 10*, ss. 906-911.

Flyveberg, B. (2006). Five Misunderstandings About Case-Study Research. *Qualitative Inquiry*, 12 (2): 219-245.

Heyd-Metzuyanim, E., & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying. *International Journal of Educational Research*, 128–145.

Johannessen, A., Tufte, P., & Christoffersen, L. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode.* Oslo: Abstrakt Forlag.

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1987). *Mønsterplan for grunnskolen.* Aurskog: Aschehoug.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). Analysemetoder. I S. Kvale, & S. Brinkmann, *Det kvalitative intervju* (ss. 121-157). Oslo: Gyldendal.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal Vol. 27, No 1*, 29-63.

Leathham, K. (2006). Viewing mathemtaics teachers´ beliefs as sensible systems. *Journal of Matematics Teacher Education*, 9: 91-102.

Linell, P. (2007). Dialogicality in languages, minds and brains: is there a convergence between dialogism and neuro-biology? *Language Sciences*, vol. 29; s. 605-620.

Mason, J., & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking though problem solving.* Geelong, Victoria: Deakin University Press.

Mediering. (2014, Mai). Hentet fra synonymer.no: http://synonymer.no/mediere.html

Moschkovich, J. N. (2004). Appropriating mathematical practices: A case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics*, 55: 49-80.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton: Princeton University Press.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis Et sosiokulturelt perspektiv.* Oslo: Cappelens forlag.

Säljö, R. (2005). *Lärande & kulturella redskap. Om lärprocesser och det kollektiva minnet.* Stockholm: Norstedts Akademiska Förlag.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1992). LEARNING TO THINK MATHEMATICALLY:PROBLEM SOLVING, METACOGNITION, AND SENSE-MAKING IN MATHEMATICS. I D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 334-370). New York: MacMillan.

Skott, J. (2001). The emerging practices of a novice teacher: the roles of his school mathematics images. *Journal of Matematics Teacher Education* , 4: 3-28.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. I R. Charles, & E. Silver (Eds), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (ss. 1-22). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Store Norske Leksikon. (2009, Februar 14.). Hentet fra Kunst: http://snl.no/kunst

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag - føremål.* Hentet fra Kunnskapsløftet: http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal/

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. I L. Vygotsky, *Mind and Society* (ss. 79-91). Cambridge: MA: Harvard University Press.

Yin, R. (2014). *Case Study Resarch Design and Methods.* Thousand Oaks CA: SAGE.

Vedlegg 1: Informasjonsskriv vedrørende forskningsprosjekt i skolen

Informasjonsskriv vedrørende forskningsprosjekt i skolen

Jeg ønsker å informere deg/dere som foreldre til barn i NN- skole om forskningsprosjektet jeg ønsker å gjennomføre i klassen. Målet med prosjektet er å tilegne seg kunnskaper og erfaringer om læring og undervisning i matematikk. Arbeidet vil dreie seg om arbeid med problemløsning kombinert med bevisstgjøring rundt hvordan den enkelte elev selv lærer best, og hvilke strategier som brukes og passer best til hver enkelt elev, også kalt metakognitive ferdigheter.

Det er derfor ønskelig at jeg får anledning til å observere klassen (4-7 skoletimer) og samle inn data som feltnotater, intervju (to med elever i grupper og to med lærer) og oppgaveanalyse gjennom innsamling av aktuelle arbeidsbøker. Det vil bli gjort video- og lydopptak fra undervisningen og intervjuene. Alle observasjoner og kommentarer fra lærer og elever vil bli behandlet konfidensielt og anonymisert slik at de ikke vil kunne spores tilbake til elevene. Gjennom hele prosessen (innsamling, bearbeidelse, analyse og presentasjon av data) vil jeg være bevisst på å anonymisere dataene. Det vil derfor ikke være mulig å vite hvem som har gjort eller sagt hva eller hvilken klasse og skole forskningen har foregått ved.

All medvirkning i dette prosjektet er basert på frivillighet, og dere står selvsagt helt fritt til å velge om deres barn skal være med eller avstå fra å delta i prosjektet eller ikke. Som foresatte vil dere stå fritt til å be om intervjuguiden dersom deres barn skal intervjues. Dere kan trekke dere når som helst i prosjektet uten å måtte begrunne dette nærmere.

Observasjonene vil fortrinnsvis foregå i løpet av februar og mars, etter nærmere avtale med klassens matematikklærer. Video- og lydopptak vil bli oppbevart på en sikker måte på egen datamaskin til bruk i prosjektet. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning ved NSD. Alle involverte parter fra UiS er underlagt taushetsplikt, og data vil bli behandlet deretter. Alle opptak vil bli slettet/destruert når prosjektet er avsluttet. (Dato for prosjektets slutt er satt til 31. juli 2014.)

