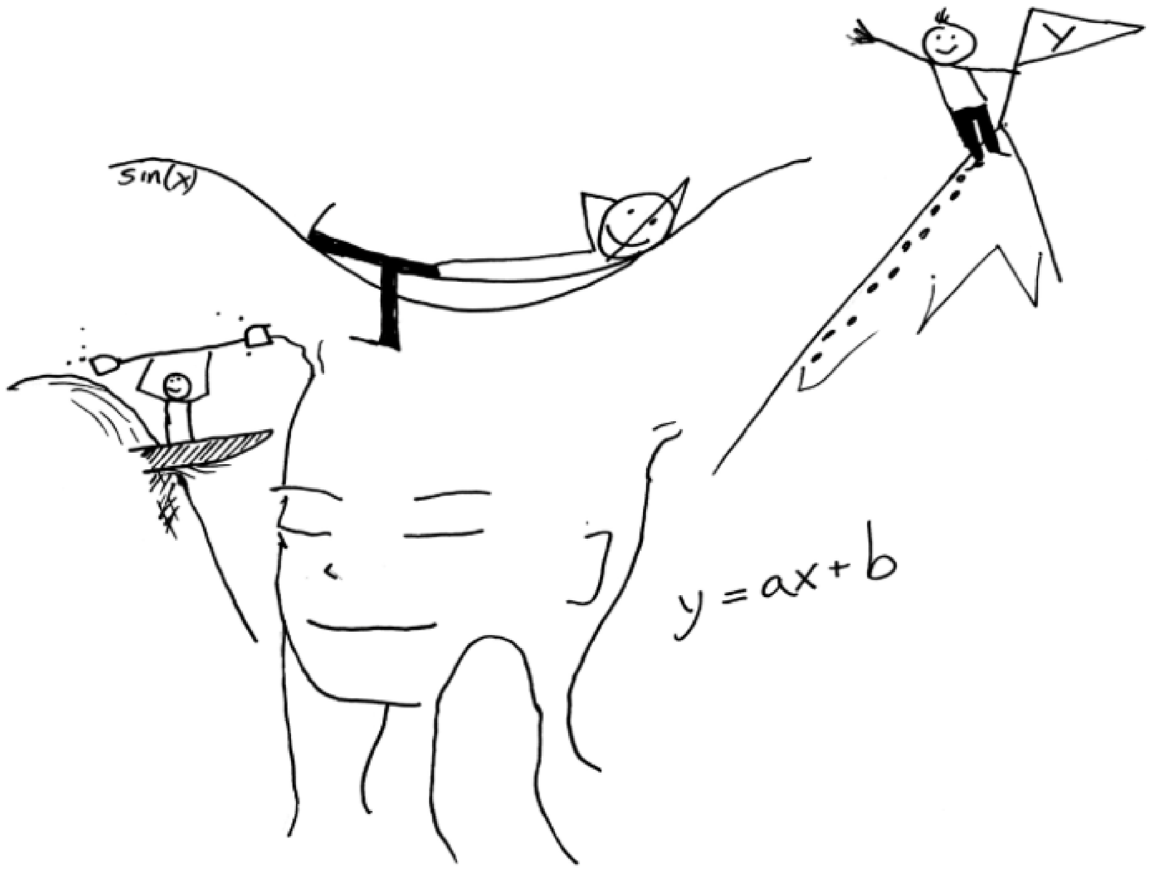
Elevers utvikling av funksjonsdiskurs ved deltakelse i faget Matematikk 1P

og noen mulige påvirkningsfaktorer

Engelsk tittel: The development of students' discourse on functions in the subject 1P and some possible factors of influence.



Masteroppgave i utdanningsvitenskap, matematikkdidaktikk

Høsten 2017

Universitetet i Stavanger

Norunn Mari Mølstre Vikshåland

Universitetet i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master i utdanningsvitenskap, matematikkdidaktikk	Høstsemesteret, 2017 Åpen
Forfatter: Norunn Mari Mølstre Vikshåland	Norunn Vikshåland (signatur forfatter)

Veileder: Reidar Mosvold

Tittel på masteroppgaven: Elevers utvikling av funksjonsdiskurs ved deltakelse i faget Matematikk 1P og noen mulige påvirkningsfaktorer.

Engelsk tittel: The development of students' discourse on functions in the subject 1P and some possible factors of influence.

Emneord: funksjonsdiskurs, rituell og utforskende rutinebruk, diskursendring, realisasjoner, Matematikk 1P, lærers diskurs, elevenes diskurs om eget forhold til matematikk	Antall ord: 30 952 + vedlegg/annet: 3 605 Stavanger, 5.12.2017

Forord

Å gjennomføre en master på deltid samtidig med lærerjobb i den videregående skolen og småbarnsfasen hjemme, har vært berikende og utfordrende. Jeg nærmer meg nå 7,5 års utdanning, 225 studiepoeng i matematikk og matematikkdidaktikk, og kjenner jeg meg rett blir det flere studier også i framtiden. Jeg har flere å takke når jeg nå nærmer meg slutten av denne studieperioden.

Først vil jeg takke Vardafjell videregående skole, Rogaland fylkeskommune og Utdanningsdirektoratet og ordningen *Kompetanse for kvalitet*. Jeg vil også takke kollegaene mine. Diskusjonene er ikke slutt selv om masteroppgaven er levert. Vi lærer så lenge vi har elever og reflekterer over det vi gjør. Jeg vil også takke læreren som åpnet klasserommet og lot meg observere undervisningen, og elevinformantene. Takk for at dere lot meg observere undervisningen og at noen av dere stilte opp til intervju.

Anna Sfard fortjener også en plass i dette forordet. Rammeverket ditt har gjort meg mer reflektert over læring og undervisning, samtidig er jeg nå så hjernevasket at jeg *ser* deg overalt; når jeg slapper av med et blad eller avisen, observerer fotballtreneren eller ser barne-tv sammen med barna. Du har krevd en del, og jeg har blitt oppslukt. Det skal likevel bli godt å slippe å gå til sengs med deg hver kveld.

Jeg vil takke Karina for å ha lest korrektur. Andreas har lest korrektur på flere utkast, og holdt ut kveld etter kveld med samtaler som har dreid over i kommognitiv teori. Du ville ikke lese Sfards bok, men har måtte forholde deg til henne i mang en diskusjon. Vi er et godt team. Du trenger ikke slutte å lage middag selv om jeg nå er ferdig med dette masterarbeidet. Isak, takk for at du forklarer meg hvordan du tenker når du arbeider med matematikkoppgaver. Dine tanker har hjulpet meg med å gjøre Sfards rammeverk jordnært. Å følge en 2-3 årings språkutvikling mens man har et kommognitivt blikk på verden, setter rammeverket i praktisk perspektiv. Kjære Ellinor, framover skal vi konsentrere oss mer om Anna og Elsa enn om Anna Sfard.

Sist men ikke minst ønsker jeg å rette en stor takk til veilederen min Reidar Mosvold. Du er grei å prate med, har holdt meg fokusert med jevne møter på Skype, og motivert meg til siste slutt. Jeg har prøvd å holde meg til tipset ditt om å være ”smal og fokusert, men ikke snever”, og satser på at jeg nå er i mål.

Norunn Mari Mølstre Vikshåland

November 2017

Innholdsfortegnelse

Sammendrag

Denne masteroppgaven har med Sfards kommognitive rammeverk som analyseverktøy undersøkt hvordan elevers diskurs om funksjoner utvikles ved deltakelse i faget Matematikk 1P i videregående skole. Studien ser også etter hvilke faktorer som ser ut til å påvirke elevenes utvikling av funksjonsdiskurs ut fra det gitte datamaterialet. Studien er et kvalitativt case-studie der seks elever har blitt intervjuet før og etter funksjonsundervisning i faget Matematikk 1P. I tillegg er klassens funksjonsundervisning en del av datamaterialet. Datamaterialet er dokumentert med lyd- og videoopptak. Elevdiskursen ble analysert og kodet i tråd med Sfards rutinebegrep, som skiller mellom rituell og utforskende rutinebruk. Funnene viser at elevenes rutinebruk etter ungdomsskolen både inneholdt rituell og utforskende deltakelse, og rutinebruken ble mer rituell etter deltakelse i faget Matematikk 1P. Endringer i elevenes realisasjoner av en funksjon kom til syne, der blant annet realisasjonene tabell og koordinater er svekket. Lærers diskurs inneholdt både rituell og utforskende rutinebruk samt et mangfold av fleksible realisasjoner og kan ikke knyttes direkte til elevenes diskursutvikling. Elevenes diskurs om eget forhold til matematikkfaget kan se ut til å være en faktor som påvirker elevenes utvikling av funksjonsdiskurs.

1. Innledning

Vi lever i en verden i utvikling, og egenskaper som trengs i framtidens arbeidsmarked er i endring. Hvordan skal elevene møte framtidens krav, og hvordan skal læreren og skolen forberede elevene på livet? World Economic Forum (2016) har listet opp flere egenskaper som de mener trengs i framtidens arbeidsmarked, og på denne lista står kompleks problemløsing, kritisk tenking og kreativitet som de tre viktigste egenskapene for 2020. Matematikkfaget kan gi elevene mulighet til å utvikle alle disse tre egenskapene, og i denne masteroppgaven fokuseres det på det kreative ved å se på elevenes rutinebruk i funksjonsoppgaveløsning, en mønsteraktivitet der det sees på *hvordan* og *hvorfor* elevene gjør som de gjør. Kreativitet og rutiner er ord som i mange ører ikke passer sammen. Rutiner kan oppfattes som noe fast og rigid, og kreativitet som fargerikt, lekent og spennende. Å være kreativ defineres av Sfard (2008, s. 219) som å være i stand til å anvende rutiner i ikke-rutine handlinger. Ved å utvikle fleksible og stabile rutiner kan man bli i stand til å bruke rutinene i utradisjonelle sammenhenger og oppfylle Sfards definisjon på kreativitet.

Etter å ha jobbet som matematikklærer i grunnskolen i åtte år og i videregående skole i seks år, er jeg blitt noen erfaringer rikere. Når elevene starter på videregående skole, bruker jeg tid på å bli kjent med dem gjennom oppstartssamtaler, skriftlig kartlegging og ved at elevene skriver sin egen matematikkhistorie. Når elever forteller hvordan de har opplevd matematikkfaget på ungdomsskolen, erfarer jeg at flere er opphengt i å løse oppgaven slik ungdomsskolelæreren ville gjort det. Mange er lite fleksible og kreative i metodene. Holdningen til matematikkfaget er at det er viktig å føre på riktig måte, slik som læreren eller som i eksempelet i læreboka, og å finne det riktige svaret så raskt som mulig. Hvis dette er elevens eneste tilnærming til oppgaveløsning i matematikk, kan eleven til en viss grad reprodusere det en lærer har vist før, eller oppgaven står uløst. Dette medfører at det må brukes tid på å overbevise elever om at deres refleksjoner og skrivemåte også er matematikk, som igjen kan utvikles mot mer abstrakt matematikk. At et problem kan løses på flere måter og at det er en sammenheng mellom disse metodene, er ikke selvsagt for eleven. Når eleven ser på matematikk som et fag der de skal huske alle reglene uten å reflektere over hvorfor og når dette kan brukes, blir det mange regler å holde styr på, noe som gradvis vil vokse fram til det kollapser (Heyd-Metzuyanim, 2015).

I første klasse på videregående skole velger elevene matematikkretning. Noen velger den teoretiske retningen (Matematikk 1T) og de andre velger den praktiske retningen (Matematikk 1P). Som lærer ønsker og håper jeg at elevene blir mer utforskende og kreative i løsningsmetodene etter hvert som månedene går på videregående skole, at de klarer å løsrive seg fra at det finnes kun én løsning og at den skal være lik lærers forslag, og utvikler selvtillit på egne refleksjoner og på matematikken sammen med de andre i matematikkgruppa. Å lære matematikk er arbeidskrevende, og det krever utholdenhet å lære noe nytt, og når problemene blir uvante vil de ofte imitere andre. På denne måten kan de komme lengre enn på egen hånd. Gir elevene opp og melder seg ut, kommer de ikke videre.

Et sentralt emne som skiller seg ut som abstrakt og vanskelig for elevene som starter på videregående skole, er funksjoner. Sfard (2008) påpeker at dette er et tema som elever i mange land på alle nivåer finner utfordrende. Historisk er funksjonsbegrepet utviklet gjennom flere hundre år (Katz, 1993; Sfard, 1992; Nachlieli & Tabach, 2012), noe som indikerer at begrepet krever modningstid for elevene. Utfordringene med funksjoner er godt dokumentert i tidligere forskning (Sfard, 1992; Sierpinska, 1992). Å se sammenhengen mellom ulike representasjoner av funksjoner, mellom verbalt språk, grafer, diagrammer og algebraiske uttrykk, er utfordrende. Dette påpekes også i Utdanningsdirektoratets (2012) ressurshefte for ungdomstrinnet. Allerede etter fjerde trinn i småskolen, skal elevene ha fått erfaringer med koordinatsystemet. De skal "beskrive punkt og bruke koordinater til å beregne avstander parallelt med aksene, med og uten digitale hjelpemidler" (Kunnskapsdepartementet, 2013, s. 9). Sammenlignes kompetansemålene etter 10. trinn med det praktiske vg1-kurset 1P (Kunnskapsdepartementet, 2013), overlappes flere av kompetansemålene selv om de ikke har identisk ordlyd. Ut fra egne erfaringer opplever jeg at elever blir defensive når vi skal i gang med temaet funksjoner, og det må settes av god tid til det grunnleggende og ufarliggjøre begreper, symboler og notasjon. Ved å visualisere med digitale hjelpemidler som GeoGebra, hjelpes elevene til å se funksjonene for seg som graf. I P-faget utfordres elevene i stor grad til å bruke funksjoner i praktiske oppgaver, å tolke og sette ord på sammenhenger, og å forutsi framtidige trender.

I evalueringen av matematikkfaget i Reform 94 (Alseth, Breiteig, & Brekke, 2003) ble det avslørt at elever gjorde det dårligere enn før i den instrumentelle delen, samtidig som en ikke så noen forbedring i begrepsforståelsen. Å vektlegge forståelse og dybdelæring i stedet for regler og formler ble påpekt. Dybdelæring er i nyere tid blitt løftet fram som et sentralt begrep i tilknytning til Ludvigsen-utvalgets forslag mot en ny sentralgitt læreplan, der den overordnede delen for den nye læreplanen er allerede fastsatt (Kunnskapsdepartementet, 2017) og beskriver verdiene skolen skal stå for i framtiden. I dette styringsdokumentet defineres dybdelæring i fag som "å anvende kunnskaper og ferdigheter på ulike måter, slik at elevene over tid kan mestre ulike typer faglige utfordringer individuelt og i samspill med andre (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 11). Med dette skal elevene utvikle forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor faget, og lære å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger. Matematikkelevene på videregående trinn jobber per i dag etter en revidert versjon av kunnskapsløftet (Kunnskapsdepartementet, 2013).

Det er så vidt meg bekjent lite matematikkdidaktisk forskning knyttet til overgangen mellom ungdomsskole og videregående skole. En masteroppgave (Sollid, 2009) undersøker denne overgangen ut fra et lærerperspektiv. I min studie er elevenes egne stemmer med på å nyansere rutinebruken deres og hvordan de kommuniserer om funksjoner etter endt grunnskole. Den ser også på hvordan rutinebruken og funksjonsdiskursen utvikles etter hvert som de deltar i faget 1P. Studien representerer et dypdykk i 16-åringers rutinebruk og diskurs knyttet til funksjoner i overgangen mellom ungdomsskole og videregående skole.

Forskningsspørsmålet i masteroppgaven er todelt:

1. Hvordan utvikles elevers diskurs om funksjoner ved deltakelse i 1P faget i videregående skole?
2. Hvilke faktorer ser ut til å påvirke elevenes utvikling av funksjonsdiskurs?

En diskurs er sammensatt, og i denne oppgaven fokuseres det i hovedsak på rutinebruken i elevenes diskurs. Rutinebegrepet er hentet fra Sfards (2008) kommognitive rammeverk som benyttes som analyseverktøy. Det finnes mange faktorer som kan spille inn på elevenes diskursutvikling, Ut ifra metodiske valg og begrensninger i datamaterialet i denne studien, sees det på to mulige årsaker; lærers diskurs og elevenes diskurs om eget forhold til matematikkfaget. For å svare på forskningsspørsmålene innhentes resultater ved å observere, beskrive og analysere elevers diskurs om funksjoner før og etter funksjonsundervisning. Det innhentes også data fra observasjoner fra klasseromsundervisningen om funksjoner. Til sammen er dette grunnlaget som brukes til å knytte sammen empiri og teori. Med dette håper jeg å utvide egen og andres erfaring, å reflektere i dybden og komme videre i forbedringen av framtidig undervisning.

Før de metodiske perspektivene behandles, sees det på tidligere forskning om funksjoner, muligheter for å lære og faktorer som kan være med å påvirke ulik rutinebruk. I teorikapitlet gjennomgås Sfards (2008) kommognitive rammeverk generelt, og om rutinebruk spesielt. Funnene analyseres og drøftes i lys av rammeverket og tidligere forskning.

Til slutt sees det på veien videre, og mulige implikasjoner resultatene i denne oppgaven kan medføre. Funnene i denne studien kommer fra én matematikkgruppe, og målet er ikke å generalisere til en større populasjon. Analysene og funnene kan likevel være interessante utover den gitte konteksten. Ved å bruke det kommognitive rammeverket ønsker jeg å sette fokus på hva læring er, og hvordan rammeverket kan brukes i en slik analyse.

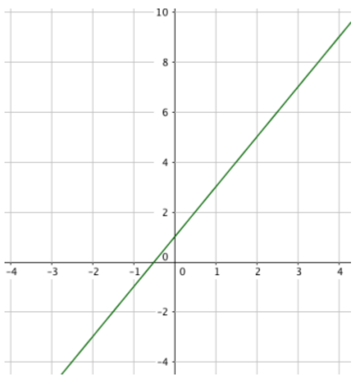
2. Tidligere forskning

2.1 Funksjoner

Definisjonen av en funksjon har gjennom flere hundre år blitt modifisert, og defineres i dag som en relasjon mellom to delmengder, der hver x-verdi i den ene delmengden gir en bestemt funksjonsverdi i den andre delmengden (Kleiner, 1989). Som matematisk objekt kan en funksjon beskrives sammen med representasjonene til objektet. Funksjoner introduseres i grunnskolen (Utdanningsdirektoratet, 2013), og begrepet kan uttrykkes gjennom ulike representasjoner: som algebraisk uttrykk $2x + 1$, som graf, som tabell med x-verdier og tilhørende funksjonsverdier eller som punkter notert som koordinater eller en tekst. Begrepet utvides med mer abstrakte representasjonsformer som funksjonsuttrykk etter hvert. Elevene kan støte på ulike utfordringer både når de møter representasjonsformer som algebra og grafer, og det er vist at variert tilnærming kan støtte opp om elevenes utvikling (Schwarts & Hershkowitz, 1999). Det er viktig å være fleksibel i overgangene mellom de ulike representasjonene av funksjonen (Even, 1990; Janvier, 1978).

Funksjon

Graf:



Funksjonsuttrykk:

$f(x) = 2x + 1$

Kontekst

Koordinater:

$(-2\,,-3)$

$(0\,,1)$

$(2\,,5)$

$(4\,,9)$

Tabell:

x	$f(x)$
-2	-3
0	1
2	5
4	9

Figur 1: Funksjonsobjektet med tilhørende representasjoner (eller realisasjoner som de blir kalt etter hvert i denne oppgaven).

Funksjoner står sentralt i matematikkfagene i den videregående skolen, og utfordringer med emnet er godt dokumentert i tidligere forskning (Janvier, 1978; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992). Elevene kan utfordres ved å se på grafen som et bilde av situasjonen, eller ved å tolke grafen som et kart, og de kan ha problemer med å se sammenhengen mellom de uavhengige og avhengige variable over et intervall. Mange elever tror at en funksjon er definert av kun det algebraiske uttrykket (Even, 1990). Sfard (1992) og Sierpinska (1994) påpeker at funksjoner bør introduseres som en relasjon heller enn noe statisk og rigid. Den tradisjonelle, lærebokstyrte undervisningen i norsk videregående skole har ofte en tilnærming til funksjoner med formler og definisjoner, som ifølge Sfard og Sierpinska har begrensninger. En praktisk tilnærming kan være med på å vekke elevens oppmerksomhet og motivasjon for emnet, der elevene ser at matematikken kan brukes til noe.

Elevene bør tilnærme seg stoffet på ulike måter, der alle representasjonsformene blir vektlagt (Janvier, 1978). Tabellen under viser en fornorsket versjon av hvordan elevene kan gå fra en representasjon til en annen, der noen av overgangene er mer krevende enn andre.

Til Fra	Situasjon	Tabell	Graf	Uttrykk
Situasjon		Måling/beregne	Skisse	Modellering
Tabell	Avlesning/tolking av tabell		Plotting	Algebraisk tilpassing
Graf	Tolkning av graf	Avlesning		Kurvetilpassing
Uttrykk	Gjenkjenning, tolke variable	Beregning	Plotte, lage skisse	

Figur 2: En fornorsket oversikt over de ulike representasjonsformene til Janvier (Utdanningsdirektoratet, 2012, s. 5)

Å gå fra situasjon til tabell krever at elevene gjør målinger, beregner og systematiserer dataene. Det å tegne graf eller utlede en formel fra en situasjon kan oppleves mer krevende og abstrakt. Å gå fra tabell til situasjon krever at elevene kan tolke det de kan lese ut fra tabellen. Før elevene tegner graf, kan de lage tabell for å regne ut punktene de skal plotte i koordinatsystemet. Å lage formel fra tabell krever at elevene finner mønster og bruker algebra. Når elevene skal tolke grafen som situasjon må de finne sammenhengen mellom enhetene på aksene, og de får et helhetlig inntrykk av situasjonen. Når elevene må lage tabell ut fra en graf, øves de i å lese av punkt på grafen, og å oversette informasjonen til tall som kan struktureres i tabell. Å gå direkte fra graf til formel, krever at elevene kjenner igjen formen og egenskaper til grafen, finner mønster og formulerer dette generelt. Skal det identifiseres en situasjon fra en formel, utfordrer dette elevene til å kjenne igjen formelen fra en praktisk situasjon. Når elevene regner ut funksjonsverdier fra formelen, kan dette visualiseres i en tabell. Skal elevene tegne graf fra formel, må de gjenkjenne egenskaper med formelen som er typiske for grafen, som skjæringspunkter og stigningstall. Elevene trenger erfaringer med alle overgangene for å se sammenhenger mellom verbalt språk, grafer og diagrammer og algebraiske uttrykk (Utdanningsdirektoratet, 2012).

Uansett undervisningsmetode viser det seg at elevene utfordres ved å omforme fra en representasjonsform til en annen, og i stedet for å se de store linjene i funksjonsdiskursen, blir de hengende igjen i flere deldiskurser (Nachlieli & Tabach, 2012). Flere studier viser at elevers assosiasjoner om funksjonsbegrepet ikke samsvarer med kompetansemålene og lærers forhåpninger, til tross for lærers iherdige innsats (Nachlieli & Tabach, 2012). Ofte er elevenes idé om en funksjon én representasjon av begrepet, og mange elever bruker funksjon synonymt med funksjonsuttrykk (Even, 1990), men dette kan variere med konteksten. Rønningstad (2009) viser at elever i den norske videregående skolen har utfordringer med omgjøring mellom ulike representasjonsformer. De kan ha en oppfatning av at grafen alltid går gjennom origo eller at grafen starter på y-aksen. De blander begrep som konstantledd og stigningstall, og hva som gir skjæring med x-/y-aksen, og har en instrumentell tilnærming. Å se funksjonen som både prosess og objekt er utfordrende, og elever assosierer ofte funksjonen som en prosess heller enn et permanent objekt (Sfard, 1992). Güçler (2016) har brukt Sfards (2008) kommognitive rammeverk der hun har sett på funksjonsundervisning på universitetsnivå. Studentene i studien opplevde begrepet vanskelig, og det indikeres at instruksjon med fokus på *hvorfor* og *når* (på metanivå) i tillegg til *hvordan* det skal gjøres, kan være til hjelp når eleven skal lære. En erfaren deltaker som kan støtte elevene spiller en kritisk rolle for at elevene skal kunne reflektere og få fram dypere mening (Sfard, 2008; Güçler, 2016).

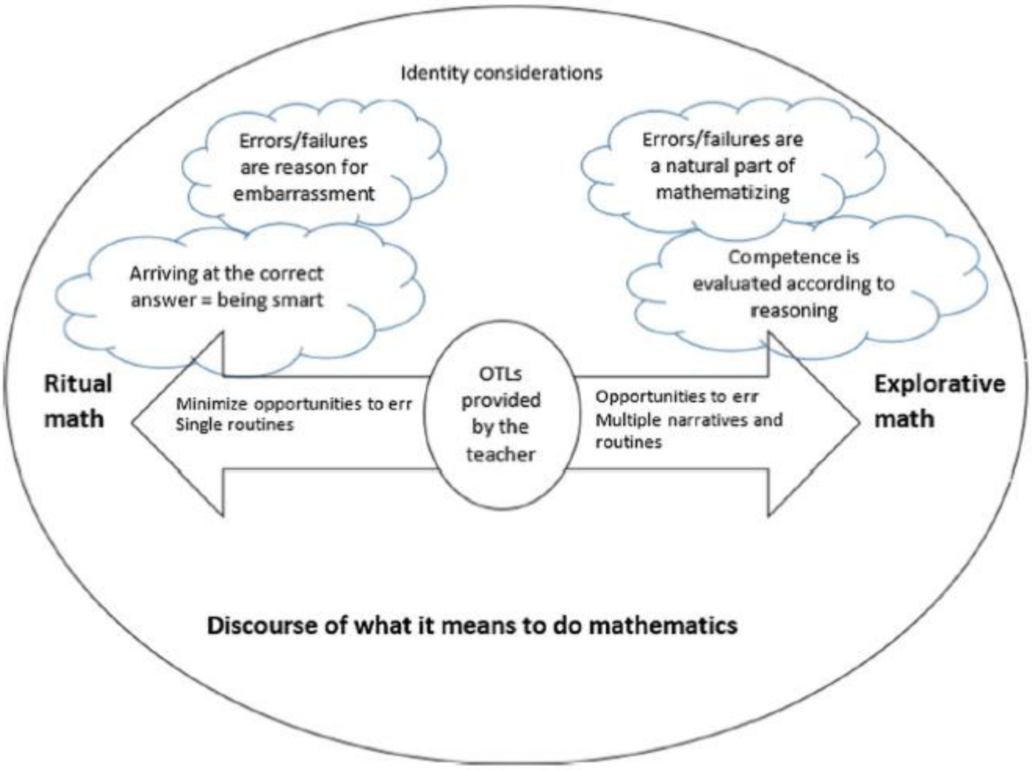
Grunnleggende kunnskaper innen algebra, negative tall og brøk er nødvendig for å kunne bygge videre i funksjonslæren, og elever med manglende kunnskaper om brøk og negative tall vil møte utfordringer i funksjoner som inneholder disse elementene. Kilhamn (2011) understreker at disse utfordringene kan skyldes tilstedeværelsen av slike elementer, snarere enn funksjonens struktur alene. Flere studier indikerer at det burde blitt brukt mer tid på grunnleggende diskurser som algebra og aritmetikk før elevene går i gang med emner som krever at disse basisferdighetene er på plass (Nachlieli & Tabach, 2012). Algebra handler om strukturer, sammenhenger og størrelser og er et sentralt verktøy for å utforske og drive med matematisk analyse. Å generalisere aritmetisk kunnskap til algebra er utfordrende, symbolspråket er vanskelig å få tak på og formelle prosedyrer ser ut til å bli brukt svært algoritmisk heller enn å være styrt av dypere forståelse (Naalesund, 2012). De siste årene har digitale verktøy som GeoGebra fått plass i matematikkfaget. Ved hjelp av GeoGebra kan elevene tegne grafen til funksjonen uten å bruke tid på algebrautregninger. I det praktiske faget er også eksamensformen slik at det er delen med hjelpemidler som er tyngst vektet (2 timer uten hjelpemidler og 3 timer med hjelpemidler på eksamen) men eleven møter funksjonsoppgaver i begge delene. Eleven kan i mange oppgaver hoppe over regne- og plotteprosessen, og heller bruke tiden på tolkning.

2.2 Muligheter for å fremme ulik rutinebruk

Å se hver elevs behov og prøve å utvikle hver og en der de er, er den vanskelige lærerjobben. I LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2) står det at ”det må leggjast til rette for at både jenter og gutar får rike erfaringar som skaper positive haldningar og ein solid fagkompetanse. Slik blir det lagt eit grunnlag for livslang læring”. Begrepet ”Opportunity to learn” (OTL) eller oversatt til mulighet til å lære, defineres som forhold som gir elever mulighet til å engasjere seg og bruke tid på akademiske oppgaver (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Walshaw, 2012). Hvordan elevene får mulighet til å lære kan være med å predikere elevens læringsutbytte. Klasseromsdiskusjoner der elevene er aktive deltakere kan gi læringsmuligheter, der elevene får oppgaver med flere mulige svar, der de får mulighet til å begrunne og argumentere for det de gjør, og ikke kun fokuserer på prosedyre (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Matematikksenteret er per dags dato midt i et prosjekt som har fått navnet ”Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning” (2014), der lærere skal utvikle en undervisningspraksis som støtter og utvikler elevenes tanker gjennom begrepsforståelse, fleksibilitet i arbeidet med problemløsning, utforsking og resonnering samtidig som det skal ivareta elevens positive innstilling til faget. Dette stiller krav til matematikkundervisningen og læreren, og knyttes til rutiner i undervisningssamtaler der eleven blir bedt om å begrunne og vurdere svarene (Lampert, Beasley, Ghousseini, Kazemi, & Franke, 2010). Læreren må holde fokus, hjelpe elevene til å orienteres mot hverandres idéer, sette høye krav til elevens deltakelse, avklare og stille spørsmål som kan få elevene til å gå i dybden og knytte inn og bruke matematiske representasjoner.

I denne oppgaven er det rutinebruk som er i fokus, og det må sees på hvilke muligheter som fremmer forskjellig rutinebruk og utvikling av rutinene i elevenes diskurs. Å arbeide med uproduktive mønster og å gjøre feil er noe som ofte blir et neglisjert aspekt i undervisningen, men som kan bidra til at rutinebruken blir utforskende (Heyd-Metzuyanim, Tabach, & Nachlieli, 2015). Oppgaver med flere riktige svar, der elevene leter etter flere løsninger, er et annet tegn på utforskende aktivitet. Elevenes rutineutvikling kan se ut til å henge sammen med lærerens undervisning (Heyd-Metzuyanim et al. 2015). Matematikkfaget er konstruert slik at objektene bygger på hverandre, og ikke finnes før de er introdusert (Sfard, 2008; Nachlieli & Tabach, 2012). Læreren må introdusere nye begreper i diskursen som først fokuserer på hvordan en oppgave kan gjøres, på objektnivå, der elever imiterer læreren for å utvikle egne metoder. Nachlieli og Tabach (2012) påpeker at læring starter med imitasjon av erfaren deltaker sammen med refleksjon, der de får mulighet til å bli kjent med deler av funksjonsdiskursen. Motivasjonen for å være med på noe de ikke ser nytte av før i etterkant, blir viktig. Hvor utforskende elevene blir i rutinebruken, er avhengig av hvor bestemt de selv er på å objektivisere begrepet (Nachlieli & Tabach, 2012). Elevene er ikke klar for å implementere definisjonen av en funksjon før de nærmer seg en objektivisering av begrepet. Om elevene pugger definisjonen, trenger de ikke kunne bruke den til å identifisere gitte funksjoner (Vinner, 1991).

Når læreren inviterer eleven til å bruke språket samt fokuserer på når og hvorfor rutinene kan brukes, leder læreren elevene mot læring som er mer utforskende. For å introdusere elevene til nye begreper, er deres aktive deltakelse avgjørende, og lærers undervisningsrutiner må derfor være kreative og utforskende (Nachlieli & Tabach, 2012), med mål om å gi alle elevene muligheter til å lære. Tankeprosessene som ligger bak den matematiske aktiviteten må være i fokus. Lærerens oppgave er å gi elevene muligheter til å lære, ved å gi dem mulighet til å uttrykke relasjoner, gi dem mulighet til å koble mellom den visuelle og verbale representasjonen og å knytte sammen variablene i oppgaven. Dersom læreren ikke gir elevene oppgaver med mulighet til å gjøre feil, vil hun ikke gi elevene mulighet til å delta utforskende i den matematiske diskursen (Heyd-Metzuyanim et al., 2015). Samtidig må elevene merke at de har gjort en feil, og forsøke å komme videre slik at det gir mening for at dette skal ha innvirkning på rutinebruken. Sfard (2008) hevder at så lenge undervisningen i stor grad neglisjerer når en rutine skal brukes, og fokuserer mest på hvordan rutinene skal gjennomføres, vil resultatet i diskursen forbli overflatisk læring i stedet for dybdelæring.



