Universitetet i Stavanger

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master i Utdanningsvitenskap (matematikkdidaktikk)	Vårsemesteret, 2019 Åpen/ konfidensiell
Forfatter: Linda Årthun	………………………………………… (signatur forfatter)
Veileder: Raymond Bjuland	
Tittel på masteroppgaven: Elevers problemløsningsstrategier gjennom elev-elev dialog og lærer-elev dialog på 9. trinn. Engelsk tittel: Pupils' problem-solving strategies through pupil-pupil dialogues and teacher-pupils dialogues in a ninth-grade classroom.	
Emneord: Problemløsning Problemløsningsstrategier Lærerveiledning i smågruppedialoger 9. trinn	Antall ord: 37913 + vedlegg/annet: 43242 Stavanger, 11. juni 2019

Forord

Å levere masteroppgave i en alder av 24, etter fem år på grunnskolelærerutdanningen, føles rart og uvirkelig, samtidig som en stor lettelse. Det ligger mye arbeid bak mine år som student, og årene har vært enormt lærerike. Matematikkfaget, uten tvil mitt yndlingsfag, har sammen med forskningen og didaktikken virkelig gjort inntrykk på meg. Det første året på masterprogrammet vekket spesielt min interesse. Ett av emnene vi fikk presentert og jobbet med, var problemløsning, og Polya (1957) og Borgersen (1994) sine steg i problemløsningsprosessen inspirerte meg stort. Da jeg gikk ut fra muntlig eksamen i problemløsning, følte jeg enda ikke at jeg hadde fått snakket nok om emnet. Dette kommer av mitt store engasjement for problemløsning, og med dette ønsket jeg å jobbe videre med det. Av denne grunn kom denne masteroppgaven i synet, som omhandler problemløsning og strategier elevene benytter seg av i prosessen med å løse problemer, samt hvilken rolle lærerens hint spiller i deres løsningsprosess.

Gjennom egen skolegang lærte jeg algoritmer, og jobbet med mange liknende oppgaver etter å ha blitt forklart hvordan. Det er slik matematikkundervisningen er blitt sett på tidligere (Svingen & Gilje, 2018). Jeg tror dette er en av grunnene til min interesse for problemløsning. Jeg er opptatt av at elevene skal føle at matematikk er nyttig, og problemløsning kan trolig motivere og bygge bro mellom matematikken de lærer på skolen og hverdagsmatematikken. Det passer meg utmerket at den nye læreplanen vektlegger problemløsning i større grad.

Med denne masteroppgaven som avslutning på en krevende, kjekk og interessant utdanning, ser jeg frem til å kunne praktisere kunnskapen jeg har tilegnet meg disse årene, og drømmen som lektor har endelig blitt oppnådd.

Jeg ønsker først å takke familien min. Takk far, for at du gjennom studiene har vist interesse for det jeg holder på med og hjulpet meg om det var noe jeg lurte på. Ikke minst har du vist stor forståelse, alltid hatt troen på meg og på denne måten oppmuntret meg.
Kjære enestående mor, som den siste del av studietiden har bodd i mitt hjerte. All lærdom jeg har fått fra deg har jeg tatt med meg inn i skrivingen. Du ga meg verdier som har hjulpet meg stort! Stine, min gode søster; takk for alle samtaler og avbrekk i lesingen.

Jarand, takk for alle timene du har lyttet. Takk for at du har holdt ut med meg i tunge perioder i studietiden, og støttet meg med god oppmuntring. Du har latt meg arbeide med studiene, selv om du har prøvd å få meg til å ta pauser. Din tålmodighet setter jeg stor pris på.

En person som ikke må glemmes, er min gode studievenninne, Annette! Uten deg hadde ikke studiehverdagen vært den samme på noen måte. Takk for bidrag og støtte.

Sist vil jeg rette en stor takk til min veileder, Raymond. Det var du som introduserte meg for problemløsning, og dermed inspirerte meg til å skrive om emnet. Du har vist stor interesse i arbeidet mitt og gitt meg konstruktive tilbakemeldinger på veien. Takk for alle samtalene vi har hatt om problemløsning, og takk for at du har tatt deg tid til arbeidet mitt.

Sammendrag

Dette er en kvalitativ case-studie der formålet var å se på elevers problemløsningsstrategier gjennom elev-elev og lærer-elev dialog. Studien har dermed tatt utgangspunkt i følgende to forskningsspørsmål:

1. Hvilke problemløsningsstrategier kan identifiseres i arbeid med problemløsningsoppgaver i smågruppedialoger på 9. trinn?
2. Hvilken rolle spiller det at læreren kommer med hint underveis i elevenes løsningsprosess?