Det ferdige arbeidet vil bli presentert i en skriftlig rapport som senere kan videreutvikles til en publiserbar artikkel. Nærmere informasjon om prosjektet kan fås ved henvendelse til meg, Linn Marie Nordbø på telefon 980 26 913, som er ansvarlig for dette prosjektet. Jeg håper på positiv tilbakemelding fra deg/dere.

Vennlig hilsen
Linn Marie Nordbø
Masterstudent i matematikkdidaktikk
Universitetet i Stavanger

Svarslipp:

Jeg tillater at deltakere i forskningsprosjektet fra UiS observerer (og eventuelt intervjuer) vårt barn.

Underskrift av foresatt(e): ....

Jeg godtar også at det blir samlet inn data som beskrevet ovenfor.

Ja Nei (sett ring rundt valg)

Vedlegg 2: Kvittering NSD

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Raymond Bjuland
Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk Universitetet i Stavanger

4036 STAVANGER

Vår dato: 03.01.2014 Vår ref: 36634 / 2 / LMR Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 12.12.2013. Meldingen gjelder prosjektet:

36634	*Problemløsning – Hvilket urbytte vil elever på ungdomsskolen kunne ha av økt fokus på problemløsning og metakognisjon i matematikkundervisningen?*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Stavanger, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Raymond Bjuland*
Student	*Linn Marie Nordbø*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 31.07.2014, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Linn-Merethe Rød

Kontaktperson: Linn-Merethe Rød tlf: 55 58 89 11
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / District Offices:
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 36634

Ifølge prosjektmeldingen skal det innhentes samtykke fra elevene samt elevenes foreldre basert på muntlig og skriftlig informasjon om prosjektet og behandling av personopplysninger. Personvernombudet finner informasjonsskrivet tilfredsstillende utformet i henhold til personopplysningslovens vilkår.

Når barn deltar aktivt i forskning, skal deltagelsen alltid være frivillig for barnet, selv om foreldrene samtykker. På denne bakgrunn må også den praktiske gjennomføringen av intervju/videoobservasjon i klasserommet tilrettelegges slik at deltakelsen oppleves reelt sett som frivillig for elevene.

Innsamlede opplysninger registreres på privat pc. Personvernombudet legger til grunn at veileder og student setter seg inn i og etterfølger Universitetet i Stavanger sine interne rutiner for datasikkerhet, spesielt med tanke på bruk av privat pc til oppbevaring av personidentifiserende data.

Prosjektet skal avsluttes 31.07.2014 og innsamlede opplysninger skal da anonymiseres, og lyd- og video-opptak slettes. Anonymisering innebærer at direkte personidentifiserende opplysninger som navn/koblingsnøkkel slettes, og at indirekte personidentifiserende opplysninger (sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. navn på skole, alder, kjønn) fjernes eller grovkategoriseres slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes i materialet.

Vedlegg 3: Intervjuguide – første gruppeintervju

Hva synes dere om matematikk?

Hva tror dere det er som gjør matematikk kjekt/kjedelig?

Er det noen av oppgavene som er kjekkere/kjedeligere enn andre typer oppgaver?

- I så fall hvilke?

Hva gjør dere når dere ikke klarer å løse en oppgave?

- Hva gjør dere på prøver når dere ikke forstår en oppgave?

Hvordan mener dere at matematikken kunne blitt mer spennende?

Har dere arbeidet med problemløsning tidligere?

Hva tenker dere på når jeg nevner problemløsning?

Matematikk er et gammelt fag som har utviklet seg gjennom flere hundre- ja til og med flere tusen år, hvordan tror dere at matematikerne arbeidet med matematikk?

Hva tror dere at de gjorde for å komme videre med en oppgave?

Dere skal få en oppgave av meg som kanskje krever litt innsats, men jeg håper at dere vil forsøke så godt som dere kan. Det er viktig for meg å presisere at dette ikke er en test, men at arbeidet deres vil kunne gi meg nyttig informasjon til arbeidet mitt. Er det greit?

Vedlegg 4: Intervjuguide – andre gruppeintervju

Hvordan synes dere det har vært å arbeide med problemløsning?

Hvilket utbytte tror dere at dere kan ha av å arbeide med denne typen oppgaver?

Hva synes dere er bra med å arbeide på denne måten?

Er det noe dere tenker at burde vært annerledes?

Er det noen av oppgavene som er kjekkere/kjedeligere enn andre typer oppgaver?

- I så fall hvilke?

Hva gjør dere når dere ikke klarer å løse en oppgave?

