Universitetet i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Brøk – En studie av hvordan læreverket Multi legger til rette for elevers arbeid med brøk på 3. – 7. trinn.

Heidi Hellestø
Juni 2017

Universitetet i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: **MASTER I MATEMATIKKDIDAKTIKK**	**Vårsemesteret, 2017** Åpen/ ~~konfidensiell~~
Forfatter: **Heidi Hellestø**	………………………………………… (signatur forfatter)
Veileder: **Natalia Blank**	
Tittel på masteroppgaven: Brøk – En studie av hvordan læreverket Multi legger til rette for elevers arbeid med brøk på 3. – 7. trinn. Engelsk tittel: Fraction – A study of how Multi textbooks facilitate pupils' work with fraction in 3rd - 7th grade.	
Emneord: Brøk, lærebokanalyse, grunnskolen, forståelse, tilpasset opplæring, motivasjon, undervisningskunnskap.	Antall ord: 22409 + vedlegg/annet:3346 Stavanger, 08.06.2017

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min 5-årige grunnskolelærerutdannelse ved Universitetet i Stavanger. Det har vært noen krevende, spennende og lærerike år. Disse årene har gitt meg et nytt syn på læring, spesielt med tanke på matematikk. Gjennom de ulike profilene innen master i matematikkdidaktikk har jeg lært hvor viktig utforskende matematikk med fokus på relasjonsforståelse er og i tillegg er jeg blitt bevisst på hvor stor rolle undervisningskvalitet spiller i matematikkundervisningen.

Jeg vil starte med å takke min veileder Natasha, som alltid har vært tilgjengelig og svart på mine spørsmål. Du har kommet med forslag til teori og på den måten hjulpet meg til å løfte blikket fra egen oppgave, slik at jeg har fått et bredere perspektiv på egen studie. Du har vært engasjerende og hjulpet meg å sette frister, noe som har pushet meg til å levere i en travel hverdag.

Jeg vil også takke to av mine medstudenter, David og Norunn for korrekturlesing og gode tips. Forøvrig vil jeg også takke skolene som lot meg låne lærebøker og lærerveiledninger.

Sist men ikke minst vil jeg takke familien min. Takk Oddbjørn, for at du i disse fem årene har arbeidet ekstra for å få endene til å møtes da jeg tok valget å gå fem år uten inntekt. Takk for at du har hatt tro på meg, støttet og oppmuntret meg i arbeidet. Takk til våre sønner, Lasse, Jøran og Brian som har vist forståelse og tatt hensyn i denne travle perioden. Og sist men ikke minst, takk til mine fantastiske svigerforeldre Bjørg og Kjell, som har vært til stor hjelp og i tillegg tatt godt imot vår yngste sønn, når han har søkt dekning for ikke å mase på mor.

Endelig er jeg fri til å lese hva jeg vil, når jeg vil og på et språk jeg foretrekker. Jeg ser frem til å praktisere som lærer med den kunnskapen jeg har tilegnet meg og gleder meg til å få mer erfaring som lærer.

Heidi Hellestø

Sola, juni 2017

Innholdsfortegnelse

Sammendrag

Denne masteroppgaven er en lærebokanalyse med fokus på brøk i grunnskolen, hvor hensikten var å finne ut hvorfor elever har problemer med brøk. Dermed ble hovedoppgavene i grunnbøkene til læreverket Multi analysert, fra tredje til sjuende trinn og forskningsspørsmålet ble:

Hvordan er brøk representert i Multi, med tanke på forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon?

Disse begrepene dannet selve grunnlaget for studien. Dermed ble begrepet forståelse presentert som instrumentell- og relasjonsforståelse etter teorien til Skemp. Tilpasset opplæring ble forklart gjennom Utdanningsdirektoratet sine prinsipper for opplæringen, og motivasjon ble gjort kjent som en indre drivkraft. I tillegg ble flere andre begreper med tilknytning til læring tydeliggjort, sammen med tidligere forskning på lærebøker og brøk.

Studien er et case-studie, hvor metoden for innsamling av data var tekstanalyse. Læreverket ble analysert ved hjelp av en horisontal og en vertikal analyse. Analysen ble utført ved å benytte et selvutviklet måleinstrument, hvor oppgavene ble analysert ut fra seks kategorier. Disse kategoriene hadde fokus på brøkens ulike aspekter, representasjonsformer, strategier, kognitive krav, kunnskapsnivå og motivasjon.

Resultatene fra denne studien viste at brøk ble introdusert ved hjelp av en innledende- og en utviklende fase og at oppgavene i stor grad fremmet instrumentell forståelse hos elevene. I tillegg var bruk av eksempler og funksjonelle illustrasjoner fremtredende og dermed kom det frem at lærernes undervisningskunnskap var avgjørende både ved valg av læreverk og i undervisningssammenheng.

1 Innledning

I denne studien vil jeg analysere læreverket Multi, med fokus på brøk. Det er allment kjent at flere elever ikke behersker brøk når de går ut av grunnskolen. Derfor vil jeg analysere et norsk læreverk for å få et innblikk i hvordan brøk blir introdusert og representert i grunnskolen.

1.1 Bakgrunn

Flere studier viser at lærebøker er et viktig verktøy i matematikkundervisningen (Howson, 2013; Johansson, 2003; Sunday, 2014) og at de har stor innvirkning på hva elevene lærer. I tillegg er det viktig å ta i betraktning at lærere underviser ulikt, selv om de benytter den samme læreboken. Elevene lærer også ulikt selv om de blir undervist av den samme læreren.

Lærebøker i matematikk har en lang historie og den mest suksessfulle av dem alle hevdes å være *Elementene* av Euklid fra cirka år 300 f.kr (Merzbach, Boyer & Asimov, 2011, s. 90). Selv om lærebøker har eksistert siden før vår tidsalder, er det flere som belyser at forskning på lærebøker er et forholdsvis nytt fenomen og at det finnes svært få studier på dette området før 1980-tallet (Fan, Zhu & Miao, 2013; Johansson, 2003).

Det er i tillegg et kjent fenomen at brøk er et av de matematiske emnene flere elever har problemer med (Petit, Laird, Marsden & Ebby, 2015; Streefland, 1991). Til tross for dette, finnes det lite forskning på brøkforståelse i Norge (Bjerke, Eriksen, Rodal & Ånestad, 2013).

Selv har jeg gjennom lærerstudiet utviklet en økende begeistring for det matematiske emnet brøk, noe det er flere grunner til. For det første var nok dette et emne jeg selv hadde problemer med på skolen, men som jeg nå har fått bedre forståelse for gjennom grunnskolelærer-utdanningen og spesielt gjennom profilen master i matematikkdidaktikk.

Da jeg tok Matematikk 2, høsten 2014, hadde vi et arbeidskrav hvor vi skulle utføre et feltarbeid. Det var en ministudie, hvor jeg valgte brøk som utgangspunkt for forskningen. Studien var forankret i sosialkonstruktivisten Vygotsky og hans teori om den proksimale utviklingssone (Vygotsky, 1978). Denne teorien vil jeg komme tilbake til, og utdype i neste kapittel.

Objektene i feltarbeidet var to elever på sjuende trinn, fra ulike skoler og med ulike læreverk. De ble testet individuelt med en egenprodusert brøktest, som inneholdt spørsmål om begreper knyttet til brøk og regning med brøk. Testen inneholdt også illustrasjoner av modeller, plassering av brøker på tallinjer, omgjøring av brøk til desimaltall og ulike tekstoppgaver. Funnene i studien viste at elevene hadde ulik erfaring på flere områder, selv om begge viste klare tegn på instrumentell forståelse av brøk og begge jobbet bedre med meg som støttende hjelper, enn på egenhånd (Hellestø, 2014). Det var en spennende studie som bidro til å øke egen interesse for emnet.

Dessuten har jeg i ulike praksisperioder observert at flere elever på sjette og sjuende trinn viser tydelige tegn til vansker i arbeidet med brøk. Dette er noe jeg antar kommer til å vedvare når elevene starter på ungdomsskolen.
Da jeg i rollen som mor ble oppmerksom på at læreverket Multi starter med introduksjon av brøk på tredje trinn, tenkte jeg tanken: Hvordan kan det ha seg at elever starter med brøk på tredje trinn og fremdeles ikke behersker brøk på sjuende trinn?

1.2 Forskningsspørsmål

Denne problemstillingen brente seg inn på netthinnen min og ble således utgangspunktet for min masteroppgave. På bakgrunn av dette har jeg en hypotese som sier meg at grunnen til denne manglende beherskelsen må være mangel på forståelse, men hva vil det si å forstå?

Dette spørsmålet vil jeg komme tilbake til i neste kapittel som omhandler teori. I tillegg vil jeg se på ulike aspekter, som også kan være nyttige på veien mot forståelse.

Formålet med studien blir altså å analysere læreverket Multi, for å se hvordan brøk blir representert og hvordan læreverket legger vekt på forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon gjennom oppgaver og eksempler.

Forskningsspørsmålet blir følgende:

- **Hvordan er brøk representert i Multi, med tanke på forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon?**

For å finne svar på forskningsspørsmålet, har jeg valgt å gjennomføre et case-studie. Her vil jeg analysere grunnbøkene til Multi fra tredje til sjuende trinn, ut fra et selvutviklet analyseskjema som presenteres i kapittel 3.

1.3 Oppgavens avgrensing

For å gjennomføre denne studien, måtte jeg gjøre noen avgrensinger. Det er tidligere nevnt at brøk var temaet jeg ønsker å fokusere på. Hovedfokus vil som følge av dette være på brøkens ulike aspekter, men i lys av forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon. Dette er tre begreper som kan ha ulik betydning og derfor må avklares for å gi korrekt mening i denne studien. Av den grunn blir disse begrepene belyst i neste kapittel, som omhandler teori.

Det er mye materiell i et læreverk og derfor var det nødvendig å gjøre begrensinger på innholdet i analysen. Jeg valgte å ha hovedfokus på grunnbøkene for tredje til sjuende trinn og av den grunn ble oppgavebøker og annet materiell utelatt fra den delen av analysen, som går i dybden. Det samme gjelder også for oppsummeringssider, øve-sider og prøver i grunnbøkene, da dybde analysen kun tar for seg hovedoppgavene i grunnbøkene.

Hvordan lærebøkene motiverer elevene til å lære, kan det kanskje være vanskelig å tolke ut fra en lærebokanalyse. Allikevel har jeg funnet noen punkter, som jeg antar kan bidra til å motivere elevene.

1.4 Oppgavens oppbygging

I neste kapittel vil jeg presentere teori jeg mener er relevant for denne oppgaven, med tanke på brøk og læring av brøk. Av den grunn forklares begreper som forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon. I tillegg vil jeg presentere tidligere forskning på lærebøker og brøk.

Det tredje kapittelet er et metodekapittel, hvor veien til målet beskrives i detaljer. Her begrunnes valg av metoder, innsamling av data og gjennomføring av analysen.

I kapittel fire presenteres funnene i analysen og i femte kapittel drøftes resultatene av analysen opp mot tidligere studier og teori. Deretter vil jeg i kapittel seks forsøke å svare på min problemstilling og komme med tanker om ytterligere studier.

I kapittel sju finner vi en utfyllende referanseliste. Og til slutt i kapittel åtte finner vi fem vedlegg.

2 Teori

I dette kapitlet vil jeg definere det teoretiske grunnlaget for denne studien. Derfor starter jeg med begrepsavklaring, hvor sentrale begreper i oppgaven defineres. Videre skal vi se på ulike analyser av lærebøker og bruk av ulike rammeverk. Deretter presenteres brøk ved hjelp av ulike aspekter og representasjonsformer, i tillegg til tidligere studier av forskning på brøk. Til slutt kommer en oppsummering.

2.1 Begrepsavklaring

I denne oppgaven er det flere begreper som trenger en avklaring for at leseren skal forstå hva jeg ønsker å formidle. Forståelse er et sentralt begrep i oppgaven og i tillegg følger flere begreper som kan knyttes sammen for å fremme utvikling av forståelse.

2.1.1 Forståelse

Flere studier peker på den økende interessen for undervisning av matematikk med vekt på forståelse (Pirie & Kieren, 1994; Skemp, 1976). Dette er også utgangspunktet for fremtidens skole (Ludvigsen, 2015). Forståelse er et vidt begrep som vi trenger å definere. Etter inspirasjon fra Skemp (1976) bruker jeg i denne oppgaven begrepene instrumentell forståelse og relasjonsforståelse.

Instrumentell forståelse i matematikk vil si at elevene har lært seg ulike regler og prosedyrer, som de følger mekanisk for å løse oppgaver. Elevene kan som følge av dette løse oppgaver korrekt uten å ha forståelse for hvordan og hvorfor prosedyren de benytter virker.
Elever med relasjonsforståelse i matematikk kjennetegnes ved at de ofte er tilpasningsdyktige til nye oppgaver. De vet hvilken metode de bør benytte for å løse oppgaver og i tillegg vet de hvordan og hvorfor metoden de benytter fungerer.

Ved første øyekast virker dette å være en enkel sak og en kan tenke seg at lærere ønsker at elevene skal oppnå relasjonsforståelse i matematikk. Skemp (1976) understreker imidlertid at det ikke er snakk om at den ene typen forståelse er bedre enn den andre, men at de begge kan være hensiktsmessige på ulike måter. På denne måten legger Skemp (1976) også vekt på at en lærer kan gjøre begrunnede valg ved bevisst å undervise med instrumentell forståelse som mål. Dette kan gjøres av ulike grunner, for eksempel dersom det tar for lang tid å oppnå relasjonsforståelse fordi et bestemt emne er krevende, selv om elevene likevel trenger kunnskapen for å komme videre.

Når en lærer er i stand til å gjøre begrunnede valg ved å vurdere alternative mål for instrumentell- og relasjonsforståelse viser læreren selv bevissthet om skillet, og som følge av det også til relasjonsforståelse i matematikk.

Hvordan man som lærer kan legge til rette for at elevene utvikler relasjonsforståelse i matematikk, er en annen side av saken. Vi skal nå se på ulike læringsteorier, som vil lede oss i riktig retning.

2.1.2 Læringsteorier

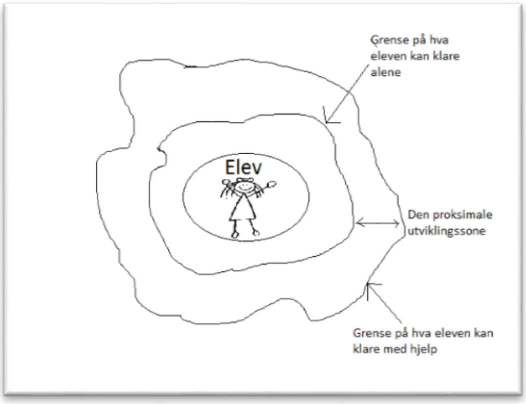
Fra pedagogikken kjenner vi til ulike læringsteorier. Jeg skal ikke utdype alle læringsteoriene her, men jeg har lyst til å nevne at tilegning av kunnskap har blitt sett på som «å vanne blomster». Dette kan tolkes på den måten at elevene lærte mens læreren fortalte hva de skulle lære. Med andre ord tilegnelse av kunnskap som en mekanisk robot eller som påfyll i tomme flasker. Heldigvis er forskningen kommet videre og vi er kjent med at elevene må være aktive deltakere for å lære, således ble sosio-kulturalismen svært populær på slutten av 1900-tallet. Denne teorien tar utgangspunkt i læring i sosial kontekst.

Lev Vygotsky var en russisk psykolog som hevdet at opplæring fremmer utvikling (Vygotsky, 1986). Han var den første som så på forholdet mellom opplæring og utvikling på denne måten. Ved hjelp av sin teori prøvde han å forklare hvordan opplæringen måtte skje og lanserte begrepet *den proksimale utviklingssonen*. Her la han vekt på betydning av språkutvikling og samspillet mellom voksne og barn. Vygotsky så på språket som et viktig redskap og hevdet at det sosiale måtte komme først, deretter det individuelle. Dette kan forstås som at elever er i stand til å utføre handlinger i samarbeid med voksne eller andre som kan mer enn barnet, for deretter å kunne utføre handlinger på egenhånd. På denne måten tilegner elevene seg kunnskap de kan arbeide videre med på egenhånd.

I den hensikt pekte Vygotsky på at det er en sone mellom det elevene klarer på egenhånd og det utviklingspotensialet de har, ved å arbeide sammen med noen som har mer kunnskap. Det var denne sonen Vygotsky kalte for *den proksimale utviklingssonen*.

Det er viktig å være klar over at denne utviklingssonen varierer fra elev til elev. Elevenes evner og læreforutsetninger er statiske, derfor måler de kun elevenes nedre og individuelle grense. Ut fra dette kan vi forstå at det finnes forskjeller mellom å måle elevenes individuelle kunnskap og den kunnskapen de har når de samarbeider med andre. Lærerens oppgave i denne situasjonen blir å kartlegge hva elevene kan på egenhånd. Deretter må læreren legge til rette for elevene ved å gi støtte og oppmuntre til samspill med andre, for å utnytte og utvide denne sonen.

Under viser en modell av *den proksimale utviklingssonen*, hvor eleven er selve kjernen i figuren og elevens utviklingspotensial er området mellom den indre og ytre grensen.



Figur 1: Den proksimale utviklingssone (Kirkevold, 2012).

Vi har nå sett at dersom elever skal utvikle sin kunnskap, er språket et viktig redskap i tillegg til samarbeid med noen som kan mer enn eleven. Av den grunn er elevenes utviklingspotensial statisk og varierer mellom hva elevene klarer på egenhånd og hva de klarer i samarbeid med andre.

Videre skal vi se på undervisningskunnskap, som også er et viktig aspekt i elevenes læring.

2.1.3 Undervisningskunnskap

Kleve (2014) viser til tidligere forskning hvor det kommer frem at lærerens kompetanse i matematikk er avgjørende for hva slags matematikkundervisning elevene møter i skolen. Hun viser til Shulman (1986), som fikk fagdidaktikken inn i undervisningsforskning. Shulman (1986) belyser i sin artikkel manglende forskning på hvordan kunnskap, for eksempel i matematikk blir omformet fra å være lærerens, til noe det skal undervises videre i.
Denne kunnskapen delte han inn i tre kategorier:

- Subject Matter Content Knowledge (SMCK)
- Pedagogical Content Knowledge (PCK)
- Curricular Knowledge (CK)

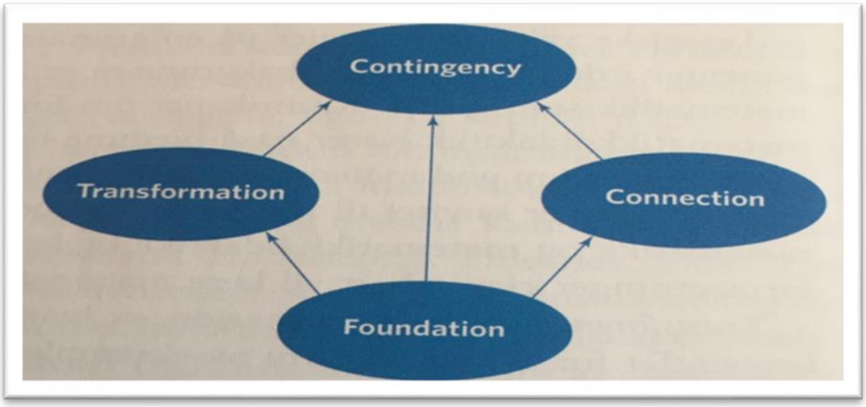
Ved å oversette disse tre kategoriene, får vi kunnskap om faginnhold og organisering av innholdet (SMCK), kunnskap om hvordan en kan overføre denne kunnskapen i undervisningssammenheng (PCK) og kunnskap om hva som finnes av undervisningsmateriell (CK). Denne undervisningskunnskapen ble senere videreutviklet av Ball, Thames og Phelps (2008) til å gjelde ulike kunnskapsområder lærere trenger for å undervise i matematikk. De utviklet en modell hvor disse kunnskapsområdene ble illustrert. Denne modellen har fått navnet *Mathematical knowledge for teaching* (MKT) og ble i 2010 oversatt til norsk av Fauskanger og Mosvold til *undervisningskunnskap i matematikk* (UKM) (Fauskanger & Mosvold, 2013).

Figur 2: De ulike delene av UKM (Fauskanger & Mosvold, 2013, s. 86).

Ut fra denne modellen ser vi at Ball et al. (2008) skiller mellom fagkunnskap på venstre side og pedagogisk kunnskap på høyre side. Kort forklart dekker den venstre siden allmenn kunnskap, kunnskap om matematikkens struktur og spesialisert fagkunnskap, som er den spesielle kunnskapen lærere trenger for å undervise i matematikk. Høyre side dekker kunnskap om læreplaner, lærebøker, matematisk innhold og elever.

I likhet med Ball et al. (2008), tok også Rowland, Huckstep og Thwaites (2004) utgangspunkt i det Shulman (1986) hadde gjort tidligere og utviklet *The knowledge Quartet*, et hjelpemiddel en kan benytte for å reflektere over hvordan lærerens matematikkunnskaper kommer til uttrykk i undervisningen. Den er delt i fire kategorier:

- Foundation
- Transformation
- Connection
- Contingency



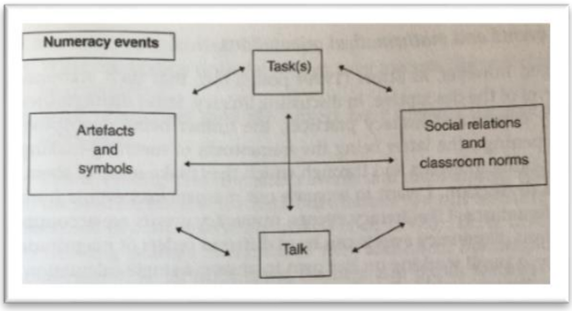
Figur 3: Sammenhengen mellom de ulike komponentene i kunnskapskvartetten (Kleve, 2014, s. 592).

Oversatt til norsk blir dette *kunnskapskvartetten* og de fire kategoriene blir fundament, som legger vekt på grunnlaget læreren har for undervisning og kan betegnes som grunnmuren i undervisningen. Transformasjon, som forklarer hvordan læreren reproduserer eller omgjør lærestoffet for elevene. Forbindelse eller sammenheng er hvordan læreren ivaretar helheten i matematikkfaget. Og til slutt beredskap, som tydeliggjør hvordan læreren takler ikke-planlagte innspill og hendelser i undervisningen.

Askew (2000) viser i sin studie til forskning fra Nederland og påpeker at det er lite forskning i England som belyser hvordan elever lærer matematikk. For øvrig peker han på at den forskningen som finnes i England omfatter eldre elever og ikke elever i grunnskolen. Askew (2000) ser på hva det vil si å lære og hva som kjennetegner effektiv tallundervisning. På denne måten deler han læring i to kategorier, og skiller mellom læring som regler og læring ved deltakelse. Dette er punkter vi kan assosiere med begrepene fra Skemp (1976) sin teori om instrumentell- og relasjonsforståelse.

Læring som regler kan assosieres med læring som fremmer instrumentell forståelse og læring ved deltakelse kan assosieres med læring som fremmer relasjonsforståelse. Askew (2000) peker også på elevenes mulighet til deltakelse, som et viktig punkt dersom man skal lære. Dette er noe vi kan assosiere med læring i et sosialt fellesskap (Vygotsky, 1978). Med tanke på effektiv tallundervisning, viser Askew til en modell med fire parametere:

- Artefacts and symbols
- Sosial relations and classroom norms
- Task(s)
- Talk



Figur 4: De fire parameterne for tallundervisning (Askew, 2000, s. 141).

Denne modellen bruker han som et rammeverk, for å undersøke nøkkelelementene i matematikkaktiviteter. Disse parameterne bygger videre på en tidligere modell utarbeidet av Saxe (1989). Oversatt til norsk blir dette artefakter og symboler, sosiale relasjoner og klasseroms-normer, oppgave(r) og språk.
Askew (2000) bemerker også at hver av disse parameterne stiller innledende spørsmål til undervisningen, spesielt med tanke på hvordan læreren planlegger undervisningen.

Hvordan ulike lærere planlegger undervisningen er ikke en del av denne oppgaven. Men det kan nevnes at man i pedagogikken har en didaktisk trekant å ta utgangspunkt i når undervisning skal planlegges. Her vektlegges hva, hvordan og hvorfor noe skal læres, tre viktige ord i en lærers planlegging av undervisning (Engelsen, 2012). Dette gir oss en glidende overgang til strategiopplæring.