Studiens empiri bygger på to ukers videoobservasjoner av helklasse og to elevgrupper med ulikt faglig nivå. Det er foretatt intervju av læreren før og etter observasjon, samt gruppeintervju av elevgruppene i etterkant. Det er også brukt visualiserende tegninger fra elevbøker.

Jeg har identifisert flere problemløsningsstrategier som elevene benyttet i smågruppedialogene gjennom tre problemløsningsoppgaver. Resultatene av studien viser at to elevgrupper benyttet seg av ulike strategier, der visualisering i den ene gruppa førte til strategien å finne mønster og generalisering, og modellering i den andre gruppa førte sammen med strategien prøving og feiling til fremdrift. Et annet hovedfunn er at den faglig sterke gruppa så tilbake, reflekterte og monitorerte i hvert av problemene, og gjennomførte alle stegene i problemløsningsprosessen. Den andre gruppa benyttet ikke disse strategiene i samme grad, og gjennomførte ikke alle stegene i problemløsningsprosessen.

Lærerveiledningen ble differensiert i de to gruppene, og funnene tyder på at lærers hint førte til at elevene i den faglig sterke gruppa benyttet seg av flere strategier samt jobbet dypere i problemløsningsprosessen som følge av hintene. I den andre gruppa førte hintene til at elevene benyttet seg av strategiene som læreren ledet dem til.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

PISA-undersøkelsen i 2012 vektla problemløsning som et eget område å undersøke i tillegg til lesing, naturfag og matematikk. Undersøkelsen tar i betraktning at problemløsning krever at en forstår problemet, planlegger, gjennomfører løsningsprosessen samt overvåker og vurderer underveis. Sentralt er evne til kreativitet og kritisk tenkning. Resultatene viste sammenheng mellom prestasjoner i matematikk og prestasjoner i problemløsning. Målet var å se på ferdigheter som kreves for å løse hverdagslige problemer. Resultatene av norske elever ligger rundt OECD sitt gjennomsnitt, med Japan og Sør-Korea i toppen (Kjærnsli, Nortvedt & Jensen, 2014). Japan sin matematikkundervisning er kjennetegnet som problemløsningsarbeid, og i landet er de opptatt av at elevene skal utvide egne prosedyrer for problemløsning. Japan kommer bedre ut når det gjelder elevenes matematiske resultater (Stigler & Hiebert, 1999). Kan det være problemløsningsarbeidet som gjør resultatene i Japan så gode? Kunnskapsløftet inviterer til problemløsning, der strategier er fokus (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det kan stilles spørsmål om hvorvidt matematikkundervisningen i norsk skole kjennetegnes av problemløsningsarbeid med tanke på at undervisningen ifølge Svingen og Gilje (2018) har blitt sett på som rutineoppgaver og memorere algoritmiske prosedyrer fra lærer. Når elever pugger detaljert fagkunnskap og prosedyrer uten å forstå sammenhenger, blir dette betegnet som overflatelæring (Fauskanger & Bjuland, 2018).

Læreplanen er nå i endring. Dybdelæring er fokus heller enn overflatelæring. Dybdelæring innebærer at elevene fremmer forståelse av begreper og sammenhenger, og kan bruke det de har lært til å løse nye problemer i andre sammenhenger (Kunnskapsdepartementet, 2016). Å bruke relevante læringsstrategier samt reflektere over egen læring er også viktig under dybdelæring (Nosrati & Wæge, 2018). I høringen av den nye læreplanen kommer det tydelig frem at problemløsning skal være et stort fokus. Kapittelet om kjerneelementer i matematikk beskriver utforskning og problemløsning som viktig for dybdelæring, i tillegg er muntlige ferdigheter viktig for dybdelæring. Under utforsking inngår det å se om en kan finne mønster og sammenhenger, og det påpekes at strategier er viktigere enn løsningen. Problemløsning blir ut fra denne høringen beskrevet som løsningsmetoder elevene fremmer for å løse et problem som de ikke er kjent med. Videre blir algoritmisk tenkning nevnt som betydelig i dette arbeidet med å finne strategier og fremgangsmåter. Å velge formålstjenlige problemløsningsstrategier er også et nøkkelord i matematikkfaget, og det blir dratt frem at elevene må argumentere for fremgangsmåter og løsninger samt å bedømme om de brukte fremgangsmåtene og resultatet er gyldig (Utdanningsdirektoratet, 2018).

