Universitetet
i Stavanger

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master i Utdanningsvitenskap (matematikkdidaktikk)	Vårsemesteret, 2019 Åpen/ ~~konfidensiell~~
Forfatter: Annette Håland	……………………………………… (signatur forfatter)
Veileder: Tone Bulien	
Tittel på masteroppgaven: Kognitive krav i lærebøkenes oppgaver og oppgaveteksten s påvirkning av forståelse i emnet lineære likninger på 8.trinn. Engelsk tittel: Cognitive textbook requirements and how the textbook can influence understanding of year 8 linear equations.	
Emneord: Lærebøker Kognitive krav Aritmetisk kompleksitet Instrumentell og relasjonell forståelse Dybdelæring Læreplan Lineære likninger	Antall ord: 24562 + vedlegg/annet: 27141 Stavanger, 11. juni 2019

Sammendrag

I denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk ble lærebøkenes oppgaver, eksempler og legitimering studert. Formålet med studien var å belyse hvilke tendenser av kognitive utfordringer elevene på 8.trinn møter i arbeid med matematikkoppgaver fra lærebøkene og hvilken type forståelse lærebøkene fremmer. Problemstillingen for studien var følgende:

Hvilke kognitive krav stiller lærebøkenes oppgavetekst i emnet lineære likninger på 8.trinn og hvordan kan oppgavetekstene påvirke instrumentell og relasjonell forståelse?

For å besvare denne problemstillingen ble det gjennomført en innholdsanalyse av læreverkene Maximum 8 og Faktor 8. Analysen bestod av en horisontal del der lærebøkenes generelle struktur ble studert, og en vertikal del der oppgavene ble vurdert opp mot kognitive krav og aritmetisk kompleksitet. Eksemplene og forklaringene ble vurdert etter muligheter for generaliseringer.

Resultatene fra undersøkelsen viste at et stort flertall av oppgavene i begge læreverkene er oppgaver med lav kognitiv etterspørsel og oppgaver som ikke krever flere delmål for å finne løsningen. Eksemplene gitt i lærebøkene var også i stor grad løsningsforslag som demonstrerte prosedyrer for å løse likninger. Dette impliserte derfor at de studerte lærebøkenes oppgaver og eksempler kan påvirke instrumentell forståelse. Forklaringene gitt i lærebøkene indikerte derimot i større grad et fokus på relasjonell forståelse.

Forord

Perioden med å skrive masteroppgave er nå ved veis ende og oppgaven markerer avslutningen på en femårig lærerutdanning ved Universitetet i Stavanger. Gjennom denne masteroppgaven har jeg fått et mer bevisst forhold til matematikkoppgavenes kognitive etterspørsel og den type forståelse ulike oppgaver fremmer. Dette er noe jeg vil ta med meg videre i lærerarbeidet.

Jeg vil benytte anledningen til å takke min studievenninne Linda Årthun for god støtte, oppmuntrende samtaler og bidrag i mer uformelle settinger. En takk rettes også til min samboer som har vist forståelse og oppmuntret meg i tider som har vært frustrerende. Jeg vil også takke foreleserne som har fulgt oss gjennom masterprogrammet og inspirert oss med gode tips og idéer. En ekstra stor takk rettes til Tone Bulien, min veileder, for de gode faglige tilbakemeldinger på arbeidet mitt.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning

Studier viser at læreboka spiller en viktig rolle i læringsarbeidet i skolen, og mange lærere bruker den som et verktøy til planlegging av undervisning (Kunnskapsdepartementet, 2015). Resultatene fra TIMSS-undersøkelsen 2011 viser at 77% av deltakerne i gjennomsnitt bruker læreboka som selve grunnlaget for matematikkundervisningen på 8.trinn, og i Norge blir den brukt av hele 94% (Mullis, Martin, Foy & Arora, 2012). Som Gervholm (2017) også kommenterer fra resultatene på TIMSS rapporten og andre undersøkelser, er bruken av lærebøker større i de nordiske og baltiske landene, sammenlignet med andre deler av verden.

Da både læringsutbyttet til elevene og undervisningen blir påvirket av læremidlene og oppgavene, og er det viktig at læremidlene har en god kvalitet (Pepin, 2015; Kunnskapsdepartementet, 2015). En kvalitetssikring og godkjennelse av læremidler, der lærebøker inngår, ble i juni 2000 opphevet og en statlig godkjennelsesordning vil trolig ikke komme tilbake. Det finnes nå ingen krav til standarder eller krav for hva et læremiddel skal inneholde. Samtidig er det en stadig større økning av læremidler, noe som trolig fører til variasjoner i kvaliteten på de ulike midlene (Kunnskapsdepartementet, 2015).

På bakgrunn av dette kan det være interessant å studere norske lærebøker for å kaste lys over kvaliteten. Dette kan for eksempel gjøres gjennom analyse av de kognitive kravene oppgavene stiller, da disse er med på å avgjøre hva elevene vil lære (Stein, Smith, Henningsen og Silver, 2009). Kognitive krav blir definert som den typen og nivå av tenkning som er nødvendig for elever for å kunne engasjere seg og løse en oppgave (Stein et al., 2009). Dersom målet er at eleven skal forstå, undersøke og vurdere, er det viktig at oppgavene gir mulighet for nettopp dette (Stein et al., 2009).

Egne erfaringer fra studietiden har også vekket interesse for å studere nærmere oppgavene i lærebøkene. I min bacheloroppgave undersøkte jeg hvordan lærere kan skape motivasjon for elever på ungdomstrinnet. I det ene intervjuet kom det frem at læreren mente en burde gi rike oppgaver til elevene slik at en kunne tilpasse opplæringen til flest mulig elever. Det som var interessant var at læreren sa at hun ikke brukte læreboka så mye grunnet at det ikke fantes mange rike oppgaver i denne og at hun ofte måtte lage disse oppgavene selv. I et annet lærerintervju gjennomført i løpet av utdanningen kom det også frem at læreren ikke brukte læreboka, da hun mente den ikke var god nok til å drive utforskende undervisning som var noe hun fokuserte på.

Da læreboka spiller en viktig rolle for elevenes læringsmuligheter og forskning viser at læreboka blir mye brukt i, samtidig som to lærere fra egne undersøkelser hevder å ikke bruke læreboka i undervisningen grunnet at den ikke tilfredsstiller ønsket om å drive utforskende undervisning, vil jeg i denne studien undersøke de kognitive kravene i matematikkoppgavene og det matematiske innholdet som blir gitt i matematikklærebøkene. Formålet med studien er å få et innblikk i hvilke kognitive utfordringer elevene på 8.trinn møter i arbeid med matematikkoppgaver fra lærebøkene og hvilken type forståelse lærebøkene fremmer, i lys av den kommende læreplanen i 2020.

TIMSS-undersøkelsen fra 2015 viser at norske elever skårer dårligst i emnet algebra (Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2015). Grunnet de svake resultatene i algebra, kan det være interessant å studere de kognitive kravene som stilles i matematikkoppgaver innenfor emnet algebra. Da denne oppgaven har sine begrensninger, falt valget på å velge ett tema innenfor emnet algebra. Jeg valgte da temaet lineære likninger. Jeg har derfor kommet frem til følgende problemstilling:

> *Hvilke kognitive krav stiller lærebøkenes oppgavetekst i emnet lineære likninger på 8.trinn, og hvordan kan oppgavetekstene påvirke instrumentell og relasjonell forståelse?*

- Hvilke kognitive krav stiller lærebøkenes oppgavetekst i emnet lineære likninger på 8.trinn
- På hvilken måte kan kognitive krav påvirke instrumentell og relasjonell forståelse?
- Hvilke aritmetisk kompleksitet finner en i oppgavene og samsvarer den aritmetiske kompleksiteten med de kognitive kravene?
- Er det samsvar mellom eksemplene og legitimeringenes fokus på forståelse og oppgavenes fokus på forståelse?

Lærebøkenes oppgavetekst vil bli forstått som de tekster som tilhører oppgavene, samt oppgavene i seg selv. Dette vil med andre ord si at begrepet oppgavetekst inneholder eksempler, forklaringer og oppgavene gitt i lærebøkene. Selv om eksemplene og forklaringene blir studert er det oppgavene som er hovedfokus i denne studien. Da jeg ikke har mulighet for å studere alle lærebøkene, falt valget på de to mest brukte lærebøkene i

Norge.

Jeg har valgt tre forskjellige analyserammeverktøy som jeg har bearbeidet til et verktøy som jeg vil bruke i min analyse for å besvare problemstillingen. Ved å bruke flere analyseammeverktøy, kan disse kan utfylle hverandre. De tre verktøyene er Stein et al. (2009) sitt ”The Task Analysis Guide”, Leung og Silver (1997) sitt rammeverktøy over aritmetisk kompleksitet og Ronda og Adler (2016) sitt analyserammeverktøy ”Mathematical discourse in instruction ” (MDITx).

Jeg vil knytte de kognitive kravene opp mot aritmetisk kompleksitet. Den aritmetiske kompleksiteten kan ha en sammenheng med kognitive krav, der tanken er at antall delmål kan ses i sammenheng med hvor kognitivt krevende en oppgave er. Hypotesen er derfor at jo flere delmål, desto mer kognitivt krevende er oppgaven. Denne hypotesen ble testet av Johnsen & Storaas (2015) der det kom frem at det til en viss grad er sammenheng mellom disse rammeverkene. På bakgrunn av denne visse sammenhengen vil jeg studere dette nærmere ved å vurdere hvordan sammenhengen er i det det matematiske emnet lineære likninger. For å studere de kognitive kravene må en ta hensyn til hva elevene har lært fra før og hva som blir presentert i eksemplene (Stein et al., 2009). Et analytisk rammeverktøy som gjør det mulig å studere eksemplene og måten lineære likninger blir presentert på er Ronda og Adler (2016) sitt verktøy ”Mathematics Discourse in Instruction” (MDITx). Ved å se på eksemplene og legitimeringen til det matematiske emnet tar en hensyn til hva elevene har fra før og derfor er dette et verktøy jeg vil benytte meg av. Eksemplene gitt i lærebøkene og hvordan emnet lineære likninger blir forklart kan også ha betydning for de kognitive kravene og elevenes forståelse. Jeg vil da undersøke om det er slik at eksemplene og legitimeringen fokuserer på hvordan en bruker en prosedyre, eller er det fokus på hvorfor en prosedyre fungerer og hva meningen med den er.

2.0 Begrepsavklaringer

Jeg vi i dette kapittelet redegjøre for begrepene oppgave, lærebok og algoritme. Dette er sentrale begrep i denne studien, og da de valgte begrepene kan bli forstått og definert ulikt, vil jeg redegjøre for denne avhandlingens forståelse av begrepene. Begrepsavklaringene er viktige for å forstå nyansene i oppgaven og studiens rammer.

2.1 Oppgave

Begrepet oppgave kan bli forstått forskjellig, der vi for eksempel i matematikken blant annet bruker begrepene triviell oppgave, problemløsningsoppgave og rik oppgave (Olafsen & Maugesten, 2009). Alle disse begrepene er navn på beskrivelser av ulike typer oppgaver. For eksempel er en problemløsningsoppgave et problem der elevene må finne en egen strategi for å løse problemet, da problemet er ukjent og eleven har ikke lært seg en metode som kan brukes for å løse problemet. Dette i motsetning til en triviell oppgave som er en oppgave som gjerne kan løses ved å mekanisk følge en bestemt fremgangsmåte som har blitt lært eller demonstrert tidligere (Olafsen & Maugesten, 2009). Rike oppgaver, også kalt LIST-oppgaver, er oppgaver med Lav Inngangsterskel og Stor Takhøyde, derav navnet LIST. De skal være lette å komme i gang med for de fleste, samtidig som de gir mulighet for å arbeide på et svært høyt matematisk nivå (Wæge & Nosrati, 2018). Oppgavene elevene arbeider med spiller en rolle for elevenes læringsmuligheter (Pepin, 2015). Bruken av begrepet oppgave i denne studiens forskningsspørsmål vil derfor referere til alle typer matematikkoppgaver for å ikke utelukke noen læringsmuligheter blant oppgavene. Med andre ord vil alle oppgavene i lærebøkene bli vurdert og ikke bare oppgaver som er innenfor kategorien av for eksempel problemløsningsoppgaver.

2.2 Lærebok

I forskrift til opplæringsloven §17-1 blir læremiddel definert som " alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa. Dei kan vere enkelståande eller gå i ein heilskap og dekkjer aleine eller til saman kompetansemål i Læreplanverket for kunnskapsløftet" (Forskrift til opplæringslova, 2006, §17-1). En kan derfor si at læreboka går under denne definisjonen og er en form for et læremiddel. I denne studien er det emnet lineøre likninger i lærebøkene som vil bli vurdert og ikke alle læremidlene som blir brukt i undervisningen. Likevel vil teori om læremiddel bli benyttet da lærebok går under dette begrepet.

2.3 Algoritme

En algoritme blir av Thompson (2006, s.23) definert som ”en entydig beskrivelse av et sett regler som angir en stegvis prosedyre, som ofte er repetitiv”. Denne definisjonen samsvarer også med Breiteig og Venheim (2008, s.95) sin beskrivelse av en algoritme som en ” fast trinnvis prosess for å løse en type oppgave”. Begreper som er nært knyttet til algoritme er *regel*, *prosedyre* og *metode* (Gowers, Barrow-Green & Leader, 2008). I denne studien vil begrepene algoritme, regel, prosedyre og metode bli brukt og de vil da bli forstått som en fast trinnvis prosess for å løse en type oppgave.

2.4 Lineær likning

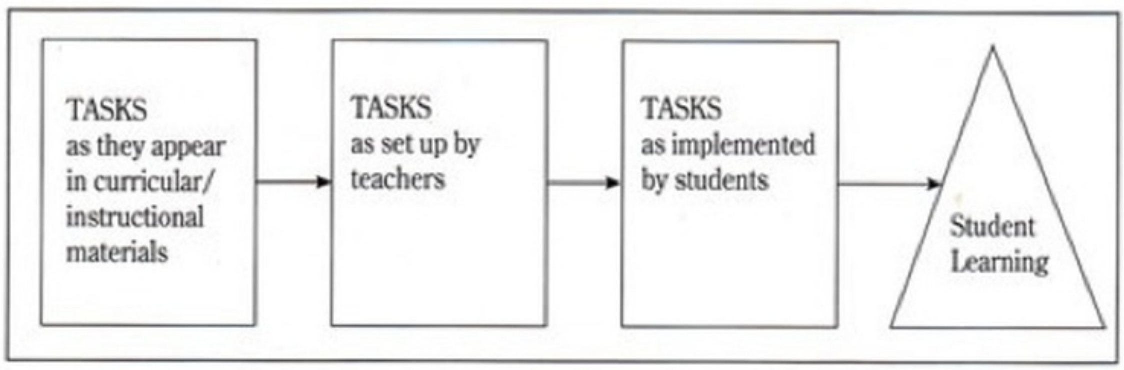
En likning blir definert som ”matematiske uttrykk, variabler eller tall som er forbundet med likhetstegn. En ligning har derfor en høyre og en vestre side” (Aubert, 2018). En kan ha flere type likninger i form av for eksempel andregradslikning, differensiallikning og lineær likning. I denne avhandlingen er det emnet lineære likninger som blir vurdert. En lineær likning er der variabelen opptrer i første grad (Store norske leksikon, 2017). Selv om likninger ut fra definisjonen er alle talluttrykk forbundet likhetstegn, er det i denne studien fokusert på lineære likninger som inneholder en eller flere ukjente verdier. Dette vil si uttrykk som ikke bare består av tall forbundet med likhetstegn, men uttrykk som inneholder en eller flere ukjente verdier av første grad.

3.0 Teori

Dette kapittelet bygger på relevant teori for å kunne besvare forskningsspørsmålene og belyse problemstillingen for denne studien. Litteratur om kognitive krav og forståelse vil bli redegjort for da dette er sentrale begrep i problemstillingen. Videre ses dette i sammenheng med matematisk kompetanse og den kommende læreplanen i 2020 som har fokus på dybdelæring. Da studiens rammer er avgrenset til emnet til lineære likninger vil også dette bli presentert og knyttet opp mot kompetansemålene LK06. Videre presenteres tre rammeverk som danner grunnlaget for analysen.

3.1 Kognitiv etterspørsel og forståelse

Forskjellige oppgaver krever forskjellig type og nivå av tenkning, og gir ulike muligheter for læring (Stein et al., 2009). Videre definerer Stein et al. (2009) den type nivå av tenkning som kreves for å løse en oppgave, for oppgavens kognitive etterspørsel. I løpet av undervisningen kan oppgavens kognitive etterspørsel endres fordi den går gjennom tre faser. Endringene vil ha betydning for hva eleven ender opp med å lære (Stein et al., 2009. Den første fasen er hvordan oppgavene fremstår i læreplaner og undervisningsmateriell som for eksempel lærebøker. Den andre fasen er hvordan oppgavene blir presentert av lærere og den tredje fasen er hvordan elevene implementerer og arbeider med oppgaven (Stein et al., 2009). I denne studien er det oppgavetekster i lærebøkene som blir analysert og derfor er bare den første fasen av dette rammeverket som vil være i fokus.



Figur 1: The mathematical tasks framewrok (Stein et al., 2009, s.xviii)

For å vurdere oppgavene slik de opptrer i den første fase, har Stein et al. (2009, s.6) utviklet et verktøy ”Task analysis guide” som inneholder beskrivelser av ”levels of cognitive demands”.

Dette gjør det mulig å vurdere den kognitive etterspørselen i oppgavene. En kan da vurdere om en oppgave har lav eller høy kognitiv etterspørsel. Dette verktøyet er noe jeg kommer tilbake til i kapittel 3.5.1. Kort beskrevet er oppgaver som krever at elevene skal huske en bestemt regel eller definisjon, eller oppgaver der elevene skal følge en algoritme uten at det er noen forbindelse mellom begrepene eller betydningen som ligger til grunn for prosedyren som brukes, oppgaver som har en lav kognitiv etterspørsel (Stein et al., 2009). Oppgaver som derimot krever at elevene må engasjere seg med konseptuelle ideer som ligger til grunn for prosedyren for å fullføre oppgaven, kunne se sammenhenger mellom ulike representasjonsformer og prosedyrer, eller oppgaver som etterspør utforsking og der en selv må finne mulige løsningsstrategier og fremgangsmåter, krever en annen type nivå av tenkning og er oppgaver som stiller høye kognitive krav (Stein et al., 2009). Trivielle oppgaver kan ut i fra disse beskrivelsene over kognitive krav ses på som oppgaver som er lavt kognitivt krevende, mens problemløsningsoppgaver er oppgaver som er høyt kognitivt krevende.

Elevers motivasjon er avgjørende for hvilke aktiviteter de velger å bruke tid og energi på. Mestringsfølelse bidrar til å fremme indre motivasjon (Skaalevik & Skaalevik, 2015), men det er ikke bare riktige svar som gir mestringsfølelse, men også det å mestre å stille spørsmål i matematikk, resonnere, argumentere, forklare løsningsstrategier og føle at man forstår matematiske begreper (Wæge & Nosrati, 2018). Arbeid med kognitivt krevende oppgaver som fremmer resonnering og problemløsning kan bidra til økt forståelse og fremme indre motivasjon (Wæge & Nosrati, 2018). Videre skriver Wæge & Nosrati (2018) at positiv erfaring gjennom mestring av passende utfordrende oppgaver, samt opplevelse av autonomi og tilhørighet, kan føre til at elevene får positive forventninger knyttet til matematikk. Dersom oppgavene blir for lette, kan elevene gjerne prestere bra, men den faglige interessen vil forsvinne over tid (Wæge & Nosrati, 2018).

Det er ikke slik at alle oppgavene elevene arbeider med skal være høyt kognitivt krevede. Det kommer an på hvilket læringsmål en har for undervisningen. Dersom målet er at elevene skal lære definisjoner eller regler, kan memoreringsoppgaver være passende. Likevel kan et isolert fokus på oppgaver av lavere kognitiv etterspørsel, føre til en begrenset matematisk forståelse (Stein et al, 2009, s.5). Begrepet forståelse kan ha ulike betydninger (Skemp, 1976) og er derfor noe som vil bli definert nærmere.

3.1.1 Instrumentell og relasjonell forståelse

Stieg Mellin-Olsen bemerket at begrepet forståelse ble brukt med ulike betydninger og kom frem til at det finnes to typer forståelse, forståelsen av hvordan en bruker en regel og forståelsen av regelens struktur. Dette er det vi kaller for instrumentell forståelse og relasjonell forståelse (Skemp, 1976).

Instrumentell forståelse vil si at en vet *hvordan* en skal løse en oppgave (Skemp, 1976). Denne forståelsen utvikles av det Piaget kaller for "figurativ kunnskap" (2005, s.90). Med figurativ kunnskap menes "utvikling av skjema der bare kunnskapens ytre trekk er med" (Solvang, 2005, s.90). Som Breiteig og Venheim (2008) skriver det, utvikles instrumentell forståelse i arbeid med oppgaver som omhandler å imiterer en ferdig laget prosedyre. Videre er det å få riktig svar er viktigere fremfor hva oppgaven egentlig dreier seg om (Mellin-Olsen, 1984). Prosedyrer har den fordelen at de gjør matematikkutregninger mer effektive og ofte lettere å lære (Mellin-Olsen, 1984). For eksempel er det lettere å lære en prosedyre på *hvordan* en dividerer med en brøk enn å forstå *hvorfor* prosedyren fungerer. En fare med prosedyrer derimot, er at en gjerne innfører de før elevene selv opplever et behov for dem. Å arbeide med prosedyrer for tidlig kan føre til at elevene manipulerer med symboler uten å forstå betydningen eller reflektere over innholdet bak dem (Breiteig & Venheim, 2008: Solvang, 2005). Derfor selv om instrumentell forståelse er raskere å lære fordi det er lettere å forstå, kan det være vanskeligere å huske. Dette fordi det blir en mengde regler en må huske på tilslutt (Skemp, 1976). Elevenes evne til å bruke matematikken kan videre begrenses ved et smalt fokus på prosedyrer og rutinemessige oppgaver (Haavold, 2011). Beskrivelsene for oppgaver med lav kognitiv etterspørsel innebærer å huske regler eller følge prosedyrer uten forbindelser til underliggende konsepter (Stein, etl.al, 2009, s.6) og det kan derfor se ut til at lavt kognitivt krevende oppgaver påvirker instrumentell forståelse.

Elever med instrumentell forståelse vil trolig ikke ha problemer med å løse oppgave som er lavt kognitivt krevende, men det vil være mer utfordrende i møtet med oppgaver som stiller høyere kognitive krav der elevene må resonnere og se sammenhenger mellom reglene og prosedyrene de har lært (Skemp, 1976). I slike oppgaver vil det gjerne være et behov for relasjonell forståelse.

Relasjonell forståelse, i likhet med instrumentell forståelse innebærer at elevene vet *hvordan* de skal løse en oppgave, men i tillegg også *hvorfor*. Eleven kan her se sammenhengen mellom ulike begreper og prosedyrer (Skemp, 1976). Denne type forståelse har likheter med det Stein et al. (2009) beskriver som oppgaver med høy kognitiv etterspørsel. Oppgaver med høy kognitiv etterspørsel krever at elevene må engasjere seg i underliggende konsepter som ligger til grunn for prosedyrer og se sammenhenger mellom ulike representasjonsformer, samt utforske de matematiske relasjonene og utvikle egen løsningsmetoder (Stein et al., 2009, s.6). I motsetning til instrumentell forståelse, har eleven mindre sannsynlighet for å gjøre feil ved bruk av en formel eller regel, da eleven skjønner hvorfor bokstavuttrykkene står der de står og hva de ulike bokstavene representerer (Solvang, 2005). Relasjonell forståelse gjør en videre mer tilpasningsdyktig for nye oppgaver (Solvang, 2005; Skemp, 1976). For å løse oppgaver med høye kognitive krav kan elever derfor gjerne trenge en relasjonell forståelse.

Da det er to ulike oppfattelser av begrepet forståelse, kan dette by på problematiske situasjoner, og Skemp (1976) har indentifisert to situasjoner. Den første problematiske situasjonen som kan oppstå, er dersom læreren ønsker at elevene skal oppnå relasjonell forståelse, men elevene selv er opptatt av å oppnå instrumentell forståelse. Denne situasjonen vil være mest frustrerende for læreren, da elevene kun vil lære seg regelen som gir korrekt svar, mens læreren ønsker at de skal kunne forklare å begrunne svaret (Skemp, 1976). Den andre situasjonen som kan være problematisk er motsatt av første situasjon. Dette vil være dersom læreren har fokus på instrumentell forståelse, men elevene selv har et ønske om å forstå hvorfor, og oppnå en relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Denne situasjonen kan være mer frustrerende for elevene, og de kan få et negativt forhold til matematikken. Da denne studien ikke fokuserer på læreren, men læreboka, vil disse problematiske situasjonene bli sett på som tilfeller der det er ”mismatch” mellom elevene og læreboka. Problemet blir det samme. Eksempel dersom læreboka legger opp til instrumentell forståelse, mens elevene ønsker å oppnå relasjonell forståelse, kan dette gi elevene et negativt forhold til matematikken.

Noe av det viktigste som kan og bør fremmes gjennom arbeid med matematikk, er relasjonell forståelse (Wæge & Nosrati, 2018) . For å fremme relasjonell forståelse har Hiebert og Grouws (2007) identifisert to faktorer som er viktige. Den første faktoren som kan fremme relasjonell forståelse er ” Teachers and Students Attend Explicitly to Concepts*”* (Hiebert & Grouws, 2007, s. 383). I dette ligger det at undervisningen må ha et eksplisitt fokus på sammenhenger mellom matematiske ideer, fakta og prosedyrer for at elevene skal få en forståelse av hvordan matematikken henger sammen (Hiebert & Grouws, 2007). Dette vil si å beskrive underliggende matematiske prosedyrer, å stille spørsmål rundt likheter og forskjeller i forskjellige løsningsstrategier, å vurdere hvordan matematiske problemer bygger på hverandre og se sammenhenger mellom matematiske ideer. Elevene må bli gjort oppmerksomme på hvordan det de lærer, passer sammen med tidligere lært kunnskap (Hiebert & Grouws, 2007, s.383).