Figur 3: Mellom rituell og utforskende matematisering (Heyd-Metzuyanim et al., 2015, s. 570)

I flere tilfeller er det vist at lærere senker kognitive krav og øker fokus på hvordan oppgaven skal løses når de har en oppfatning av at elevene strever med faget. Heyd-Metzuyanim (2013) viser i sin analyse at dette har med sosiale og affektive sider av læring og undervisning og kan uavhengig av lærers ønsker, være ute av lærers kontroll. Elevene kan være så knyttet til den instrumentelle måten å lære på, at det blir utfordrende å implementere et annet fokus og en annen måte å jobbe mot målet på. Denne studien fokuserer på diskursen til elever som allerede har gått ti år i grunnskolen, og har erfaringer med matematikkundervisning derfra. Hvilke erfaringer elevene har fra før, ligger til grunn for hvordan de deltar i matematikkundervisningen på videregående.

Tradisjonelt har lærebøker hatt en hovedvekt på å gi eksempler som bygger opp under en regel slik at elevene kan få til liknende oppgaver i etterkant (Schoenfeld, 1992). Fokuset på hvordan oppgaven skal gjøres, blir mer ivaretatt enn hvorfor og når. Ifølge Alseth et al. (2003) følger norsk matematikkundervisning ofte en tradisjonell, lærebokstyrt undervisningsform der læreren introduserer tema, viser eksempler på tavla og gir elevene lignende oppgaver fra boka. Læreren legger stor vekt på hvordan elevene skal finne det riktige svaret heller enn å lete etter mønster og sammenhenger og finne ut hvordan matematikken henger sammen.

Hundeland (2010) peker på at norske lærere på videregående trinn vet hvilke kompetansemål elevene skal jobbe mot og er trofaste mot målene. Lærerne gir uttrykk for at tidspresset er stort, og for å nå alt fokuseres det på *hvordan* oppgavene kan løses, og forståelsen får komme på et senere tidspunkt. Den framtidige eksamenen styrer aktivitetene i klasserommet, samtidig som lærerne støtter seg til læreboka som hovedkilde for å finne eksempler og elevoppgaver (Hundeland, 2010). Læreboktilnærmingen er ofte abstrakt og teknisk med fokus på plotting av punkter og graftegning (Sierpinska, 1994). I en hektisk hverdag er det sannsynlig at læreboka påvirker lærers diskurs, som igjen påvirker eleven.

2.3 Selvoppfatning og motivasjon

Elevene i denne masterstudien har valgt den praktiske retningen og følger faget Matematikk 1P. Selv om elevene selv har valgt hvilken matematikkretning de vil fordype seg i, kan forskning om nivådeling være interessant. Nivådeling er når elever blir delt inn i grupper basert på prestasjoner og undervist i disse gruppene. Studier har vist at nivådeling i matematikk har negativ effekt på prestasjonene til lavt-presterende elever, og nivådeling ser ofte ut til å svekke elevenes motivasjon og selvtillit (Boaler, William, & Brown, 2000). Det er også dokumentert at motivasjon har stor betydning i matematikkopplæringen (Hannula, 2006), og forskere hevder at motivasjon har en avgjørende betydning for om elevene lykkes eller ikke i skolen (Pintrich, 2003; Cury, Elliot, Fonseca, & Moller, 2006). Skole- og klassemiljø og tilrettelegging av læringssituasjonen har betydning for elevenes motivasjon, og lærere kan påvirke i positiv eller negativ retning (Skaalvik & Skaalvik, 1996). Trygge elever tør å dele egne tanker med lærer og medelever. Lærers utfordring er å legge til rette for et positivt undervisningsmiljø der elevene utvikler økt indre motivasjon og læringsorientering framfor ytre motivasjon og prestasjonsorientering for å utvikle rutinebruken og dybdelæring.

Heyd-Metzuyanim (2015) viser at det kan være flere grunner til at elever ikke tar fatt på utforskende oppgaver. Rituell deltakelse kan komme fra elevenes miljø både i klasserommet og utenfor. Foreldre har stor innflytelse på elevers egne matematikkoppfatninger. Manglende ferdigheter vil påvirke muligheten til å utforske. Elevenes oppfatning av hva en god matematikkelev er og egen tro på at de har en mulighet til å utvikle egen intelligens, har også betydning (Heyd-Metzuyanim, 2015).

3. Teoretisk rammeverk

Det finnes flere rammeverk for å studere læring og undervisning. I denne masteroppgaven er Sfards (2008) kommognitive teori valgt som teoretisk rammeverk. Denne læringsteorien hører til innenfor det sosiokulturelle paradigmet, der dialoger og interaksjoner bør tolkes som situerte i større sosiokulturelle kontekster (Ryve, 2008). Læring defineres som observerbar endring av diskurs (Sfard, 2008). Læreren og elevene er deltakere i diskursen, der læringen skjer. Dette kapitlet beskriver rammeverket generelt og rutinebruk spesielt.

Sfard (2008) presiserer at læring er en aktiv prosess og elevens deltakelse i sin helhet er vesentlig. De første stegene til læring skjer i samhandling med andre, og så gradvis mer selvstendig. Læring og kommunikasjon hører sammen, og ”språk og kommunikasjon er ikkje berre eit middel for læring, men sjølve grunnvilkåret for at læring og tenking skjer” (Dysthe, 2001, s. 49). Ifølge Sfard (2008) er tenking en individuell versjon av mellommenneskelig kommunikasjon, og hun støtter seg på Wittgenstein og Vygotsky når hun definerer begrepet. Med dette gjør hun det enklere å observere deltakerens tanker som blir synlige i kommunikasjonen i diskursen. Her knyttes språk og tanke sammen, og det er mulig å både observere og analysere kommunikasjonen mellom deltakerne. Med lyd- og videoopptak av undervisning og arbeidsøkter, er det mulig å få et detaljert inntrykk av deltakernes læring.

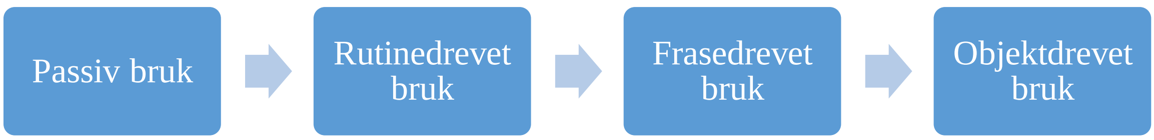
I tillegg til å definere ord og uttrykk presist, konstruerer og definerer Sfard (2008, s. 83) begrepet ”kommognisjon”, en sammenslåing av kommunikasjon og kognisjon. I stedet for å snakke om misoppfatninger og kognitive konflikter som er vanskelig å observere, ser Sfard etter kommunikative brudd i deltakernes ytringer og kommognitive konflikter (Sfard, 2008). En slik konflikt er en naturlig del av læringen, og kan med tilpasning og justering få deltakeren et skritt videre. Det som kan observeres er i fokus, slik som endring i regler og metaregler.

Å lære matematikk krever at du må være deltaker i den matematiske diskursen (Sfard, 2008), og en diskurs defineres som deltakelse og kommunikasjon som ekskluderer noen og inkluderer andre (Sfard, 2008, s. 91). For å delta må du kunne kommunisere i denne konteksten. Det understrekes at læring er en deltakende aktivitet, og perifere deltakere bør lokkes inn i diskursen.

Matematikk er en diskurs om matematiske objekter, og prosessen med å utvikle matematiske objekter i diskursen kan beskrives gjennom to deler (Sfard, 2008). Den første delen av prosessen kalles ”tingliggjøring”, der ytringer som beskriver prosessen går over til å bli ytringer om objekter, som er mer håndfaste og konkrete som å lage tabell med x-verdier og funksjonsverdier, plotte punkter i koordinatsystem og så tegne grafen. Etter hvert kan prosessen ”fremmedgjøres”, og det handlende subjektet er borte. Handlingen har da blitt til et objekt, en selvstendig enhet som alene betyr noe uten handlingen. Når eleven ser på en funksjon som et selvstendig objekt er vi over i den andre delen av objektiviseringen (Sfard, 2008), og eleven kan bruke funksjonsbegrepet mer abstrakt. De trenger ikke representasjonene av begrepet for å se for seg sammenhengen. I den matematiske diskursen finner man objektivisering i sin mest ekstreme form.

3.1. Ordbruk

Elevenes individualisering av diskursive objekt kan deles inn i faser. Et primært objekt definerer Sfard (2008, s. 169) som et objekt som ikke har blitt betegnet, men som forventes å komme, basert på tidligere erfaringer. For å forenkle kommunikasjonen, settes det navn på objektet, det blir mer etablert og kan etter hvert brukes som et diskursivt objekt, som igjen kan utvikles til et mer abstrakt objekt. Begrepsutvikling er et viktig aspekt ved den kommognitive teorien, og Sfards definisjon av begreper omfatter også begrepsbruk.

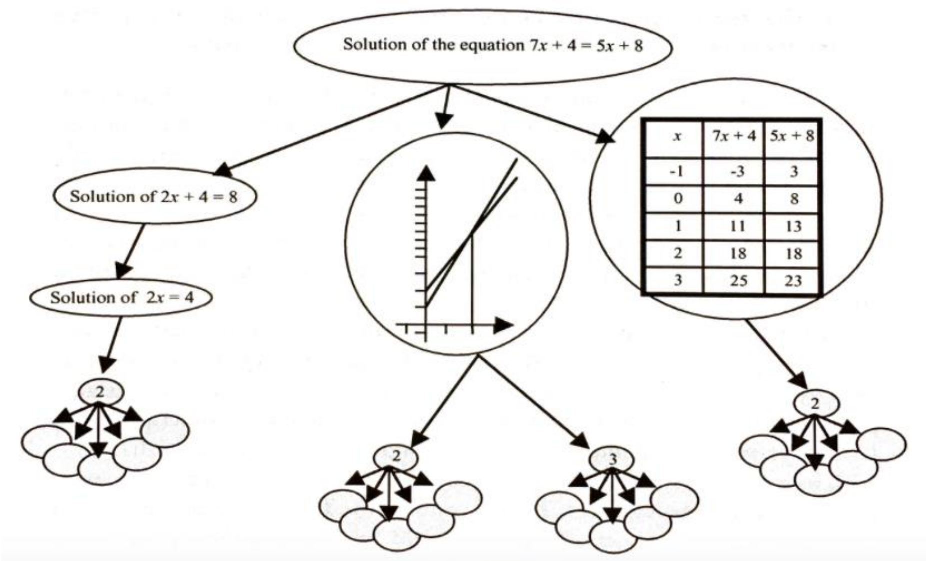


Figur 4: Modell med fire stadier for utviklingen av begrepsbruk (Sfard, 2008 s. 182, min oversettelse)

Ved passiv bruk kan deltakeren handle etter det, uten å bruke det selv, og når deltakeren bruker begrepet innenfor spesifikke mønstre og diskurser er bruken rutinedrevet. Gjennom aktiv deltakelse må nye begreper og symboler brukes, og gradvis endres deltakernes narrativer fra passiv bruk, via rutinedrevet bruk, til egenproduserte fraser, og til slutt til objektdrevet bruk (Sfard, 2008).

3.2. Individuelle realisasjoner

I kompetansemålene til elevene står det at elevene skal kunne omgjøre mellom ulike representasjoner. I Sfards rammeverk brukes begrepet realisasjoner som en utstrakt bruk av representasjonene. Å koble fleksibelt mellom ulike realisasjoner krever at deltakeren ser sammenhengen mellom ulike deldiskurser. Her kan det være store individuelle forskjeller blant deltakerne i diskursen. Funksjonsobjektet har flere realisasjoner som graf, tabell, som koordinater, med muntlige og skriftlige narrativer eller med funksjonsuttrykk. Sfard (2008, s. 165) kaller disse realisasjoner av funksjonen, og er karakterisert ved at de er sansbare. Et objekt har flere realisasjoner.



Figur 5: Eksempel på realisasjonstre (Sfard, 2008 s. 165)

Sfard (2008) deler en realisasjon i visuelle og verbale, etter om realisasjonen kan sees eller høres. Det visuelle kan igjen deles i gester, konkreter og verbale realisasjoner, og det verbale kan deles i skriftlig tekst og algebraiske uttrykk. Realisasjonstrærne er personlige og to elever vil realisere ulikt og ha individuelle realisasjonstrær. Elever assosierer ofte funksjonen som prosess eller en representasjon av objektet for eksempel graf (Sfard, 1992; Nachlieli & Tabach, 2012), og tross lærers innsats trenger ikke elevenes realisasjonstrær være like (Nachlieli & Tabach, 2012).

3.3. De fire egenskapene ved den matematiske diskursen

Sfard (2008) beskriver den matematiske diskursen med fire egenskaper: ordbruk, narrativer, visuelle mediatorer og rutiner. I alle diskurser er ordbruken viktig. I matematiske diskurser spiller de visuelle mediatorene en spesiell rolle. De er med på å effektivisere kommunikasjonen som for eksempel ved å identifisere objekter i samtalen. I funksjonslæren benyttes mange visuelle mediatorer – som figurer, grafer, symboler og tegn. I en funksjonsoppgave kan man effektivisere kommunikasjonen ved å peke på punkter på grafen, vise hvordan grafen stiger eller endrer seg ved å la pekefingeren gli langs grafen, hele tiden for å støtte opp om den verbale kommunikasjonen. Å forklare hva en funksjon er kun med ord, kan i mange tilfeller være mer komplisert enn å forklare ut fra en visualisering som en tabell, graf eller med symboler. Ved å bruke gester kan man beskrive grafen enten ved å tegne og peke, eller ved å skissere i luften. I matematikk forholder narrativene seg til hverandre ved at de bygger på hverandre. Det generelle funksjonsuttrykket til en lineær funksjon kan beskrives som $y = ax + b$. Grafen stiger med stigningstallet a, og skjærer y-aksen i b, som er funksjonens konstantledd. Grafen er proporsjonal hvis b er null ($b = 0$), og parallell med x-aksen hvis a er null ($a = 0$). Dette er eksempler på narrativer fra funksjonslæren. Aksiomer, definisjoner og teorem er godkjente narrativer i matematikk. Kommunikasjon defineres som en mønsterstyrt aktivitet og skjer i sosiale sammenhenger (Sfard, 2008). Rutiner er faste mønstre som gjentas i diskursen. Nedenfor sees det nærmere på ulike rutiner og hva som fremmer ulik rutinebruk.

3.4. Rutiner – *hvordan* den matematiske diskursen utføres og *hvorfor*

"We are what we repeatedly do. Excellence then, is not an act, but a habit."

(Durant, 2012, s. 87)

Kommunikasjon er aktivitet i et gitt mønster der repetisjon er en av kildene til effektivitet (Sfard, 2008). Når vi vet hvordan vi skal reagere på en handling, er det fordi vi har vært gjennom en lignende situasjon som er implementert i deltakeren, og vi kan ut fra dette utføre en lignende handling. Kommunikative mønstre er dynamiske strukturer, og det repeterende mønsteret inneholder justeringer. Sfard (2008) skiller mellom regler på meta- og objektnivå, selv om disse er refleksive. Regler på objektnivå er narrativer om regulariteter i objektets bruk i en diskurs, mens metaregler er mønsteret i aktiviteten der deltakeren prøver å produsere narrativer om objektet og sees på som rutinen i aktiviteten. I begynnelsen er reglene dynamiske strukturer som stadig er i endring i interaksjon med andre. En nykommer i en diskurs kjenner ikke det repeterende mønsteret, og læreren skal legge til rette for at alle får utvikle seg. Læreren etablerer reglene og er eksperten i diskursen som utvikles i samhandling med elevene. Metareglene modnes og utvikles over tid og må sees i sammenheng med den historisk etablerte diskursen som flere ganger er blitt modifisert. Elevene prøver å delta og følge den historiske diskursen, heller enn å finne sin egen vei til målet (Sfard, 2008). Ved å observere fra innsiden oppleves matematikken styrt av logisk nødvendighet, men samtidig kan en observatør fra utsiden se matematikken som et produkt av historiske situasjoner. Diskursens evolusjon og adapsjon effektiviserer praktiske handlinger. Metaregler sammenlignes av Sfard (2008) med trafikkregler. For at kommunikasjonen skal være fleksibel, bør reglene følges. Alle trenger ikke nødvendigvis å følge identiske mønstre, men for at kommunikasjonen skal være fleksibel og effektiv bør reglene være veiledende.

Reglene i diskursen er observatørens konstruksjon heller enn prinsipper som deltakerne følger. Mønsteret som observatøren finner i diskursen, er mønster på allerede gjennomførte handlinger, og dette mønsteret benyttes så av observatøren til å predikere hvilke mønstre som trolig vil finne sted i framtidige handlinger (Sfard, 2008). Gjennom konstant refleksjon og justeringer av handlingsmønsteret i diskursen, kommer nye matematiske objekter fram (Sfard, 2008).

Sfard (2008) deler metaregler i to: *hvordan* rutinen gjennomføres og virker, og *når* rutinen passer å gjennomføres. Når-rutinen sees på som den mest krevende delen. Mange rutiner kan sees på som generelle og kan observeres i majoriteten av diskurser. En ny diskursdeltaker velger nødvendigvis ikke den samme handlingen som en erfaren deltaker ville gjort i samme situasjon. Deltakerens diskurs er situert og kan ikke overføres fleksibelt til andre lignende situasjoner på et gitt tidspunkt. Med repetisjon vil rutinen utvides og modifiseres slik at deltakeren kan bruke den mer effektivt og fleksibelt. Konteksten oppgaven gjøres i kan påvirke rutinebruken (Sfard, 2008).

Typisk for klasserommet og lærebøkene er at det introduseres en teknikk, gjerne med et eksempel (Sfard, 2008). Oppgaven elevene skal prøve seg på i etterkant av demonstrasjonen kan ligne det som nettopp er gjennomgått. Elevene trenger ikke å vurdere om de skal benytte den aktuelle teknikken, men gjør dette automatisk, da dette er sannsynlig. Ved å gjennomføre undervisningen på denne måten får elevene repetert rutinen, de hermer etter teknikken læreren har vist og prøver å få det til å stemme i oppgaven. Noen elever synes dette er vanskelig nok og bruker ikke mer tid enn de må på repetisjon og refleksjon over slike oppgaver. På denne måten øves ikke deltakerne i å reflektere over når rutinen skal brukes. Hvis lærerens og skolens oppgave er å trene elevene i hvordan rutinene gjennomføres, går de glipp av når og hvorfor de skal bruke rutinene.

Å være kreativ defineres av Sfard (2008, s. 219) som å anvende rutiner i ikke-rutinesituasjoner. En erfaren deltaker som har mange etablerte rutiner, vil være mer leken med matematikken enn en usikker deltaker. Kreativitet endrer regler heller enn å forkaste dem, og krever at deltakeren både bruker perspektiver fra innsiden og utsiden av diskursen. Noen ganger involverer endringer hvordan man gjennomfører en rutine, men store gjennombrudd involverer endring i når rutinen brukes.

3.5. Utforsking, gjerninger og ritualer – hva vi matematiserer for

Sfard (2008) deler diskursive rutiner i tre typer ut fra hvilken oppgave de utretter; utforskinger, gjerninger og ritualer. To matematikkelever som tilsynelatende utfører samme handling, behøver ikke å ha implementert samme type rutine. Observeres samme matematikkelev i to forskjellige stadier av diskursutviklingen, kan rutinen eleven viser i de forskjellige stadiene være ulik. Gjerninger og ritualer er prosesser i utvikling mot utforskingsrutinen som er den mest krevende rutinebruken. Sfard (2008) mener at så lenge undervisningen i stor grad neglisjerer når rutinen skal brukes, og fokuserer mest på hvordan rutinene skal gjennomføres, vil resultatet i diskursen være fokusert omkring ritualer heller enn utforskinger.

Hovedmålet med å matematisere[1] er å produsere godkjente narrativer som er sanne, ifølge Sfard (2008). En narrativ er godkjent hvis den kan utledes fra generelle aksepterte regler fra andre godkjente narrativer. En utforskende rutine bidrar til å etablere og ferdigstille en matematisk teori, som kan godkjennes av matematikere. Godkjente rutiner er endret og ikke bare utviklet mellom diskurser og gjennom historien, men også individuelt i diskursdeltakeren. For at deltakeren skal bli overbevist om at narrativer er godkjente, må de gjennom en sannsynliggjøringsprosess. Her må skolen sannsynliggjøre både når og hvordan deltakerne skal benytte rutinen. En usikker deltaker vil støtte seg på mer erfarne deltakere i denne prosessen. Å få anerkjennelse fra en erfaren deltaker er viktig, og kan føre til at eleven velger å imitere en rutine han mener læreren ville brukt heller enn å stole på egne logiske

[1] Å matematisere er å utføre matematikk. Sfard (2008) skiller mellom matematister og matematikere. Begge utfører matematikk, men bare matematikeren er profesjonell.

resonnement (Sfard, 2008). For å kommunisere flytende i diskursen er det viktig å finne fram narrativer som er etablert. Hvordan disse narrativene er konstruert og memorert i utgangspunktet, spiller en rolle for hvordan deltakeren kan ta disse fram igjen (Sfard, 2008). Diskursdeltakerne utsettes for andre deltakeres bruk av objekter, noe som kan være både en utfordring og hjelp til å komme videre. En erfaren deltaker i kommunikasjonen er nyttig (Güçler, 2016; Sfard, 2008) og gjennom veiledet deltakelse kan erfarne hjelpe nybegynnerne.

Både utforskinger og gjerninger fører til en synlig endring; forskjellen ligger i at en gjerning endrer konkrete objekter, mens en utforsking produserer narrativer. En gjerning vil gjennom en mengde regler i en handlingssekvens produsere eller endre et matematisk objekt, heller enn å fortelle en historie. Lærere kan underestimere forskjellen mellom gjerning og utforsking ved å anta at eleven spontant kan bruke mønsteret i en hverdagssituasjon. Det som for en erfaren deltaker er en invitasjon til utforsking, kan for en mindre erfaren deltaker være en gjerning, og det kan være vanskelig å skille disse (Sfard, 2008). Ved å knytte gjerninger og utforskinger opp mot nivå, kan gjerninger beskrives på objektnivå og utforsking på metanivå. Som metadiskursiv aktivitet er den utforskende, historiefortellende rutinen mer utfordrende enn rutinen som produserer gjerning.

Ritualrutinen er en form for imitasjon av erfarne deltakere. Den skiller seg ut og har et sosialt aspekt ved seg, og sees på som noe som gjøres sammen med andre for å binde deltakerne sammen. Handlingen er en opptreden for å få oppmerksomhet og anerkjennelse fra andre. Ritualer er situert, spesifikke, restriktive og rigide slik at alle kan gjennomføre de på samme identiske måte (Sfard, 2008). På denne måten kan en perifer deltaker ha mulighet til å bli kjent med en ny diskurs. Ritualer som ikke gjennomføres som de skal, må repeteres slik at de automatiseres. Deltakeren som er på ritual-stadiet imiterer og handler. Det handler ikke om å forklare hvorfor eller når man skal bruke rutinen (Sfard, 2008).

For å skille mellom utforskende og rituelle rutiner, må en se på når rutinen blir benyttet, hvem rutinen involverer og om rutinen uføres på en akseptabel måte (Sfard, 2008). For å oppnå et fullgodt bilde av en deltakers rutiner, må forskeren observere og analysere deltakerens prestasjoner i en vid kontekst og ikke stykkevis og delt (Sfard, 2008). Alle de tre rutinetypene spiller en rolle i utviklingen av diskursen. Ritualer er ofte naturlig og uunngåelig i utviklingen av gode rutiner, og utforsking må noen ganger utledes fra ritualer (Sfard, 2008). Nachlieli og

Tabach (2012) poengterer at læring på metanivå starter med imitasjon av erfarne deltakere sammen med refleksjon. Dette trenger ikke å ødelegge for framtidige utforskende rutiner.

Utforskende rutiner vil ikke nødvendigvis utvikles fra gjerninger. En deltaker som mestrer gjerningen å bestemme konstantledd og stigningstall til en lineær funksjon trenger ikke være interessert i å utvikle rutinen til å bli en utforsking, for denne deltakeren mestrer allerede å finne et tilfredsstillende svar i mange av skoleoppgavene. Metaregler i matematiske diskurser er historiske etableringer heller enn naturlover som har overlevd fordi de er effektive og nyttige slik de er (Sfard, 2008). Å individualisere andre menneskers tale resulterer mest sannsynlig i ritualer heller enn i utforskende ritualer. Dette gjelder selv om eleven allerede er kjent med gjerningene av de nye diskursive rutinene som er ment å forbedre (Sfard, 2008).

Det skilles mellom vertikal og horisontal endring på metanivå. Når en matematisk diskurs slås sammen med egen metadiskurs betegnes dette som vertikal metalæring, som peker på hvilke generelle mønstre som er tydelige i diskursen. Et eksempel kan være når mønster i den aritmetiske diskursen kan brukes i utviklingen av den algebraiske diskursen. I denne studien er horisontal metanivålæring aktuell. I denne prosessen blir flere deldiskurser som eleven i utgangspunktet betraktet som adskilte, slått sammen til en mer helhetlig diskurs. Funksjonsdiskursen inneholder flere deldiskurser som elevene kan streve med som grafer, algebraiske uttrykk, tabell og kontekst. Når eleven klarer å knytte disse deldiskursene sammen, blir funksjonsdiskursen mer helhetlig.

Lærere ønsker å gi elevene optimale muligheter til å lære og elevene bør eksponeres for og oppmuntres til utforskende rutiner. Det viser seg å være flere hindre for å implementere utforskingsrutiner hos eleven. Sfard (2008) påpeker at en elev ikke kan sette pris på nye rutiner før han ser fordelen med den, og denne fordelen kan bare utvikles gjennom å bruke rutinen. Lærer kan demonstrere en ny utfordrende rutine og satse på at dette kan motivere elevene til å utforske sammen med henne. Har elevene for vane å imitere læreren, er de allerede i gang med å utvide rutinene sine i den aktuelle diskursen. Selv om rutinen kan ligne et ritual, er det ikke utenkelig at flere elever kan komme videre fra ritualstadiet med en slik aktivitet. For å entre en ny diskurs må eleven bli kjent med den gjennom ritualer og imitasjon. Noen bruker kort tid mens andre bruker lengre tid i dette stadiet på vei mot utforskende rutiner. De som lykkes best er de som er utholdende. Imitasjon handler ikke bare om å gjøre likt, men også om å omformulere og reiterere for at rutinen skal implementeres. Sfard (2008) kaller dette tankefull imitasjon, som er en prosess der en konstant justerer og fornyer variablene i rutinen. Her kreves et bredt spekter av erfaringer. Nye matematiske rutiner som starter som ritualer kan utvikles over tid til å bli utforskende rutiner, og ideelt sett utvikles til en fleksibel utforskende rutine. Tiden dette tar varierer. Fasen mellom ritual og utforskende rutine er en konsolideringsfase, der faktorer som motivasjon, klassemiljø og selvoppfatning kan spille inn på hvordan rutinen utvikles.

Uavhengig av om det er justering av etablerte metaregler eller introduksjon av nye matematiske objekt, spiller den erfarne deltakeren en rolle (Sfard, 2008). Når rutinene som skal læres involverer læring av nye metaregler eller nye matematiske objekter, er dette noe som skjer gjennom interaksjon med erfarne diskursdeltakere. De første trinnene i en ny rutine, er sosialt betinget og ritualpreget. Hvordan rutinen utføres kommer gjerne før deltakeren kan si noe om når rutinen skal utføres. Ritualet kan være en naturlig introduksjon, og trenger ikke å være et resultat av en ineffektiv læringsprosess (Sfard, 2008). Ritualet vil ideelt sett utvikles til en fullfleksibel utforsking med tiden.

Sfard (2008) påpeker at det ikke er en universell vei til rask suksess, men drar fram at den beste – muligens eneste – måten å utvikle en ny diskurs er å la det nye bygge videre på noe som allerede er etablert sammen med erfarne deltakere. Dette gjelder både når nye objekt skal implementeres og når eksisterende metaregler skal modifiseres. Å introdusere nye utforskinger ved å bygge på kjente forventede gjerninger, vil ikke forhindre at rutinen blir et ritual i stedet for en mer utforskende rutine. Samtidig kan gjerningen hjelpe til med å forsikre at rutinen potensielt blir mer utforskende når utviklingen av rutinen er i gang. Gjerningen som venter på å bli styrket av en ny prosedyre arver gyldighetsområdet til prosedyren, og tar dermed på forhånd vare på det som hører til *når* den nye rutinen kan anvendes (Sfard, 2008). Dette er forskjellen på om rutinen forblir underutviklet som ritual, eller om den utvikles i retning av utforsking. Mange diskursive utviklinger kan forankres i praktiske gjerninger, men ikke alle. Ingen praktisk gjerning kan for eksempel fullt ut forklare at produktet av to negative tall er et positivt tall.

Et nyttig verktøy for å evaluere om oppgaven og diskusjonen er rituell eller utforskende og gir mulighet for å lære, er om aktiviteten inkluderer muligheten til å gjøre feil (Heyd-Metzuyanim et al., 2015). Gjør eleven feil, må dette fanges opp for at eleven skal ha mulighet til å komme videre i læringen. En erfaren deltaker som evaluerer eller stiller spørsmål for at eleven kan komme videre i diskursen, er nevnt som kritisk (Güçler, 2016; Sfard, 2008). Ved å være en aktiv deltaker i klasseromsdiskusjonen gir det mulighet for læring når diskusjonene inkluderer refleksjon i kognitivt utfordrende oppgaver. På en side hindrer læreren elevenes mulighet til å lære ved å gi dem rituelle instruksjoner, samtidig trenger elevene mestringsfølelse for å være motiverte og interesserte i de mulighetene som gis dem (Heyd-Metzuyanim et al., 2015). Dette er en av mange oppgaver læreren står ovenfor.

I denne studien sees det på elevers rutinebruk i funksjoner etter endt grunnskole og etter at de har vært deltakere i faget Matematikk 1P i sju måneder. Jeg ser etter utvikling i funksjonsdiskursen til elevene, og ser etter hvilke faktorer som ser ut til å ha innvirkning på elevenes utvikling av funksjonsdiskurs.

4. Metode

Denne studien er et kvalitativt case-studie (Thagaard, 2013), og det valgte analyseverktøyet er Sfards (2008) kommognitive rammeverk.

4.1 Studiens design

Et forskningsdesign er ifølge Maxwell (2008) en interaktiv prosess som er med å påvirke hvordan designet bør være, og det omfatter normalt mål, metoder, teoretisk innramming, validitet og forskningsspørsmål. Forskningsspørsmålet i denne studien etterspurte hvordan elevenes funksjonsdiskurs utviklet seg ved deltakelse i 1P-faget i videregående skole, i tillegg til noen faktorer som kunne se ut til å ha innvirkning på denne utviklingen. En kvalitativ tilnærming ble valgt med funksjonsdiskursen som analyseenhet. En analyse av diskursen framhever hvordan deltakerne skaper mening ut fra hvordan de uttrykker seg (Thagaard, 2013), noe forskningsspørsmålet var ute etter. Målet var også å se på hvordan diskursen utviklet seg over tid, og det måtte derfor etableres kontakt med informanter som kunne være med over en lengre periode slik at en mulig utvikling kunne bli observert.

Det ble knyttet kontakt med en 1P-matematikkgruppe, og det ble innhentet data fra elevintervjuer og observasjoner fra klasseromsdiskursen de tre ukene funksjonsundervisningen pågikk. Lyd- og videoopptak ble benyttet, noe som er vanlig i et klassisk kvalitativt case-studie (Thagaard, 2013). Lyd- og videoopptak av datamaterialet gir muligheten til å spole fram og tilbake, og se sekvenser flere ganger for å få med flere detaljer. Dette har vært en fordel når forskningsspørsmålene skulle belyses.

Sfards (2008) kommognitive rammeverk egner seg når en diskurs skal observeres og analyseres, der læring og kommunikasjon knyttes sammen. Målet var først å få fram nyanser i elevenes funksjonsdiskurs, hvordan deltakerne ordla seg, visualiserte og skriftliggjorde matematikken over tid, med fokus på elevenes rutinebruk. Fokusgruppeintervjuer ble valgt for å få elevenes funksjonsdiskurs fram der elevene kunne reagere på hverandres innspill og få fram spontane synspunkter (Kvale & Brinkmann, 2009). I etterkant ble det sett etter mulige årsaker til elevenes diskursutvikling ut fra det allerede gitte empiriske datamaterialet.