2.1.4 Strategiopplæring

På Utdanningsdirektoratet sine sider finner vi kunnskapsløftets prinsipper for opplæringen, her belyses læringsstrategier på følgende måte:

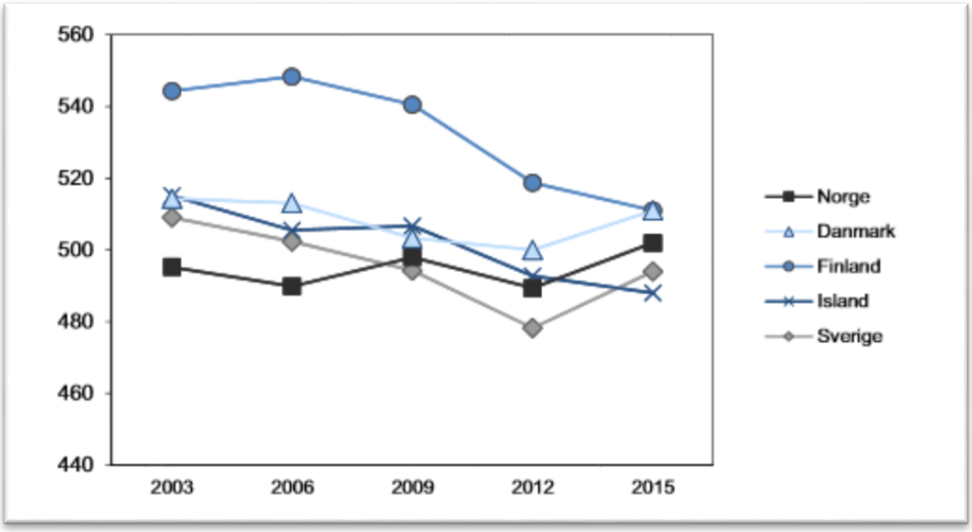
> «Læringsstrategier er framgangsmåter elevene bruker for å organisere sin egen læring. Dette er strategier for å planlegge, gjennomføre og vurdere eget arbeid for å nå nasjonalt fastsatte kompetansemål.
> Det innebærer også refleksjon over nyervervet kunnskap og anvendelse av den i nye situasjoner. Gode læringsstrategier fremmer elevenes motivasjon for læring og evne til å løse vanskelige oppgaver også i videre utdanning, arbeid eller fritid» (Utdanningsdirektoratet, 2015, s. 3).

Kort forklart handler læringsstrategier om ulike måter å lære hvordan en kan lære på, noe som fører til en bevisstgjøring av kunnskapen elevene tilegner seg.

Strategiopplæring er viktig og flere forskere viser til at elever bør undervises i ulike strategier (Hiebert & Carpenter, 1992; Van De Walle, Karp, Bay-Williams & Wray, 2007). Ostad (2001) hevder at matematikkvansker oppstår på grunn av mangelfull fokus på strategiopplæring. Videre gjør Ostad (2008) det kjent at forutsetningen for at elever skal lære effektive strategier er nært knyttet til lærernes kompetanse.

Programme for International Student Assessment, kjent som PISA-undersøkelsen, er en test, som utføres på 15 åringer. Testen gjennomføres hvert tredje år og omfatter fagene norsk, matematikk og naturfag, med hovedfokus på et av fagene per år. Det vil si at det går ni år mellom hver gang det fokuseres spesielt på for eksempel matematikk. Første PISA-undersøkelsen med fokus på matematikk var i 2003 (Kjærnsli, 2004) og undersøkelsen avslørte at norske elever hadde dårlige læringsstrategier, mens de finske elevene hadde gode læringsstrategier. I studien kom det også frem at elevene i Singapore hadde gode læringsstrategier, kombinert med problemløsing i matematikkundervisningen. Oppgavene i undersøkelsen var basert på problemløsing og elevenes nivå ble vurdert ut fra en poengsum, som ytterligere ble inndelt i ulik grad av nivå. Disse nivåene kan dessuten deles inn i hvilken forståelse elevene utvikler ved å løse oppgavene, om de fører til instrumentell forståelse eller relasjonsforståelse.

I 2015 var 72 deltakerland representert og ut fra tabellen på neste side (tabell 1), ser vi at de norske resultatene har vært nokså stabile, selv om tabellen viser en nedgang fra 2003 til 2012 og en svak oppgang til 2015. Vi kan imidlertid ikke stole blindt på at disse tallene er sikre, før vi i 2021 får resultatene fra en ny undersøkelse med hovedfokus på matematikk igjen (Kjærnsli & Jensen, 2016).



Tabell 1: PISA resultater som viser nordiske elevers kompetansenivå i matematikk (Kjærnsli & Jensen, 2016, s. 116).

Utdanningsdirektoratet (2015) hevder at gode læringsstrategier øker muligheten for tilpasset opplæring. Både fordi elevene får bedre innsikt i egen læring og fordi de får et variert utvalg av fremgangsmåter til å løse oppgaver og å se lærestoff på. Ved å få bedre innsikt i egen læring vil elevene også bli bedre i stand til å vurdere seg selv. På denne måten kan ferdighetstrening, refleksjon og kontroll av egen læring betegnes som læringsstrategier. Dette finner vi likhetstrekk til i Stø kurs, hvor det blir vektlagt at arbeid med oppgaver som stimulerer til kognitiv tenking er viktig (Kjærnsli & Jensen, 2016).

I teksten over ble vi introdusert for tre nye begreper, tilpasset opplæring, problemløsing og motivasjon. Disse begrepene vil jeg utdype under.

2.1.5 Tilpasset opplæring

Tilpasset opplæring er et begrep, som gjennom flere år er benyttet i de ulike norske læreplanene. Begrepet har i årenes løp blitt tolket på forskjellige måter. Noen hevder at det er et politisk begrep, som endrer betydning i takt med læreplanene (Jenssen & Lillejord, 2009). Ofte er det ulike oppfatninger omkring dette begrepet, fra å gjelde enkeltelever til hele klasser (Engelsen, 2012).

Utdanningsdirektoratet (2015) legger vekt på at læreplanverket har retningslinjer for læring, og de som er mest relevante for tilpasset opplæring er inkludering, variasjon, erfaringer, relevans, verdsetting, sammenheng og medvirkning. En kan på denne måten tolke begrepet tilpasset opplæring i lys av «en inkluderende skole». Det vil si en skole hvor undervisningen

blir tilpasset for å imøtekomme hver enkelt elev i et fellesskap, uansett hvilket faglig nivå elevene befinner seg på. For å få dette til, må undervisningen varieres.
Tilpasset opplæring blir av den grunn sett på som et grunnleggende element i skolen og Utdanningsdirektoratet (2015) belyser at undervisningen bør legges til rette for fellesskapet, slik at alle gis mulighet til mestring. For øvrig bemerker de at alle elevene må møte utfordringer slik at de har noe å strekke seg etter, enten på egenhånd eller sammen med andre. Dette gir grunnlag for utvikling av et inkluderende læringsmiljø, hvor tilpasset opplæring for hver enkelt elev kan gjenkjennes gjennom variasjon i bruk av arbeidsmåter, lærestoff, læremidler, organisering og intensitet i undervisningen. Utdanningsdirektoratet peker også på elevenes ulike utgangspunkt med tanke på progresjon, i forhold til kompetansemål på nasjonalt nivå.

2.1.6 Problemløsing

Flere hevder at det er vanskelig å definere hva en problemløsingsoppgave i matematikk er (Frejd, 2013; Johansson, 2003).

Kjærnsli, Nortvedt og Jensen (2012) viser i *Norske elevers kompetanse i problemløsing* til følgende definisjon: «Et problem er en situasjon som ikke har noen opplagt løsning» (Kjærnsli et al., 2012, s. 5). Ut fra denne definisjonen kan vi forstå at oppgaver av denne typen må løses uten at fremgangsmåten blir presentert. Videre forklarer Kjærnsli et al. (2012, s. 10) at «problemløsing er en viktig kompetanse både i skolegang, arbeids- og samfunnsliv».

Pólya (1945) har tidligere belyst at et problem kan være beskjedent. Allikevel kan det utfordre din nysgjerrighet og bringer dine kreative evner på banen, slik at du løser problemet ved hjelp av dine egne midler. På denne måten kan du oppleve at mentalt arbeid kan sette sitt preg på både sinn og karakter resten av livet. Videre hevder Pólya (1945) at matematikklærere har store muligheter. De kan enten fylle undervisningen med rutineoppgaver og drill, eller oppgaver som utfordrer elevenes nysgjerrighet. På sikt vil det første forslaget drepe elevenes interesse for matematikkfaget og i tillegg hemme deres intellektuelle utvikling.
Arbeid med rutineoppgaver og drill, kaller Pólya (1945) for misbruk av lærernes mulighet. Han mener at lærerne bør utfordre elevenes nysgjerrighet ved å gi dem problemer relatert til deres kunnskap. Deretter må elevene hjelpes i gang med å løse disse problemene i form av stimulerende spørsmål. På denne måten kan lærerne gi elevene smaken på og muligheten til selvstendig tenking.

Det er imidlertid viktig å ta i betraktning at oppgaver i matematikk kan være et problem for én elev, selv om det ikke trenger å være et problem for en annen elev.

Problemløsing i matematikk er nært knyttet til begrepet åpne oppgaver, som er et begrep med røtter fra Japan og starten av 1970-årene (Nohda, 1991). Pehkonen (2007) viser i sin artikkel til at oppgavene er åpne, dersom utgangspunktet og sluttproduktet er åpent. På denne måten vil elevene i møte med åpne oppgaver være frie til å starte på oppgaven og kunne stille seg utfordrende spørsmål underveis. I tillegg har elevene mulig for å gi forskjellige svar, samtidig som de ulike løsningene er riktige. Dessuten peker Pehkonen (2007) på at det motsatte av åpen er lukket og viser til oppgaver hvor utgangspunktet er nøyaktig angitt og resultatet er bestemt.

Åpne oppgaver gir elevene mulighet til kreativ matematisk tenking og er fleksible med hensyn til elevenes ulike matematiske evner. Siden denne typen oppgaver åpner elevenes mulighet for å løse en oppgave på ulike måter, så bidrar dette til samtaler om hvordan elevene har kommet fram til sine svar. Dette kan igjen føre til utvikling av relasjonsforståelse. I tillegg kan dette også være en viktig faktor med tanke på elevenes motivasjon og mestringsfølelse (Pehkonen, 2007).

2.1.7 Motivasjon

Motivasjon blir ofte betegnet som drivkraften til å holde på med noe (Imsen, 2005, s. 230). Denne innebygde drivkraften kalles ofte for indre motivasjon. Elever som mangler denne indre driven trenger hjelp utenfra for å bli motivert, ofte ved hjelp av en form for belønning. Denne formen for motivasjon kalles ytre motivasjon.

Solvang (1986) understreker at motivasjonsbegrepet ikke brukes på samme måte i psykologien som i matematikken. I matematikk er motiverte elever nysgjerrige og de liker å utforske eller har et konkurranseinstinkt som gjør at de vil prestere godt. Med andre ord har de en egen drivkraft til å lære.

Utdanningsdirektoratet (2015) tydeliggjør også at motiverte elever har lyst å lære. I tillegg er elevene nysgjerrige, viser god utholdenhet og evne til å arbeide målrettet. De vektlegger at elevene inspireres til lærelyst ved hjelp av engasjerte og trygge lærere, som bruker varierte arbeidsmåter i undervisningen. Utdanningsdirektoratet poengterer også at undervisningen må tydeliggjøre læringsmålene og utfordre elevene til utforsking alene eller sammen med andre. For å organisere egen læring er bruk av gode læringsstrategier et viktig verktøy for å øke motivasjonen til å nå fastsatte mål.

Holden (2003) viser i sin studie til hvordan en lærer bygger opp elevenes motivasjon til matematikkfaget ved kombinasjon av ulike strategier for å fremme forståelse istedenfor fasitsvar. Dette kan tolkes som strategier for å utvikle relasjonsforståelse fremfor instrumentell forståelse. I studien til Holden (2003) må elevene på sjette trinn undersøke, finne ut og forklare. På denne måten legges det vekt på samarbeid, språklig aktivitet, prøving og feiling. Læreren i studien «Fru Flink» har følgende mål for sin matematikk undervisning: *«alle skal like matematikk og ha det gøy mens de arbeider med faget»* (Holden, 2003, s. 29), selv om kunnskapsnivå og holdninger varierer blant elevene. Ut fra denne studien ser vi at motivasjon er en viktig faktor i undervisningen. For øvrig vektlegges det at matematikk skal være et morsomt fag å arbeide med. Begreper som undersøke, finne ut, forklare, samt prøving og feiling kjenner vi igjen fra utforskende matematikk som problemløsing. Samarbeid og språklig aktivitet er også begreper som vektlegges i denne studien, og disse begrepene kjenner vi igjen fra Vygotsky (1986).

Vi har nå sett på ulike aspekter som påvirker elevenes læring. I neste delkapittel skal vi se nærmere på tidligere analyser av lærebøker.

2.2 Analyse av lærebøker

I Norge har det vært vanlig med godkjenning av lærebøker, siden den kristne allmueskolen på 1800-tallet. Denne statlige godkjenningen ble opphevet i år 2000, like før vår nåværende læreplan, *Læreplanen for Kunnskapsløftet* (LK06), trådde i kraft (Stenstad, 2000).

Selv om det finnes et *«hav»* av lærebøker i matematikk, er det nå opp til den enkelte skole å velge det læreverket de ønsker å bruke. Av den grunn er analyse av lærebøker blitt populært i den senere tid. I likhet med Johansson (2003) legger også Fan et al. (2013) vekt på at det finnes begrenset med studier på lærebøker i matematikk. I tillegg understreker Johansson (2003) at de som finnes kan tredeles på følgende måte:

1) Studier av struktur og innhold i lærebøker. På engelsk benyttes ofte betegnelsen *«The three e's»*, da denne typen studier analyserer exposition, examples and exercises, begreper som kan oversettes til demonstrasjon, eksempler og oppgaver.

2) Innholdsanalyse av lærebøker i matematikk. Her sammenlignes ofte lærebøker på tvers av land og det er naturlig å avgrense til områder av matematiske emner. Hvordan lærebøker samsvarer med læreplaner og mål for matematikkdidaktikk er kategorier som inngår under dette aspektet. I tillegg til innholdsanalyse av lærebøker over tid, gjerne med et historisk perspektiv.

3) Studier på bruk av lærebøker i matematikk. Her undersøkes det hvordan lærere og elever bruker lærebøkene i undervisningen, hvilket ansees å være den mest vanlige analyse-formen.

Denne inndelingen finner vi også paralleller til i studien av Charalambous, Delaney, Hsu og Mesa (2010) hvor de viser til tre generelle hovedkategorier innen tverrnasjonal lærebokanalyse. Disse hovedkategoriene blir klassifisert som horisontal, vertikal og kontekstuell analyse. Kort forklart ser den horisontale delen av analysen på bakgrunn og struktur, samt selve helheten av læreboken eller læreverket. Det kan være tittelen på læreboken, antall bøker i læreverket, sidetall, hvem forfatterne er og hvilken bakgrunn de har. I tillegg kan det være informasjon om forlaget og eventuelt tilleggsmateriell. Den vertikale delen av analysen går mer i dybden og ser på hva de enkelte oppgavene krever av elevene med tanke på kognitive krav, sammenheng og hvordan oppgavene blir presentert. Den kontekstuelle delen av analysen ser på hvordan lærebøkene fungerer i bruk, altså i undervisningssammenheng.

Det finnes flere grunner til at lærebøker analyseres og studien til Reys, Reys og Chávez (2004), legger vekt på at lærebøker er et viktig verktøy for lærere. Studien til Reys et al. (2004) gjør det kjent at lærere ofte speiler seg i lærebøkene. Det vil si at de følger lærebøkene fra perm til perm og bruker dem i planlegging av undervisning og til lekser. Av den grunn bestemmer ofte lærebøkene både hva og hvordan lærerne skal undervise og som følge av dette også hvordan elevene skal lære.

Det kan være bra at lærebøkene bestemmer hvilken rekkefølge lærerne skal undervise i, for eksempel med tanke på at posisjonssystemet må være på plass før en kan starte med for eksempel addisjon og subtraksjon av tosifrede tall.

Studien til Reys et al. viser også at skoler bruker lærebøkene i fem til sju år, før de byttes ut. Derfor er det også viktig å ta kostnader i betraktning. Samtidig bør en også være bevisst på at endringer og nye utgaver av lærebøkene kan forekomme i den perioden de anvendes.

Videre peker Reys et al. (2004) på at undervisningen ofte presenterer fakta som må pugges, istedenfor å legge opp til matematiske diskusjoner. De viser til *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS) en internasjonal studie som måler elevers kompetanse i matematikk og naturfag på femte og åttende trinn. I lærebokanalysen av Schmidt, Mcknight og Raizen (1997), kom det frem at amerikanske lærebøker består av mye repetisjon. Det ble også vektlagt at det på fjerde til åttende trinn bare ble introdusert ett til to nye emner for hvert år, mens andre land introduserte seks til sju nye emner i året. For øvrig belyser også studien til Reys et al. (2004) at det er typisk for amerikanske lærebøker å fokusere på memorering og hukommelse, selv om det også nevnes at det er stor forskjell på lærebøker. Det kommer også frem i studien at nyere lærebøker fokuserer mer på ferdigheter, men elevene fratas likevel muligheten til selvstendig tenking på grunn av lærernes presentasjon av materialet. Reys et al. (2004) bemerker videere at lærebøker bør presentere et mer sammenhengende innhold og utvikle idéer i dybden. På denne måten gir oppgavene mening og kan engasjere elevene, slik at de blir mer motivert for læring. Reys et al. viser også til fire spørsmål en bør stille til læreverket under analysen:

- Hva er nøkkel idéene for hvert trinn?
- Hvordan er innholdet i forhold til nøkkel idéene?
- Hvilken type aktiviteter legges det opp til? Blir elevene i stand til å tenke selvstendig eller oppfordres det til å følge algoritmer for å finne en løsning?
- Er det fokus på matematisk tenkning og problemløsing? Utfordres elevene til å forklare hvorfor eller hva om?

Også Sunday (2014) understreker i sin studie at lærebøker er det viktigste verktøyet i den matematiske undervisnings og læringsprosessen. Her blir læreboken identifisert som en av faktorene som påvirker elevenes læringsutbytte. Sundays studie undersøker lærebøker i

matematikk i sørvest Nigeria, hvor ulike egenskaper ved lærebøkene undersøkes av brukere. At undersøkelsen foretas av brukere, vil si at analysen ble utført av erfarne matematikklærere med kunnskap om krav fra læreplanen og innholdet i lærebøkene.
At lærebøker er det eldste mediet for instruksjon og i tillegg er unike på grunn av varighet, understrekes også av Sunday (2014). Han påpeker også at lærebøkene er bærbare og uavhengige av strøm. Denne studien undersøkte hvordan lærebøkene var med tanke på tilgjengelighet, relevans, egnethet og om de var tilstrekkelige i samsvar med den nigerianske læreplanen i matematikk. Funnene i hver av de fire aspektene var tilfredsstillende med tanke på læreplanen, selv om forskningen viste at lærebøkene ikke kunne påvirke elevenes holdninger på en positiv måte. Både lærerveiledning, lærebøker, eksempler og oppgaver fikk hensikten redusert på grunn av mangler. Det ble også vektlagt at flere faktorer var med på å bestemme elevenes læringsutbyttet, blant annet elevene selv, læreren, miljøet, pensumet og politikken, selv om disse punktene ikke var en del av denne forskningen. Sunday (2014) understreker også at det kan være forskjell på om det er brukere eller ikke-brukere, som analyserer lærebøker.

I studien til Charalambous et al. (2010) ble lærebøker i matematikk for grunnskolen med fokus på addisjon og subtraksjon av brøk sammenlignet på tvers av tre land: Irland, Kypros og Taiwan. Charalambous et al. (2010) bruker et selvutviklet rammeverk, som er spesielt konstruert for å undersøke bøkenes læringsmuligheter, særlig med tanke på presentasjon av innhold og forventinger knyttet til oppgavene. De fant både likheter og forskjeller, noe som understreker behovet for ytterligere forskning på dette området. Dessuten viser Charalambous et al. (2010) til at det eksisterer gjenkjenning av lærebøker innen et gitt land, noe de kaller for «lærebok signatur». Dette peker også Pepin og Haggarty (2001) på i sin studie, hvor de undersøker lærebøker fra England, Frankrike og Tyskland. De peker på at lærebøker fra England kan kjennetegnes ved at svaret på spørsmålene i oppgavene kommer frem av eksemplene i forkant, noe som fører til lite selvstendig tenking for elevene. Lærebøkene i Frankrike starter derimot ofte med en aktivitet, deretter et kurs og til slutt oppgaver. Denne varianten er utforskende for elevene og gir dem således mulighet til selvstendig tenkning.

Charalambous et al. (2010) utelater den kontekstuelle delen i sin studie og fokuserer kun på horisontal og vertikal analyse. Denne typen studier kan avsløre likheter og forskjeller i muligheter elevene har til å lære matematikk på og hva som tilbys elever rundt om i verden. I tillegg kan denne typen studier avsløre i hvilken grad de ulike landenes læreverk prioriterer

konseptuell forståelse eller flyten i prosedyrene. Dette er begreper vi kan assosiere med Skemp (1976) sine begreper instrumentell- og relasjonsforståelse. Denne typen studier kan avdekke hvordan behandlingen av matematisk innhold kan variere mellom land.
Rammeverket som benyttes i artikkelen til Charalambous et al. (2010) er utviklet for å ivareta både generelle og bestemte aspekter av læreboken og kan brukes til å karakterisere læringsmuligheter i lærebøkene. Informasjon om ulike rammeverk vil jeg kommentere i neste del kapittel.

2.3 Rammeverk

Under vil jeg komme med noen eksempler på tidligere analyser av lærebøker i matematikk, og samtidig vil jeg se på bruk av ulike rammeverk og belyse hvor jeg hentet inspirasjon til egen studie og analyse fra.
Det finnes flere ulike rammeverk en kan benytte som verktøy for å karakterisere lærebøkenes læringsmuligheter og her vil jeg forklare to av dem.

2.3.1 Blooms taksonomi

Blooms taksonomi (Bloom, 1956) er et rammeverk fra kategorien verbanalyse. Dette kan være et nyttig verktøy ved oppgaveanalyse, for å klassifisere kompetansenivået på de ulike oppgavene ut fra kunnskapsmål. Blooms taksonomi deler kunnskapsmålene opp i 6 grupper og anvender passende verb til hvert nivå. Her er det laveste nivået *hukommelse* og det høyeste nivået er *vurdere*. På neste side viser jeg til en modell (figur 5), hvor de ulike verbene som kan knyttes til de ulike nivåene presenteres.

LEVELS	DEFINITIONS	VERBS
KNOWLEDGE	Remembering or recalling appropriate, previously learned information in the form of specifics, methods, structures or settings.	Write, list, label, name, state, define
COMPREHENSION	Understanding and apprehending of what is communicated and can make use of the material or idea. This without relating to other material or seeing its complete connections.	Explain, summarise, paraphrase, describe, illustrate
APPLICATION	Applying previously learned information (for example general methods and technical principles) in new and concrete situations to solve problems that have single or best answers.	Use, compute, solve, demonstrate, apply, construct
ANALYSIS	Breaking down information into component parts, clarifying the structure and procedures (i.e. the hierarchy of ideas and their relations to each other).	Analyse, categorise, compare, contrast, separate
SYNTHESIS	Combining prior knowledge and skills to produce a pattern or structure (a whole) that was not clearly there before.	Create, design, hypothesise, invent, develop
EVALUATION	Judging the value and satisfaction of material and methods. The judgements are based on criteria given or determined by the student.	Judge, recommend, critique, justify

Figur 5: De ulike nivåene i Blooms taksonomi (Bloom, 1956).

Jopperud (2015) brukte denne modellen i sin masteroppgave, hvor hun sammenlignet to læreverk på åttende trinn med fokus på algebra og relasjonsforståelse. Et negativt trekk ved denne modellen er at det kan være vanskelig å skille de ulike nivåene fra hverandre. Av den grunn er modellen ofte forenklet i skolesammenheng, ved å redusere nivåene fra seks til tre. Denne reduserte inndelingen finner vi igjen i TIMSS Advanced 2015 (Grønmo, Hole & Onstad, 2016, s. 160), som er en internasjonal studie hvor avgangselever på videregående skole testes i fagene matematikk og fysikk. Her finner vi denne reduserte inndelingen med kategoriene: *Å kunne*, *å anvende* og *å resonnere*. Disse verbene blir benyttet for å kategorisere kunnskapsnivået på oppgavene i testen. Vider kan vi se hva som inngår i de ulike kategoriene:

- **Å kunne:** Memorere fakta, sammenligne like størrelser, bruke algoritmer for å løse oppgaver og å hente informasjon fra figurer.
- **Å anvende:** Egen kunnskap og ferdigheter ved å velge metoder og strategier for å løse rutineoppgaver.
- **Å resonnere:** Ved hjelp av kognitive tanker og i tillegg kunne begrunne sine valg ved hjelp av generalisering og bevis.