Den andre faktoren som kan fremme relasjonell forståelse er *"* Students Struggle with Important Mathematics*"* (Hiebert & Grouws, 2007, s. 387). Dette vil si at eleven ikke ser løsningen umiddelbart, men må gjøre en innsats for å forstå og finne ut av noe for å komme til løsningen. Det kan derfor også her ut i fra disse faktorene, tyde på at kognitivt krevende matematikkoppgaver kan være med på å fremme større relasjonell forståelse hos eleven, da dette gjerne er oppgaver som etterspør utforsking og refleksjon (Stein et al., 2009). Oppgavene må derfor ikke bare være av den grad at de etterspør imitasjon av en prosedyre som elevene skal følge, dersom en ønsker å påvirke en relasjonell forståelse.

Selv om relasjonell forståelse er viktig, betyr ikke det at instrumentell forståelse er verdiløst. Den er blant annet nyttig i utviklingen av en relasjonell forståelse (Wæge & Nosrati, 2018). Både instrumentell og relasjonell forståelse er viktige aspekter av matematisk kompetanse, og undervisningen må derfor inneholde oppgaver som tilbyr begge disse formene for forståelse (Eisenhart, Borko, Underhill, Brown & Agard, 1993). Kilpatrick, Swafford og Findell (2001, s.5) har utviklet en modell som beskriver den kompetansen en trenger for å lære matematikk fullkomment. Modellen består av fem komponenter:

- *begrepsmessig forståelse* som er forståelse av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner
- *Beregning* som innebærer å kunne gjennomføre prosedyrer fleksibelt, effektivt og nøyaktig
- *Anvendelse* som vil si å kunne gjenkjenne, formulere og løse matematiske problem.
- *Resonnering* som innebærer å kunne tenke logisk, reflektere og argumentere
- *Engasjement* der en må kunne se på matematikk som nyttig og verdifullt og ha tro på at en kan bli kompetent i matematikk.

Disse komponentene beskrevet ovenfor er sammenfletta og gjensidig avhengige (Kilpatrick et al., 2001). Med dette menes at utviklingen av komponentene ikke skjer hver for seg eller i en rekkefølge, men at de påvirker hverandre og utvikles i sammenheng med hverandre (Kilpatrick et al., 2001). For at elevene skal kunne få en fullstendig matematisk kompetanse er det derfor viktig at de gis mulighet for å utvikle alle komponentene samtidig. Slik dette forstås må elevene ikke bare arbeide med oppgaver som stiller lave kognitive krav der de skal huske fakta eller følge prosedyrer. De må også få arbeide med høyt kognitivt krevende oppgaver der de må utforske og utvikle egne løsningsstrategier, samt reflektere og se sammenhenger mellom prosedyrer og matematiske konsepter (Stein et al., 2009). Kognitivt krevende oppgaver er ikke noe som bare allerede høyt presterende elever skal arbeide med. Det er oppgaver som alle elever kan arbeide med (Wæge & Nosrati, 2018). Slike oppgaver kan gjerne være av den typen vi kaller for rike oppgaver eller såkalte LIST-oppgaver (Wæge & Nosrati, 2018).

3.2 Dybdelæring

I arbeidet med denne nye læreplanen ligger det seks kjerneelementer til grunn for faget matematikk. Disse kjerneelementene er utforsking og problemløsning, modellering og bruk, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering og matematiske kunnskapsområder (Svingen & Gilje, 2018, s. 8). Kjerneelementene skal være med på å bevisstgjøre hva faget handler om, hva som er viktig at elevene lærer og ikke minst hvordan de utvikler en dyp forståelse av faginnholdet (Svingen & Gilje, 2018). Dybdelæring er noe det blir lagt ekstra vekt på i den kommende læreplanen og av NOU blir begrepet beskrevet som " Dybdelæring innebærer også at elevene bruker sin evne til å analysere, løse problemer og reflektere over egen læring til å konstruere helhetlig og varig forståelse" (NOU 2014:7, s. 35). Elevene relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og knytter ideene til konklusjoner. Dette tyder på at den nye læreplanen vektlegger at elevene skal arbeide høyt kognitivt krevende oppgaver og relasjonell forståelse. En motsetning til dybdelæring er overflatelæring, som omhandler memorering av definisjoner og prosedyrer, uten relasjon og refleksjon av underliggende konsepter (NOU 2014:7).

Dybdelæring	*Overflatelæring*
Elever relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer.	*Elever jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før.*
Elever organiserer egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen.	*Elever behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.*
Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper.	*Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.*
Elever vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner.	*Elever har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.*
Elever forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i et argument kritisk.	*Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.*
Elever reflekterer over sin egen forståelse og sin egen læringsprosess.	*Elever memorerer uten å reflektere over formålet eller over egne læringsstrategier.*

Figur 2: Dybdelæring og overflatelæring (Sawyer, 2014 sitert i NOU; 2014:7, s. 36).

Utfordringen med dybdelæring i dagens skole er ifølge Stortingsmelding 28 at der er for mange temaer i fagene til at en rekker å gå i dybden på de og bygge forståelse rundt fagets begreper og sammenhenger (Kunnskapsdepartementet, 2015, s.33). Det blir derfor som Gilje, Landfald og Ludvigsen (2018) skriver, viktig i den nye læreplanen at fagets viktigste kunnskaper og metoder blir klargjort.

The National Council of Teachers of Mathematics (Leinwand, S., & National Council of Teachers of Mathematics, 2014) har beskrevet åtte punkt for læringsmiljø som skal fremme effektiv matematikklæring og som støtter dybdelæring. Det kommer frem i punktene at læring skjer mest effektivt når elevene blir utfordret til å løse oppgaver som krever tenking og resonnering på et høyt nivå. De må få utvikle fleksible strategier slik de kan velge metoder og strategier som er hensiktsmessige for å finne en løsning på problemet. Videre hevdes det at elevene må bli utfordret til å lage forbindelser mellom matematiske representasjoner for å kunne skape en dypere forståelse av matematiske konsepter og prosedyrer og for å kunne ta disse i bruk i arbeid med problemløsningsoppgaver (Leinwand et al., 2014). Det kan med andre ord se ut som om effektiv matematikklæring fremmes av læringsmiljø som legger vekt på relasjonell forståelse.

3.3 Tidligere forskning

Det er tidligere blitt gjennomført studier som undersøker lærebøker, kognitive krav og utforskende undervisning. Studier av kognitive krav til lærebøker i matematikk har blant annet blitt gjort av Charalambous, Delaney, Hsu og Mesa (2010). De gjennomførte en sammenligningsstudie av lærebøker på 4. Trinn og 5. Trinn. i Kyrpos, Irland og Taiwan. De studerte temaet addisjon og subtraksjon med brøker og så på likheter og forskjeller i presentasjonen av temaet. Hvilke forventninger til elevprestasjoner og læringsmuligheter som tilbys ble også undersøkt. Til studien utviklet de et eget analyserammeverktøy som bestod av en horisontal analysedel, en vertikal analysedel og en kontekstuell analysedel. Charalambous et al. (2010, s.122) argumenterer for at de ulike analysedelene vil styrke hverandre siden de fokuserer på ulike aspekter noe som vil føre til en mer helhetlig analyse av læreboka.

Den horisontale analysen til Charalambous et al. (2010) ser på læreboken med et overblikk der en ser på generelle karakteristikker som utseende, organisering av innhold, sidetall og lignende, samt også bakgrunnsinformasjon som tittel, forfattere, utgivelsesår og tilleggsmateriale. Dette kan være viktig informasjon å få med seg når en skal analysere lærebøkene, da for eksempel utgivelsesår kan si noe om hvilken læreplan læreboka er tiltenkt å passe til. Den kontekstuelle analysen ser på bruken av lærebøker i undervisning, enten av elever eller lærere (Charalambous et al., 2010). Den vertikale analysen går mer i dybden og undersøker det matematiske innholdet ved å se på hvordan et enkelt emne eller kapittel presenteres i læreboken og hvordan dette fremmer læring. De benyttet seg blant annet av Stein et al. (2009) sitt analyseverktøy ”Task Analysis Guide” over ”levels of cognitive demands”. Resultatene fra analysen viste at 85% av oppgavene i de kypriotiske og irske lærebøkene representerte lave kognitive krav. I de to Taiwanske lærebøkene var det henholdsvis 71% og 81% av oppgavene som ble klassifisert som oppgaver med høyere kognitive krav. I de irske bøkene var det en organisering i rekkefølge på oppgavene der de gikk fra lave kognitive krav til oppgaver med høyere kognitive krav. I de kypriotiske og taiwanske lærebøkene var det mer spredning i emnet mellom de kognitive kravene i oppgavene (Charalambous et al., 2010).

En annen studie som også har studert de kognitive kravene i matematikkoppgaver fra lærebøker er Johnsen og Storaas (2015) sin masteroppgave. De sammenlignet et norsk og et finsk læreverk. Til analysen av de kognitive nivåkravene brukte de blant annet Stein et al. (2000) sitt ”The Task Analysis Guide” over ”levels of cognitive demands”. Resultatene viste at de fleste oppgavene havnet innenfor kategoriene av lave kognitive nivåkrav.

Resvoll (2014) fokuserte i sin masteroppgave på matematikklærebøker i Norge. Hun så på bruken av lærebøkene, men også innholdet der blant annet kognitive krav på matematikkoppgavene er noe som blir vurdert. Til analysen av de kognitive kravene brukte hun Blooms taksonomi og funnene viser at de fleste oppgavene i de studerte lærebøkene stiller kognitive krav som omhandler anvendelse. Dette går ut på å anvende en tidligere lært prosedyre til å løse en liknende oppgave. Dette kognitive kravet kan ses på som lave kognitive krav hvis en ser på Stein et al. (2009) sin klassifisering. Det ble ikke funnet noen oppgaver som var på de høyeste kognitive nivåene i Blooms taksonomi, utvikle og vurdere (Resvoll, 2014). Funnene fra denne studien samsvarer med studien ti Johnsen og Storaas (2015).

En studie som kan ses i sammenheng med kognitive krav og ulike typer forståelse i matematikk er Boaler (1998) sin undersøkelse der hun undersøkte om ulike former for undervisning kunne skape ulike former for matematisk kunnskap, som videre kunne være en årsak til at elever handlet forskjellig i nye uvanlige situasjoner. Boaler (1998) undersøkte to skoler, der den ene skole hadde en mer tradisjonell undervisning og lærebøkene de brukte var av den typen at først blir en prosedyre forklart og så skal elevene arbeide med regneoppgaver der de må øve seg på å bruke den gitte prosedyren. Det var mangel på matematisk diskusjon rundt forskjellige regler og metoder og elevene var ikke bevisste på når situasjoner var matematisk like. Selv om Boaler ikke knytter disse resultatene opp til kognitive krav, kan Denne type matematikk kan ses i sammenheng med det Stein et al. (2009) kaller for lavt kognitivt nivåkrav og det kan se ut som om fokuset i undervisningen var på å fremme instrumentell forståelse. Den andre skolen som Boaler (1998) undersøkte var en skole som drev en mer utforskende undervisning. Elevene skulle utvikle egen ideer, formulere og forlenge problem og ta i bruk den matematiske kompetansen sin. Oppgavene her var mer komplekse og kan kategoriseres innenfor det Stein et al. (2009) omtaler som høye kognitive krav.

Resultatene på undersøkelsen viste at elevene på den skolen som arbeidet med øving på bruk av prosedyre, lavt kognitivt krevende oppgaver, gjorde det dårligere enn elevene på den andre skolen når det gjaldt oppgaver som gikk ut på å bruke en prosedyre, men også på matematiske problem som elevene kan møte på i sitt daglige liv. Elevene fra skolen som arbeidet med mer utforskende oppgaver, høyt kognitivt krevende oppgaver, uttrykte også at de trivdes bedre med faget og var mer engasjerte enn de andre elevene og at de i større grad forstår matematikken de arbeider med i timen (Boaler, 1998). At de i større grad forstår matematikken, kan gjerne knyttes til at de i større grad hadde utviklet en relasjonell forståelse. Studien til Boaler samsvarer med Wæge og Nosrati (2018) sine påstand om at kognitivt krevende oppgaver fremmer høyere forståelse og motivasjon.

3.4 Lineære likninger

Den norske læreplanen, LK06 beskriver formålet, hovedområdet og grunnleggende ferdigheter til det enkelte fag (Utdanningsdirektoratet, 2013). I læreplanen for matematikk er den grunnleggende ferdigheten *å kunne regne matematikk* beskrevet som å kunne *"* bruke symbolspråk, matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt både i praktiske, daglegdagse situasjonar og i matematiske problem" (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.4)

Likninger er ikke et eget emne i læreplanen, men en finner kompetansemål som omhandler likninger under emnet "Tall og Algebra" (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.8,9). Kompetansemålene for etter 7.årssteget sier at elevene skal kunne *"*stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal*"* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.8). Etter 10.årssteget skal elevene kunne " løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem" og "analysere samansette problemstillingar, identifisere faste og variable storleikar, kople samansette problemstillingar til kjende løysingsmetodar, gjennomføre berekningar og presentere resultata på ein formålstenleg måte", samt *"*bruke tal og variablar i utforsking, eksperimentering og praktisk og teoretisk problemløysing og i prosjekt med teknologi og design*"* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.9).

Til nå har elevenes læringsstrategier i matematikkfaget ofte dreid seg om rutineoppgaver som skal løses uten særlig refleksjon over hva man egentlig gjør (Svingen & Gilje, 2018). Utforsking og refleksjon er derfor noe som må få større plass i matematikkfaget. En forutsetning for elevene blir at de må ha et språk for læring og få oppgaver som er tilpasser deres nivå (Svingen & Gilje, 2018). Kompetansen elevene skal kunne når de de begynner i 8.klasse innebærer verbene å stille opp, å løse og å regne. Det er mangel på begrepene utforsking og refleksjon, men dette er noe vi finner i kompetansemålene etter 10.årssteget.

I den nye læreplanen som kommer i 2020 vil det være kompetansemål for hvert trinn foruten første trinn. I høringen til den nye læreplanen kommer det frem at å kunne løse likninger gjennom logisk resonnement og forklare hva det vil si at et tall er en løsning på en likning er et kompetansemål elevene skal kunne etter 5.trinn i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2019). Videre etter 7.trinn skal elevene kunne bruke ulike strategier for å løse lineære likninger og vurdere om løsningene er gyldige. Etter 8-trinn skal elevene kunne lage og løse likninger knyttet til praktiske situasjoner og finne praktiske situasjoner som passer til likninger (Utdanningsdirektoratet, 2019).

TIMSS-undersøkelsen (Trends in International Mathematics and Science Study) er en internasjonal undersøkelse der elever på 5. og 9.trinn deltar og undersøkelsen avholdes hvert fjerde år (Martin & Mullis, 2013). TIMSS blir organisert etter to dimensjoner, innholds-dimensjonen (content dimension) og den kognitive dimensjonen (cognitive dimension) (Mullis & Martin, 2013, s.12). Den første dimensjonen er om hvilke emner elevene blir testet og vurdert i, mens den andre dimensjonen sier noe om den kognitive kompetansen som elevene blir målt. Emnene elevene blir testet i på 9.trinn er tallteori, algebra geometri og data. Innenfor emnet algebra finner en blant annet temaet lineære likninger og ulikheter, representasjoner av funksjoner som tabeller, grafer, ord og likninger (Mullis & Martin, 2013). Som nevnt innledningsvis viser TIMSS undersøkelsens om ble gjennomført i 2015 at norske elever skårer middels i matematikk og at det emnet som vi skårer dårligst på og som drar ned gjennomsnittet, er algebra (Mullis et al., 2015).

Innenfor hvert emnet er det ulike beskrivelser for de kognitive standarder. Den laveste kognitive standarden innenfor emnet algebra beskriver at eleven har noe kunnskap om hele tall og grunnleggende grafer. Eleven får vist elementær forståelse til hele tall og kan matche tabeller til linjediagrammer eller punktdiagrammer (Mullis et al., 2015).

Den neste kognitive standarden, den mellomliggende, beskrives som at eleven kan bruke grunnleggende matematisk kunnskap i ulike situasjoner. Eleven har noe kunnskap om lineære uttrykk, der de kan evaluere og løse lineære likninger. De kan lese og tolke data fra grafer og tabeller (Mullis et al., 2015). Å kunne løse likninger er noe en finner i LK06 under kompetansemålene for ”Tall og Algebra” etter 7.årssteget (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Den høye kognitive standarden beskriver at eleven kan bruke deres forståelse og kunnskap i ulike og relativt komplekse situasjoner. Elevene har noe grunnleggende prosedyrekunnskap relatert til algebraiske uttrykk og de kan blant annet tolke data fra forskjellige grafer. De kan identifisere algebraiske uttrykk som korresponderer til situasjoner. Videre beskrives det at de kan identifisere løsningen til lineære likninger og lineære likningssystem, og identifisere verdiene som tilfredsstiller to ulikheter, samt lage et uttrykk for et bestemt numeriske eller geometriske mønster (Mullis et al., 2015).

Den avanserte kognitive standarden beskriver at elevene kan anvende og resonnere i en rekke problematiske situasjoner, løse lineære likninger og trekke gjøre generaliseringer (Mullis et al., 2015). Videre i den avanserte kognitive standarden beskrives det at elevene kan sette opp og løse lineære likninger eller ligningssystem med to ukjente. De kan identifisere proporsjoner av lineære funksjoner fra tabeller, grafer eller ligninger, inkludert stigningstall og konstantledd. Elevene kan uttrykke generaliseringer enten algebraisk eller i ord, for eksempel å finne et uttrykk for et hvilket som helst ledd i et tallmønster. De kan forenkle algebraiske uttrykk (Mullis et al., 2015). Å kunne identifisere løsningen til lineære likninger, likningssystem og ulikheter som nevnt noe en finner i LK06 under kompetansemålene for ”Tall og Algebra” etter 10.årssteget (Utdanningsdirektoratet, 2013).

3.5 Analytisk rammeverk

I denne kapittelet presenteres de ulike analyserammeverktøyene som vil bli benyttet i vurderingen av de kognitive kravene i oppgavetekstene. Disse analyseverktøyene vil i metodekapittelet bli bearbeidet og tilpasset slik de kan besvare mine forskningsspørsmål best mulig. Som nevnt innledningsvis har jeg valgt tre analyserammeverktøy. De tre verktøyene er Stein et al. (2009) sitt ”The Task Analysis Guide”, Leung og Silver (1997) sitt rammeverktøy over ”aritmetisk kompleksitet” og Ronda og Adler (2016) sitt analyserammeverktøy ”Mathematical discourse in instruction ”.

3.5.1 The Task Analysis Guide

”The Task Analysis Guide” er en del av rammeverktøyet ”The Mathematical Tasks Framework”, som kan brukes til å gjøre en taksonomisk vurdering over ”levels of cognitive demands”, oversatt til kognitive nivåkrav i oppgavetekstene (Stein et al., 2009). I det ”Task

Analysis Guide" (Stein et al., 2009, s. 6) skilles den kognitive etterspørselen inn i fire kategorier:

- *Memorization* (lavt kognitivt nivåkrav)
- *Procedures without connections* (lavt kognitivt nivåkrav)
- *Procedures with connections* (høyt kognitivt nivåkrav)
- *Doing mathematics* (høyt kognitivt nivåkrav)

Memorization oversatt til memorering, er oppgaver som involverer enten å reprodusere tidligere lært fakta, regler, formler eller definisjoner. En kan ikke benytte seg av en prosedyre fordi en prosedyre ikke eksisterer eller fordi oppgaven ikke kan besvares ved bruk av en prosedyre fordi oppgaven er for kort. Oppgavene i denne kategorien har ingen forbindelse til begrepene eller betydningen som ligger til grunn for regler, formler eller definisjoner som læres eller reproduseres (Stein et al., 2009, s.6).

Procedures without connections oversatt til prosedyre uten forbindelse, er oppgaver som er algoritmiske. Bruk av prosedyre er enten spesifikt krevd eller er åpenbart fra tidligere erfaring med liknende oppgave. Det er lite tvetydighet om hva som må gjøres og hvordan man gjør det og den kognitive etterspørselen er begrenset. Det er ingen forbindelse mellom begrepene eller betydningen som ligger til grunn for prosedyren som brukes. Å komme frem til riktig svar er viktigere enn å utvikle en matematisk forståelse. En forklaring på løsningen kreves ikke, eventuelt en forklaring som bare fokuserer på å beskrive prosedyren som ble brukt (Stein et al., 2009, s.6).

Procedures with connections oversatt til prosedyre med forbindelse, er oppgaver som fokuserer på bruk av prosedyrer for å utvikle dypere forståelse av matematiske konsepter og ideer. Oppgavene krever gjerne bruk av algoritmer, men disse kan ikke brukes uten forståelse og vil kreve en høyere grad av kognitiv tenkning. Elevene trenger å engasjere seg med konseptuelle ideer som ligger til grunn for prosedyrene for å fullføre oppgaven vellykket og som utvikler forståelse. Oppgavene inneholder ofte flere representasjoner (diagrammer, symboler, konkreter og problemløsning), da det å skape forbindelse mellom ulike representasjoner kan bidra til å utvikle forståelse (Stein et al., 2009, s.6).

Doing mathematics oversatt til matematikk, er oppgaver som krever komplekse og ikke-algoritmisk tenkning. Elevene må utforske og forstå de matematiske konseptene, prosesser eller relasjoner. Det er ikke en forutsigbar eller foreslått tilnærming til oppgaven, og elevene må analysere og undersøke oppgaven, hente frem relevant kunnskap for å finne mulige løsningsstrategier og løsninger selv. Da denne type oppgaver krever betydelig kognitiv innsats fra elevene og er uforutsigbar, kan dette føre til angst hos elevene (Stein et al., 2009, s.6).

3.5.2 Aritmetisk kompleksitet

Leung og Silver (1997) gjennomførte en studie der ett av målene var å utvikle et kognitivt analyse skjema for å undersøke strategier for å sette opp aritmetiske oppgaver til 63 lærerstudenter ved et universitet i USA. Et annet mål var å undersøke to forskjellige oppgaveformaters innflytelse på strategiene til å sette opp oppgaver. Det tredje og siste målet var å undersøke strategiene som ble brukt til å sette opp oppgaver i lys av forskjeller mellom lærerstudenters generelle matematiske kunnskap og deres kreative tenkning. Lærerstudentene gjennomførte tre tester kalt ”the Test of Arithmetic Problem Posing (TAPP)”, “the mathematics subtest of Pre-professional Skill Tests (PPST-M)” og “the verbal subtest of the Torrance Test of Creactive Thinking (TTCT-V)”. PPST-M ble brukt for å måle matematiske ferdigheter og kunnskap på tvers av flere emner. Den bestod av 40 flervalgsoppgaver. TTCT-V skulle måle kreativitet. Den bestod av seks oppgaver som gikk ut på å spørre, gjette årsaker, gjette konsekvens, produktforbedring, uvanlige bruksområder og antakelser (Leung & Silver, 1997).

I TAPP testen skulle de studere lærerstudentenes evnen til å sette opp problem. Her fikk studentene fire tekstbokser med forskjellig innhold: med og uten tall-informasjon og forskjellige kontekster. De ble så bedt om å sette opp så mange ulike problemer som de kunne komme på som passet til de ulike tekstboksene. Svarene som ble gitt i denne testen ble evaluert etter kvalitet og kompleksitet. Innenfor kvalitet ble svarene klassifisert som enten matematiske eller ikke-matematiske, troverdige eller usannsynlige og innhold av tilstrekkelig informasjon eller utilstrekkelig informasjon. I evalueringen av kompleksitet var det den aritmetiske kompleksiteten som ble kategorisert etter antall steg som kreves for å løse en matematikkoppgave (Leung & Silver, 1997). Det er denne delen av rammeverket som vil bli benyttet i denne avhandlingen. Den aritmetiske kompleksiteten ble vurdert etter tre kategorier av steg kalt ”zero-step”, ”one-step” og ”multi-step” avhengig av om svarene krever null steg, ett steg eller flere steg i løsningen (Leung & Silver, 1997, s.11). Multi-step er alle oppgavene som krever en løsning med to eller flere steg. De har valgt å gjøre dette fordi en oppgave ikke trenger å være mer kompleks om den inneholder fem steg fremfor fire. Dersom en oppgave blir kategorisert som multi-step har de brukt koden sub-goal (SG) for å definere steg som er delmål og Goal (G) for å definere steget som er selvet målet eller svaret (Leung & Silver, 1997, s.12). Slik dette forstås er en oppgave kategorisert som zero-step, dersom en kan finne svaret direkte i oppgaven uten å måtte gjøre noen matematiske regninger. Dersom det ikke kreves delmål for å komme til svaret er det ett-steg og ved ett eller flere delmål er det kategorisert som flere-steg.

Et resultat fra studien var at lærergruppen med høy kunnskapsbase produserte signifikant flere matematiske problem kategorisert som flere-steg, enn det lærergruppen med lavere kunnskapsbase gjorde (Leung & Silver, 1997).

3.5.3 Mathematical discourse in instruction

Mathematical discourse in instruction (MDI) er et sosiokulturelt rammeverk som har som hensikt å beskrive og dokumentere matematisk diskurs i undervisning og tolke forskjeller i undervisning. Rammeverket samsvarer med Sfard (2008) syn på matematikk som en spesialisert form for diskurs der det å lære matematikk betyr å delta i og med de verktøyene og prosessene som er i den matematiske diskursen (Ronda & Adler, 2015). En matematisk diskurs er definert som en ”special type of communication made distinct by it´s repertoire of admissible actions and the way these actions are paired with re-actions” (Sfard, 2008, s.297). MDI rammeverket kan brukes til å analysere hvilken mulighet elevene får til å delta i den matematiske diskursen, da undervisning handler om nettopp dette, å lage muligheter for elever til å delta i diskursen (Ronda & Adler, 2015). Undervisning av matematikk blir karakterisert som å formidle et *læringsobjekt.* Et læringsobjekt i matematikken kan for eksempel være en algoritme, et konsept, en prosedyre og lignende. Formidlingen av læringsobjektet skjer via ”eksemplifisering”, ”forklarende samtale” og ”elevdeltakelse”. Disse rammene gir muligheter for en nyansert beskrivelse av matematikkundervisningen og fortolkninger av forskjeller i hva som er matematisk gjort tilgjengelig for å lære (Adler & Ronda, 2015).