4.2 Deltakerne/konteksten i studien

Deltakerne i dette prosjektet var en matematikklærer og hennes elevgruppe i faget Matematikk 1P. Deltakerne gikk på en videregående skole på Vestlandet skoleåret 2016/2017. Læreren hadde undervisningserfaring fra både ungdomstrinnet og vgs, samt undervist faget 1P før. Matematikkurset har et omfang på fem skoletimer per uke med mulighet for å bli trukket opp til sentralgitt eksamen mot slutten av skoleåret (Utdanningsdirektoratet, 2013). Elevene som starter opp på vg1 kan velge mellom Matematikk 1P, som er den praktiske tilnærmingen, eller en mer teoretisk tilnærming kalt Matematikk 1T.

Klassens matematikklærer meldte sin interesse da hun fikk høre at jeg skulle gjennomføre en klasseromsstudie i masteroppgaven min, og utvalget er valgt ut fra et tilgjengelighetsprisnipp (Thagaard, 2013). Etter å ha avklart med NSD (Norsk senter for forskningsdata) og avdelingsleder på den aktuelle skolen, ble klassen informert om prosjektet. Alle elevene i gruppa samtykket skriftlig til at funksjonsundervisningen i klasserommet kunne observeres med lyd- og videoopptak. Elever som kunne tenke seg å være med i fokusgruppeintervjuene ble oppfordret til å melde seg, og det var mange elever som meldte seg. Ut fra prinsippet om frivillig deltakelse i forskning (De nasjonale forskningsetiske kommiteer, 2016) satte læreren sammen to elevgrupper som hun mente kommuniserte godt sammen. Læreren ble oppfordret til å velge mest mulig variert ut fra karakternivået i matematikk, og de seks utvalgte elevene kom fra seks ulike ungdomsskoler. Elevenes motivasjon til å være med i et slikt prosjekt er ukjent.

4.3 Innsamling av data

Det ble gjennomført fokusgruppeintervjuer i september 2016 og etter funksjonsundervisningen i mars 2017. Til sammen ble det gjennomført fire fokusgruppeintervjuer der hvert intervju varte i cirka 40 minutter. Elevene ble intervjuet i fokusgrupper på tre elever der lyd- og videoopptak ble samlet inn. I kvalitativ forskning skal utvalget ideelt sett være så stort at det ikke kommer fram noe nytt og observasjonene når en metning (Thagaard, 2013). Sammen med veileder ble det besluttet at det var mulig å svare på forskningsspørsmålet med seks elevinformanter i intervjuene. Selv om en skulle trekke seg underveis, ville det likevel være nok informanter til å fullføre studien. Tidsrammene og arbeidsmengden for masteren var også en naturlig begrensning på studien.

Intervjuformen var semistrukturert, hvor samtalene var hverken lukkede eller åpne (Kvale & Brinkmann, 2009), og tok utgangspunktet i en intervjuguide (se vedlegg 1 og 2). Intervjuguiden hadde et forslag til fokusområder, samtidig som muligheten for å improvisere med oppfølgingsspørsmål ut fra hva som kom fram i elevdiskursen var tilstede. Fokusgruppeintervju gav mulighet for at elevene kunne bygge på hverandres innspill, og dette kunne gjøre elevene tryggere i den ukjente situasjonen. Thagaard (2009) beskriver dette som en fordel med gruppeintervju, men samtidig kan formen begrense informantene hvis de har avvikende synspunkter. I introduksjonen til intervjuene uttrykte jeg at det var berikende å diskutere og drøfte ulike måter å løse en oppgave på, og at veien mot en løsning var interessant i seg selv. I tillegg ble deltakerne informert om at forskningsprosjektet ikke var en vurderingssituasjon, men en undersøkelse der fokuset var å få detaljerte beskrivelser om hvordan elever kommuniserte i funksjonsdiskursen. I etterkant av intervjuene laget jeg oppsummeringsnotater fra alle intervjuene. Lyd- og videoopptakene av de fire intervjuene ble transkribert og analysert med fokus på elevenes rutinebruk samt elevenes realisasjoner av en funksjon som kom fram i oppgaveløsning som omhandlet lineære funksjoner. I runde to ble intervjuene analysert med fokus på elevenes diskurs om eget forhold til matematikkfaget for å undersøke om dette kunne være en mulighet årsak til elevenes diskursutvikling.

I februar 2017 observerte jeg 13 undervisningstimer fordelt på åtte økter, totalt 520 minutter. En kortfattet oversikt over innholdet i øktene er vist under.

Dato	Innhold i undervisningsøktene	Timer
3.2.17	Funksjonsbegrepet generelt	1
6.2.17	Lineære funksjoner	2
8.2.17	Andregradsfunksjonen – undersøkende aktivitet	2
10.2.17	Andregradsfunksjoner	1
13.2.17	Tegne grafer for hånd og med GeoGebra	2
17.2.17	Overskuddsfunksjonsoppgave O = I – K	1
20.2.17	Lineære modeller – undersøkende aktivitet	2
22.2.17	Gjennomsnittlig vekstfart	2

Figur 6: Oversikt over innhold i undervisningsøktene for ukene 5–8.

Observasjonene i klasserommet ble dokumentert med feltnotater, lyd- og videoopptak, og første og siste undervisningsøkt ble transkribert og analysert med fokus på realisasjoner av funksjoner og rutinebruk i undervisningsdiskursen mellom lærer og elever i klasserommet.

Bruk av video er en velegnet framgangsmåte i studier der fokuset er samhandling mellom personer (Thagaard, 2009). De to sekvensene som ble transkribert fra undervisningsdiskursen var to situasjoner der lærer i samhandling med elevene kommuniserte om og jobbet med funksjonsoppgaver. Årsaken til at akkurat disse to øktene ble valgt ut var for å se om det var endringer i lærerens diskurs når det gjaldt rutinebruk og realisasjoner av en funksjon fra start til slutt i perioden.

Intervjuene ble gjennomført på et grupperom, der kameraet ble plassert slik at alle deltakerne var synlige i bildet. I tillegg til lydopptaket på kameraet, ble det benyttet en ekstern lydopptaker som lå på bordet deltakerne jobbet på. Elevenes skriftlige notater i intervjuene ble også samlet inn. Kvaliteten på lyd- og videoopptakene i intervjuene var gode. Intervjuguidene ble utarbeidet i samarbeid med veileder. Deltakerne hadde ikke kjennskap til intervjuguiden på forhånd. Intervjuguiden inneholdt blant annet oppgaver som elevene jobbet med (se vedlegg 1 og 2).

Under observasjonene av undervisningsdiskursen ble kameraet plassert bakerst i klasserommet, midt i rommet sentrert om læreren og tavla. Lærer bar en lydopptaker i alle undervisningsøktene. Undervisningsdiskursen kom godt fram i plenumsdiskusjoner, men kvaliteten på video- og lydopptakene var ikke gode nok til å få innsikt i elevenes diskurser i samarbeidsoppgaver i klasserommet.

Lyd- og videoopptakene fra intervjuene og de to øktene med undervisningsdiskurs ble transkribert av forsker etter transkripsjonsnøkkel, og kvalitetssjekket i etterkant ved å sammenligne lyd- og bildeopptak med de skrevne transkripsjonene. Transkripsjonene ble skrevet på bokmål, for å sikre deltakernes anonymitet. Med dette kan nyanser i språket ha gått tapt. Sfard (2008) understreker at det er det observerbare det skal tas utgangspunkt i, og nyanser i språket er viktig å få fram. I transkripsjonene ble tallord skrevet med bokstaver slik de ble uttrykt, og ikke med symboler for å få fram nyansene i kommunikasjonen. Samtidig ble det skriftlige arbeidet til elevene brukt for å få fram elevenes nøyaktige skrivemåte. En pause på tre sekunder er markert slik (3.), mens en pause kortere enn ett sekund er markert (.). Når deltakere snakket samtidig ble teksten markert med klammer [], og når en deltaker fullførte en annen deltakers resonnement, ble tegnet ≈ brukt.

Under klasseromsobservasjonene var jeg ikke-deltakende. I intervjuene var jeg en mer sentral deltaker. Thagaard (2013) beskriver forholdet mellom forsker og deltakerne og en gjensidig påvirkning i dette forholdet. I denne studien er dette forholdet mellom klassens matematikklærer, elevene og meg. I hvilken grad tilstedeværelsen jeg som forsker har påvirket situasjonen og deltakerne, er umulig å avgjøre (Thagaard, 2013), og situasjonen vil være situert. Ifølge Sfard (2008) vil jeg som forsker, uansett hvilken rolle jeg velger å innta, påvirke situasjonen med min tilstedeværelse. Dette gjelder også i valg av teori og analyse. Jeg kan velge å være *insider* eller *outsider*, og har valgt å være ulikt deltakende i situasjonene i denne studien. I intervjuene var jeg en del av diskursen der jeg stilte spørsmål og oppfølgingsspørsmål. Slik kunne jeg få belyst det jeg allerede der så at var interessant å følge videre med tanke på forskningsspørsmålene. I observasjonsøktene i klasserommet, var jeg en outsider og ikke-deltakende med lyd- og videokamera bakerst i klasserommet. I analysene har jeg også tatt begge rollene når jeg har prøvd å få fram en helhetlig analyse. Jeg gikk inn i studiet med det kommognitive rammeverket i ryggen samt bevisstheten om at jeg også hadde noen forutinntattheter fra tidligere erfaringer om hvordan elevers funksjonsdiskurs var. Mens datamaterialet ble samlet inn, ble forskningsspørsmålet utvidet til også å lete etter mulige påvirkningsfaktorer til elevenes diskursendring.

Forskers forforståelse må tas hensyn til og er noe man må være bevisst på. I de første intervjuene i september 2016 var forsker ukjent for elevene. I mars 2017 hadde elevene truffet forsker både i første intervju samt i observasjonsøktene i klasserommet. Det er naturlig at det er et maktforhold mellom forsker og deltakere, og uunngåelig at forsker påvirker diskursen (Kvale & Brinkmann, 2009). I intervjuene påvirket forsker diskursen ved å komme med oppfølgingsspørsmål, og prøvde å være oppmerksom på stemmeleie, kroppsspråk og ansiktsuttrykk. ”Hvorfor”-spørsmål ble brukt mest mot slutten av intervjuet, da dette kan gjøre situasjonen stressende for deltakerne (Kvale & Brinkmann, 2009).

4.4 Analyse av data

De første trinnene i analysen startet allerede i intervjuene, ved at jeg stilte oppfølgingsspørsmål for å sjekke at jeg hadde forstått det som ble sagt riktig. Mens transkripsjonene ble skrevet, ble det gjort en grovanalyse for å få oversikt over datamaterialet. I begge intervjurundene kom det fram diskurser om funksjonsbegrepet, stigningstall, konstantledd og ulike realisasjoner. Etter å ha transkribert intervjuene fra start til slutt, ble meningsinnholdet fortettet (Kvale & Brinkmann, 2009). Meningsfortetting er forkortede formuleringer av intervjudeltakernes ytringer der meningen i det som blir sagt blir gjengitt komprimert. Etterpå ble transkripsjonene analysert med fokus på elevenes rutinebruk som omhandlet stigningstall, konstantledd og omgjøring fra en realisasjon til en annen. Utsnitt av videoopptakene ble lagt ved for å forsterke elevenes visuelle diskurs. Hver ytring ble kategorisert og kodet som rituell, gjerning eller utforskende rutinebruk. Noen ytringer var vanskelige å kategorisere og flere ytringer har blitt diskutert med veileder. Ifølge Sfards (2008) rammeverk skal ytringene sees i sammenheng, og ikke hver for seg. Meningsfortetningen og rutinekategoriseringen foregikk over fire måneder.

Sfard (2008) påpeker at en rutine kan komme til uttrykk på forskjellige måter. Elevene er ulike, og noe som ser ut som en gjerning hos en elev, kan være en utforsking hos en annen elev. Tolkningene som kom fram har modnet over tid, og det er prøvd å ta hensyn til helheten. Datamaterialet ble forsøkt tolket objektivt og holistisk, der både egne tolkninger og andre mulige vinklinger er diskutert i analysen. Kategoriseringen av rutinebruken ble flere ganger gjennomgått for å kvalitetssjekke egne tolkninger, og små nyanser ble rettet opp. For å se på tydelige hovedtendenser ble det i første omgang talt opp hvor mange rutiner det var av forskjellig kategori i hvert intervju. Denne opptellingen bød på utfordringer som for eksempel hva som skulle gjelde som en ytring, og om det kunne være forskjellig rutinebruk i en og samme ytring. Flere utdrag fra disse sekvensene med rutinebruk er tatt med i resultatdelen for å synliggjøre rutinebruken.

Sfards (2008) rutinebruk er delt i tre kategorier som beskrevet i teorikapitlet og er brukt i analysen:

– En ytring ble kategorisert som *rituell* når ytringene bandt elevene sammen, og de imiterte noe som var blitt sagt før av en erfaren deltaker. Det kunne ikke argumenteres over *hvorfor* rutinen virket bortsett fra at det var noe de hadde hørt før.

Prat om det generelle funksjonsuttrykket for lineære funksjoner $y = ax + b$ der a og b er pugget, er kategorisert som rituell rutinebruk.

- En ytring ble kategorisert som en *gjerningsrutine* når det kunne observeres en endring av et objekt. Kan eleven gjennomføre å sette $x = 0$ i $f(x)$ er dette kategorisert som gjerning. Eleven kan ikke koble sammen resultatet med andre realiseringer som konstantleddet i uttrykket eller skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen.
- *Utforskende* rutinebruk ble gjenkjent ved at deltakeren produserte matematiske narrativer og argumenterte *hvorfor* de gjorde som de gjorde og *når* de kunne bruke det. Både godkjente og ikke-godkjente narrativer ble tatt med. Elevene var kritiske til egne forslag, evaluerte egne og andres ytringer.

For å svare på første del av forskningsspørsmålet ble det analysert sekvenser fra begge intervjurundene som var knyttet opp mot å bestemme stigningstall, konstantledd, omgjøring fra en realisasjon til en annen realisasjon og funksjonsbegrepet i elevenes diskurs. Etter å ha sammenlignet elevenes funksjonsdiskurs med sju måneders mellomrom, ble det søkt etter mulige årsaker til endringer i datamaterialet. Ut fra det begrensede, empiriske datamaterialet, ble det sett på om lærers diskurs i klasserommet og elevens diskurs om eget forhold til matematikk kunne se ut til å ha en innvirkning på elevenes diskursutvikling. Lyd- og videoopptakene fra klasseromsdiskursen ble hentet fram, og to økter ble transkribert og analysert på samme måte som intervjuene. Sekvenser fra første og siste undervisningsøkt ble valgt ut for å få fram lærers diskurs og se etter utvikling i diskursen. Ytringene i disse sekvensene ble også kategorisert etter Sfards (2008) rutinekategorier. Elevenes diskurs om eget forhold til matematikk er i hovedsak hentet fra intervjuene, og flere sekvenser der elevene uttrykker noe om eget forhold til matematikkfaget er tatt med i resultatdelen.

4.5 Validitet og relabilitet

Validiteten til en studie viser oss "i hvilken grad en metode undersøker det den er ment å undersøke" (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 251), og kan økes ved at utvalget blir beskrevet detaljert. Dette har jeg forsøkt å gjennomføre gjennom å redegjøre for hvordan og hvorfor jeg har tatt de valgene jeg har tatt. Ved å argumentere slik at leseren kan stole på de tolkningene som presenteres, økes troverdigheten (Kleven, Tveit, & Hjardemaal, 2014). I resultatdelen er det lagt vekt på flere utdrag fra transkripsjonene for å synliggjøre rutinebruken og realiseringene som kom fram under intervjuene eller observasjonene. Transkripsjonene er så nært opp til primærkildene jeg kan komme samtidig som jeg opprettholder anonymiteten til deltakerne. Datainnsamlingen er gjort i en situert situasjon der kontekst og utvalg ikke kan gjenskapes. Utvalget i denne studien stemmer overens med det forskningsspørsmålene har som fokus, og kunne ikke vært gjennomført som et fysikkforsøk med variabelkontroll (Kleven et al., 2014). Variabelkontrollen må byttes ut med rike beskrivelser av valgene som er tatt og hvorfor de er tatt.

I kvalitativ forskning erstattes ofte reliabilitet med pålitelighet eller troverdighet, og henger sammen med at andre kan komme til samme eller lignende resultater ved å gjøre en lik studie. Det er vanskelig å etterprøve metoder som intervjuer og observasjoner i klasserommet, da kontekstene er unike og avhengige av mange forhold. Selv om jeg hadde intervjuet samme personen på nytt er det usikkert om personen ville gitt de samme svarene (Kvale & Brinkmann, 2009). Hva forsker har fått med seg av datamaterialet og hvordan forsker tolker datamaterialet påvirker relabiliteten til studien. I denne studien er datamaterialet dokumentert med lyd- og videoopptak og transkribert etter transkripsjonsnøkkelen nevnt tidligere. Fortolkningen av resultatene må samsvare med analysene og være konsekvent gjennomført (Kvale & Brinkmann, 2009; Silverman, 2011). Resultatene må også være grunnet i den kommognitive teorien som er valgt som analyseverktøy.

4.6. Etiske perspektiver

Forskningsetiske vurderinger har preget de valgene som er tatt i prosessen. Forskningen ble basert på frivillig deltakelse hvor forskeren ønsket å studere deltakernes funksjonsdiskurs. Forsker har etter beste evne prøvd å legge til rette for et miljø som ble oppfattet trygt og positivt for deltakerne.

Denne masteroppgaven inneholder beskrivelser og analyser av funnene, men vil ikke gjengi enkeltdeltakernes informasjon. Grunnet innsamlingen av personopplysninger er prosjektet meldt til NSD, der veileder står som prosjektansvarlig. Deltakerne i prosjektet er elever på 16 år, og over aldersgrensen der de selv kan regnes for å ha slik samtykkekompetanse (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2016). Lærer og elever ble informert skriftlig om prosjektets omfang, og underskriftsskjemaet ble utformet slik at elevene kunne samtykke til at forsker observerte klasseromsundervisningen og likevel kunne trekke seg fra å delta i intervjuene (se vedlegg). Elevene hadde mulighet til å uttrykke om de ønsket å delta eller ei (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2016). Én elev reserverte seg mot å bli intervjuet.

Jeg har skrevet under på fylkeskommunens taushetspliktavtale, og ved prosjektets slutt slettes alle kopier av opptak.

Jeg har etter beste evne prøvd å gjøre en objektiv analyse av datamaterialet ut fra teorien i det kommognitive rammeverket (Sfard, 2008) uten å blande inn personlige meninger. Transkripsjonene som er beholdt er anonymisert med fiktive navn, og ved å anonymisere data har jeg prøvd å ivareta deltakernes integritet (Thagaard, 2013).

Resultatene må sees i sammenheng med forskningsspørsmålet, metoder og utvalget som det er tatt utgangspunkt i. Hvis leseren av analysene kjenner seg igjen og opplever at resultatene kan overføres, er det opp til leseren. Analysen er et eksempel på hvordan Sfards rammeverk kan brukes som analyseverktøy.

5. Resultater og analyse

Å produsere godkjente, sanne narrativer, er hovedmålet med å utføre matematikk ifølge Sfard (2008). For å kunne produsere narrativer må elevene bruke rutiner, og for å kunne observere hvordan dette gjøres, må elevenes rutinebruk i oppgaveløsning være i fokus. Sfard (2008, s. 111) påpeker at "a concept is a symbol together with its uses". For å kunne tolke elevenes rutinebruk og hvordan den har endret seg fra første intervjurunde i september 2016 til andre runde i mars 2017, er det tatt utgangpunkt i elevenes oppgavediskurs i fokusgruppeintervjuene. Elevenes ytringer er kategorisert i ritualer, gjerninger og utforskende rutiner. En ytring som er rituell hos en elev kan være utforskende for en annen, og Sfard (2008) peker på at helheten må tas med når man prøver å kategorisere rutinebruken og ikke se på isolerte ytringer.

Resultatdelen er delt i to hoveddeler. Første del tar utgangspunkt i utvalgte sekvenser fra intervjuene i september og mars, der ytringene er analysert med tanke på elevenes rutinebruk. Visuelle mediatorer, ordbruk og narrativer er ikke hovedfokus, men diskuteres der det er naturlig. Sekvensene fra intervjuene er valgt ut for å nyansere elevenes diskurs om lineære funksjoner med fokus på rutinebruken. Første del er delt i tre underdeler og hver del inneholder sekvenser fra både septemberintervjuet og marsintervjuet. I den første delen fokuseres det på elevenes rutiner med å identifisere konstantleddet. Den andre delen tar for seg rutiner som kommer fram i oppgaver knyttet til stigningstall. I siste del sees det på hvordan elevene definerer funksjonsbegrepet og hvilke rutiner elevene viser når de omgjør mellom representasjonsformer samt bruker funksjonsuttrykket til å finne funksjonsverdier når x er gitt. Avslutningsvis sees det etter endring i funksjonsdiskursen hos elevene fra september 2016 til mars 2017. Den andre hoveddelen tar for seg mulige årsaker til den observert utviklingen. Det sees på lærers funksjonsdiskurs som inkluderer lærebokdiskursen og elevens diskurs om eget forhold til matematikkarbeid.

5.1 Del I: Elevens diskursendring fra september 2016 til mars 2017

Det første intervjuet i september 2016

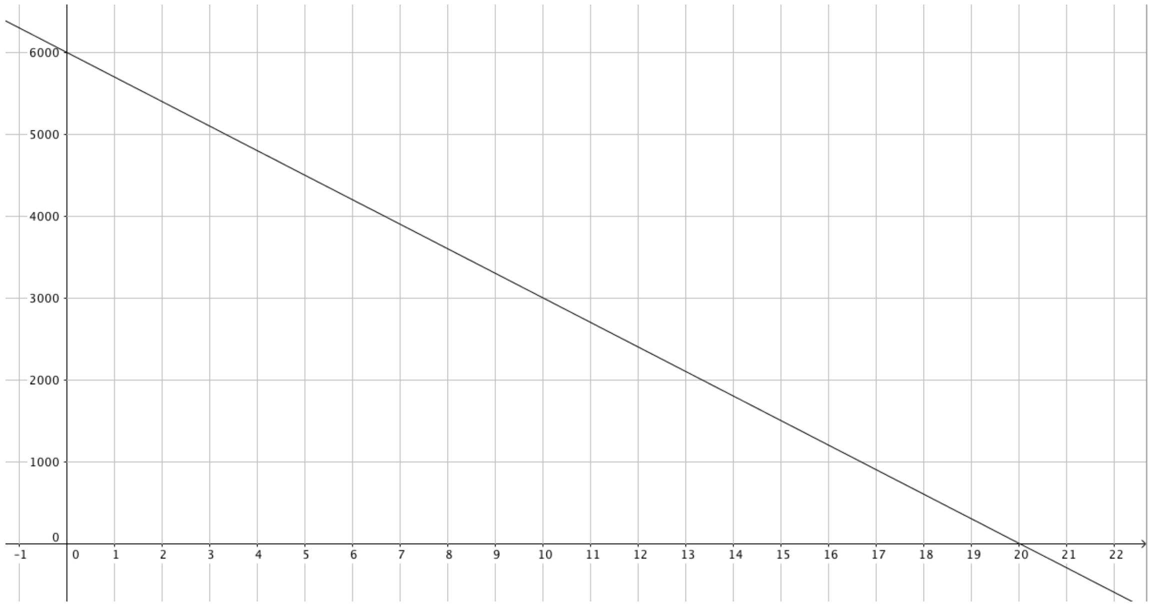
Elevene hadde gått en måned på videregående skole da det første intervjuet ble gjennomført. På grupperommet der intervjuet ble gjennomført tok elevene ordet, ofte på eget initiativ og ellers ved at forsker spurte hver enkelt etter tur. Elevene virket spente før intervjuet, og tonen var munter gjennom hele intervjuet. De visste at temaet for intervjuet var funksjoner, og at det var det de kunne fra ungdomsskolen som stod i fokus i første omgang.

Intervjuet i mars 2017

Da forsker møtte de samme elevene til nytt intervju i mars 2017, hadde elevene gått i klasse med hverandre i sju måneder, og de hadde flere erfaringer med matematikkundervisning i videregående skole og med hverandre. I tillegg hadde de vært gjennom undervisning om funksjoner og andre emner i faget Matematikk 1P. Den ene gruppa var fulltallig mens den andre gruppa manglet en fra den opprinnelige trioen. Dette kan ha hatt en innvirkning på dynamikken i gruppa og på diskursen som kom fram i intervjuet.

5.1.1a Konstantleddet – september 2016

Begge gruppene var samkjørte i diskursen om konstantledd, og sekvensen under er tatt med for å illustrere hvordan elevenes diskurs utartet seg da de tok utgangspunkt i en konkret oppgave. Elevene ble presentert for grafen under med spørsmål om å beskrive sammenhengen, og dialogen under grafen oppstod umiddelbart etter dette. Oppgaven er laget av forsker.



Figur 7: Oppgave 1 fra septemberintervjuet. Beskriv grafen (se intervjuguide).

142.	*Mari:*	*Det ser jo faktisk ut som at det har blitt mindre av et eller annet. Siden det går fra oppe her (peker på skjæringspunktet med y-aksen) og så går det jo ned (følger grafen med pekefingeren) til minus, (.) så det er noe som (3s) ≈*	*U*
143.	*Berit:*	*≈ For eksempel da, han har sekstusen kroner liksom, og på dag seks så har han liksom firetusen. (2s) Ja.*	*U*
144.	*Lisa:*	*Det kan være sånn at han betaler ned et lån, og på så og så mange uker har han betalt det ned liksom. Eller dager. Eller vet ikke jeg.*	*U*

I sekvensen over var alle de tre jentene verbalt aktive. De pratet med få pauser, og de virket samkjørte. Det kunne virke som om situasjonen og oppgaven var velkjent, og de virket avslappet og satte grafen i kontekst uten betenkningstid. Mari produserte i ytring 142 en kontekst til grafen, der Berit og Lisa knyttet flere detaljer til konteksten. Grafen ble til et lån på 6000 kroner som skulle tilbakebetales over tid. Jentene produserte godkjente narrativer, og det kan være et tegn på at rutinen var utforskende (Sfard, 2008). Kreativiteten som kom fram i konteksten tydet på at jentene hadde kjennskap til grunnleggende, generelle rutiner. Å være kreativ defineres av Sfard (2008, s. 219) som at man er i stand til å anvende rutiner i ikke-rutine handlinger, noe som også er tegn på en utforskende rutine (Sfard, 2008). Om dette var en ikke-rutine-situasjon for jentene er usikkert, men det var ikke en oppgave de hadde øvd på i forrige matematikktime. Mari tok utgangspunkt i der grafen skar *y*-aksen og knyttet dette opp mot lånets størrelse på 6000 kroner. Det var ingen av jentene som uttrykte at lånet var på 6000 kroner når *x* var null ($x = 0$), men ut fra konteksten kunne det se ut som at dette var opplagt for jentene selv om formell notasjon ikke ble brukt. Elevene brukte ikke begrepet konstantledd i oppgavediskursen, men de viste at de kunne bruke det i praksis. Berit illustrerte også hvordan hun kunne lese av grafen når hun tok utgangspunkt i dag 6 og leste av at det da var omtrent 4000 kroner igjen å betale på lånet. Berit leste av grafen og tolket informasjonen i den selvproduserte konteksten og viste at hun kunne knytte det til når og hvorfor i tillegg til hvordan, som er tegn på utforskende rutinebruk.

Tidlig i intervjuet forklarte elevene begrepet konstantledd på denne måten:

79.	*Berit:*	*Det er den du får uansett (peker på b-en i $y = ax + b$) som liksom ≈*	*R*
80.	*Lisa:*	*≈den forandrer seg ikke*	
81.	*Mari:*	*≈Ja, den forandrer seg ikke*	*R*
82.	*Berit:* *[Mari]:*	*≈Den er (3s) den står alltid der* *[Den forandrer seg (peker på b) men den er med liksom] (3s)*	*R*

Begrepet konstantledd ble forklart med flere upresise narrativer – som at det ikke forandret seg – og ordbruken virket frasedrevet. Å uttrykke seg presist matematisk muntlig er krevende (Naalesund, 2012), og elevene hjalp hverandre for å få gjennomført resonnementene sine. Berit knyttet begrepet til b-en i det generelle funksjonsuttrykket for en lineær funksjon $y = ax + b$ som virket kjent for elevene. Det virket som at de hadde pugget det generelle uttrykket og at b-en het konstantledd. Elevene virket samstemte i forklaringen, og frasene bandt dem sammen; det virket som om det var noe de hadde fått med seg ved imitasjon fra tidligere skolegang selv om alle hadde gått på ulike ungdomsskoler. Rønningstads (2009) resultater viser også at elever ofte bytter om på a-en og b-en, noe som er tegn på at de har prøvd å lære hvordan, uten å ha på plass hvorfor det er nettopp b-en som er konstantleddet. Elevenes rutinebruk i denne sekvensen ble derfor kategorisert som rituell.

Elevene viste både rituell og utforskende rutinebruk i oppgaveløsningen, og det ble produsert narrativer som kunne godkjennes av erfarne deltakere. Sfard (2008) påpeker at sekvensene ikke må sees på stykkevis, men at helheten må tas med i analysen. Elevene viste at rutinebruken ble mer utforskende da de tok utgangspunkt i en konkret oppgave, og at den ble mer rituell da de tok utgangspunkt i det generelle funksjonsuttrykket $y = ax + b$, og skulle forklare noe generelt. Formell notasjon ble ikke brukt.

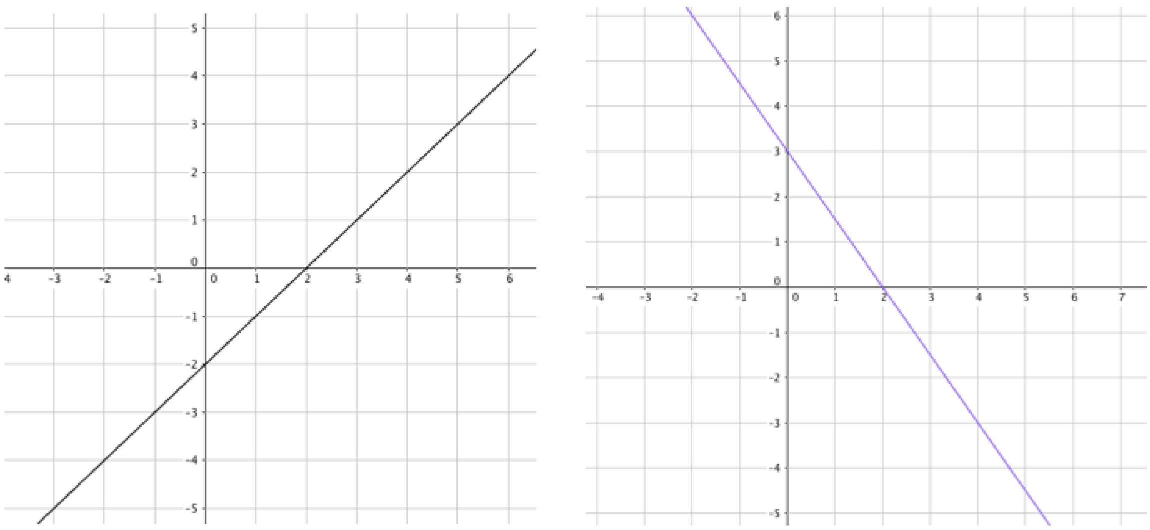
5.1.1b Konstantleddet – mars 2017

Under følger en oppgave elevene jobbet med i marsintervjuet. Oppgaven er laget av forsker, men lignende oppgaver er representert i elevenes lærebok (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl, & Hals, 2014), andre 1P-lærebøker og i eksamensoppgaver. Elevene beskrev grafene, for så å finne et tilhørende funksjonsuttrykk.

Oppgave 1

1. Beskriv grafene.
2. Finn funksjonsuttrykkene som passer til grafene

A B



Figur 8: Oppgave 1 fra marsintervjuet (se intervjuguide).

Elevene brukte ingen betenkningstid før de kommenterte grafene. Konstantleddet var det de kommenterte først, noe de uttrykte som enklest å bestemme ut fra grafen. Elevene pekte på skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen, var samstemte om at konstantleddet var *minus to* for graf A og *tre* for graf B. Kommunikasjonen bandt deltakerne sammen. Det virket som om elevene imiterte noe de hadde sett læreren gjøre flere ganger når de pekte på skjæringspunktet mellom graf og y-aksen og koblet dette med konstantleddet. En erfaren deltaker kunne løst oppgaven på en lignende måte, men ville også koblet konstantleddet med andre realisasjoner som punktet $(0, f(0))$. Ifølge Sfard (2008) skal helheten i diskursen tas med og ikke analyseres stykkevis og delt, og ut fra det som ble sagt senere i diskursen, ble ikke disse ytringene kategorisert som utforskinger.