Ut fra disse tre kategoriene ser vi sammenheng med Skemp (1976) sine begreper og kan knytte det laveste nivået, *å kunne*, til instrumentell forståelse. Det høyeste nivået, *å resonnere*, kan kobles sammen med relasjonsforståelse. Nivået *å anvende* kan helle begge veier og i tillegg være med på å indikere om det er variasjon i oppgavenes kunnskapsnivå.

2.3.2 Oppgaveanalyseguide

Charalambous (2010) benytter i denne studie, hvor han ser på lærebøker i bruk, en modell som opprinnelig er hentet fra en studie av Smith og Stein (1998). Smith og Stein utviklet en oppgaveanalyseguide *«Task Analysis Guide»*, videre betegnet som TAG.
Ved hjelp av denne modellen deles oppgavene inn i ulike kategorier, og en skiller oppgavene ut fra om de har fokus på svar eller utvikling av forståelse. Med andre ord skilles oppgavene etter om det er memoreringsoppgaver eller om oppgavene har en meningsfull sammenheng. En bruker gjerne begrepene *gjøre* oppgaver eller *kognitive* oppgaver. Ut fra dette kan vi forstå at den ene typen oppgaver handler om repetisjonsoppgaver som er basert på gjentakelse, for å finne et svar. Denne typen oppgaver krever lite selvstendig tenking. Kognitive oppgaver går mer på utvikling av forståelse, gjerne ved hjelp av utforsking, problemløsing og kognitive krav. Dette er med andre ord oppgaver hvor elevene må tenke selvstendig.

TAG-modellen analyserer oppgavenes kognitive krav og deler oppgavene inn i fire ulike kategorier, basert på hvor stort kognitivt utbytte elevene får ved å løse dem. Det vil si om elevene må tenke selvstendig for å løse oppgavene, eller om det bare er å gjøre oppgavene ut fra gitte instruksjoner. Under vil jeg beskrive hva som klassifiserer de ulike nivåene etter egen oversettelse fra Charalambous (2010):

Memorering: Denne typen oppgaver innebærer enten reproduksjon av tidligere lærte fakta, regler, formler og definisjoner eller bruk av disse for å huske. Oppgavene kan ikke løses ved hjelp av prosedyrer, enten fordi prosedyrene ikke er lært eller fordi tidsrammen for å løse oppgaven er for knapp. Slike oppgaver er nøyaktige gjengivelser av noe elevene har sett tidligere og det som skal reproduseres er klart og direkte oppgitt. Oppgavene har ingen sammenheng med prosedyrer for utvikling av forståelse.

Prosedyrer uten sammenheng: Oppgavene under denne kategori
en innebærer bruk av algoritmer fra tidligere instruksjon. Her fokuseres det på å produsere riktig svar i stedet for å utvikle matematisk forståelse. Det er ikke alltid helt klart hva

oppgaven ber om, selv om oppgavens plassering kan hjelpe elevene videre. Dette betyr at en kan forstå hva oppgaven krever, ved å se på tidligere oppgaver eller eksempler. Oppgavene krever hverken forklaring eller beskrivelse av hvilken fremgangsmåte som er brukt.

Prosedyrer med sammenheng: Her fokuseres det på elevenes bruk av prosedyrer for å utvikle en dypere forståelse av matematiske begreper og idéer. Selv om oppgavene foreslår alternative løsningsveier, står elevene fritt til å velge hvilken retning de vil ta. På denne måten er oppgavene til en viss grad kognitive, fordi de baserer seg på sammenheng mellom ulike representasjonsformer som bidrar til å utvikle relasjonsforståelse.

Problemløsing: For å løse denne typen oppgaver, må elevene utforske og forstå matematiske begreper. Det innebærer at elevene må ha kjennskap til relevant kunnskap og ha erfaringer med å bruke dem gjennom oppgaven. Oppgavene krever en stor grad av kognitiv innsats og kan virke frustrerende å arbeide med.

Ved å bruke TAG-modellen, kan vi også her trekke linjer til Skemp (1976) og plassere de to laveste nivåene *memorering* og *prosedyrer uten sammenheng*, sammen med instrumentell forståelse og de to høyeste nivåene *prosedyre med sammenheng* og *problemløsing*, sammen med relasjonsforståelse.

Vi har nå sett på ulike rammeverk for analyse av oppgaver. Videre skal vi i neste delkapittel se på emnet brøk.

2.4 Brøk

Denne studien er begrenset til å gjelde brøk, av den grunn vil jeg i denne delen se på relevant teori og tidligere forskning som omhandler brøk.

Brøk er en utvidelse av tallbegrepet, fra å gjelde naturlige tall til rasjonale tall. Naturlige tall er de vanlige tallene vi benytter ved telling én, to, tre, fire, fem, seks og så videre. I tillegg har vi hele tall, som inkluderer naturlige tall og består av negative og positive hele tall i tillegg til null. Videre har vi rasjonale tall, det er tall som skrives som en brøk der telleren og nevneren er heltall. De hele tallene er en delmengde av de rasjonale tallene, som følge av dette kan vi alltid skrive et helt tall a som $\frac{a}{1}$.

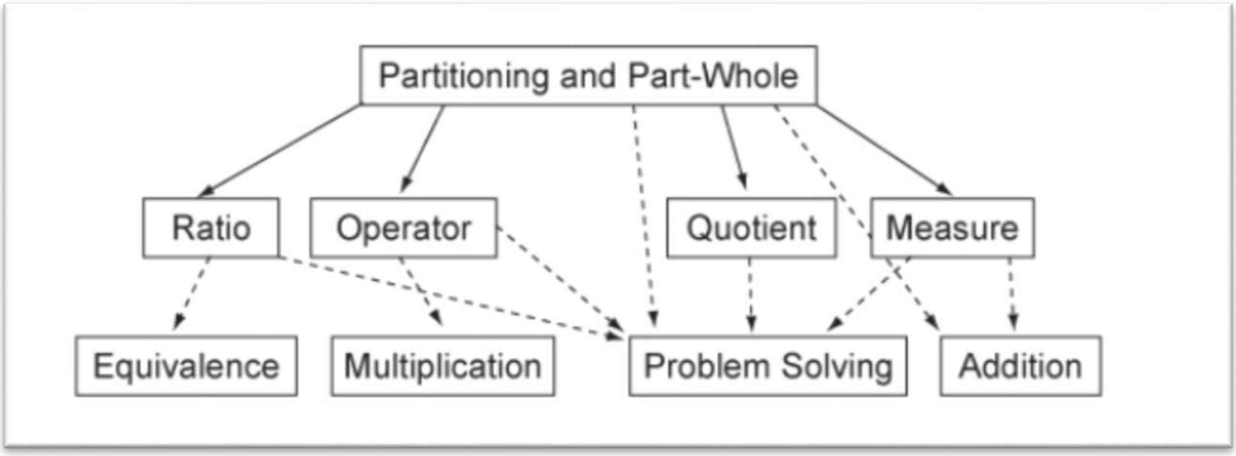
Denne utvidelsen spiller en sentral rolle i matematikk-undervisningen og er viktig fordi det krever en dypere forståelse av tall enn den elevene normalt har erfart gjennom arbeid med hele tall (Siegler, Fazio, Bailey & Zhou, 2013).

I boken Teaching fractions, decimals and percentage (Nzmaths, 2008) legges det vekt på at behovet for brøk kommer fra måling og delingssituasjoner, hvor mer eller mindre enn én hel trengs for å dele likt. Slike situasjoner kan for eksempel oppstå dersom sju kaker skal deles på fire barn, eller dersom tre barn skal dele en halv pizza.
I det første eksempelet er det behov for mer enn én hel, siden det er sju kaker. Og i det andre tilfellet er det behov for mindre enn én hel, siden barna skal dele en halv pizza. Det finnes ulike måter å utføre disse oppgavene på og for å visualisere dette kan en i den første oppgaven tegne opp sju kaker og dele hver kake i fire stykker. Da kan elevene gi ett stykke til hvert barn og komme frem til at de får sju kakestykker hver, som tilsvarer $1\frac{3}{4}$ kake til hvert barn. En kan også velge å først dele ut en hel kake til hvert barn, og sitte igjen med tre kaker som hver deles i fire stykker.

Dersom elevene har relasjonsforståelse for brøk, vil de tenke at sju kaker delt på fire barn kan løses ved å multiplisere 7 med 4 og således får de 28 kakestykker. Dersom de dividerer 28 kakestykker med antall barn, får de svaret 7, som representerer antall kakestykker hvert barn får. På denne måten får de den uekte brøken $\frac{7}{4}$ som er det samme som $1\frac{3}{4}$.
Dette tydeliggjør ulike metoder en kan anvende for å illustrere hvordan for eksempel sju kaker kan deles på fire barn. Kieren (1976) hevdes å være den første til å dele brøk inn i ulike aspekter. I neste delkapittel skal vi se nærmere på brøkens ulike aspekter.

2.4.1 Brøkens aspekter

Behr, Lesh, Post og Silver (1983) har med bakgrunn i Kieren (1976) utviklet en modell som illustrerer fem ulike aspekter av brøk. De ulike aspektene er del av en hel, forhold, operator, kvotient og tallstørrelse.



Figur 6: Brøkens ulike aspekter (Bjerke et al., 2013, s. 29).

Behr et al. (1983) vektlegger at alle aspektene må beherskes for å utvikle et godt brøkbegrep og at brøk som del av en hel er selve kjernen eller grunnmuren i modellen. På denne måten opptrer de andre aspektene ut fra dette fundamentet.

Videre skal vi se på hvordan Behr et al. (1983) kategoriserer disse ulike aspektene:

Brøk som del av en hel eller del av en mengde kan beskrives som en situasjon, hvor et objekt er delt opp i nøyaktig like store deler. Eksempelvis kan man benytte et eple og dele det i tre like store deler. Da har man tre tredeler, som er det samme som en hel. Her er det viktig å peke på at hver del av eplet er én del av hele eplet. I tillegg er det viktig at elevene forstår at jo flere deler eplet blir delt opp i, dess mindre blir delene. Brøk som del av en hel illustreres ofte som mat, drikke eller geometriske figurer.

Brøk som forhold viser sammenheng mellom to størrelser eller to tall. For eksempel forholdet mellom del og enhet. Eksempler på dette aspektet kan være femten ananaser som koster ti kroner, hvor mye må vi da betale for seks ananaser?
Her er det viktig å fokusere på at forholdet er det samme og en bør se på forholdet mellom femten og seks, for videre å finne felles faktor, som i dette tilfellet er tre. Da kan en finne ut at tre ananaser koster to kroner og derfor må seks ananaser koste fire kroner.

Brøk som forhold kan også være forhold i en blanding av for eksempel saft, hvor forholdet 1:5 står for én del saft til fem deler vann. Her vil den ferdige saft blandingen inneholde $\frac{1}{6}$ saft og $\frac{5}{6}$ vann.

Brøk som operator anvendes også til sammenligning mellom to tall. Da er det ene tallet en brøkdel av det andre. Det er vanlig å finne eksempler hvor en blir bedt om å finne $\frac{3}{4}$ av et tall eller en mengde. Vi ser da på brøk som en funksjon, hvor den skal operere på et tall eller et objekt. For eksempel $\frac{3}{4}$ av 300. For å løse denne typen oppgaver må vi multiplisere trehundre med tre og deretter dividere på fire.

Et annet eksempel kan være hvor $\frac{1}{3}$ opererer på 12. En skal da finne $\frac{1}{3}$ av 12, dermed må en multiplisere $\frac{1}{3}$ med 12. Dette kan for eksempel løses ved gjentatt addisjon, ved å addere en tredel tolv ganger: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{12}{3}$ og deretter forkorte dette til 4, fordi tolv dividert på tre er fire.

Brøk som kvotient blir sett på som en delingssituasjon, hvor man har to forskjellige objekter og resultatet gir en numerisk verdi. Dersom man for eksempel har tre pizzaer og skal dele disse på fire personer, blir oppgaven å finne ut hvor mye pizza de får hver. I dette tilfellet vil de få $\frac{3}{12}$, som er det samme som $\frac{1}{4}$ av hver pizza, med andre ord $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ pizza hver. Ved å innføre matematiske begreper som at divisor i dette tilfellet er antall pizzaer og dividend er antall personer, utvikles elevenes forståelse. Brøk som kvotient kalles ofte for delingsdivisjon og et annet begrep som inngår under dette aspektet er målingsdivisjon. Oppgaven for målingsdivisjon blir tilnærmet lik, forskjellen er imidlertid at målingsdivisjon fokuserer på antall deler og oppgaven ville blitt som følger: Tre pizzaer skal deles på en vennegjeng, de får $\frac{3}{4}$ pizza hver. Hvor mange venner er de som deler pizza?

Brøk som tallstørrelse kan også innebære sammenligning av brøker, gjerne ved å plassere brøker på en tallinje. Addisjon og subtraksjon av brøker kommer også inn under dette aspektet.

I tillegg utdyper også Behr et al. (1983) fem ulike representasjonsformer for hver av disse brøkaspektene: Konkreter, illustrasjoner, kontekster fra virkeligheten, verbale symboler og skriftlige symboler.

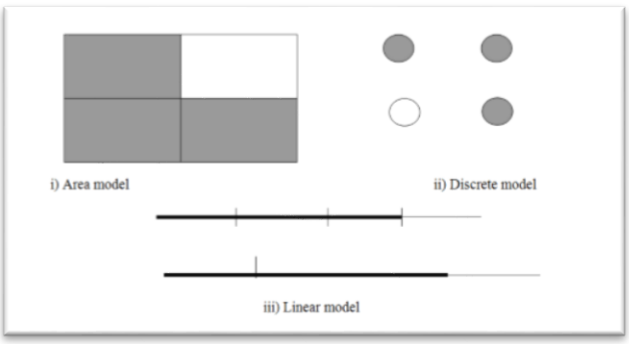
2.4.2 Representasjonsform

Med representasjonsformer menes ulike måter å presentere brøk på innenfor de ulike aspektene. Til å begynne med er bruk av konkreter viktig, for å visualisere mengden det arbeides med (Utdanningsdirektoratet, 2008). Dette visualiseres ofte med konkrete ting elevene kan ta og føle på. Deretter kommer bruk av illustrasjoner, i form av tegninger og ulike modeller.

Brändström (2005) peker i sin avhandling på at illustrasjoner kan ha to hensikter, de kan være dekorative eller funksjonelle. De funksjonelle illustrasjonene kan være til hjelp for elevene når de skal løse en oppgave, mens de dekorative ofte brukes for å pynte opp i bøkene.

Å benytte kontekster fra virkeligheten kan være å bruke brøkbegrepet i hverdagslige situasjoner, som for eksempel en halv liter melk og et halvt eple. Dette er situasjoner elevene har et forhold til lenge før de starter på skolen, selv om de kanskje ikke har matematisk forståelse for betydningen (Bondø, 2010). På denne måten innføres bruk av verbale symboler.

Skriftlige symboler i forbindelse med brøk er for eksempel symbolet $\frac{1}{2}$.
Hurrel (2013) presenterer i sin doktorgrad-studie, forskning på effektivisering av læreres faglige kunnskap, for å styrke brøk undervisningen i grunnskolen. Han viser til Behr et al. (1983) som bruker tre forskjellige modeller for å fremstille brøk på varierte måter. Modellene skiller seg fra hverandre gjennom hvordan helheten, «like» deler og en brøkdel er definert. Modellene viser til flere av brøkemnets aspekter og at variasjon mellom de forskjellige modellene derfor kan være med på å utvikle et godt brøkbegrep hos elevene.



Figur 7: Ulike modeller for fremstilling av brøk (Hurrel, 2013, s. 38).

Ut fra figuren over (figur 7), ser vi at brøken $\frac{3}{4}$ er representert på ulike måter, ved hjelp av tre modeller. Her er en geometrisk figur brukt for å konkretisere en arealmodell, en diskretmodell presenteres i form av sirkler for å illustrere en mengde og en linje er brukt for å illustrere en lineærmodell. Ofte benyttes tallinjer i arbeid med lineære modeller.

2.4.3 Tidligere forskning på brøk

Ulike studier viser at brøk blir introdusert på forskjellige måter og på forskjellige trinn. Studien til Watanabe (2007) sammenligner japanske lærebøker og læreplaner med amerikanske. Studien viser til resultater fra TIMSS (2003), hvor japanske elever gjør det bra i brøk. Watanabe vektlegger at undervisning og læring av brøk fremdeles er en utfordring og funn fra denne studien viser at japanerne introduserer brøk senere enn amerikanerne. I tillegg anvender de forskjellige modeller. For øvrig kommer det frem av studien at japanerne introduserer brøk som større eller mindre enn én og ved hjelp av en lineærmodell, i form av en tallinje eller flytende væske. Amerikanerne starter derimot med brøk i småskolen og benytter ofte arealmodell og brøker mindre enn én.

Studien til Watanabe (2007) poengterer viktigheten av å støtte elevenes læring av brøk, gjennom et nøye utvalg av oppgaver og representasjoner. Han presenterer således hvordan vi kan hjelpe elevene å forså at brøk er et tall. Watanabe (2007) viser også til studier av Kieren (1980), hvor brøk blir inndelt i fem aspekter: Del-hel, operator, kvotient, måling og forhold og til Behr et al. (1983) sin studie for *Rational Number Project*, hvor modellen i figur 6, fra side 24, illustrerer at brøk som del av en hel er selve grunnlaget for utviklingen av den videre forståelsen av de andre brøkaspektene.

Wu (2013) gir i sin artikkel en utvidet oversikt over hvordan en kan undervise i brøk på tredje til sjuende trinn etter *The Common Core Standards*. The Common Core Standards er et pedagogisk initiativ som forklarer hva elever i USA bør kunne etter hvert klassetrinn (Commoncorestate, 2017). Wu gjør det kjent at elevenes læring av brøk kan deles inn i to faser. En innledende fase på tredje trinn og til dels på fjerde trinn, hvor en introduserer elevene for brøk som del av en hel, gjerne ved hjelp av et rektangel. Ofte brukes modeller av sirkler og pizzaer, men Wu legger vekt på at bruk av rektangel gjør det enklere for elevene å tegne presist og i tillegg kan bruk av rektangler benyttes for å konkretisere multiplikasjon. Den andre fasen er selve utviklingen, hvor elevene blir kjent med at brøk er et tall og på den måten kan avsettes på en tallinje. Under denne fasen starter også elevene å regne med brøker.

Bjerke et al. (2013) viser i sin studie til den manglende enigheten om hva som bør være utgangspunktet for brøkundervisningen, til tross for at det er godt dokumentert at ensformig bruk av brøk som del av en hel hemmer forståelsen for brøk. For øvrig peker Bjerke et al. på at det bør komme en endring i brøkundervisningen og at den bør starte hos lærerne.

Amato (2005) viser i sin studie til Kerslake (1986) og peker på at elevene må ha forståelse av at brøk er en utvidelse av tallbegrepet og at bakgrunnen for at problemer oppstår er innlæringen av brøk som en del av et geometrisk bilde. Dette problemet øker med brøker større enn én, og av den grunn kan bruk av arealmodellen hemme elevenes forståelse av brøk som et tall. Amato fremhever også at det ofte mangler sammenheng mellom hele tall og brøk. Dessuten vektlegger Amato at dersom brøk presenteres som blandet tall vil en automatisk se sammenhengen mellom brøk og hele tall.

Birkeland, Venheim og Breiteig (2011) viser til at bruk av brøk som operator ofte virker meningsfullt for elevene og gjør forståelsen av divisjon og multiplikasjon av brøk lettere. De peker også på at bruk av tallinje er den mest aktuelle måten å se på brøk som en tallstørrelse eller et mål på. Videre forklarer de at bruk av geometriske objekter kan være hensiktsmessig for å konkretisere dette aspektet, selv om de i tillegg legger vekt på at elevene bør møte varierte representasjonsformer for å utvikle forståelse av brøk som et tall.

Kieren (1976) legger også vekt på at tallinjen er aktuell, når han definerer måling som punkter på en tallinje. Når man har fokus på brøk som måling er tallinjen et viktig verktøy for oppdeling av én enhet i mindre deler. På denne måten kan elevene erfare det Kieren (1976) understreker, at brøkbegrepet er en videreutvikling av tallbegrepet og at bruk av tallinjen minsker misforståelser.

I neste delkapittel vil vi derfor se på ulike utfordringer og misforståelser som ofte oppstår under innlæring av brøk.

2.4.4 Utfordringer og misforståelser

Forskning viser at brøk er et utfordrende tema i matematikk (Streefland, 1991, s. 6) og ifølge Petit et al. (2015) er det i temaene brøk og algebra elever møter størst vansker.

Både Kerslake (1986) og Amato (2005) vektlegger behovet for å få elevene til å forstå at brøk er en utvidelse av tallbegrepet og peker ytterligere på at vanskene og den manglende brøk-forståelsen oppstår fordi elevene blir opplært til å se på brøk som en del av en form eller en mengde og ikke som et tall.

Utdanningsdirektoratet (2008) peker derimot på at en av grunnene til at elever sliter med emnet, kan være at det brukes i flere ulike sammenhenger. Videre gjør de kjent at elever på både ungdomstrinn og i videregående skole har problemer med brøkregning på ulike nivåer. De poengterer at det kan virker som at elevene har liten forståelse for brøkbegrepet og regneoperasjonene. På denne måten legger de presset over på grunnskolen med tanke på at de må lære opp elevene til grunnleggende forståelse av brøk.

Bjerke et al. (2013) viser til funn i sin studie og hevder at elevene på sjette og sjuende trinn er representasjonsfattige, på grunn av ensidig bruk av arealmodellen. De viser til tre ulike typer misoppfatninger. For det første sammenligner gjerne elevene med en hel, og hevder at $\frac{1}{8}$ er større enn $\frac{1}{7}$ fordi åtte er større enn sju, eller at $\frac{3}{4}$ er det samme som $\frac{4}{5}$ fordi de begge mangler én del på å være en hel. For det andre tror elevene ofte at den største nevneren gir den største brøken, ved eksempelvis å hevde at $\frac{3}{12}$ er større enn $\frac{2}{8}$ fordi tolv er større enn åtte og tre er større enn to. Den tredje årsaken er mellomrom-tenking, hvor elevene er opptatt av størrelser og tror at $\frac{3}{5}$ er større enn $\frac{5}{8}$ fordi det er mindre forskjell mellom tre og fem enn mellom fem og åtte.

I tillegg misforstår elevene ofte addisjon av brøker (Birkeland et al., 2011), for eksempel tror noen at $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$, fordi de legger sammen nevnerne istedenfor å først finne felles nevner og deretter addere tellerne.

Ved spørsmål om det finnes en brøk mellom $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$, svarer elevene ofte nei, fordi de glemmer å utvide, for eksempel til seks i nevner ($\frac{2}{6}$, $\mathbf{\frac{3}{6}}$, $\frac{4}{6}$). Elevene er vant til naturlige tall, som øker eller minker med én, mens det i arbeid med brøk er uendelig mange tall mellom hver brøk. I tillegg må elevene forstå at naturlige tall også er brøker og at tallet to kan skrives som brøken $\frac{2}{1}$.

Birkeland et al. (2011) peker også på at brøk er en utvidelse av tallbegrepet. De tydeliggjør at dette er en prosess som krever modning over tid. For øvrig peker de på at det ofte forekommer misoppfatninger når utvidelsen går fra å gjelde hele tall til å omfatte brøk. I likhet med Utdanningsdirektoratet vektlegger Bjerke et al. at en av grunnene til disse misoppfatningene kan være at et tall kan ha flere forskjellige benevnelser. Vi har for eksempel likeverdige brøker, eksempelvis $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, som uttrykker samme tall. Blandede tall og uekte brøker, kan for eksempel være slik: $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Dette er nytt for elevene og bryter med tidligere utviklede begreper.

Brekke (2002) peker på at det er viktig å skille mellom vanlige elevfeil og misoppfatninger. Han hevder at feil kan oppstå tilfeldig som følge av slurv og uoppmerksomhet, mens misoppfatninger er konsekvente og ofte skyldes overgeneralisering av tidligere kunnskap. Dermed er det viktig at læreren gjør seg kjent med hvilke problemer elevene har i emnet.

2.5 Oppsummering

Gjennom dette teorikapitlet har vi sett på flere viktige komponenter, som spiller inn på utvikling av forståelse for brøk i matematikkundervisningen. Vi har også sett hvordan elevene utvikler sin kunnskap ved bruk av språket og i samarbeid med andre.
Vi vet at formålet med læreplanen for matematikk blant annet viser til ulike måter å bygge opp matematisk kompetanse på (Utdanningsdirektoratet, 2013), ved å utforske, leke og kommunisere. I tillegg vet vi at elevene må øve for å utvikle hukommelsen og automatisere for å øke hurtigheten og effektiviteten. Av den grunn har vi sett at bevisstgjøring av læreprosessen er viktig, for at elevene skal kunne se sammenheng mellom det de har lært før og det nye de lærer nå. Dette er med andre ord hvorfor de lærer det de lærer og at det har sammenheng med noe de har lært tidligere.