- Hva gjør dere på prøver når dere ikke forstår en oppgave?

Hvordan mener dere at matematikken kunne blitt mer spennende?

Har dere arbeidet med problemløsning tidligere?

Hva tenker dere på når jeg nevner problemløsning?

Hva tror dere at de gjorde for å komme videre med en oppgave?

Dere skal få en oppgave av meg som kanskje krever litt innsats, men jeg håper at dere vil forsøke så godt som dere kan. Det er viktig for meg å presisere at dette ikke er en test, men at arbeidet deres vil kunne gi meg nyttig informasjon til arbeidet mitt. Er det greit?

Vedlegg 5: Intervjuguide – lærer

Hvordan synes du at det har vært å arbeide med problemløsning på denne måten?

Hvilke fordeler/utfordringer støtte du på?

Hvilke erfaringer tenker du at elevene sitter igjen med etter å ha arbeidet med problemløsning?

Du har tidligere nevnt at du ønsker å arbeide videre med problemløsning etter denne perioden, hvordan tenker du at du vil organisere arbeidet?

Hvordan har du arbeidet med problemløsning tidligere?

Hvilket utbytte tenker du at elever kan ha av å arbeide med problemløsning i smågrupper?

Vedlegg 6: Undervisningsopplegg

Undervisningsopplegg

Teoretisk bakgrunn:

Problemløsning i matematikk har blitt mye omtalt i forskningen. Mest kjent er kanskje G. Polya, som i 1945 ga ut boken «How to Solve It». I denne boken presenterer han fire trinn for arbeid med problemløsning. Borgersen (1994) presenterer en litt mer utbrodert modell der han presenterer syv ulike trinn for arbeid med problemløsning i matematikk, da hovedsakelig i forhold til geometri. Dette undervisningsopplegget vil i all hovedsak ta utgangspunkt i Borgersens modell siden den med sine 7 trinn konkretiserer og beskriver sentrale momenter fra en problemløsningsprosess. Modellen vil videre bli omtalt som modell for problemløsning. Denne modellen kan fungere som en hjelp for elevene når de arbeider med problemløsning. Det er viktig å presisere for elevene at dette ikke er en lineær modell der de går fra trinn 1 til trinn 2 og fra trinn 2 til trinn 3 osv. men at man i denne modellen har mulighet til å «hoppe frem og tilbake» mellom trinnene.

Metakognitive ferdigheter kan deles inn i ulike komponenter. Enkelt forklart kan man si at metakognitiv kunnskap er kunnskapen om hvordan hver enkelt av oss lærer best og hvilke ferdigheter man mestrer fremfor andre ferdigheter. For eksempel vet en elev at hun, i motsetning til flere av hennes venner, er flinkere i matematikk enn i norsk. Denne type kunnskap går inn under metakognitiv kunnskap (Flavell, 1979). Videre kan man si at det finnes metakognitive opplevelser (Flavell, 1979), dette kan være opplevelsen av å kjenne igjen en bestemt type oppgave, følelsen av å være nær en løsning på problemet, eller følelsen av håpløshet i forhold til å klare å løse et problem. Alle disse erfaringene vil igjen være med på å forme opplevelsen av å løse lignende problem på et senere tidspunkt. Et eksempel er en elev som gjentatte ganger har forsøkt å forstå ligninger, men som hver gang opplever å få feil svar på oppgaven. Etter en gjentatte feiltakelser vil eleven oppfatte ligninger som en type oppgaver som ikke lar seg løse, i hvert fall ikke for denne eleven. Som et resultat vil eleven slutte å forsøke og løse denne typen oppgaver. Ved å identifisere metakognitiv kunnskap og erfaringer vil eleven bli mer bevisst på prosessene som foregår parallelt med selve oppgaveløsningen, noe som igjen kan hjelpe eleven til å bedre forstå egen læring og egne reaksjonsmønster (Flavell, 1979).

Schoenfeld (1992) beskriver hvordan elever uten erfaring med problemløsning, ofte velger å bruke minimal tid på å lese oppgaveteksten til problemet, for så å bestemme seg for hvordan de skal gå frem for å løse selve oppgaven. Ved en slik fremgangsmåte vil elevene raskt kunne mislykkes i forsøket på å løse problemet, etter som de ikke ser seg tilbake for å kontrollere.

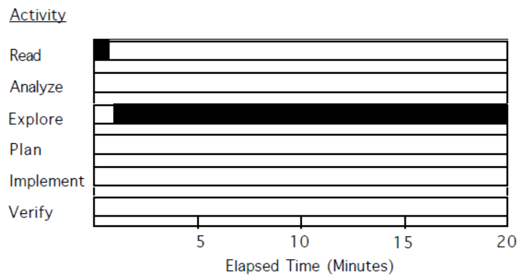


Fig. 3. Time-line graph of a typical student attempt to solve a non-standard problem.