Sandra: *Du må se, dette er vel y-en er det ikke? (ler litt og ser bort på Viola)(.) Måtte bare dobbeltsjekke. Da ser du hvor den treffer på y-aksen, det er der konstantleddet er. Det er der den skjærer med y. (3s) og det er liksom enklere å se enn det stigningstallet, for der ser du med en gang hvor den starter. (2s)...*

Elevene var enige om at det var enklere å finne konstantleddet enn stigningstallet til grafen. Hvorfor Sandra knyttet det sammen med hvor grafen *startet*, kan være fordi de fleste oppgavene hun har vært borti som omhandlet dette, har vært praktiske oppgaver der negative *x*-verdier har vært uinteressante, noe som også er nevnt hos Rønningstad (2009). Litt senere i intervjuet uttalte Sandra også at konstantleddet alltid stod sist i uttrykket. Rekkefølgen på leddene har ikke noe å si ifølge den kommutative loven, men eleven er begrenset til at leddene står i en fast rekkefølge. I det store bildet virket derfor rutinen rituell, en imitasjon av en erfaren deltaker (Sfard, 2008). Da forsker spurte om elevene kunne regne ut eller finne konstantleddet på en annen måte enn å se hvor grafen skar *y*-aksen, svarte elevene slik som vist i sekvensen nedenfor.

286.	*Sandra:*	*Ja, (3s) den ble jeg litt usikker på (ler litt)*	
287.	*Eline:*	*Det går an å regne det ut, men jeg vet ikke hvordan.*	
288.	*Sandra:*	*Siden det er matte, så går det sikkert an (ler litt)*	
289.	*Forsker:*	*Vi trenger ikke tenke så lenge på det (2s)*	
290.	*Sandra:*	*Nei, jeg har bare alltid lært at jeg skal se på konstantleddet først, og konstantleddet har alltid blitt vist uten at vi har trengt å regne det. (3s) Så det vet jeg faktisk ikke (3s)*	*R*

Elevene kunne finne konstantleddet ved å lese av hvor grafen skar *y*-aksen, men de kunne ikke knytte begrepet på andre måter. Begrepsbruken og rutinen virket imitert, og repetert så mange ganger at elevene kunne kommunisere på overflaten om begrepet. Sekvensen forsterket forskers inntrykk om at rutinen var rituell.

Da elevene fikk spørsmål om å finne *f(0)l* grafisk og tolke svaret avslørte elevenes ytringer at de hadde utfordringer med å knytte dette til et punkt på grafen. Elevene foreslo at det kunne være på *x*-aksen eller i origo, og viste gjentatte ganger en begrenset, rituell tilnærming til begrepet konstantledd. Det matematiske språket deres stemte ikke overens med godkjente narrativer. Elevene klarte ikke å knytte $(0, f(0))$ til et punkt på grafen. De så ikke sammenhengen, og dette kan være fordi hovedrutinen til eleven over tid har vært rituell. Med et slikt hovedfokus vil rutinen gradvis vokse til den kollapser (Heyd-Metzuyanim, 2015).

I ytring 292 var Eline i konflikt med seg selv; hun var forvirret i forhold til f av null. Var det ett punkt eller var det to punkt? Den formelle notasjonen kan være utfordrende og kreves i større grad i videregående skole enn i grunnskolen. Rutinebruken var dominert av rituelle rutiner der elevene ikke kunne redegjøre og knytte sammen det de fant ut.

292.	*Eline:*	*Det forblir bare ett punkt, det er ikke to punkt, det blir ett punkt, nei, jo, nei, vet ikke.*

I ytringene nedenfor prøvde forsker å få elevene til å tolke *f(0)* fra grafen. I ytring 304 kunne det se ut som om eleven mente at f av null hadde noe med origo å gjøre, og at grafen gikk gjennom origo da x var null ($x = 0$). At grafen er punkt satt sammen til en sammenheng, virket ikke tydelig for elevene. Selv da forsker spurte direkte om grafen gikk gjennom origo, og elevene samstemt svarte nei, viser ytring 304 at det hele var mystisk og uoppklart.

298.	*Forsker:*	*Kan dere tolke hva f av null er? Ut fra grafen? (5s)*
299.	*Sandra:*	*At den er i origo, siden da stiger den ikke med noe.*
300.	*Forsker:*	*Går grafen deres gjennom origo?*
301.	*Sandra: [Viola og Eline]:*	*Ja [Nei], ikke nå, ikke på den vi hadde sist.*
302.	*Forsker*	*Den som dere tegnet opp her tenkte jeg på nå*
303.	*Viola*	*Nei, den går ikke gjennom den*
304.	*Sandra*	*Nei, den går ikke gjennom. (3s) Men hvis du har f av null, så vil den sikkert gå gjennom.*

I disse ytringene var elevene ikke samstemte. Sandra som produserte flere narrativer, kan ha forvirret de andre. Medelevers utsagn kan skape usikkerhet, og her fikk ikke medelevene til å svare på Sandras forslag, samtidig som de ikke virket enige i alle narrativene som ble produsert. Det kom ikke fram at $(0, f(0))$ var et punkt på grafen, og rutinebruken ble kategorisert som rituell.

I september 2016 var det tegn til utforskende rutinebruk, og elevene leste av og tolket punktene på grafen inn i egen oppdiktet kontekst. Tolkingen av hva et punkt på grafen kan bety, ble ikke observert i mars 2017, og som Rønningstads (2009) resultater viser, ser det ut som at også elevene i denne studien har en metode å finne konstantleddet: å se på hvor grafen skjærer *y*-aksen. Elevene knyttet ikke dette mot andre realisasjoner. Det er utfordrende å omforme fra en representasjon til en annen (Janvier, 1978), og det virket som om elevene opererte i deldiskurser (Nachlieli & Tabach, 2012), men ikke kunne knytte disse sammen. At de kunne svare for seg angående dette i september, og ikke sju måneder senere, kan være tegn på at grunnlaget ikke er solid. Hvordan rutinene er blitt presentert for elevene har en innvirkning på hvilke muligheter elevene har på å utvikle rutinebruken (Nachlieli & Tabach, 2012). Sfard (1992) og Sierpinska (1994) påpeker at en funksjon bør presenteres som en relasjon, heller enn noe rigid og statisk. Hvordan læreren på ungdomsskolen har valgt å presentere dette, er utenfor denne oppgaven, men senere sees det på hvordan læreren i faget 1P legger dette fram for elevene. Lærers iherdige innsats til tross, trenger ikke å smitte over på elevene slik at de blir fleksible i omgjøring av representasjonsformer. Kan eleven svare på skoleoppgavene som blir gitt med denne ene metoden, kan eleven oppleve at han mestrer oppgaven å bestemme konstantledd, selv om han ikke er fleksibel i rutinebruken ut fra denne analysen. Hvilke problemer eleven møter på i undervisningen og i vurderingssituasjoner, kan spille inn på hvilke rutiner eleven selv mener at han trenger for å gjennomføre oppgavene.

5.1.2a Stigningstall – september 2016

Da elevene ble bedt om å lese av stigningstallet fra grafen, se figur 7, leste de raskt av et overslag om at det måtte være tre-firehundre kroner. Elevene virket ikke videre interessert i å svare helt nøyaktig, men etter oppfordring fra forsker om å finne eksakt stigningstall, utartet dialogen seg på jakt etter et presist stigningstall. Lisa startet litt famlende, og Berit mente at hvis de hadde hatt grafen på GeoGebra, hadde hun visst hvordan de kunne fått fram stigningstallet. Hun kunne gjennomført gjerningen eller prosessen på GeoGebra som førte til at de fikk fram stigningstallet, og var i dette øyeblikket fokusert på hvordan oppgaven kunne løses heller enn hvorfor og når. Dette kan sees i sammenheng med at rutinebruken var et ritual eller gjerning (Sfard, 2008). Når GeoGebra ikke ble tatt fram som hjelpemiddel, måtte de prøve å finne ut noe som de ikke helt visste hvordan de skulle gjøre, som kan sees på som et tegn på en utforskende rutine (Sfard, 2008). Forsker så ingen tegn til at de hadde en oppskrift som de kunne bruke for å finne en løsning.

170.	*Forsker:*	*Hvorfor sier du sekstusen delt på tjue?*	
171.	*Berit:*	*Fordi han har sekstusen på dag null og så er det tjue dager liksom*	*U*
172.	*[Mari]:*	*[Ja]*	
173.	*Berit:*	*Så da blir det (2s) da deler du sekstusen på tjue dager, og du ser jo at det går jevnt nedover≈*	
174.	*Mari:*	*≈Ja, og da kan du se hvor mye han betaler hver dag, liksom. (3s)*	*U*
175.	*Forsker:*	*Regn ut og så ser vi om vi er enige i overslaget deres.*	
176.	*Berit:*	*Trehundre (smiler) Vi hadde rett. (Alle smiler)*	

Berit trengte ikke mye starthjelp fra forsker før hun var i gang med å utforske videre. Her kunne forsker holdt seg mer i bakgrunnen slik at elevene kunne ha funnet ut av hvordan de kunne gjort dette helt selvstendig. Innblandingen fra forskeren kan likevel sees på som et eksempel på hvordan diskursen kan drives videre med en erfaren deltaker (Sfard, 2008). Det var ikke mye forsker bidro med, men fokuset så ut til å hjelpe elevene videre i diskursen som utartet seg til å dividere sekstusen på tjue for å finne stigningstallet. Forklaringen til Berit og Mari vitnet om at dette var noe de kunne sette ord på, og et tegn på at elevene var klar over *hvordan* og *når* de kunne bruke denne rutinen (Sfard, 2008). Grafen ble i utgangspunktet ikke presentert som en praktisk oppgave, men elevene hadde tidligere laget en kontekst til oppgaven som de videreførte. Etter å ha regnet ut kvotienten av 6000 og 20 og funnet at dette ble 300, kan smilene til jentene og kommentaren om at de hadde rett, være tegn på at de ikke hadde vært helt sikre på at rutinen ville gi dem det forventede svaret. Situasjonen kan ha gjort jentene mer nervøse enn de trengte å være. Rutinen ble kategorisert som utforskende. Å ha en erfaren deltaker i diskursen, kan hjelpe elevene til å få bekreftet egne forslag, slik at elevene er sikrere på at det de produserer stemmer (Sfard, 2008; Güçler, 2016). Basert på egne erfaringer er mange P-elever usikre på egen egne løsninger og trenger bekreftelse om at det de gjør er riktig.

5.1.2b Stigningstall – mars 2017

Da elevene ble bedt om å beskrive den tidligere nevnte oppgaven i figur 8, kom stigningstalldiskursen deres spontant fram. De trengte ikke betenkningstid før de fant at stigningstallet til graf A var en og at graf B sank med en og en halv. Sekvensen nedenfor utartet seg da forsker ønsket en forklaring på hvordan elevene identifisere stigningstallet.

93.	*Forsker:*	*Ok, kan dere forklare hvordan dere ser det?*	
94.	*Viola:* *[Forsker]*	*Du går bare en ut [mm] og så må du der du treffer linja≈*	*RG*
95.	*Sandra:*	*≈Ja, for eksempel på minus to så går du en ut og så går du rett opp, og så ser du at den treffer på der (peker fra punktet (0,–2) til (1,–1) mens hun forklarer) Og da går den bare opp en≈*	*RG*
96.	*Viola* *[Sandra]:*	*≈på den andre så må du gå ned, fordi den går nedover (ler litt)* *[Mm]*	*RG*

Forklaringen på hvordan elevene fant stigningstall fra en graf gjentok seg i hele intervjuet. Elevene fant et punkt som var enkelt å lese av – de tok for det meste utgangspunkt i der grafen skar *y*-aksen – og fulgte linja en til høyre, og så opp eller ned langs normalen til linja til de traff grafen. Her var *x*-aksen delt inn slik at rutene stemte overens med at *x* økte med en for hver rute, og elevene leste av med støtte i grafen. Uten å se denne sekvensen i sammenheng med resten av intervjuet, kunne gjerne rutinebruken blitt kategorisert som utforskende. Rutinene virket automatisert, men samtidig noe begrensende da elevene senere ble møtt med grafer der stigningstallet ikke var like enkelt å lese av direkte.

446.	*Forsker:*	*... Ser dere det på grafen eller går det an å regne ut stigningstallet? (7s)*
447.	*Mari* *[Berit]*	*Nei* *[husker ikke]*
448.	*Forsker:*	*Noen ganger er det lett å lese av, og noen ganger vanskeligere å lese av stigningstallet. Går det da an å finne stigningstallet på noen måte? (4s)*
449.	*Mari:*	*Det går sikkert, men tror ikke jeg kan gjøre det. (3s)*

Elevene viste at de kunne finne stigningstall til flere grafer ved hjelp av avlesing, men det virket ikke som om rutinen var preget av noe mer enn en imitasjon av noe de hadde sett erfarne deltaker hadde gjort før. Det at elevene kom til kort da de blir spurt om å regne ut stigningstallet, kunne tyde på at rutinene deres ikke var utforskende. Janvier (1978) påpeker at for å bli fleksibel, må de ulike representasjonene knyttes sammen, og elevene må få mulighet til å se sammenhengen mellom disse. Lignende kommunikasjon ble observert i begge fokusgruppene, og ut fra dette ble rutinebruken kategorisert som ritual eller gjerning. Når elevene manglet rutiner for det de skulle gjøre, ble det vanskelig å analysere rutinebruken. Elevene mente at de hadde vært borti noe, men de kunne ikke hente det fram. Rutinebruken kunne ikke kategoriseres som rituell, da elevene ikke hadde noe å imitere, men den kunne heller ikke kategoriseres som noe annet. Kategorien *uten rutiner og ikke-gjennomførbart* var ikke et alternativ. Ytringene ble analysert som passive (Sfard, 2008). Elevene uttrykte at de var usikre, og de klarte ikke å beskrive framgangsmåten. En erfaren deltaker som kunne dratt diskursen videre hadde vært nyttig her, men uten hint og veiledning kom ikke diskursen videre (Sfard, 2008; Güçler, 2016).

5.1.3a Funksjonsbegrepet med fokus på lineære funksjoner – september 2016

Da elevene fikk spørsmål om å definere funksjonsbegrepet i september 2016, ble spørsmålet introdusert ved å repetere at det de sa var det de husket fra ungdomsskolen, og at det var noe de ikke hadde vært borti på en stund. Denne introduksjonen kan ha vært med på å dempe prestasjonspresset på elevene. Elevenes umiddelbare definisjoner av objektet er samlet i sekvensen under:

145.	*Lisa:*	*Et bokstavuttrykk (2s) eller er det helt feil? (ler litt)*	*U*
146.	*Forsker:*	*Bokstavuttrykk (2s) vil du si noe mer?*	
147.	*Lisa:*	*Ja, eh (3s) det er bokstaver som står slik y er lik 2 og så skal vi bytte ut y-en med tallet og sånn≈*	*U*
148.	*Mari:*	*≈eller sånn y er lik for eksempel x pluss 2, eller noe sånn. Jeg tror vi brukte sånne funksjonsuttrykk når vi holdt på med GeoGebra eller noe sånt.*	*G*

Elevene produserte narrativer om at en funksjon var et bokstavuttrykk. De virket kritiske til egne utsagn og ønsket hjelp av hverandre. En elev laget et uttrykk ($y = 2$) som en annen elev justerte videre til $y = x + 2$, og ordet funksjonsuttrykk ble benyttet. Elevene produserte narrativer om funksjonen, ordbruken virket til dels frasedreven opp mot objektdrevet bruk (Sfard, 2008). Rutinen virket utforskende der elevene produserte narrativer som kunne godkjennes av en erfaren deltaker (Sfard, 2008).

Elevene presenterte flere ytringer som beskrev funksjonsbegrepet der variabelen x, a-en og b-en i den generelle funksjonsuttrykket for lineære funksjoner $y = ax + b$ ble kommentert.

71.	*Mari:*	*≈b-en er konstant og den (peker på x-en) er variabel, den (peker på a-en) er det samme uansett, og den (x-en) skifter du i forhold til hva spørsmålet er. (3s)*	*RG*
72.	*Lisa:*	*Hvis du skal gjøre en jobb, og så får du femhundre for jobben, og så får du, vet ikke, femti kroner i timen, så er det jo liksom femti x og så (2s) det du får for å gjøre jobben. Og så kan du lage en sånn graf (peker med fingeren i lufta og smiler litt)*	*U*

Elevene uttrykte selv at det var vanskelig å være presise i formuleringene. Ordbruken ble karakterisert som frasedrevet (Sfard, 2008), og elevene brukte egne ord. Der elevene ytret seg om det generelle uttrykket $ax + b$, virket rutinebruken rituell. Det virket som om dette var noe de har hørt flere ganger før og som de hadde pugget, og frasene knyttet deltakerne sammen (Sfard, 2008). Elevene bruket begrepet konstant som kan være et objektivisert ord i elevenes vokabular eller en imitasjon av lærer. Dette kom ikke tydelig fram. I ytring 72 virket rutinebruken av mer utforskende grad, der eleven produserte en tekstoppgave. Lisa knyttet sammen den egenproduserte tekstoppgaven med en graf som ble skissert i lufta, og viste at hun hadde flere representasjonsformer å velge i.

Alle elevene gjentok flere ganger at de var usikre da de skulle prøve å definere en funksjon. En elev svarte slik:

423.	*Viola:*	*Det er litt sånn lett å blande med ligninger og bokstavuttrykk og funksjoner (3s)*

Det er knyttet ulike rutiner til områdene ligninger og funksjoner, selv om ordene flere steder brukes om hverandre. Viola satte oppmerksomheten mot at det kunne være lett å blande sammen ulike begreper. I en ligning er x ukjent og skal isoleres og bestemmes. I et funksjonsuttrykk er x den uavhengige variabelen som velges fritt for å beregne funksjonsverdien $f(x)$, og x-en har forskjellig rolle i ligninger og funksjonsuttrykk. Samtidig kan et ligningssett løses grafisk, og det er mulig å være enig med eleven om at det er mulig å trå feil her.

Videre forklarte elevene at funksjoner kunne representeres på ulike måter som under her:

424.	*Sandra:*	*... du kan lage funksjoner sånn diagrammer og sånn. Du kan bruke det≈*	
425.	*Viola:*	*≈grafer liksom.*	*Graf*
426.	*Viola:*	*Eller du kan sette opp tabell (3s)*	*Tabell*
427.	*Viola:*	*Eller du kan sette liksom, du skal kunne sette tall inn i bokstavene så skal du fortsatt opp eller være det samme som det var. (3s) Altså≈*	
428.	*Sandra:*	*≈Jeg forstår hva du mener*	
429.	*Viola:*	*Hva er det jeg prøver å si nå? (3s) (Ler høyt)*	
430.	*Sandra:*	*Det er liksom sånn at du har en ukjent for eksempel du vet ikke for eksempel hvor mye en ting koster liksom, og så skal du se for eksempel hvis noen får lønn, da skal du se hvor mye lønn du trenger for å kjøpe den ene tingen og sånn, og da blir det til at du må ha en ukjent for du vet ikke helt hvor mye det for eksempel koster, og så når du får vite prisen, kan du sette det inn i prisen og det blir det samme fortsatt. på det diagrammet og sånn*	*Kontekst*
431.	*Forsker*	*Når du sier diagram mener du graf da?*	
432.	*Sandra*	*Ja, graf, sånn forskjellige sånn, enten buet eller rett.*	*Diagram =graf*

Ut fra elevens diskurs om ulike representasjonsformer som det er vist et utdrag fra her, ble det laget et realisasjonstre der de ulike representasjonsformene ble satt i system. Elevene knyttet sammen både grafer, tabell og en tekstoppgave da de forklarte. I ytring 427 kunne det virke som om Viola prøvde å forklare hvordan et funksjonsuttrykk kunne lages. Elevene uttrykte også her at ytringene deres ikke var presise og at det var vanskelig å forklare; de trengte støtte fra hverandre. Ordbruken ble kategorisert som frasedrevet, men da elevene dro inn a og b i diskursen, virker ordbruken mer rutinepreget (Sfard, 2008). Elevene var kritiske til egne og andres utsagn, og produserte narrativer som beskrev funksjonsobjektet, noe som er tegn på at rutinebruken var utforskende (Sfard, 2008).

I en konkret oppgave der elevene skulle bestemme hvilke av funksjonsuttrykkene som var lineære, kom det fram at de syntes det var vanskelig å se for seg hvordan grafen til funksjonsuttrykket ville se ut.

Hvilke sammenhenger er lineære?

A. $y = 2x$

B. $y = -2x - 0{,}5$

C. $y = \frac{3}{x}$

D. $y = \frac{x}{3}$

E. $y = \frac{1}{3}\,x$

F. $y = -0{,}5x - 5x$

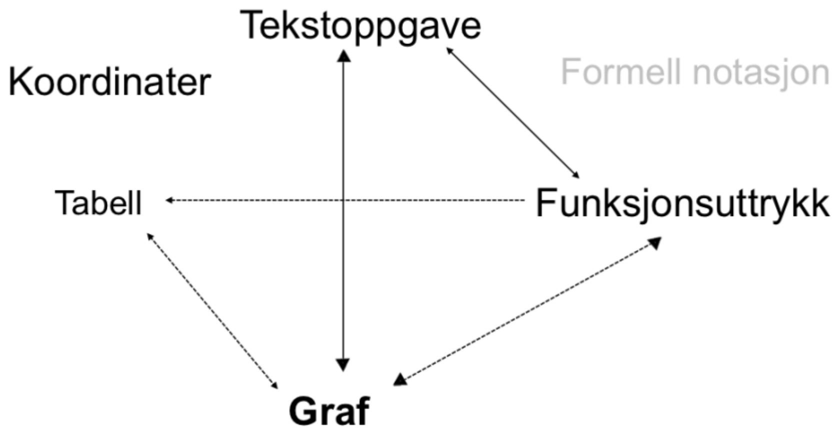
G. $y = 0{,}5x \cdot x$

Figur 9: Bilde av oppgave opprinnelig hentet fra (Maugesten & Torkildsen, 2008, s. 33).

314. Mari: ... Jeg synes det er enklere når jeg har GeoGebra foran meg. Det er vanskelig å se, jeg synes det er, jeg vet ikke, jeg klarer ikke å se det liksom.

Flere elever mente det var vanskelig å bestemme om uttrykkene var lineære, og at det ble enklere hvis de fikk omgjort uttrykket til en graf. Rutinen ble dermed kategorisert som utforskende. Ved hjelp av GeoGebra ble funksjonsuttrykkene raskt omgjort til grafer, der samtlige elever konstaterte om grafen var lineær eller ikke, eller slik elevene selv ordla seg *om grafen var rett*. Funksjonsuttrykket er abstrakt og ofte vanskelig for elever å se for seg. Resultatene her viser at eleven ser funksjonen for seg når grafen er tegnet, men finner det utfordrende å lese egenskapene til funksjonen ut fra funksjonsuttrykket. Grunnleggende ferdigheter som algebra og aritmetikk må være på plass for at rutinen om å finne funksjonsuttrykket skal bli mer enn ritualer. Å ha disse grunnleggende ferdighetene på plass for å jobbe med matematikk som bygger videre på dette, påpekes både av Naalesund (2012) og Nachlieli og Tabach (2012).

Elevenes realisasjonstrær var ikke identiske (Sfard, 2008; Nachlieli & Tabach, 2012), og realisasjonstreet som er skissert nedenfor, ble laget ut fra observasjonene i fokusintervjuene i september 2016. Samtlige piler i illustrasjonen pekte begge veier. Representasjonen graf ble skrevet med fet skrift for å symbolisere at det var denne representasjonsformen elevene brukte mest, og virket mest komfortabel med. Tabell ble skrevet med mindre skrift, og var inkludert i elevenes diskurs i noen av oppgavene. Ved bruk av GeoGebra i oppgaveløsningen, forsvant tabellen helt. Elevene nevnte ikke tabell som et mulig hjelpemiddel til å visualisere hvilke uttrykk som var lineære, men visste at det var en sammenheng mellom representasjonene funksjonsuttrykk og graf, der elevene foretrakk graf som var enklest å se for seg. Det er utfordrende å omforme mellom representasjonene, og se sammenhengene mellom de i stedet for å operere i ulike deldiskurser (Nachlieli & Tabach, 2012).



Figur 10: Ulike elevrealisasjoner av funksjonen i september 2016.

Selv om elevene hadde laget kontekst til grafen samt identifisert både stigningstall og konstantledd i oppgaven i figur 6, brukte elevene tid på å komme fram til et generelt uttrykk som kunne passe til grafen. Å finne et algebraisk uttrykk som stemmer overens med grafen er abstrakt og krever at elevene har grunnlag i algebra og aritmetikk.

Elevene jobbet systematisk gjennom mange forslag før de mente de hadde kommet fram til et uttrykk som kunne stemme. De var kritiske til egne svar og produserte narrativer som kunne godkjennes og ikke-godkjennes av en erfaren deltaker (Sfard, 2008). Elevene utforsket mot et endelig forslag, hele tiden med et kritisk blikk på det de foreslo.

$y = 6000 - x$	$y = 6000x$	$y = 6000 - \frac{300}{x}$
$y = 6000x - 300$	$y = \frac{6000}{300x}$	$y = 6000 - 300x$

Figur 11: Forslag til funksjonsuttrykk i oppgave 1 i septemberintervjuet.

Elevene jobbet systematisk, brukte tid og ga seg ikke. Etter observasjonene å bedømme var dette noe som elevene ikke hadde en klar oppskrift på hvordan de skulle gjennomføre. Elevene stod igjen med to uttrykk, de to til høyre i forslagene og henvendte seg til slutt mot forsker og ønsker bekreftelse på egne tanker. Elevene ønsket forsker inn i diskursen, og forsker ble dermed en sentral, erfaren deltaker i elevenes diskurs (Sfard, 2008; Güçler, 2016). Etter å ha repetert det elevene hadde sagt om at grafen sank med 300 for hver dag, foreslo forsker at de kunne sjekke ut om uttrykkene deres kunne stemme ut fra opplysningene de kunne lese ut fra grafen. Elevene jobbet med utfordringen, med mulighet til å gjøre feil, være kritisk til egne utsagn og forslag som er tegn på utforskende oppgaver (Heyd-Metzuyanim, et al., 2015) som utvikler rutinebruken mot utforskende rutiner.

Elevdiskursen fortsatte slik:

239.	*Lisa:*	*Hvilken skal vi bruke da? Den (($y = 6000 - \frac{300}{x}$)) eller hvilken skal vi bruke? Den? (peker på $y = 6000 - 300x$)*	
240.	*Mari:*	*Hvis vi bruker den ($y = 6000 - \frac{300}{x}$) da (strekker seg mot kalkulatoren) kan vi≈*	*U*
241.	*[Lisa]:* *Mari:*	*≈[sekstusen minus trehundre delt på en]* *Nei, det blir gange en, må det da.*	*U*

Elevene hadde tidligere lest av og tolket grafen, og var ikke forvirret over hvordan de skulle knytte grafen til funksjonsverdien de skulle regne ut. Elevene valgte å sette inn $x = 1$ i begge uttrykkene, og konkluderte med at $y = 6000 - 300x$ stemte overens med grafen. Elevene jublet og virket tilfredse med å ha fått bekreftelse på at uttrykket stemte overens med det de kunne lese ut fra grafen. Likevel ville elevene sjekke at det også stemte for en annen x-verdi. De valgte å regne ut funksjonsverdien når $x = 20$, og fikk 0, som de igjen knyttet opp mot grafen. Funksjonsuttrykk er abstrakt for elevene, og de måtte overbevise seg selv med regneeksempler for å være komfortable med det generelle uttrykket de hadde funnet. Det er en fordel at elevene kan det grunnleggende før de går videre til diskurser der de skal bruke det grunnleggende videre (Naalesund, 2012). Ut fra forskers spørsmål trakk også elevene avslutningsvis sammenhengen mellom funksjonsuttrykket, konstantledd i uttrykket og skjæringspunktet med y-aksen, og stigningstallet med hvor mye det sank for hver tidsenhet x.

Elevene virket usikre og kritiske til egne forslag. En utforskende rutine bidrar ifølge Sfard (2008) til å etablere og ferdigstille en matematisk teori, som kan godkjennes av matematikere. I denne oppgaven var flere ytringer kategorisert som utforskende selv om eleven ikke nådde målet med å ferdigstille en matematisk teori. De var på vei, famlet og produserte også gale ytringer på vei mot å ferdigstille noe de mente var riktig. Om ytringene kan og vil godkjennes av matematikere, trenger ikke å være avgjørende. Med flere erfarne deltakere i diskursen kan rutinen få preg av mer utforskende grad som kan utvikle godkjente matematiske narrativer (Sfard, 2008; Güçler, 2016). Når elevene gjør feil, er dette et utgangspunkt for å komme videre og å lære noe nytt. Får ikke elevene denne muligheten, vil de mest sannsynlig ikke bli utforskende i rutinebruken (Heyd-Metzuyanim et al., 2015).

5.1.3b Funksjonsbegrepet med fokus på lineære funksjoner – mars 2017

Spørsmålet om å definere begrepet funksjon ble møtt med nervøse smil fra elevene i mars 2017, og elevene erindret nok at spørsmålet hadde blitt stilt tidligere. Nå hadde de gjennomført funksjonsundervisning i kurset 1P, og følte kanskje på presset om at de måtte prestere. Det ble en lang pause før en av elevene tok ordet:

60.	*Sara:*	*Jeg kan prøve (2s) Ok. Det er en likning som viser hvor ting begynner og hvordan det forandrer seg. For eksempel, si at du får konstantleddet som er to, da vil du si at det begynner på to for eksempel, og plutselig så leser du av grafen og ser at du øker med for eksempel to x, og det betyr at det stiger for hver gang med to, så jeg vil si at du kan se hvordan det forandrer seg, om det stiger eller synker. Det brukes ofte til sånne pengeoppgaver, og ser hvordan det forandrer seg over tid (3s)*

Her ble funksjonsbegrepet koblet sammen med likningsbegrepet, og ordbruken kan skape utfordringer hvis rutiner som hører hjemme i likningsdiskursen også brukes i funksjonsdiskursen. Videre ble grafen beskrevet med både konstantledd og stigningstall, to sentrale begreper. Det ble påstått at grafen starter i konstantleddet, noe som kan bety at eleven kaller punktet grafen skjærer y-aksen for konstantleddet. Ut fra dette ble det beskrevet at det gikk an å finne stigningstallet til grafen som var "to x". At variabelen blir tatt med som stigningstall kan tyde på rituell rutine. Til slutt ble funksjonsbegrepet satt i kontekst med et eksempel der penger endret seg over tid som i seg selv kunne virke utforskende, men som også kunne være en imitasjon av noe læreren hadde sagt i timene.

Under følger en sekvens der elevene diskuterte funksjonens utseende:

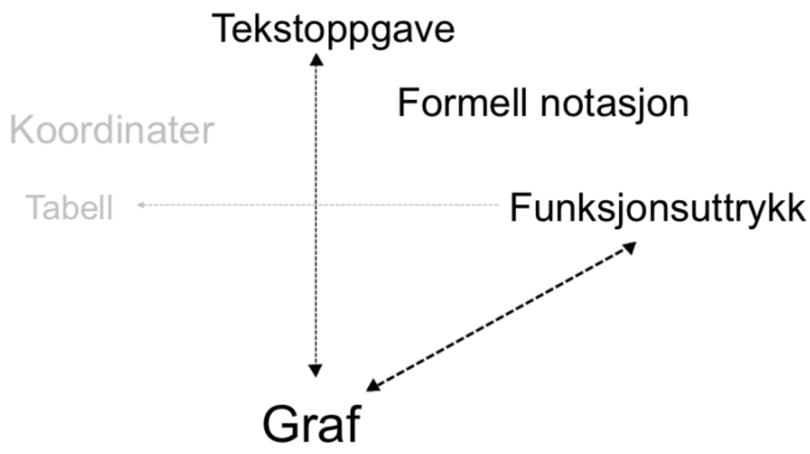
35.	*Forsker:*	*Hvordan ser en funksjon ut da?*	
36.	*Mari:*	*Hvis du mener grafen liksom eller mener du (2s)*	*Graf*
37.	*Forsker:*	*Jeg mener en funksjon. (2s) Da tenker du graf?*	
38.	*Mari: [Berit]:*	*Ja [Ja]*	
39.	*Berit*	*Når du sier funksjon, så tenker jeg graf.*	
40.	*Mari:*	*Ja, jeg også tenker graf nå liksom.*	
41.	*Forsker:*	*Går det an å tenke noe annet enn graf når jeg sier funksjon? Går det an å vise det på en annen måte enn graf?*	
42.	*Berit:*	*Likningen kanskje.*	*Likn*
43.	*Forsker:*	*Ja, ok.*	
44.	*Berit:*	*Uttrykket. Funksjonsuttrykket liksom.*	
45.	*Forsker:*	*Er det andre måter å vise funksjonen på? (3s)*	
46.	*Berit:*	*tabell?*	*Tabell*

For disse elevene kunne det virke som om graf og funksjon var synonyme begreper og at de assosierte begrepet funksjon med en representasjon av begrepet (Nachlieli & Tabach, 2012). Det var ikke før forsker kom med spørsmål om funksjonen kunne representeres på en annen måte at elevene kom med begrepene likning/funksjonsuttrykk og tabell. Elevene brukte først og fremst ord som graf og funksjonsuttrykk. Det virket som om erfaringene var begrenset til omgjøringer mellom graf og uttrykk, og motsatt vei. Det kunne se ut som om koblingen med tabell var svakere, og de hoppet konsekvent over tabell når de tegnet graf fra funksjonsuttrykk eller laget uttrykk fra en lineær graf i intervjuene.