Neste kapittel omhandler metode og her vil jeg presentere hvordan denne studien er gjennomført.

3 Metode

I dette kapitlet vil jeg utdype hva jeg har gjort i denne studien, hvorfor jeg har tatt de valgene jeg har tatt og hvordan jeg har gått frem for å komme i mål, med andre ord vil jeg forklare veien fra problemstillingen til målet.

3.1 Studiens design

I forskning brukes design for å gjenspeile forskerens plan med gjennomføring av studien. Ifølge Yin (2007) er min studie et holistisk enkeltcase-studie basert på teoretiske antakelser, fordi jeg har valgt å se på hvordan ett læreverk presenterer brøk i grunnskolen. *Case* er et engelsk ord, som opprinnelig kommer av det latinske ordet *casus*, som betyr tilfelle. Ofte er denne typen studier benyttet innenfor utdanningsforskning og Yin (2007) forklarer at case-studier brukes i tilfeller hvor forskeren ønsker å innhente mye informasjon om få tilfeller, altså et avgrenset tema, som i denne oppgaven. Ved å benytte et case-studie har man anledning til å studere et tilfelle i detaljer, noe som gir forskeren mulighet til å forklare hva, hvorfor og hvordan noe forekommer i form av spørsmål. Min studie er teoristyrt, fordi den er basert på tidligere publisert teori og gir som følge av dette mulighet for å tolke funn i analysen opp mot allerede eksisterende teori.

Det finnes både styrker og svakheter i et case-studie. En av styrkene er at forskeren har mulighet til å bruke flere forskjellige kilder for informasjon og ulike metoder for forskning. Metode har opprinnelse fra den greske betydningen av ordet «veien til målet» (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 83) og kan tolkes som en systematisk eller regelbasert prosedyre for å forstå og analysere data (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 356). I forskning skiller vi mellom kvalitativ og kvantitativ metode. I korte trekk kan man si at kvalitativ metode er basert på tekst, mens kvantitativ metode er basert på tall. Silverman (2011) understreker at det ikke finnes gode eller dårlige forskningsmetoder og legger vekt på at metoden bør velges ut fra det en ønsker å finne ut, med andre ord problemstillingen. En av svakhetene med case-studier kan derimot være å generalisere funnene i studien, fordi det ofte er et enkelt tilfelle som undersøkes. I tillegg kan det være utfordrende å finne en årsakssammenheng ved hjelp av et case-studie. Til tross for dette kan case-studier likevel være nyttige, både frittstående eller i form av hypoteser, som ytterligere kan testes ved hjelp av statistikk.

Når problemstillingen er klar er det viktig å spisse den, det vil si å konkretisere hva en ønsker å finne ut ned til mikronivå. Jeg var tidlig bevisst på at jeg ønsket å finne ut hvorfor elever i grunnskolen har problemer med brøk og antok av den grunn at lærebokanalyse kunne være et passende utgangspunkt.

Forskningsmetoden jeg benytter er i utgangspunktet kvalitativ, det vil si at jeg som forsker har et nært forhold til forskningen og at forskningen stort sett er basert på tekst. I tillegg har jeg også benyttet meg av kvantitativ forskning, fordi funnene i analysen blir omgjort til tall og deretter behandlet som statistikk.

Studie av tekster er innholdsanalyse (Thagaard, 2013, s. 59), og vi skiller mellom analyse av feltdata og publiserte dokumenter. Feltdata er tekster basert på intervju og observasjon, som forskeren selv har samlet inn i felten. Publiserte dokumenter er tekster som ofte er tilgjengelige for alle, for eksempel bøker, lærebøker, læreplaner og publiserte studier (Thagaard, 2013). Selv om studie av dokumenter er en form for innholdsanalyse, bruker vi betegnelsen dokumentanalyse, fordi dokumenter i utgangspunktet er skrevet for et annet formål enn forskning (Thagaard, 2013). Dette gjelder også for denne studien, siden både lærebøkene og annen teori var skrevet lenge før jeg startet på min oppgave.

Christoffersen og Johannessen (2012) viser til ulike strategier for dokumentanalyse. I denne oppgaven har jeg valgt å bruke semiotikk, som er studie av tegn. Tegn kan i denne sammenheng tolkes som tekst i form av skriftlig språk og bilder. Ved å benytte semiotikk kan jeg som forsker analysere hvordan tekst og bilder kommer til uttrykk og skaper mening gjennom kommunikasjon og tolkning. Når jeg i denne sammenhengen nevner kommunikasjon, mener jeg hvordan jeg tolker tekst og bilder fra for eksempel en lærebok.

3.2 Datainnsamling

Når en skal samle inn relevante data til et forskningsprosjekt, må man foreta et utvalg fra populasjonen (Bjørndal & Hofoss, 2004). I denne studien har jeg analysert et læreverk i matematikk, selv om populasjonen består av flere ulike læreverk. Det er viktig å være klar over at utvalget ikke bare gjelder valg av læreverk, men i mitt tilfelle også trinn, tema, teori og begreper.

Siden denne studien er en oppgave innen matematikkdidaktikk var det naturlig for meg å fokusere på matematikk. Min intensjon var å analysere en lærebok som brukes i grunnskolen, for å danne meg et bilde av hvordan matematikk blir presentert i norske klasserom for lærere og elever. Jeg valgte å analysere læreverket Multi, først og fremst av personlig erfaring. Denne erfaringen har jeg tilegnet meg gjennom praksis i forbindelse med grunnskolelærerutdanningen og som mor til barn i grunnskolen. I tillegg hevder forlaget Gyldendal at Multi er Norges mest brukte læreverk i matematikk, ergo vurderte jeg dette som et godt utgangspunkt.

Det første jeg måtte gjøre var å få tilgang til nødvendig materiell. I den hensikt tok jeg kontakt med en lokal grunnskole for å sjekke om det var mulig å låne materiell til studien, med tanke på lærebøker, lærerveiledninger og tilgang til nettsider. Her fikk jeg låne de fleste lærebøkene, men lærerveiledninger og tilgang til nettressurser var det vanskeligere med. Deretter tok jeg direkte kontakt med kundesenteret hos Gyldendal og informerte om min studie og hva jeg ønsket av materiell (Vedlegg 1). De var raske med tilbakemelding og jeg fikk tilsendt brukernavn og passord, med tilgang til alle nettbaserte lærebøker og annet undervisnings-materiell på nett. Lærerveiledningene fikk jeg låne ved behov på nyåret, da jeg fikk jobb på en grunnskole, som også bruker læreverket Multi.

Jeg hadde tidlig i prosessen begrenset studien min til å gjelde brøk, men det gjenstod å velge hvilke trinn jeg ønsket å fokusere på. I Multi introduseres brøk på tredje trinn og siden jeg i utgangspunktet var nysgjerrig på hvorfor elever har problemer med å forstå brøk i grunnskolen, valgte jeg å se på alle trinn hvor brøk var representert. Bakgrunnen for dette valget var at jeg ønsket å se på helheten av emnet gjennom hele grunnskolen.

Siden jeg i min studie analyserer lærebøker med fokus på brøk for fem trinn, måtte jeg begrense andre data ytterligere. Av den grunn valgte jeg å fokusere på grunnbøkene for de ulike trinnene, samt på hovedoppgavene. Det vil si at prøver, øve-sider, samarbeidsoppgaver, oppgavebøker og nettoppgaver ble valgt bort. I tillegg har jeg benyttet lærerveiledninger som rettesnor, for å tolke hva læreverket vektlegger i undervisningen.

Lærebøkene til Multi heter som tidligere nevnt *grunnbok* og bøkene jeg anvender i studien er:

- Multi 3b Grunnbok (Alseth, Arnås, Kirkegaard & Røsseland, 2011).
- Multi 4b Grunnbok (Alseth, Kirkegaard, Nordberg & Røsseland, 2011).
- Multi 5b Grunnbok (Alseth, Nordberg & Røsseland, 2013).
- Multi 6b Grunnbok (Alseth, Nordberg & Røsseland, 2014).
- Multi 7b Grunnbok (Alseth, Nordberg & Røsseland, 2008).

Før jeg kunne starte med analysen av læreverket, måtte jeg utarbeide et eget måleinstrument. Hvordan den prosessen foregikk vil jeg forklare i neste delkapittel.

3.3 Analyseprosess

I dette delkapitlet vil jeg forklare hvordan mitt analyseverktøy ble utviklet og hvordan analysen ble gjennomført.
Etter at forsker har valgt hvilke data som skal samles inn, må de analyseres og tolkes (Christoffersen & Johannessen, 2012). Når en analyserer deler en data opp i mindre enheter. Etter gjennomført analyse kan forskeren trekke en konklusjon som gir svar på problemstillingen. Ved å forsøke å forklare analysen ut fra egen forståelse, tolker man data.

3.3.1 Utvikling av analyseverktøy

Vi har tidligere i studien sett at lærebøker har stor innvirkning på undervisningen (Howson, 2013; Johansson, 2003; Sunday, 2014). I tillegg har vi sett at det er begrenset med studier på lærebøker i matematikk (Fan et al., 2013), men at de som finnes kan tredeles (Charalambous et al., 2010; Johansson, 2003). Den horisontale analysen tar for seg den generelle strukturen og bakgrunnsinformasjonen til læreboken. Den vertikale analysen går mer i dybden av matematikken som presenteres i oppgaver og eksempler og den kontekstuelle analysen ser på læreboken i bruk.

I starten av prosjektet trodde jeg det var mulig å benytte ett analyseskjema andre hadde utviklet og brukt tidligere, men det viste seg å være vanskelig. En av grunnene til at dette ble komplisert, var nok at tidligere studier ofte sammenligner flere læreverk, gjerne basert på høyere trinn og ofte med intervjuer eller observasjoner i tillegg (Jopperud, 2015; Resvoll, 2014). Min oppgave skiller seg fra disse studiene på flere måter, fordi jeg fokuserer på et tema, fra et læreverk, over flere trinn og med fokus på grunnskolen.

Å utvikle et måleinstrument eller et analyseverktøy for å analysere data, viste seg å være en vanskelig del av oppgaven. Etter inspirasjon fra Resvoll (2014) startet jeg med å utarbeide et analyseskjema (Vedlegg 2). Resvoll (2014) analyserte i sin studie to læreverk på åttende trinn med fokus på brøk, i tillegg til hvordan de ble brukt av ulike lærere. Hun hentet inspirasjon til sitt analyseverktøy fra en studie av Pepin og Haggarty (2001), hvor lærebøker fra England, Frankrike og Tyskland ble sammenlignet. I tillegg hentet Resvoll (2014) også inspirasjon fra studien til Charalambous et al. (2010) hvor vertikal og horisontal analyse av lærebøker står sentralt.

Jeg var klar over at problemstillingen min var sentral i dette arbeidet og startet med å gå i dybden av den. På denne måten stod jeg igjen med begrepene forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon, i tillegg til brøk. De fire begrepene jeg hadde valgt å ha fokus på i analysen, måtte defineres. Det vil si at jeg måtte finne ut hvilke underpunkter jeg trengte for å kunne analysere oppgavene i lærebøkene, slik at de ga informasjon jeg kunne benytte meg av.

Under brøk valgte jeg å se på brøkens fem aspekter etter inspirasjon fra Behr et al. (1983). Punktene jeg valgte under forståelse var fordelt mellom instrumentell og relasjonsforståelse (Skemp, 1976). Deretter ble forståelse brutt ned etter oppgavenes kunnskapsnivå og kognitive krav ved hjelp av ulike rammemodeller. I utgangspunktet brukte jeg Blooms taksonomi (Bloom, 1956) hvor jeg sammenlignet verbene i taksonomien med verbene som ble benyttet i oppgavene for å analysere hvilke ferdigheter oppgavene krevde av elevene. Jeg valgte imidlertid å bruke kategoriene fra TIMSS Advance (Grønmo et al., 2016), fordi flere av trinnene i den opprinnelige taksonomien utfyller hverandre. Den forenklede modellen fra TIMSS ble enklere å bruke, ved å redusere nivåene fra seks til tre. I tillegg benyttet jeg Smith og Stein (1998) sin oppgaveanalyseguide, TAG for å klassifisere oppgavenes kognitive krav. Grunnen til at jeg valgte å bruke både Blooms taksonomi og TAG, var for å kvalitetssikre klassifiseringen av oppgavene. I tillegg kunne begge rammeverkene benyttes for å måle variasjon av oppgaver på de ulike nivåene.

Tilpasset opplæring har flere punkter, som hovedsakelig tydeliggjør om det er variasjon i måten oppgavene blir presentert på. Jeg tenker da på punktene konkret, illustrasjon, symbol og tekst (Behr et al., 1983) under representasjonsform. Vi har tidligere sett at kunnskap om ulike strategier er viktig for utvikle en dypere forståelse (Ostad, 2008). Av den grunn var det naturlig å analysere hvilken modell som ble representert i de ulike oppgavene. Punktene arealmodell, diskretmodell, lineærmodell eller ingen modell ble også brukt for å kategorisere variasjonen av oppgavene (Hurrel, 2013).

Motivasjon valgte jeg å dele i to, for å se på hvilken type oppgaver som ble presentert. Om de var åpne eller lukkede (Pehkonen, 2007) og hvordan illustrasjonenes betydning var (Brändström, 2005). Vi har tidligere sett at åpne oppgaver kan være til motivasjon for elever og at illustrasjoner av funksjonell betydning kan være motiverende for å komme i gang med oppgaver.

Etter mye prøving og feiling ble modellen under utviklet (tabell 2).

	I Brøkens aspekt	**II Representasjon**	**III Strategi**	**IV Kognitive krav**	**V Kunnskapsnivå**	**VI Motivasjon**
1	Del av hel	Konkret	Arealmodell	Memorering	Kunne	Åpen oppgave
2	Forhold	Illustrasjon	Diskretmodell	Prosedyre uten sammenheng	Anvende	Lukket oppgave
3	Operator	Symbol	Lineærmodell	Prosedyre med sammenheng	Resonnere	Ingen illustrasjon
4	Kvotient	Tekst	Ingen modell	Problemløsning		Dekorativ illustrasjon
5	Tallstørrelse					Funksjonell illustrasjon

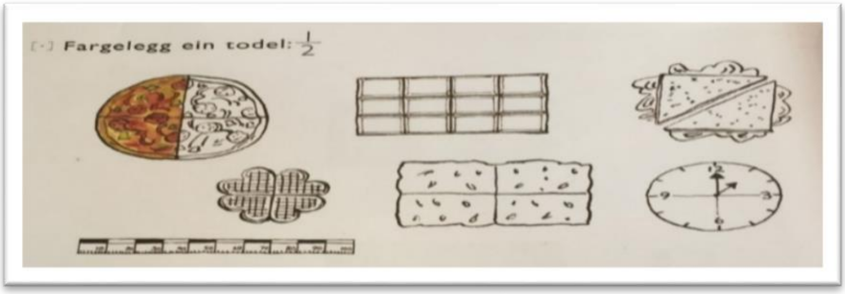
Tabell 2: Måleinstrument for vertikal analyse.

3.3.2 Beskrivelse av analyseverktøy

I dette underkapitlet vil jeg beskrive hver av komponentene i tabellen over, for å gi et bilde av hva analysen vektlegger av innehold i hvert element. I likhet med Resvoll (2014) har også jeg delt analysen min inn i en horisontal og en vertikal analysedel. Den horisontale delen gjøres en gang per lærebok, mens den vertikale gjøres for hver oppgave. Kriteriene i den horisontale delen av analysen bygger på Charalambous et al. (2010) sine idéer om å presentere lærebokens bakgrunn med tanke på innhold og overordnet struktur. Dataene fra den vertikale analysen settes inn i tabeller og brukes som statistikk senere i oppgaven.

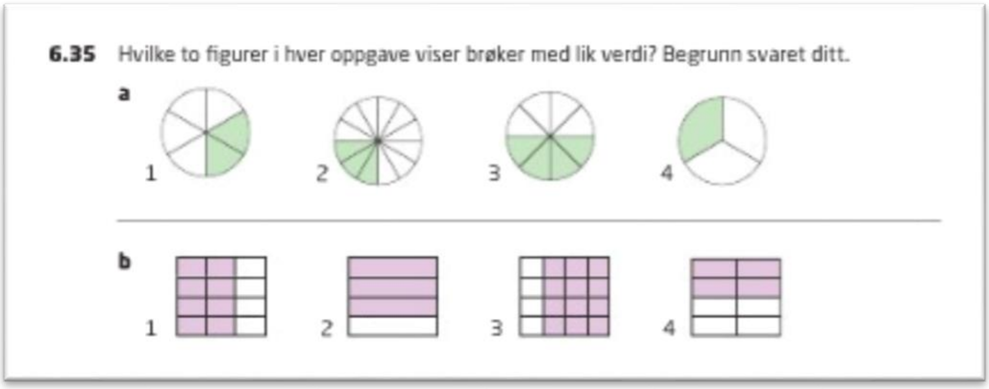
3.3.2.1 Brøkens aspekt (I)

Brøk som del av en hel: Oppgavene inneholdt ofte illustrasjoner av barn, mat, kuler, flagg og geometriske figurer som skulle deles eller fargelegges. Det gjaldt både hele figurer og mengder.

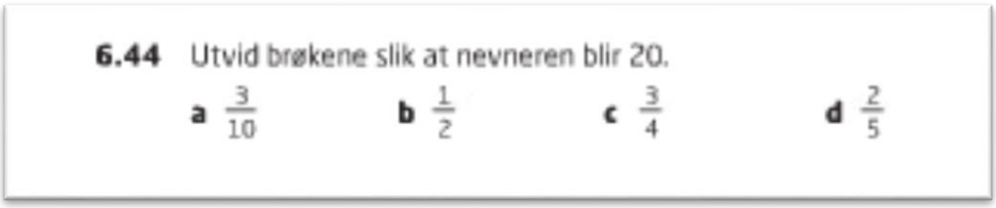


Figur 8: Eksempel på oppgave med brøk som del av en hel (Multi 3b, s. 64).

Brøk som forhold: Her var ofte oppgavene basert på å utvide eller forkorte brøker, med andre ord var det fokus på likeverdige brøker, hvor forholdet mellom brøkene var konstant.



Figur 9: Eksempel på oppgave med brøk som forhold (Multi 5b, s. 51).


6.44 Utvid brøkene slik at nevneren blir 20.

a $\frac{3}{10}$ **b** $\frac{1}{2}$ **c** $\frac{3}{4}$ **d** $\frac{2}{5}$

Figur 10: Eksempel på oppgave med brøk som forhold (Multi 5b, s. 56).

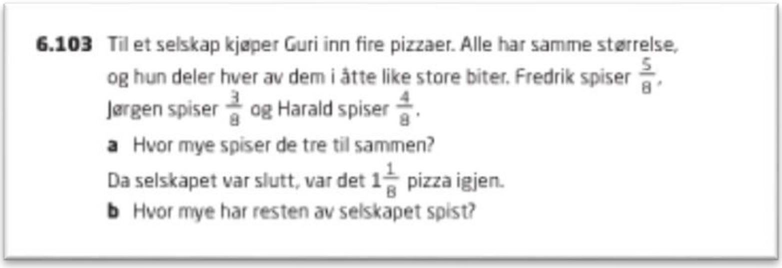
Brøk som operator: Her finner vi oppgaver med prosentregning, desimaltall og oppgaver hvor elevene skal finne ut hvor mye for eksempel $\frac{1}{3}$ av 21 er, 21:3=7. Oppgaver med multiplikasjon av brøk.

6.68 Hvor mye er

a $\frac{1}{3}$ av 21?
b $\frac{1}{6}$ av 30?
c $\frac{1}{4}$ av 12?
d $\frac{1}{7}$ av 49?
e $\frac{1}{5}$ av 25?
f $\frac{1}{8}$ av 72?

Figur 11: Eksempel på oppgave med brøk som operator (Multi 6b, s. 58).

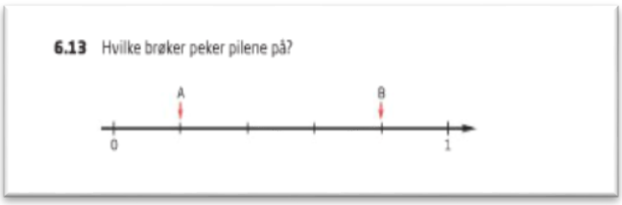
Brøk som kvotient: Oppgaver med divisjon av brøk inngikk i denne kategorien og delingssituasjoner med flere objekter, der resultatet ga en verdi. For eksempel tre pizzaer delt på fire personer.



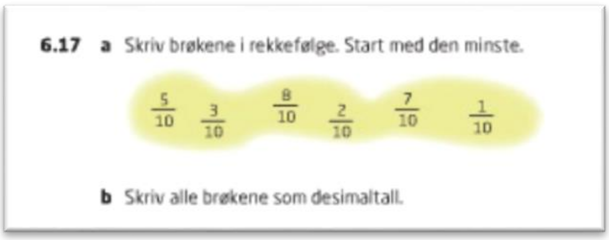
6.103 Til et selskap kjøper Guri inn fire pizzaer. Alle har samme størrelse, og hun deler hver av dem i åtte like store biter. Fredrik spiser $\frac{5}{8}$, Jørgen spiser $\frac{3}{8}$ og Harald spiser $\frac{4}{8}$.
a Hvor mye spiser de tre til sammen?
Da selskapet var slutt, var det $1\frac{1}{8}$ pizza igjen.
b Hvor mye har resten av selskapet spist?

Figur 12: Eksempel på oppgave med brøk som kvotient (Multi 6b, s. 67).

Brøk som tallstørrelse: Her gikk ofte oppgavene ut på å sortere brøker, sammenligne brøker, plassere brøker på en tallinje og regne med brøker i form av addisjon og subtraksjon av brøker. Brøk som desimaltall inngikk også her.



Figur 13: Eksempel på oppgave med brøk som tallstørrelse (Multi 5b, s. 44).



6.17 **a** Skriv brøkene i rekkefølge. Start med den minste.

$\frac{5}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{1}{10}$

b Skriv alle brøkene som desimaltall.

Figur 14: Eksempel på oppgave med brøk som tallstørrelse (Multi 5b, s. 45).

3.3.2.2 Representasjonsform (II)

Konkret ble benyttet når oppgaven illustrerte en konkret ting. For eksempel en tegnet pizza, sjokolade, barn, brikker og lignende. Eksempelet under viser konkreter i form av brikker.

Figur 15: Eksempel på bruk av konkreter (Multi 5b, s. 39).

Selv om disse brikkene ikke var direkte til å ta og føle på, er det likevel ting en kan skaffe og bruke i undervisningen om en ønsker. Med andre ord noe en kan konkretisere.

Illustrasjon valgte jeg å bruke når oppgavene illustrerte tegninger av geometriske figurer og tallinjer, med andre ord illustrasjoner av matematisk karakter. Eksempelet under benyttet en geometrisk arealmodell, for å illustrere hvordan oppgaven kunne løses.

Figur 16: Eksempel på bruk av illustrasjon (Multi 5b, s. 62).

Symbol ble brukt i de oppgavene hvor relasjonstegn som større enn (<), mindre enn (>) eller likhet (=) ble benyttet, eller dersom oppgaven inneholdt matematiske symboler for representasjon av en brøk, uten bruk av konkreter eller illustrasjoner. Eksempelet i oppgaven under viser matematiske symboler av ulike brøker.

6.34 Skriv brøkene som tideler eller som hundredeler. Skriv deretter som desimaltall.

a $\frac{2}{40}$ **b** $\frac{28}{40}$ **c** $\frac{12}{60}$ **d** $\frac{15}{60}$

Figur 17: Eksempel på bruk av symbol (Multi 6b, s. 48).

Tekst ble brukt på tekstoppgaver. Med andre ord på oppgaver som ikke oppgir hvilke regneoperasjoner som skal benyttes for å løse oppgaven og ikke inneholder illustrasjoner.

Figur 18: Eksempel på tekstoppgave (Multi 6b, s. 65).

3.3.2.3 Strategi (III)

Arealmodell ble brukt på oppgaver som illustrerer bruk av en geometrisk modell, med andre ord et areal.

Figur 19: Eksempel på bruk av arealmodell (Multi 6b, s. 54).

Diskretmodell ble brukt på oppgaver for å konkretisere mengder.

Figur 20: Eksempel på bruk av diskretmodell (Multi 6b, s. 67).

Lineærmodell ble brukt for å konkretisere tallstørrelser, ofte ved hjelp av en tallinje.

Figur 21: Eksempel på bruk av lineærmodell (Multi 6b, s. 47).

Ingen modell ble brukt på oppgaver som ikke viste til noen modell. Eksempelvis som i oppgaven på figur 18, øverst på denne siden. Denne kategorien er likevel tatt med, som en kvalitetssikring for å dekke alle oppgavene.