(Schoenfeld A. H., 1992)

Videre beskriver Schoenfeld (1992) hvordan matematikere arbeider med et problem:

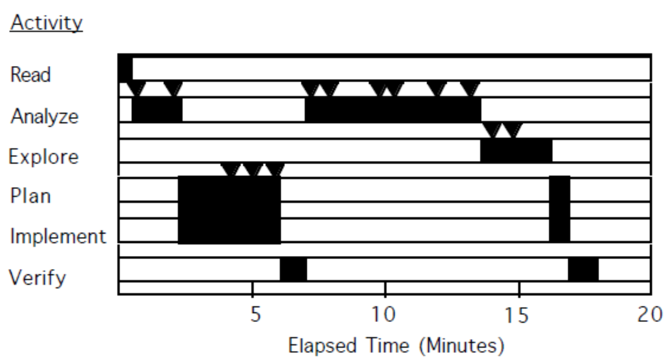


Fig. 4. Time-line graph of a mathematician working a difficult problem

(Schoenfeld A. H., 1992)

Fra figuren over ser vi hvordan matematikeren hele tiden veksler mellom de ulike fasene, dette fører til en større kontroll, og det er også mulig å oppdage feil fordi matematikeren bruker tid på å verifisere arbeidet sitt. Gjennom å la elevene utvikle metakognitive ferdigheter, ønsker man å gjøre dem i stand til å, i større grad, veksle mellom de ulike fasene i problemløsningen.

Viktige momenter:

Problemløsningsmodellen (Borgersen, 1994):

1. *Analysere og definere problemet:*
   Her skal elevene forstå hva oppgaven spør etter. Det er viktig at alle på gruppa har samme forståelse for hva man skal løse. Videre vil det her være viktig å definere ord man ikke forstår, eller som man kan ha ulik oppfatning av. Elevene bør derfor diskutere oppgaven sammen før de går videre til neste trinn.

2. *Modellere eller tegne*:
   Her skal man forsøke å lage en modell av problemet. Et nyttig verktøy kan være tegning, praktisk gjennomføring eller en matematisk modell. Hvilken strategi som egner seg best avhenger av problemets karakter. Geometriske problem vil gjerne være lettere å tegne, problem knyttet til sannsynlighet kan gjerne lettere visualiserer ved hjelp av konkreter. Her kan hver elev lage sin egen modell for så å presentere denne for gruppa, eller at elevene lager en modell i fellesskap. Det viktigste punktet er likevel at de ulike modellene presenteres for hverandre og at man diskuterer de ulike modellene, for så å enes om hvilken modell man skal gå videre med.

3. *Prøving og feiling*:
   Etter at man har gått gjennom trinn 1 og 2, vil elevene ha en god forståelse av hva problemet går ut på. Man er da klar for å prøve å feile. Med et slikt utgangspunkt kan man gjerne kalle dette for kvalifisert gjetning.

4. *Finne hypoteser*:
   Hver elev kommer med et forslag og prøver å begrunne hvorfor dette er riktig. Deretter blir gruppen enig om hvilket forslag de mener vil være det riktige.

5. *Utvikle bevis*:
   Gruppen diskuterer sammen og begrunner hvorfor de mener hypotesen de har laget er riktig.

6. *Se tilbake og reflektere over løsning og løsningsprosess*:
   Gruppen går gjennom punkt 1-5 igjen og ser over at de ikke har oversett noe, samt at beregningene som er gjort er riktige.

7. *Generalisere og formulere nye problem*:
   Gruppen forsøker å lage et generelt uttrykk/regel for problemet. Deretter forsøker de å videreutvikle problemet, eller lage nye problem ut i fra den opprinnelige oppgaven.

Aktuelle spørsmål til arbeid med metakognitive ferdigheter:

1. Hva spør oppgaven om?
2. Hvilke metoder/strategier ønsker dere å bruke i denne oppgaven?
3. Hva var det som gjorde at dere kom videre/klarte å løse oppgaven?
4. Hva gjorde dere når vi hadde problemer med å løse oppgaven?
5. Når mente dere at vi hadde løst oppgaven?
6. Hva gjorde dere når vi hadde funnet løsningen?
7. Når mente dere at dere var ferdige med oppgaven?
8. Hva tenker dere når dere står fast med oppgaven og ikke kommer videre? Hva gjør dere når dere blir frustrert?