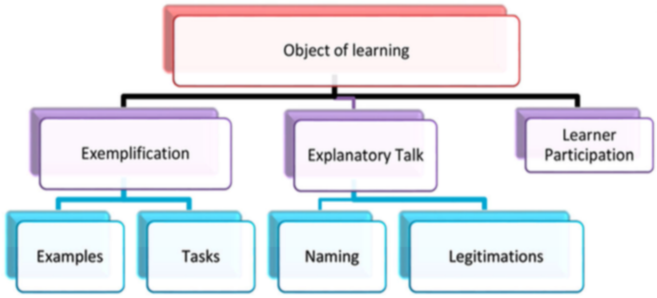


Figure 1: Constitutive elements of MDI and their interrelation

Figur 4 (Adler og Ronda, 2015, s.239)

Ronda og Adler (2016) gjorde en tilpasning MDI-rammeverket (Adler og Ronda, 2015) for å kunne bruke det lærebokanalyse, ved å bruke en tilpasning av kategoriene. Dette tilpassa rammeverket av MDI kalles gjerne MDITx. Rammeverket inneholder de samme elementene foruten elevdeltakelse, da dette ikke kan analyseres i lærebøkene. Beskrivelsene for de ulike kategoriene i elementene i MDITx er noenlunde de samme som MDI (Ronda & Adler, 2016). Måten forfatteren av lærebøkene bruker eksempler, oppgaver, ord og legitimeringer kan gi eller begrense muligheter for å lære matematikk. MDITx blir altså brukt for å studere muligheten til å lære matematikk ved å se på matematikken som blir gjort tilgjengelig. Nøkkelen til bedre læring involverer å se mønstre av variasjon med noe som forblir det samme. Dette vil si å se mønstre og sammenhenger mellom ulike representasjonsformer. Ulike representasjonsformer gir mulighet for generalisering (Ronda & Adler, 2016). Muligheter for å se mønstre og sammenhenger mellom ulike representasjonsformer, er noe som kan gi relasjonell forståelse (Skemp, 1976).

MDI rammeverket har en egen kategori for analyse av eksempler, dette skiller seg fra andre analyseverk som f.eks Stein et al. (2009). I MDITx kan eksemplene gitt i læreboka vurderes etter om de gir muligheter for å se ”contrast” *(C),* ”generalization” *(G)* og ”fusion” *(F).* Contrast er dersom eksemplene gir muligheter for å se kontraster eller forskjeller, generalization er dersom det gis flere forskjellige representasjoner for samme uttrykk, altså å se en forbindelse. Fusion er dersom det gis mulighet for en høyere grad av generalisering gjennom å se krevende dimensjoner av variasjon. Nivå 1 vil da være hvis bare ett mønster av variasjon i eksemplene brukes i leksjonen. Nivå 2 er dersom det blir brukt to forskjellige variasjonsmønstre og nivå 3 dersom alle variasjonsmønstrene (C, G og F) brukes i leksjonen. Dersom det i leksjonen ikke blir oppgitt muligheter for elever å skille mellom viktige trekk ved innholdet kodes disse som NONE (Ronda & Adler, 2016).

Som Ronda og Adler (2016) selv beskrev, er en analyse av oppgavene ikke bare "…whether the tasks addressed the capability stated in the object of learning but also whether the tasks have the potential to engage the learners to make connections among features of mathematical content" (s. 6). Slik dette forstås kan analyse av oppgavene si noe om eleven får mulighet til å se forbindeleser og sammenhenger mellom matematiske konsepter. Dette samsvarer derfor med Stein et al. (2009) sine analyser av kognitive krav.

Oppgavene som blir presentert i læreboka karakteriseres i MDITx etter om oppgaven innebærer en tidligere lært kunnskap eller prosedyre forbundet med læringsobjektet. En kode som da blir brukt er "known procedure/fact" (*KPF*). Dersom oppgaven krever at elevene bruker en ny prosedyre som har sammenheng med det som blir presentert i leksjonen, blir det kodet som "current topic/procedure"*(CTP)* (Ronda & Adler, 2016). Dette forstås som at elevene må ta i bruk en ny prosedyre som blir introdusert og som ikke har blitt lært tidligere. Oppgaver som innebærer at elevene selv må beslutte prosedyren eller konseptene som trengs for å svare på oppgaven eller se forbindelser mellom konsepter, blir kodet som "application/making connections tasks" *(AMC)*. Nivå 1 blir her leksjoner om kun bruker KPF-oppgaver, nivå 2 for leksjoner som inneholder CTP oppgaver og ingen AMC oppgaver. Nivå 3 er leksjoner som inneholder CTP og AMC oppgaver (Ronda & Adler, 2016). Som en ser her så vurderer en oppgavene ut i fra kunnskaper og erfaringer som elevene trenger for å løse oppgavene. Dette er som nevnt noe Stein et al. (2009) også vektlegger i sitt rammeverk over kognitive krav.

Legitimering handler om de matematiske og ikke-matematiske kriteriene som kommuniseres for å legitimere eller underbygge prosedyrene eller uttalelser om det matematiske læringsobjektet. Uttalelser uten underbygning blir kodet som "Author" (*A)*. Det gis altså ikke en matematisk begrunnelse for hvorfor et utsagn er legitimt. Dersom det brukes et eksempel for å forklare og dermed legitimerer et utsagn brukes koden "Substantiation by exaples" (*SE)*. Ved bruk av tidligere etablerte matematiske prosedyrer, prinsipper eller definisjoner for å fastslå gyldigheten av prosedyrer eller å legitimere utsagn blir koden "Substantiation by general case" *(SG)* brukt. Denne koden ble også bruk i ekstremtilfeller eller ved bruk av mot eksempler til å motbevise en formodning da disse også etablerer generalitet. Nivå 1 er hvis det kun blir brukt koden A, nivå 2 dersom den består av A- og SE-koder og nivå 3 dersom legitimeringen har minst en kode for SE og SG. Koden *NONE* blir brukt dersom en ikke finne er underbyggende fortelling relatert til læringsobjektet i leksjonen (Ronda & Adler, 2016).

Det matematiske språket eller navngiving kan si noe om muligheten elevene får til å delta i den formelle matematiske diskursen. Navngiving og ordbruk handler om hvordan matematiske ord blir brukt som støtte mot et formelt matematisk språk. I tekstbøker vil det nok være et matematisk korrekt språk. Likevel kan det være viktig å se på substantiveringen av verb som blir gjort i lærebøkene. Dette fordi noen elever gjerne er vant med å snakke om handlinger og bruker verb og videre kan bli forvirret dersom verbene er substantivert (Ronda & Adler, 2016). Substantivering kan ses i sammenheng med det Sfard (2008) kaller for tingliggjøring. Analyse av måten matematiske konsepter, prosedyrer og relasjoner er navngitt på og hvordan de er innebygd i forfatterens narrativ, kan belyse mulighetene for å delta i formell matematisk samtale (Ronda og Adler, 2016). Jeg har valgt å ikke kommentere nærmere kodene som brukes for navngivning da disse ikke blir brukt i mitt analyseverktøy.

4.0 Metode

Min problemstilling går ut på å utforske den kognitive etterspørselen i oppgavetekstene gitt i lærebøker innenfor emnet lineære likninger og hvordan oppgaveteksten påvirker instrumentell og relasjonell forståelse. Jeg vil derfor benytte meg av metoden dokumentanalyse, nærmere bestemt innholdsanalyse, som innebærer koding, kategorisering, sammenligning og konklusjon fra alle typer tekst (intervjuer, lærebøker, dokumenter etc.) (Thagaard, 2018, s.53). Det kan finnes preg av både kvantitativ og kvalitativ metode i innholdsanalysen, der fortolkningene av oppgavene i kategorier og mengden oppgaver er kvalitative og opptellingen eller summeringen av kategoriene er kvantitativt preget (Cohen, Morrison & Manion, 2007). Å kombinere kvalitativ og kvantitativ tilnærming vil ifølge Creswell (2014) gi et mer helhetlig bilde av det som undersøkes. Jeg skal vurdere to læreverks likheter og ulikheter i oppgaveinnhold, det blir derfor gjort en komparativ analyse (Grønmo, 2004) i tillegg til oppgaveanalysene.

4.1 Utvalg

Jeg valgte lærebøkene Faktor 8 grunnbok og oppgavebok av Cappelen Damm (Hjardar & Pedersen, 2014a, 2014b) og Maximum 8 grunnbok og oppgavebok av Gyldendal (Tofteberg, Tangen, Stedøy-Johansen & Alseth, 2013b, 2014c). Videre i teksten vil jeg referere til lærebøkene som Maximum eller Faktor når det er snakk om både grunnbøkene og oppgavebøkene på 8.trinn. Jeg vil bruke begrepene oppgavebok og grunnbok for å eksplisitt skille mellom dem der det er behov for det.

4.1.1 Bakgrunn for valg av lærebøker og trinn

Valget på Faktor og Maximum ble basert på egen erfaring med bruk av læreverkene og med observasjon fra praksisperioder at disse læreverkene ble brukt. I tillegg skriver Heimstad & Strand (2018) at disse lærebøkene er blant de mest brukte læreverkene i Norge. Begge lærebøkene med oppgavebok er tilpasset den reviderte læreplanen 2013. Oppgaveboka skal være et supplement til læreboka (Cappelen Damm, 2019: Tofteberg, Tangen, Stedøy-Johansen & Alseth, 2013a), men jeg valgte både grunnbok og oppgavebok for å få et større utvalg på hvilke oppgaver læreverkene tilbyr. Jeg valgte å unnlate lærerveiledningene og de elektroniske ressursene som hører til læreverkene da denne studien er begrenset i forhold til tid og ord. Lærerveiledningene ble dog brukt som hjelp til analysering av noen oppgaver, der det ikke var like klart hva som var hensikten med oppgaven.

Likninger er et tema innenfor algebra i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013) og et tema som begge lærebøkene inneholder. Resultatene fra TIMSS-undersøkelsen 2015 (Mullis et al., 2015) viser hva elevene kan i 9.trinn. Jeg valgte derfor å analysere lærebøkene fra 8.trinn da disse viser hva elevene skal lære på 8.trinn og videre hva de skal kunne eller har blitt introdusert for når de går i 9.trinn. Jeg valgte å ikke studere lærebøkene for 9.trinn da elevene gjennomfører TIMSS undersøkelsen før de går ut av 9.trinn.

4.1.2 Valg av matematisk emne

Jeg valgte emnet lineære likninger på bakgrunn av de svake resultatene fra TIMSS-undersøkelsen (Mullis et al., 2015). I lærebøkene vil en gjerne finne oppgaver som kan knyttes til lineære likninger i flere kapitler, men jeg valgte å kun analysere oppgavene som tilhørte kapittelet om lineære likninger og i de kapitlene som kommer etter i lærebøkene. Dette fordi jeg tenker at elevene ikke skaper forbindelser til et emnet frem i tid, da de ikke har blitt introdusert for det enda. Oppgaver som omhandler lineære likninger i kapitler etter kapittelet om lineære likninger ble analysert da eleven her kan skape en forbindelse til kapittelet om lineære likninger.

4.2 Utvikling av analyseskjema

Jeg valgte en todeling av analyseskjemaet, der jeg har en horisontal analysedel og en vertikal analyse del. Denne inndelingen er inspirert av Charalalombous et al. (2010) sitt analyseverktøy. Den horisontale analysen er en overordnet analyse av lærebøkene, mens den vertikale analysedelen er en dypere analyse der jeg benyttet meg av en kombinasjon tre ulike analyseverktøy for å vurdere de kognitive kravene i oppgavetekstene og studere oppgavetekstene påvirker instrumentell og relasjonell forståelse.

4.2.1 Horisontal analysedel

Den horisontale analysedelen er en overordnet analyse av det matematiske objektet som blir presentert i lærebøkene. Jeg valgte å se på temaet lineære likninger, som da er det matematiske objektet. Jeg så på hvilke emner lineære likninger blir presentert i og hvor mange oppgaver det er om lineære likninger i lærebøkene. Dette kunne være interessant å se på, da det kunne hende temaet likninger i noen lærebøker blir presentert under emnet funksjoner, mens det i andre lærebøker blir presentert under emnet algebra. Dette tenkte jeg kunne ha betydning for hvilken forbindelse elevene får til det matematiske objektet, selv om jeg ikke kunne vurdere dette eksplisitt i denne analysen, da jeg ikke gjennomførte empiriske undersøkelser med elever. Jeg undersøkte også hvilke læringsmål lærebøkene har for emnet likninger, da dette kan ha betydning for hvilke oppgaver som blir presentert (Stein et al., 2009).

I Faktor sine grunnbøker er oppgavene delt inn i ”Ordinære oppgaver”, ”Prøv deg selv”, ”Noe og lure på” og ”Utfordrende oppgaver” (Hjardar & Pedersen, 2014a). ”Prøv deg selv” oppgavene er en test til elevene, mens ”Noe og lure på” er oppgaver som kan kategoriseres som problemløsningsoppgaver og ”Utfordrende oppgaver” er oppgaver merket med stjerne og disse skal være spesielt vanskelige (Cappelen Damm, 2019). I Maximum sine grunnbøker er oppgavene delt inn i kategoriene ”Ordinære oppgaver”, ”Bli bedre” og ”Tren tanken” (Tofteberg et al., 21013b). ”Bli bedre” oppgaver er repetisjonsoppgaver mens ”Tren tanken” er problemløsningsoppgaver (Cappelen Damm, 2019; Tofteberg et al., 2013a). I tillegg har Maximum differensiert de fleste oppgavene i ulike fargekoder etter vanskegrad. Fargekodene som blir brukt er blå, gul og grønn, der grønn er vanskeligst og blå er lettest (Tofteberg et al., 2013a).

Jeg ville se på antall oppgaver innenfor hver kategori i lærebøkene, for å få et innblikk i hva lærebøkene har som hensikt å presentere, og for at det i den vertikale analysen skal være mulig å si noe om lærebokas inndeling av oppgavene i de ulike kategoriene stemmer overens med de kognitive kravene som stilles. Ifølge lærebøkene skal for eksempel ”Utfordrende oppgaver” og ”Tren tanken oppgaver” være av en høyere vanskegrad enn de ordinære oppgavene (Cappelen Damm, 2019; Tofteberg et al, 2013a), er det da slik at disse oppgavene stiller høyere kognitive krav enn de ordinære oppgavene?

For å kunne se hvor mange oppgaver lærebøkene presenterer innenfor hver kategori i emnet lineære likninger og videre gjøre en sammenligning var jeg nødt for å bruke en felles samlebetegnelse for de ulike kategoriseringene i de valgte lærebøkene. Da Faktor har fire kategorier mens Maximum har tre, kunne dette by på utfordringer ved å lage samlebetegnelser for kategoriene.

Dette løste Heimstad og Strand (2018) ved å sammenligne de ordinære oppgavene merket med grønn og øvingsoppgaver merket med grønn i Maximum sammen med de utfordrende oppgavene i Faktor. Dette begrunner Heimstad og Strand, 2018) med at grønne oppgaver er oppgaver som har et høyere refleksjonsnivå hos elevene, basert på *Maximum 10 lærerens bok* sin beskrivelse av grønne oppgaver (Tofteberg et al, 2013a). Videre begrunner Heimstad og Strand (2018) at dette samsvarer med Faktor sin beskrivelse av utfordrende oppgaver som spesielt vanskelige oppgaver (Cappelen Damm, 2019). De valgte å ikke ha med Maximums grubleoppgaver merket med grønn i samlebetegnelsen ”utfordringsoppgaver”, da definisjonen på grubleoppgaver samsvarer mellom de to lærebøkene og derfor lot seg inkluderes i samlebetegnelsen ”grubleoppgaver”. Grønne oppgaver innenfor betegnelsen grubleoppgaver, inngikk med andre ord i betegnelsen grubleoppgaver og ikke i samlebetegnelsen ”utfordringsoppgaver”. Alle andre oppgaver markert med grønn i Maximum inngikk i ”utfordringsoppgaver”.

Samlebetegnelse	Faktor	Maximum
Ordinære oppgaver	Ordinære oppgaver	Ordinære oppgaver
Øvingsoppgaver	Prøv deg selv	Bli bedre
Utfordringsoppgaver	Utfordrende oppgaver	Grønn vanskelighetsgrad
Grubleoppgaver	Noe å lure på	Tren tanken

Tabell 1- Samlebetegnelse for Grunnbøker

Faktor Oppgavebok og Maximum Oppgavebok differensierer begge oppgavene etter vanskegrad i ulike fargekoder. Faktor Oppgavebok bruker fargekodene blå (lett) , grønn (middels) og rød (vanskelig) (Hjardar & Pedersen, 2014b), mens Maximum bruker fargekodene blå (lett), gul (middels) og grønn (vanskelig) (Tofteberg, Tangen, Stedøy-Johansen & Alseth, 2013c). På bakgrunn av at det er brukt ulike farger for å merke de ulike vanskegradene på oppgavene valgte jeg også å utvikle en samlebetegnelse oppgavene i oppgavebøkene. Samlebetegnelsen ”Grunnleggende oppgaver” vil da være oppgaver av den letteste vanskegraden, ”Middels vanskegrad” er oppgaver med nest høyest vanskegrad og ”Høy vanskegrad” er oppgaver med høyest vanskegrad. Avslutningsvis i kapittelet har begge oppgavebøkene en kategori med oppgaver fra hele hovedkapittelet, ikke bare lineære likninger. I Faktor blir dette kapittelet kalt ”Litt av hvert” og i Maximum heter kategorien ”Blandede oppgaver”. Jeg valgte å lage en felles samlebetegnelse for disse kategoriene kalt ”Blanda oppgaver”. Selv om det er oppgaver fra hele hovedkapittelet har jeg valgt å kun se på oppgavene som omhandler lineære likninger i kategorien ”Blanda oppgaver”

	Faktor	**Maximum**
Grunnleggende Vanskegrad	Blå	Blå
Middels vanskegrad	Grønn	Gul
Høy vanskegrad	Rød	Grønn
Blanda oppgaver	Litt av hvert	Blandede oppgaver

Tabell 2-Samlebetegnelse Oppgavebøker

Da det var ulikt antall oppgaver i lærebøkene, valgte jeg å oppgi antall oppgaver i prosent. En prosentvis fremstilling ble da mer rettferdig og antallet ble på denne måte sammenlignbart. Prosentandelen vil da være knyttet til at det hele er antall oppgaver den enkelte bok tilbyr om emnet likninger.

Når en oppgave har flere deloppgaver, har jeg valgt å telle hver deloppgave som en oppgave. Dette gjorde jeg både når oppgaveteksten var tydelig inndelt med a- og b-oppgaver og når det for eksempel stod ”løs likningen og sett prøve på svaret”. Sistnevnte eksempel er da regnet som to oppgaver.

I den vertikale analysedelen benyttet jeg meg av Stein et al. (2009) sitt analyseverktøy av kognitive krav. En av forutsetningene for å gjøre denne analysen er at en er bevisst på hva elevenes forkunnskaper. Jeg undersøkte derfor også i den horisontale analysen grundigere hva LK06 sier at elevene skal kunne etter 7.trinn og hva de skal lære etter 10.trinn. På denne måte kunne jeg få et innblikk i hva elevene har lært før, uten å studere lærebøker fra tidligere år. Jeg undersøkte utgivelsesår for å kunne si noe om hvilken utgave av læreplanen læreboka er rettet mot. I tillegg til LK06 så jeg også hva elevene har lært tidligere i kapittelet der lineære likninger inngår. Dette for å få et overblikk over hva læreboka tilbyr av kunnskaper før elevene begynner å arbeide med lineære likninger. Lærebøkene har også en egen beskrivelse over læringsmål. Dette var også noe som var nødvendig å undersøke da dette kan ha betydning for hvilke oppgaver en finner.

4.2.2 Vertikal analysedel

I den vertikale analysen vurderte jeg de kognitive kravene og den aritmetiske kompleksiteten i matematikkoppgavene, samt hvilken matematikk som ble gjort tilgjengelig for læring ved å se på eksemplene og forklaringene i lærebøkene.

4.2.2.1 Begrunnelse for analyserammeverktøy

De kognitive kravene i matematikkoppgavene ble belyst ved bruk av Stein et al (2009) sitt analyserammeverktøy "the task analysis guide" og Ronda og Adler (2016) sitt analyserammeverktøy, MDITx. Selv om ikke Ronda og Adler (2016) sier at deres rammeverktøy belyser de kognitive kravene, så jeg en sammenheng med deres premisser for oppgavene og Stein et al (2009) sine premisser for kognitive krav i oppgaver. Jeg gjorde også noen tilpasninger i MDITx-verktøyet slik at det bedre skulle samsvare med kognitive krav. En vil muligens ikke finne noen forskjeller i nivå av kategorier, med dette mener jeg at det gjerne vil være slik at oppgaver som blir kodet som lavt kognitivt krevende i Stein et al. (2009) sitt rammeverk også vil være i den lave kategorien for Ronda og Adler (2016) sitt analyseverktøy over oppgaver. Likevel kunne det være at jeg underveis oppdaget noe som gjorde at jeg ved bruk av de to analyseverktøyenes premisser fikk ulike resultat på samme oppgave. Dette fordi Stein et al. (2009) har utviklet fire kategorier av kognitive nivåkrav, mens Ronda og Adler (2016) bruker tre kategorier av oppgaver. Dette kunne gjerne ha en betydning for at kodingen ble forskjellig. I tillegg da jeg likevel skulle bruke de andre delene av analyseverktøyet til å studere eksemplene og forklaringene, valgte jeg å inkludere MDITx-verktøyet sine kategorier for oppgaver til å analysere oppgavene.

Leung og Silver (1997) sitt analyseverktøy vurderer den aritmetiske kompleksiteten til oppgavene. Hypotesen var at det er en sammenheng mellom aritmetisk kompleksitet og kognitive krav. Med dette menes at jo flere delmål i en oppgave jo høyere kognitive krav stiller oppgaven. Dersom denne hypotesen er sann, kan det være mulig å vurdere den kognitive etterspørselen i oppgavene ved å vurdere den aritmetiske kompleksiteten. Valget med å vurdere den aritmetiske kompleksiteten er på bakgrunn av denne hypotesen. I tillegg fant Johnsen og Storaas (2015) ut i sin studie at det er en viss sammenheng, men at den ikke alltid er sann. Ved å bare bruke denne hypotesen i denne studien, var tanken at jeg gjerne kunne finne ut om det er en sterkere sammenheng dersom oppgavene omhandler lineære likninger. Selv om den ikke gjelder i alle tilfeller i matematikken, kunne det hende at det var en sammenheng dersom en fokuserer på enkelte emner.

Å studere eksemplene og hva elevene har lært om fra før er noe som Stein et al. (2009) sier er viktig å gjøre før en analyserer oppgavene. Likevel har ikke Stein et al. (2009) utviklet noen kategorier for å analysere disse eksemplene. Ronda og Adler (2016) sitt MDITx-analyseverktøy studerer som nevnt ikke bare matematikkoppgavene, men har også egne kategorier for analyse av eksempler og hvordan det matematiske objektet blir legitimert. Jeg valgte derfor å bruke Ronda og Adler (2016) sitt analyserammeverktøy til å vurdere eksemplene og forklaringene som blir gitt i lærebøkene og på denne måten utfylle verktlyet til Stein et al. (2009). Ved å vurdere eksemplene og legitimeringene, tenkte jeg at jeg kunne si noe om hvilken forståelse lærebøkene vektlegger og vurdere om dette er noe som også gjenspeilet seg i oppgavenes kognitive krav.

Da analyseverktøyene er ulike og undersøker forskjellige egenskaper ved oppgavetekstene, kan de ulike analysedelene styrke hverandre. Dette vil føre til en mer helhetlig analyse av læreboka (Charalambous et al., 1997). Jeg vil først ta for meg de tre analyseverktøyene og beskrive kriteriene som ligger til grunn for hver kategori, før jeg tar for meg hvordan jeg kodet oppgavene i analyseskjemaet mitt etterfulgt av et eksempel og noen oppgaver å viser hvordan jeg har analysert disse.

4.2.2.2 Kognitive krav

For å vurdere de kognitive kravene i oppgavene gitt i lærebøkene valgte jeg å benytte meg av Stein et al. (2009) sitt rammeverk ”Levels of cognitive demands”. Hensikten med å vurdere de kognitive kravene er å bruke disse til å kommentere noe om hvilken type forståelse elevene kan utvikle.

Memorering valgte jeg å se på som det laveste nivået av kognitive krav. Dette var oppgaver der en kunnen finne svaret direkte i fra oppgaveteksten. Oppgaver som ikke hadde sammenheng til konsepter eller meningen som lå til grunn for fakta, regler formler eller definisjoner. Oppgaver som var mer basert på pugging eller reproduksjon.

Prosedyre uten forbindelse valgte jeg å se på som det nest laveste kognitive nivåkravet. Dette var oppgaver som krevde enkel utregning basert på tidligere viste eksempler, eller som baserte seg på vanlige og mye brukte algoritmer. Tidligere viste prosedyrer kan være prosedyrer de har lært før, eller algoritmer som blir presentert i et eksempel før oppgaven. Oppgavene som hadde fokus på riktig svar fremfor å utvikle matematisk forståelse. Det krevdes ingen forklaring til løsningen eller fremgangsmåten. Forklaringen som eventuelt krevdes var mer en beskrivelse heller enn en forklaring. Med dette mener jeg at en beskriver stegvis hvordan en har brukt prosedyre, heller en å forklare underforliggende konsepter ved prosedyren som brukes. Oppgaver som krever enkel hoderegning inngikk også i denne kategorien. Dette er av typen oppgave der elevene skal finne hvilken verdi x har i likningen 3+x=5, selv om en prosedyre for hvordan å løse lineær likning ikke er presentert.

Prosedyre med forbindelse valgte jeg å se på som det nest høyeste kognitive nivåkravet. Dette var oppgaver der en gjerne kunne bruke prosedyrer, men disse kan ikke brukes tankeløst. Oppgaver der en måtte å engasjere seg med konseptuelle ideer som ligger til grunn for prosedyren for å fullføre oppgaven vellykket og som utvikler forståelse. Oppgaver som krever at en ser sammenhengen mellom ulike prosedyrer. Eksempelvis så kunne en oppgave være i form av tekst, og elevene skal utvikle et lineært likningsuttrykk, eller løse en lineær likning grafisk. Også oppgaver der elevene må formulere et problem som passer til en likning er i denne kategorien.