3.3.2.4 Kognitive krav (IV)

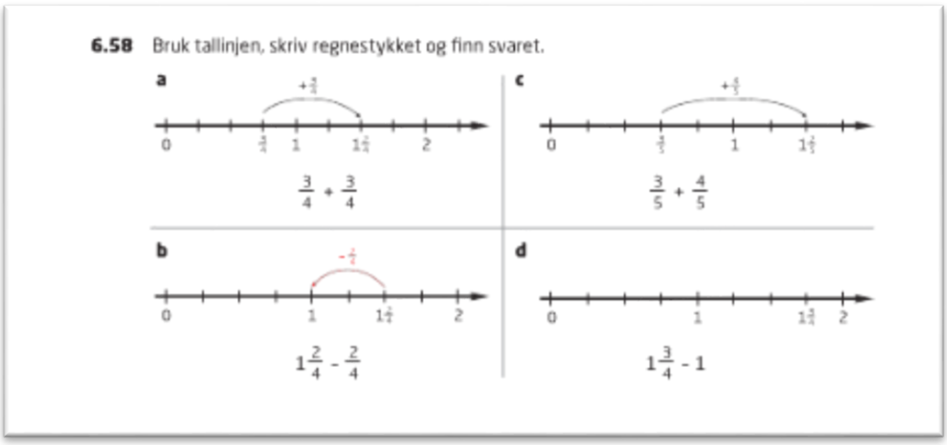
De kognitive kravene ble kategorisert etter oppgaveanalyseguiden (TAG) utviklet av Smith og Stein (1998). Ut fra disse kategoriene var det mulig å måle om oppgavene fremmet instrumentell- eller relasjonsforståelse. De to laveste kategoriene memorering og prosedyre uten sammenheng fremmer instrumentell forståelse og de to andre, prosedyre med sammenheng og problemløsing fremmer relasjonsforståelse.

Memorering ble valgt på oppgaver hvor elevene ble bedt om å skrive av, dersom svaret på oppgaven kom frem av eksempelet i forkant eller om den samme oppgaven var gitt tidligere.

Figur 22: Eksempel på oppgave kategorisert under memorering (Multi 4b, s. 78).

Her ser vi at elevene blir bedt om å skrive tre brøker og illustrasjonen til høyre viser konkret hva elevene skal gjøre. Av den grunn ble denne oppgaven plassert under memorering.

Prosedyre uten sammenheng ble valgt på oppgaver hvor elevene hadde behov for en gitt algoritme for å løse oppgaven. Algoritmen eller prosedyren som var nødvendig for å løse oppgaven var gitt på forhånd i tidligere eksempler, eller beskrevet i oppgaven.

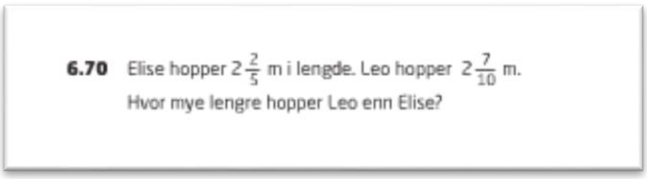


Figur 23: Eksempel på oppgave kategorisert som prosedyre uten sammenheng (Multi 5b, s. 60).

Vi ser at oppgaven på forrige side (figur 23) har en pil som indikerer hvordan elevene skal løse oppgaven under a), b) og c). I oppgaven blir elevene bedt om å bruke tallinjen og skrive regnestykket, som allerede står i oppgaven i form av et uttrykk. Deretter skal de finne svaret. Uttrykket viser to brøker og en tallinje. Pilen over tallinjen viser den brøken som skal legges til eller trekkes fra. På denne måten kan elevene lese av svaret på oppgaven direkte fra tallinjen.

I d) er denne pilen utelatt, som følge av det må elevene selv finne svaret. På grunn av den grundige innføringen elevene fikk i de foregående oppgavene kan elevene løse deloppgave d) ved å repetere eksemplene som ble gitt i oppgavene a), b) og c). Dermed er denne oppgaven plassert under prosedyre uten sammenheng.

Prosedyre med sammenheng ble valgt på oppgaver hvor elevene stod fritt til å velge hvilken strategi de ønsket å benytte for å løse oppgaven.


6.70 Elise hopper $2\frac{2}{5}$ m i lengde. Leo hopper $2\frac{7}{10}$ m.
Hvor mye lengre hopper Leo enn Elise?

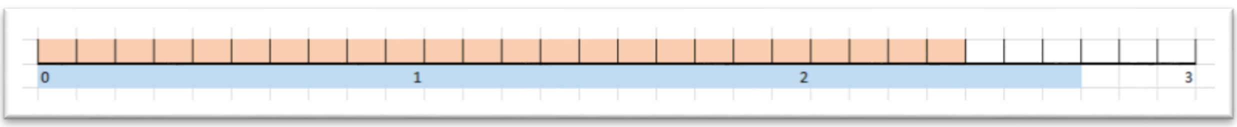
Figur 24: Eksempel på oppgave kategorisert som prosedyre med sammenheng (Multi 5b, s. 63).

Her har elevene mulighet for å velge ulike strategier for å løse oppgaven, under vil jeg vise eksempler på tre ulike måter å løse denne oppgaven på:

1) Løsning ved bruk av symboler: $2\,\frac{7}{10} - 2\,\frac{2}{5} = \frac{27}{10} - \frac{12 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{27}{10} - \frac{24}{10} = \frac{3}{10}$

Ved å omgjøre de blandede tallene til uekte brøker, kan elevene enkelt subtrahere de uekte brøkene og dermed få svaret tre tideler.

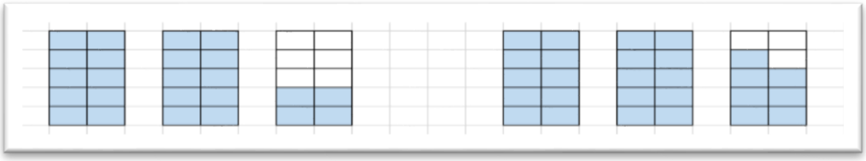
2) Løsning ved bruk av lineærmodell:



Figur 25: Konkretisering av 2,4 og 2,7 ved hjelp av selvlaget lineærmodell.

Oppgaven kan løses ved å tegne opp en tallinje og merke av hvor langt begge hopper. Deretter kan en se på forskjellen mellom hoppene. Forskjellen mellom 2,4 og 2,7 er 0,3, altså er svaret $\frac{3}{10}$.

3) Løsning ved bruk av arealmodell:



Figur 26: Konkretisering av $2\frac{4}{10}$ og $2\frac{7}{10}$ ved hjelp av selvlaget arealmodell.

Her kan oppgaven løses ved å tegne opp tre rektangler, to ganger og fargelegge hver mengde. Deretter kan elevene telle seg frem til riktig svar, ved å se at forskjellen mellom de siste rektanglene er tre av ti ruter, altså $\frac{3}{10}$.

Problemløsingsoppgaver ble tidligere definert som oppgaver hvor elever møtte utfordringer og frustrasjon. Utfordringene kunne som tidligere nevnt variere fra elev til elev.
På grunn av tydelige eksempler i grunnbøkene, fant jeg dessverre ingen oppgaver av denne kategorien i Multi sine grunnbøker.

3.3.2.5 Kunnskapsnivå (V)

Ved hjelp av verbanalyse med kategoriene fra TIMSS Advanced (Grønmo et al., 2016), var det mulig å måle om oppgavene i en lærebok fremmet instrumentell- eller relasjonsforståelse. Oppgavene fra kategorien *kunne* stiller lave krav til elevene og kan av den grunn regnes å fremme instrumentell forståelse, mens *resonnere* stiller høye krav og kan forenes med relasjonsforståelse. *Anvende* kunne til tider være vanskelig å kategorisere, men kan være en god indikasjon på om det var variasjon i måten oppgavene ble fremstilt på.

Kunne ble brukt på oppgaver hvor elevene ble bedt om å lese av en figur, fargelegge eller dele opp figurer.

Figur 27: Eksempel på oppgave i kategorien kunne (Multi smart 7b, s. 44).

I oppgaven over (figur 27) skulle elevene lese av figuren for å avgjøre hvor stor del av sirkelen som var grønn eller gul. På grunn av illustrasjonen kan elevene telle antall deler og komme frem til at $\frac{6}{10}$ av sirkelen er grønn og $\frac{4}{10}$ av sirkelen er gul. Elevene har også mulighet til å forkorte brøkene til $\frac{3}{5}$ og $\frac{2}{5}$, selv om oppgaven ikke krever utregning.

Anvende ble brukt på oppgaver hvor elevene måtte gjøre utregninger, uten figurer å lese av. Også oppgaver som krevde sammenligning, samt utviding og forkorting av brøker inngikk her.

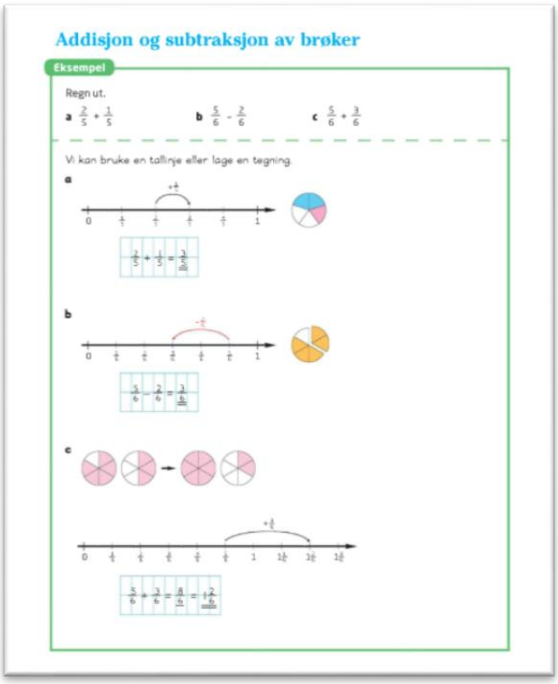

6.44 Regn ut.

a $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$ c $\frac{7}{18} + \frac{8}{18}$ e $\frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15}$

b $\frac{7}{12} - \frac{2}{12}$ d $\frac{20}{24} - \frac{8}{24}$ f $\frac{5}{12} + \frac{5}{12} - \frac{4}{12}$

Figur 28: Eksempel på oppgave i kategorien anvende (Multi 6b, s. 53).

I oppgaven over (figur 28) skulle elevene addere og subtrahere ulike brøker. Det kommer ikke frem av oppgaven hvordan elevene skal gå frem for å løse den, men både tidligere eksempler og oppgaver i grunnboken har allerede gitt en tydelig forklaring på dette.



Figur 29: Eksempel på addisjon og subtraksjon av brøker (Multi 6b, s. 52).

På denne måten har oppgavens plassering stor betydning for elevene og de bør av den grunn vite hvordan de skal gå frem for å løse oppgaven.

Oppgaven på forrige side (figur 28) er kategorisert på et lav nivå. Grunnen til dette er at nevneren er lik i hver deloppgave. Selv om elevene må regne ut svaret på egenhånd, fungerer algoritmen som ble presentert tidligere (figur 29), som en oppskrift for å nå målet.

Resonnere ble brukt på oppgaver der elevene ble bedt om å begrunne sine svar eller lage egne oppgaver.


6.12 **a** Tegn et parallellogram.
b Del parallellogrammet i to like store deler.
Kan du gjøre det på forskjellige måter?
c Kan du dele et parallellogram i fire like store deler?

Figur 30: Eksempel på oppgave i kategorien resonnere (Multi 5b, s. 43).

I oppgaven over (figur 30), ble elevene bedt om å dele inn parallellogrammet i to like store deler. Det vil si at elevene hadde mulighet til å utforske om dette lot seg gjøre på flere måter, selv om oppgaven ikke ber om ulike alternativer eller begrunnelser.

3.3.2.6 Motivasjon (VI)

Åpne oppgaver ble valgt dersom oppgavene ga mulighet for bruk av ulike løsningsstrategier og ulike svaralternativer.


6.50 Regn ut.

a $\frac{3}{6}+\frac{1}{6}$	**c** $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}$	**e** $\frac{4}{10}+\frac{3}{10}$
b $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$	**d** $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}$	**f** $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$

Figur 31: Eksempel på åpen oppgave (Multi 5b, s.58).

Over ser vi et eksempel på en oppgave jeg har kategorisert som åpen. Her blir elevene bedt om å regne ut. Dersom vi tar for oss oppgave 6.50 a) (figur 31) og regner ut $\frac{3}{6}+\frac{1}{6}$, vil noen få svaret $\frac{4}{6}$. Andre vil kanskje være i stand til å forkorte denne brøken til $\frac{2}{3}$. Her er begge svaralternativene riktige, fordi brøkene $\frac{4}{6}$ og $\frac{2}{3}$ er likeverdige. Av den grunn kan oppgaven betraktes å være åpen på grunn av a) og f).

Lukkede oppgaver ble brukt på oppgaver som kun har et riktig svar.

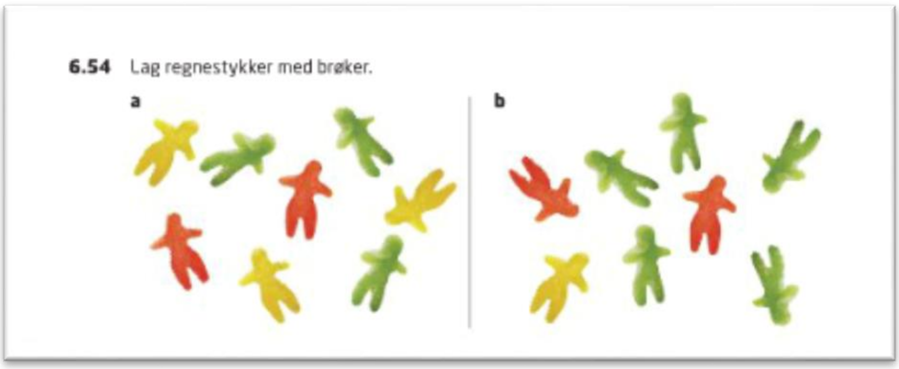
Figur 32: Eksempel på lukket oppgave (Multi 5b, s. 56).

Oppgaven over (figur 32), gir ikke mulighet for mer enn ett riktig svar. Her er det ikke mulig å forkorte brøkene, fordi oppgaven indikerer at alle nevnere skal være 30. Det vil si at svaret på a) bare kan være $\frac{21}{30}$.

Dekorativ illustrasjon: Oppgaven under (figur 33) handler om en valp. Bildet er ikke til hjelp for å løse oppgaven, men kan imidlertid være med på å motivere elever som er interessert i hunder til å løse oppgaven. I tillegg er bildet med på å pynte opp siden i grunnboken.

Figur 33: Eksempel på dekorativ illustrasjon (Multi 5b, s. 64).

Funksjonell illustrasjon: Oppgaver med illustrasjoner av funksjonell karakter forekommer når illustrasjonen er til nytte for å løse oppgaven. Under kommer et eksempel på en funksjonell illustrasjon:



Figur 34: Eksempel på funksjonell illustrasjon (Multi 5b, s. 58).

I oppgaven på forrige side (figur 34) kan elevene lage brøker og regnestykker ut fra illustrasjonen. Av den grunn er oppgaven funksjonell. Illustrasjonen gir hint til elevene i form av antall seigmenn i hver farge av en gitt mengde. Dette kan hjelpe elevene i arbeidet med å visualisere følgende verdier:

a) $\frac{3}{8}$ gule, $\frac{2}{8}$ røde og $\frac{3}{8}$ grønne

b) $\frac{1}{8}$ gule, $\frac{2}{8}$ røde og $\frac{5}{8}$ grønne

Ingen illustrasjon: Denne kategorien ble i likhet med «ingen modell» brukt som en kvalitetssikring, for å ha mulighet til å sjekke at alle oppgavene hadde fått tildelt en kategori.

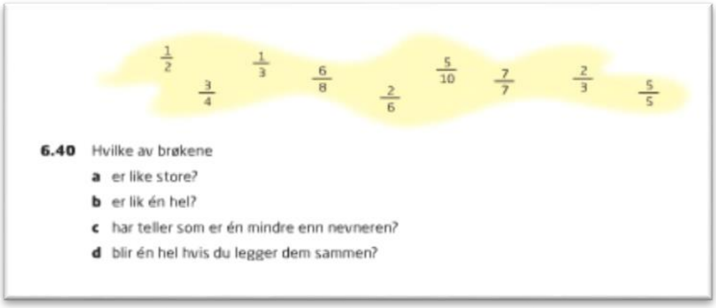
3.3.3 Gjennomføring

Ved gjennomføring av analysen fant jeg informasjonen til den horisontale delen av analysen både i lærebøkene og på forlagets nettsider.

Siden lærebøkene jeg analyserte var fra samme læreverket, var det ikke mye å sammenligne mellom de ulike grunnbøkene. Grunnen til dette var at det stort sett var de samme forfatterne og den samme oppbyggingen av grunnbøkene for alle trinn. På bakgrunn av dette valgte jeg å presentere mine funn i form av ren tekst, selv om mitt analyseskjema har likhetstrekk med det Resvoll (2014) brukte i sin studie.

Det var en krevende jobb å sette opp de ulike punktene i analyseskjemaet, fordi det viste seg at flere av punktene kunne inngå flere steder. Blant annet går alle punktene til slutt inn under tilpasset opplæring på grunn av variasjon. Vi har tidligere sett at bruk av lærestoff, arbeidsmåter, organisering og intensitet må varieres (Utdanningsdirektoratet, 2015). På denne måten kan vi under analysen trekke paralleller mellom brøkens aspekter og lærestoffet, strategi og arbeidsmåter, oppgaver og organisering. Representasjonsformer og illustrasjoner kan assosieres med læremidler, og til slutt kan kunnskapsnivå og kognitive krav kobles mot intensitet. I tillegg henger motivasjon og tilpasset opplæring nært sammen. Punktene i analyseskjemaet ble likevel satt opp enkeltvis, for å gi et helhetlig bilde av variasjonen mellom kategoriene.

Å plassere oppgavene innenfor riktig kategori, var også en utfordring. Det var til tider vanskelig å skille oppgaver fra kategoriene forhold og tallstørrelse fra hverandre, selv om jeg mener å ha kommet i mål på en tilfredsstillende måte. Under viser jeg til eksempler på noen oppgaver jeg i starten hadde litt problemer med å kategorisere:

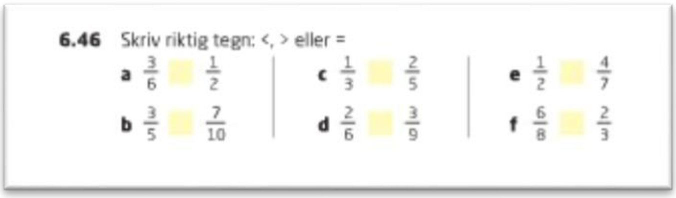


$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{7}{7}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{5}$

6.40 Hvilke av brøkene
- **a** er like store?
- **b** er lik én hel?
- **c** har teller som er én mindre enn nevneren?
- **d** blir én hel hvis du legger dem sammen?

Figur 35: Eksempel på oppgave det var problematisk å sette i kategori (Multi 5b, s. 53).

Oppgaven over (figur 35) kunne vært plassert både som forhold og tallstørrelse, fordi en skal finne brøker som er like store og brøker som er lik en hel. Allikevel valgte jeg å kategorisere denne oppgaven som tallstørrelse, fordi den inneholder addisjon av brøker.
Av den grunn tok jeg en beslutning og kategoriserte oppgaver med flere muligheter for valg av aspekter inn under den typen jeg mente var mest dominerende. I oppgaven over (figur 35) er det bare punkt a) som tilhører kategorien forhold.



6.46 Skriv riktig tegn: <, > eller =

a $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{1}{2}$ | **c** $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{2}{5}$ | **e** $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{4}{7}$

b $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{7}{10}$ | **d** $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{9}$ | **f** $\frac{6}{8}$ ☐ $\frac{2}{3}$

Figur 36: Eksempel på oppgave det var vanskelig å kategorisere (Multi 5b, s. 56).

Oppgaver over (figur 36) valgte jeg å plassere som forhold, selv om den også kunne tolkes som tallstørrelse. Det var i grunnen likhetstegnet som overbeviste meg til å velge forhold, samtidig som brøkene var enkle å sammenligne. Det vil si at jeg måtte bestemme meg for hva som skulle inngå hvor og være konsekvent i analysen.

Oppgavenes kunnskapsnivå, ble som tidligere nevnt analysert ut fra TIMSS forenklede versjon av Blooms taksonomi. I likhet med oppgavenes kognitive krav, var det til tider også problematisk å kategorisere oppgavenes kunnskapsnivå.

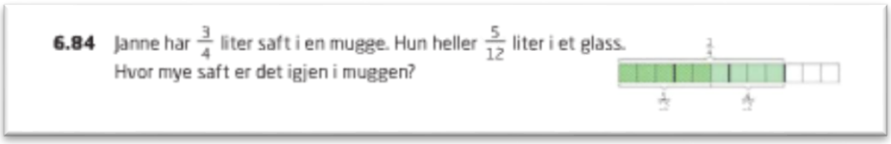
6.13 Utvid brøkene med 3.

a $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} =$ **b** $\frac{1}{4}$ **c** $\frac{2}{3}$ **d** $\frac{4}{7}$

Figur 37: Eksempel på oppgave det var problematisk å kategorisere (Multi 6b, s. 43).

Oppgaven over (figur 37), kategoriserte jeg først under *anvende*. Siden flyttet jeg den til *kunne*, på grunn av eksempelet under 6.13 a). Her kom det tydelig frem hva elevene skulle gjøre for å løse oppgaven.

Til å begynne med var det også vanskelig å kategorisere enkelte tekstoppgaver. Grunnen til dette var tilhørende illustrasjoner og eksempler på samme side som oppgaven, som avgjorde at oppgavene ikke kunne kategoriseres som tekstoppgaver.



6.84 Janne har $\frac{3}{4}$ liter saft i en mugge. Hun heller $\frac{5}{12}$ liter i et glass. Hvor mye saft er det igjen i muggen?

Figur 38: Eksempel på oppgave det var problematisk å kategorisere (Multi 6b, s. 64).

Oppgaven over (figur 38) er i utgangspunktet en tekstoppgave, men på grunn av den medfølgende illustrasjonen ble oppgaven kategorisert som illustrasjon.

På bakgrunn av klassifiseringen og om oppgavene var basert på instrumentell- eller relasjonsforståelse, kunne jeg også trekke ut annen informasjon. Blant annet om oppgavene var basert på å gjøre matematikk ut fra allerede bestemte regler og prosedyrer, eller om oppgavene var basert på problemløsing. I tillegg til at bruk av begge rammemodellene var med på å kvalitetssikre kategoriseringen av oppgavene, kunne de også benyttes som punkter under tilpasset opplæring, for å måle om det var variasjon i oppgavenes kognitive krav og kunnskapsnivå. For øvrig kom også variasjon i bruk av brøkens ulike aspekter inn under tilpasset opplæring og punktene under motivasjon, viste seg også å være nyttige for å måle variasjon.

For å gjennomføre analysen ble måleinstrumentet for vertikal analyse (tabell 2, s.38) forenklet, slik at hver av de vertikale overskriftene fikk et romertall fra én til seks (I –VI) og hver av de horisontale kategoriene fikk et tall fra én til fem (1-5). Det som ga funn under analysen ble merket med én (1) og det som ikke ga funnet ble merket med null (0). Jeg brukte ett skjema for hver oppgave og kunne deretter telle opp funnene fra hver oppgave, samt regne ut den relative frekvensen for hvert trinn og samlet for alle trinnene.

	I	II	III	IV	V	VI
1						
2						
3						
4						
5						

Tabell 3: Forenklet modell for innfylling av funn per oppgave.

Under arbeidet med den vertikale analysen ble jeg oppmerksom på en utfordring med materiellet, det var ulike versjoner av lærebøker og lærerveiledninger for samme trinn. Disse ulike versjonene hadde til dels store endringer, noe som gjorde meg oppmerksom på viktigheten av at alt undervisningsmateriell bør være av samme utgave. Jeg ser at dette kan være en stor utfordring i undervisningssammenheng, dersom det oppstår ulikheter i et klassesett.

3.4 Studiens kvalitet og forskningsetiske prinsipper

Spørsmålet om validitet og reliabilitet fremtrer i alle studier og Thagaard (2013, s. 23) gjør det kjent at begrepene kan knyttes til spørsmål om forskningens gyldighet og pålitelighet.

I min studie har jeg analysert et matematisk emne i et norsk læreverk, men mine funn gir ikke grunnlag for generalisering. Det vil si at mine funn ikke gjelder for alle norske læreverk i matematikk. I en lærebokanalyse er faren stor for at egne meninger og synspunkter blir fremtredende, som følge av dette er det viktig at forskeren har et nøytralt forhold til forskningen.