Problemløsningsoppgave:

På en fest møtes ti ektepar. Alle håndhilser på hverandre én gang, unntatt de som er gift med hverandre. Hvor mange håndtrykk blir utvekslet på festen? (Abelkonkurransen, 2010)

Oppstart av problemløsning med introduksjon til metakognitive ferdigheter hos elevene:

Forberedelser:

1. Finne frem klassesett med nye arbeidsbøker
2. Kopiere opp metakognitive spørsmål
3. Kopiere opp klassesett med problemløsningsoppgaven til arbeidet i 2. time

1. og 2. time (totalt 90 min):

1. Nødvendig utstyr: Egne, nye, arbeidsbøker til elevene
2. Elevene blir presentert for tema
3. Elevene får mulighet til å starte rett på oppgaven, uten noen form for veiledning.Før elevene begynner på oppgaven er det viktig å legge noen «kjøreregler» for arbeid i gruppe. La elevene selv få komme med forslag til hva som er viktig her, men sørg for at forslagsrett i gruppene og mottakelse av ulike forslag bør mottas seriøst uavhengig av hvem det er som fremmer forslaget.
4. Elevene deles inn i grupper, det er en fordel at dette er gjort i forkant slik at gruppene blir mest mulig optimale for elevene. En slik inndeling kan gjøres i forhold til nivå (at man

ønsker spredning, men ikke for stor spredning i elevenes faglige nivå, eks. lav/middels-grupper og middels/høy-grupper), eller at man må ta enkelte sosiale hensyn osv.

5. Etter at elevene er delt inn i grupper får de utdelt oppgaven denne vil de få mulighet til å arbeide med i ca. 20-30 min.
   Tips til lærer:
   Når elevene har funnet svar på oppgaven kan de undersøke hvor mange håndtrykk det blir med ulike antall ektepar. Etter hvert kan elevene gå enda et steg videre og se om de finner en måte å regne ut antall håndtrykk, slik at de kan regne ut for alle antall ektepar, for eksempel antall håndtrykk ved 75 par eller 100par.
6. Etter arbeidet i grupper får hver gruppe komme frem og presentere sitt arbeid og sine erfaringer med oppgaven. Her er det viktig å få frem både positive og negative erfaringer. De andre gruppene får mulighet til å komme med forslag til hva som kan snu de negative erfaringene til mer positive erfaringer neste gang. Eventuelle regnefeil diskuteres, elevene får mulighet til å komme med forslag til hvorfor feilene har oppstått. Hvis elevene og klassen er trygge nok kan også andre elever i klassen delta i denne diskusjonen.

Det er essensielt at læreren ikke kommer med forslag til løsning, men heller bidrar med åpne spørsmål med utgangspunkt i det elevgruppene diskuterer. På denne måten kan læreren hjelpe gruppene videre i en prosess der elevene selv står fast, uten å gi elevene svar på oppgavene. (Bjuland, 2007)

7. Etter gjennomgang av selve oppgaven diskuteres selve tema «problemløsning». Hva innebærer problemløsning, hva er <u>ikke</u> problemløsning? Ta gjerne utgangspunkt i arbeidet som elevene har arbeidet med i timen før, og knytt dette opp til Borgersens modell for problemløsning.
   a. Hvordan kan vi arbeide med problemløsning? → introduksjon til modell for problemløsning, elevene noterer dette ned i arbeidsboken sin.
   b. Hvilket utbytte kan vi ha av å arbeide på en slik måte?
   c. Når er vi ferdig med en problemløsningsoppgave?
      Her er det viktig å presisere at alle har ulike forutsetninger for å løse forskjellige oppgaver. Man vil derfor ha ulike personlige mål i forhold til de ulike oppgavene. Noen ønsker å komme gjennom alle punktene på «problemløsningsstigen», andre ønsker å klare å finne et svar på den aktuelle oppgaven, men andre igjen har som mål å klare å arbeide aktivt med oppgaven i en tilmålt tidsperiode.

2. Hva er metakognitive ferdigheter?
   a. Hvordan kan vi arbeide med matematikk?
      Noen ønsker å arbeide veldig teoretisk, noen ønsker å tegne modeller, andre løser oppgavene i hodet. Dette er ulike strategier som vi skal ta i bruk når vi arbeider med

problemløsning. Det viktigste er ikke måten vi fører på, men at vi klarer å forklare hvordan vi har funnet de ulike svarene i oppgaven. All denne informasjonen skal noteres ned på venstre side i problemløsningsboken. Det er ikke lov å bruke viskelær, hvis man ønsker å ta bort noe, skal det kun settes en enkel strek over det man vil ta bort. Begrunnelsen for dette er at man senere skal kunne gå tilbake og se hvordan man arbeidet med oppgaven, eventuelle feil er også viktige å få med her.