47.	*Forsker:*	*Ja, mm, og så lurer jeg på her om denne sammenhengen her kunne vært representert eller vist på en annen måte (2s) enn med graf.*	
48.	*Eline:*	*Skrevet tabell*	
49.	*Forsker:*	*Ok, hvordan ville den tabellen sett ut? (3s)*	
50.	*Eline:*	*Du har en y-side og en x-side(3s) og så (2s) eh (ler litt) (2s) Husker ikke (ler litt)*	*R*
51.	*Forsker:*	*Går det an å lage en tabell ut fra opplysningene dere har i grafen her?*	
52.	*Sandra:*	*Jeg tror det, men jeg husker ikke helt hvordan vi laget den tabellen*	*R*
53.	*[Sandra]* *Viola:*	*[Nei]* *Du kan gjøre det til en likning*	
54.	*Forsker:*	*Mm*	
55.	*Sandra:*	*Ja, en likning er litt enklere*	

Ved direkte spørsmål om å lage en tabell ut fra en kjent graf, responderte elevene som i sekvensen over. Elevene kom selv med forslaget om at det gikk an å representere grafen som en tabell. De hadde vært borti at det var mulig å lage tabell ut fra opplysningene i en graf og så for seg en tabell med en x- og en y-side, men de kunne ikke gjennomføre. Når elevene ikke klarer å gjennomføre dette, kan gjerne ikke rutinen kategoriseres som rituell, men når elevene ser for seg en tabell med x- og y-side, er de på vei mot å imitere noe de har sett bli gjort tidligere.

Det ser ut som om at de ulike representasjonsformene har endret status siden september. I september 2016 inneholdt elevenes funksjonsdiskurs flere representasjonsformer enn i mars 2017. I mars var elevene mest fokusert på funksjonsuttrykk og graf, og omgjøring mellom dem, og helst tegnet de grafer ved hjelp av GeoGebra.



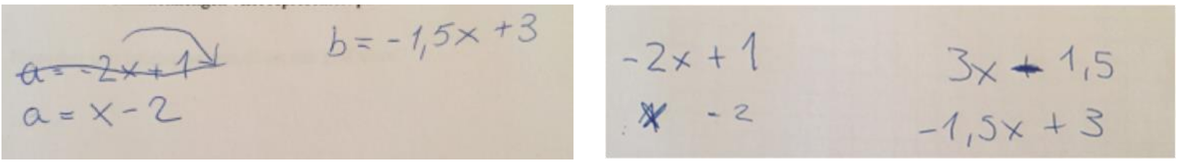
Figur 12: Ulike elevrealisasjoner av funksjonen i mars 2017.

Bildet over ble laget ut fra funksjonsdiskursen til elevene i intervjuene i mars 2017. Elevene nevnte at de laget tabell før de skulle tegne krumme grafer for hånd som for eksempel andregradsfunksjonen, men sløyfet den i lineære grafer. Da elevene ble bedt om å lage tabell ut fra en graf eller fra et funksjonsuttrykk, kunne ingen av deltakerne gjennomføre dette.

Da elevene ble presentert for de to lineære grafene i oppgave 1, figur 7, leste de raskt av konstantledd og stigningstall. Før elevene gav seg i vei for å bestemme et funksjonsuttrykk for grafen, knyttet de igjen begrepet likning til grafen:

110.	*Viola:*	*Du kan gjøre det til en likning.*	
111.	*Forsker:*	*Mm*	
112.	*Sandra:*	*Ja, en likning er litt enklere.*	

Nedenfor følger diskursen som utartet seg da elevene skulle bestemme et funksjonsuttrykk for graf A og B i oppgave 1 fra figur 7. Elevene hadde allerede bestemt konstantledd og stigningstall hver for seg, og skulle nå sette sammen funksjonsuttrykket. Prosessen var ganske lik i de to gruppene, og begge tok samme omvei, for så å kom fram til samme funksjonsuttrykk. Elevene trengte ikke betenkningstid før de svarte. Violas umiddelbare forslag var at uttrykket kunne skrives som $-2x + 1$ ut fra at stigningstallet skulle stå først i uttrykket. Siden det økte med en, la hun til det i uttrykket. Ut fra dette kunne det se ut som om rutinen for å finne funksjonsuttrykk fra en graf var rituell, der de tok utgangspunkt i det generelle uttrykket $y = ax + b$. Det var fokus på rekkefølgen på leddene, noe som ikke har noe å si. Samtidig blir ofte funksjonsuttrykket for den lineære funksjonen framstilt som $y = ax + b$, der stigningstallet a stort sett står først i uttrykket og konstantleddet b står sist. Det at elevene vurderte plasseringen av leddene her, er tegn på at handlingen var rituell og at begrepet ledd ikke var fullstendig etablert. Når grunnleggende diskurser ikke er skikkelig etablert, blir det vanskelig å bygge videre. Siden ingen av de andre elevene sa noe mer etter at forslaget var framlagt, stilte forsker spørsmål som kan ha ledet elevene til å tenke kritisk gjennom forslaget. Elevene diskuterte litt om plasseringen av konstantledd og stigningstall, og kom fram til at de hadde byttet om på stigningstallet og konstantleddet i forslagene sine, og endret uttrykket til $x - 2$ som på bildene under.



Figur 13: Elevforslag til funksjonsuttrykk til grafen A og B i oppgave 1 fra begge fokusgruppene.

Hvorfor elevene gjorde dette, har de forklart i sekvensen som kommer. De uttrykte at stigningstallet skulle stå sammen med x-en, at stigningstallet stod først i uttrykket og at konstantleddet var plassert til sist. Rutinene ble kategorisert som ritualer, noe de hadde imitert mange nok ganger til at de kunne gjøre det selvstendig. Elevene forsterket tolkningen av rituelle rutiner da de i ytring 140 og 141 ikke kunne forklare mer enn at dette bare hadde "festet seg". De kunne bestemme et funksjonsuttrykk som hørte til grafen, men kunne ikke bruke det til noe. Begge gruppene byttet om på konstantledd og stigningstall i uttrykket i første utkast, men ombestemte seg og kom fram til et uttrykk som kan godkjennes av en erfaren deltaker.

134.	*Forsker:*	*... hvorfor er dere mer enig i det siste som dere har skrevet enn i det første. Hva var det som skjedde da dere ikke var enige? [Viola ler]*	
135.	*Eline:*	*[mumler i munnen på hverandre] Vi fant ut at konstantleddet skulle være til sist.*	*R*
136.	*Sandra:*	*... Vi hadde liksom bare byttet om, når du skriver x så er det stigningstallet, mens minus to er konstantleddet.*	*R*

139.	*Forsker:*	*Er det noe dere har pugget at dere vet at stigningstallet står ved x-en og konstantleddet står til sist? Eller er det noe dere kan forklare mer?*	
140.	*Eline:*	*Det har bare festet seg i hodet mitt*	*R*

141.	*Sandra:*	*Det har bare festet seg i hodet (2s)*	*R*

I sekvensen under fra den andre gruppa, ble også konstantledd og stigningstall byttet om først, men deretter endret til riktig uttrykk (se bildet til høyre i figur 13). Elevene begrunnet svaret med å lage en tekstoppgave som passet til grafen, og argumenterte ut fra tekstoppgaven at funksjonsuttrykket deres måtte stemme. Elevene viste dermed tegn på en mer utforskende rutine, der de produserte en kontekst som passet til grafen og funksjonsuttrykket.

423.	*Mari: [Berit]:*	*Fordi at det er jo, linja treffer y-aksen på tre og det er jo det som er konstantleddet, for eksempel hvis det er ei oppgave der han hadde hatt for eksempel tre epler og så spiste han ett og ett halvt eple for eksempel, så er det jo det han [Ja] synker med hver dag liksom [Ja] (3s)*	*U*
424.	*Forsker:*	*Så den vil ikke stemme overens med grafen?*	
425.	*Berit*	*Fordi at x-en der er jo hvor mye den endrer hver dag, og da endrer den jo med en og en halv for hver dag (2s) men tre hadde han fra starten av.*	*U*

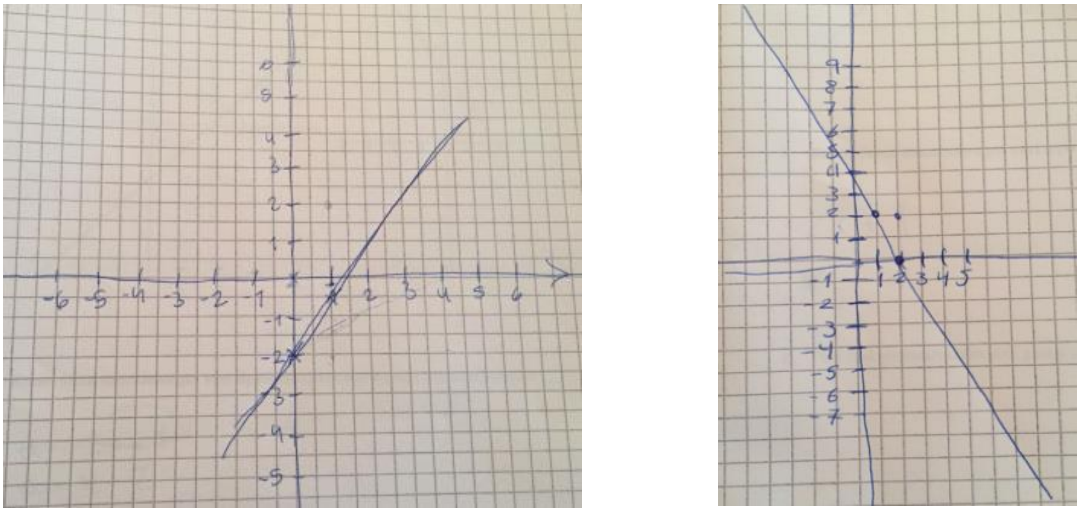
Da elevene i oppgave 2 fikk i oppgave å tegne graf fra funksjonsuttrykket, kom det fram at noen av elevene ble usikre av brøk i uttrykket. Den ene gruppa valgte derfor å jobbe med alternativ A, mens den andre gruppa jobbet med alternativ B. Kommunikasjon om heltall, desimaltall og brøk er grunnlaget som skaper utfordringer for elevene i funksjonsdiskursen, men er ikke først og fremst i fokus her. Ut fra observasjonene fra klasserommet var denne oppgavetypen noe elevene hadde blitt presentert for flere ganger, både på tavla og i oppgavene i læreboka.

Oppgave 2

Alternativ A. En funksjon f er gitt ved $f(x) = -2x + 4$ a. Tegn grafen til f når x er mellom -6 og 6. b. Regn ut $f(0)$ og $f(4)$. c. Finn $f(3)$ grafisk. Hva betyr $f(3)$? Kan du finne det på andre måter?	Alternativ B. En funksjon f er gitt ved $g(x) = \frac{2}{3}x - 2$ a. Tegn grafen til g for $-6 \leq x \leq 6$. b. Regn ut $g(-3)$, $g(-2)$ og $g(1)$. Hva betyr egentlig $g(-3)$, $g(-2)$ og $g(1)$? c. Finn $g(0)$ grafisk. Hva betyr $g(0)$? Kan du finne det på andre måter?

Figur 14: To alternative oppgaver (inspirert av observasjon av undervisningen og læreboka Sinus) med modifikasjoner.

Før elevene kom i gang måtte notasjonen $-6 \leq x \leq 6$ forklares. Elevene hadde sett notasjonen før, men de var usikre på skrivemåten. GeoGebra kom opp som et hjelpemiddel elevene kunne bruke i denne oppgaven. Samtidig var dette en type oppgave som de hadde tegnet for hånd flere ganger. Elevene tok utgangspunkt i konstantleddet og markerte punktet på y-aksen. Deretter brukte de rutinen beskrevet tidligere med å gå en til høyre for så å stige slik stigningstallet la opp til. Elevene som jobbet med B oppgaven koblet stigningstallet $\frac{2}{3}$ med desimaltallet 1,5. Selv om brøk og stigningstall ikke stemmer overens, tegnet elevene en lineær graf i koordinatsystemet som stemte med desimaltallet. Elevene som valgte å jobbe med $f(x) = -2x + 4$ jobbet på samme måte da de tegnet grafen som vist under. I $f(x)$ var stigningstallet negativt, og dette markerte elevene ved at grafen sank med 2 for hver gang x økte med en.



Figur 15: Graf tegnet av elever av funksjonsuttrykket $g(x) = \frac{2}{3}x - 2$ til venstre og $f(x) = -2x + 4$ til høyre.

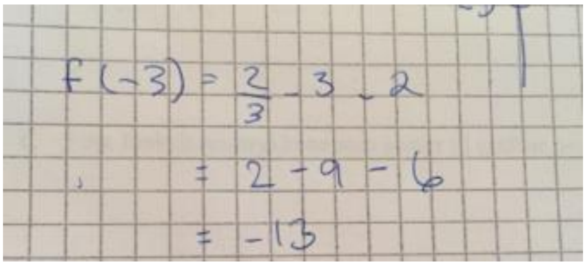
I oppgave 2b (se figur 14) ble elevene bedt om å regne ut funksjonsverdier der x var bestemt. Elevene satte dermed x-verdien inn i funksjonsuttrykket og regnet ut. I uttrykket $f(x) = -2x + 4$ oppstod ingen utfordringer i rutinebruken før elevene skulle forklare hva de hadde funnet ut, hva $f(0) = 4$ og $f(4) = -4$ betød. Det virket som om elevene utviklet en gjettelek der de foreslo mer eller mindre tilfeldige forslag til hvordan tallene kunne henge sammen med grafen, men knytter ikke utregningene til punkter på grafen. Selv med forskers spørsmål og hint, kom ikke elevene fram til noe de stod inne for. De prøvde å produsere narrativer, men var ikke enige med seg selv, og avsluttet uten konklusjon. De fant minus fire på aksene, men kobler ikke funksjonsverdien og x-verdien sammen. Å lese av $f(3)$ grafisk svarte elevene ikke på. De kom til kort da de skulle knytte punkt til grafen, og endte i et kommunikativt brudd (Sfard, 2008) eller taushet. Notasjonen kan ha stått i veien for eleven. Det er mulig at elevene ville ha koblet punktet til grafen hvis spørsmålet hadde vært hva f hadde vært når $x = 3$. Det ble gjentatt flere ganger muntlig at de skulle regne ut verdien da x var 3, men det er mulig at skrivemåten $f(x)$ satte dem ut.

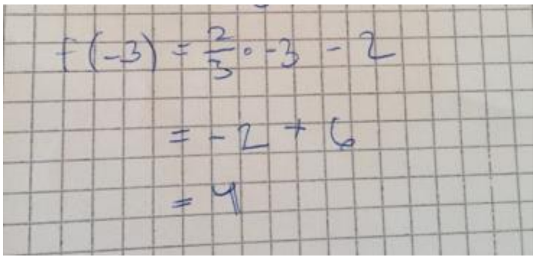
491.	*Forsker:*	*Dere vil ikke plassere dette resultatet her på grafen på noe måte, at det har en sammenheng? (12s)*	*spm*
492.	*Mari:* *[Berit]:*	*Jeg skjønner ikke helt jeg* *[Nei]*	
493.	*Forsker:*	*Nei, her har dere regnet ut f av null, sant, og det ble fire. Men hva betyr det egentlig? Det er det jeg lurer på. Hva har dere egentlig regnet ut? (11s)* *Eller her, var det f av fire her, det ble minus fire. Finner dere det igjen på grafen?*	*spm*
494.	*Mari:*	*Vi finner minus fire der (peker på arket) nei du gjør faktisk ikke det, da skulle du vært på denne. Det er jo ikke her. Det er jo x-aksen. Er ikke det x-aksen? (peker langs x-aksen) Og det er jo ikke minus fire der.*	

Elevene som jobbet med funksjonsuttrykket som inneholdt brøk som stigningstall, støtte på utfordringer da de skulle regne ut funksjonsverdien i tillegg til å knytte punktet til grafen. De famlet litt mellom flere mulige rutiner da de skulle regne ut $g(-3)$, og det kunne se ut som om brøken i uttrykket utfordret og hindret dem. Utfordringene kan skyldes tilstedeværelsen av negative tall og brøk, snarere enn funksjonens struktur alene (Kilhamn, 2011). Under vises to forslag elevene hadde for å regne ut $g(-3)$. I tillegg til at uttrykket inneholdt stigningstall som brøk, var også x-verdien negativ. Dette kan kreve mer av elevene, og gjøre dem usikre på framgangsmåte for å regne ut: $g(-3) = \frac{2}{3}(-3) - 2$.

227.	*Viola:*	*≈jeg kan gange det med tre og gange det med tre og gange det med tre (3s) (peker på hvert tall i uttrykket).*	*G*

Da de skulle regne ut funksjonsverdien som hørte til ulike x-verdier, støtte elevene på hindre innen brøk og algebra. Elevene var raske med å sette x-verdien inn i uttrykket, men var usikre på hvordan de skulle regne ut. Viola foreslo først som vist under at de kunne multiplisere alle ledd med tre, mest sannsynlig for å få bort nevneren i uttrykket. Elevene gjorde også noen *ulovlige* antakelser som berørte begrepet ledd, men dette fokuseres det ikke på her. Rutinen lignet noe som hørte hjemme i likningdiskursen. Der en likning kan multipliseres med samme faktor på begge sidene av likhetstegnet, kan man ikke benytte dette i et uttrykk som man skal beregne verdien av. Elevene uttrykte tidligere at dette var noe som enkelt kunne blandes, og viste at dette var noe som også forekom etter å ha jobbet med funksjoner i den videregående skole.





Figur 16: To elevforslag til hvordan man regner ut f(-3) = 2/3 (-3) – 2.

Da elevene ble bedt om å sammenligne tallene med grafen, ble det stille. En pause på 20 sekunder fant sted. Forsker hintet om at de kunne knytte verdiene opp mot punkt på grafen, men elevene knyttet ikke utregningene til grafen. Elevene pekte ikke på grafen for å konkludere at punktet $(-3, -13)$ ikke var et punkt på grafen, og de var tydelig usikre på om løsningsrutinen kunne gjennomføres slik de hadde løst det. Etter en tenkepause uttrykte Viola kritikk til egen løsning, og foreslo at de måtte regne ut som på figur 16 til høyre.

247.	*Viola:*	*≈Eh, jeg ble nå litt forvirra av den her likningen her, for det står jo to tredjedeler x minus 2, og da er det to tredjedeler gange minus tre minus to (3s) så (2s) hvis vent litt, jeg skriver om. gange minus tre minus to, så blir det minus to i stedet for to da eller?*	*G*

Muligens var det spor av likningsrutinen som fortsatt var tilstede, for elevene multipliserte begge ledd med (-3). Funksjonsverdien ble beregnet til 4, og ifølge elevene var dette mer riktig. Elevene knyttet ikke verdiene til punkt på grafen. Rutinebruken ble kategorisert som en gjerning, det ble regnet ut en verdi og objektet ble synlig endra. Det var vanskelig å kategorisere rutinen som rituell, da elevene gjennomførte med uttrykk som de ikke har jobbet med tidligere. De prøvde å gjennomføre rutinen, og endret på objektet som i dette tilfellet var funksjonsverdien. Samtidig fulgte de ikke opp rutinen med å knytte funksjonsverdien og punktet opp mot grafen for å sjekke ut om det stemte, og rutinen kunne ikke defineres som utforskende.

Elevene benyttet gjentatte ganger begrepet likning i stedet for funksjonsuttrykk i diskursen, spesielt i intervjuet i mars 2017. I tillegg blandet de inn rutiner fra likningsdiskursen da de skulle beregne funksjonsverdier med brøk i uttrykket. Den gruppa som valgte å gjennomføre funksjonsuttrykket uten brøk, viste ingen tegn til å ville bruke likningsrutiner i utregningen av funksjonsverdien. Dette ble kun observert da det var brøk i uttrykket, samt negativ x-verdi. Det er usikkert om dette kan skyldes upresis ordbruk der begrepet likning og funksjonsuttrykk brukes om hverandre, eller om det kan være når tallene representeres som annet enn positive heltall som hindrer elevene i å gjennomføre rutinene. Grunnleggende ferdigheter i algebra og aritmetikk viser seg å være utfordrende for deltakerne noe som også er vist før (Kilhamn, 2011; Naalesund, 2012).

5.2 Del II. Noen mulige årsaker til den observerte utviklingen

Mange faktorer kan spille inn på elevenes endring i funksjonsdiskurs i løpet av vg1. Her sees det på lærers diskurs og elevens eget forhold til matematikk som to faktorer som kan ha påvirkning på den observerte endringen. Hvordan lærebokas funksjonsdiskurs er, kan også være en mulig årsak til elevenes endring i diskurs, men har ikke fått egen plass i denne oppgaven. Elevene har selv sagt at de ikke har jobbet med læreboka utenfor skoletimene, og undervisningen har ikke bare vært lærebokstyrt. Læreboka sees derfor ikke på som en årsak isolert sett, men den er tatt med i sammenheng med hvordan elevene og læreren har brukt boka. Hvordan en lærer kan formes av læreverket er ikke hovedfokus her. Det henvises til Singhs (2017) analyse om blant annet det aktuelle læreverket Sinus for flere refleksjoner rundt dette.

5.2.1 Lærerens funksjonsdiskurs

Matematikklæreren og klasseromskulturen har innvirkning på elevene, og hvordan lærer legger til rette i klasserommet kan ha stor betydning for elevens motivasjon (Pintrich, 2003; Skaalvik & Skaalvik, 1998) og rutineutvikling (Heyd-Metzuyanim et al., 2015). I matematikkfaget bygger emnene på hverandre, og lærer må introdusere nye begreper i diskursen som leder mot læring på objektnivå. Ved også å invitere eleven til å bruke språket og *når* rutinene kan brukes, leder læreren elevene mot læring på metanivå (Sfard, 2008). Lærers tilrettelegging og diskurs kan stimulere elevene til å utvikle rutinene mot mer utforskende rutiner. Det ble flere ganger observert at den aktuelle læreren uttrykte at elevene ikke måtte være redde for å gjøre feil og at elevene måtte samarbeide, stille spørsmål og være aktive. Lærer poengterte at feil kunne være en god læringssituasjon som kunne gi elevene nye perspektiver.

To situasjoner er valgt ut for å illustrere funksjonsundervisningen i klasserommet. Den første situasjonen er hentet fra første time da funksjonsbegrepet ble introdusert for elevene, og den andre situasjonen er hentet fra en av de siste timene om emnet. Generelt kan lærers undervisningsrytme beskrives ved at timene startet med plenumsdiskusjon og tavleundervisning, der lærer og elever hjalp hverandre med å knytte sammen det de hadde jobbet med i forrige time, mot det som skulle læres i timen. Elevene ble oppfordret til å bidra i plenumsdiskusjonen, flere var aktive, men ikke først og fremst intervjudeltakerne. Elevene satt sammen i faste makkerpar, og læreren gav ofte disse parene i oppgave å repetere eller oppsummere sammen. Læreren la opp til flere aktiviteter der makkerparene samarbeidet, både praktisk og i små diskusjonsoppgaver. Elevene hadde fått utdelt en arbeidsplan i matematikk med oppgaver fra læreboka Sinus 1P (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl, & Hals, 2014). Det ble ikke observert at denne var i bruk i matematikktimene. I fem av femten timer jobbet elevene med oppgaver fra læreboka ut fra instruksjoner fra læreren, ellers jobbet de med andre aktiviteter som læreren hadde valgt ut, fra blant annet heftet Undersøkende matematikk (Jensen & Wæge, 2012). Noen timer hadde en oppsummerende avslutning, andre timer endte brått.

Introduksjon av funksjoner

Selv om dette var første time med funksjoner på videregående, burde ikke emnet være nytt for elevene. Ut fra kompetansemålene etter tiende trinn, skal elevene:

- lage funksjoner som beskriver numeriske sammenhenger og praktiske situasjoner, med og uten digitale verktøy, beskrive og tolke de og omsette mellom ulike representasjoner av funksjoner, som grafer, tabeller, formler og tekster.
- identifisere og utnytte egenskapene til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjoner og gi eksempler på praktiske situasjoner som kan beskrives med slike funksjoner.

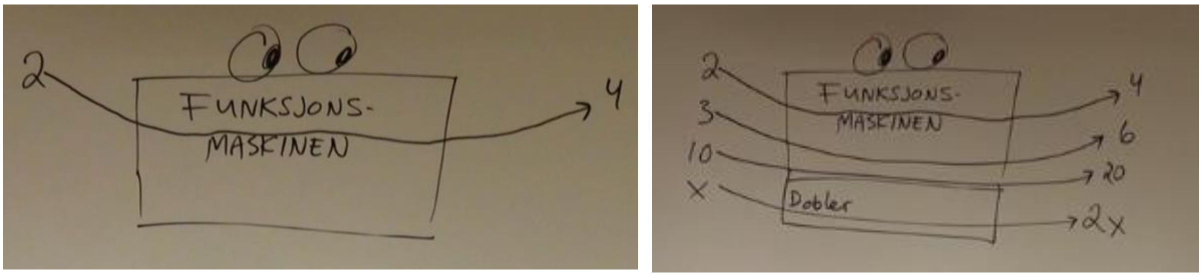
(Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 9)

Kunnskapsmålene for Matematikk 1P går litt videre, men ligner også noe på kompetansemålene for tiende klasse:

- gjøre greie for begrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske eksempler, også digitalt.
- omsette mellom ulike representasjoner av funksjoner
- undersøke funksjoner som beskriver praktiske situasjoner, ved å fastsette nullpunkt, ekstremalpunkt og skjæringspunkt og tolke den praktiske verdien av resultatene

(Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 11).

Læreren startet med at eleven kunne koble på sine forkunnskaper ved å spørre åpent om hva elevene kunne fra før. To elever svarte at dette hadde med algebra og GeoGebra å gjøre, men de aller fleste elevene sa ingenting i plenum. Det er mulig at elevene hadde hatt mer på hjerte om de hadde fått et minutt til å diskutere i makkerparet før de ble spurt i plenum. Elevene viste ved håndsopprekning at de hadde hørt ordet før, men ville ikke utdype dette. Læreren tegnet dermed en *funksjonsmaskin* på tavla. Hun førte tallet to inn i maskinen, og fikk ut fire, med etterfølgende spørsmål: Hva kan ha skjedd med det tallet?

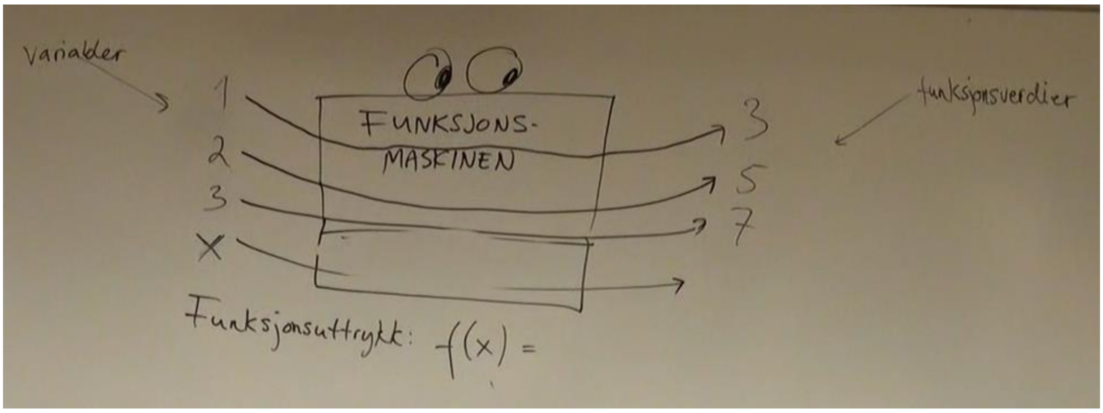


Figur 17: Bilder av tavla der funksjonsmaskinen som læreren brukte for å introdusere funksjonsbegrepet.

En åpen oppgave med flere mulige svar ble utgangspunktet for plenumsdiskusjonen og en mulighet for å lære og lete etter sammenhengen (Heyd-Metzuyanim et al., 2015; Walshaw, 2012). Flere elever kom med forslag etter at læreren gjorde dem oppmerksom på at det fantes flere mulige svar.

57.	*Lærer*	*.... Hva er det som har skjedd med det tallet? (3s)*	
58.	*Gutt 1*	*Det har doblet seg.*	*U*
59.	*Lærer*	*Det har doblet seg, det har det. Kunne vi sagt på en annen måte hva som har skjedd?*	
60.	*Jente*	*Det har blitt ganget med seg selv.*	*U*
61.	*Lærer*	*Det har blitt ganget med seg selv. (2s) Flott. (2s) Begge deler er helt riktig (2s) Er det andre ting vi kan si om det?*	
62.	*Gutt 2*	*Det har blitt plusset med to.*	*U*
63.	*Lærer*	*Ja. (2s) Fantastisk. Nå hiver jeg inn ett tall til, og da kan jeg avsløre at dette er den samme maskinen, så det skjer akkurat det samme når jeg putter inn disse tallene i maskinen. Det er akkurat det samme som skjer med tretallet som det skjedde med totallet. (2s) Og hva skjer med tretallet? (5s)*	

Elevene lette etter og måtte beskrive mønster, argumenterte for egne forslag, fikk muligheten til å gjøre feil og ble møtt med evalueringer av svarene fra både medelever og lærer som er tegn på undervisning som kan utvikle elevenes utforskende rutiner (Sfard, 2008). Det ble eksperimentert med regler som beskrev sammenhengen med ord, og så koplet sammen med et funksjonsuttrykk. Elevenes muntlige beskrivelse om sammenhengen mellom tallene ble ikke skrevet på tavla med ord, men gjentatt muntlig av lærer. Ordbruken var frasedreven (Sfard, 2008), og den virket som en god start mot å generalisere aritmetikk til algebraisk uttrykk. Dette er krevende for elevene, noe som bekreftes hos både Naalesund (2012) og Nachlieli og Tabach (2012). Aktiviteten ble først gjennomført med tre enkle funksjonsuttrykk, før læreren ledet elevene inn på en litt mer krevende sammenheng. Igjen ble det fokusert på at det kunne være flere mulige mønster som kunne passe mens det kun var valgt en x-verdi, men at funksjonsuttrykket var et mønster som skulle passe for alle x-verdiene med tilhørende funksjonsverdier. I tillegg til at læreren brukte begrepene variabel, funksjonsverdi og funksjonsuttrykk muntlig, ble de også skrevet ned på tavla i tilknytning til talleksemplene som ble brukt.

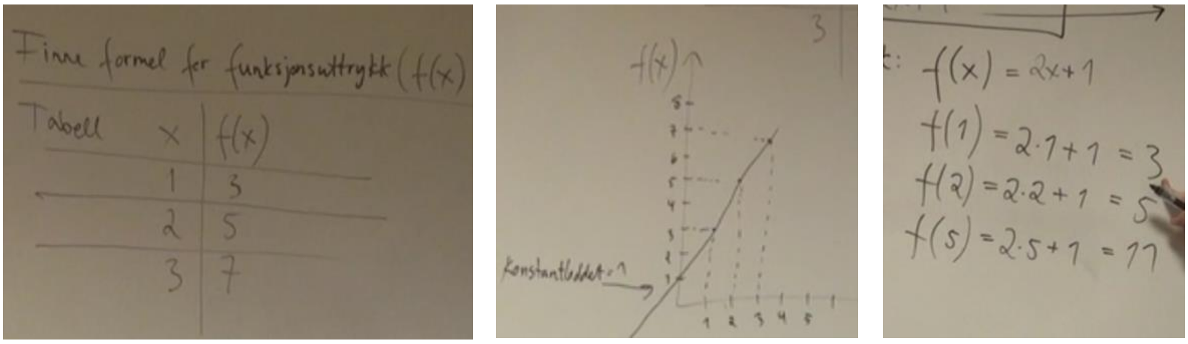


Figur 18: Bilde av tavla der funksjonsmaskinen som læreren brukte for å introdusere funksjonsbegrepet.