Thagaard (2013, s. 181) peker på viktigheten av at det helhetlige perspektivet må komme til uttrykk i temasentrerte analyser. Dette medfører at en som forsker må passe på at konteksten består, slik at helheten ikke blir fragmentert. Med det mener jeg at for å danne et bilde av hva læreverket tilbyr, må jeg se på helheten av alle oppgavene og trinnene under ett. Når det gjelder min oppgave var det viktig å se analysen av oppgavene i hver grunnbok i sammenheng og ikke enkeltvis. Noe jeg vektlegger i resultatdelen.

3.4.1 Validitet

Mitt måleverktøy ble utviklet for å analysere oppgaver med fokus på hvilken type forståelse som ble vektlagt, i tillegg til å danne et bilde av hvordan oppgavene kunne motivere elevene og hvordan devar tilpasset mangfoldet i en klasse. Gjennom arbeidet med analysen satte jeg kriteriene for de ulike aspektene, derfor vil denne studien være valid ut fra mitt synspunkt. I tillegg har jeg utført forskjellige grep underveis for å kvalitetssikre analysen. Blant annet gjennomførte jeg en test-analyse av en del oppgaver i forkant av hoved analysen. Resultatene fra denne test-analysen diskuterte jeg med min veileder. I tillegg utførte jeg analysen to ganger, med en ukes mellomrom, for å se om jeg kategoriserte oppgavene likt. I de fleste tilfellene var analysen identisk. Der det var avvik var det enklere å bestemme hva som skulle være gjeldende ved andre analyse, siden jeg da var mer bevisst på mine valg.

3.4.2 Reliabilitet

Ved hjelp av mine kriterier, har også andre mulighet til å etterprøve min kategorisering av oppgavene, for å sjekke om de er enige med mine avgjørelser. Et viktig poeng i denne sammenhengen er at ulike forskere med stor sannsynlighet vil kategorisere oppgavene ulikt. Dermed er det ikke sikkert at en annen forsker hadde fått de samme resultatene som jeg fikk, selv om jeg mener å ha beskrevet i detalj hvordan jeg har gått frem. Grunnen til dette er at vi kan tolke data på ulike måter. Likevel ser jeg på min analyse som troverdig, fordi jeg har forklart i detalj hvordan jeg har kommet frem til mine resultater.

Jeg er klar over at jeg i tillegg kunne benyttet kontekstuell analyse og sett på lærebøkene i bruk, men på grunn av studiens omfang av tid, anså jeg det som tilfredsstillende å konsentrere meg om innholdet i lærebøkene. I dette tilfellet hovedoppgavene i grunnbok b fra tredje til sjuende trinn.

3.4.3 Forskningsetiske vurderinger

Studier som innhenter direkte eller indirekte identifiserende personopplysninger er ifølge De Nasjonale Forskningsetiske Komiteene (NESH) meldepliktige (Nesh, 2016). Selv om denne studien ikke innhenter personopplysninger, ønsket jeg allikevel å teste om studien var meldepliktig hos Norsk Senter For Forskningsdata (NSD). Derfor gikk jeg inn på NSD sine nettsider og gjennomførte en meldeplikttest, hvor jeg svarte på noen få spørsmål angående studien. Etter noen dager fikk jeg en skriftlig bekreftelse på at min studie ikke var meldepliktig (Vedlegg 5).

I rollen som forsker har jeg også et etisk ansvar overfor forfatterne av læreverket. Et ansvar som innebærer å ikke sette hverken forfatterne eller læreverket i et dårlig lys, i løpet av studien. Dette kunne vært en vanskelig oppgave, men ved å inkludere undervisningskunnskap i teoridelen mener jeg at dette etiske ansvaret er blitt ivaretatt på en tilfredsstillende måte.

4 Analyse

I dette kapitlet vil jeg presentere resultatene fra analysen. Og starter med den horisontale delen, som vil gi oss et innblikk i hvem som står bak læreverket, hvilke komponenter læreverket består av, hvordan det er forventet at læreverket skal brukes, samt strukturen på grunnbøkene. Deretter går vi over til den vertikale delen av analysen, som vil gi oss et bilde av hvordan brøk blir representert i Multi, med tanke på forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon.

4.1 Horisontal analyse

Læreverkets hovedforfattere er Bjørnar Alseth og Mona Røsseland. Alseth er lærebokforfatter på heltid og Røsseland er allmennlærer med master i undervisningskvalitet med vekt på matematikk. I tillegg er matematikklærer Ann-Christin Arnås medforfatter på tredje trinn og Henrik Kirkegaard er medforfatter på både tredje og fjerde trinn. Gunnar Nordberg er medforfatter på fjerde til sjuende trinn.

4.1.1 Innhold og bruk

Multi er et læreverk i matematikk for barnetrinnet, fra første til sjuende trinn og hovedkomponentene for hvert trinn er grunnbok a og b, lærerbok a og b, oppgavebok, kopiperm 1-4 og 5-7, kartleggingsprøver, grublishefte 1-4 og 5-7 og nettstedet: www.gyldendal.no/multi.

Multi er stadig under utvikling og har en stor del digitalt materiale. De arbeider kontinuerlig med *smartbok*, som er en digitalisering av grunnbøkene for femte til sjuende trinn. Disse bøkene har en høyttaler funksjon, hvor elevene kan få oppgavene opplest ved å trykke på selve oppgaven.

Multi har også utviklet *smart øving*, et digitalt læringssystem, som er tilpasset både nettbrett og PC. Dette systemet bygger på adaptiv læring. Her får hver enkelte elev oppgaver som er tilpasset elevens eget nivå. Det er derfor viktig at elevene ikke får hjelp til å løse disse oppgavene, men heller prøver seg frem, gjerne ved å bruke papir og blyant. Målet med *smart øving* er å motivere elevene til mestring, noe som kan medvirke til en god arbeidsflyt.

Det er mulig å kjøpe lisens til nettstedet. På den måten blir alle grunnbøkene tilgjengelige og kan brukes aktivt på smarte tavler i en felles klasseromsundervisning.

Alle grunnbøkene starter med en oversiktlig innholdsfortegnelse på første side, hvor strukturen for de ulike emnene presenteres. Trinnvis har kapitlene samme rekkefølge i grunnbøkene som i oppgaveboken. Samtlige bøker er innbundet i pocket-format, med mykt omslag, noe som gjør bøkene lette å bære med seg i skolesekken.

Bøkene for tredje og fjerde trinn er i A4-format, mens bøkene for femte, sjette og sjuende trinn er noe mindre. Fra fjerde trinn har bøkene en velkomsthilsen til elevene i begynnelsen av grunnboken, hvor forfatterne kort presenterer målet med læreverket og matematikkfaget.

Bak på lærebøkene står det litt om Multi og hva de vektlegger:

> «Multi er et læremiddel basert på forskning om undervisning og barns læring i matematikk. Multi sikter mot alle delene av elevenes kompetanse, som faktakunnskaper, grunnleggende ferdigheter og evne til å tenke og bruke matematikk i problemløsing og praktiske situasjoner.»
>
> «Multi vektlegger tilpasset opplæring innenfor et læringsfellesskap. Målet er at alle elevene skal oppleve mestring, samtidig som de utfordres og får mulighet til å strekke seg lengst mulig. Lærerens bok gir konkrete tips til hvilke oppgaver elevene kan gjøre.»
>
> «Elevene lærer matematikk gjennom varierte aktiviteter:
> - Problemløsing og praktiske oppgaver
> - Refleksjonsoppgaver til samtale og utforsking
> - Øving på grunnleggende faktakunnskap
> - Hjelp til å utvikle gode regnestrategier» (Alseth et al., 2013)

Læreverket har en kompetanseoversikt på sin hjemmeside, under kategorien lærerrom, som viser en tenkt årsplan. Her vises hva elevene skal kunne etter hvert trinn og hvor lang tid som er anbefalt å sette av til hvert tema. Tabellen på neste side (tabell 4) viser hvor lang tid som er tenkt avsatt til arbeid med brøk på de ulike trinnene.

Kapittel 13 – 3B	Kapittel 10 – 4B	Kapittel 6 – 5B	Kapittel 6 – 6B	Kapittel 6 – 7B
2 uker	3 uker	5-6 uker	5 uker	6 uker

Tabell 4: Anbefalt avsatt tid for arbeid med brøk fordelt per trinn.

I begynnelsen av lærerens bok a, for hvert trinn, er det en innledning. Her kommer det tydelig frem hvordan læreverket ønsker at læreren skal bruke læreverket. Forfatterne fremhever at de gir læreren et stort spillerom ved at de kommer med forslag til varierte undervisningsmetoder. De fremhever viktigheten av at læreren ikke trenger en grunnbok, men istedenfor bør bruke den tilhørende utgaven av lærerens bok. Multi legger stor vekt på praktisk, utforskende og kreativt arbeid, tilpasset opplæring i et læringsfellesskap med tydelig faglig fokus. I tillegg legger de vekt på at det er opp til den enkelte lærer å planlegge og å variere undervisningen. Av den grunn anvender de ikke sporvalg for å nivå-differensiere oppgavene i sine bøker.

4.1.2 Grunnbøkenes struktur

Grunnbøkene er strukturerte med ett kapittel per tema, og kapitlet om brøk finner vi i grunnbok b for alle trinn. I grunnbok 3b er brøk kapittel 13 av totalt 16, i grunnbok 4b er brøk kapittel 10 av totalt 12. I grunnbøkene 5b, 6b og 7b finner vi brøk i kapittel 6 av totalt 8.

Kapitlene i grunnbøkene for tredje og fjerde trinn starter med en helside illustrasjon, som ifølge lærerens bok er et samtalebilde. For øvrig er det oppgaver som er ment å passe for alle, med tips til forenkling eller utfordringer, selv om disse tipsene bare står i lærerens bok.

Oppgavene i grunnboken for tredje trinn er ikke nummererte, istedenfor er de merket med prikker (·, ··, ···). Når det gjelder fjerde trinn er oppgavene nummerert med enkle nummer fra én (1) og videre.

Det er mange eksempler i grunnbøkene og disse kommer stort sett i forkant av oppgavene. I tillegg er det forslag til spill. Det er totalt ti spill fordelt på grunnbøkene for fjerde til sjuende trinn, med ett til tre spill per trinn. Forklaringen til hvert spill står i grunnbøkene, men forslag til forenkling eller utfordringer finner vi bare i lærerens bok.

Mot slutten av hvert kapittel kommer en to siders prøve, som er ment for å vurdere om elevene har tilegnet seg ønsket kunnskap. Etter prøven kan læreren vurdere hvordan elevene skal arbeide videre ut fra resultatet på prøven. Etter prøve-sidene kommer noen øve-sider med videre henvisning til konkrete sider i den tilhørende oppgaveboken. Til slutt kommer en samarbeidsside med problemløsingsoppgaver. Her er det meningen at elevene skal arbeide sammen, for å se om de på en kreativ måte kan bruke den kunnskapen de nylig har tilegnet seg, for å løse oppgavene.

Grunnbøkene og oppgaveboken for tredje trinn, samt grunnbok a for fjerde trinn er designet for at elevene skal arbeide direkte i boken. I tillegg oppfordrer læreverket til bruk av kladdebok. Det er anbefalt at denne har blanke ark, hvor elevene kan vise hvordan de tenker ved hjelp av tegning og utregning. Oppgaveboken og grunnbok b for fjerde trinn er ment for gjenbruk, og her må elevene ha en egen kladdebok å regne i. Dette fortsetter naturligvis på femte, sjette og sjuende trinn.

Grunnbøkene for fjerde til sjuende trinn har flere under kapitler, de illustreres ved hjelp av tabellen under (tabell 5). Dette gir en indikasjon på hva elevene skal lære på de ulike trinnene.

Grunnbok 4b	**Grunnbok 5b**	**Grunnbok 6b**	**Grunnbok 7b**
Kapittel 10 Brøk	**Kapittel 6 Brøk**	**Kapittel 6 Brøk**	**Kapittel 6 Brøk og prosent**
Fra del til hel	Del av en hel, del av en mengde	Likeverdige brøker	Brøk – del av noe
Teller og nevner	Brøk på tallinjen	Brøk og desimaltall	Likeverdige brøker
Brøker med samme verdi	Større enn 1	Addisjon og subtraksjon av brøker	Utviding og forkorting
Vi sammenligner	Brøker med lik verdi	Brøker med ulike nevnere	Addisjon og subtraksjon av brøk
	Utvide brøker	Multiplikasjon med brøk	Multiplikasjon og divisjon med brøk
	Addisjon og subtraksjon	En brøkdel av noe	Divisjon av brøk med helt tall
	Addisjon og subtraksjon med ulike nevnere	Gjentatt addisjon	Prosent
		Tekstoppgaver	Prosent – en del av det hele
			Prosent – brøk – desimal
			Regning med prosent
			Hvor mange prosent?
			Å finne 100 %
			Oppsummering

Tabell 5: Oversikt over delkapitler i forbindelse med brøk per trinn.

Kapitlene i grunnbøkene for femte, sjette og sjuende trinn starter med en illustrasjon og en liste over mål. Disse målene viser hva elevene skal lære om i kapitlet. Oppgavene er nummerert med kapittelnummer og oppgave nummer, eksempelvis fra 6.1 og videre. Her er også oppgavene ment å passe for alle. Mot slutten av kapitlet er det to sider med oppgaver merket med overskriften Kan du dette? Her beskrives hvilken kompetanse oppgavene dekker, med henvisning til sider i grunnboken og i oppgaveboken, hvor elevene kan øve mer. Deretter kommer noen øve-sider, som dekker hovedpunktene i kapitlet. Etter øve-sidene kommer to sider med oppgaver merket: Tren tanken, dette er oppgaver som er ment for å trene elevenes kognitive kreativitet. Til slutt kommer to sider med oppgaver merket med: Litt av hvert. Disse sidene har oppgaver fra andre emner og er ment for å oppfriske eller holde ved like kunnskap elevene har tilegnet seg tidligere.

Antall kapitler i grunnbøkene minker med årene, mens antall oppgaver øker.

4.2 Vertikal analyse

Resultatene fra den vertikale analysen blir presentert ut fra de seks punktene i analyseskjemaet (tabell 2, s.38), hvor disse punktene blir overskrifter. For å gjøre resultatene synlige på en oversiktlig måte, presenteres disse ved hjelp av tabeller, hvor variasjon i bruk av de ulike punktene, samt hvilke særtrekk som gjør seg gjeldende på de ulike trinnene kommer frem.

4.2.1 Brøkens aspekter (I)

For å tydeliggjøre hvordan brøk blir representert i Multi sine grunnbøkene har jeg valgt å starte med å se på hvilket av brøkens aspekter som blir presentert. I tillegg belyses når og hvordan disse blir introdusert.

Brøkens aspekter						
%	**Grunnbok 3b N = 20**	**Grunnbok 4b N = 46**	**Grunnbok 5b N = 75**	**Grunnbok 6b N = 107**	**Grunnbok 7b N = 152**	**Totalt N = 400**
Del av hel	100	54	17	6	5	18
Forhold	0	28	27	21	8	17
Operator	0	7	4	36	71	38
Kvotient	0	0	0	1	4	2
Tallstørrelse	0	11	52	36	12	25

Tabell 6: Prosentvis fordeling av oppgaver innen brøkens aspekter fordelt per trinn.

Ut fra tabellen over (tabell 6), ser vi en trinnvis fordeling av brøkens ulike aspekter. Dersom vi starter med å se på totalen, ser vi at alle brøkens aspekter blir introdusert i løpet av grunnskolen, selv om fordelingen er ujevn.

Det er flere grunner til denne ujevne fordelingen og vi skal se på noen av dem. Oppgaver med brøk som kvotient har en lav andel og kan trolig forklares med at divisjon med brøk ikke er et mål i henhold til læreplanen før på ungdomsskolen. Vi ser at brøk som operator har en vesentlig høyere prosentandel enn de andre aspektene, noe som kan forklares ut fra at multiplikasjon med brøk blir innført på sjette trinn og andelen oppgaver i grunnbøkene øker for hvert trinn. Dersom vi ser på den trinnvise fordelinger av brøkens aspekt, er det ingen tegn til variasjon på tredje trinn, da alle oppgavene er dekket av aspektet brøk som del av en hel. Vi ser tegn til variasjon på fjerde trinn, hvor brøk som forhold, operator og tallstørrelse blir introdusert.

Brøk som forhold blir introdusert på fjerde trinn ved å brette ark i like deler, en konkret måte å se de ulike brøkstørrelsene på. Brøk som tallstørrelse blir første gang introdusert ved hjelp av oppgave 22 (figur 22, s. 43). Selv om denne oppgaven ikke indikerer at brøk er et tall, er den likevel kategorisert under denne kategorien. Egentlig er denne typen oppgave bare en illustrasjon av brøksymbolet, med forklaring av teller, nevner og brøkstrek. Med andre ord en introduksjon av brøk som matematisk begrep.

På femte trinn er det også variasjon i brøkens aspekter, selv om over halvparten av oppgavene er dekket av aspektet brøk som tallstørrelse. Grunnen til dette er at elevene introduseres for brøk som tall og regning med brøk i form av addisjon og subtraksjon av brøker.
På sjuende trinn er alle brøkens aspekter representert og fordelingen er nokså gjennomsnittlig, bortsett fra brøk som operator. Også her har det en naturlig forklaring, da prosentregning innføres og av den grunn dekker en stor andel oppgaver.

4.2.2 Representasjonsform (II)

Vi skal nå se på bruk av de ulike representasjonsformene og er tidligere gjort kjent med at bruk av konkreter er viktig for å utvikle relasjonsforståelse med tanke på brøk (Utdanningsdirektoratet, 2008).

Representasjon						
%	Grunnbok 3B N = 20	Grunnbok 4B N = 46	Grunnbok 5B N = 75	Grunnbok 6B N = 107	Grunnbok 7B N = 152	Totalt N = 400
Konkret	35	22	6	7	8	10
Illustrasjon	65	32	48	21	14	27
Symbol	0	24	27	35	22	26
Tekst	0	22	19	37	56	37

Tabell 7: Prosentvis fordeling av oppgavenes representasjonsform per trinn.

Dersom vi starter med å se på totalen, ser vi at alle representasjonsformene blir benyttet. I tillegg er de ulike representasjonsformene nokså jevnt fordelt. Dette indikerer variasjon i bruken av de ulike representasjonsformene, selv om bruken av konkreter og tekstoppgaver avviker fra gjennomsnittet. Grunnen til denne ujevne fordelingen av konkret og tekst kan vi forstå ut fra antall oppgaver. Oppgavene for tredje og fjerde trinn utgjør sekstiseks av totalt firehundre oppgaver. Vi ser at bruk av konkreter på tredje og fjerde trinn utgjør henholdsvis trettifem og tjueto prosent av oppgavene på de respektive trinnene. Dette utgjør totalt sytten oppgaver, noe som tilsvarer 4,25 prosent av de totalt firehundre oppgavene. Siden bruk av konkret er høyest på de laveste trinnene, kan vi forstå at det samlede resultatet blir lavt. De samme tendensene finner vi for bruk av tekstoppgaver, men i motsatt favør.

4.2.3 Strategi (III)

Ytterliggere skal vi se på hvilke strategier som blir representert i Multi. Vi har tidligere sett at utvikling av gode strategier kan være et tiltak for å redusere matematikkvansker (Ostad, 2008) og ifølge PISA undersøkelsen fra 2003 (Kjærnsli, 2004) henger god strategibruk nært sammen med problemløsing.

Strategi						
%	Grunnbok 3B N = 20	Grunnbok 4B N = 46	Grunnbok 5B N = 75	Grunnbok 6B N = 107	Grunnbok 7B N = 152	Totalt N = 400
Arealmodell	90	41	35	22	20	29
Diskretmodell	10	13	5	1	3	4
Lineærmodell	0	7	19	4	1	6
Ingen modell	0	39	41	73	76	61

Tabell 8: Prosentvis fordeling av oppgavenes bruk av ulike modeller per trinn.

Ut fra tabellen over (tabell 8), ser vi at alle de ulike modellene blir representert. Her er det også forskjeller mellom trinn og bruk. Vi ser tydelige tegn til at bruk av arealmodell er dominerende på alle trinn. Lineærmodell blir ikke introdusert før på fjerde trinn og da ved å dele linjestykker opp i like deler. Bruk av lineærmodell har den høyeste andelen på femte trinn, og grunnen til dette er at brøk introduseres som et tall og bruk av lineærmodell i form av tallinjer blir benyttet.

4.2.4 Kognitive krav (IV)

Vi har tidligere sett at oppgaver som fremmer relasjonsforståelse er oppgaver med fokus på matematisk tenking og problemløsing (Skemp, 1976). Det er oppgaver av typen prosedyre med sammenheng og problemløsing som fremmer relasjonsforståelse, som følge av dette er det disse tallene som blir interessante i denne sammenhengen.

Kognitive krav						
%	**Grunnbok 3b N = 20**	**Grunnbok 4b N = 46**	**Grunnbok 5b N = 75**	**Grunnbok 6b N = 107**	**Grunnbok 7b N = 152**	**Totalt N = 400**
Memorering	0	7	0	1	5	3
Prosedyre uten sammenheng	90	78	73	71	54	67
Prosedyre med sammenheng	10	15	27	28	41	30
Problemløsing	0	0	0	0	0	0

Tabell 9: Prosentvis fordeling av oppgavenes kognitive krav per trinn.

Ut fra tabellen over (tabell 9), ser vi at oppgaver med fokus på problemløsing er fraværende for alle trinn, men det er likevel en god del oppgaver med fokus på matematisk tenking. Selv om det totale bildet viser at kun tretti prosent av oppgavene har fokus på matematisk tenking, ser vi at andelen stiger for hvert trinn.

4.2.5 Kunnskapsnivå (V)

Vi har tidligere sett at oppgaver under kategorien resonnere kan bidra til å fremme utvikling av relasjonsforståelse, det vil si at det er den nederste linje i tabellen på neste side (tabell 10) som er av interesse.

Kunnskapsnivå						
%	**Grunnbok 3b** **N = 20**	**Grunnbok 4b** **N = 46**	**Grunnbok 5b** **N = 75**	**Grunnbok 6b** **N = 107**	**Grunnbok 7b** **N = 152**	**Totalt** **N = 400**
Kunne	90	74	48	32	19	38
Anvende	10	22	48	64	80	60
Resonnere	0	4	4	4	1	2

Tabell 10: Prosentvis fordeling av oppgavenes kunnskapsnivå per trinn.

Ut fra tabellen over (tabell 10), ser vi at kategorien resonnere er fraværende på tredje trinn. På fjerde til sjette trinn er det jevnt fire prosent av oppgavene som har fokus på matematisk tenking og på sjuende trinn er det nedgang. Totalt sett er det bare to prosent av oppgavene som har et høyt kunnskapsnivå, hvor elevene får være kreativt kognitive.

Ved å sammenligne funnene i tabellene for kognitive krav (tabell 9) og kunnskapsnivå (tabell 10), ser vi at det er mest realistisk å se på tallene i tabellen for kognitive krav (tabell 9). Grunnen til dette er at kategorien anvende i tabellen for kunnskapsnivå (tabell 10) kan helle begge veier, og er av den grunn mest egnet for å måle variasjonen. Hvis man derimot deler kategorien anvende på midten, vil man se at vi får omtrent samme inndeling på de to tabellene (tabell 9 og 10). På denne måten kan vi si at cirka tretti prosent av oppgavene i grunnbøkene har fokus på matematisk tenking.

4.2.6 Motivasjon (VI)

Under motivasjon valgte jeg å fokusere på illustrasjoner og om oppgavene hadde lav inngangsterskel.

Motivasjon						
%	**Grunnbok 3B** **N = 20**	**Grunnbok 4B** **N = 46**	**Grunnbok 5B** **N = 75**	**Grunnbok 6B** **N = 107**	**Grunnbok 7B** **N = 152**	**Totalt** **N = 400**
Illustrasjon						
Ingen	0	28	36	57	63	49
Dekorativ	0	0	4	7	5	5
Funksjonell	100	72	60	36	32	46

Tabell 11: Prosentvis fordeling av oppgavenes illustrasjon per trinn.

Ut fra totalen i tabellen over (tabell 11) ser vi at Multi i stor grad bruker illustrasjoner av funksjonell karakter. Det vi si at illustrasjonene er til hjelp for elevene under arbeidet med å løse oppgavene, noe som kan bidra til å øke elevenes motivasjon (Brändström, 2005). Ved å se på om en oppgave er åpen eller lukket er det mulig å skille hvilke oppgaver som er individuelle og hvilke som kan legge opp til diskusjon og samarbeid i et læringsfellesskap.

Motivasjon						
%	**Grunnbok 3b N = 20**	**Grunnbok 4b N = 46**	**Grunnbok 5b N = 75**	**Grunnbok 6b N = 107**	**Grunnbok 7b N = 152**	**Totalt N = 400**
Oppgave						
Åpen	60	39	40	36	16	31
Lukket	40	61	60	64	84	69

Tabell 12: Prosentvis fordeling av åpne og lukkede oppgaver per trinn.