   b. På høyre side i arbeidsboken skal man skrive ned tanker og følelser som melder seg underveis i prosessen. Dette skal vi gjøre for å bli mer bevisst på hvordan vi tenker når vi arbeider med matematikk. Dette er kanskje, for noen, den vanskeligste biten av oppgaven, men det er også noe av det viktigste. Det er gjennom denne delen at du lærer mer om deg selv, hvordan du reagerer og hvilke situasjoner som skaper positive eller negative erfaringer i forbindelse med matematikk. Ved å kunne bla tilbake senere vil du kunne se hvordan du reagerte tidligere, om det er noen mønster i reaksjonene dine, samt at du lettere kan kjenne igjen disse trekkene slik at du kan snu negative erfaringer om til positive. Du vil også lettere kjenne igjen når du trenger å legge fra deg en oppgave, for så å komme tilbake til denne siden.
   c. Elevene bør skrive ned forslag til aktuelle spørsmål fremst i boken:
      i. Hva spør oppgaven om?
      ii. Hvilke metoder/strategier ønsker vi å bruke i denne oppgaven?
      iii. Hva var det som gjorde at jeg kom videre/klarte å løse oppgaven?
      iv. Hva gjorde vi når vi hadde problemer med å løse oppgaven?
      v. Når mente vi at vi hadde løst oppgaven?
      vi. Hva gjorde vi når vi hadde funnet løsningen?
      vii. Når mente vi at vi var ferdige med oppgaven?
3. Alle elevene nummererer til slutt sidene i bøkene sine. Dette er fordi de senere kan komme i en situasjon der de velger å legge en oppgave til side, for så å komme tilbake til denne på et senere tidspunkt, i denne anledning vil det være nyttig å kunne skrive at arbeidet med oppgaven fortsetter på et angitt sidetall.

Til sist ønsker jeg å poengtere at det i denne prosessen ikke er svaret som er det viktigste, men elevenes arbeid med oppgavene. Det vil derfor være like verdifullt med en presentasjon der fremgangsmåten ikke fører til riktig svar, dette fordi man da kan diskutere sammen hvorfor svaret er feil og hvordan man har tenkt for å komme frem til dette. En slik situasjon krever at elevene er trygge på hverandre og ikke risikerer å bli latterliggjort i etterkant, men det er også en prosess som vil kunne bidra til å avdekke ulike misoppfatninger og ta tak i disse.

Referanser

Abelkonkurransen. (2010, November 2010). Hentet fra http://abelkonkurransen.no/problems/abel_1011_r1_prob_nb.pdf

Bjuland, R. (2007). Adult Students´ Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education. *The Montana Mathematics Enthusiast, Vol 4, no.1*, ss. 1-30.

Borgersen, H. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordisk matematikkdidaktikk vol 2, nr. 2,* ss. 6-35.

Flavell, J. H. (1979, Oktober). Metacognition and Cognitive Monitoring A Nwe Area of Conitiv-Developmental Inquiry. *American Psycologist Vol. 34, nr. 10,* ss. 906-911.

Schoenfeld, A. H. (1992). LEARNING TO THINK MATHEMATICALLY:PROBLEM SOLVING, METACOGNITION, AND SENSE-MAKING IN MATHEMATICS. I D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 334-370). New York: MacMillan.

Vedlegg 7: Oppgaver – lærerversjon

Oppgave 1:

Fire hus står på rad. Hvert hus skal males hvitt, rødt eller gult. På hvor mange måter kan det gjøres hvis nabohus ikke skal ha samme farge? (Abelkonkurransen, 2009)

Tips:
Her kan elevene sjekke hvor mange måter dette kan gjøres hvis det er tre hus med to ulike farger og fem hus med fire ulike farger, er det mulig å finne et system?

Oppgave 2
La x og y være positive heltall større enn 1 som er slik at $x^y = 512$. Hva er $x + y$? (Abelkonkurransen, 2009)

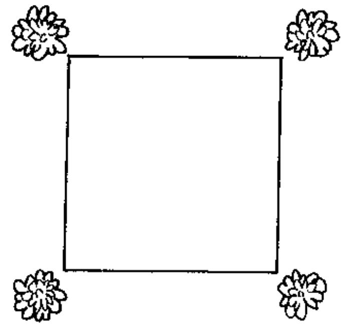
Tips:
Dette er en oppgave der elevene kan bruke algebra. Oppgaven er ikke så vanskelig i seg selv, men de må tenke over hva oppgaven egentlig spør etter. Oppgaven kan enkelt løses ved hjelp av faktorisering av 512, men dette bør elevene komme frem til selv.