Matematikk valgte jeg å se på som det høyeste nivået av kognitive krav og i disse oppgavene var det ingen fremgangsmåte som er antydet og en tillært metode kan ikke brukes. De krevde ikke-algoritmisk tenkning og elevene må tenke utenfor boksen og på egenhånd komme frem til passende metoder og tankemåter for å finne en løsning på problemet. De har ikke sett liknende eksempelført og må derfor selv utvikle en egen strategi for å komme til svaret. De må finne hvilken relevant kunnskap og erfaringer de kan bruke og bruke de riktig. Oppgavene i denne kategorien var gjerne av typen problemløsningsoppgaver.

4.2.2.3 Aritmetisk kompleksitet

For å vurdere den aritmetiske kompleksiteten i oppgavene, valgte jeg å benytte meg av Leung og Silver (1997) sitt rammeverk. Den aritmetiske kompleksiteten var da være antall delmål i en oppgave. Det er viktig å skille mellom delmål og deloppgaver. Delmål er noe som må regnes ut for å komme til noe annet, deloppgave er flere spørsmål i en oppgave. Bakgrunnen for å studere den aritmetiske kompleksiteten til oppgavene var som nevnt tidligere, for å se om det er noen sammenheng mellom kompleksiteten til oppgavene og oppgavenes kognitive krav innenfor emnet lineær likninger.

Null-steg ble brukt som kategori for oppgaver der elevene kunne hente informasjon og svaret på oppgave rett ut i fra teksten. Ingen utregning var nødvendig. Dette kunne være oppgaver der elevene skulle tegne, lese av en graf, måle sider eller lage et likningsuttrykk, eller lage et problem til et uttrykk.

Ett-steg var oppgaver som kun krevde én utregning. En måtte ikke først finne ut noe for å så bruke dette til å finne ut noe annet. En trang med andre ord ingen delmål for å komme frem til det endelige svaret. Oppgaver som krevde utregning, om det er i hodet eller på papiret spiller ingen rolle. Dersom elevene kunnen benytte seg av en algoritme ville dette være ett-steg, selv om selve algoritmen inneholder flere steg. En oppgave av for eksempel et lineært likningsuttrykk ville være av denne kategorien, da elevene kan følge en prosedyre for å finne svaret. Dersom elevene blir bedt om å sette prøve på svaret vil dette være ett-steg. Jeg vil igjen påpeke at dersom det var flere spørsmål i en oppgave, ble disse spørsmålene vurdert hver for seg. Eksempel dersom en oppgave var " løs likningen og sett prøve på svaret" ble denne oppgaven regnes som to oppgaver der hver oppgave vurderes ut i fra antall delmål.

Flere-steg var oppgaver som inneholdt flere delmål. For å løse oppgave måtte en her i motsetning til de oppgavene med ett steg, først finne ut noe for å så komme til noe annet. Dersom en for eksempel hadde en tekstoppgave og elevene ble bedt om å løse likningen og sette prøve på svaret, ville dette vært en todelt oppgave der den første delen om å løse likningen var en flere-stegs oppgave. Dette fordi en først måtte sette opp et algebraisk uttrykk før en kunne løse likningen. Den andre delen der elevene skal sette prøve på svaret vil vært en ett-stegsoppgave da dette ikke krevdes at elevene må finne ut av noe før en kunne finne ut av noe annet.

4.2.2.4 Mathematical discourse in instruction

Jeg valgte å gjøre det samme som Ronda og Adler (2016) gjorde da de testet ut sitt analyseverktøy, å dele kapittelet om likninger inn i mindre blokker. I kapittelet om likninger er det i begge bøkene flere delkapitler. Jeg valgte da å la disse delkapitlene være blokker. Dette gjorde at jeg fikk fire blokker i hver av grunnbøkene. Da ikke hele analyseverktøyet til Ronda og Adler (2016) er relevant for min studie, valgte jeg å ekskludere kategorien navngivning, samt nivåoppsummeringene. I blokkene kategoriserte jeg bare eksempler og legitimering. I tillegg gjorde jeg en egen analyse for bare oppgavene, der de ikke ble analysert i blokkene, men etter samlebetegnelse (ordinære oppgaver, utfordringsoppgaver og lignende).

Da oppgavebøkene ikke inneholdt eksempler eller forklaringer, men bare oppgaver var det ikke mulig å bruke hele MDITx-rammeverktøyet i oppgavebøkene. Jeg brukte MDITx-rammeverktøyets kategorier for oppgaver til å gjøre en analyse av oppgavene i oppgavebøkene.

Oppgavene

Known procedure (KPF) var oppgaver som krevde at en brukte tidligere lærte prosedyrer, regler og definisjoner. Dette var da oppgaver som omhandlet kompetanseområder som elevene allerede skal ha blitt introdusert for på tidligere trinn. Dette ble sett på som oppgaver som har lav kognitiv etterspørsel.

Current topic (CTP) var oppgaver som krevde at en tok i bruk en ny prosedyre som ikke hadde blitt introdusert tidligere. Dette ville være oppgaver som omhandlet kompetansemål som ikke er introdusert på tidligere trinn. I dette tilfelle var nye prosedyrer de prosedyrene som omhandlet kompetansemål som gjelder for hva elevene skal kunne etter 10.trinn og som ikke har vært kompetansemål på tidligere trinn. Dette ble sett på som oppgaver som har lav kognitiv etterspørsel.

Applicatipn (AMC) var oppgaver der en måtte se forbindelse mellom ulike prosedyrer og konsepter eller oppgaver som krever at elevene må tenke uten for boksen. Oppgaver der det ikke var en gitt metode som den skal løses på og elevene måtte selv finne ut en metode de kan bruke for å løse oppgaven. Oppgaver var gjerne av typen der elevene skulle bevise eller undersøke noe. Problemløsningsoppgaver var i denne kategorien. Dette ble sett på som oppgaver med høy kognitiv etterspørsel.

Eksemplene

Contrast (C) var dersom det ble gitt eksempler med løsningsforslag som viste muligheter for å se kontraster, for eksempel dersom det i et eksempel ble vist en likning med den ukjente på høyre side og en annen likning med den ukjente på venstre side.

Generalization (G) var dersom det ble gitt eksempler med løsningsforslag, som ga muligheter for å se en likhet ved å vise flere representasjonsformer. For eksempel var dette dersom det ble vist hvordan en kunne lage et lineært likningsuttrykk fra en tekstoppgave. Da kunne en se en sammenheng mellom hvordan likninger opptrer i tekstoppgaver samtidig som en motsatt vei kunne se hvordan en likning uttrykt med tallsymbol kan gjøres om til en tekstoppgave. Dersom et eksempel viste hvordan man setter prøve på svaret, samtidig som det er en svarsetning som forklarer hvorfor løsningen stemmer eller ikke, ble dette analysert i denne kategorien

Fusion (F) var dersom det ble gitt mulighet for en høyere grav av generalisering, gjennom å se krevende dimensjoner av variasjon. Dette var for eksempel eksempler der det ble gitt muligheter for og se forbindelser tekstoppgaver, algebraiske uttrykk, og grafisk løsning, eller gjennom muligheter for å se forbindelser mellom likninger og ulikheter. Også likningssett vil være i denne kategorien. Det er altså en høyere grad av generalisering.

NONE (N) var dersom eksemplene ikke ga muligheter for å se kontraster eller forbindelser mellom ulike trekk ved det matematiske objektet. Dette var for eksempel dersom det bare ble gitt ett eksempel med ett uttrykk eller én løsningsmetode som kun gjelder for en spesifikk likning.

Legitimering

Author (A): denne kategorien innebar at legitimeringer om det matematiske objektet ikke inneholdt noen godkjente forklaringer eller bevis for hvorfor påstandene stemmer. Autoriteten lå hos forfatteren. Dette kunne være påstander om lineære likninger, som ikke inneholdt matematiske prinsipper til grunn eller holdbare forklaringer om hvorfor påstanden var sann. Et eksempel på dette var ” det kan være til god hjelp å si hva en likning betyr, når du skal finne hvilket tall den ukjente x er”.

Substantiation by exaples (SE): denne kategorien innebar at legitimeringen om det matematiske objektet ble forklart ved bruk av et spesifikt eksempel som støttet opp påstanden til forfatteren. Denne kategorien skilte seg fra førstnevnte kategori, Author , ved at det her ble brukt eksempel til forklaringen. Autoriteten lå fortsatt hos forfatteren, men påstandene ble støttet opp av et eksempel. Det lå her ingen godkjente bevis til grunn for forklaringene.

Substantiation by general case (SG): denne kategorien innebar at legitimeringen om det matematiske objektet ble forklart ved bruk av teorem, etablerte definisjoner eller tidligere beviste prosedyrer. Det kunne for eksempel vises et eksempel av hvordan en prosedyre ble brukt, men forklaringene til prosedyren hadde sin autoritet i teorem, definisjoner eller tidligere beviste prosedyrer. Legitimeringen bygde på prinsipper som kunne brukes for å forklare hvorfor en prosedyre fungerte.

4.2.3 Kodeskjema for vertikal analyse

Selv om jeg har benyttet meg av tre ulike analyseverktøy for å analysere og kode oppgavene, lagde jeg et felles kodeskjema for oppgavene, der jeg delte inn oppgavene etter samlebetegnelse. Jeg tok så for meg en og en oppgave innenfor de ulike samlebetegnelsene og kodet både kognitivt nivåkrav og aritmetisk kompleksitet. Jeg valgte å ha en kolonne med kognitive krav, en med aritmetisk kompleksitet og en med MDITx oppgaver. Det var da mulig å se om det oppstod noen forskjeller mellom premissene for de ulike kognitive kravene. Jeg kunne se om det var slik at for eksempel oppgaver kategorisert som ”prosedyre med forbindelse” var de samme oppgavene som ble kategorisert som ”known procedure”. Dette kunne være interessant da som nevnt tidligere er fire kategorier av kogntitive krav i ”The task analysis guide” og tre kategorier av kognitive krav i MDI.

Under er et utklipp fra hvordan tabellene til hvordan jeg kategoriserte oppgavene. For fullstendig skjema av grovdata se vedlegg 1.

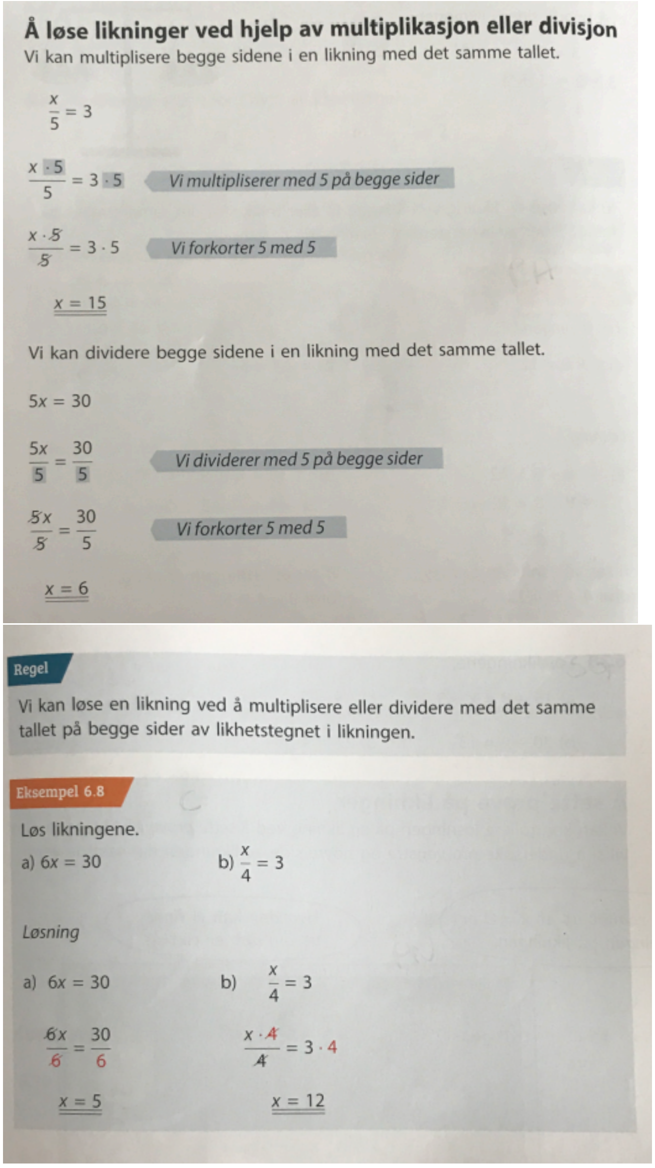
Ordinære oppgaver i Maximum 8 grunnbok	Kognitivt nivåkrav	Aritmetisk kompleksitet	OPPGAVE MDI
5.64(5) (4 blå og 1 gul)	PUF	Ett-steg	KPF

Øvingsoppgaver Faktor 8 grunnbok			
6 (8)	PUF	Ett-steg	KPF
7 (8)	PUF	Ett-steg	KPF

Figur 5: Grovdata

4.2.4 Eksempler på kategorisering av oppgavetekster

Da jeg ikke kan vise alle oppgavene i lærebøkene i denne teksten har jeg valgt ut ett eksempel og noen oppgaver for å illustrere hvordan jeg vurdert disse. Jeg vil da forklare hvordan jeg har gått frem og begrunne hvorfor jeg analyserte eksempelet og oppgavene slik.



Å løse likninger ved hjelp av multiplikasjon eller divisjon

Vi kan multiplisere begge sidene i en likning med det samme tallet.

$\frac{x}{5} = 3$

$\frac{x \cdot 5}{5} = 3 \cdot 5$ Vi multipliserer med 5 på begge sider

$\frac{x \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}} = 3 \cdot 5$ Vi forkorter 5 med 5

$\underline{\underline{x = 15}}$

Vi kan dividere begge sidene i en likning med det samme tallet.

$5x = 30$

$\frac{5x}{5} = \frac{30}{5}$ Vi dividerer med 5 på begge sider

$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{30}{5}$ Vi forkorter 5 med 5

$\underline{\underline{x = 6}}$

Regel

Vi kan løse en likning ved å multiplisere eller dividere med det samme tallet på begge sider av likhetstegnet i likningen.

Eksempel 6.8

Løs likningene.

a) $6x = 30$ b) $\frac{x}{4} = 3$

Løsning

a) $6x = 30$

$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{30}{6}$

$\underline{\underline{x = 5}}$

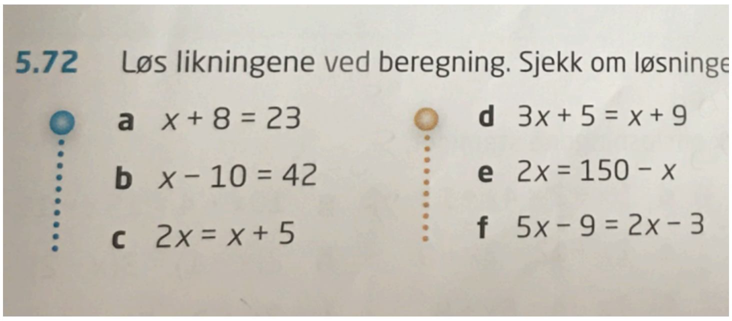
b) $\frac{x}{4} = 3$

$\frac{x \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} = 3 \cdot 4$

$\underline{\underline{x = 12}}$

Figur 6: Eksempel og legitimering i Faktor 8 grunnbok. " Å løse likninger ved hjelp av multiplikasjon eller divisjon" (Hjardar & Pedersen, 2014a, s.196).

Figur 6 viser hvordan Faktor grunnboka introduserer temaet løsning av likninger ved bruk av multiplikasjon eller divisjon. Eksemplene som blir gitt er løsningsforslag på hvordan en løser likninger ved bruka av multiplikasjon eller divisjon. Det blir ikke forklart hvorfor en dividerer eller multipliserer, men en kan ved å imitere prosedyren vist i eksemplene løse likninger av samme type. Da det i eksemplene blir vist hvordan en bruker multiplikasjon eller divisjon til å løse likningene har jeg kodet dette som "contrast" (C) ved bruk at MDITx-analyserammeverktøyet. Mellom løsningsforslagene blir det gitt en regel. Denne regelen sier at "vi kan løse en likning ved å multiplisere eller dividere med det samme tallet på begge sider av likningen". Dette er en regel som kan brukes i noen likninger, men denne regelen kan ikke brukes i alle likninger for å løse de. Det er ikke sikkert at likningene krever dette. Regelen blir ikke begrunnet med hvorfor den stemmer, annet enn ved bruk at eksempler. Derfor har jeg kodet denne regelen som ”substantiation by examples” (SE) ved bruk av MDITx-analyserammeverkøyet.


5.72 Løs likningene ved beregning. Sjekk om løsninge

a $x + 8 = 23$

b $x - 10 = 42$

c $2x = x + 5$

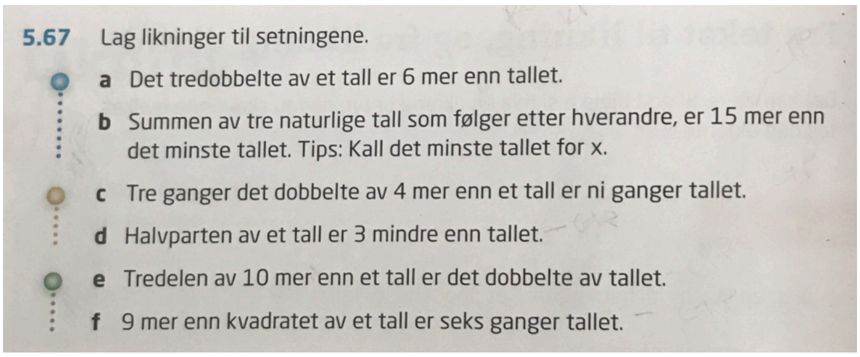
d $3x + 5 = x + 9$

e $2x = 150 - x$

f $5x - 9 = 2x - 3$

Figur 7: Oppgave 5.72 i Maximum 8 Grunnbok. ”Løs likningene ved beregning. Sjekk om løsningene stemmer” (Tofteberg et al., 2013b, s. 317).

Oppgave 5.72 a-f er oppgaver som består av to deloppgaver. Elevene skal først løse likningen og så sjekke om løsningen stemmer. Oppgave a-f regnes derfor som 12 oppgaver. Oppgavene er innenfor kognitive krav kategorisert som ”prosedyre uten forbindelse” (PUF) da en ved hjelp av å følge en prosedyre vist i et eksempel tidligere, kan løse disse oppgavene. Det er liten tvil om hva som må gjøres for å løse oppgavene. Innenfor aritmetisk kompleksitet er disse oppgavene kodet som ”ett-steg*”*. Selv om elevene må gjøre flere beregninger for å løse likningene, er det bare en prosedyre som de trenger å bruke. Må ikke først finne ut noe for å finne løsningen på noe annet. Å sette prøve på svaret er også oppgaver som blir kodet som *ett-steg*. I analyseverktøyet MDITx er disse oppgavene kategorisert som ”known procedure” (KPF), da oppgaven etterspør bruk av tidligere lært prosedyre.


5.67 Lag likninger til setningene.

a Det tredobbelte av et tall er 6 mer enn tallet.

b Summen av tre naturlige tall som følger etter hverandre, er 15 mer enn det minste tallet. Tips: Kall det minste tallet for x.

c Tre ganger det dobbelte av 4 mer enn et tall er ni ganger tallet.

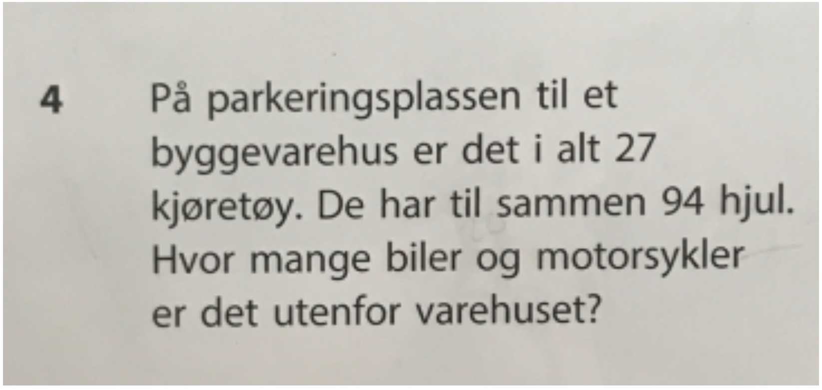
d Halvparten av et tall er 3 mindre enn tallet.

e Tredelen av 10 mer enn et tall er det dobbelte av tallet.

f 9 mer enn kvadratet av et tall er seks ganger tallet.

Figur 8: Oppgave 5.67 fra Maximum 8 Grunnbok ”lag likninger til setningene”. (Tofteberg et al., 2013b, s. 314).

Figur 8 viser et eksempel på oppgaver som innenfor kognitive krav er kategorisert som ”prosedyre med forbindelse” (PMF). Oppgavene krever at elevene må se en sammenheng mellom ulike representasjonsformer av likninger og de kan ikke sette opp en likning uten å ha en forståelse av hva som ligger til grunn for uttrykket de lager. Da oppgaven ikke etterspør noen form for utregning er disse oppgavene innenfor aritmetisk kompleksitet kategorisert som ”null-steg”. I analyseverktøyet MDI er disse oppgavene kategorisert som ”application” AMC


4 På parkeringsplassen til et byggevarehus er det i alt 27 kjøretøy. De har til sammen 94 hjul. Hvor mange biler og motorsykler er det utenfor varehuset?

Figur 9: Oppgave 4 fra Faktor 8 Grunnbok ”Hvor mange biler og motorsykler er det utenfor varehuset?” (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 202).

Figur 9 er et eksempel på en oppgave som er kategorisert som ”matematikk” innenfor kognitive krav. Oppgaven kan for eksempel løses ved å sette opp et likningssett med to ukjente, men dette er noe elevene ikke har blitt introdusert for enda. De må dermed finne en metode for å løse oppgaven selv. Dersom elevene hadde blitt introdusert for likningssett med to ukjente, kunne denne oppgaven vært kategorisert som ”prosedyre med forbindelse” (PMF). Innenfor aritmetisk kompleksitet er også denne oppgaven kategorisert som ett-steg. Dette fordi en ikke vet hvilken metode som vil bli brukt for å løse oppgaven. En kan finne løsningen ved prøving og feiling og ved denne metoden vil det da bare være ett-steg. Dersom det var gitt at denne skulle løses ved å bruke likningssett ville den vært kategorisert som ”flere-steg”. Dette fordi en da først må sette opp uttrykkene og så løse likningen. Innen for analyseverktøyet MDITx vil denne oppgaven bli kodet som ”application” (AMC).

4.3 Validitet og reliabilitet

Det er flere faktorer som kan virke inn som trusler mot validiteten og en studie vil aldri være helt fri for trusler mot validiteten. Likevel kan en ved å være bevisst på validiteten, redusere disse truslene (Cohen et al., 2007). Validiteten er høy hvis undersøkelsesopplegget og datainnsamlingen resulterer i data som er relevante for problemstillingen (Grønmo, 2004, s.221). Dataen som samles inn må også være representative for feltet det skal belyse (Cohen et al., 2007). Oppgavene er hentet fra noen av de mest brukte lærebøkene i Norge (Heimstad & Strand, 2018), fordi jeg ville analysere oppgaver som jeg vet elevene arbeider med og for at denne studien skal være relevant for hvilke oppgaver elevene blir presentert for i dagens skole. Analyseverktøyet jeg brukte er basert på en kombinasjon av tre allerede etablerte analyserammeverktøy der jeg tilførte nødvendige kriterier slik at de best mulig skulle passe til problemstillingen i min studie slik at analyseverktøyene analyserer det jeg vil finne ut av (Grønmo, 2004). Jeg gjennomførte kodingen av teksten flere ganger med noen ukers mellomrom for å sjekke om jeg kodet likt hver gang. Ved å gjøre dette kunne jeg oppdage om det var noen tilfeller der jeg kodet ulikt og hva jeg måtte presisere tydeligere i kodeinstruksene mine for å være sikrere på å være konsekvent i kodingen (Maxwell,2008 ; Silverman, 2011). Oppgaver som har vært spesielt vanskelige å kode har jeg fått drøftet med veileder og dette er med på å svekke subjektiviteten (Thagaard, 2018).

Denne studien ser på oppgaver innenfor ett emnet i to ulike læreverk som er blant de mest brukte i Norge. Dermed kan denne studien ikke generaliseres til å gjelde alle lærebøkene i Norge, ei heller for andre emner i de to læreverkene, men den kan gi et bilde på hvilke tendenser en kan finne i lærebøkene med tanke på kognitive krav, aritmetisk kompleksitet og kvaliteten på lærebøkene emnet likninger.

For å styrke reliabiliteten i min studie har jeg forsøkt å tydelig redegjøre for hvordan jeg har gjennomført kodingen ved å beskrive de ulike kriteriene jeg har bruk og ved bruk av konkrete eksempler til hver av kategoriene. Dette slik at andre kan se hvordan jeg har vurdert enkelte oppgaver og bruke de samme kriteriene som meg (Thagaard, 2018; Grønmo, 2004). Selv om jeg har fulgt et kodeskjema når jeg har kodet oppgaveteksten, er dette egne tolkninger av både kategorier og oppgaveteksten.

4.4 Etiske refleksjoner

En fordel med å analysere foreliggende tekster er at de kan være lett tilgjengelige og de etiske begrensningene i analysen er færre enn ved analyse av feltdata (Thagaard, 2018, s.53). Selv om det er færre etiske begrensninger er det likevel hensyn som må tas. Forfatterne av lærebøkene jeg analyserer kan være en tredjepart i min forskning. Jeg må derfor tenke gjennom og ta hensyn til mulige negative konsekvenser for denne tredjeparten (NESH, 2016). Jeg må tenke gjennom hvordan jeg ordlegger meg og at jeg gjør forskningen, argumentasjonen og vurderingen av de ulike lærebøkene transparente. Det er viktig at det gir nøyaktige henvisninger slik at en kan spore opp informasjonen tilbake til kilden (NESH, 2016). At forskningen er transparent tenker jeg er spesielt viktig da det er mine tolkninger av lærebøkene som kommer frem i forskningen og en leser vil gjerne stille seg kritisk til noen vurderinger.

Ettersom mitt prosjekt ikke inneholder noen form for personopplysninger og innsamling av dataen fra lærebøker, er det ikke nødvendig å melde fra til NSD (NESH, 2016).

5.0 Funn

I dette kapittelet presenteres funnene som ble gjort i den horisontale analysen og den vertikale analysen. Funnene vil bli presentert i tabeller, men enkelte oppgaver vil bli trukket fram da det var et behov for å diskutere disse nærmere. Funnene vil videre i kapittel 6 bli diskutert opp mot teori.