Ut fra tabellen over (tabell 12), ser vi at det er en stor andel åpne oppgaver på tredje trinn. Dette endrer seg, men er nokså stabilt fra fjerde til sjette trinn. På sjuende trinn er det minimalt med åpne oppgaver og dette påvirker det totale bildet av åpne oppgaver.
Under motivasjon må det også nevnes at Multi har konkrete forslag til spill i grunnbøkene for fjerde til sjuende trinn. Disse kan elevene spille for å trene opp relasjonsforståelsen. Spillene er ofte beregnet på arbeid i par eller grupper og kan være en lærerik aktivitet i undervisningen.

4.3 Oppsummering

Vi har nå dannet oss et overblikk over innholdet i læreverket Multi, hvem forfatterne er og hvilke komponenter læreverket inneholder. I tillegg har vi sett hvordan grunnbøkene er strukturert, hvordan forfatterne ønsker at læreverket skal brukes og hvordan oppgavene i kapitlene om brøk er representert.

Vi er gjort kjent med at kapitlene er strukturert slik at elevene gjør seg ferdig med et emne før noe nytt introduseres og at strukturen i grunnbøkene kjennetegnes ved at det først kommer en forklaring eller demonstrasjon, deretter eksempler og til slutt oppgaver elevene skal løse.

Ut fra tabellene som her er presentert får vi et innblikk i hvordan brøk introduseres. Dermed ser vi hvilken form for forståelse oppgavene fremmer, hvordan variasjonen er og hvordan dette kan motivere elevene.

Denne oppsummeringen danner grunnlaget for neste kapittel, hvor disse resultatene diskuteres.

5 Diskusjon

I dette kapitlet diskuteres funnene fra analysen opp mot tidligere presentert teori. Forskningsspørsmålet *«hvordan er brøk representert i Multi, med tanke på forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon?»* blir belyst gjennom fire underkapitler, som hver tar for seg en del av problemstillingen.

5.1 Representasjon

Gjennom analysen er vi gjort kjent med at læreverket Multi introduserer brøk på tredje trinn. Aspektet brøk som del av en hel er enerådende på tredje trinn og det samme gjelder stort sett også for bruken av arealmodell. Dette gjelder til dels også på fjerde trinn, hvor mer enn halvparten av oppgavene er kategorisert innen aspektet brøk som del av en hel.

I teoridelen ble det belyst at det råder uenighet om hva som bør være utgangspunktet for brøkundervisningen (Amato, 2005; Bjerke et al., 2013; Kerslake, 1986). Behr et al. (1983) forklarer at brøk som del av en hel er selve kjernen i brøkundervisningen og på denne måten legger grunnlaget for videre utvikling og forståelse av brøk. Bjerke et al. (2013) bemerker i sin studie at representasjon av brøk som del av en hel ofte er betegnet som det aspektet som virker mest konkret, selv om ensidig fokus på ett av aspektene kan føre til manglende forståelse. Flere forskere støtter denne påstanden og understreker at dersom elever blir opplært til å se på brøk som del av en hel vil dette føre til vansker og manglende brøk forståelse (Amato, 2005; Kerslake, 1986). Ergo er det innlysende at elever med fordel kan læres opp til å se på brøk som et tall og gjøres oppmerksomme på at brøk er en utvidelse av tallbegrepet.

Brøker større enn én blir ikke introdusert i Multi før på femte trinn. Dette gjelder også for introduksjon av brøk som tall. Av den grunn er introduksjonen av brøk i Multi i tråd med artikkelen til Wu (2013), hvor innlæringen av brøk deles i to faser. Det vil si at elevene først blir introdusert for brøk som del av en hel, gjerne i form av en arealmodell og deretter kommer utviklingsfasen hvor elevene blir kjent med at brøk er et tall og starter å regne med brøker.

Vi har tidligere sett at elever kan bli forvirret i arbeidet med brøk, nettopp fordi brøk kan brukes i flere sammenhenger (Birkeland et al., 2011; Bjerke et al., 2013). Og det er forståelig at dersom elever over flere år, ensidig læres opp til å se på brøk som del av en hel, kan få problemer med å ta inn over seg at brøk faktisk er en utvidelse av tallbegrepet. Dermed kan denne såkalte modningen svekke elevenes brøkforståelse istedenfor å utvikle den.

Studien til Watanabe (2007) viser til gode resultater i brøk fra Japan, hvor elevene starter med brøk på fjerde trinn. Watanabe analyserer japanske lærebøker og stiller spørsmål om hvilken type forståelse av brøk som vektlegges på hvilke trinn. Hvordan de ulike brøk-idéene representeres og hva som brukes for å representere disse idéene, stilles det også spørsmål ved. Deretter sammenlignes disse spørsmålene med funn i amerikanske lærebøker.

I likhet med funnene i studien til Watanabe (2007), finner vi de samme trekkene i Multi som i de amerikanske lærebøkene. Også her introduseres brøk som del av en hel, ved hjelp av arealmodell og brøkene er mindre enn én.

Bondø (2010) viser i sin studie til at selv om elevene er kjent med å doble og halvere fra andre trinn, er ikke bruk av enkle brøker en del av læreplanen før etter fjerde trinn. Vi kan dermed stille spørsmål ved om det er for tidlig å introdusere brøk på tredje trinn, eller om elevene kanskje bør vente med dette til fjerde trinn?

Samtidig må vi ikke glemme at det finnes elever som er klar for å arbeide med brøk tidligere enn andre. På denne måten kommer lærerens mulighet til å inkludere tilpasset opplæring i undervisningen tydelig frem.

5.2 Relasjonsforståelse

Analysen viser at cirka tretti prosent av de totalt firehundre oppgavene, som er analysert fra tredje til sjuende trinn fremmer relasjonsforståelse. Selv om vi har sett at det finnes flere oppgaver i Multi sine grunnbøker som fremmer relasjonsforståelse, er det innlysende at de fleste oppgavene fremmer instrumentell forståelse. På bakgrunn av dette, kan vi altså si at de fleste oppgavene i Multi sine grunnbøker er basert på tidligere gitte regler og algoritmer, som elevene skal følge for å løse oppgavene (Skemp, 1976).
Gjennom teorikapitlet har vi sett at oppgaver som fremmer instrumentell forståelse ikke fører til utforsking, selv om utforsking er et begrep Multi vektlegger i sin presentasjon av læreverket. Vi har sett at Multi sitt mål med matematikkundervisningen baseres på variasjon, utforskning og motivasjon.

Vi har også sett at illustrasjonene som benyttes i grunnbøkene stort sett er av funksjonell karakter og av den grunn kan være til hjelp når elevene skal løse oppgaver. I tillegg er vi gjort kjent med at dette kan bidra til utvikling av relasjonsforståelse, men også frata elevene muligheten til selvstendig tenking.

Under arbeidet med den horisontale analysen ble jeg oppmerksom på at Gyldendal fremhever at de i stor grad legger vekt på problemløsing, praktiske oppgaver og begrepsforståelse, selv om ingen oppgaver i min analyse ble kategorisert som problemløsingsoppgaver. En av grunnene til dette var blant annet forklaringene før oppgavene og bruken av eksempler i oppgavene. Vi finner som nevnt rikelig med forklaringer, eksempler og oppgaver i Multi sine grunnbøker. Og gjennom denne studien har vi sett at dominerende bruk av mange eksempler og illustrasjoner med etterfølgende svar kan legge en demper på elevenes mulighet til å fremme selvstendig tenking (Pepin & Haggarty, 2001). Også Reys et al. (2004) belyste i sin studie at ved å presentere oppgaver på denne måten, fratas elevene muligheten til selvstendig tenking.

Bruk av åpne oppgaver har også vist seg å føre til kreativ og kognitiv tenking. På grunn av muligheten til å diskutere åpne oppgaver får elevene mulighet til å samtale om oppgavene i fellesskap. Denne samtalen kan være med på å øke elevenes motivasjon og i tillegg fremme relasjonsforståelse.

Vi har sett at brøkkapitlene på de laveste trinnene starter med en helside illustrasjon, som er et godt utgangspunkt for en matematisk samtale. I tillegg er det utstrakt bruk av konkreter på de laveste trinnene, noe som også kan bidra til utvikling av et godt brøkbegrep. Det kommer klart frem av analysen at bruk av konkreter minker med årene og at andelen tekstoppgaver øker. Kan dette indikere at det legges mindre vekt på relasjonsforståelse på høyere trinn?

Når det gjelder bruk av praktiske oppgaver finner vi flere oppgaver hvor elevene blir bedt om å brette ark. Denne typen oppgaver blir først introdusert på fjerde trinn og deretter gjentatt på femte og sjette trinn. Det er imidlertid overraskende at denne typen oppgaver ikke legger opp til matematisk diskusjon, noe som kunne ført til utvikling av relasjonsforståelse. Her kommer lærernes kompetanse inn og deres evne til å bygge videre på oppgaver og utfordre elevene til matematisk tenking.

På femte trinn blir elevene introdusert for oppgaven under (figur 39), hvor de skal brette ark. Vi ser vi at oppgaven er instrumentell, fordi elevene kun blir bedt om å gjøre noe. Det er ikke tegn til utforsking, diskusjon eller begrunnelse.


6.11 Bruk et A4-ark.

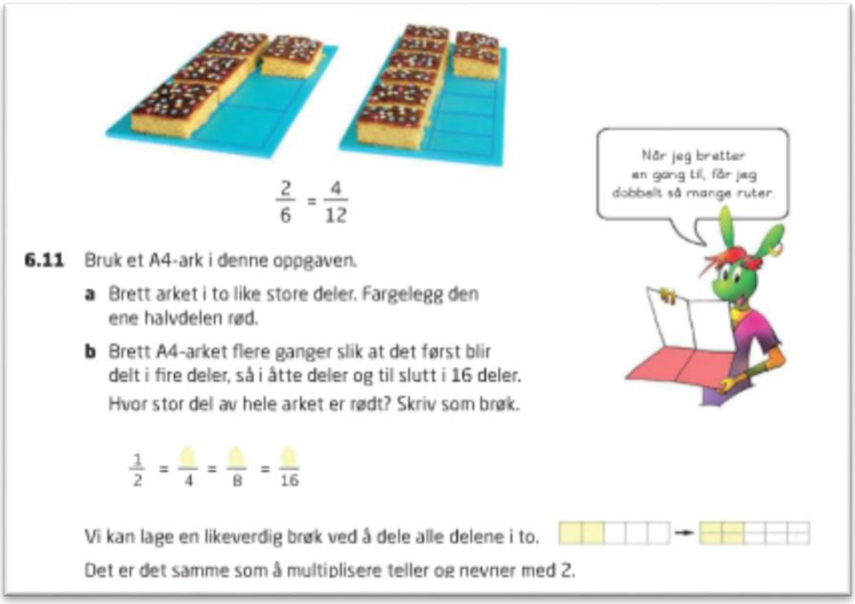
a Brett arket slik at du får to like store deler, som du klipper ut.

b Brett den ene firkanten slik at du får åtte like store deler. Fargelegg $\frac{3}{8}$ av firkanten gul og $\frac{5}{8}$ av firkanten rød.

c Brett den andre firkanten i seks like store deler. Fargelegg $\frac{1}{6}$ av firkanten rød, $\frac{3}{6}$ blå og $\frac{2}{6}$ gul.

Figur 39: Eksempel på oppgave som fremmer instrumentell forståelse (Multi 5b, s. 43).

Vi finner også en tilsvarende oppgave på sjette trinn hvor elevene skal brette ark, her er det også bare snakk om å gjøre det som står i grunnboken for å illustrere likeverdige brøker. Heller ikke her legges det opp til begrunnelse eller samtale for å utvikle brøkforståelsen i oppgaven.



6.11 Bruk et A4-ark i denne oppgaven.

a Brett arket i to like store deler. Fargelegg den ene halvdelen rød.

b Brett A4-arket flere ganger slik at det først blir delt i fire deler, så i åtte deler og til slutt i 16 deler. Hvor stor del av hele arket er rødt? Skriv som brøk.

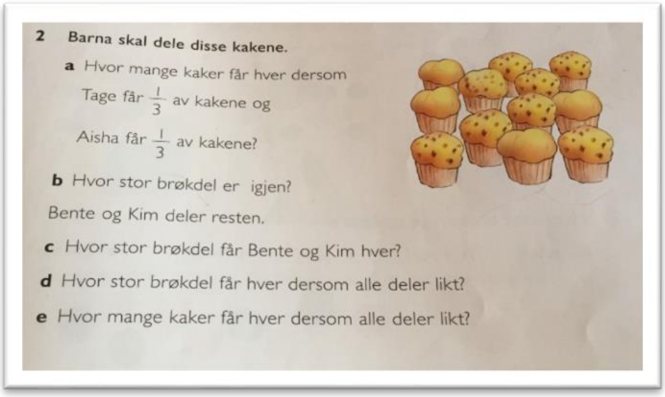
$\frac{1}{2} = \frac{\square}{4} = \frac{\square}{8} = \frac{\square}{16}$

Vi kan lage en likeverdig brøk ved å dele alle delene i to. Det er det samme som å multiplisere teller og nevner med 2.

Figur 40: Eksempel på oppgave med bruk av konkret (Multi 6b, s.42).

Under analysen fant jeg også flere oppgaver med «rar» plassering og uklart språk. Der i blant en oppgave fra fjerde trinn, hvor brøk som operator introduseres.

Oppgaven på neste side (figur 41) finner vi allerede i kapitlets andre oppgave, enda elevene ikke har vært borte i oppgaver eller eksempler av denne typen før.



2 **Barna skal dele disse kakene.**

a Hvor mange kaker får hver dersom Tage får $\frac{1}{3}$ av kakene og Aisha får $\frac{1}{3}$ av kakene?

b Hvor stor brøkdel er igjen?

Bente og Kim deler resten.

c Hvor stor brøkdel får Bente og Kim hver?

d Hvor stor brøkdel får hver dersom alle deler likt?

e Hvor mange kaker får hver dersom alle deler likt?

Figur 41: Eksempel på oppgave med brøk som operator (Multi 4b, s. 71).

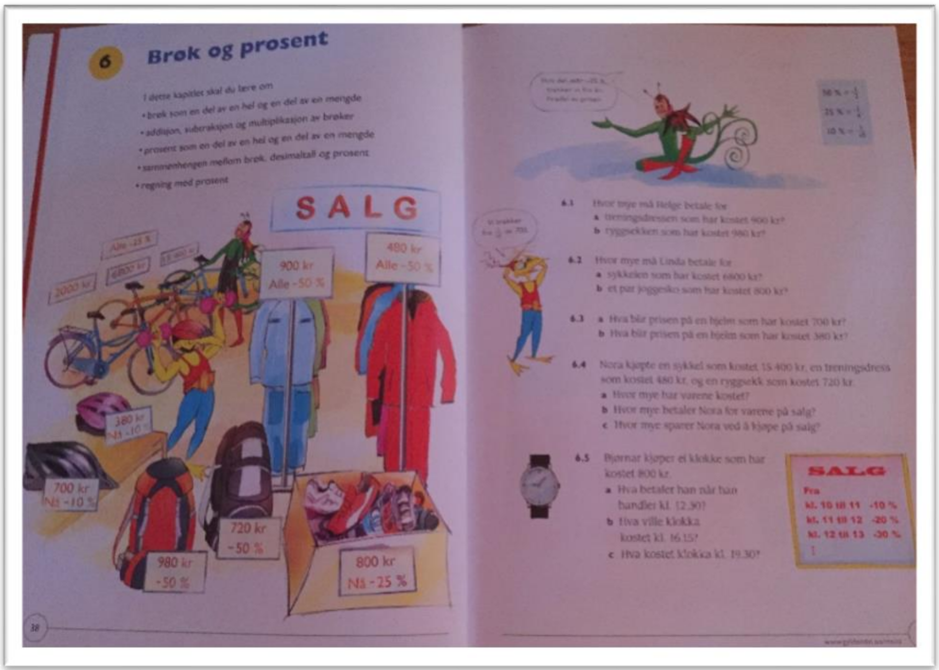
Denne oppgaven oppfatter jeg som vrien, fordi jeg mener at progresjonen i oppgaven ikke går i riktig retning. Slik jeg tolker oppgaven, er d) og e) enklere enn c), fordi elevene under punkt d) og e) kan telle seg frem til svaret. I tillegg inneholder oppgaven uklart språk, med tanke på punkt c). Her sier ikke oppgaven noe om hvordan Bente og Kim skal dele kakene. Vi vet at det er $\frac{1}{3}$ av kakene som skal deles og at det derfor er snakk om fire av totalt tolv kaker. Elevene kan av den grunn velge å løse denne oppgaven på ulike måter, med seks forskjellige svaralternativer:

- De kan dele kakene likt og få to kaker hver, dette kan presenteres som $\frac{2}{4}$ av kakene som er igjen, noe som tilsvarer $\frac{1}{2}$ av fire kaker. I tillegg kan svaret presenteres som $\frac{2}{12}$ av alle kakene som var med i utgangspunktet. Dette tilsvarer $\frac{1}{6}$ av totalt tolv kaker.
- Det er også mulig at Bente får tre kaker og Kim får én kake, eller omvendt. Også disse alternativene kan presenteres ut fra en mengde på fire eller tolv kaker. Bente eller Kim kan altså få $\frac{3}{4}$ eller $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ av kakene og Bente eller Kim kan få $\frac{1}{4}$ eller $\frac{1}{12}$.

På grunn av utfordringene med denne oppgaven, valgte jeg å slå opp i lærerens bok, for å se hva som var hensikten med oppgaven. Da forstod jeg at oppgaven var ment som en gjennomgangsoppgave med bruk av konkreter for å vise hvordan oppgaven kunne løses. På denne måten belyses viktigheten av å se på hele læreverket, både for den som underviser og den som analyserer lærebøker. Med det mener jeg at den som underviser på forhånd må ha gjennomgått oppgavene, for å analysere hva elevene kan få ut av dem og hvilke problemer som kan oppstå. I dette tilfellet var det en fordel å se hva læreverket sa om denne oppgaven i lærerens bok. På den måten kan læreren avverge situasjoner hvor elevene blir sittende å arbeide individuelt med problemløsingsoppgaver uten at de får mulighet til å diskutere dem.

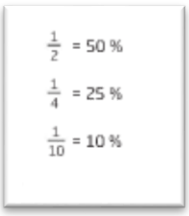
Denne oppgaven ble imidlertid ikke kategorisert som en problemløsingsoppgave, men kategorisert under prosedyre med sammenheng og åpen oppgave.

Også i grunnboken for sjuende trinn er det oppgaver jeg stiller spørsmål ved. Kapitlet om brøk starter med fem oppgaver med brøk og prosent, hvor en liten tabell er trykket i bokens høyre hjørne.



Figur 42: Eksempel på oppgaver med prosent (Multi 7b, s. 38-39).

Disse oppgavene er elevenes første møte med prosentregning i Multi. Lærerveiledningen legger vekt på at dette er problemløsingsoppgaver, siden elevene ikke har vært gjennom dette før. Disse oppgavene ble imidlertid ikke analysert som problemløsingsoppgaver i min studie, på grunn av eksempelet i høyre hjørne av figur 42 (figur 43).



Figur 43: Eksempel på omgjøring fra brøk til prosent (Multi smart 7b, s.43).

Det er et kjent fenomen at denne formen for representasjon, som vi ser på figuren over (figur 43) er en stor tabbe. Grunnen til dette er at 50 % er et begrep som representerer ulike tall alt etter hvilken kontekst det brukes i, mens $\frac{1}{2}$ er et symbol på et konkret tall. Av den grunn er det uheldig å bruke likhetstegn på denne måten, selv om det i noen kontekster representerer samme forhold. Under kommer jeg med et eksempel som kan illustrere det jeg legger vekt på i denne situasjonen:

- 50 % av 1 er $\frac{1}{2}$
- 50 % av 4 er 2

Dermed kan ikke prosent (%) illustreres på en tallinje, men det er mulig å illustrere prosent ved hjelp av et linjestykke.

I tillegg la jeg merke til at enkelte oppgaver har litt merkelig språk, som for eksempel på femte trinn, i oppgave 6.12 (figur 30, s.47). Her stiller Multi spørsmål som starter med «kan du», noe som ofte kan føre til ja eller nei svar fra elevene. Dersom oppgaven hadde stilt spørsmål av typen «hvordan kan du», hadde oppgaven lagt opp til utforsking og diskusjon av ulike svar. Da kunne oppgaven vært plassert under problemløsing istedenfor prosedyre med sammenheng. Også her er lærerens kompetanse viktig, fordi oppgaven med enkle grep kan endres, slik at den blir utforskende og mer spennende for elevene å arbeide med.

I oppgave 6.54 (figur 34, s. 45), også fra femte trinn, blir elevene bedt om å lage regnestykker. Her kunne det vært nyttig å gjøre elevene kjent med det matematiske språket, ved å bevisstgjøre dem på at «$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} =$» kalles et regnestykke, «$\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$» kalles et uttrykk, «$\frac{5}{8}$» er verdien til uttrykket og «$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$» kalles en likhet. På denne måten kan elevene lage likheter som passer til illustrasjonen, for eksempel «$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$».
Siden elevene i denne oppgaven (figur 34) blir bedt om å lage regnestykker, trenger de strengt tatt ikke å regne ut noe. Av den grunn kommer viktigheten av å bruke det matematiske språket korrekt, godt frem.

5.3 Tilpasset opplæring

Vi har tidligere sett at Multi sitt syn på tilpasset opplæring er identisk med det vi finner på Utdanningsdirektoratet sine sider. På bakgrunn av dette har de valgt bort bruk av sporvalg eller nivådifferensiering i sine grunnbøker, fordi det ofte kan være vanskelig å plassere elever på riktig nivå. Læreverket understreker at det er ulike grunner til dette og legger først og fremst vekt på at elevenes ferdigheter gjerne varierer fra tema til tema. For det andre understreker læreverket at bruk av sporvalg kan føre til at elever sitter isolert og arbeider med oppgaver. Multi legger vekt på viktigheten av klassen som læringsarena og peker på at dette er det beste for alle parter, ikke minst med tanke på oppsummering av timen. I tillegg fremhever de bruk av lærerens bok, hvor tips til forenkling og utfordringer gis kontinuerlig. På denne måten blir alle inkludert i læringsfellesskapet og oppgavene kan tilpasses og justeres for å passe alle.

Selv om oppgavene i grunnbøkene med enkle grep kan forenkles eller gjøres mer utfordrende, finner jeg dette utfordrende både for læreren og elevene. Det vil kreve mye av læreren i form av forarbeid og i tillegg ser jeg utfordringen dersom elevene skal arbeide selvstendig med oppgaver fra grunnboken. Noen vil synes at oppgavene er krevende og trenge tips til forenkling og andre vil synes at oppgavene er enkle og trenge tips til flere utfordringer. Når disse tipsene bare står i lærerens bok, ser jeg utfordringen dette blir for læreren. Hvis vi ser for oss at læreren underviser i en klasse med tretti elever, vil læreren ha en kjempe stor jobb med å gå rundt å tilpasse oppgavene til enkeltelever.

Multi hevder selv at grunnbøkene har oppgaver som er tilpasset alle elevene og ut fra analysen har vi sett at Multi legger opp til variasjon både ved bruk av ulike representasjonsformer, strategier, oppgaver og aktiviteter. Vi har også sett at bruk av åpne oppgaver er en innfallsvinkel for å tilpasse undervisningen for alle elevene i et læringsfellesskap (Pehkonen, 2007), selv om andelen åpne oppgaver ikke tilhørte majoriteten i denne studien.

Det bør også nevnes at muligheten til å bruke læreverket i form av smarte tavler, etter min mening er et positivt trekk for en inkluderende undervisning. Det samme gjelder for adaptiv læring, i form av *smart øving*. Dette er etter mitt syn i stor grad tilpasset elevenes ulike nivå og høytalerfunksjonen på *smartbøkene* er også et skritt i riktig retning for å tilpasse undervisningen for de som har problemer med å lese.

5.4 Motivasjon

Vi har tidligere sett at illustrasjoner og åpne oppgaver kunne bidra til å motivere elevene i arbeidet med for eksempel brøk (Brändström, 2005; Pehkonen, 2007). Det kom klart frem av denne studien at de fleste illustrasjonene i Multis grunnbøker var av funksjonell karakter. Dette kan være både positivt og negativt. Det kan være positivt av den grunn at funksjonelle illustrasjoner kan være motiverende fordi elevene får forklart gjennom illustrasjonen hvordan oppgaven skal løses. Ett negativt trekk med dette er at elevene fratas muligheten til selvstendig tenking.

I tillegg har vi også sett at problemløsing og utfordringer er begreper som kan bidra til å fremme elevers motivasjon (Holden, 2003). Vi er kjent med at det i denne studien ikke ble funnet oppgaver som kunne kategoriseres som problemløsingsoppgaver. Utfordringer derimot, kunne måles ved hjelp av oppgavenes kognitive krav og kunnskapsnivå. Analysen viste at cirka tretti prosent av oppgavene kunne ansees som utfordrende og positive trekk ved disse funnene var at denne typen oppgaver økte for hvert klassetrinn (tabell 9, s. 61).