Oppgave 3
Niels Henrik bestemte seg for å trene etter nyttår. Han skulle trene styrke hver femte dag, mykhet hver sjuende dag og kondisjon hver ellevte dag. Niels Henrik lar seg lett engasjere, og startet treningsprogrammet allerede på nyttårsaften, slik at de første treningsdagene ble 5. januar (styrke), 7. januar (mykhet) og 11. januar (kondisjon). En dag Niels Henrik våkner, er batteriet i den digitale klokka hans gått tomt, og han kan ikke komme på hvilken dato det er. Treningen har gått til hodet på ham, og det eneste han husker, er at han trente kondisjon dagen før, styrke for to dager siden og mykhet for tre dager siden. Det er ikke skuddår, og han har fulgt treningsopplegget mindre enn et år. Hvilken dato er det? (Abelkonkurransen, 2009)

Oppgave 4
Gitt et kvadrat ABCD og et punkt P i det indre av kvadratet.

a) Vis at hvis ΔPCD er likesida, så er $\angle$ABP=15^0
b) Undersøk om det omvendte gjelder. Hvis $\angle$ABP=15^0, så er ΔPCD likesida (Bjuland , Powerpoint: Problemløsning-metakognisjon, 2011)

Oppgave 5
De skal utvide sandkassa i barnehagen slik at den blir dobbelt så stor og fremdeles er kvadratisk. Men de vil ikke hogge ned de vakre buskene utenfor hjørnene av sandkassa. Det går an å få det til. Hvordan? (Bjuland, 2005)



Tips:
Når elevene er enige om hvordan de kan utvide sandkassen: La elevene diskutere om det er sidene i sandkassen som skal være dobbelt så store eller arealet av sandkassen som skal bli dobbelt så stort. Er det noen sammenheng mellom dobbelt så store sider i forhold til areal? Hvordan kan de beregne sidelengden til en sandkasse som skal ha dobbelt så stort areal som den første?

Oppgave 6
Hva slags tall får du hvis du legger til 1 til produktet av fire tall i stigende rekkefølge? (Mason & Davis, Fostering and sustaining mathematics thinking though problem solving, 2000)

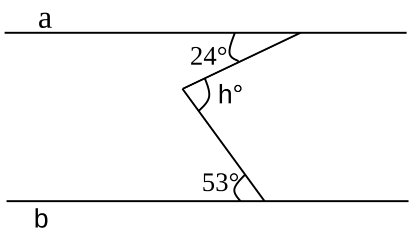
Tips:
La elevene prøve å finne en forklaring på hvorfor dette skjer.

Oppgave 7
I en godteripose er det færre enn 60 drops. Hvis Anne, Berit og Cecilie forsøker å dele innholdet i posen likt mellom seg, blir det ett drops til overs. Det samme skjer hvis Didrik og Erik også er med. Men det går opp hvis innholdet i posen deles bare på de tre jentene og Didrik. Hvor mange drops blir det til overs om vi deler likt på sju barn? (Abelkonkurransen, 2008)

Oppgave 8
På hvor mange måter kan du lage 20 kr med mynter av størrelse 20 kr, 10 kr, 5 kr og 1 kr? (Abelkonkurransen, 2008)

Oppgave 9
Anne, Bjørn, Celine, Dag og Erik var på sopptur. Anne og Bjørn plukket sammenlagt like mange sopper som Celine og Dag til sammen. Bjørn og Dag plukket sammenlagt flere sopper enn Anne og Celine til sammen, som igjen plukket flere sopper sammenlagt enn Dag og Erik til sammen. Erik og Celine plukket sammenlagt flere sopper enn Dag og Anne til sammen. Hvem plukket flest sopper? (Abelkonkurransen, 2010)

Oppgave 10



Hva er verdien til h?

Tips:
Hvis elevene står fast kan de kanskje tegne en hjelpelinje? (Bjuland, Arbeidsoppgaver-undervisningskunnskap, 2011)

Kilder

Abelkonkurransen. (2008, November 6). Hentet fra http://abelkonkurransen.no/problems/abel_0809_r1_prob_nb.pdf

Abelkonkurransen. (2009, November 5). Hentet fra http://abelkonkurransen.no/problems/abel_0910_r1_prob_nb.pdf

Abelkonkurransen. (2010, November 4). Hentet fra http://abelkonkurransen.no/problems/abel_1011_r1_prob_nb.pdf

Bjuland , R. (2011, August 18). Powerpoint: Problemløsning-metakognisjon. Stavanger, Norge: UiS.

Bjuland, R. (2005). Dialogiske tilnærminger i klasserommet: Utvikling av matematiske begreper gjennom lærer-elev dialog i klasserommet eller gjennom elevsamarbeid i smågrupper. *Voksenopplæringskonferansen i Trondheim 14.15. mars 2005* (ss. 66-76). Trodnheim: Senter for voksenopplæring.