5.1 Horisontal analyse

I Maximum er læringsmålene for temaet likninger å kunne ”løse likninger”, ”sjekke om løsningen av likningen er sann” og ”bruke likninger til å løse problemstillinger fra dagliglivet” (Tofteberg et al, 2013b, s.312). I Faktor er læringsmålene for temaet likninger ”løsning av likninger” (Hjardar & Pedersen, 2014a, s.181). Ingen av lærebøkene omtalte begrepet likninger som lineære likninger, selv om det er lineære likninger de introduserer, da ingen av uttrykkene inneholder variabler høyere enn første grad (Store norske leksikon, 2017).

5.1.1 Delkapitler i kapittelet likninger

Læreverkene som ble valgt ut var begge tilpasset den reviderte læreplanen som gjaldt fra 2013, og i LK06 er kompetansemålene som omhandler likninger under kategorien ”Tall og Algebra” (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det var også under kapittel om algebra en fant emnet likninger i lærebøkene. I Maximum grunnbok sitt kapittel ”Algebra og likninger” fant en underkapitlene som omhandlet *utforsking av mønstre, algebraiske uttrykk, bokstavregning* og *likninger.* Dette kapittelet var det siste kapitelet i Maximum. I kapittelet ”Tall og algebra” i Faktor grunnbok fant en underkapitler som omhandlet temaene *talluttrykk, uttrykk med variabler, sette inn tall i uttrykk, regning med bokstavuttrykk* og *likninger*. Dette kapittelet var det nest siste kapittelet i Faktor etterfulgt av kapittelet ” Måling og enheter”. I Faktor 8 grunnbok og Maximum 8 grunnbok var underkapittelet likninger inndelt i flere delkapitler. Disse vises i tabellen under.

Oversikt over delkapitler i kapittelet likninger

Maximum 8 grunnbok	**Faktor 8 grunnbok**
Likninger: - Fra tekst til likning, og fra likning til ord - Løse likninger ved beregning - Uoppstilte likninger	Likninger: - Å løse likninger ved hjelp av addisjon eller subtraksjon - Å løse likninger ved hjelp av multiplikasjon eller divisjon - Å sette prøve på likninger

Tabell 3: Oversikt over delkapitlet i kapittelet Likninger

En kan ut i fra delkapitlene som illustreres i tabell 3, se at begge lærebøkene hadde tre delkapitler i kapittelet likninger. Likevel var disse kapitlene forskjellige. Faktor delte sine kapitler inn etter hvilken regneoperasjon en skulle bruke når en løser likninger, mens Maximum delte sine kapitler inn etter hvordan likningen opptrådde. Med dette mener jeg om den var i tekstform eller beskrevet som et algebraisk uttrykk. I Maximum blir det ikke synliggjort hvilken regneoperasjon en skulle bruke, men det blir synliggjort hvilken form likningen var uttrykt på. Dette er en motsetning til Faktor som i sine overskrifter vektla å beskrive hvilken regneoperasjon en skulle bruke, men ikke hvordan likningen opptrådde.

Da Maximum sine læringsmål var å kunne løse likning, sjekke om løsningen er sann og å bruke likninger til å løse problemer fra dagliglivet, kan det se ut til at delkapitlene samsvarer med læringsmålene. Faktor hadde et mer diffust læringsmål som var å løse likninger, og det kom frem i overskriftene til delkapitlene, at dette omhandlet å kunne bruke de fire ulike regneoperasjonene samt undersøke om løsningen på en likning er sann.

5.1.2 Antall oppgaver

En stor forskjell mellom læreverkene var antall oppgaver som ble tilbydd innenfor emnet. I Maximum grunnbok fant en 291 oppgaver som omhandlet likninger, mens det i Faktor grunnbok var 101 oppgaver. Dette skyldes sannsynligvis at Maximum differensierer oppgavene i fargekoder. Det ikke er beregnet at en skal gjøre alle oppgavene, men sammen med lærer velge de oppgavene som passer ens behov (Tofteberg et al., 2013a).

I oppgavebøkene hadde begge læreverkene differensiert oppgavene ette vanskegrad, der de brukte fargekoder og en kunne velge oppgaver etter hvilken fargekode en skulle arbeide med. Også her hadde Maximum oppgavebok langt flere oppgaver en Faktor oppgavebok. Maximum oppgavebok hadde 235 oppgaver totalt, i forhold til Faktor oppgavebok som hadde 111 oppgaver totalt.

5.1.3 Prosentvis fordeling av oppgaver i samlebetegnelser

Grunnbøker

	Maximum 8 grunnbok	**Faktor 8 grunnbok**
Ordinære oppgaver	62 %	58 %
Øvingsoppgaver	22 %	16 %
Grubleoppgaver	2 %	6 %
Utfordringsoppgaver	14 %	20 %

Tabell 4: Prosentvis fordeling av oppgaver i grunnbøker i samlebetegnelser: grunnbøker

Tabell 4 er en fremstilling av hvordan oppgavene i hver bok fordelte seg prosentvis innenfor de ulike samlebetegnelsene jeg har utviklet. I begge lærebøkene kan en se over halvparten av oppgavene var innenfor kategorien ”ordinære oppgaver”. Den kategorien det var færrest oppgaver i er kategorien ”grubleoppgaver” som kun består av 2% i Maximum grunnbok og 6% i Faktor grunnbok. Dette er oppgaver som tidligere nevnt skal være problemløsningsoppgaver (Cappelen Damm, 2019; Tofteberg et al, 2013a).

I Maximum grunnbok var det litt flere oppgaver innenfor kategorien ”øvingsoppgaver” i forhold til ”utfordringsoppgaver”. Dette var ulikt fra Faktor grunnbok som hadde flere oppgaver innenfor kategorien ”utfordringsoppgaver” i forhold til ”øvingsoppgaver”. Totalt var 16 % av oppgavene i Maximum grunnbok innenfor kategoriene ”grubleoppgaver” og ”utfordringsoppgaver”, mens det i Faktor grunnbok totalt sett var 26%. Selv om Faktor hadde en høyere prosentandel enn Maximum innenfor disse kategoriene, hadde Maximum flere oppgaver enn Faktor i disse kategoriene, da Maximum hadde flere oppgaver totalt sett enn Faktor. Prosentfordelingen var beregnet ut fra hvordan oppgavene fordelte seg innad i læreboka og ikke lærebøkene i forhold til hverandre. Likevel er det interessant at Faktor grunnbok hadde en større prosentandel av oppgavene i grubleoppgaver og utfordringsoppgaver enn det Maximum grunnbok hadde i sin prosentfordeling. Dette kan tyde på at til tross for færre antall oppgaver i Faktor grunnbok, så vektlegger de ”utfordringsoppgaver” og ”grubleoppgaver” mer enn det Maximum grunnbok gjør.

Oppgavebøker

	Maximum 8 oppgavebok	**Faktor 8 oppgavebok**
Grunnleggende vanskegrad	24 %	29 %
Middels vanskegrad	26,30 %	48 %
Høy vanskegrad	23,40 %	20 %
Blanda oppgaver	26,30 %	3 %

Tabell 5: prosentvis fordeling av oppgaver oppgavebøker i samlebetegnelser: oppgavebøker

I tabell 5 ser en hvordan oppgavene fordeler seg prosentvis i oppgavebøkene innenfor de ulike samlebetegnelsene. I Maximum oppgavebok var det en relativt jevn fordeling av oppgavene innenfor hver kategori. Et lite flertall av oppgavene var innenfor kategoriene ”middels vanskegrad” og ”blanda oppgaver”. At oppgavene fordeler seg jevnt kan muligens være en bekreftelse på at oppgavene er differensiert etter vanskegrad slik som læreboka selv sier og ikke etter mengde.

I Faktor oppgavebok var det noe skjevere fordeling av oppgavene. Nesten halvparten av oppgavene var innenfor kategorien ”middels vanskegrad” og bare 3% var innenfor kategorien ”blanda oppgaver”. Foruten om oppgavene i kategorien ”blanda oppgaver” var det i Faktor en lavest prosentandel oppgaver i kategorien ”høy vanskegrad”. At denne kategorien hadde færre oppgaver enn ”grunnleggende vanskegrad” og ”middels vanskegrad” kan kanskje være fordi disse oppgavene er mer tidkrevende å løse da de ifølge Cappelen Damm skal være vanskeligere (Cappelen Damm, 2019).

Faktor oppgavebok hadde en større prosentandel innenfor ”grunnleggende vanskegrad” og ”middels vanskegrad” i forhold til Maximum oppgavebok. Maximum oppgavebok hadde en større prosentandel innenfor ”høy vanskegrad” og ”blanda oppgaver” i forhold til Faktor oppgavebok. Dette var ulikt grunnbøkene, der Faktor grunnboka hadde en større prosentandel innenfor ”grubleoppgaver” og ”utfordringsoppgaver” i forhold til Maximum grunnbok. ”grubleoppgaver” og ”utfordringsoppgaver” er oppgaver som skal være vanskeligere og derfor ser jeg de to nevnte kategoriene i sammenheng kategorien ”høy vanskegrad” i oppgavebøkene.

5.2 Vertikal analyse

Funnene fra den vertikale analysen viser hvordan oppgavene i lærebøkene fordelte seg innenfor kognitive nivåkrav og aritmetisk kompleksitet. Jeg brukte som nevnt Stein et al. (2009) sin ”Task analysis guide” og Ronda og Adler (2016) sitt MDI verktøy til å analysere de kognitive kravene i oppgavetekstene. Jeg brukte også Leung og Silver (1997) sitt verktøy for å vurdere den aritmetiske kompleksiteten, da jeg tente at den aritmetiske kompleksiteten kan ha en sammenheng med kognitive krav. Jeg valgte derfor i tillegg til tabeller over kognitive krav og aritmetisk kompleksitet, å lage en tabell over sammenhengen mellom kognitive krav og aritmetisk kompleksitet i samme tabell for å synliggjøre denne eventuelle sammenhengen.

5.2.1 Kognitive krav i matematikkoppgaver

Grunnbøker

	Maximum 8 grunnbok	Faktor 8 grunnbok
Memorering	0%	0%
Prosedyre uten forbindelse (PUF)	69%	95%
Prosedyre med forbindelse (PMF)	30%	4%
Matematikk	1%	1%

Tabell 6: Kognitive krav matematikkoppgaver i grunnbøker

Tabell 6 er en oversikt over de kognitive kravene i oppgavene uavhengig av hvilken samlebetegnelse (ordinære oppgaver og lignende) de hører til. Kategoriene ”memorering” og ”prosedyre uten forbindelse” er kategorier av lave kognitive krav, mens ”prosedyre med forbindelse” og ”matematikk” er kategorier med høye kognitive krav. I tabellen kommer det tydelig frem at oppgavene med lave kognitive krav (PUF) er de det var flest av i begge lærebøkene. Ingen av oppgavene ble kategorisert som ”memorering”, men 69% i Maximum og 95% i Faktor ble kategorisert som ”prosedyre uten forbindelse”. Begge lærebøkene har bare 1% av oppgavene kategorisert på det høyeste kognitive nivåkravet, ”matematikk”.

Oppgavebøker

	Maximum 8 oppgavebok	Faktor 8 oppgavebok
Memorering	0%	0%
Prosedyre uten forbindelse (PUF)	86%	92%
Prosedyre med forbindelse (PMF)	13%	8%
Matematikk	1%	0%

Tabell 7: Kognitive krav matematikkoppgaver i oppgavebøker

Tabell 7 er en oversikt over de kognitive kravene i oppgavene samlet sett i oppgavebøkene, uavhengig av samlebetegnelsene (ordinære oppgaver og lignende). I likhet med grunnbøkene, var det også her oppgavene i kategorien ”prosedyre uten forbindelse” som var dominerende, med 86% i Maximum og 92% i Faktor og ingen oppgaver i kategorien ”memorering” som er det laveste kognitive nivåkravet. Mens Maximum hadde 1 % av oppgavene kategorisert i det høysete kognitive nivåkravet, ”matematikk”, hadde Faktor oppgavebok ingen oppgaver som havnet i denne kategorien.

Da ”grubleoppgaver” og ”utfordringsoppgaver” ifølge lærebøkene selv skal være oppgaver av høyere vanskegrad, samtidig som det er færrest oppgaver i disse kategoriene sammenlagt i forhold til ”ordinære oppgaver” og ”øvingsoppgaver” (Tabell 4 og 5), har gjerne sammenheng med funnet om færrest oppgaver kategorisert som høyt kognitivt krevende.

5.2.2 Kognitive krav i samlebetegnelser

Grunnbøker

	Maximum Ordinære oppgaver	Faktor Ordinære oppgaver	Maximum Øvings-oppgaver	Faktor Øvings-oppgaver	Maximum Gruble-oppgaver	Faktor Gruble-oppgaver	Maximum Utfordrings-oppgaver	Faktor Utfordrings-oppgaver
Memorering	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Prosedyre uten forbindelse	75 %	100 %	60 %	100 %	17 %	33 %	62,5 %	95 %
Prosedyre med forbindelse	25 %	0 %	37 %	0 %	50 %	50 %	37,5 %	5 %
Matematikk	0 %	0 %	3 %	0 %	33 %	17 %	0 %	0 %

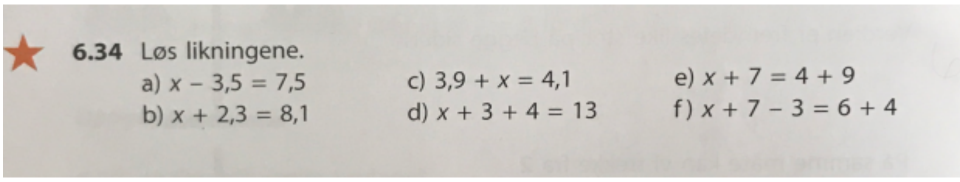
Tabell 8: Prosentvis fordeling av kognitive krav grunnbøker

Tabell 8 viser hvordan de kognitive kravene i oppgavene innenfor de ulike samlebetegnelsene fordeler seg. Fra tabellen kan en se at det i begge lærebøkene ikke er noen oppgaver som var innenfor den kognitive kategorien ”memorering”. Innenfor de ”ordinære oppgavene” var det derimot i begge lærebøkene flest oppgaver i den kognitive kategorien ”prosedyre uten forbindelse”. Dette er oppgaver med lave kognitive krav (Stein et al., 2009). Også oppgavene i samlebetegnelsen ”øvingsoppgaver” hadde flest oppgaver innenfor den kognitive kategorien ”prosedyre uten forbindelse”.

I Faktor grunnbok viser det seg at alle oppgavene i samlebetegnelsene ”ordinære oppgaver” og ”øvingsoppgaver” var innenfor den kategorien ”prosedyre uten forbindelse”, mens 3% av Maximum sine ”øvingsoppgaver” var i kategorien ”matematikk”. Hvis vi ser på grubleoppgavene var flertallet av oppgavene i begge lærebøkene innenfor den kognitive kategorien ”prosedyre med forbindelse”. Grubleoppgavene skal være oppgaver som er av typen problemløsningsoppgaver og det er kanskje årsaken til at en finner et flertall av oppgavene innenfor kategoriene av høyere kognitive krav. Likevel var det i henholdsvis 17% av ”grubleoppgavene” i Maximum og 33% av ”grubleoppgavene” i Faktor oppgaver med lavere kognitive krav (PUF).

Noe annet som er bemerkelsesverdig er at flertallet av oppgavene i samlebetegnelsen ”utfordringsoppgaver” hadde et lavere kognitivt nivåkrav. I Maximum var 62,5% av oppgavene innenfor kategorien ”prosedyre uten forbindelse” og i Faktor var 95% av oppgavene innen for samme kategori. ”Utfordringsoppgaver” er oppgaver som skal være spesielt utfordrende, og at da så mange oppgaver er av lavere kognitive nivåkrav kan en stille spørsmålstegn ved. Jeg valgte derfor å se nærmere på noen av oppgavene i kategoriene ”grubleoppgaver” og ”utfordringsoppgaver”. Disse vil bli presentert før jeg går over på funnene fra oppgavebøkene. Oppgavene jeg har valgt ut er valgt for å vise typiske ”utfordringsoppgaver” og ”grubleoppgaver” som ble kodet som ”prosedyre uten forbindelse”. Jeg har ikke tatt med alle oppgavene som var av denne typen da de valgte oppgavene representerer hvordan flere av oppgaver i denne kategorien var.

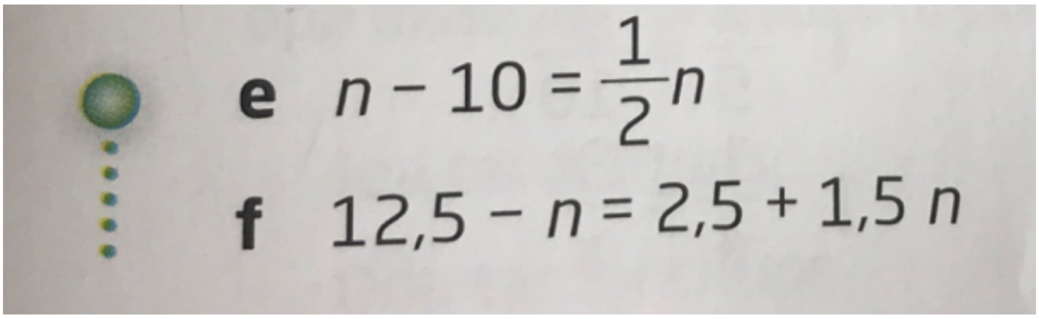
5.2.2.1 Utfordringsoppgaver som er kodet som PUF



6.34 Løs likningene.

a) $x - 3,5 = 7,5$
b) $x + 2,3 = 8,1$
c) $3,9 + x = 4,1$
d) $x + 3 + 4 = 13$
e) $x + 7 = 4 + 9$
f) $x + 7 - 3 = 6 + 4$

Bilde 1: Utfordringsoppgave kodet som PUF fra Faktor 8 grunnbok (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 196)

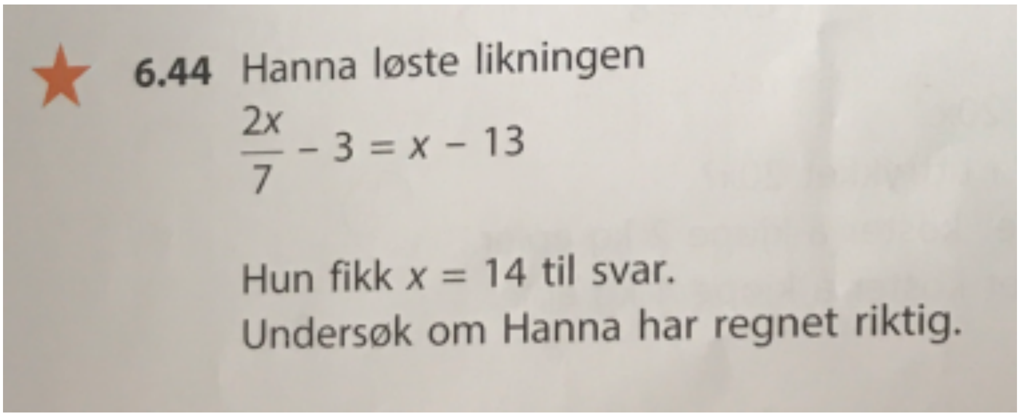


e $n - 10 = \frac{1}{2}n$

f $12,5 - n = 2,5 + 1,5\,n$

Bilde 2: Utfordringsoppgave kodet som PUF fra Maximum 8 Grunnbok (Tofteberg et al., 2013b, s. 319).

Oppgavene på bilde 1 og bilde 2 er eksempler på oppgaver som var utfordringsoppgaver med lave kognitive krav. Disse var kodet som prosedyre uten forbindelse da eksemplene i forkant av disse oppgavene viste en prosedyre for hvordan en løste en likning og en kunne ved hjelp av å følge denne prosedyren løse disse oppgavene. En forskjell fra disse oppgavene og liknende oppgaver som ifølge lærebøkene var kategorisert som ordinære oppgaver var at disse oppgavene inneholdt mer komplekse tall. Som en kan se på bilde 1 inneholder likningene uttrykk med desimaltall og på bilde 2 er det uttrykk som inneholder brøk og desimaltall. Dette har likevel ikke betydning for prosedyren som brukes og derfor ble disse oppgavene til tross for at de hadde mer komplekse tall, likevel oppgaver som hadde lav kognitiv etterspørsel.



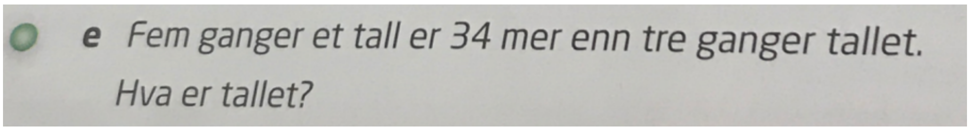
6.44 Hanna løste likningen

$\frac{2x}{7} - 3 = x - 13$

Hun fikk $x = 14$ til svar.
Undersøk om Hanna har regnet riktig.

Bilde 3: Utfordringsoppgave kodet som PUF fra Faktor 8 grunnbok (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 199).

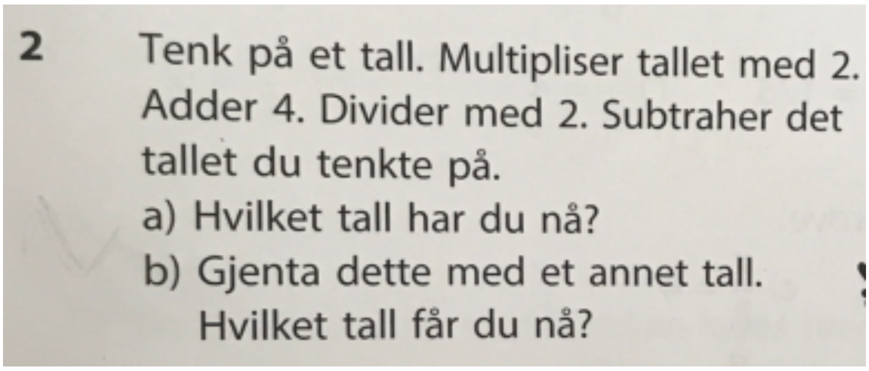
Bilde 3 viser en utfordringsoppgave hentet fra Faktor grunnbok hvor oppgaven går ut på å undersøke om løsningen på likningen er riktig. Da det i et eksempel tidligere har blitt vist en prosedyre for hvordan en undersøker om en likning er riktig var denne oppgaven kodet som prosedyre uten forbindelse. Oppgaven inneholder en brøk, men dette har ikke betydning for oppgavens kognitive krav da den samme prosedyren kan brukes.


e Fem ganger et tall er 34 mer enn tre ganger tallet.
Hva er tallet?

Bilde 4: Utfordringsoppgave kodet som PUF fra Maximum 8 grunnbok (Tofteberg et al., 2013b, s. 322).

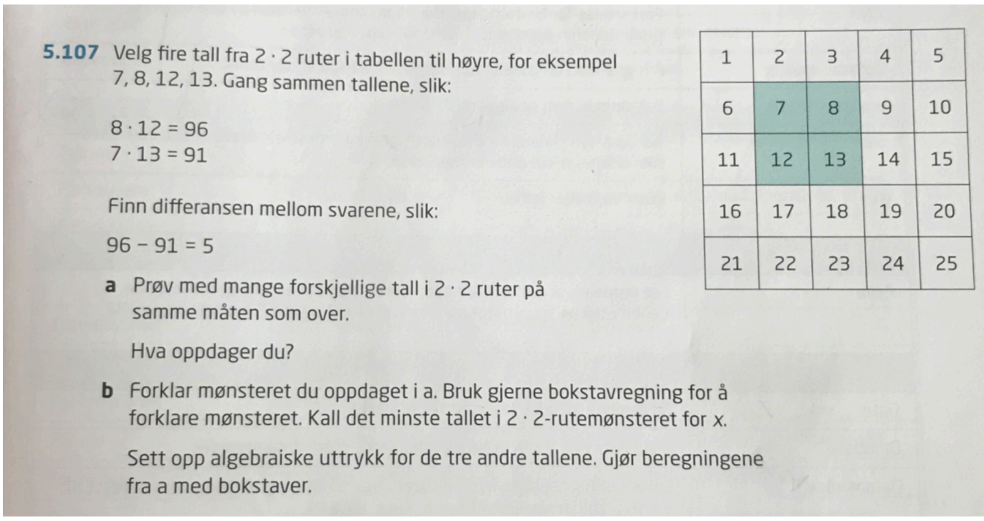
Bilde 4 viser en utfordringsoppgave (oppgave 5.85 e). Dette er en oppgave som består av to deler der en først skal skrive hver setning som en likning og andre delen er å løse likningen. Den første delen av denne oppgaven ble kategorisert som prosedyre med forbindelse, men del to ble kategorisert som prosedyre uten forbindelse. Dette betyr med andre ord at oppgavedelen som ble kategorisert som prosedyre uten forbindelse, var en del av en oppgave med høye kognitive krav. En måtte gjøre del én av oppgaven for å kunne løse likningen. Likevel var det å løse likningen kategorisert som prosedyre uten forbindelse da det i tidligere eksempler ble vist hvordan en løser likninger.

5.2.2.2 Grubleoppgaver som er kodet som PUF


2 Tenk på et tall. Multipliser tallet med 2. Adder 4. Divider med 2. Subtraher det tallet du tenkte på.
a) Hvilket tall har du nå?
b) Gjenta dette med et annet tall.
Hvilket tall får du nå?

Bilde 5: Grubleoppgave som er kodet som PUF fra Faktor 8 grunnbok (Hjardar & Pedersen, 2014a, s.202).

Bilde 5 viser en grubleoppgave hentet fra Faktor 8 grunnbok. I oppgaven blir en bedt om å følge en instruks og ved å følge instruksen vil en ende opp med et tall. Deretter skal en følge den samme instruksen ved å bruke et annet tall og videre ende opp med et tall. Oppgaven etterspør bare hvilket tall en ender opp med, men krever ingen forklaring til hvorfor en ender opp med de svarene en får. Derfor var dette en oppgave som ble kodet som prosedyre uten forbindelse, da oppgaven går ut på å følge instrukser. Likevel kunne denne oppgaven hatt potensial til å være av høyrere kognitivt nivåkrav dersom det ble etterspurt i oppgaven en forklaring til hvorfor en får de svarene en gjør.