Under analysen har vi sett at flere oppgaver hadde uklart språk og at flere oppgaver gikk ut på å gjøre noe, uten at betydningen av det som skulle gjøres ble tatt opp til diskusjon. Dette er selvsagt uheldig med tanke på å motivere elevene. Vi har også sett at Multi hadde forslag til bruk av spill i matematikkundervisningen, noe som kunne være en motivator for elevenes arbeid med matematikk. Spørsmålet en her kan stille er om disse spillene blir brukt i undervisningen, eller om de blir hoppet galant over?

Dette spørsmålet får vi dessverre ikke svar på i denne studien, men det kan være en indikasjon på at læreren er en viktig brikke i undervisningen. Det kan i tillegg være vanskelig å måle hvordan oppgaver i grunnbøkene motiverer, uten å høre tilbakemelding fra elevene selv. For å muliggjøre dette kunne en gjort bruk av kontekstuell analyse.

5.5 Oppsummering

Gjennom dette kapitlet har vi dannet oss et bilde av hvordan læreverket Multi representerer brøk, med tanke på relasjonsforståelse, tilpasset opplæring og motivasjon.

Vi har sett at brøk representeres etter samme prinsippene som The Common Core Standards (Wu, 2013), ved at brøk deles inn i to faser.

Oppgavene i Multi fremmer i stor grad instrumentell forståelse og er av den grunn lite utforskende. Det er lite åpne oppgaver og det brukes mye eksempler og funksjonelle illustrasjoner i grunnbøkene. Vi har sett at bruk av åpne oppgaver, eksempler og funksjonelle illustrasjoner kan bidra til å fremme relasjonsforståelse for elevene. I tillegg kan dette være negativt dersom det blir presentert på en måte som fratar elevene muligheten til selvstendig tenking. Av den grunn kommer det frem at læreren og lærerens kompetanse er viktige brikker i undervisningen.

Selv om oppgavene i Multis grunnbøker kan virke lite utforskende, har vi sett at de med enkle grep fra læreren kan forvandles til å bli problemløsingsoppgaver og dermed fremme selvstendig tenking, som kan føre til relasjonsforståelse.

6 Avslutning

I dette kapitlet vil jeg forsøke å besvare min problemstilling og mitt forskningsspørsmål, tidligere presentert på side 4, under punkt 1.2: Hvordan er brøk representert i Multi, med tanke på forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon?

I slutten av kapitlet vil jeg komme med tanker om pedagogiske implikasjoner og veien videre.

6.1 Konklusjon

Gjennom analysen har vi sett at Multi i likhet med *The Common Core Standards* (Wu, 2013) introduserer brøk gjennom to faser. De starter på tredje trinn, hvor aspektet brøk som del av en hel og gjentakende bruk av arealmodell innføres. Deretter kommer den utviklende fasen på femte trinn, når brøk som tall blir introdusert og regning med brøker starter.

I likhet med Kerslake (1986) og Amato (2005) tror jeg at den manglende forståelsen jeg nevnte innledningsvis, skyldes at elevene ikke ser sammenhengen mellom brøk og andre tall. Av den grunn at brøk ikke introduseres som et blandet tall før på femte trinn.

Majoriteten av oppgavene i grunnbøkene fremmer instrumentell forståelse og en av grunnene til dette er overdreven bruk av forklaringer og eksempler, som fratar elevene muligheten til kreativ tenking. Dette kan også virke hemmende på elevenes motivasjon.
Vi har sett at Multi sitt syn på tilpasset opplæring er identisk med det vi finner på Utdanningsdirektoratet, selv om dette ikke utkrystalliseres i analysen av oppgavene. Analysen viser at det er variasjon i de fleste aspekter som er målt, men at variasjonen ofte opptrer i bolker. Det vil si at læreverket legger opp til at elevene gjør seg ferdige med en ting før de starter på noe nytt.

Vi har sett at det er flere faktorer som kan være med på å motivere elevene til arbeid med brøk. I bunn og grunn er læreren som bestemmer når og hvordan elevene motiveres og ikke læreboken (Sunday, 2014). Siden vi i Norge ikke har retningslinjer som sier hvordan en lærer skal eller bør undervise i for eksempel brøk, vil det bli markerte skiller i undervisningen. Selv om tidligere studier viser at flere lærebøker dekker kunnskapsmålene i kunnskapsløftet er ikke dette nok for å sikre kvaliteten på undervisningen. Da er det lærernes undervisningskunnskap som blir avgjørende for hvordan undervisningen tilpasses og hvilke tiltak som settes i verk for å motivere elevene til å lære.

6.2 Pedagogiske implikasjoner

Resultatene i denne studien krystalliserer at kvaliteten på brøkundervisningen kan utgjøre en forskjell med tanke på om lærere speiler seg i lærebøkene eller om de er bevisste på hvordan de ønsker å legge opp undervisningen.

Vi har gjennom analysen av læreverket Multi, sett at brøkoppgavene i grunnbøkene, i stor grad fremmer instrumentell forståelse. I undervisningssammenheng kan dette påvirke både elevenes motivasjon og muligheten til å fremme tilpasset opplæring.

Dersom elevene får mulighet til å arbeide med problemløsende matematikk kan dette bidra til å vekke nysgjerrigheten og øke interessen for matematikkfaget. Siden vi i Norge ikke har sentral godkjenning av lærebøker er det ekstra viktig at de som underviser er bevisst på hva som er gode oppgaver og hvordan undervisningen kan legges opp for å bevisstgjøre elevene på sammenhenger mellom ulike emner for å fremme relasjonsforståelse. Av den grunn er vi blitt kjent med at læreres undervisningskunnskap spiller en sentral rolle, både i undervisningen og ved valg av læreverk.

Ut fra denne studien har jeg lært viktigheten av å se på helheten i ett læreverk og ikke bare på fragmenterte komponenter, som for eksempel en grunnbok. Med dette mener jeg at dersom læreverket har en lærerveiledning er det også viktig å sette seg inn i denne, da det i denne analysen kom frem at flere oppgaver var ment for presentasjon felles i klassen og ikke som individuelle oppgaver.

Fra Pólya (1945) sitt synspunkt, ser jeg ulempen med matematikklærere som speiler seg i lærebøkene, da de gir slipp på sine muligheter til å drive med utforskende undervisning.

6.3 Veien videre

Det har vært både spennende og lærerikt å arbeide med denne studien. Valg av læreverk var bevisst, fordi det trolig er dette læreverket jeg kommer til å arbeide med som matematikklærer på denne kanten av landet.

Intensjonen med denne studien var hverken å fremme eller svekke læreverket, men ment for å være en ledetråd på veien for å finne ut hvorfor elever har problemer med brøk i norsk skole.

Det må også nevnes at resultatene i denne studien er basert på min tolkning. Ved hjelp av mitt måleinstrument er mulig å foreta samme analysen både av andre læreverk og emner.

Gjennom denne studien har jeg blitt bevisst på at det til syvende og siste er den undervisende læreren, som har det siste ordet. Dermed tror jeg tiden er inne for å fokusere mer på undervisningskvalitet i skolen og ikke henge oss opp i enkelte læreverk.

Det samme gjelder også for forskning på hvordan ulike lærere legger opp undervisningen, her vil resultatene kun indikere forskjeller i undervisningen. Et alternativt skritt i riktig retning kunne kanskje vært nasjonale retningslinjer for hvordan undervisningen bør legges opp, men jeg ser utfordringene dette vil medføre siden det ikke er dokumentert hva som er den beste måten å undervise på.

Kanskje vi bør lære av andre land som gjør det bra i matematikk, for eksempel Japan og Singapore (Kjærnsli, 2004; Watanabe, 2007). Det er mulig at det er en god grunn for at for eksempel Japan har gode resultater i forbindelse med brøk.

I likhet med Bjerke et al. (2013) støtter jeg anmodningen om at vi nok bør rette blikket mot de som underviser. Personlig mener jeg at det ikke nytter med instrumentell undervisning på lærerskolen, dersom fremtidens lærere skal undervise med fokus på utforskende undervisning og relasjonsforståelse. Dermed bør vi kanskje først rette blikket mot de som utdanner lærere.

7 Referanseliste

Alseth, B., Arnås, A.-C., Kirkegaard, H. & Røsseland, M. (2011). *Multi 3b: Grunnbok* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Undervisning.

Alseth, B., Kirkegaard, H., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2011). *Multi 4b: Grunnbok* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Undervisning.

Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2008). *Multi 7b: Grunnbok* (1. utg.). Oslo: Gyldendal Undervisning.

Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2013). *Multi 5b: Grunnbok* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Undervisning.

Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2014). *Multi 6b: Grunnbok* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Undervisning.

Amato, S. (2005). Developing students' understanding of the consept of fractions as numbers [elektronisk versjon]. *Research Gate*, 49-56.

Askew, M. (2000). What does it mean to learn? What is effective teaching? I J. Anghileri (red.), *Principles and practices in arithmetic teaching : Innovative approaches for the primary classroom*. Buckingham: Open University Press.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational number consepts. I R. Lesh & M. Landau (red.), *Acquisition of mathematics consepts and processes* (s. 91-125). New York: Academic Press.

Birkeland, P. A., Venheim, R. & Breiteig, T. (2011). *Matematikk for lærere 1* (5. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er et tall: Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I B. Moen, I. Pareliussen, A. B. Reinertsen & T. Solhaug (red.), *Fou i praksis 2012 conference proceedings* (s. 28-36). Trondheim: Akademika Forlag.

Bjørndal, A. & Hofoss, D. (2004). *Statistikk for helse- og sosialfagene* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives : Book 1 cognitive domain*. New York: Longman.

Bondø, A. (2010). Brøk: Er det noe problem, da? *Tangenten*(1), 35-38.

Brekke, G. (2002). Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Brändström, A. (2005). Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty. Lulelå: Lulelå Tekniska Universitet.

Charalambous, C. Y. (2010). Mathematical knowledge for teaching and task unfolding: An exploratory study. *Chicago Journals, 110*(3), 247-278.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 117-151.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt Forlag.

Commoncorestate. (2017). Preparing amerika's students for success Lastet ned 2017.03.16, fra http://www.corestandards.org/

Engelsen, B. U. (2012). *Kan læring planlegges?: Arbeid med læreplaner - hva, hvordan, hvorfor* (6. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *The International Journal on Mathematics Education, 45*(5), 633-646.

Fauskanger, J. & Mosvold, R. (2013). Det ligger jo i bunn for alt: Om læreres oppfatning av undervisningskunnskap knyttet til posisjonssystemet (s. 86-93). Trondheim: Akademika.

Frejd, P. (2013). An analysis of mathematical modelling in swedish textbooks in upper secondary school. *Nordisk Matematikkdidaktikk, 18*(3), 59-95.
Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). Ett skritt fram og ett tilbake : Timss advanced 2015 : Matematikk og fysikk i videregående skole. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.
Hellestø, H. (2014). *Innlevering 3: Feltarbeid*.
Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 65-97). Old Tappan, NY: Macmillan.
Holden, I. M. (2003). Matematikk blir gøy: Gjennom et viktig samspill mellom ytre og indre motivasjon. I B. Grevholm (red.), *Matematikk for skolen* (s. 27-50). Bergen: Fagbokforlaget.
Howson, G. (2013). The development of mathematics textbooks: Historical reflections from a personal perspective. *ZDM Mathematics Education, 45*(5), 647-658. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s11858-013-0511-9
Hurrel, D. (2013). Effectiveness of teacher professional learning: Enhancing the teaching of fractions in primary schools Lastet ned 2016.12.23., fra http://ro.ecu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1597&context=theses
Imsen, G. (2005). *Elevens verden : Innføring i pedagogisk psykologi* (4. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.
Jenssen, E. S. & Lillejord, S. (2009). Tilpasset opplæring: Politisk dragkamp om pedagogisk praksis *Acta Didactica Norge, 3*(1).
Johansson, M. (2003). Textbooks in mathematics education: A study of textbooks as the potentially implemented curriculum. Lulelå: Lulelå Tekniska Universitet.
Jopperud, R. (2015). To læreverks presentasjon av algebra på 8. Trinn: En analyse og sammenligning. Kristiansand: Universitetet i Agder
Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors. *NFER-Nelson*.
Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. I R. Lesh (red.), *Number and measurement. Papers from a research workshop* (s. 101-144): ERIC.
Kieren, T. E. (1980). The rational number constructs: Its elements and mechanisms. I T. E. Kieren (red.), *Recent research on number learning* (s. 125-150). Columbus: ERIC/SMEAC.
Kirkevold, V. (2012). Den proksimale utviklingssone Lastet ned 2017.03.05., fra https://vegardkirkevold.wordpress.com/nyttige-teorier/den-proksimale-utviklingssone/
Kjærnsli, M. (2004). *Rett spor eller ville veier?: Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i pisa 2003*. Oslo: Universitetsforlaget.
Kjærnsli, M. & Jensen, F. (2016). *Stø kurs: Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i pisa 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.
Kjærnsli, M., Nortvedt, G. A. & Jensen, F. (2012). Norske elevers kompetanse i problemløsing i pisa 2012 Lastet ned 2016.12.04, fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/pisa/publikasjoner/publikasjoner/pisa2012_problemlosing.pdf
Kleve, B. (2014). Kunnskapskvartetten i matematikk. I P. S. Andersen, I. C. Borge, T. S. Gustavsen & K. R. C. Hinna (red.), *Qed 5-10: Matematikk for grunnskolelærerutdanningen bind 2* (s. 589-618). Kristiansand: Høyskoleforlaget.
Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.
Ludvigsen, S. (2015). Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser Lastet, 2016.11.23., fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/
Merzbach, U. C., Boyer, C. B. & Asimov, I. (2011). *A history of mathematics* (3. utg.). New Jersey: Wiley.
Nesh. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi *Retningslinjer - NESH* (s. 40). Lastet ned fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf

Nohda, N. (1991). Paradigm of the "open-approach" method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. *International Reviews on Mathematical Education 23*(2), 32-37.

Nzmaths. (2008). *Teaching fractions, decimals, and percentages*. Wellington: The Ministry of Education.

Ostad, S. A. (2001). Matematikkvansker: Et resultat av forsinket eller kvalitativ forskjellig utvikling? *Spesialpedagogikk, 66*(3), 9-14.

Ostad, S. A. (2008). Strategiopplæring i matematikk. I S. A. Ostad (red.), *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring: Med fokus på elever med matematikkvansker* (s. 86-101). Trondheim: Læreboka Forlag.

Pehkonen, E. (2007). Problemsolving in mathematics education in finland Lastet ned 2017.04.04., fra https://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/PEHKON.pdf

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in english, french and german classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33*(5), 158-175. doi: 10.1007/BF02656616

Petit, M. M., Laird, R. E., Marsden, E. L. & Ebby, C. B. (2015). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom* (2. utg.). Oxford: Routledge.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *An International Journal, 26*(2), 165-190. doi: 10.1007/BF01273662

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2. utg.). New Jersey: Princeton University Press.

Resvoll, E. (2014). Lærebøker i matematikk og læreres bruk av dem: En analyse av karakteristiske trekk ved de mest brukte lærebøkene på ungdomstrinnet og hvordan de blir brukt av tre lærere til palnlegging og gjennomføring av undervisning. Trondheim: Høgskolen i Sør-Trøndelag.

Reys, B. J., Reys, R. E. & Chávez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership, 61(5)*, 61-66.

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2004). The knowledge quartet: Considering chloe. *European Research in Mathematics Education IV*.

Saxe, G. B. (1989). Transfer of learning across cultural practice. *Cognition and instruction, 6*(4), 325-330.

Schmidt, W. H., Mcknight, C. C. & Raizen, S. A. (1997). *A splintered vision: An investigation of u.S. Science and mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H. & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences, 17*(1), 13-19. doi: 10.1016/j.tics.2012.11.004

Silverman, D. (2011). *Interprenting qualitative data: A guide to the principles of qualitative research* (3. utg.). London: Sage.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*(77), 20-26.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Solvang, R. (1986). *Matematikk-didaktikk* (1. utg.). Bekkestua: NKI Forlaget.

Stenstad, F. (2000, 02.07.2000). Fritt fram: For lærebøker uten statlig godkjenning gir mange nye muligheter for lærerne i undervisningen. Lastet ned 2017.01.10., fra http://www.dagbladet.no/kultur/2000/07/02/209911.html

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sunday, A. S. (2014). Mathematics textbooks analysis: A study on recommended mathematics textbooks in school use in southwestern states of nigeria. *European Scientific Journal, 1*.

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse, en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.
Utdanningsdirektoratet. (2008). Den første innføring av brøkbegrepet Lastet ned 2016.08.30, fra https://www.udir.no/PageFiles/Veiledninger/Matematikk/Undervisningsopplegg/2/broek_uo.pdf
Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål Lastet ned 22.04.2016, fra www.udir.no
Utdanningsdirektoratet. (2015). Prinsipper for opplæringen Lastet ned 2017.01.08., fra http://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/prinsipper-for-opplaringen2/
Van De Walle, J. A., Karp, K., Bay-Williams, J. M. & Wray, J. (2007). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (6. utg.). Boston: Allyn and Bacon.
Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society : The development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.
Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. Cambridge, Mass: MIT Press.
Watanabe, T. (2007). Initial treatment of fractions in japanese textbooks. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 29*(2), 41-60.
Wu, H. H. (2013). Teaching fractions according to the common core standards Lastet ned 2016.12.23., fra https://math.berkeley.edu/~wu/CCSS-Fractions_1.pdf
Yin, R. K. (2007). *Fallstudier : Design och genomförande*. Malmö: Liber.

8 Vedlegg

Vedlegg 1: Henvendelse til Gyldendal

Fra: digital@gyldendal.no [mailto:digital@gyldendal.no]
Sendt: 9. november 2016 13:00
Til: support@gyldendal.no
Emne: Kontakt oss | Multi | Alle henvendelser

Navn: Heidi Hellestø
E-post: heidi.hellesto@lyse.net
Skole/firma: Universitetet i Stavanger
Telefonnummer: 91698989

Hei, Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger og ønsker i min oppgave å skrive om brøk, med Multi 3-7 som utgangspunkt. I den forbindelse tar jeg kontakt med dere, fordi jeg ønsker tilgang til grunnbøker, oppgavebøker og lærerveiledninger (som omhandler brøk på 3., 4., 5., 6. og 7. trinn) I tillegg skulle jeg gjerne hatt bruker på Multi sine nettsider. Er det mulig å få tilsendt bøker på lån eller eventuelt kjøpe disse til en gunstig pris? Håper på snarlig svar, med vennlig hilsen Heidi Hellestø

Emne:	**SV: Kontakt oss | Multi | Alle henvendelser**
Fra:	GNF_Undervisning <GNF_Undervisning@gyldendal.no>
Dato:	Torsdag 10. November 2016 12:44 CET
Til:	heidi.hellesto@lyse.net <heidi.hellesto@lyse.net>
Svar-til:	GNF_Undervisning <GNF_Undervisning@gyldendal.no>

Hei
Min kollega har nå gitt deg tilgang til Multi smartbøker (digitale bøker) på 5. - 7. trinn på Multi, samt lærerrom og Smart Tavle på 1-7. trinn via Feidebrukeren du har ved universitetet. Vet ikke om du trenger noe ut over dette? Vi har dessverre ikke mulighet til å sende bøker kostnadsfritt. Du ønsker kanskje å kjøpe bøkene for 1. – 4. trinn? Her er det ikke laget digitale utgaver. Du kan få 25 % rabatt på dette kjøpet.

Her kan du lese mer om digitale utgaver, smartbok: www.smartbok.no (Bøkene har god innlest tekst, man kan lage notater, markere avsnitt med annen farge etc.)

Mona Hallre
Gyldendal Kundesenter

Vedlegg 2: Analyseskjema

Analyseskjema

Horisontal analyse
1. Læreverkets struktur
Forfattere Hvem har laget læreverket?
Innhold Hva inneholder læreverket?
Bruk Sier læreverket noe om hvordan det forventes at det skal brukes?
2. Lærebokens struktur (Grunnbok)
Oppbygning Hvordan er boken bygd opp? Hvordan er kapitlene bygd opp?
Vertikal analyse
1. Matematisk tema – Brøk
Brøkens aspekter (I)
1. Del av hel
2. Forhold
3. Operator
4. Kvotient
5. Tallstørrelse
2. Tilpasset opplæring
Representasjonsform (II)
1. Konkret
2. Illustrasjon
3. Symbol
4. Tekst

Strategi (III)
1. Arealmodell
2. Diskretmodell
3. Lineærmodell
4. Ingen modell
3. Forståelse
Kognitive krav (IV)
1. Memorering
2. Prosedyre uten sammenheng
3. Prosedyre med sammenheng
4. Problemløsing
Kunnskapsnivå (V)
1. Kunne
2. Anvende
3. Resonnere
4. Motivasjon
Motivasjon (VI)
Oppgave
1. Åpen oppgave
2. Lukket oppgave
Illustrasjon
3. Ingen illustrasjon
4. Dekorativ illustrasjon
5. Funksjonell illustrasjon

Vedlegg 3: Analyse av oppgaver, antall

3B	I	II	III	IV	V	VI
1	20	7	18	0	18	12
2	0	13	2	18	2	8
3	0	0	0	2	0	0
4	0	0	0	0		0
5	0					20

4B	I	II	III	IV	V	VI
1	25	10	19	3	34	18
2	13	15	6	36	10	28
3	3	11	3	7	2	13
4	0	10	18	0		0
5	5					33

5B	I	II	III	IV	V	VI
1	13	5	26	0	36	30
2	20	36	4	55	36	45
3	3	20	14	20	3	27
4	0	14	31	0		3
5	39					45

6B	I	II	III	IV	V	VI
1	6	7	24	1	34	39
2	23	22	1	76	69	68
3	39	38	4	30	4	61
4	1	40	78	0		7
5	38					39

7B	I	II	III	IV	V	VI
1	7	12	30	7	29	25
2	12	22	5	82	122	127
3	109	33	2	63	1	96
4	6	85	115	0		8
5	18					48

Alle	I	II	III	IV	V	VI
1	71	41	117	11	151	124
2	68	108	18	267	239	276
3	154	102	23	122	10	197
4	7	149	242	0		18
5	100					185

Vedlegg 4: Analyse av oppgaver, prosent

3B	I	II	III	IV	V	VI
1	100	35	90	0	90	60
2	0	65	10	90	10	40
3	0	0	0	10	0	0
4	0	0	0	0		0
5	0					100

4B	I	II	III	IV	V	VI
1	54	22	41	7	74	39
2	28	33	13	78	22	61
3	7	24	7	15	4	28
4	0	22	39	0		0
5	11					72

5B	I	II	III	IV	V	VI
1	17	7	35	0	48	40
2	27	48	5	73	48	60
3	4	27	19	27	4	36
4	0	19	41	0		4
5	52					60

6B	I	II	III	IV	V	VI
1	6	7	22	1	32	36
2	21	21	1	71	64	64
3	36	36	4	28	4	57
4	1	37	73	0		7
5	36					36

7B	I	II	III	IV	V	VI
1	5	8	20	5	19	16
2	8	14	3	54	80	84
3	72	22	1	41	1	63
4	4	56	76	0		5
5	12					32

Alle	I	II	III	IV	V	VI
1	17,75	10,25	29,25	2,75	37,75	31,00
2	17,00	27,00	4,50	66,75	59,75	69,00
3	38,50	25,50	5,75	30,50	2,50	49,25
4	1,75	37,25	60,50	0,00		4,50
5	25,00					46,25

Vedlegg 5: Resultat av meldeplikt

NSD

Resultat av meldepliktttest: Ikke meldepliktig

Du har oppgitt at hverken direkte eller indirekte identifiserende personopplysninger skal registreres i forbindelse med prosjektet.

Når det ikke registreres personopplysninger, omfattes ikke prosjektet av meldeplikt, og du trenger ikke sende inn meldeskjema til oss.

Vi gjør oppmerksom på at dette er en veiledning basert på hvilke svar du selv har gitt i meldeplikttesten og ikke en formell vurdering.

Til info: *For at prosjektet ikke skal være meldepliktig, forutsetter vi at alle opplysninger som registreres elektronisk i forbindelse med prosjektet er anonyme.*

Med anonyme opplysninger forstås opplysninger som ikke på noe vis kan identifisere enkeltpersoner i et datamateriale, hverken:

- *direkte via personentydige kjennetegn (som navn, personnummer, epostadresse el.)*
- *indirekte via kombinasjon av bakgrunnsvariabler (som bosted/institusjon, kjønn, alder osv.)*
- *via kode og koblingsnøkkel som viser til personopplysninger (f.eks. en navneliste)*
- *eller via gjenkjennelige ansikter e.l. på bilde eller videoopptak.*

Vi forutsetter videre at navn/samtykkeerklæringer ikke knyttes til sensitive opplysninger.

Med vennlig hilsen,

NSD Personvern

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no