En elev beskrev mønsteret slik:

57.	*Jente*	*Du kan plusse med det tallet som er høyere enn seg selv.*	*U*
58.	*Lærer*	*De kan ha blitt plusset med et tall som er høyere enn seg selv. En pluss to er tre, to pluss tre er fem. Det kan være. Vi får se om det stemmer for neste tall. (.) Vet du hva, utrolig nok, så stemmer det faktisk. Det kan ha blitt plusset med tallet som er et høyere enn seg selv. (3s) Det passer faktisk for alle.*	*U*

Det virket som om læreren ikke hadde tenkt gjennom det forslaget eleven kom med, men vurderte at det stemte med opplysningene så langt, og ga elevene bekreftende tilbakemelding. Læreren utforsket oppgaven sammen med elevene, og var åpen for flere forslag enn de hun hadde tenkt gjennom selv. Læreren illustrerte videre at sammenhengen eller funksjonen, kunne representeres på flere måter. Hun tegnet tabell med x- og f(x)-verdier, plottet punktene i et koordinatsystem, tegnet graf og fant funksjonsuttrykket ut fra grafen ved hjelp av konstantledd og stigningstallet. Læreren visualiserte med både visuelle mediatorer, gester og ord, for at elevene skulle se sammenhenger mellom de ulike realisasjonene av funksjonen (Nachlieli & Tabach, 2012). Flere elever var aktivt med i samtalen, men få skrev av fra tavla og visualiserte denne sammenhengen i arbeidsboka si. Elevene kunne vært mer aktive og fått flere erfaringer ved å imitere læreren og visualisere dette i egen bok. Imitasjon av lærer kan gjøres på flere måter, og Sfard påpeker at imitasjon sammen med refleksjon kan være et godt utgangspunkt for læring (Sfard, 2008, s. 250). Hun hevder at slik rutinebruk også kan utvikles til mer utforskende bruk, som er den mest krevende rutinebruken. Dette fordrer at elevene aktivt reflekterer og imiterer læreren eller andre erfarne deltakere. I flere tilfeller oppfordret læreren elevene til å notere fra tavla, men ikke akkurat i dette tilfellet.



Figur 19: Ulike realisasjoner som ble visualisert av lærer på tavla av f(x)=2x+1 ut fra aktiviteten med funksjonsmaskinen.

Funksjonsuttrykket $f(x) = 2x + 1$ ble funnet fra grafen ved hjelp av stigningstall og konstantledd, og denne rutinen hadde et mer rituelt preg. Læreren ledet først elevene til å finne konstantleddet, der grafen skar y-aksen, og så fant de stigningstallet ved å lese av grafen. Etter økta var tavla full av flere realisasjoner av funksjonen. Læreren hadde prøvd å vise elevene sammenhengen mellom de ulike representasjonene ut i fra kompetansemålene og lærers realisasjonstre av funksjoner. Ifølge Nachlieli og Tabach (2012) finnes mange eksempler der elevenes realisasjonstrær vil være forskjellige fra det som læreren håper på, til tross for lærernes innsats. Historisk har matematikere strevd med utviklingen av funksjonsobjektet flere hundre år (Katz, 1993; Nachlieli & Tabach, 2012), noe en lærer kan ha i bakhodet når vi forventer at elevene skal få oversikt i løpet av noen uker.

Mønsteret som jenta i sekvensen over beskrev, ble tatt fram igjen og koblet sammen med funksjonsuttrykket som ble identifisert ut fra grafens stigningstall og konstantledd og det generelle utrykket for en rett linje $f(x) = ax + b$, men læreren gikk ikke videre for å vise at $f(x) = x + (x + 1)$ var ekvivalent med $f(x) = 2x + 1$. Det kan være flere grunner til at dette ikke ble gjort. En mulighet kan være at læreren syntes det var nok for elevene å fokusere på og at hun ikke ville ta med flere detaljer. Det kan også være mulig at læreren ikke kunne improvisere fram uttrykket i det gitte øyeblikket, og lot det ligge.

I undervisningen har elevene gjentatte ganger jobbet med flere realisasjoner av en funksjon som tabell, graf, funksjonsuttrykk, praktisk kontekst, koordinater, punkter og gjennom beskrivende sammenhenger (med ord) uten algebra. Læreren har også flere ganger repetert og prøvd å få elevene med på at en funksjon kan representeres på flere måter. Elevene har både tolket og lest av punkter og stigningstall fra graf, og regnet ut stigningstall ut fra kjente punkt på grafen.

Den andre sekvensen som tas med for å vise lærers funksjonsdiskurs er hentet fra den siste observerte matematikkøkten der det nye begrepet vekstfart skulle presenteres og implementeres i elevenes diskurs. Timen startet som de fleste andre timene ved at læreren spurte elevene om de kunne sette ord på det de hadde arbeidet med i forrige matematikkøkt, der de hadde tatt utgangspunkt i et praktisk forsøk der de målte ”falltiden” på *x* antall muffinsformer fra en gitt høyde. Etter et par minutters prat i makkerpar om dette og annet fortsatte læreren å orkestrere klasseromsdiskusjonen. Læreren oppsummerte slik:

33. Lærer: ... da vi brukte muffinsformer, så plottet vi punktene, og så tegnet vi en linje, og så fikk vi, legg ned pc-en, og så fant vi likningen for linjen, ut i fra det, ikke sant. Og så så vi så vidt også på at det gikk an å ta det direkte fra en tabell, uten å plotte det grafisk, og så kan vi regne ut konstantledd og stigningstall. .... (13s Noen drar fram penn og papir for å skrive. Flere gjør ikke det). Vi skal altså ikke gå veien om koordinatsystem, vi skal kun regne ... Dere kan legge ned sminkesakene nå og så ta fram mattebøkene ... Jo oppgave 8.50 s 230. ...

Ved å repetere muffinsforsøket, knyttet læreren flere av realisasjonene sammen muntlig. Hun skisserte punkter som kunne tegnes som ei rett linje, det å bestemme et funksjonsuttrykk fra tabell, og å regne ut konstantledd og stigningstall fra tabell. Denne repetisjonen foregikk muntlig uten flere visuelle mediatorer enn at lærer og elever skisserte grafer i lufta. Det er mulig at elevene kunne trengt flere visuelle mediatorer for å få sammenhengen mellom de ulike realisasjoner på plass, noe læreren gjorde senere i timen. Fra utdraget over, brukte læreren begrepet likning i stedet for funksjonsuttrykk, noe som kan problematisere elevenes rutinebruk i funksjonsdiskurs ut fra elevdiskursen. I tillegg måtte læreren flere ganger poengtere at elevene burde skrive ned i boka si og legge vekk forstyrrende elementer. Videre dreide lærers diskurs mot enheter langs aksene og formell føring, noe som hadde et rituelt preg med fokus mot en eventuell skriftlig eksamen og tydelig føring i vurderingssituasjoner.

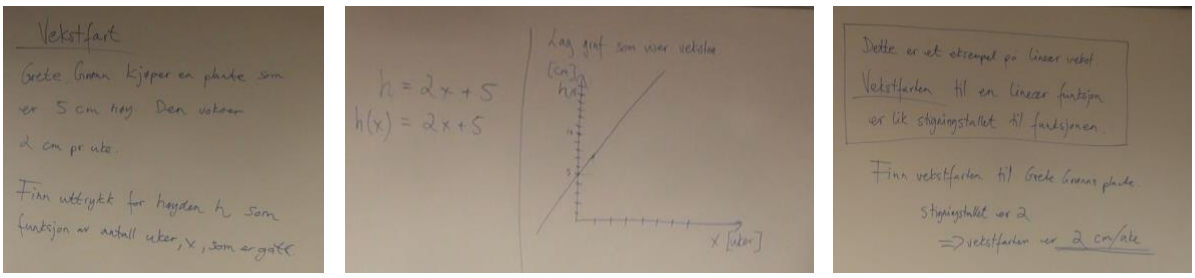
Oppgaven nedenfor ble brukt til å forklare begrepet vekstfart, samtidig som læreren brukte oppgaven til enda en gang å repetere og sette sammen ulike realisasjoner av funksjoner og sammenhengen mellom dem. Oppgaven ble løst i plenum med flere små diskusjoner i makkergruppene underveis.

> Grete Grønn kjøper en plante som er fem cm høy. Den vokser to cm pr uke. Finn uttrykk for høyden h som funksjon av antall uker x som er gått (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl, & Hals, 2014, s. 231)

Etter kort tid i makkerparene kom flere elever med forslag i plenum, og læreren spurte om det kunne være flere forslag, og var i utforskende modus. Forslagene som kom fram så slik ut:

36. Jente	*h er lik to x pluss fem*	*h=2x+5*
37.	*utenomsnakk*	
38. Lærer	*Flere forslag? Nei? (2s) Det var et veldig godt forslag. Jeg har et forslag til og det er h av x er lik to x pluss fem (3s) Er det flere forslag?*	*h(x)=2x+5*
39. Gutt	*fem pluss to x (2s) nei da, bare tulla*	*5+2x*

Selv om diskursen hadde et utforskende preg, ble det også fokusert på formell føring. Lærer påpekte at guttens forslag i ytring 39 kunne brukes, men at rekkefølgen oftest ble skrevet med variabelen i første ledd, noe eleven måtte huske og ble kategorisert som rituelt. Strengt tatt vil dette ikke ha noe å si for funksjonen. Hvorfor eleven trakk forslaget sitt ved å avslutte slik han gjorde, kan tolkes som at han syntes det var opplagt at rekkefølgen på leddene ikke hadde noe å si, eller at han var usikker. Lærer fortsatte på tavla ved å tegne et koordinatsystem, slik at elevene kunne plotte inn punkter og tegne grafen som hørte til funksjonsuttrykket. Her ble det også fokus på føring som enheter langs aksene, og lærer poengterte at dette var viktig. Noen elever deltok i lærerens funksjonsdiskurs og skrev av fra tavla, andre gjorde det ikke. Etter å ha gjennomført oppgaven i plenum så tavla slik ut:



Figur 20: Bilder fra tavla i siste undervisningsøkt om funksjoner.

Oppgaven om Grete Grønn ble representert med tekst, funksjonsuttrykk og graf. Læreren nevnte også tabell som mulig realisasjon, men dette ble kun gjort muntlig. Til slutt spurte læreren om elevene kunne finne det nye, introduserte begrepet vekstfart, som var koblet sammen med det mer kjente begrepet stigningstall. Læreren påpekte at det kunne finnes på tre forskjellige måter ut fra det de hadde skrevet ned, og rutinebruken hadde et utforskende utgangspunkt. Sammenhengen mellom de ulike realisasjonene kom fram enda en gang.

76. Jente1	*Enten i funksjonen eller i koordinatsystemet.*
77. Lærer	*Ja, det er helt riktig, og det er faktisk enda et sted. (5s)*
78. Jente2	*I teksten.*
79. Lærer	*Ja, her står det faktisk at planten vokser to centimeter per uke, og det er faktisk vekstfarten.*
80. Gutt	*Hvorfor skal vi finne det når vi allerede vet det?*

Jenta i ytring 76 fant vekstfarten i funksjonen eller i koordinatsystemet. Læreren stoppet ikke opp med måten jenta brukte begrepene på, men bekreftet jentas påstander. Det kan antas at jenta mente at hun kunne lese av vekstfarten eller stigningstallet i funksjonsuttrykket og på grafen i koordinatsystemet, selv om dette ble uttrykt som i transkripsjonene over. Begrepene ble brukt upresist og kunne kategoriseres som frasedrevet ordbruk. Her ga læreren elevene muligheten til å utforske sammenhengene på tvers av realisasjoner, og påpekte at det var flere måter å løse en oppgave på, som igjen kunne sees på som et tegn på utforskende rutiner. Læreren fokuserte ikke bare på hvordan de ulike rutinene skulle gjøres, og viste flere ganger til når elevene kunne bruke ulike rutiner. Elevene i Matematikk 1P kan bli trukket opp til eksamen, og lærer må også ha fokus på formell føring. Om elevene har skjønt nytten av å føre slik det er bestemt gjennom historien, er usikkert, men dette er ikke fokus i denne oppgaven.

5.2.2 Elevens diskurs om matematikk og eget forhold til matematikkarbeid

September 2016

I september 2016 uttrykte elevene at de hadde merket at medelevene fra andre skoler løste oppgavene på forskjellig måte, men trodde at de kom til å bli likere i framgangsmåtene og løsningsstrategiene etter hvert som de jobbet med nye emner på videregående, noe som kan indikere at elevene ikke ser verdien i å løse oppgaver på ulike måter, og å lære av hverandre. Diskusjoner som kobler sammen elevers ulike idéer henger sammen med mulighet for å lære (Heyd-Metzuyanim et al., 2015). På dette tidspunktet kommenterte ikke elevene at funksjoner var vanskelig. Nedenfor ble det tatt med noen av elevutsagnene som beskrev hvordan en god matematikktime var. Ytringene var ikke en dialog, men er satt sammen for å illustrere elevenes egne beskrivelser.

Eline:	*En god mattetime er når du lærer noe nytt, og du får prøvd deg på å lære det også.*
Mari:	*Jeg synes det er gøy på en måte først i et helt nytt tema, at vi får jobbe litt selv, og så etterpå kan vi kanskje jobbe med noen andre også [Berit nikker enig]. Og se hvordan de løser tingene også.*
Berit:	*Jeg synes det er litt mer system på hvordan vi lærer det nå (sammenligner med ungdomsskolen).*
Sandra:	*De (lærerne) må være engasjerte. For hvis de ikke liker emnet selv, så faller jeg også ut, så de må være ganske engasjert, får med elevene og finner på litt andre ting enn å for eksempel bare sitte å jobbe, gjør det sånn at det blir kjekt i timen. Vi får det mer inn.*
Viola:	*Og så er det viktig at de har et variert opplegg, læringsopplegg, for det er jo veldig individuelt med elever hvordan de lærer, for eksempel at vi kan gjøre forskjellige ting liksom, forklarer på tavla, jobber i bøkene, og kanskje for eksempel være ute og gjøre annerledes ting, se videoer og sånn og.*

Elevene hadde flere beskrivelser av hvordan en god matematikktime burde være. Mari beskrev at det var gøy å jobbe med faget, og Eline trakk sammenhengen mellom en god matematikktime og det å lære noe nytt. Matematikk virket ut fra dette som et fag som elevene så ut til å like. Berits utsagn om at det var mer system enn på ungdomsskolen, virker også positivt. Kan mer system være en beskrivelse på at det kreves en strengere form for notasjon og føring? Ut fra subjektene i de to siste elevytringene, kunne det virke som at elevene la ansvaret på læreren. Læreren har det overordnede ansvaret for å strukturere undervisningen og legge til rette for at elevene er aktive, men elevene har også en mulighet til å påvirke sin egen situasjon ved å være engasjerte og bidra til et godt læringsmiljø.

Elevene var godt fornøyd med å ha valgt det praktiske kurset, men de ga ikke direkte uttrykk for hvorfor de hadde valgt P-retningen. Fem av elevene hadde foresatte som de selv beskrev som gode i matematikk, men å få hjelp hjemme kunne by på utfordringer siden foreldrene brukte andre løsningsrutiner, som var uvante for elevene. En elev uttrykte at foreldrene ikke var så gode i matematikk, og søkte heller hjelp av lærer eller på internett når hun trengte hjelp til leksene.

Elevene brukte flere begreper i funksjonsdiskursen og fant ofte et svar sammen på det som ble diskutert i intervjuene. Likevel virket de gjennomgående redde for å gjøre feil. Det er mulig at elevene har inntrykk av at det er kun det riktige svaret som er viktig, og at veien mot å finne et svar skal være så rask som mulig. For å utvikle utforskende rutiner må elevene ha mulighet til å gjøre feil, ellers vil rutinene bli på et rituelt nivå (Heyd-Metzuyanim et al., 2015). Denne holdningen må også være implementert i elevene, noe som kan tyde på at elevene ikke bare har utforskende rutiner med seg fra ungdomsskolen. Matematikkundervisning der regler og prosedyrer har blitt brukt for å løse problemer er en dominerende undervisningsform i norsk kontekst, og dette gjelder særlig algebra (Naalesund, 2012). Slik prosedyrekunnskap alene kan bidra til at elevene finner det vanskelig å engasjere seg i faget og heller distanserer seg. Usikkerheten kan komme fra intervjusituasjonen, og det kan hende at elevene hadde ordlagt seg annerledes i en mindre spent situasjon.

Mari: ... nei, jeg er ikke sikker, jeg husker ikke ....
Berit: ... det er vanskelig å forklare det ...
Lisa: ... Nei, jeg kan ikke forklare dette (ler litt)..
Viola: ... Å få fasiten på en måte...
Eline: ... Å herregud (legger hodet i hendene)...
Sandra: ... Tenk hvis vi har alt feil nå...

Programmet GeoGebra hadde elevene jobbet mye med på ungdomsskolen, og fem av seks elever syntes det var utfordrende. Ut fra sekvensen under, kunne det se ut som om det var føringsrutinene elevene opplevde som krevende. Rutinebruken virket rituell, der elevene var opptatt av oppskriften hvordan dette skulle gjøres og føres.

Mari:	*Jeg synes at GeoGebra var veldig vanskelig, og det gikk veldig fort å glemme ut de forskjellige tingene. Det var så mye å tenke på. Det er bra liksom, det er ikke det, men det var så mye å huske på. Og så måtte du forklare alt du hadde gjort i GeoGebra også. Jeg synes det var komplisert.*	*R*
Berit:	*Ta bilde av det og legge det inn i Word, og skrive akkurat hva du måtte gjøre=*	*R*
Mari:	*=Ja, og så måtte du skrive helt punktvis alt du gjorde (vifter med hånda) Jeg synes det var litt komplisert.*	*R*

Elevene hadde opplevd at føringen skulle gjøres på en spesiell måte for at læreren skulle bli fornøyd eller for å få full uttelling på en prøve. Ungdomsskolelæreren kan ha vært preget av at tiendeklassingene kunne bli trukket ut til eksamen, og ønsket å forberede elevene på hvordan eksamenskravene til føring var. Med et slikt fokus, kan den utforskende rutinen bli satt mer til side. Eksamensoppgavene krever også at elevene er kreative og utforskende, men det er mulig at læreren først ville ha det formelle på plass. Dette fokuset på føring og skriftlig kommunikasjon kan påvirke elevens engasjement, samtidig er GeoGebra et hjelpemiddel der det finnes mange muligheter til å utvide den utforskende rutinebruken.

Mars 2017

Sju måneder senere, i mars 2017, fikk elevene spørsmål om hvordan en matematikktime om funksjoner var. Denne gangen responderte elevene med beskrivelser som ”strevsom” og ”vanskeligere enn andre emner”. Om dette kan være fordi de var med i et forskningsprosjekt om dette temaet og at dette hadde påvirket holdningene deres, er mulig. Hvordan elevene jobber når de opplever et tema som vanskelig, kan variere. Noen vil jobbe ekstra med noe som er vanskelig, mens det kan bli en sovepute for andre. I motivasjonsteorien finnes det resultater som beskriver at nederlaget er mindre for eleven hvis han ikke har prøvd, enn hvis han prøver og feiler (Covington & Omelich, 1979).

Elevene var samstemte om at de hadde hatt mer tavleundervisning i funksjonslæren enn andre matematikkemner, og at det dermed hadde blitt mindre tid til oppgaveløsing i timene. Dette så de på som både positivt og negativt. Med tavleundervisning poengterte de at de mente at læreren forklarte og dominerte heller enn at dette var klasseromsdiskusjon der elevene var aktive deltakere.

Sandra: Det blir liksom tatt på tavla, men det er ikke så enkelt når du skal begynne med oppgavene.

Viola dro fram en aktivitet som læreren brukte da hun introduserte funksjoner for elevene, og skulle definere begrepet funksjon. Medelevenes lattermilde reaksjon, tydet på at de også hadde denne aktiviteten friskt i minne.

71.	*Viola:*	*Nå har jo mye blitt sagt her, men (2s) vi har jo den funksjonsmaskinen (alle ler) så da er det jo en likning, og det handler jo om at vi putter inn noe på den ene siden, så får du ut noe annet på den andre siden. (2s) Litt magi. (3s)*
72.	*Forsker:*	*Magi eller matte?*
73.	*Viola [Eline]*	*Mattemagi [Same thing]*

Violas forklaring inneholdt ordet magi, og elevene virket enige om at matematikk og magi hadde fellestrekk. Dette kan være et tegn på at de ikke skjønner hvordan matematikken henger sammen. Om dette er noe de vil at andre skal ha inntrykk av at de mener, eller dette er et resultat av at de ikke ser sammenhengen i faget, kom ikke fram. Elevene virket ikke helt konsentrerte og det som kom fram virket noe tilfeldig. Elevene ga forsker en opplevelse av at dette ikke var så viktig. Ut fra dialogen over kunne det virke som at elevene hadde utviklet en forsvarsmekanisme for at matematikk var vanskelig og at de av den grunn ikke prioriterte faget. Dette kom også fram da elevene beskrev hvordan de arbeidet med lekser i faget:

35.	*Forsker:*	*Dere har hatt en arbeidsplan i matematikk. Hvordan jobber dere med den?*
36.	*Sandra:*	*Ikke så mye egentlig. (rister på hodet)*
37.	*Sandra:* *[Eline]*	*Nei, vi jobber ikke så mye med den, vi får mer oppgaver i timen (2s)* *[nikker]*
38.	*Viola:*	*Det er litt utydelig, litt vanskelig å forstå om hun vil at det skal være lekser, for av og til sier hun at dere må jobbe hjemme videre med det, mens liksom hva er det vi skal gjøre? Er det lekser liksom, hvilke oppgaver er det. Så det er litt vanskelig å vite. Jeg tror ikke det er så mange som gjør de (smiler litt).*

Alle elevene ga uttrykk for at de mente at få elever jobbet jevnt med planen. En elev uttrykte også at hun opplevde det utydelig om hun skulle gjøre lekser eller ikke. Ut fra sekvensen over, har eleven observert at læreren har sagt at de også må jobbe med faget mellom timene, men eleven er usikker på hvordan. Likevel har ikke eleven aktivt gått inn for å finne ut hva læreren mente. Det kan virke som at elevene ikke har en indre driv til å jobbe med faget utenom timene uten at de har *kniven på strupen*. Det er dermed det de får gjort i timene de får gjort av matematikkoppgaver og refleksjoner. Utnyttingen av tiden i timene blir dermed avgjørende.
Det ble observert at elevene sjelden skrev av tavla, men elevene mente selv at de hadde et bevisst forhold til dette. Noe fant de like enkelt i læreboka, noe mente de at de kunne fra før og noen ganger skrev de også av tavla. Fra observasjonene fra klasseromsundervisningen var de også noen ganger opptatt med helt andre ting, og det som skjedde på tavla virket nedprioritert. Det var tydelig mye annet som opptok elevenes tid og fokus.

Intervjuene ble ikke først og fremst gjennomført med fokus på elevenes eget forhold til matematikk. Dette ble interessant å ta med etter hvert som elevenes diskurs ble analysert og endringene ble tydeligere, som en mulig årsak til denne endringen. Selv om dette kun ble basert på hvordan elevens diskurs i forhold til matematikk grovt sett utartet seg, finnes det indikasjoner på at elevenes identitet henger sammen med diskursendringen. Elevenes holdninger til faget og læringsmiljøet i klassen er gjerne et resultat av flere faktorer, og er mest sannsynlig en årsak til elevenes endring av funksjonsdiskurs.

6. Diskusjon

I den første delen av resultatkapitlet fokuserte jeg på seks elevers rutinebruk og deres realiseringer av en funksjon som kom fram i elevenes funksjonsdiskurs som oppstod i fokusgruppeintervjuene. Elevene kommuniserte mens de jobbet med oppgaver om konstantledd, stigningstall, funksjonsbegrepet generelt og bruk av funksjonsuttrykk. Rutinene ble analysert som rituelle, gjerninger eller utforskende, og alle intervjuene inneholdt forskjellige typer rutinebruk. Ut fra hovedtendensen i denne analysen ser det ut til at elevene var mest utforskende i rutinebruken da de ble intervjuet for første gang, i september 2016. Det ble også observert tendenser til rituelle rutiner da elevene snakket om a og b i det generelle lineære funksjonsuttrykket $y = ax + b$ i samme intervju. Når elevene jobbet med mer praktiske oppgaver ble rutinebruken gjentatte ganger kategorisert som utforskende. Elevene brukte lang tid på å komme fram til et generelt uttrykk for en lineær funksjon realisert som graf, men prøvde seg fram, og fant et uttrykk som de testet at stemte overens med grafen gjennom prøving og feiling. De hadde rutiner som viste både *hvordan* de skulle gjøre og *når* de skulle bruke rutinene. I intervjuet i mars 2017 fant elevene raskere et funksjonsuttrykk som stemte overens med grafen enn i september 2016. Likevel ble mange rutiner kategorisert som rituelle. Elevdiskursen viste at de kunne gjennomføre en prosedyre, men fikk utfordringer når de skulle tolke og forklare informasjonen.

Når det gjaldt realisasjoner av funksjoner, var tendensen negativ, og realiseringstreet til funksjoner ser ut til å ha blitt svekket i løpet av disse månedene. Elevene knyttet flere ulike realisasjoner som graf, funksjonsuttrykk, tekst, tabell og koordinater til funksjonsbegrepet i september 2016, men de trakk ikke alltid inn tabell som realisering av lineære funksjoner. I mars 2017 var det først og fremst realisasjonsformene graf og funksjonsuttrykk som kom til uttrykk i elevenes diskurs. De uttrykte at det også gikk an å strukturere sammenhengen i tabell, men de kunne ikke gjennomføre det. I september knyttet elevene et punkt på grafen til praktisk informasjon. Sju måneder senere koblet de ikke sammen koordinatene med punkt på grafen. Ut fra elevenes diskurs ser realisasjonsformene koordinater/punkt og tabell ut til å være svekket. Elevene brukte mer formell notasjon i mars 2017 enn i september 2016.

Figur 21: Sammenligning mellom elevenes realisasjonsformer i september 2016 (til venstre) og mars 2017 (til høyre).

Når det gjelder ordbruk i funksjonsdiskursen, er begrepet likning trukket fram i analysen. Å uttrykke seg presist matematisk er krevende for elever, noe Naalesund (2012) påpeker i sin ungdomsskolestudie. Dette uttrykkes av deltakerne selv i denne studien når de prøver å forklare. Matematikk er et språk som skal mestres, med mange begreper og presis, skriftlig notasjon. Likning og funksjonsuttrykk er to begreper som flere ganger ble likestilt i elevenes diskurs. Begrepene ble gjentatt om hverandre flere ganger, både i lærers undervisningsdiskurs og i elevdiskursen som kom fram i intervjuet i mars 2017. Rutiner for hvordan man regner ut verdien for et uttrykk og hvordan man løser en likning, kan ikke likestilles. I elevenes funksjonsdiskurs ble det observert rutiner som hørte hjemme i likningsdiskursen, og det er mulig at språkbruken kan ha påvirket dem. At elevene brukte likningsrutiner for å regne ut verdien av et uttrykk kan også komme av mangler i deres grunnleggende diskurs om tall. Læreboka (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl, & Hals, 2014) viser at en ligning kan løses ved å finne skjæringspunktet mellom to grafer, men bruker begrepet funksjonsuttrykk om funksjonen. Samtidig kan det se ut som om boka prøver å bygge bru mellom likningsbegrepet og funksjonsbegrepet. Elevene i denne studien brukte konsekvent ordet likning i stedet for funksjonsuttrykk i intervjuet i mars, og det argumenteres for nytten av presis språkbruk og nyanser i bruken. Det finnes flere studier som har tatt utgangspunkt i andre begreper enn likningsbegrepet, og som peker på at et presist og tydelig språk kan være en nøkkel til å redusere elevenes utfordringer i matematikkfaget (Kilhamn, 2011).

Resultatene i denne oppgaven samsvarer med tidligere forskning (Sfard, 1992; Sierpinska, 1992) om at elevene sliter med å se sammenhengen mellom uavhengige og avhengige verdier over et intervall. At den lineære grafen er kontinuerlig og knytter sammen alle x-verdier med tilhørende y-verdier er ikke opplagt for elevene i denne studien. Elevene tar først og fremst utgangspunkt i hele tall, og elevdiskursen inneholder diskusjoner om også desimaltall vil bli punkter på den samme grafen. Å knytte utregninger til punkter på grafen, har vist seg å være vanskelig for elevene, der det er enklere å lese av punkter og knytte det til konteksten enn å regne ut funksjonsverdier for så å knytte punktet til grafen. Det kommer også fram i gjentatte elevutsagn at grafen starter på y-aksen, noe som bekrefter Rønningstads (2009) observasjoner fra hennes mastergradsstudie av norske videregåendeelever. Det er mulig at elevene først og fremst har erfaringer fra funksjoner der konteksten er gitt slik at negative x-verdier ikke er aktuelle, eller at den grunnleggende, aritmetiske diskursen er mangelfull.

Begrensninger til den instrumentelle tilnærmingen til stigningstall a og konstantledd b i det generelle funksjonsuttrykket $y = ax + b$, som ofte benyttes i tradisjonell undervisning og lærebøker (Sierpinska, 1992; Sfard, 1992), kommer også fram i elevdiskursen i denne studien. Samtlige elever måtte justere stigningstall og konstantledd da de skulle finne et funksjonsuttrykk som passet til grafen. Justeringen gjaldt å bytte om på a-en og b-en i uttrykket. Diskursen rundt hvorfor de byttet om, viste at dette var noe elevene hadde pugget, stigningstallet a skulle stå sammen med variabelen som første ledd, og konstantleddet b skulle stå som andre ledd. Det at elevene uttrykte at plasseringen av leddene hadde noe å si, samtidig som de ikke kunne forklare hvorfor det var sånn, er tegn på at elevene kan løse oppgaven å finne et funksjonsuttrykk fra grafen på overflaten, med rituell rutinebruk. En elev som i hovedsak bruker rutiner på denne måten uten å knytte det sammen på andre måter, må huske mye. Heyd-Metzuyanim (2015) poengterer at med dette fokuset vil eleven ha mange regler å forholde seg til, og dette vokser gradvis og vil sannsynligvis kollapse etter hvert.

Mangler i andre grunnleggende ferdigheter som negative tall, brøkregning og algebra kan skape utfordringer i elevenes funksjonsdiskurs, som bygger videre på dette (Kilhamn, 2011; Naalesund, 2012). En elev som ikke kan regne med negative tall og brøk, kan bli så opphengt i tilstedeværelsen av disse elementene at han ikke klarer å bruke det han kan om funksjoner (Kilhamn, 2011). Elevene vil mest sannsynlig bruke kreftene i prosessen, og læringen ender som overflatisk og instrumentell. I denne studien viste elevdiskursen at elevene ble usikre når funksjonsuttrykket inneholdt brøk. Den ene fokusgruppa uttrykte det så tydelig at de ønsket å ta utgangspunkt i et annet alternativ som ikke inneholdt brøk i uttrykket. Dette er tegn på at elevenes tall- og algebragrunnlag skaper utfordringer for dem i funksjonsdiskursen. Å bruke mer tid på grunnleggende diskurser som algebra og aritmetikk før elevene går i gang med emner som krever disse ferdighetene er dokumentert i flere studier (Nachlieli & Tabach, 2012; Naalesund, 2012). Den tidligere forskningen som det sammenlignes med her, er studier der utvalget av elever går på mellomtrinnet og ungdomstrinnet. Elevene i denne studien er eldre, noe som betyr at de har fått begrepene repetert flere ganger gjennom årenes løp, og at de har hatt mer tid til at begrepene og rutinebruken skulle modnes. Likevel viser funksjonsdiskursen at elevene finner brøk og negative tall utfordrende også på dette nivået. Ofte bruker elevene de første ukene på videregående skole til å repetere og friske opp grunnlaget fra ungdomsskolen. Hvordan elevene har jobbet med dette grunnlaget før de startet på temaet funksjoner, er utenfor denne studien. I lærers undervisningsdiskurs om funksjoner ble det ved en anledning tegnet tallinje på tavla for å støtte opp om elevens regning med negative tall da de skulle regne ut ulike funksjonsverdier. Ut fra disse observasjonene i denne studien knyttes forskningen om at grunnleggende diskurser er vesentlige for å kunne være utforskende i diskurser som bygger videre på dette. Skal elevene utvikle fleksible rutiner, må de ha et godt grunnlag. Hvordan elevene har tilnærmet seg dette grunnlaget i utgangspunktet vil påvirke elevenes grunnleggende diskurs.