5.107 Velg fire tall fra 2 · 2 ruter i tabellen til høyre, for eksempel 7, 8, 12, 13. Gang sammen tallene, slik:

$8 \cdot 12 = 96$
$7 \cdot 13 = 91$

Finn differansen mellom svarene, slik:

$96 - 91 = 5$

a Prøv med mange forskjellige tall i 2 · 2 ruter på samme måten som over.

Hva oppdager du?

b Forklar mønsteret du oppdaget i a. Bruk gjerne bokstavregning for å forklare mønsteret. Kall det minste tallet i 2 · 2-rutemønsteret for x.

Sett opp algebraiske uttrykk for de tre andre tallene. Gjør beregningene fra a med bokstaver.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Bilde 6: Grubleoppgave som er kodet som PUF fra Maximum 8 grunnbok (Tofteberg et al., 2013b, s.335).

Bilde 6 er en grubleoppgave hentet fra Maximum 8 grunnboka. Det var deloppgave a som ble kodet som prosedyre uten forbindelse. Oppgaven etterspør her å følge en instruks der en ved å følge instruksen vil ende opp med noen tall. En skal så si hva en oppdager. En må ikke forklare noe om hvorfor de sammenhengene en oppdager oppstår. Dette er noe som blir etterspurt i oppgave b, men da jeg i min analyse har valgt å regne oppgave a og oppgave b som to separate oppgaver, ble oppgave a vurder som en oppgave med lave kognitive krav.

Oppgavebøker

	Maximum Grunnleggende vanskegrad	Faktor Grunnleggende vanskegrad	Maximum Middels vanskegrad	Faktor Middels vanskegrad	Maximum Høy vanskegrad	Faktor Høy vanskegrad	Maximum Blanda oppgaver	Faktor Blanda oppgaver
Memorering	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Prosedyre uten forbindelse	91 %	100 %	87 %	96 %	82 %	86 %	82 %	0 %
Prosedyre med forbindelse	9 %	0 %	13 %	4 %	18 %	14 %	15 %	100 %
Matematikk	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0%	3 %	0 %

Tabell 9: Prosentvisfordeling av kognitive krav oppgavebøker

I oppgavebøkene kan en ut i fra tabell 9 se at flertallet av oppgavene innenfor alle samlebetegnelsene havnet i kategorien ”prosedyre uten forbindelse” som er oppgaver med lave kognitive krav. Av oppgaver som skulle være av ”grunnleggende vanskegrad” fant er 91% av Maximum sine oppgaver og 100% av faktor sine oppgaver i kategorien ”prosedyre uten forbindelse”, med andre ord lavt kognitivt krevende oppgaver. Maximum hadde 9% av oppgavene som var av ”grunnleggende vanskegrad” i kategorien ”prosedyre med forbindelse” som er av kategorien høyere kognitive krav. Av oppgavene som var av ”høy vanskegrad”, hadde 82% av oppgavene i Maximum lavere kognitive krav av kategorien ”prosedyre uten forbindelse”. I Faktor fant en 86% av oppgavene i denne kategorien. At det var høye prosentdeler innenfor lavere kognitive krav uavhengig av om oppgavene ifølge lærebøkene skulle være av ulik vanskegrad kan være interessant. Hva er det lærebøkene vektlegger i vanskegrad? Da oppgavene omhandler å reprodusere tidligere lært kunnskap eller følge en prosedyre (Stein et al., 2009), kan det se ut til at lærebøkene skiller vanskegrad etter hvor regneteknisk vanskelig en oppgave er. Med dette mener jeg om det eksempelvis er desimaltall eller brøker i oppgavene av høyere vanskegrad. Da vil ikke de kognitive kravene nødvendigvis endre seg så lenge de skal følge en gitt prosedyre.

5.2.3 Kognitive krav (MDI)

Grunnbøker

	Maximum Ordinære oppgaver	Faktor Ordinære oppgaver	Maximum Øvings-oppgaver	Faktor Øvings-oppgaver	Maximum Gruble-oppgaver	Faktor Gruble-oppgaver	Maximum Utfordrings-oppgaver	Faktor Utfordrings-oppgaver
Known procedure	75%	100%	60%	100%	17%	33%	62,5%	95%
Current topic	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Application	25%	0%	40%	0%	88%	67%	37,5%	5%

Tabell 10: prosentvis fordeling av kognitive krav (MDI) grunnbøker

Ut i fra tabell 10 kan en se at det var like mange oppgaver som er kategorisert som lavt kognitivt krevende som i tabell 8, og like mange som var kategorisert som høyt kognitivt krevende som i tabell 8. Dette var et funn som var forventet da jeg ut i fra analyseverktøyet kunne se at beskrivelsene for de kognitive kravene i MDITx og "task analysis guide" samsvarte. I grovdataen kom det frem at det var de samme oppgavene som var kategorisert som prosedyre uten forbindelse " som også var kategorisert som "known procedure", og de oppgavene som var kategorisert som "prosedyre med forbindelse" eller "matematikk" var de samme oppgavene som ble kategorisert som "application". Da ingen oppgaver var kategorisert som "current topic" kan jeg ikke si at disse oppgavene med sikkerhet ville sammenfalt med de oppgavene som ble kategorisert som "prosedyre uten forbindelse", selv om dette er noe som trolig ville vært tilfelle. Det som skiller seg ut med tabell 10 er at det her kommer frem om det ble introdusert noen nye prosedyrer innenfor lineære likninger som ikke har blitt introdusert tidligere. Da ingen oppgaver var kategorisert som CTP viser dette at det ikke ble introdusert noen nye temaer innenfor emnet lineære likninger i lærebøkene. Dette er noe som ikke kunne fanges opp av de andre analyseverktøyene jeg benytte meg av.

Jeg valgte å ta med denne tabellen selv om den ikke viser noen nye funn over kognitive krav for å illustrere hvordan MDITx kan brukes til å analysere kognitive krav, selv om dette er noe Ronda & Adler (2016) ikke kommenterer at rammeverket belyser.

Da det viste seg at det var de samme prosentfordelingene innenfor kognitive krav både når det gjaldt Stein et al. (2009) sine kategorier og Ronda og Adler (2016) sine kategorier har jeg valgt å ikke ta med tabellen over oppgavebøkene. Dette fordi de ikke viste noen nye resultater over kognitive krav enn det som allerede er blitt belyst i tabell 9.

5.2.4 Aritmetisk kompleksitet

Grunnbøker

	Maximum Ordinære oppgaver	Faktor Ordinære oppgaver	Maximum Øvings-oppgaver	Faktor Øvings-oppgaver	Maximum Gruble-oppgaver	Faktor Gruble-oppgaver	Maximum Utfordrings-oppgaver	Faktor Utfordrings-oppgaver
Null-steg	22 %	0 %	26 %	0 %	0 %	0 %	27,5 %	0 %
Ett-steg	78 %	100 %	66 %	100 %	17 %	33 %	72,5 %	95 %
Flere-steg	0 %	0 %	8 %	0 %	83% %	67 %	0 %	5 %

Tabell 11: Prosentvis fordeling av aritmetisk kompleksitet grunnbøker

Tabell 11 er en oversikt over den prosentvise fordelingen av oppgavenes aritmetiske kompleksitet. Resultatene viser at de fleste oppgavene i alle samlebetegnelsene havnet inn under ”ett-steg”. Et unntak var ”grubleoppgavene”, der flertallet av oppgavene var på ”flere-steg”. Det var bare Maximum som hadde oppgaver som var i kategorien ”null-steg”. Fra tabell 5 over kognitive krav i grunnbøkene kom det fram at det var kategorien ”grubleoppgaver” som hadde flest oppgaver innenfor kategorien av høyere kognitive krav. Det er også denne ”grubleoppgavene” som innen for aritmetisk kompleksitet hadde flest oppgaver innenfor kategorien ”flere-steg”. Da min hypotese er at aritmetisk kompleksitet kan ses i sammenheng med kognitive krav, kan dette skyldes at oppgaver med høyere kognitive krav har flere delmål. Dette kan likevel ikke sis med sikkerhet.

Oppgavebøker

	Maximum Grunnleggende vanskegrad	Faktor Grunnleggende vanskegrad	Maximum Middels vanskegrad	Faktor Middels vanskegrad	Maximum Høy vanskegrad	Faktor Høy vanskegrad	Maximum Blanda oppgaver	Faktor Blanda oppgaver
Null-steg	9 %	0 %	13 %	4 %	16 %	9 %	8 %	0 %
Ett-steg	91 %	100 %	87 %	96 %	82 %	86 %	82 %	0 %
Flere-steg	0 %	0 %	0 %	0 %	2 %	5 %	10 %	100 %

Tabell 12: Prosentvis fordeling av aritmetisk kompleksitet oppgavebøker

Tabell 12 er en oversikt over den prosentvise fordelingen av den aritmetiske kompleksiteten i oppgavene gitt i oppgavebøkene. I likhet med grunnbøkene hadde også oppgavebøkene flest oppgaver i kategorien av ”ett-steg” der ca. 80-100% av oppgavene i hver samlebetegnelse var i denne kategorien. Ett unntak var ”blanda oppgaver” i Faktor. Her var alle oppgavene kategorisert som ”flere-steg”. Dette var også den eneste kategorien som hadde alle oppgavene i kategorien av høyere kognitive krav (Tabell 5). I både Maximum oppgavebok og Faktor oppgavebok var det ingen oppgaver i kategorien ”flere-steg” blant oppgaver av ”grunnleggende vanskegrad” og ”middels vanskegrad”. Det var også kategoriene med ”grunnleggende vanskegrad” og ”middels vanskegrad” som hadde færrest oppgaver innenfor kategorier av høyere kognitive nivå (tabell 5). Selv om det var få oppgaver i kategorien av høye kognitive krav blant oppgaver med ”grunnleggende vanskegrad” og ”middels vanskegrad” er det oppgaver av høy kognitivt krav. Det betyr at det fantes oppgaver med høye kognitive krav som ikke inneholdt flere delmål. Dermed kan det se ut til at hypotesen om at jo flere delmål jo høyere kognitive krav må studeres nærmere. Dette gjøres i tabell 13 og tabell 14.

5.2.5 Kognitive krav og aritmetisk kompleksitet

Grunnbøker

	Maximum Null-steg	Faktor Null-steg	Maximum Ett-steg	Faktor Ett-steg	Maximum Flere-steg	Faktor Flere-steg
Memorering	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Prosedyre uten forbindelse	0 %	100 %	93 %	99 %	0 %	0 %
Prosedyre med forbindelse	100 %	0 %	7 %	0 %	60 %	80%
Matematikk	0 %	0 %	0 %	1 %	40 %	20%

Tabell 13: Prosentvis fordeling av kognitive krav og aritmetisk kompleksitet grunnbøker

I tabell 13 er en sammenligning av kognitive krav og aritmetisk kompleksitet fra oppgavene i grunnbøkene. Det kommer her frem at blant alle oppgavene som ble kategorisert som ”null-steg” i Maximum grunnbok, var alle oppgavene innenfor kategorien PMF. Dette var en motsetning til Faktor grunnbok sine oppgaver i kategorien ”null-steg” der alle var kategorisert som PUF.

Da ”null-steg” ifølge hypotesen er oppgaver som er av lavere kognitive krav, samtidig som alle oppgavene i Maximum som var av null-steg var oppgaver med høyere kognitive krav gjorde at jeg tok en nærmere titt på disse oppgavene. Det viste seg at alle disse oppgavene var oppgaver der elevene selv skule lage en likning ut i fra en tekstoppgave. Å lage likninger er oppgaver som ikke krever noen delmål, samtidig som elevene ikke bare kan følge en prosedyre, men må ha forståelse for hva de ulike verdiene representerer for å kunne lage likningen og dermed ble dette kodet som PMF. Noe annet som er bemerkelsesverdig fra tabell 13 er at det var i Maximum var 1% prosentandel kategorisert som matematikk og ett-steg. En nærmere titt på denne oppgaven ble gjort. Det viste seg her at oppgaven var en problemløsningsoppgave da det ikke var noen prosedyrer som kunne brukes og en metode for å løse oppgaven måtte selv utvikles. Likevel ble den kategorisert som ett-steg, grunnet at elevene kunnen finne løsningen på oppgaven ved prøving og feiling. Det er ikke gitt at en må regne flere delmål før en finner løsningen. Også Maximum hadde 7% provent av oppgavene kategorisert som PMF og ett-steg. Etter en nærmere titt på disse oppgaven viste det seg at alle var like hverandre og de gikk ut på å løse lineære likninger der det ikke var gitt i en prosedyre på forhånd hvordan en skulle løse likninger dersom den ukjente var på begge sider av likhetstegnet. Disse oppgavene krevde derfor at en må forstå underliggende konsepter for å løse oppgavene, samtidig som en brukte prosedyren for å løse lineære likninger.

Etter en nærmere titt på aritmetisk kompleksitet og kognitive krav kan det se ut til at hypotesen om at jo høyere kognitivt nivåkrav oppgaven har, desto flere delmål, ikke gjelder. Selv om det ofte var slik at lave kognitive krav var oppgaver som ikke inneholder flere delmål, er ikke dette noe som kan generaliseres til å gjelde alltid. Jeg undersøkte likevel oppgavebøkene for å se om det var flere tilfeller der hypotesen ikke stemmer og hvilke oppgaver dette var. Det kunne da være mulig å oppdage om det er en type oppgaver som går igjen hvor hypotesen ikke stemmer, eller om det finnes flere ulike oppgaver hvor den ikke stemmer.

Oppgavebøker

	Maximum Null-steg	**Faktor Null-steg**	**Maximum Ett-steg**	**Faktor Ett-steg**	**Maximum Flere-steg**	**Faktor Flere-steg**
Memorering	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
Prosedyre uten forbindelse	0 %	0 %	100 %	100 %	0 %	0 %
Prosedyre med forbindelse	100 %	100 %	0 %	0 %	67 %	100 %
Matematikk	0 %	0 %	0 %	0 %	33 %	0 %

Tabell 14: Prosentvis fordeling av kognitive krav og aritmetisk kompleksitet oppgavebøker

Tabell 14 presenterer sammenhengen mellom aritmetisk kompleksitet og kognitive krav i oppgavebøkene. Også her kommer der frem at oppgaver var kategorisert som høyt kognitivt krevende samtidig som de var kategorisert som ”null-steg”. Dette var i likhet med oppgavene i grunnbøkene, oppgaver som omhandlet at elevene skulle lage likninger selv eller lage et problem som passet til en gitt likning. Foruten om disse forrige beskrevne oppgavene så det også her ut til at det ofte var slik at høyt kognitivt krevende oppgaver var oppgaver som inneholdt flere delmål og lavt kognitivt krevende oppgaver var oppgaver som krevde ”null-steg” eller ”ett-steg”.

5.2.6 Eksempler og legitimering

I begge grunnbøkene blir det til hver delkapittel presentert en forklaring som blir etterfulgt av et eksempel. Dette eksempelet var et løsningsforslag. Forklaringene og eksemplene ble adskilte ved at eksempelet blir innrammet i en egen boks. Det ble ikke i noen av lærebøkene brukt begrepet lineære likninger, selv om det var dette som ble presentert.

Maximum grunnbok

	Eksempler	**Legitimering**
Blokk 1 - Likninger	NONE	SG
Blokk 2 – Fra tekst til likning, og fra likning til tekst	C	A
Blokk 3 – Løse likninger ved beregning	G	SG
Blokk 4 – Uoppstilte likninger	NONE	A

Tabell 15: MDI Maximum grunnbok.

Tabell 15 er en oversikt over hvordan eksemplene og forklaringene i Maximum 8 grunnbok er kategorisert etter MDITx-rammeverktøyet. I blokk 1 ble det gitt ett eksempel på hvordan en kan tenke logisk når en skal løse en lineær likning hvor alle x-verdiene er samlet på en side. Dette ga derfor ikke muligheter for å se kontraster eller muligheter for generalisering, da det ikke vil være mulig å finne løsningen på alle lineære likninger ved å tenke logisk. Derfor ble eksempelet i denne blokken kodet som ”NONE”. Det var også en legitimering som tilhørte blokk 1 der læreboka forklarte hva en likning er og hvilke egenskaper en likning har. I tillegg ble det gitt noen definisjoner som beskrev funksjonen ved likhetstegnet, og da disse funksjonene er etablerte definisjoner ble legitimeringen kodet som SG. Selv om eksempelet alene ikke ga muligheter for elevene å se generaliseringer, bygde legitimeringen på definisjoner som er generelle for alle likninger og kan muligens gi muligheter for generalisering.

I blokk 2 tar Maximum for seg temaet ”fra tekst til likning, og fra likning til ord”. Eksemplene som blir gitt illustrerte løsningsforslag for hvordan en fra et par setninger, kan utvikle et likningsuttrykk. Det var også et eksempel der det blir gitt et likningsuttrykk med løsningsforslag for hvordan en kan lage en setning som passer til likningen. Da eksemplene viste begge veier, fra tekst til likning og fra likning til tekst, kategoriserte jeg eksemplene i denne blokken for ”contrast” (C). Legitimeringen som hørte til denne blokken forklarte at ”det kan være til god hjelp å si hva en likning betyr, når du skal finne hvilket tall den ukjente x er” (Tofteberg et al., 2013b, s. 313). Dette er en påstand fra forfatterne av læreboka og ikke noe som kan bevises. Samtidig viste ikke disse eksemplene at det var lettere, derfor ble legitimeringen kodet som A.

Blokk 3 i Maximum grunnbok tar for seg å ”løse likninger ved beregning”. Eksemplene i denne blokken tok for seg hvordan en kan løse likninger ved å bruke visuelle materialer (pinner og kuler) og prosedyrer som viste hvordan en finner verdien av den ukjente, når den ukjente finnes på begge sider av likhetstegnet. Det ble også vist et eksempel for hvordan en sjekker om løsningen er sann. Jeg kodet derfor disse eksemplene som generalisering, der de ulike løsningsmetodene ga muligheter for generalisering, samt å sjekke om løsningen er sann også ga generalisering. Forfatterne begrunnet regneoperasjonene i prosedyren med at ”likhetstegnet i likningen forteller at uttrykkene som står på hver side av likhetstegnet har samme verdi. Det betyr at uttrykkene fortsatt er lik hverandre hvis du legger til, trekker fra, ganger eller deler med det samme tallet på hver side av likhetstegnet” (Tofteberg et al., 2013b, s. 317). De legitimerte derfor her eksempelet med etablerte regneregler i matematikken og derfor kodet jeg dette som SG. Denne legitimeringen passer også som en forklaring på ”hvorfor”, i løsningsforslaget på hvordan en undersøker om løsningen på en likning er sann, og som forklaring til likningen forblir den samme dersom en gjør de samme endringene på hver side.

Blokk 4 i Maximum grunnbok blir det gitt ett eksempel på en lengre tekstoppgaver som inneholdt mer enn en setning og ett uttrykk. Legitimeringen til denne blokken sa at ”når du skal løse oppgaver fra dagliglivet, kan det ofte være til hjelp å oversette oppgaven til en likningen som du skal løse. Når du har løst likningen, må du tolke løsningen og finne ut hva den betyr i den praktiske situasjonen” (Tofteberg et al., 2013, s.321). Tekstoppgaven i eksempelet inneholdt flere opplysninger og i løsningsforslaget ble det vist hvordan en kan løse oppgaven, men det var ikke noen begrunnelse for hvorfor de har valgt å gjøre det de gjør i løsningsforslaget. Da det kun var en tekstoppgave som blir illustrert kodet jeg dette eksempelet som NONE. Dette fordi det ikke var muligheter for å se sammenhenger med andre eksempler. Da legitimeringen har sin autoritet hos forfatteren, men den bli illustrert ved et eksempel kodet jeg legitimeringen som SE.

Faktor grunnbok

	Eksempler	**Legitimering**
Blokk 1 –Likninger	C	SG
Blokk 2 – Å løse likninger ved hjelp av addisjon eller subtraksjon	C	SE
Blokk 3 – Å løse likninger ved hjelp av multiplikasjon eller divisjon	C	SE
Blokk 4 – Å sette prøve på likninger	G	SG

Tabell 16: MDI oppgavebøker

Tabell 16 viser hvordan eksemplene og forklaringene i Faktor 8 grunnbok ble kategorisert etter MDITx-rammeverktøyet. Blokk 1 omhandler Faktor grunnbok sin introduksjon av emnet likninger. Begrepet likning ble forklart med at ” to uttrykk med samme verdi, ett på hver sin side av likhetstegnet, kalles en likning” (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 193). Dette er en etablert definisjon av likninger i matematikken og derfor ble den kodet som SG. Videre ble det forklart at ” å løse en likning vil si å bestemme den ukjente, slik at begge sider av likhetstegnet får samme verdi” og ” verdien av tallene på hver side av likhetstegnet må være lik” (Hjardar & Pedersen, 2014a s.193). Dette er også godkjente definisjoner i matematikken og derfor kodet jeg de som SG. Eksemplene som blir gitt viste hvordan en logisk kan tenke seg frem til hva løsningen på en ligning er. Løsningsforslag til hvordan en logisk tenker seg frem til løsningen på en likning, var også noen Maximum grunnboka hadde. I løsningsforslaget ble det vist to forskjellige eksempler der den ene likningen inneholdt multiplikasjon og den andre inneholdt divisjon. Derfor kodet jeg dette som contrast (C). Det kan tenkes at det ikke var mulig å gjøre generaliseringer, da det kan være utfordrende å tenke seg logisk frem til hvordan en skal løse likninger ved mer komplekse uttrykk. Likevel var det også her i likhet med Maximum grunnbok, mulighet for generalisering da legitimeringen om likhetstegnet bygde på etablerte definisjoner som gjelder i alle tilfeller av løsning av likning. En har da mulighet til å få en relasjonell forståelse av hva en likning egentlig er, på bakgrunn av at det blir forklart hvorfor, i løsningsforslaget på hvordan en kan tenke seg logisk frem til løsningen på en likning.

Blokk 2 i Faktor grunnbok omhandle å løse likninger ved hjelp av addisjon eller subtraksjon. Det var her et fokus på bestemte former for lineære likninger der det kun var operasjonene addisjon og subtraksjon som skulle brukes. Forfatterne forklarte at ” vi kan løse likninger ved å legge til eller trekke fra det samme på hver side av likhetstegnet i likningen” (Hjardar & Pedersen, 2014a, s.195). Dette var en påstand som i og for seg er riktig, men en kan ikke alltid løse en likning ved å gjøre dette da det kommer an på hvordan likningen er. Da dette var en påstand som ikke alltid gjelder, kodet jeg den som SE. Den ble kodet som SE fordi den hadde tilhørende eksempel med løsningsforslag som viste hvordan en kan løse likninger ved å legge til eller trekke fra det samme på hver side av likhetstegnet. Da eksemplene viser likningsuttrykk med addisjon og ett annet med subtraksjon har jeg kodet eksemplene som contrast.

Blokk 3 i Faktor grunnbok omhandler å løse likninger ved hjelp av multiplikasjon eller divisjon. Da også disse forklaringene kun gjaldt for spesielle likninger der det ble demonstrert med et løsningsforslag hvordan en bruker divisjonsregelen og multiplikasjonsregelen, kodet jeg legitimeringene som SE. Eksemplene viste en likning der multiplikasjonsregelen ble brukt og ett der divisjonsregelen ble brukt. Derfor kodet jeg eksemplene som contrast. Sammen med blokk 2 i Faktor forklarer læreboka hvordan en kan løse likninger ved å legge til, trekke fra, dele eller multiplisere med det samme tallet på begge sider av likningen. Likevel var det ingen eksempler som illustrerte en kombinasjon av disse.

Blokk 4 i Faktor grunnbok omhandler å sette prøve på likninger. Forfatterne i læreboka forklarte at en ”kan kontrollere løsningen på likningen ved å sette prøve på likningen. Det vil si å undersøke om venstre og høyre side av likningen har samme verdi” (Hjardar & Pedersen, 2014a, s. 198). Til forklaringen var et eksempel som viste hvordan dette gjøres. Derfor kodet jeg det som SG. Selv om det kun ble gitt to like eksempler som illustrerte hvordan en sjekker om løsningen på en likning er sann, er dette en regel eller prosedyre som alltid fungerer og derfor kodetjeg eksemplene som generalisering. Ved å sette prøve på svaret kan en får en dypere forståelse av hva en likning er og hvorfor løsningen er sann. Legitimeringen og eksempelet utfylte hverandre og kan gi muligheter for å få en relasjonell forståelse av likninger.

6.0 Diskusjon

I det forrige kapittelet trakk jeg frem ulike funn fra lærebøkenes struktur og innhold. I denne delen vil jeg diskutere funnene nærmere. Jeg har valgt å først diskutere funn fra den horisontale analysen etterfulgt av diskusjon av funn fra den vertikale analysen. I diskusjonen rundt funnene fra den vertikale analysen vil jeg først se på oppgavene og deretter eksemplene og legitimeringen.

6.1 Diskusjon av funn fra horisontal analyse

I den horisontale analysen ble det synliggjort hvilke temaer grunnbøkene presenterer i emnet likninger. Begge lærebøkene presenterer emnet likninger i samme kapittel som algebra. Dette i likhet med LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013) og TIMSS-undersøkelsens temaer (Mullis et al., 2015). Maximum grunnboka tar for seg hvordan en lager en likning i fra en tekst, og hvordan en fra en likning kan lage et problem. Hvordan en løser likninger ved beregning og ved å sette opp likninger fra mer komplekse problem ble også presentert. I Faktor grunnboka blir temaene å løse likning ved bruk av addisjon, subtraksjon, multiplikasjon eller divisjon presentert, i tillegg til hvordan en undersøker om en løsning er sann. Å lage og løse enkle lineære likninger og regne med parenteser, addisjon, subtraksjon og multiplikasjon er noe en finner i kompetansemålene etter 7.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013). Etter 10.trinn skal elevene kunne løse lineære likninger og ulikheter, og ligningssystem med to ukjente, og bruke dette til å løse praktiske og teoretiske problem (Utdanningsdirektoratet, 2013). Selv om denne studien fokuserer på lineære likninger, var ulikheter og ligningssystem noe som ikke ble funnet i noen av lærebøkene. Dette kan derfor indikere at mye av det som vektlegges i grunnbøkene på 8.trinn i emnet likninger er repetisjon fra hva elevene allerede har arbeidet med før. Da jeg ikke har analysert læreverkenes lærebøker til 9.trinn og 10.trinn, er det vanskelig å si noe om når ulikheter og ligningssystem blir introdusert og hvordan disse blir introdusert.