Bjuland, R. (2011, august). Arbeidsoppgaver-undervisningskunnskap. Stavanger, Norge: UiS.

Mason, J., & Davis, J. (2000). *Fostering and sustaining mathematics thinking though problem solving.* Geelong, Victoria: Deakin University Press.

Vedlegg 8: Oppgaver - elevversjon

Oppgaver – problemløsning

Oppgave 1:

Fire hus står på rad. Hvert hus skal males hvitt, rødt eller gult. På hvor mange måter kan det gjøres hvis nabohus ikke skal ha samme farge?

Oppgave 2

La x og y være positive heltall større enn 1 som er slik at $x^y = 512$. Hva er $x + y$?

Oppgave 3

Niels Henrik bestemte seg for å trene etter nyttår. Han skulle trene styrke hver femte dag, mykhet hver sjuende dag og kondisjon hver ellevte dag. Niels Henrik lar seg lett engasjere, og startet treningsprogrammet allerede på nyttårsaften, slik at de første treningsdagene ble 5. januar (styrke), 7. januar (mykhet) og 11. januar (kondisjon). En dag Niels Henrik våkner, er batteriet i den digitale klokka hans gått tomt, og han kan ikke komme på hvilken dato det er. Treningen har gått til hodet på ham, og det eneste han husker, er at han trente kondisjon dagen før, styrke for to dager siden og mykhet for tre dager siden. Det er ikke skuddår, og han har fulgt treningsopplegget mindre enn et år. Hvilken dato er det?

Oppgave 4

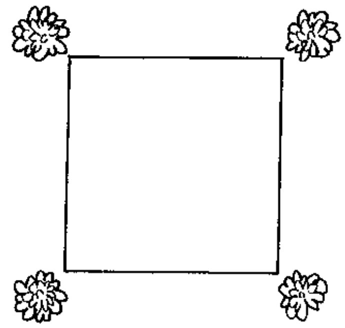
Gitt et kvadrat ABCD og et punkt P i det indre av kvadratet.

a) Vis at hvis ΔPCD er likesida, så er $\angle ABP=15^0$

Undersøk om det omvendte gjelder. Hvis $\angle ABP=15^0$, så er ΔPCD likesida

Oppgave 5

De skal utvide sandkassa i barnehagen slik at den blir dobbelt så stor og fremdeles er kvadratisk. Men de vil ikke hogge ned de vakre buskene utenfor hjørnene av sandkassa. Det går an å få det til. Hvordan?



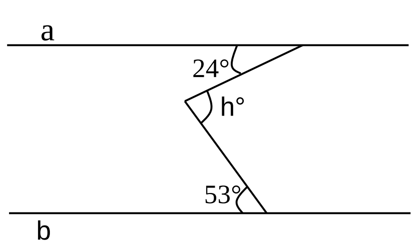
Oppgave 6
Hva slags tall får du hvis du legger til 1 til produktet av fire tall i stigende rekkefølge?

Oppgave 7
I en godteripose er det færre enn 60 drops. Hvis Anne, Berit og Cecilie forsøker å dele innholdet i posen likt mellom seg, blir det ett drops til overs. Det samme skjer hvis Didrik og Erik også er med. Men det går opp hvis innholdet i posen deles bare på de tre jentene og Didrik. Hvor mange drops blir det til overs om vi deler likt på sju barn?

Oppgave 8
På hvor mange måter kan du lage 20 kr med mynter av størrelse 20 kr, 10 kr, 5 kr og 1 kr?

Oppgave 9
Anne, Bjørn, Celine, Dag og Erik var på sopptur. Anne og Bjørn plukket sammenlagt like mange sopper som Celine og Dag til sammen. Bjørn og Dag plukket sammenlagt flere sopper enn Anne og Celine til sammen, som igjen plukket flere sopper sammenlagt enn Dag og Erik til sammen. Erik og Celine plukket sammenlagt flere sopper enn Dag og Anne til sammen. Hvem plukket flest sopper?

Oppgave 10



Hva er verdien til h?

Vedlegg 9: Transkripsjonsnøkkel

.	Pause i 1 sekund
..	Pause i 2 sekund
…	Pause i 3 sekund
(# sek)	Pause i # sekund
()	Beskrivelse av handlinger som gjøres samtidig som personen snakker. Hvis annet navn er angitt ført, betyr dette at det er en annen person som utfører handlingen.
-	Ytringen blir abrutt eller avbryter en annen ytring
[]	Noe som blir sagt samtidig, navn først i klammen forteller hvem som snakker.