Janvier (1978) poengterer at elevene må tilnærme seg stoffet på ulike måter, slik at alle representasjonsformene blir vektlagt, og at noen overganger er mer krevende enn andre. Å knytte sammen de ulike realisasjonene av funksjonen har vist seg å være utfordrende også i annen forskning (Nachlieli & Tabach, 2012). Nachlieli og Tabachs studie tok utgangspunkt i sjuendeklasseelever og introduksjon til emnet funksjoner for første gang der de tok utgangspunktet i den historiske diskursen. Sjuendeklasseelevene jobbet med realisasjonene av en funksjon, og studien viste at de ble kompetente i overgangene mellom algebraiske uttrykk, grafer, tabeller og tekstoppgaver. Samtidig ble det konkludert med at selv om elevene var kompetente i funksjonens deldiskurser, hadde objektiviseringen av funksjonen så vidt begynt og at elevene burde brukt mer tid på grunnleggende diskurser som graf, tabell og spesielt den algebraiske diskursen siden dette var en ny diskurs for sjuendeklasseelevene.
For 1P-elevene i denne studien var det ikke første gang de jobbet med temaet. Ut fra kompetansemålene etter tiende trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013) skal elevene ha jobbet med overgangene mellom ulike realisasjoner også på ungdomsskolen. Gjennom de tre ukene med observasjoner i klasserommet, ble det observert at læreren visualiserte sammenhenger mellom ulike realisasjoner av funksjonsbegrepet som tabell, graf, kontekst og funksjonsuttrykk gjentatte ganger. Dette ble observert skriftlig, men også muntlig som repetisjon eller oppsummering. Tavla ble fylt med flere realisasjoner av en funksjon sammen med muntlige forklaringer, både i starten og mot slutten av undervisningsperioden. Læreren la med dette til rette for at elevene kunne ha muligheten til å se sammenhengene mellom flere ulike realisasjoner. Likevel viser resultatene at elevenes realisasjoner av en funksjon utvikles

negativt fra september 2016 til mars 2017. I elevdiskursen i intervjuene i mars 2017 ble realisasjoner som tabell og koordinater lite brukt, og elevene kunne ikke lese av et punkt og sette det i kontekst eller sette opp en tabell ut fra en graf. I mars 2017 var det realisasjonene graf og funksjonsuttrykk som stod tydeligst hos elevene. Hvorfor disse to realisasjonsformene er de tydeligste for elevene, kan ha flere grunner, men kan i utgangspunktet ikke forklares ut fra lærers realisasjoner vist på tavla i de observerte timene. Nachlieli og Tabachs (2012) forskning viser at tross lærers innsats og uansett hvilken metode som brukes, samsvarer ikke elevenes realisasjonstrær med kompetansemålene og lærers forhåpning. Resultatene i 1P-elevenes diskurs der realisasjoner som var til stede i september 2016 nærmest er forsvunnet fra elevenes diskurs i mars 2017, har jeg ikke funnet i annen forskning. Elevenes diskurs inneholder flere realisasjoner av en funksjon før funksjonsundervisningen i 1P enn etter at de er ferdige med funksjonsundervisningen. Det kan være ulike forklaringer til denne utviklingen. For at elevene skal objektivisere en funksjon fullstendig, er det opp til eleven selv å investere tid og krefter på å komme i mål. Viljen elevene har til å objektivisere, og innsatsen som legges ned i arbeidet, er avgjørende for hvor langt de kommer i objektiviseringen. I elevenes diskurs om eget forhold til matematikkarbeid kom det fram at de ikke jobbet med faget utenfor timene selv om de hadde en fyldig arbeidsplan. Elevene fikk erfaringer med funksjonsdiskursen i matematikktimene, og i datamaterialet er det ikke observert ytringer om at de brukte tid til å reflektere over dette utenfor matematikktimene i elevenes diskurs. Hvor bestemt eleven er på å objektivisere begrepet er avgjørende for elevenes framtidige objektivisering av begrepet.

Elevene i denne studien ser ut til å bli hengende igjen i deldiskurser, og har ikke oversikten til å se sammenhengene mellom de ulike realisasjonene av funksjonen. Resultatene i denne oppgaven støtter forskningen av sjuendeklassingene som viser til at elevens idé av hva en funksjon er, er en realisasjon av begrepet som funksjonsuttrykk eller graf (Nachlieli & Tabach, 2012). Begrep som funksjon og funksjonsuttrykk brukes synonymt, noe som også går igjen i elevenes diskurs. Når GeoGebra brukes til å tegne graf fra funksjonsuttrykk, forsvinner bruken av tabell i 1P-elevenes diskurs. Elevene skriver inn funksjonsuttrykket og justerer aksene slik at de raskt får grafen foran seg, og de kan bruke tiden på tolkning. Å gå direkte fra funksjonsuttrykk til graf ved hjelp av GeoGebra, kan være en grunn til at elevenes bruk av tabell som realisasjon av en funksjon svekkes. Ut fra det jeg har satt meg inn i av forskningslitteratur, har jeg ikke lest noe der dette tidligere er framhevet. GeoGebra er et godt hjelpemiddel som egner seg til utforsking av funksjoner, og elevene kan raskt se funksjonen for seg som graf og det forenkler jobben med det algebraiske. Dette burde etter min mening føre til at elevene kunne brukt mer tid på å tolke grafen og sette det hele i kontekst, men resultatene her kan ikke bekrefte dette.

Analysen av elevenes rutinebruk fra september 2016 til mars 2017 viser en negativ tendens, der elevenes ytringer kategoriseres som mer rituelle (Sfard, 2008) i oppgaveløsingen etter hvert som tiden går. I september 2016 var det lenge siden elevene hadde jobbet med temaet, og det er mulig at elevene kjente et større prestasjonspress i mars 2017. Mens de prøvde og feilet, og satte oppgavene inn i kontekst i starten av skoleåret, var elevene preget av føring og formelle utregninger sju måneder etter. Elevenes diskurs viser at de i liten grad kobler utregningene sammen med konteksten, og de ser få sammenhenger mellom de ulike realisasjonene. Mellom første og andre intervju hadde elevene fått erfaringene fra videregående skole generelt, med medelever, lærer, klassemiljø og undervisning, og årsaken til endringen er sannsynligvis kompleks. I funksjonsundervisningen ble elevene introdusert for notasjon som $f(x)$ i stedet for y, og det kan virke som om noe av sammenhengene som var selvsagte for elevene på høsten, har forsvunnet til fordel for mer abstrakt notasjon. Mens elevene leste av punkter på grafen og koblet det til konteksten om høsten, er dette noe elevene ikke kan svare på sju måneder etter. Det virker som om det å tegne punkter i koordinatsystemet eller lese av punkter som koordinater, er et grunnlag som ikke er på plass. I LK06 står koordinatsystemet nevnt allerede i målene for 4. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013), og det er ikke utenkelig at lærer forventer at dette er på plass. Ut fra resultatene her, kan denne forventning føre til at ungdomsskolelæreren eller videregåendelæreren prøver å bygge videre på et grunnlag som ikke er der.

Å være ambisiøs i undervisningen og gi elevene mulighet til å lære er noe en lærer må strebe etter. Det å jobbe for at elevene er aktive og får muligheten til å jobbe med åpne oppgaver der de får muligheten til å begrunne og argumentere for det de gjør, er ønskelig (Stein et al. 2008; Lampert et al. 2010). Studier har vist at matematikklæreren i den videregående skolen er lojal mot kompetansemålene og uttrykker at tidspresset er stort (Hundeland, 2010), der *hvordan* oppgavene løses får størst fokus, og så kan forståelsen komme på et senere tidspunkt. Resultatene til Heyd-Metzuyanim et al. (2015) viser at elevenes rutinebruk henger sammen med lærerens undervisning. Matematikkfaget er konstruert slik at objektene bygger på hverandre, og elevenes læring må ofte starte med imitasjon av en erfaren deltaker (Sfard, 2008), særlig når man skal komme inn i en ukjent diskurs. For å lære kreves det at en er aktiv deltaker i diskursen, ved å stille spørsmål, svare på spørsmål og reflektere over riktige og gale svar. I denne studien ble det observert få elever som skrev av tavla da læreren underviste. Noen ganger sa læreren høyt at elevene skulle skrive av, mens andre ganger ble dette ikke nevnt, og det kan tenkes at læreren mente at dette var selvsagt. Elevene argumenterte med at de ikke skrev av fordi de kunne det fra før, eller av andre grunner ikke orket. Hvor aktive og delaktige elevene velger å være, er en avgjørende faktor for læringsutbyttet, noe som igjen kan sees i sammenheng med hvilken motivasjon eleven har for å realisere objektet. Sammen med refleksjon kan imitasjon bidra til at eleven utvikler rutinebruken på metanivå (Sfard, 2008), men uten refleksjon vil ikke eleven utvikle rutinebruken, men bli hengende igjen i et ritual som må huskes for å kunne brukes ved en senere anledning. I elevdiskursen i denne studien kommer det flere ganger fram at elevene bruker noe de har pugget som for eksempel hvordan man finner et funksjonsuttrykk fra en graf. Oppgaven løses uten å kunne forklare hvordan det henger sammen, men det oppleves kanskje godt nok for elevene, fordi de får til å løse standardoppgaven. Det er vist tidligere at hvor bestemte elevene er på å objektivisere begrepet, påvirker elevens rutinebruk (Nachlieli & Tabach, 2012). I hvor stor grad elevene utnytter mulighetene til å være aktive, vil påvirke elevenes rutinebruk, og kan være en mulig årsak til hvorfor elevenes rutinebruk utvikler seg i negativ retning. Motivasjon til å være med på noe som elevene ikke ser nytten av før i etterkant, ser ut til å være vesentlig, og dette observeres i liten grad i elevenes funksjonsdiskurs.

I de observerte undervisningsøktene la lærer flere ganger opp til at elevene skulle utforske oppgaver med flere mulige svar og krevde at elevene argumentere og forklarte mønster de hadde brukt for å finne svaret, samt oppmuntret til at det var lov å gjøre feil. Dette samsvarer med forskning som poengterer at for at elevene skal gis mulighet til å lære må elevene gis muligheten til å gjøre feil (Heyd-Metzuyanim et al., 2015), og reflektere over feilene for å komme videre. Gir ikke lærer elevene denne muligheten, vil ikke elevene utvikle rutinebruken mot å delta utforskende (Heyd-Metzuyanim et al., 2015). Her må både lærer og elever gjøre sin del av jobben for å komme videre. I denne studien ble det observert at lærer ønsket å få med elevene inn i en utforskende rutine som gjennom aktiviteten med funksjonsmaskinen. Her fikk elevene mulighet til å finne flere mulige mønster, og å argumentere for løsningene. Resultatene viser at læreren var åpen for flere mulige løsninger, og ønsket at elevene skulle komme med flere. Samtidig var hun også mottakelig for løsninger som hun ikke hadde tenkt gjennom på forhånd. Fra utsiden virket det som om læreren utforsket aktiviteten sammen med elevene. Gjennom de tre ukene med observasjon ble det observert både utforskende oppgaver og mer rituell diskurs med fokus på formell føring for å få poeng på prøver og eksamen i lærerdiskursen. Som tidligere nevnt blir elevens motivasjon til å objektivisere begrepet, en avgjørende faktor for hvor langt eleven kommer i rutineutviklingen. Ut fra det vi har sett her må årsaken være mer kompleks enn at det kun kan være læreres undervisningsdiskurs som påvirker elevenes rutineutvikling.

Etter første intervju i september 2016 virket det som om elevenes rutinebruk i funksjonsdiskursen var mer utforskende enn rituell. Likevel var det påfallende hvor opptatt elevene var av å finne riktig svar, hvordan de uttrykte usikkerhet og ble nervøse da de skulle sammenligne egne svar med "fasiten". Det at elevene uttrykte usikkerhet da de skulle sammenligne egne svar, kan være et tegn på at rutinebruken fra ungdomsskolen ikke var så utforskende likevel. I Norge har den tradisjonelle matematikkundervisningen med fokus på regler og prosedyrer vært dominerende (Alseth et al. 2003). Naalesund (2012) poengterer at det jobbes instrumentelt og algoritmisk i ungdomsskolen spesielt med algebra.

Ifølge Heyd-Metzuyamin et al. (2015) får ikke elevene mulighet til å delta utforskende om de ikke får mulighet til å gjøre feil, og slik la det å feile bli en naturlig del av læringsprosessen. Elevene i denne studien viste flere utforskende rutiner i september 2016 enn mars 2017, men resultatene viser ikke at elevene kun brukte utforskende rutiner. Når resultatene i denne studien viser at endringen er negativ, kan dette tyde på at elevene ikke hadde grunnlaget som trengtes for å utvide diskursen, eller at de ikke var interessert i å objektivisere begrepet. Det kan hende at elevene med sine erfaringer fra ungdomsskolen, blir hengende igjen i en rituell tilnærming, fordi det er slik de er vant til å lære matematikk. En annen mulighet er at rutinebruken i funksjonsdiskursen i videregående skole er enda mer rituell enn på ungdomstrinnet. Her kan elevene trekkes til skriftlige og muntlige eksamener hvert år, der press både på tid og mengden kompetansemål kan påvirke læreren (Hundeland, 2010).

Kan eleven løse en oppgave med en gjerningsrutine (Sfard, 2008), har eleven mulighet til å finne svaret på ei oppgave selv om han ikke kan sette dette svaret inn i en kontekst. Hvis oppgaven er å finne funksjonsuttrykket ut fra en lineær graf, kan det være nok at eleven vet at konstantleddet er der grafen skjærer y-aksen. Kan eleven koble sammen konstantleddet med b-en i det generelle funksjonsuttrykket for en rett linje $f(x) = ax + b$, nærmer eleven seg en løsning på å finne et funksjonsuttrykk. Hvis elevene kun får oppgaver der de skal finne konstantleddet og stigningstall og ikke knytte dette opp til en kontekst og andre realiseringer, trenger ikke eleven å utvide rutinebruken mer utforskende. Sfard (2008) påpeker at det kan være vanskelig å gå fra gjerning til utforskende rutiner, noe som også vises av resultatene i denne studien. Elevene finner konstantleddet med rituell rutinebruk ved å se hvor grafen skjærer y-aksen, og kan endre funksjonsuttrykket ved å lese av funksjonsverdien i skjæringspunktet og knytte dette mot konstantleddet *b*. Elevene kommer likevel ikke videre med å kunne bruke denne funksjonsverdien i sammenheng, som for eksempel at konstantleddet sier noe om hvilken funksjonsverdi funksjonen har når *x* er null. Sfard (2008) poengterer at undervisningen må fokusere på *når* og *hvorfor* rutinen brukes, og ikke bare ha fokus på *hvordan* for at rutinebruken skal utvikles til noe mer enn ritualer. Elevdiskursen blir først og fremst hengende fast i hvordan de skal løse oppgaven, uten å løfte blikket og knytte det de beregner til kontekst og utvide realisasjonene av funksjonsbegrepet.

Hvorfor elevene velger å utvikle noe de bare delvis kan bruke til noe, kan ha med oppfatningen av faget å gjøre. Hvis elevene har erfaringer fra hjem og tidligere skolegang om at matematikk er et fag der det er viktig å finne riktige svar raskt ved å bruke puggede regler, blir det utfordrende å se sammenhengen i faget. Denne utfordringen står enhver lærer ovenfor når han overtar elever som allerede har lært matematikk tidligere. Det kan være utfordrende å hjelpe elevene mot mer utforskende rutiner i den videregående skolen hvis de har hatt stort fokus på ritual- og gjerningsrutinen i grunnskolen. Eleven kan selv føle at han mestrer oppgaven med for eksempel å finne funksjonsuttrykket til en graf, men har ikke utviklet rutinen nok til å være fleksibel i oppgaveløsningen. Hvordan dette introduseres og jobbes med i grunnskolen er viktig for hvordan eleven vil utvikle seg, stagnere eller i verste fall falle fra i videregående skole. Elever er forskjellige, og elevene som begynner på videregående skole har allerede ti år med matematikkerfaringer fra grunnskolen der rutinebruken har blitt formet. I denne studien er det elever som har valgt P-faget som er i fokus. Heyd-Metzuyanim et al. (2015) har vist at det er et typisk fenomen at lærerstudenter kan ha matematikkerfaringer som er preget av å være lavt-presterende og uttrykker et dårlig forhold til matematikk. Ut fra resultatene som er kommet fram i denne studien, samt egne erfaringer med undervisning i P-faget, er det ikke utenkelig at dette også kan overføres til å gjelde noen av de elevene som velger P-matematikk. Elevens holdninger og oppfatning av faget ser ut til å påvirke hvordan eleven tilnærmer seg faget, noe som igjen påvirker rutinebruken. Når lærer oppfatter at elevene strever med faget, har det vist seg at lærere har en tendens til å senke de kognitive kravene (Heyd-Metzuyanim, 2013). Hvis læreren da fokuserer mest på hvordan oppgaven skal løses, uten sammenheng med hvorfor og når, vil dette være tegn på at rutinebruken blir rituell. Dette kan være ute av lærers kontroll, på grunn av elevenes tidligere erfaringer med matematikk, og kan være vanskelig å komme ut av. Læreren kan være redd for at elevene vil bli umotivert og gi opp hvis de ikke lykkes, og minimerer muligheten til å gjøre feil. Man kan havne i en nedadgående spiral, som kan føre til at elevene blir mer ritualisert i rutinebruken. Spørsmålet vil da bli hva som motiverer elevene mest, på kort og lang sikt, og hva som er målet.

Elevens egen diskurs om selvoppfatning, motivasjon og forhold til matematikkfaget ser ut til å være avgjørende for hvor mye elevene står på, og hvor langt de kommer i funksjonsdiskursen, også i rutineutviklingen. Betydningen av elevers motivasjon er godt dokumentert (Pintrich, 2003; Cury, Elliot, Fonseca, & Moller, 2006). I intervjuene var rutinebruk og elevenes funksjonsdiskurs i fokus og elevenes diskurs om forhold til faget ble ikke etterspurt eksplisitt. Tegn på elevenes motivasjon vises i denne studien ved at elevene uttrykte at de ikke jobbet med matematikk utenfor timene. Til tross for at elevene hadde en arbeidsplan med forslag til mange oppgaver, uttrykte elevene at de ikke brukte den selv, og at de heller ikke trodde at medelevene bruker den. De uttrykte også at de var usikre på hvordan de skulle bruke planen, men ingen av dem hadde aktivt gått inn for å spørre læreren om dette. Det virket som om elevene ikke prioriterte faget, og kun var tilstede fordi det var et obligatorisk fag som de måtte gjennomføre. I elevdiskursen i det første intervjuet i september 2016 ble det observert flere beskrivelser om at elevene likte matematikk, de likte å lære noe nytt samtidig som de beskrev at en engasjert lærer var viktig for at de selv skulle henge med. Lekser var noe de også var vant til å gjøre, og uttrykte at de har jobbet med lekser hjemme med og uten hjelp av foreldre mens de gikk på ungdomsskolen. Funksjoner var et tema som hverken var vanskeligere eller enklere enn andre matematikkemner i elevenes diskurs i september 2016. Diskursen inneholdt også uttrykk som at elevene var redde for å gjøre feil, og GeoGebra kom fram som noe de hadde jobbet mye med på ungdomsskolen, og at det her hadde vært fokus på hvordan føre riktig til eksamen. Dette uttrykte elevene som komplisert, men etter hvert som de hadde jobbet med det, ble det bedre. Etter sju måneder ble elevene intervjuet igjen, og de samme elevene uttrykte at funksjoner var vanskelig og strevsomt. Når noe oppleves vanskelig kan elevene velge å gi opp eller å jobbe hardt for å få det til. Elevene uttrykte at de hadde hatt mer tavleundervisning og at det var mindre tid til å jobbe med oppgaver på egenhånd. Matematikk ble også beskrevet som magi, noe som det var vanskelig å se sammenhengen i.

Resultatene til Boaler et al. (2000) viser at nivådeling kan ha uheldig effekt på elevenes prestasjoner. Om det er nivådeling når elevene selv har valgt hvilket fag de ønsker å følge på videregående, kan diskuteres, men det er grunn til å tro at 1P-elevers selvoppfatning og motivasjon for matematikkfaget kan ha en sammenheng med nivådelingen, selv om valget er selvbestemt og uten at elevene trenger å være lavt-presterende. Likevel kan det tenkes at elevene opplever at P-faget er minimumsvarianten eller "den enkleste veien" videre. Elevenes diskurs avslører at de virket fornøyd med valget i diskursen i september 2016. Dette kan henge sammen med elevenes motivasjon, men kan også ha andre forklaringer. Når elevene deles i P og T, samles de som ikke ønsker å fordype seg videre i matematikk i faget 1P. Elevenes holdninger til faget i en P-gruppe kan være preget av at de synes faget er krevende, har dårlige erfaringer fra tidligere matematikkundervisning eller ikke liker faget av andre grunner. Dette kommer ikke fram i denne studien, men rent hypotetisk vil dette bidra til at læringsmiljøet mest sannsynlig vil påvirkes av dette. Som vist i annen forskning (Heyd-Metzuyanim, 2015) virker det som om grunnen til å ta fatt på utforskende oppgaver har flere årsaker. Samtidig som manglende grunnleggende ferdigheter spiller en rolle, ser det ut som om elevens oppfatning av hva som kreves for å være matematikkelev og hva matematikk er, har betydning for motivasjon og utvikling i faget. Ut fra resultatene kan det virke som om elevene har utviklet en forsvarsmekanisme. Matematikk er vanskelig og de prioriterer ikke faget. Det kan virke som at når de har valgt P har de bevisst eller ubevisst tatt et steg for å slippe unna. Dette kan sees i sammenheng med teori om at elever opplever mer skam hvis de prøver hardt og mislykkes, enn om de ikke prøver i det hele tatt (Covington & Omelich, 1979).

En utforskende rutine bidrar ifølge Sfard (2008) til å etablere og ferdigstille en matematisk teori, som kan godkjennes av matematikere. I denne oppgaven er flere elevytringer kategorisert som utforskende selv om eleven ikke kommer i mål med å ferdigstille en matematisk teori. Elevene er på vei, famler og produserer også gale narasjoner på vei mot å ferdigstille noe de mener er riktig. Om narrativene kan og vil godkjennes av matematikere, trenger ikke å være avgjørende. Med flere erfarne deltakere i diskursen (Güçler, 2016; Sfard, 2008) kan rutinen bære preg av mer utforskende grad som sammen med andre kan utvikle godkjente matematiske narrativer.

I september 2016 ble seks elever intervjuet i to fokusgruppeintervjuer. Intervjuene ble gjennomført med lyd- og videoopptak, og var en ukjent situasjon for elevene. I mars 2017 ble de samme elevene intervjuet i de samme gruppene, med unntak av en elev som hadde forsovet seg. Det er mulig at dette kan ha endret dynamikken i den ene gruppa, som kan ha innvirkning på funksjonsdiskursen som kom fram i intervjuet. Oppgavene elevene arbeidet med i intervjuet i september 2016 og mars 2017 lignet, men de var ikke identiske. Analysene av de observerbare diskurs-transkripsjonene med fokus på realiseringer av funksjonsobjektet og elevenes rutinebruk viser en endring på disse sju månedene. Forsker var den samme i alle intervjuene, men med sju måneders opphold mellom intervjurundene, inkludert observasjon i klasserommet i mellomtida, var ikke forsker like ukjent for elevene i siste runde. Om dette har noe å si for de observerte resultatene er usikkert, men kan ha påvirket diskursen. Andre ytre faktorer som tidspunktene intervjuene ble gjennomført på, kan også ha hatt en innvirkning på elevenes funksjonsdiskurs. Første runde ble gjennomført midt på dagen, og andre runde ble gjennomført fra morgenen av der elevene ytret at de ikke var skikkelig våkne. Om dette er reelt eller kan sees på som unnskyldninger for egne prestasjoner eller for å senke forventning til egne prestasjoner, er usikkert.

Det å ha en erfaren deltaker i diskursen ser ut til å være nyttig for å få elevene til å reflektere over sammenhenger mellom ulike realisasjoner og utvide egne realisasjonstrær. Observasjonene er i tråd med annen forskning som viser at lærer spiller en kritisk rolle for å få elevene til å reflektere i dybden (Güçler, 2016; Sfard, 2008). I intervjuene var intensjonen at forsker skulle holde seg i bakgrunnen for å unngå å i stor grad å påvirke elevdiskursen. Dette bevisste valget var vanskelig å gjennomføre i praksis. Forsker vil i en slik situasjon uansett påvirke situasjonen, som fra elevens ståsted kan oppleves som en ukjent situasjon fra deres vanlige skolehverdag. I intervjusituasjonen ble det naturlig å påvirke diskursen både i form av oppfølgingsspørsmål og for å bekrefte eller avkrefte elevers spørsmål direkte til forsker.

I tillegg til at elevene skal lære matematikk som de har bruk for i dagliglivet og i framtidige studier, kan 1P-elever trekkes opp til muntlig eller skriftlig eksamen mot slutten av skoleåret. Denne ytre motivasjonen vil mest sannsynlig også prege matematikkundervisningen. I tillegg er kompetansemålene i faget stadig under debatt. Digitaliseringen av faget er også i stadig utvikling. GeoGebra kan brukes til utforsking, samtidig som det på den andre siden krever en spesiell føring på eksamen som også må læres. Utfordringen til læreren er å legge antagelser om elevenes matematiske fortid bort og engasjere elevene i utforskende matematiske oppgaver.

7. Konklusjon

I denne studien har elevers funksjonsdiskurs og hvordan funksjonsdiskursen endres ved deltakelse i faget 1P på vgs vært i fokus. Studien viser at elevenes funksjonsdiskurs før undervisning om funksjoner på vgs inneholder både rituell og utforskende rutinebruk. Hypotesen om at elevene som kommer fra grunnskolen er opphengt i lærerens metoder og er lite utforskende, ble ikke bekreftet. I elevenes funksjonsdiskurs kunne jeg observere flere ytringer der rutinebruken ble analysert som utforskende (Sfard, 2008). Sju måneder senere, i mars 2017, da elevene på nytt ble intervjuet, ble det observert mer rituell rutinebruk enn i september 2016. Ut fra elevenes diskurs i disse to intervjuene ser det ut som at elevenes rutinebruk har blitt mer rituell ved deltakelse i 1P-faget.

Ut fra resultatene i denne studien endres elevenes realisasjoner av en funksjon. Figur 21 viser relasjonene mellom de ulike realisasjonene til funksjoner i september 2016 og i mars 2017. I siste intervjurunde så flere realisasjoner ut til å være svekket i elevenes funksjonsdiskurs. Graf og funksjonsuttrykk ble brukt og knyttet sammen av elevene, og oppgavediskursen viste en rituell tilnærming til standardoppgaven. Elevene kunne ikke lage tabell ut fra en graf eller et funksjonsuttrykk. De var usikre når de skulle tolke et punkt inn i en kontekst, og de kunne ikke tolke $f(0)$. Elevene brukte mer formell notasjon i mars enn i starten av skoleåret. Av språkbruk trekkes ordet likning fram, som brukes synonymt med funksjonsuttrykk i både elev- og lærerdiskursen. Tydelig språk kan være med å redusere elevenes utfordringer i matematikkfaget (Kilhamn, 2011).

Tidligere forskning og den historiske utviklingen av funksjonsbegrepet viser til utfordringene med å se sammenhengen mellom ulike representasjoner av funksjoner (Janvier, 1978; Katz, 1993; Nachlieli & Tabach, 2012; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992). Lignende utfordringer kan observeres i 1P-elevene funksjonsdiskurs i denne studien. Samtidig viser også denne studien hvordan seks elevers funksjonsdiskurs endres gjennom deltakelse i 1P-faget, og jeg har ikke funnet annen forskning som går direkte på diskursendring i funksjoner i denne elevgruppa. Hvordan relasjonen mellom graf og funksjonsuttrykk og realisasjonen tabell ”forsvinner”, er så vidt meg bekjent ikke funnet andre steder.

Forskningsspørsmålets andre del tok tak i mulige årsaker til hvorfor elevene virket mer rituelle i rutinebruken og uttrykte færre sammenhenger i realisasjonene etter funksjonsundervisningen på vgs. Lærers funksjonsdiskurs i undervisningen i de observerte timene inneholdt ikke klare spor som kunne forklare elevenes diskursendring i rutinebruk og realisasjoner. I undervisningen ble det observert både rituell og utforskende rutinebruk i lærerens funksjonsdiskurs. I noen oppgaver utforsket hun sammen med elevene, samtidig som hun introduserte elevene for nye objekter som elevene må bli kjent med gjennom imitasjon. Matematikk er et fag der emnene bygger på hverandre og lærer må introdusere nye emner for elevene for at de skal få kjennskap til dem (Sfard, 2008). Ut fra aktivitetene i undervisningen måtte 1P-elevene tilnærme seg funksjonsbegrepet på ulike måter, som er anbefalt i annen litteratur (Janvier, 1978; Nachlieli & Tabach, 2012; Utdanningsdirektoratet, 2012), og det elevene viste i intervjuene samsvarte ikke med det som var gjennomgått i timene. Det ser ut til at elevenes assosiasjoner ikke samsvarer med kompetansemål og lærers forventinger ut fra undervisningen. Hundelands (2010) resultater viser at matematikklæreren på vgs er trofaste mot kompetansemålene og at tidspresset er stort. Elevene kan trekkes ut til sentralgitt eksamen, noe som nevnes av lærer i undervisningen. Ut fra datamaterialet i denne studien, er det ikke klare indikasjoner på at lærerens diskurs er årsaken til elevenes diskursendring. Likevel kan vi ikke se bort fra at læreren og klasseromskulturen har innvirkning på elevene motivasjon (Pintrich, 2003; Skaalvik & Skaalvik, 1998) og rutineutvikling som Heyd-Metzuyamin et al. (2016) viser til i sin studie.

Elevenes diskurs om eget forhold til matematikkfaget kan ut fra dette datamaterialet se ut til å ha indikasjoner på at dette har noe med elevenes diskursendring å gjøre. Elevene uttrykte blant annet at de ikke jobbet med faget utenom undervisningstiden og at de valgte bort å skrive av tavla, noe som kan indikere at den indre motivasjonen til å objektivisere funksjonsbegrepet manglet. Årsaken til dette er mest sannsynlig kompleks, og på grunn av studiens begrensninger er dette ikke enkelt å svare på direkte ut fra datamaterialet. Ut fra elevenes diskurs om eget forhold til matematikkfaget, er hypotesen om at 1P-elevers selvoppfatning og motivasjon i faget kan ha en sammenheng med valget de har gjort om å velge P-matematikk på vgs forsterket. Grunnen til at en elev ikke tar fatt på utforskende oppgaver kan også komme fra elevens miljø utenfor klasserommet (Heyd-Metzuyanim, 2015), noe som er vanskelig å si noe om ut fra studiens omfang. Familiemedlemmers forventninger til eleven er vist at kan påvirke motivasjonen til å lære rituelt eller utforskende (Sfard & Prusak, 2005). Elevenes identitet vil også være avgjørende for hvordan utviklingen vil være hos en elev som velger 1P, og kan være noe å se nærmere på i framtidige studier.

7.1. Pedagogiske implikasjoner

En 1P-lærers utfordring er å legge til rette for et trygt og positivt læringsmiljø der elevene kan utvikle sin indre motivasjon til å jobbe med faget uansett hvilke erfaringer eleven har fra tidligere skolegang. For å løse denne oppgaven må lærerens rutinebruk være fleksibel og utforskende, slik at hun treffer elevene der de er. En ambisiøs tilnærming som har som mål å støtte og utvikle elevens begrepsforståelse, utforsking, fleksibilitet og motivasjon krever hardt arbeid fra læreren og krav om elevens aktive deltakelse. Sfards (2008) kommognitive rammeverk kan brukes når læreren vil observere og analysere elevers diskurs, se etter endring i elevenes rutinebruk og realisasjoner av begrep. Fokus på hva som kan fremme mer utforskende rutinebruk, er nyttig for læreren å være bevisst på både når læreren innfører noe nytt med elevene, først som et ritual, og med aktivitetene som videre gir mulighet til å utforske. Lærers bevissthet rundt dette, kan også videreformidles til elevene, slik at de også kan være bevisst på hva egne valg kan ha å si for utvikling deres.

Ut fra denne studien trekkes det fram noen pedagogiske implikasjoner som kan være verdt å tenke gjennom i arbeid med funksjoner både på ungdomsskolen og på vg1. Rutinebruken knyttet til elevenes grunnlag innen aritmetikk og algebra må jobbes grundig med for at eleven skal bli fleksibel i andre diskurser. Å jobbe for et klassemiljø der elevene er aktivt med i det som skjer, reflekterer, deler egne refleksjoner og skriver av det som kommer fram både fra lærer og medelever må jobbes mot, og imitasjon med refleksjon kan utvikle elevens rutinebruk i positiv retning. Uten refleksjonsdelen vil dette ende i ritualer som må huskes for å brukes riktig.