Ut i fra de kognitive standardene til TIMSS er det i den høyeste standarden beskrevet at elevene kan løse lineære likninger og løse likningssett, samt sette opp likninger. Foruten om å løse likninger som er delkapitler i begge lærebøkene, er det i Maximum grunnboka presentert et delkapittel ”fra tekst til likning, og fra likning til ord”. Det kan det se ut til at elevene blir presentert for oppgaver der de må sette opp likninger. Dette kan tenkes at elevene har muligheter for å skåre høyt på TIMSS-undersøkelsen i oppgaver som omhandler likninger, da dette har blitt presentert i lærebøkene. Likevel er det mangel på oppgaver som omhandler likningssett, og dette kan dermed føre til at det er utfordrende for elevene å skåre høyt på oppgaver som omhandler dette. Resultatene fra TIMSS-undersøkelsen 2015 viste også at emnet Algebra er det emnet norske elever presterer dårligt i (Mullis et al., 2015).

I Maximum er læringsmålene for temaet likninger å kunne løse likninger, sjekke om løsningen av likningen er sann og bruke likninger til å løse problemstillinger fra dagliglivet (Tofteberg et al, 2013b). I Faktor er læringsmålene for temaet likninger løsnings av likninger (Hjardar & Pedersen, 2014a). Ut i fra læringsmålene er det vanskelig å si noe om de kognitive kravene oppgavene stiller. Som Stein et al (2009) skriver bør oppgavene samsvare med læringsmålene. Det vil si at dersom målet er at elevene lære regler kan oppgavene være memoreringsoppgaver som er oppgaver kategorisert om lavt kognitivt krevende. Da læringsmålene lærebøkene ikke beskriver noe om utforsking og resonnering, ei heller at de skal lære regler, er det vanskelig å si noe om hvilke kognitive krav som stilles i oppgavene. Det kan gjerne tenke at det er en variasjon i de kognitive kravene, da elevene bør arbeide med ulike kognitive krav og ikke bare oppgaver med lav kognitiv etterspørsel (Stein et al, 2009).

6.1.1 Oppgavene

Forskjellige oppgaver krever forskjellig nivå og type av tenkning (Stein et al., 2009). I oversikten over hvordan oppgavene fordeler seg i grunnbøkene (tabell 4) kommer det frem at det er flest oppgaver i kategorien ordinære oppgaver i begge grunnbøkene. Selv om grunnbøkene ikke gir noen beskrivelse av vanskegraden på de ordinære oppgavene, kan det tenkes at disse oppgavene skal være av lettere vanskegrad, da de kategoriserer oppgaver som skal være av høyere vanskegrad. Det store antallet av ordinære oppgaver kan derfor indikere at det er færre oppgaver som er høyt kognitivt krevende, da grubleoppgaver og utfordringsoppgaver skal være av et høyere refleksjonsnivå ifølge lærebøkene selv (Cappelen Damm, 2019; Tofteberg et al., 2013a). Med andre ord kan en kan uten å ha vurdert de kognitive kravene i oppgaven, allerede i den horisontale analysen få en indikasjon på hvilke krav en finner i grunnbøkene. En årsak til at grunnbøkene har flere oppgaver i kategoriene ordinære oppgaver og øvingsoppgaver, kan muligens skyldes at forfatterne ønsker at elevene skal bli kjent med de ulike prosedyrene som kan brukes når en arbeider med likninger og tenker at dette må ligge til grunn før de begynner å arbeide med mer utfordrende oppgaver.

I Maximum oppgavebok er det en jevnere fordeling mellom oppgavene i de ulike samlebetegnelsene (Tabell 5). At oppgavene fordeler seg jevnt kan muligens være en bekreftelse på at oppgavene er differensiert etter vanskegrad slik som læreboka selv sier og ikke etter mengde. I Faktor oppgavebok er det en skjevere fordeling av oppgaver i de ulike vanskegradene (Tabell 5). Blant annet er det en lavere andel oppgaver i kategorien av oppgaver med høy vanskegrad i forhold til de to andre vanskegradene. At kategorien av oppgaver med høy vanskegrad har færre oppgaver enn grunnleggende vanskegrad og middels vanskegrad kan kanskje være fordi disse oppgavene er mer tidkrevende å løse da de ifølge Cappelen Damm skal være vanskeligere (Cappelen Damm, 2019).

6.2 Oppsummering av diskusjon horisontal analyse

Det kan ut i fra hva lærebøkene presenterer av de matematiske temaene som tas opp i emnet likninger, se ut til at det er mye repetisjon fra hva elevene allerede har blitt presentert for på tidligere trinn. Mange av temaene som blir presentert er de samme en finner igjen i TIMSS-undersøkelsens høye kognitive standarder, samtidig som det er mangel på oppgaver som omhandler likningssett. Dette er gjerne noe som blir presentert på høyere trinn i lærebøkene. Læringsmålene i begge lærebøkene kan ikke si noe om hvilke kognitive krav som stilles i oppgavene eller hvilken type forståelse som vektlegges, da de ikke inneholder begreper som kan gi indikasjoner på dette. De fleste oppgavene i grunnbøkene er i kategorien ordinære oppgaver. Da oppgaver som er spesielt utfordrende eller problemløsningsoppgaver blir kategorisert av lærebøkene i egne kategorien, kan det tenkes at de ordinære oppgavene ikke stiller like høye kognitive krav som utfordringsoppgavene og grubleoppgavene. Da det er flest ordinære oppgaver kan dette indikere at det er færre oppgaver med høy kognitiv etterspørsel i grunnbøkene. I oppgavebøkene var det en noe jevnere fordeling.

6.3 Diskusjon av funn fra vertikal analyse

6.3.1 Oppgavenes kognitive krav

Indikasjonene funnet i den horisontale analysen på at det var få oppgaver med høye kognitive krav i grunnbøkene, ble bekreftet i den vertikale analysen der det viste seg at 69% av oppgavene i Maximum grunnbok ble kategorisert som ”prosedyre uten forbindelse” (PUF) og 95% i Faktor grunnbok havnet innenfor samme kategori (Tabell 6). Oppgaver som er kategorisert som PUF er oppgaver som er lavt kognitivt krevende (Stein et al, 2009). Selv om det er en overvekt av oppgaver med lave kognitive krav i begge grunnbøkene, er det Faktor grunnbok noe høyere prosentandel enn Maximum. Dette betyr at Maximum har en større prosentandel av oppgaver som stiller høye kognitive krav sammenlignet med Faktor grunnbok.

Det er et fåtall av oppgavene i grunnbøkene som er høyt kognitivt krevende dersom en ser de i sammenheng med alle oppgavene som blir gitt i læreboka (Tabell 6). Dette kan skyldes at lærebøkene selv har færre oppgaver i kategoriene grubleoppgaver og utfordringsoppgaver, som skal være oppgaver som krever høyere grad av refleksjonsnivå (Tofteberg, 2013a; Cappelen Damm, 2019). Jeg valgte derfor å se nærmere på oppgavene som var kategorisert som utfordringsoppgaver og grubleoppgaver for å se om disse oppgavene faktisk var mer kognitivt krevende (Tabell 8 og 9). Noe som da var overraskende var at det ikke bare er få oppgaver i disse kategoriene, men flere av disse oppgavene var av lavere kognitive krav. Omtrent alle oppgavene som skulle være utfordringsoppgaver i Faktor, var oppgaver med lavere kognitivt nivåkrav, og over halvparten av utfordringsoppgavene i Maximum var av samme nivåkrav.

I Maximum oppgavebok fant jeg ut i den horisontale analysen at oppgavene var jevnt fordelt etter vanskegrad. Når jeg i den vertikale analysen undersøkte de kognitive kravene i oppgaven fikk jeg resultater som indikerte en annen fordeling. Her kom det frem at 86% av oppgavene var av lavere kognitive krav (Tabell 7). Selv om lærebøkene selv har delt inn oppgavene i ulike vanskegrader, viser det seg at flere av oppgavene som skulle være kategorisert som vanskelige, er oppgaver med lav kognitiv etterspørsel. På denne måten er det samsvar mellom Maximum sin grunnbok og oppgavebok, da det i begge bøkene er størst overvekt av oppgaver med lave kognitive krav.

I Faktor oppgavebok ble det i den horisontale analysen funnet ut at flertallet av oppgavene innenfor kategorien middels vanskegrad og færrest oppgaver i kategorien høy vanskegrad. I den vertikale analysen derimot vises det at 92% av oppgaven var av lav kognitiv etterspørsel (Tabell 7). Dette vil si at flere oppgaver som skulle være av middels vanskegrad har en lav kognitiv etterspørsel. Da det er svært høye prosentandeler av oppgavene som er kategorisert som lavt kognitivt krevende, kan det tyde på at det er et nesten isolert fokus på oppgaver med lav kognitiv etterspørsel. Også Faktor sine grunnbøker og oppgavebøker i likhet med Maximum, samsvarer med hverandre med tanke på overvekten av oppgaver med lave kognitive krav.

Lærebøkenes mangel på oppgaver av høye kognitive krav som gjør det mulig å drive en utforskende undervisning var også noe som kom frem i intervjuer i min bacheloroppgave og andre tidligere studier gjort i løpet av utdanningen. Studier gjort av andre på kognitive krav i matematikkoppgaver fra norske lærebøker viser at flertallet av oppgavene stiller lave kognitive krav (Heimstad & Strand, 2018; Johnsen & Storaas, 2015; Resvoll, 2014).

En mulig årsak til at så mange oppgaver som skulle være utfordringsoppgaver, likevel ble kategorisert som lavt kognitivt krevende kan skyldes min betraktning av hva som regnes som en oppgave. Jeg delte inn alle deloppgavene i både tekstoppgaver, men også de som var delt inn av lærebøkene. Hver deloppgave ble da regnet som en oppgave. Dette kan føre til at oppgaver som gjerne var kategorisert som lavt kognitivt krevende, var deloppgaver av oppgaver som var av høyere kognitivt krav. Et eksempel på dette var en oppgave fra Maximum grunnbok sine grubleoppgaver. I den første deloppgaven ble det etterspurt å beskrive hva en oppdaget, mens den andre deloppgaven etterspurte å forklare mønsteret i det en oppdaget. Dette gjorde at den første deloppgaven ble kategorisert som PUF, mens den andre deloppgaven ble kategorisert som PMF. Dersom en hadde regnet hva som teller som en oppgave annerledes ville en kanskje fått andre resultater. Likevel var dette en inndeling jeg valgte å bruke i denne studien da, det kan være vanskelig å en oppgave som består av to deloppgaver under én kategori. Det kan da stilles spørsmålstegn til hva som er en deloppgave av hva. Er det deloppgaven av høy kognitivt krav som er en deloppgave av en oppgave med lav kognitiv etterspørsel og dermed skulle vært kategorisert som lav kognitiv etterspørsel, eller er det deloppgaven med lavt kognitivt krav som er en deloppgave av en oppgave med høy kognitivt etterspørsel og dermed skulle vært kategorisert som høyt kognitivt krevende?

I arbeid med matematikk er det viktig å fremme relasjonell forståelse (Wæge & Nostrati, 2018). For å fremme relasjonell forståelse må elevene få muligheter til å se sammenhenger mellom matematiske ideer, fakta og prosedyrer. De må beskrive underliggende matematiske prosedyrer, å stille spørsmål rundt likheter og forskjeller i forskjellige løsningsstrategier, å vurdere hvordan matematiske problemer bygger på hverandre og se sammenhenger mellom matematiske ideer. Elevene må bli gjort oppmerksomme på hvordan det de lærer passer sammen med tidligere lært kunnskap. Oppgavene må ikke være av typen der løsningen kan ses umiddelbart (Hiebert & Grouws, 2007). Oppgaver av lave kognitive krav krever at elevene skal huske en bestemt regel eller definisjon, eller oppgaver der elevene skal følge en algoritme uten at det er noen forbindelse mellom begrepene eller betydningen som ligger til grunn for prosedyren som brukes (Stein et al., 2009). Da flertallet av oppgavene i lærebøkene er av lave kognitive krav, kan det sies at oppgavene i lærebøkene ikke fremmer relasjonell forståelse da fokuset er på å imitere prosedyrer gitt i lærebøkenes eksempler. Det kan heller tyde på at instrumentell forståelse er noe som vektlegges i arbeidet med oppgavene i lærebøkene (Skemp, 1976). En konsekvens av å arbeide med lavt kognitivt krevende oppgaver kan være at elevene blir gjerne umotiverte av å arbeide med emnet likninger da så få oppgaver er høyt kognitivt krevende (Wæge & Nostrati, 2018; Boaler, 1998). Selv om det kan være lettere å huske regler og algoritmer, vil dette i lengden være vanskelig å huske dersom en ikke har forståelse for hvorfor algoritmene og reglene fungerer (Skemp, 1976). Mangel på relasjonell forståelse fører til at elevene ikke får muligheten til å utvikle en fullkommen matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001).

Det store antallet av oppgaver som er lavt kognitivt krevende strider i mot NCTM åtte punkt om læringsmiljø som fremmer effektiv matematikklæring og dybdelæring (Leinwand, S. & National Council of Teachers of Mathematics, 2014). Elevene blir i svært liten grad utfordret til å løse oppgaver som krever tenkning og resonnering på et høyt nivå og fokuset er på overflatelæring (NOU 2014:7). Dette er motstridene for hva den nye læreplanen som kommer i 2020 vektlegger (Svingen & Gilje, 2018). Da oppgavenes kognitive etterspørsel bør ses i sammenheng med læringsmålene (Stein et al.,, 2009), kan det se ut til at det trengs en oppdatering av lærebøkene med tanke på den nye læreplanen som kommer. Det er ikke nødvendigvis slik at det ikke skal være oppgaver som fremmer instrumentell forståelse og som er lite kognitivt krevende, men det kan gjerne være en bedre balanse av disse.

En årsak til at lærebøkene ser ut til å vektlegge instrumentell forståelse, kan muligens skyldes problemet om at det er for mye lærestoff som skal gjennomgås til at en rekker å gå i dybden (Kunnskapsdepartementet, 2015). Da instrumentell forståelse er raskere å forstå, kan dette være hensiktsmessig dersom det er flere temaer en skal rekke å gå igjennom innenfor en gitt tidsperiode. Da oppgavene ut i fra mine analyser har fokus på instrumentell forståelse, kan dette være ødeleggende for elevenes opplevelse av matematikk, dersom elevene som skal arbeide med disse oppgavene har et ønske om å oppnå en relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Dersom elevene derimot har et ønske om å kun få riktige svar og ønsker å forstå raskt, kan lærebøkene være tilfredsstillende for disse elevenes behov.

6.3.2 Oppgavenes aritmetiske kompleksitet

I samsvar med at de fleste oppgavene er kategorisert som lavt kognitivt krevende var også flertallet av oppgavene innen for aritmetisk kompleksitet kategorisert som ett-steg. Alle uten om en oppgave i kategorien "Matematikk", som er det høyeste kognitive nivåkravet, var oppgaver som krevde flere delmål. Det kan derfor kan derfor se ut til at det er en sammenheng mellom aritmetisk kompleksitet og kognitive krav. Likevel fant jeg flere oppgaver som var kategorisert som høyt kognitivt krevende, PMF, som samtidig var kategorisert som null-steg. Da jeg undersøkte disse oppgavene nærmere kom det frem at alle oppgavene som var høyt kognitivt krevende men med null-steg var oppgaver der elevene skulle lage likninger eller problem som passet til en likning. Det kan derfor ikke sies at det alltid er en sammenheng mellom aritmetisk kompleksitet og kognitive krav, men dette er noe som ofte forekommer. Dette funnet samsvarer også med Johnsen og Storaas (2015) sitt funn. Selv om hypotesen ikke blir bekreftet i denne studien der fokuset har vært på emnet lineære likninger, kunne det vært interessant å undersøke andre oppgaver i andre emner for å se om en finner liknende eller andre tendenser.

Også her kan inndelingen av oppgavene og hva som regnes som en oppgave ha hatt betydning for resultatene. Dersom jeg ikke hadde regnet hver deloppgave som en oppgave, kunne flere oppgaver vært kategorisert som flere steg dersom deloppgavene ses på som steg. En ville da kanskje fått en enda større sammenheng mellom den aritmetiske kompleksiteten og de kognitive kravene.

6.3.3 Eksempler og legitimering

Da eksemplene og legitimeringene gitt i lærebøkene hører til oppgavene, tenkte jeg at det ville være nyttig å vurdere eksemplene og legitimeringene for å se om de indikerer det samme som oppgavene. Oppgavene er som nevnt i stor grad lite kognitivt krevende og dette ser ut til å påvirker en instrumentell forståelse. Jeg vil med andre ord se om det er slik at eksemplene og legitimeringene også impliserer instrumentell forståelse, eller om disse i større grad skaper muligheter for elevene å tilegne seg en relasjonell forståelse til emnet lineære likninger.

Omtrent alle eksemplene i Faktor lærebok ble kategorisert som "contrast". Muligheten for å se kontrast kan i noen grad gi mulighet for å forstå hvorfor eksemplene kan sammenlignes.

Likevel er det mangel på muligheter til å generaliseringer av høyere nivå. Dersom det gir flere enn to eksempler på ulike representasjonsformer av likninger, da kategorisert som ”generalization”, kan disse i større grad gi muligheter for generalisering og mulighet for å se forbindelsen mellom de ulike representasjonsformene som videre kan føre til at en kan få en forståelse av de underliggende konseptene. På bakgrunn av dette kan det se ut til at det er fokus på instrumentell forståelse i eksemplene til Faktor grunnbok. Måten Faktor grunnbok deler opp likninger på kan også implisere at det er fokus på isolerte kunnskaper. Først introduserer de likninger og her er det funksjonen av likhetstegnet blir vektlagt. Da linkinger er uttrykk forbundet med likhetstegn, kan disse eksemplene gi muligheter for en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Deretter blir de introdusert gjennom eksempel, hvordan en kan løse likninger ved hjelp av addisjon eller subtraksjon, videre hvordan en løser det ved hjelp av multiplikasjon eller divisjon for å så bli introdusert for hvordan en undersøker om løsningen på likningen er sann. Dersom elevene har en relasjonell forståelse av likhetstegnet, tenker jeg det gjerne ikke vil være nødvendig med løsningsforslag som viser hvordan hver av de fire regneoperasjonene kan brukes. Da læreboka likevel demonstrerer en prosedyre i løsningsforslagene, legges det opp til at elevene bare kan følge løsningsforslaget fremfor å selv måtte resonnere og bruke den matematiske kompetansen sin. At de ulike regneoperasjonene som skal tas i bruk tydelig blir inndelt i delkapitler, gjør at en ikke trenger å ha forståelse for hvorfor en velger å eksempelvis bruke multiplikasjonsregelen for å løse en likning, da det kommer tydelig frem i eksemplene at det er denne regelen som skal brukes i det gitte delkapittelet.

I Maximum var det noe større variasjon i hvordan eksemplene ble kategorisert. Det ble funnet ett eksempel som ble kategorisert som NONE da det kun ble vist ett eksempel på hvordan en logisk kan tenke seg frem til en løsning på en likning. Dersom det hadde blitt gitt flere ulike eksempler på hvordan en logisk kan gå frem når en skal løse en likning kunne det vært muligheter for å se sammenhenger mellom eksemplene og videre gjøre noen generaliseringer. Også i denne læreboka ble det presentert hvordan en løser likninger ved bruk av addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, men en forskjell her fra Faktor grunnbok, var at disse ble presentert i samme delkapittel. I tillegg ble der også i dette delkapittelet presentert hvordan en undersøker om en likning er sann. På bakgrunn av dette ble disse eksemplene kategorisert som ”generalization” og ikke ”contrast”. Det kan tenkes at det her i større grad enn i Faktor er mulighet for å se forbindelse mellom de ulike likningsuttrykkene og hvorfor en bruker de ulike regneoperasjonene.

Alle eksemplene i både Maximum grunnbok og Faktor grunnbok var eksempler med løsningsforslag. I flere av eksemplene ble det demonstrert en prosedyre som kunne brukes for å løse likninger. Da elevene kan følge denne prosedyren i arbeidet med oppgavene, kan det se ut til at lærebøkene gjennom eksemplene har fokus på instrumentell forståelse. Dersom det ikke ble gitt eksempler med hvordan en kan bruke en prosedyre, kunne elevene i større grad fått utforske mer når de skulle løse oppgavene. Å arbeide med algoritmer for tidlig kan føre til at elevene manipulerer med symboler uten å forstå betydningen eller reflektere over innholdet bak dem (Breiteig & Venheim, 2008). Elevenes evne til å bruke matematikken kan begrenses ved et smalt fokus på algoritmer og rutinemessige oppgaver (Haavold, 2011). I begge lærebøkene fant jeg i stor grad eksempler som ga elevene muligheter for å se kontraster. Bare eksempelet med hvordan en undersøker om løsningen på likningen er sann er kategorisert som generalisering i begge lærebøkene. At det i eksemplene ser ut til at det gis få muligheter for å gjøre generaliseringen kan videre implisere at det ikke er fokus på relasjonell forståelse. Eksemplene blir presentert i delkapitler noe som gjør at sammenhengen mellom de ulike eksemplene og prosedyrene som blir gitt kanskje forsvinner.

Selv om eksemplene alene, i likhet med oppgavene, ser ut til å ha fokus på instrumentell forståelse, ga legitimeringene en annen indikasjon. Da legitimeringen om likhetstegnet kan brukes som forklaring til *hvorfor* noe er løsningen på en likning, kan dette påvirke elevene til å få en relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Det blir ikke i noen av lærebøkene forklart at en løser en likning ved å flytte over og endre fortegn på eller gang med hvert ledd med nevneren og stryk tallet i nevnere og lignende. Dette er legitimeringer som har fokus på instrumentell forståelse da det ikke kommer frem hvorfor en kan gjøre de ulike regneoperasjonene og legitimeringer som ikke bygger på matematisk etablerte regler eller definisjoner.

I Maximum var den ene legitimeringen at det kunne være nyttig å si hva en likning betyr når en skal finne hvilket tall den ukjente er. Dette var en legitimering som ikke bygger på noen etablerte teorem eller regler, men likevel en legitimering som ser ut til å ha som hensikt å fremme relasjonell forståelse hos elevene. Det kan ut i fra legitimeringen se ut som om læreboka ønsker at elevene skal får en dypere forståelse av de grunnleggende konseptene for lineære likninger og øve seg på å sette opp likningsuttrykk. For å kunne sette opp likningsuttrykk fra en tekstoppgaven, må en trolig ha forståelse av hva, hvorfor og hvordan en likning er bygd opp. Derfor kan det tenkes at læreboka her ønsker å oppnå en relasjonell forståelse hos elevene, men dette kommer ikke frem i legitimeringene og eksemplene da det ikke blir legitimer eller demonstrert i eksemplene hvorfor. Dette er i tilfelle noe elevene må forstå gjennom arbeid med oppgavene.

Funksjonen med likhetstegnet blir i begge lærebøkene forklart og elevene har dermed mulighet for å få en forståelse betydningen av likhetstegnet og hvorfor en kan trekke fra, legge til, multiplisere eller dividere med det samme tallet på begge sider av likhetstegnet uten at det får noen betydning for verdiene i uttrykket. Elevene har med andre ord mulighet for å få en relasjonell forståelse av likhetstegnet der de kan tilegne seg kunnskap om hvorfor en bruker de ulike regneoperasjonene (Skemp, 1976). I løsningsforslaget som hører til legitimeringen blir det demonstrert hvordan en logisk kan finne løsningen på en likning. Logisk tenkning er et av punktene som kreves for å få en fullkommen matematisk forståelse (Kilpatrick et al., 2001). Samtidig er det i høringen av den nye læreplanen nevnt at å løse likninger gjennom logisk resonnement noe elevene skal kunne etter 5.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2019). Elevene har også arbeidet med likninger på tidligere trinn ifølge LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013) og derfor vil disse eksemplene og forklaringen kanskje ikke være nødvendige på 8.trinn. Selv om elevene får mulighet til å utvikle en relasjonell forståelse av likhetstegnet, er dette noe de trolig har lært tidligere. Det tyder på at emnet likninger er mye repetisjon, og som videre kan indikere at det matematiske innholdet i lærebøkene er lett for elevene. At mye av lærestoffet var repetisjon fra hva de har lært tidligere, var også noe som kom frem i analysen av oppgavene da ingen oppgaver ble kategorisert som CTP. Arbeid med for lette oppgaver kan være umotiverende for elevene i lengden (Wæge & Nosrati, 2018). I LK06 skal elevene etter 10.trinn ha kunnskap om likningssett og ulikheter. Dette var noe som ikke ble funne i lærebøkene, men dette er gjerne noe som kunne blitt presentert, da det meste av innholdet som nå blir presentert ser ut til å være repetisjon.

Eksemplene og legitimeringene ble i begge lærebøkene presentert som to separate enheter. Dette kan føre til at mange elever gjerne bare ser i blokken med løsningsforslaget og etterligner prosedyren som er brukt her til å løse oppgavene. Elevene vil da ikke få en forståelse av hvorfor prosedyren fungerer, som videre kan føre til at de får en instrumentell forståelse. Dersom legitimeringen og eksemplene ikke ble separerte, eller at det i løsningsforslagene ble forklart hvorfor en utfører de ulike operasjonene, kunne kanskje elevene i større grad få en forståelse av hvorfor. Dette er det som kalles for relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Da eksemplene og legitimeringene bygger på spesifikke likninger, kan det tyde på at fokuset er på å demonstrere en prosedyre som kan brukes i spesifikke tilfeller. Det kan derfor se ut til at fokuset er på å påvirke instrumentell forståelse.

En mulig årsak til at det kan se ut til at eksemplene og legitimeringene har fokus på instrumentell forståelse, og i noen grad også relasjonell forståelse, kan ha sammenheng med måten disse ble analysert på. Jeg delte analysen inn i blokker der hver blokk representerte hvert delkapittel. På denne måten viste det seg at de fleste eksemplene ble kodet som kontraster. Dersom en ikke hadde delt inn i disse blokkene, men sett på hele kapittelet om likninger som en enhet, kan det se ut til at eksemplene gir muligheter for elevene se sammenhengen mellom de ulike likningene og videre gjøre generaliseringer. Likevel valgte jeg å ha denne inndelingen, da lærebøkene selv velger å gjøre det. Denne inndelingen vil gjerne hemme muligheten for å se sammenhengen mellom dem da de gjerne kan tolkes som uavhengige på bakgrunn av at de blir adskilt i ulike delkapitler.