Deldiskursene til de ulike realisasjonene må jobbes med hver for seg i tillegg til å knytte dem sammen. Det må jobbes med *alle* realisasjonsovergangene. Elevene kan selv være med å ta avgjørelser om hvilke overganger de mestrer og hvilke de trenger å jobbe mer med. Her må diskursen inneholde både fokus på detaljer og helhet. Elevene kan lage egne kontekster som presenteres sammen med tabell, graf eller uttrykk og knytte det til en situasjon de kjenner godt. Notasjonen og det presise matematiske språket er abstrakt. Når y erstattes med $f(x)$ kan en forklaring på hvorfor denne skrivemåten er valgt gjennom historien være hensiktsmessig å ta med. Presis språkbruk er noe både elever og lærere må streve etter. Blandes begrepene kan også rutinebruken påvirkes, noe som kan skape utfordringer for elevene.

GeoGebra er et godt verktøy for å utforske oppgaver, der elevene raskt får fram en graf som virker mindre abstrakt enn funksjonsuttrykk. Det må ikke tas for gitt at elevene kan lage tabell og tolke koordinater, da det i denne studien sees eksempler på at dette forsvinner. Gi elevene mulighet til å lære med åpne, utforskende oppgaver der de må streve og gjøre feil, og oppsummer underveis så de ikke mister motet. Å fokusere på hvordan elevene tenker er viktigere enn den ”riktige” metoden. Metodene og mer elegant notasjon kan utvikles sammen med elevene.

7.2. Implikasjoner for videre forskning

Ut fra det jeg har funnet ut i denne studien, sitter jeg igjen med flere tanker om videre arbeid. Det virker som om disse elevenes grunnleggende diskurser om tall er mangelfulle, og det å se nærmere på hvilke realisasjoner 1P-elever har om tall, er en aktuell vei videre. Er funksjonsemnet spesielt abstrakt for elevene, eller endres elevenes rutinebruk mot mer rituelle rutiner uavhengig av emne? Blir elevene mer utforskende i andre emner gjennom deltakelse i matematikkundervisningen på vgs, eller er tendensen slik at elevene blir mer rituelle i rutinebruken i andre matematikkurs i den videregående skolen også? Gjelder denne utviklingen også for de elevene som velger T-matematikk, eller er disse elevene engasjert på en annen måte? I funnene i denne studien er det grunn til å tro at klassemiljøet er preget av gruppesammensetningen. Et fokus på elevenes identitet og hvilke historier eleven forteller om seg selv kunne også være interessant å sett nærmere på. Er det forskjeller i 1P- og 1T-elevens matematikkidentitet? Blir man mindre kreativ og mer bundet og redd ettersom man føler seg mer og mer bakpå, hodet under vannet og hjelpeløs? Hvis man stadig havner mer bakpå, antar jeg at følelsen blir sterkere.

En hypotese som kan forskes nærmere på er at lærere nedprioriterer utforskende oppgaver på bekostning av mer standardiserte oppgaver som elevene møter på prøver og i eksamensoppgaver. Hva mener lærere på ungdomsskolen og i den videregående skole om dette? Hvilken oppfatning har læreren når det gjelder ulik rutinebruk og hvordan kommer dette fram i klasserommene? Er det slik at lærerne vektlegger utforskende rutiner og oppgaver, eller preges de også av mer rituell tilnærming i undervisningsdiskursen? Det kunne vært interessant å sett på hvilke muligheter elevene i en matematikkgruppe gis til å lære. Har ungdomsskolelærerne bedre tid til å utforske sammen med elevene og er de mindre preget av eksamensforberedelser? Hvordan sentralgitt eksamen gjennomføres må sees i sammenheng med lærernes valg i klasserommet, for lærere er lojale mot kompetansemålene og den framtidige eksamenen (Hundeland, 2010). Det er sannsynlig at lærere og elever bruker eksamensoppgaver som veiledende i tillegg til kompetansemålene for faget. En analyse av hvilken rutinebruk som trengs for å gjennomføre eksamensoppgaver kunne derfor være interessant. Fokuseres det først og fremst på rituelle- og gjerningsrutiner på eksamensoppgavene, kan det tenkes at mer utforskende oppgaver også velges bort i undervisningen. Dette vil kanskje prege matematikkundervisningen mer enn matematikklæreren ønsker. Min erfaring som lærer i 1P er at elever ofte syntes eksamensoppgavene er vanskelige, da de er mer problembaserte enn oppgavene i læreboka. Læreboka er også en faktor som er med på å påvirke lærerens diskurs (Singh, 2017).

Utvikles rutinebruken i andre P-klasser også mot et mer rituelt preg og vil andre elever fra P-grupper ha samme endring av realisasjoner? Mer forskning på samme tema og elever i lignende matematikkgruppe vil gjerne ikke være kreativt og nytt, men vil gi bredde og vil kunne bekrefte eller avkrefte det som har kommet ut av denne studien. Utdanningsforskerne Melby-Lervåg og Lervåg intervjues i bladet Utdanning (Jelstad, 2017) at det kreves en rekke studier for å si noe sikkert om et forskningsfunn er riktig eller ikke. Slike replikasjonsstudier mangler prestisje fordi forskere ønsker å løfte fram nye, spennende funn. Dette smitter over på metaanalyser. For meg som er lærer i den videregående skole, har jeg tro på at å jobbe i Lesson Study-sykluser (Munthe, Helgevold, & Bjuland, 2015) sammen med lærerkollegiet, vil kunne hjelpe til med å utvikle en forskningsbasert undervisning der primærkildene i forskningen er våre egne elever. Dette krever tid og ressurser, men får vi dette til, tror jeg at dette kan motivere og inspirere både lærere og elevene våre til å bli mer kreative i rutinebruken.

Denne masteroppgaven har hatt Sfards (2008) kommognitive rammeverk som perspektiv. Vi lever i en verden i utvikling der egenskaper som kreativitet, problemløsning og kritisk tenking er egenskaper framtiden trenger. Hvordan skal skolen og læreren legge opp undervisningen for å imøtekomme framtidens ønsker om egenskaper? Det er mulig at et kommognitivt perspektiv på læring og rutinebruk kan bringe forskningsfeltet videre.

8. Referanseliste

Alseth, B., Breiteg, T., & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering.* Notodden: Telemarksforskning.

Boaler, J., Wiliam, D., & Brown, M. (2000). Students' experiences of ability grouping-disaffection, polarisation and the construction of failure. *British Educational Research Journal, 26*(5), 631–648.

Covington, M. V., & Omelich, C. L. (1979). Are causal attributions causal? A path analysis of the cognitive model of achievement motivation. *Journal of Personality and Social Psychology, 37*(9), 1487–1507.

Cury, F., Elliot, A. J., Da Fonseca, D., & Moller, A. C. (2006). The social-cognitive model of achievement motivation and the 2× 2 achievement goal framework. *Journal of Personality and Social Psychology, 90*(4), 666–679.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2016, 4 27). *Hensyn til personer*. Hentet 11.2.2016 fra Forskningsetiske retningslinjer for samfunnskunnskap, jus og humaniora: https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/b.-hensyn-til-personer-5---18/

De nasjonale forskningsetiske kommiteer. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.* Hentet fra www.etikkom.no

Durant, W. (1961). *The Story of Philosophy: the lives and opinions of the great philosophers of the western world.* New York: Simon and Schuster

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring.* Oslo: Abstrakt forlag.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21*(6), 521–544.

Güçler, B. (2016). Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 375–393.

Hannula, M.S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 165–178.

Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics – Theacher-student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 341–368.

Heyd-Metzuyanim, E. (2015). Vicious cycles of identifying and mathematizing: A case study of the development of mathematical failure. *Journal of the Learning Sciences, 24*(4), 504–549.

Heyd-Metzuyanim, E., Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Opportunities for learning given to prospective mathematics teachers: between ritual and explorative instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(6), 547–574.

Hundeland, P.S.. (2010). *Matematikklærerens kompetanse. En studie om hva lærerne på videregående trinn vektlegger i sin matematikkundervisning.* Kristiansand: Universitetet i Agder.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations - studies and teaching experiments.* University of Nottingham.

Jelstad, J. (2017, april 7). Sentrale utdanningsforksere vil ha slutt på Hattie-forenklinger i skoledebatten. *Utdanning*, 20–23.

Jensen, A.M. & Wæge, K. (2012). *Undersøkende matematikk - aktiviteter.* Trondheim: Matematikksenteret. Hentet fra Matematikksenteret: http://matematikksenteret.no/content/1740/Undersøkende%20matematikk%20-%20aktiviteter)

Katz, V. (1993). *A history of mathematics, and introduction.* New York: Harper Collins College Publishers.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academies Press.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal, 20*(4), 282–300.

Kleven, T., Tveit, K., & Hjardemaal, F. (2014). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: En hjelp til kritisk tolkning og vurdering.* Oslo: Unipub.

Kunnskapsdepartementet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Hentet 11 9, 2016 fra Udir: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Kunnskapsdepartementet. (2017). Hentet fra www.regjeringen.no: https://www.regjeringen.no/contentassets/37f2f7e1850046a0a3f676fd45851384/overordnet-del---verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen.pdf?fref=gc&dti=669526076406894

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal.

Lampert, M., Beasley, H., Ghousseini, H., Kazemi, E., & Franke, M. (2010). Using designed instructional activities to enable nov-ices to manage ambitious mathematics teaching. I M. K. Stein & L. Kucan (red.), *Instructional explanations in the disciplines* (129–141). New York, NY: Springer.

Matematikksenteret. Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. (2014). *Mestre Ambiøs Matematikkundervisning - prosjektbeskrivelse.* Hentet fra http://www.matematikksenteret.no/multimedia/3008/MAM---prosjektbeskrivelse.pdf

Maxwell, J. A. (2008). Designing a qualitative study. I L. Brinkman & D. J. Rog (red.), *The Sage handbook of applied social research methods* (ss. 214-253). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Munthe, E., Helgevold, N., & Bjuland, R. (2015). *Lesson Study i utdanning og praksis.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Journal of Educational Research, 51*, 10–27.

Naalesund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secundary students' algebraic proficieney.* Oslo: Unipub forlag.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O., & Hals, S. (2014). *Sinus Matematikk 1P.* Oslo: Cappelen Damm.

Pintrich, P.R. (2003). A motícational Science Perspective on the Role of Student Motivation in Learning and Teaching Contexts. *Journal of Educational Psychology, 95*(4), 667–686.

Rønningstad, K. (2009). *Misoppfatninger rundt funksjonsbegrepet, undersøkelse blant elever i videregående skole.* Masteroppgave, Universitetet i Oslo, Oslo.

Ryve, A. (2008). Analyzing mathematical classroom discourse: Initiating elaborations on the usefulness of the dialogical approach. *Nordic Studies in Mathematics Education, 13*(3), 7–29.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 334–370). New York: MacMillan.

Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362–389.

Sfard, A. (1992). Operational origin of mathematical object and the quandary of reification - the case of function. I D. Harel & E. Dubinsky (red.), *The Concept of function:*

Aspects of epistemology and pedagogy (ss. 59–84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating:human development, the growth of discourse, and mathematizing.* New York, NY: Cambridge University Press.

Sfard, A. & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher, 34*(4), 14–22.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. I G. Harel & E. Dubinsky (red.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (ss. 25–58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Silverman, D. (2011). *Interpreting qualitative data: a guide to the principles of qualitative research* (4. utg.). Los Angeles, CA: SAGE.

Singh, O. (2017). Danningsperspektiver på utforming av lærersubjektet i læreverket i matematikk. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift, 101*(3), 266–277.

Skaalvik, E.M., & Skaalvik, S. (1996). *Selvoppfatning, motivasjon og læringsmiljø.* Oslo: TANO.

Sollid, B. (2009). *Matematikk i overgangen mellom ungdomsskolen og videregående skole.* UiO.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode.* (Vol. 3rd ed.). Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2012). *Læringsstøttende prøver. Matematikk 5.-10. trinn. Ressurshefte.* Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Utdanningsdirektoratet. (2013, 6 21). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet 6 7, 2017 fra Udir: http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.* Dordrecht: Kluwer.

Walshaw, M. (2012). Opportunities to learn. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(6), 425–427.

World Economic Forum. (2016, 01). *The Future of Jobs*. Hentet 07 23, 2017 fra World Economic Forum: http://reports.weforum.org/future-of-jobs-2016/

9. Vedlegg

Vedlegg 1

<u>Første elevintervju</u>

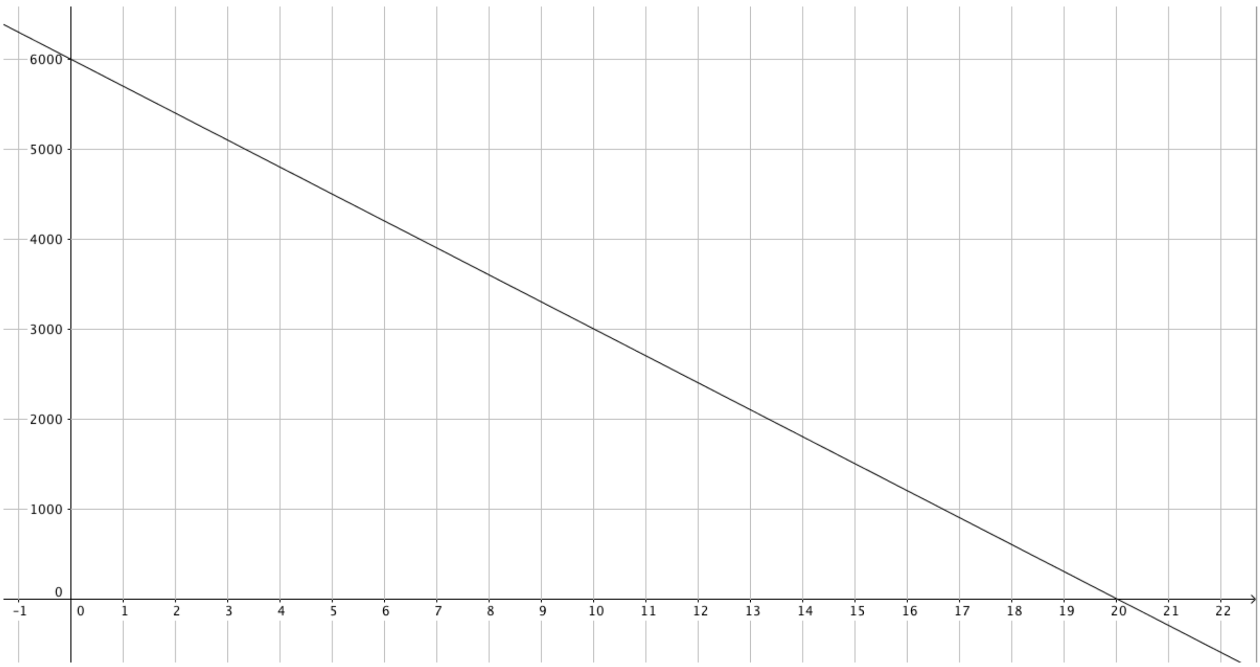
Innledning

Mitt navn er Norunn Vikshåland. Jeg er masterstudent ved Universitetet i Stavanger og ønsker å lære mer om elevenes læring i matematikk. I denne samtalen har jeg lyst til å snakke med dere om funksjoner. Jeg takker for at dere har sagt dere villige til å delta, og jeg håper det er greit for dere at jeg tar opp denne samtalen med lyd- og videoopptak. Deltakelsen deres er basert på frivillighet, og dere har full rett til å trekke dere dersom dere ønsker det. Jeg håper selvsagt at dere er villige til å være med på denne intervjusamtalen! Når prosjektet er over, så vil alt av opptak slettes, og dere kan være trygge på at dette blir brukt på en slik måte at dere ikke blir gjenkjent. Jeg vil presisere at dette ikke er en vurderingssituasjon. Hvordan dere kommuniserer er viktigere enn om svarene er riktige.

Spørsmål

- Hvordan er en god matematikktime?
  - Hva er en god matematikklærer?
  - Hvordan lærer dere matematikk best mulig (Arbeidsmåter)?
  - Hva tenker dere om å sitte i par og diskutere oppgaver sammen? (plenum)
- Hva slags oppgaver jobber dere med i matematikktimene? På ungdomsskolen/vgs? Hvordan? Hvorfor? Lærebok?
- Snakket dere på ungdomsskolen om hva som ventet dere i matematikk på vgs?
- **Funksjoner:**
  - Hva er en funksjon?
  - Eksempel? (Tekst, tabell, funksjonsuttrykk, graf)
- Er funksjoner et emne som er greit å henge med i? Vanskelig?
- Kan dere nevne noen sentrale ord/begreper om funksjoner som dere har arbeidet med? *(funksjon, fri variabel, avhengig variabel, koordinatsystem, koordinater, origo, stigningstall, førstegrad, andregrad, konstantledd, graf, første (x) akse, andre (y) akse, lineære funksjoner, proporsjonale funksjoner, omvendt proporsjonale funksjoner, skjæringspunkt, nullpunkt, toppunkt, bunnpunkt, ekstremalpunkt, tangent etc)*
- Kan du forklare dette/de begrepet(ene)?
- Hva gjorde at dere lærte dette begrepet? Kunne dere dette fra før? Lærte du dette av læreren, sidemannen, videoer, læreboka, foreldre, søsken?

- Hva er en variabel?
- GeoGebra, er det et godt hjelpemiddel? Hvordan? Hvorfor?
- Gi noen oppgaver til elevene som de samtaler om (for å få dem til å diskutere sammen, se hvordan de bruker begrepene i praksis)
    - Finne uttrykk fra graf
    - Funksjonsuttrykk fra tabell
    - Tegn grafen fra uttrykk
    - Beskrive graf (praktisk situasjon)
- Kunne dere tenke dere andre fremgangsmåter for å løse disse oppgavene? Kan dere si noe om hvorfor dere valgte deres måte?
- Henger funksjonslære sammen med andre emner i matematikken?
- Da var vi ferdige. Tusen takk for at dere stilte opp!



A. y = 6000 – 300x

B. y = -300x+6000

C. y = 20x + 6000

D. y = -20x +6000

x	0	1	2	3	4	5
y	6000	5700	5400	5100	4800	4500

Siri har 6000 kr som hun skal bruke i ferien. Hun bruker 300 kr hver dag.

- Hvor mye har hun igjen etter den åttende dagen?
- Har dette noe med funksjoner å gjøre? Forklar.

Hvilke sammenhenger er lineære?

A. y = 2x

B. y = -2x-0,5

C. y = 3/x

D. y = x/3

E. y = (1/3) · x

F. y = -0,5x-5x

G. y = 0,5x· x

Vedlegg 2

Intervjuguide runde 2

Innledning:

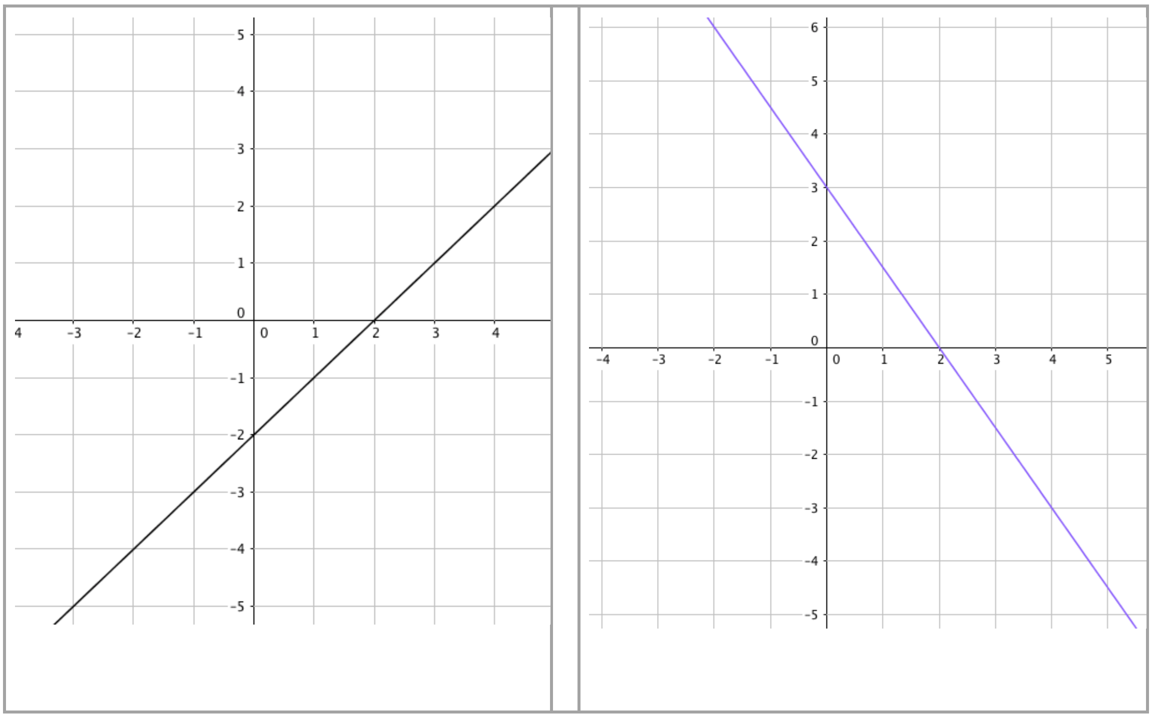
Jeg vil presisere at dette ikke er en vurderingssituasjon. Jeg ønsker å få innblikk i hvordan dere tenker når dere løser oppgaver om funksjoner.

1. Nå har jo jeg vært "flue på veggen" i matematikktimene deres, men hvordan vil dere beskrive en typisk matematikktime på vg1 der dere jobber med funksjoner?
2. Skriver dere av tavla når dere har tavleundervisning? Hvorfor?/Hvorfor ikke?
3. Hva har dere lært om funksjoner?
4. Hva er en funksjon?
    - Realiseringer (tabell, uttrykk, graf, kontekst)
5. Hva er ei typisk funksjonsoppgave? Hvordan jobber du for å komme fram til en løsning?

Oppgave 1

a. Beskriv grafene.

b. Finn funksjonsuttrykkene som passer til grafene:



Oppgave 2

En funksjon f er gitt ved $f(x)=\frac{2}{3}x-2$

a. Tegn grafen til f for $-6 \leq x \leq 6$.
    i. Ta med rutepapir, linjal og blyant.

b. Regn ut f(-3), f(-2) og f(1).
    i. Hva betyr f(-3), f(-2) og f(1)?

c. Finn f(0) grafisk.
    i. Hva betyr f(0)?
    ii. Kan du finne det på andre måter?

d. Løs ligningen f(x)= 2 grafisk.
    i. Andre måter å løse oppgaven på?
    ii. er dere vant til å løse den grafisk?

Er denne typen oppgave ukjent for dere? Eller ligner den på oppgaver dere har jobbet med før?

Alternativ 2:

En funksjon f er gitt ved $f(x) = -2x + 4$

a. Tegn grafen til f når x er mellom -6 og 6.

b. Regn ut f(0) og f(4).
    a. Hva betyr f(0) og f(4)?

c. Finn f(3) grafisk.
    a. Hva betyr f(3)?
    b. Andre måter å løse oppgaven på?

d. Løs likningen f(x)=6 grafisk
    a. Hva betyr f(x)=6?
    b. Flere måter å løse oppgaven på?

Oppgave 3 (ble ikke tid til å gjennomføre skikkelig i begge gruppene)
En funksjon h er gitt ved $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$

a. Hvordan vil grafen se ut?
    a. Ut fra funksjonsuttrykket: skjærer y-aksen, topp-/bunnpunkt

b. Skriv av og fyll ut tabellen nedenfor.

t	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
h(t)									

c. Tegn grafen til h.
- GeoGebra?
- For hånd?

d. Tekstoppgaven til dette funksjonsuttrykket er som følger:
Kari står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter t sekunder er ballen tilnærmet h(t) meter over bakken.

Gi en praktisk tolkning av grafen.
- verdiene av h(0), h(3) og h(-2)
- beskriv grafen

e. Hvilken definisjonsmengde passer i denne oppgaven?
- Læreren har ikke brukt begrepet definisjonsmengde i undervisningen, men det står i læreboka s. 216

f. Verdens raskeste heis befinner seg i verdens høyeste bygning. Heisen har en fart på nesten 17 meter i sekundet.

I det Kari kaster ballen opp i luften, starter heisen fra 50 m over bakken, og går jevnt nedover med 17 meter per sekund uten stopp. Vil heisen nå bakken før ballen?

Vedlegg 3

Informasjonsskriv til lærer vedrørende forskningsprosjekt i skolen

Jeg vil her informere om forskningsprosjektet som jeg ønsker å gjøre i klassen din og som jeg vil skrive om i min masteroppgave i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger (UiS).

Målet med prosjektet er å studere elevers funksjonsdiskurs. Arbeidet vil dreie seg om å se sammenhenger mellom elevers funksjonsdiskurs før og etter funksjonsundervisningen på VG1, samt observasjon av klassens funksjonsundervisning. Det er ønskelig å intervjue 6 elever i september og etter endt funksjonsundervisning (februar?) for å samle inn data. Det vil bli gjort video- og lydopptak av observasjonen i klasserommet og elevintervjuene. Alle observasjoner og kommentarer fra lærer og elever vil bli behandlet konfidensielt og anonymisert slik at de ikke vil kunne spores tilbake til deltakerne.

Gjennom hele prosessen (innsamling, bearbeidelse, analyse og presentasjon av data) vil jeg være bevisst på å anonymisere datamaterialet. Det skal ikke være mulig å vite hvem som har gjort eller sagt hva eller hvilken klasse og skole forskningen har foregått ved. Det skal ikke være mulig å gjenkjenne noen av forskningsdeltakerne i publikasjonen.

All medvirkning i dette prosjektet er basert på frivillighet, og deltakerne har mulighet til å trekke seg fra prosjektet når som helst.

Observasjonene vil fortrinnsvis foregå i løpet av september og februar/mars – etter nærmere avtale med deg som lærer. Video- og lydopptak vil bli oppbevart på en sikker måte. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning ved NSD. Alle opptak vil bli slettet/destruert når prosjektet er avsluttet. Dato for prosjektets slutt er satt til 30. juni 2018.
Det ferdige arbeidet vil bli presentert i en skriftlig mastergradsoppgave. Hverken skolen, læreren eller elevene vil kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Nærmere informasjon om prosjektet kan fås ved henvendelse til meg på tlf. 416 37 973. Veileder Reidar Mosvold som står som daglig ansvarlig for dette prosjektet kan kontaktes på tlf. 51 83 23 42.
Jeg håper på positiv tilbakemelding fra deg.

Vennlig hilsen
Norunn Vikshåland, mastergradsstudent ved UiS.

Vedlegg 4

Informasjonsskriv vedrørende forskningsprosjekt i skolen i forbindelse med masteroppgave om funksjoner

Jeg vil her informere deg som elev på *Skolens navn* videregående skole om forskningsprosjektet som jeg ønsker å gjennomføre i matematikkgruppa. Prosjektet inngår som en del av min masteroppgave i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger (UiS). Målet med prosjektet er å studere hvordan elever i gruppe kommuniserer før og etter undervisning om funksjoner på VG1. Arbeidet vil dreie seg om å granske elevers kommunikasjon omkring sentrale matematiske begreper i funksjonslære.

Jeg ønsker å intervjue 6 elever fordelt på to grupper for å samle inn data. Det fokuseres på hvordan du uttrykker deg eller løser oppgaver heller enn om det endelige svaret er riktig. Jeg vil understreke at dette ikke er en vurderingssituasjon.

Det vil bli gjort lyd- og videoopptak fra funksjonsundervisningen i klasserommet samt elevgruppeintervjuene. Alle observasjoner og kommentarer fra lærer og elever vil bli behandlet konfidensielt, og datamaterialet vil bli anonymisert ved prosjektslutt slik at det ikke vil kunne spores tilbake til elevene, klassen eller skolen.

All medvirkning i dette prosjektet er basert på frivillighet, og du står selvsagt fritt til å velge om du skal være med eller avstå fra å delta i prosjektet. Det vil ikke få konsekvenser for din vurdering i faget eller forholdet til skolen generelt. Dersom du ikke ønsker å delta i forskningsprosjektet kan du bli flyttet til en annen matematikkgruppe mens opptakene pågår. Du skal ikke gå glipp av undervisning.

Observasjonene vil fortrinnsvis foregå i løpet av september og februar/mars, etter nærmere avtale med klassens matematikklærer. Video- og lydopptak vil bli oppbevart på en sikker måte. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning ved NSD. Alle opptak vil bli slettet/destruert når prosjektet er avsluttet. Dato for prosjektets slutt er satt til 30. juni 2018.

Det ferdige arbeidet vil bli presentert i en skriftlig masteroppgave. Hverken skolen, læreren eller elevene vil kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Nærmere informasjon om prosjektet kan du få ved å henvende deg til meg på tlf 416 37 973 eller sende meg en mail på Norunn.Mari.Vikshaland@skole.rogfk.no Veileder Reidar Mosvold som står som daglig ansvarlig for dette prosjektet kan kontaktes på tlf 51 83 23 42. Jeg håper på positiv tilbakemelding fra deg.

Vennlig hilsen
Norunn Mari Mølstre Vikshåland
Mastergradsstudent i matematikkdidaktikk, UiS

Samtykkeerklæring:

Jeg tillater at en mastergradsstudent fra UiS observerer funksjonsundervisningen og eventuelt intervjuer meg.

Underskrift: .... Telefonnr: ....

Jeg godtar også at det blir samlet inn data som beskrevet ovenfor.

Ja Nei (sett ring rundt valg)

Vedlegg 5

Reidar Mosvold
Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk Universitetet i Stavanger

4036 STAVANGER

Vår dato: 07.09.2016 Vår ref: 49286 / 3 / AGH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 20.07.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

49286	*Elevers funksjonsdiskurs*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Stavanger, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Reidar Mosvold*
Student	*Norunn Mari Mølstre Vikshåland*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 30.06.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Agnete Hessevik

Kontaktperson: Agnete Hessevik tlf: 55 58 27 97
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

Kopi: Norunn Mari Mølstre Vikshåland nm.vikshaland@stud.uis.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 49286

Personvernombudet legger til grunn at skolens ledelse godkjenner prosjektet.

FORMÅL

Formålet med prosjektet er å undersøke elevdiskursen omkring funksjonsbegrepet i matematikk.

UTVALG OG REKRUTTERING

Utvalget består av en lærer og elever over 16 år. Utvalget rekrutteres via lærer. Personvernombudet legger til grunn at taushetsplikten ikke er til hinder for rekrutteringen, og at forespørsel rettes på en slik måte at frivilligheten ved deltagelse ivaretas.

Det er i dette prosjektet særlig viktig å sikre at frivilligheten ivaretas, slik at elevene opplever det som reelt frivillig å delta, og at det å si nei til deltakelse ikke vil gå ut over deres undervisning. Det kan også oppleves vanskeligere å si nei når forespørsel kommer fra læreren.

DATAINNSAMLING

Datainnsamlingen vil foregå som gruppeintervju med elever der det gjøres lyd- og videoopptak, samt lyd- og videoopptak av elevene og lærer i klasserommet under matematikkundervisning om funksjoner.

INFORMASJON OG SAMTYKKE

Utvalget informeres skriftlig og muntlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Informasjonsskrivene mottatt 06.09.2016 er hovedsakelig godt utformet. Vi anbefaler imidlertid å presisere setninger om anonymisering i skrivet til læreren, slik at det kommer tydelig fram at det behandles personopplysninger i datamaterialet og at alle personopplysninger anonymiseres ved prosjektslutt.

TREDJEPERSONSOPPLYSNINGER

Det behandles enkelte opplysninger om tredjeperson (personer deltakerne har lært begreper av og eventuelt andre personer som nevnes). Det skal kun registreres opplysninger som er nødvendig for formålet med prosjektet. Opplysningene skal være av mindre omfang og ikke sensitive, og skal anonymiseres i publikasjon. Så fremt personvernulempen for tredjeperson reduseres på denne måten, kan prosjektleder unntas fra informasjonsplikten overfor tredjeperson, fordi det anses uforholdsmessig vanskelig å informere.

DATASIKKERHET

Personvernombudet legger til grunn at forsker etterfølger Universitetet i Stavanger sine interne rutiner for datasikkerhet. Dersom personopplysninger skal lagres på privat pc/mobile enheter, bør opplysningene krypteres tilstrekkelig.

PROSJEKTSLUTT

Forventet prosjektslutt er 30.06.2018. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres. Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:

- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn)
- slette digitale lyd-/bilde- og videoopptak