6.4 oppsummering av diskusjon vertikal analyse

Ut i fra oppgavenes kognitive krav kan det se ut til at de har et fokus på å påvirke instrumentell forståelse da de fleste oppgavene var av lavere kognitive nivåkrav. Likevel kan ikke oppgavene alene si noe om hvilke forståelse som vektlegges i lærebøkene, da også eksemplene og legitimeringene kan ha betydning for hvilken forståelse som påvirkes. Ut fra analysen av eksemplene og legitimeringene kan det se ut til at lærebøkene i noe større grad her vektlegger relasjonell forståelse i forhold til oppgavene alene. Samtidig ble muligheten for å se sammenhengen mellom dem og videre generalisering, hemmet grunnet måten de ble presentert på. De ble presentert som separate enheter. Oppgavenes aritmetiske kompleksitet så ut til å ha en viss sammenheng med de kognitive kravene når innenfor emnet likninger. Det ble funnet flere oppgaver hvor dette hadde sammenheng, men også oppgave hvor det ikke hadde sammenheng.

7.0 Konklusjon

I denne forskningsstudien har jeg belyst hvilke kognitive krav oppgavetekstene stiller i emnet lineære likninger på 8.trinn, og hvordan oppgavetekstene påvirker instrumentell og relasjonell forståelse. Dette har blitt gjort ved å studere oppgavenes kognitive krav og aritmetiske kompleksitet. Det ble vurdert hvilken sammenheng den aritmetiske kompleksiteten har med de kognitive kravene i emnet lineære likninger. Videre ble de kognitive kraven diskutert opp mot instrumentell og relasjonell forståelse. Eksemplene og forklaringenes fokus på forståelse har også blitt diskutert for å se om disse påvirker en annen forståelse enn det oppgavene gjør eller om det er samsvar mellom dem.

Det kommer fram av analysen at oppgavene i svært stor grad i både grunnbøkene og oppgavebøkene er av oppgaver med lav kognitiv etterspørsel. Det er ingen av oppgavene som er på det helt laveste nivået ”memorering”, men en stor andel er innenfor kategorien ”prosedyre uten forbindelse”. Resultatene viste også at flere av oppgavene som ifølge lærebøkene selv skal være av høyere vanskegrad og problemløsningsoppgaver, var kategorisert som lavt kognitivt krevende i kategorien prosedyre uten forbindelse. At mange oppgaver er i kategorien prosedyre uten forbindelse indikerer at elevene i stor grad blir introdusert for oppgaver som har et fokus på instrumentell forståelse der en skal imitere en gitt prosedyre (Skemp, 1976). Da fokuset i svært stor grad er på lavt kognitivt krevende oppgaver kan dette føre til at elevene får en begrenset matematisk forståelse (Stein et al, 2009). Denne studien har kun tatt for seg oppgaver innen for et emnet i to norske lærebøker. Det er viktig å påpeke at resultatene kun er en indikasjon på hvilke kognitive krav og hvilken forståelse som vektlegger i lærebøkene, og ikke resultat som kan generaliseres.

Selv om de fleste oppgavene var oppgaver med lavere kognitiv etterspørsel, fantes det i begge lærebøkene noen oppgaver i kategoriene av høyere kognitiv etterspørsel. Det er ikke gitt hvor stor andel av lærebøkene som bør inneholde oppgaver av de ulike kognitive etterspørslene, men det kan tenkes at en noe jevnere fordeling vil være fordelaktig for elevenes muligheter til å utvikle en fullstendig matematisk kompetanse, samt relasjonell forståelse.

Selv om ikke Ronda og Adler (2016) skriver at deres analytiske rammeverktøy MDI kan brukes til å analysere de kognitive kravene i oppgavene, har jeg i denne studien belyst at deres kategorier ulike kategoriseringer av oppgaver samsvarer med Stein et al., (2009) sine kriterier for kognitive krav. En kan bruke deres rammeverk til å skille mellom oppgaver av lave kognitive nivå krav og høye kognitive nivåkrav, men en nærme taksonomisk fordeling av kognitive nivåkrav har ikke blitt gjort.

I likhet med at de fleste oppgavene var kategorisert som lavt kognitivt krevende, viste også resultatene at flertallet av oppgavene var oppgaver som ikke krevde flere delmål for å komme til løsningen. Det var ingen oppgaver som var lavt kognitivt krevende som krevde flere delmål. Dermed kunne det se ut til at det var en sammenheng mellom aritmetisk kompleksitet og kognitive krav. Likevel fantes det oppgaver som var kategorisert som høyt kognitivt krevende som ikke krevde flere delmål for å løse oppgaven og var kategorisert som null-steg. Dermed kan en ikke si at den aritmetiske kompleksiteten alltid har sammenheng med de kognitive kravene. Dette funnet samsvarer med Johnsen & Storaas (2015) sitt funn om at den aritmetiske kompleksiteten til en viss grad har sammenheng med de kognitive kravene i en oppgave.

Eksemplene gitt i lærebøkene var i stor grad løsningsforslag som illustrerte hvordan en kan bruke en prosedyre for å løse lineære likninger. Dette er med på å bekrefte funnene fra analysen gjort av oppgavene, med tanke på at det er et fokus på å fremme instrumentell forståelse. Likevel ble det i analysen av legitimeringene funnet at det i noe større grad er mulighet for å få en relasjonell forståelse. For å kommentere noe om hvilken forståelse som kan oppnås ved arbeid i lærebøkene, er det med andre ord viktig å ikke bare vurdere oppgavene, men også eksemplene og legitimeringene da disse samlet sett kan indikere noe annet enn bare oppgavene alene.

Da det i den nye læreplanen som kommer i 2020 er et fokus på dybdelæring med oppgaver som fremmer utforsking, resonnering og generalisering, kan det se ut til at oppgavetekstene i lærebøkene i noen grad samsvarer med dette fokuset. Legitimeringene ser ut til å gi muligheter for relasjonell forståelse, mens oppgavene i stor grad impliserer instrumentell forståelse. Dermed kan det tyde på at lærebøkene trenger en oppdatering i henhold til den nye læreplanen som kommer. Likevel er det kun emnet lineære likninger som har blitt studert, og det kan derfor hende at andre emner i lærebøkene impliserer noe annet.

7.1 Videre forskning

Lærebøkene indikerer at elevene får en instrumentell forståelse av arbeid med oppgavene som blir presentert i emnet likninger. Det kunne videre vært interessant å se om en finner de samme tendensene i andre emner i de samme lærebøkene. Kan det være at en vil vinne flere problemløsningsoppgaver og oppgaver av høy kognitiv etterspørsel dersom en utvider forskningsområdet til ander læreverk, flere temaer og/eller andre trinn. Å studere lærebøker på høyere trinn og hvordan emnet likninger blir presentert her og hvordan den kognitive etterspørselen er kunne også vært spennende. En kunne da sett om det var samme tendenser på den kognitive etterspørselen, eller om det gjerne er slik at den kognitive etterspørselen øker med klassetrinn.

Ifølge Stein et al (2009) sitt "Task analysis guide" går oppgavene gjennom tre faser. Da det i denne avhandlingen kun har vært fokus på læringsmulighetene og de kognitive kravene i oppgavetekstene slik de opptrer i fase én, i lærebøkene, kunne det vært interessant å videre sett på hvordan de kognitive kravene endrer seg gjennom de alle fasene.

Da jeg i denne studien fant tendenser til at det er en sammenheng mellom aritmetisk kompleksitet og kognitive krav innenfor emnet lineære likninger, samtidig som noen oppgaver avkreftet denne hypotesen, kunne en undersøkt denne hypotesen i andre emner. Det ville da vært interessant å se om en fant flere tendenser til at denne hypotesen styrkes, eller om det er flere oppgaver som er med på å avkrefte hypotesen. En kunne da undersøkt nærmere hvilke type oppgaver som ikke stemmer overens med hypotesen. Er det samsvar på høyere trinn eller i andre tema? Er det en type oppgaver som gjør at hypotesen ikke stemmer, eller er det noen spesielle typer oppgaver hypotesen stemmer for?

8.0 Referanseliste

Adler, J., & Ronda, E. (2015). A Framework for Describing Mathematics Discourse in Instruction and Interpreting Differences in Teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 19*(3), 237-254. doi: 10.1080/10288457.2015.1089677

Aubert, K.E. (2018, 16. oktober). ligning. I Store norske leksikon. Hentet 9. juni 2019 fra https://snl.no/ligning

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and understanding. *Journal for research in mathematics education*, *29*(1), s. 41-62.

Breiteig, T. & Venheim, R. (2008). *Matematikk for lærere 1* (4.utg.) . Oslo: Universitetsforlaget.

Cappelen Damm (2019). Om Faktor 8-10. Hentet 4. april 2019 fra https://faktor.cappelendamm.no/lt/seksjon.html?tid=1995275

Charalambous, C., Delaney, S., Hsu, H., & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning,12*(2), 117-151. doi: 10.1080/10986060903460070

Cohen, L., Morrison, K. & Manion, L. (2007). *Research methods in education* (6. utg.). London: Routledge.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4. utg.). Los Angeles, Calif: SAGE.

Eisenhart, E., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D., & Agard, P. (1993). Conceptual Knowledge Falls through the Cracks: Complexities of Learning to Teach Mathematics for Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 8-40. Hentet 30. april 2019 fra https://nepc.colorado.edu/publication/conceptual-knowledge-falls-through-cracks-complexities-learning-teach-mathematics-unders

Forskrift til opplæringslova (2006). Elevenes rett til læremiddel på eiga målform (FOR-2006-06-23-724). Hentet 30. april 2019 fra https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-

23-724/KAPITTEL_20#KAPITTEL_20

Gilje, Ø., Landfals, F.Ø. & Ludvigsen, S. (2018). Det er to grunner til at dybdelæring er viktig for elevenes framtidige kompetanse. *Bedre Skole*. Hentet 10. mars 2019 fra https://www.utdanningsnytt.no/bedre-skole/debatt/2018/november/dybdelaring--historisk-bakgrunn-og-teoretiske-tilnarminger/

Gowers, T., Barrow-Green, June,Mmnmmauthor, & Leader, Imre,Mmnmmauthor. (2008). *The princeton companion to mathematics.* S.l.].

Grevholm, B. (2017). *Mathematics textbooks, their content, use and influences: Research in Nordic and Baltic countries*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder*. (1.utg.) Bergen: Fagbokforlaget.

Haavold, P.Ø (2011). What Characterises High Achieving Students' Mathematical Reasoning? In Bharath Sriraman, Kyeong Hwa Lee (eds.), "The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics", Advances in Creativity and Giftedness (2011), Volume 1. doi: 10.1007/978-94-6091-439-3_13

Heimstad, C.A. & Strand, K. (2018). *Kognitive utfordringer i to norske lærebokserier fra ungdomsskolen – en mixed methods studie.* (Mastergradsavhandling). Universitetet i Tromsø - Norges Arktiske Universitet, Tromsø. Hentet 12. januar 2019 fra https://munin.uit.no/bitstream/handle/10037/13791/thesis.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371-404). Greenwich, CT: Information Age. Hentet 2. februar 2019 fra https://pdfs.semanticscholar.org/3b2e/2aabd07c64bb65408a3891902be4b7277cd6.pdf

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2014a). *Faktor 8. Grunnbok* (1. utg.). Oslo: Cappelen Damm As.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2014b). *Faktor 8. Oppgavebok* (1. utg.). Oslo: Cappelen Damm As.

Johnsen, M.K.M & Storaas, A.E (2015). *En komparativ studie av matematikkoppgaver i et norsk og et finsk læreverk*. (Mastergradsavhandling).Universitetet i Tromsø - Norges arktiske universitet, Tromsø . Hentet 30. april 2019 fra https://munin.uit.no/handle/10037/8119

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., Mathematics Learning Study Committee, & National Research Council Center for Education, Division of behavioural social sciences education. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press

Kulturdepartementet (2015). *Fag-Fordypning-Forståelse. En fornyelse av kunnskapsløftet.* (Meld. ST. 28, 2015-2016). Hentet fra 12. januar 2019 fra https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Leinwand, S., & National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions : Ensuring mathematical success for all*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Leung, S. S & Silver, E. A. (1997). The Role of Task Format, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking on the Arithmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers. *Mathematics Education Research Journal,* 9(1), 5-24. doi: 10.1007/BF03217299

Maxwell, J. A. (2008). Designing a Qualitative Study. In L. Brinckman & D.J Rog (Ed). *The SAGE Handbook of Applied Social Research Methods*. London: Sage. Kapittel 7.

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, Matematikken og Samfunnet. En undervisningslære.* (1.utg.). Oslo: NKI-forlaget.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Boston: Chestnut Hill, TIMSS & PIRLS International Study Center. Hentet 11. februar 2019 fra https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/t11_ir_mathematics_fullbook.pdf

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Hooper, M. (2015). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. Boston: Chestnut Hill, TIMSS & PIRLS International Study Center. Hentet 11. februar 2019 fra http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/wp-content/uploads/filebase/full%20pdfs/T15-International-Results-in-Mathematics.pdf

Mullis, I.V.S & Martin, O.M. (2013) *TIMSS 2015 Assessment Framework*. Boston: Chestnut

Hill, TIMSS & PIRLS International Study Center. Hentet 19. februar 2019 fra https://timss.bc.edu/timss2015/downloads/T15_Frameworks_Full_Book.pdf

NESH (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, jus og teologi.* (4.utg.) Hentet 30. oktober 2018 fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/60125_fek_retningslinjer_nesh_digital.pdf

Nosrati, M & Wæge, K. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Oslo: Universitetsforlaget

NOU 2014:7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole: et kunnskapsgrunnlag.* Hentet 5. november 2018 fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/sec4

Olafsen, A.R & Maugesten, M. (2009*). Matematikkdidaktikk I Trinnrommet* (1.utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Pepin, B. (2015). *Mathematical tasks and learner dispositions: A comparative perspective.* University of Manchester, UK. Hentet 17. desember 2018 fra https://www.researchgate.net/publication/268346491_MATHEMATICAL_TASKS_AND_LEARNER_DISPOSITIONS_A_COMPARATIVE_PERSPECTIVE

Resvoll, E. (2014). *Lærebøker i matematikk og læreres bruk av dem: En analyse av karakteristiske trekk ved de mest brukte lærebøkene på ungdomstrinnet og hvordan de blir brukt av tre lærere til planlegging og gjennomføring av undervisning.* (Mastergradsavhandling). Høgskolen i Sør-Trøndelag, Trondheim. Hentet 15. mars 2019 fra https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/217278

Ronda, E. & Adler, J. (2016). Mining mathematics in textbook lessons. *International Journal of Science and Mathematics Education.* doi: 10.1007/s10763-016-9738-6

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*: Cambridge University Press.

Silverman, D. (2011). *Interpreting qualitative data : A guide to the principles of qualitative research* (4.utg.). Los Angeles, Calif: Sage.

Skaalevik, E. M. og Skaalevik, S. (2015). *Motivasjon for læring.* Oslo: Universitetsforlaget

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77, 20-26. Hentet 15. desember 2018 fra https://alearningplace.com.au/wp-content/uploads/2016/01/Skemp-paper1.pdf

Solvang, R. (2005). *Matematikk-didaktikk.* (2.utg.). Oslo: NKI forlaget.

Stein, M. K., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2009). *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction. A Casebook for Professional Development*. (2.utg.) New York: Teachers College, Columbia University.

Store norske leksikon. (2017, 8. august). lineære ligninger. Hentet 9. juni 2019 fra https://snl.no/line%C3%A6re_ligninger

Svingen, O & Gilje, Ø. (2018). *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk.* Udir. Hentet 27. oktober 2018 fra https://www.udir.no/contentassets/9178af2725fd4773a46374be4ba54de9/grunnlagsdokument_kvalitetilareremidler_udir_2018.pdf

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode* (5.utgave). Bergen: Fagbokforlaget.

Thompson, J. (2006). Matematikkleksikon (2.utg.) . Oslo: Kunnskapsforlaget.

Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2013a). *Maximum 8: Matematikk For Ungdomstrinnet: Lærerens bok* (1. utg.). Oslo: Gyldendal undervisning.

Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2013b). *Maximum 8: matematikk for ungdomstrinnet. Grunnbok* (1. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2013c). *Maximum 8: matematikk for ungdomstrinnet. Oppgavebok* (1. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Utdanningsdirektoratet (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Hentet 2. april 2019 fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter

Utdanningsdirektoratet (2019). *Læreplan i matematikk fellesfag 1.-10. trinn.* Hentet 31. april 2019 fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=686

Vedlegg 1 - grovdata

Ordinære oppgaver i Maximum 8 grunnbok	Kognitivt nivåkrav	Aritmetisk kompleksitet	MDI
5.64(5) (4 blå og 1 gul)	PUF	Ett-steg	KPF
5.64 (3) (3 gul)	PMF	Ett-steg	AMC
5.65 (3)	PMF	Null-steg	AMC
5.66 (2)	PMF	Null-steg	AMC
5.67 (2 blå)	PMF	Null-steg	AMC
5.67 (2 gul)	PMF	Null-steg	AMC
5.68 (6 blå)	PMF	Null-steg	AMC
5.69 (6 gul)	PMF	Null-steg	AMC
5.70 (4 blå)	PUF	Ett-steg	KPF
5.70 (4gul)	PMF	Ett-steg	AMC
5.72 (3 blå)	PUF	Ett-steg	KPF
5.72 (3blå)	PUF	Ett-steg	KPF
5.72 (3 gul)	PUF	Ett-steg	KPF
5.72 (3gul)	PUF	Ett-steg	KPF
5.71 (4)	PUF	Ett-steg	KPF
5.73 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.74 (6 blå)	PUF	Ett-steg	KPF
5.74 (6 gul)	PUF	Ett-steg	KPF
5.75 (4)	PUF	Ett-steg	KPF
5.75 (4)	PUF	Ett-steg	KPF
5.76 (4 blå)	PUF	Ett-steg	KPF
5.76 (2 gul)	PUF	Ett-steg	KPF
5.76 (2 gul)	PUF	Ett-steg	KPF
5.77 (8)	PUF	Ett-steg	KPF
5.78 (12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.79 (16)	PUF	Ett-steg	KPF
5.80 (20)	PUF	Ett-steg	KPF

5.81 (3)	PUF	Ett-steg	KPF
5.82 (1)	PMF	Null-steg	AMC
5.83 (a 1)	PMF	Null-steg	AMC
5.83 (a 1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.83 (1 blå)	PMF	Null-steg	AMC
5.83 (1blå)	PUF	Ett-steg	KPF
5. 83 (1gul)	PMF	Null-steg	AMC
5.83 (1gul)	PUF	Ett-steg	KPF
5.84 (2)	PMF	Null-steg	AMC
5.84 (2)	PUF	Ett-steg	KPF
5.85 (2)	PMF	Null-steg	AMC
5.85 (2)	PUF	Ett-steg	KPF
5.85 (1 blå)	PMF	Null-steg	AMC
5.85 (1blå)	PUF	Ett-steg	KPF
5.85 (1gul)	PMF	Null-steg	AMC
5.85 (1gul)	PUF	Ett-steg	KPF
5.86 (6)	PMF	Null-steg	AMC
5.86 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.87 (1)	PMF	Null-steg	AMC
5.87 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.88 (1)	PUF	Ett-steg	KPF

Øvingsoppgaver Maximum 8 grunnbok	**Kognitivt nivåkrav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
5.97 (8)	PUF	Ett-steg	KPF
5.98 (4)	PMF	Ett steg-steg	AMC
5.98 (8)	PMF	Null-steg	AMC
5.99 (16)	PUF	Ett-steg	KPF
5.100 (6)	PMF eller memorering	Null-steg	AMC
5.100 (12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.101 (3)	PMF	Flere-steg	AMC
5.102 (2)	Matematikk.	Flere steg	AMC

5.103 (1)	PMF	Null-steg	AMC
5.103 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.103(1blå)	PMF	Null-steg	AMC
5.103 (1blå)	PUF	Ett-steg	KPF
5.103 (1gul)	PMF	Null-steg	AMC
5.103(1 gul)	PUF	Ett-steg	KPF

Grubleoppgaver Maximum 8 Grunnbok	**Kognitive krav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
5.104 (1 blå)	PMF	Flere-steg	AMC
5.105 (1gul)	Matematikk	Flere-steg	AMC
5.106 (1 grønn)	Matematikk	Flere-steg	AMC
5.107 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.107 (1)	PMF	Flere-steg	AMC
5.107 (1)	PMF	Flere-steg	AMC

Utfordringsoppgaver Maximum 8 grunnbok	**Kognitive krav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
5.64 (4)	PMF	Ett-steg	AMC
5.67 (2)	PMF	Null-steg	AMC
5.67 (2)	PUF	Ett-steg	KPF
5.69 (6)	PMF	Null-steg	AMC
5.70 (3)	**PUF**	Ett-steg	KPF
5.70 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.72 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.74 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.76 (4)	PUF	Ett-steg	KPF
5.83 (1)	PMF	Null-steg	AMC
5.83 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.85 (1)	PMF	Null-steg	AMC
5.85 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.103 (1	PMF	Null-steg	KPF

øvingsoppgave)			
5.103 (1 øvingsoppgave)	PUF	Ett-steg	KPF

Ordinære oppgaver i Faktor 8 grunnbok	**Kognitive nivåkrav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
6.27 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.28 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.29 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.30 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.32 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.33 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.35 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.36(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.37 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.39 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
6.40 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
6.41 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
6.42 (2)	PUF	Ett-steg	KPF

Øvingsoppgaver Faktor 8 grunnbok	**Kognitive krav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
6 (8)	PUF	Ett-steg	KPF
7 (8)	PUF	Ett-steg	KPF

Grubleoppgaver Faktor 8 grunnbok	**Kognitive krav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
1 (1)	PMF	Flere-steg	AMC
2(2)	PUF	Ett-steg	KPF
3 (1)	PMF	Flere-steg	AMC
4 (1)	Matematikk	ett-steg	AMC
6 (1)	PMF	Flere steg	AMC

Utfordringsoppgaver Faktor 8 grunnbok	Kognitive krav	Aritmetisk kompleksitet	MDI
6.31 (1)	PMF	Flere-steg	AMC
6.34 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.38 (4)	PUF	Ett-steg	KPF
6.43 (8)	PUF	Ett-steg	KPF
6.44(1)	PUF	Ett-steg	KPF

Maximum 8 oppgavebok

Grunnleggende oppgaver	Kognitive krav	Aritmetisk kompleksitet	MDI
5.91(1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.92 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.93 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.94(6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.95(1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.95 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.95(1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.96(12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.97(12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.98 (1)	PMF	Null-steg	KPF
5.98(1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.99 (1)	PMF	Null-steg	KPF
5.99 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.100(3)	PMF	Null-steg	KPF
5.100 (3)	PUF	Ett-steg	KPF

Middels vanskegrad	Kognitive krav	Aritmetisk kompleksitet	MDI

5.101(4)	PUF	Ett-steg	KPF
5.102(3)	PMF	Null-steg	AMC
5.102 (3)	PUF	Ett-steg	KPF
5.103(2)	PMF	Null-steg	AMC
5.103 (2)	PUF	Ett-steg	KPF
5.104(6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.105(12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.106(6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.107 (12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.108 (3)	PUF	Ett-steg	KPF
5.109(3)	PUF	Ett-steg	KPF
5.110 (1)	PMF	Null-steg	AMC
5.110 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.111(1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.111 (1)	PMF	Null-steg	AMC
5.111 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.111(1)	PMF	Null-steg	AMC

Høy vanskegrad	**Kognitive krav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
5.112 (5)	PMF	Null-steg	AMC
5.112(5)	PUF	Ett-steg	KPF
5.113(12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.114(12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.115(6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.116(6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.117(1)	PMF	Null-steg	AMC
5.117(1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.118(1)	PMF	Flere-steg	AMC
5.119(1)	PMF	Null-steg	AMC

5.119(1)	PUF	Ett-steg	KPF
5.120(2)	PMF	Null-steg	AMC
5.120(2)	PUF	Ett-steg	KPF

Blanda oppgaver	**Kognitive krav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
5.154(2)	PUF	Ett-steg	KPF
5.161 (5)	PMF	Null-steg	AMC
5.161 (5)	PUF	Ett-steg	KPF
5.165(1)	Matematikk	Flere-steg	AMC
5.167(1)	Matematikk	Flere-steg	AMC
5.138(6)	PUF	Ett-steg	KPF
5.141(4)	PUF	Ett-steg	KPF
5.151 (3)	PMF	Flere-steg	AMC
5.124(12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.128(12)	PUF	Ett-steg	KPF
5.130(10)	PUF	Ett-steg	KPF
5.134(1)	PMF	Flere-steg	AMC

Faktor 8 oppgavebok			
Grunnleggende vanskegrad	**Kognitive krav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
6.117(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.118(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.119(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.120(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.121(4)	PUF	Ett-steg	KPF
6.122(1)	PUF	Ett-steg	KPF
6.123(1)	PUF	Ett-steg	KPF
6.124(2)	PUF	Ett-steg	KPF

Middels vanskegrad	**Kognitive**	**Aritmetisk**	**MDI**

	krav	kompleksitet	
6.220 (6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.221(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.222(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.223(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.224(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.225(1)	PMF	Null-steg	AMC
6.225(1)	PUF	Ett-steg	KPF
6.226 (1)	PMF	Null-steg	AMC
6.227(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.228(1)	PUF	Ett-steg	KPF
6.229(1)	PUF	Ett-steg	KPF
6.230(12)	PUF	Ett-steg	KPF

Høy vanskegrad	**Kognitive krav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
6.314(6)	PUF	Ett-steg	KPF
6.315(1)	PMF	Null-steg	AMC
6.315 (1)	PUF	Ett-steg	KPF
6.316(1)	PMF	Null-steg	AMC
6.317(12)	PUF	Ett-steg	KPF
6.318(1)	PMF	Flere-steg	AMC

Blanda oppgaver	**Kognitive krav**	**Aritmetisk kompleksitet**	**MDI**
3 (1)	PMF	Flere-steg	AMC
5 (2)	PMF	Flere-steg	AMC
8(1)	PMF	Flere-steg	AMC