Selv om problemløsning er blitt sett på som viktige aspekter i matematikken, både i undervisning av matematikk og læring av matematikk (Liljedahl, 2016), opplever få elever at rike oppgaver, som kan være problemløsningsoppgaver, er en del av matematikkundervisningen i dag (Wæge & Nosrati, 2018). Tradisjonelt er matematikkundervisningen sett som prosedyremessig og strukturert av matematikklæreren (Carlsen, 2008). Likevel er det et skifte i undervisningsmetodene i retning mot samarbeidslæring, som kjennetegnes av at elevene selv er deltakende og bidrar i undervisnings- og læringsprosessen (Carlsen, 2008). Å tenke sammen er en viktig del av livet. I de senere årene har gevinsten av elevers samarbeid for læring og utvikling blitt mer verdsatt (Mercer & Littleton, 2007). Som det fremkommer av Borgersen (1994) sin forskning, er gruppearbeid særlig egnet til problemløsningsarbeid. Med dette ser jeg på problemløsning i smågrupper som et viktig område å forske på, og med denne oppgaven håper jeg på å inspirere til mer bruk av problemløsning i matematikkundervisningen, som den nye læreplanen vektlegger.

1.2 Tidligere forskning på området

Liljedahl (2016) har gitt bidrag til forskning av nyere dato, en review, der han kommer med fire sammendrag av ulike hovedlinjer innenfor problemløsning. Det andre sammendraget er skrevet av Liljedahl selv, og her er fokus kreativitet og problemløsning. Det blir dratt linjer fra Arkimedes sitt arbeid med problemer, og påpekt at matematikken har røtter i kreativiteten. Matematisk kreativitet kjennetegnes som opplysning, og det blir vektlagt at de sanne problemene trenger ekstra logiske prosesser av kreativitet, innsikt og opplysning for å kunne komme frem til løsninger (Liljedahl, 2016). Luz Manuel Santos-Trigo er forfatter av tredje sammendrag, og derfor tredje hovedlinje av problemløsning, som omfatter matematisk problemløsning og digital teknologi. Digital teknologi er rundt oss kontinuerlig, og for eksempel mobiltelefoner forandrer måten en kommuniserer og samhandler på samt hvordan en utfører aktiviteter. Elektroniske hjelpemidler kan hjelpe elevene i prosessen med matematiske oppgaver, og med samarbeid. Hovedlinjen vektlegger altså bruk av teknologi i samarbeidet og problemløsningsprosessen. Siste sammendrag, av Uldarico Malaspona Jurado, vektlegger at ”problem posing” bør få et større fokus (Liljedahl, 2016). Det første av disse sammendragene er skrevet av Regina Bruder, og gir et nyansert syn på problemløsningsstrategier (Liljedahl, 2016). I min studie vil jeg fokusere på nettopp denne grenen, og dermed tar studien plass under denne hovedlinjen av problemløsning; problemløsningsstrategier.

Alle de overnevnte hovedlinjene av problemløsning baserer seg på arbeidet til Polya og Schoenfeld (Liljedahl, 2016). Polya regnes ofte som opphavsmannen for problemløsning, og mange forskere har hatt han som sitt utgangspunkt for forskning innenfor emnet. Polya (1957) beskriver prosessen med problemløsning og strategier en kan benytte seg av, og godt kjent er hans fire faser i problemløsningsprosessen, som vil være sentralt i mitt arbeid. Schoenfeld (1992) er en anerkjent forsker under problemløsning. Han vektlegger den matematiske tenkningen, og har forsket på problemløsning og strategier i skolen. Mason, Burton og Stacey (2010) med sin bok, ”Thinking mathematically” vektlegger prosessen av matematikken i stedet for selve svaret, og viser viktige strategier i problemløsningsprosessen. Borgersen (1994) har utviklet syv trinn i løsningsprosessen mot et problem, som tar utgangspunkt i Polya sine fire steg, og har forsket på geometri i smågrupper på et matematikkurs for voksne. Slik som Borgersen, er det også andre forskere som har flyttet fokuset fra det kognitive til det sosiokulturelle, og sett på problemløsning og strategier som fremkommer i gruppesamtaler. Blant andre har Bjuland (2002, 2004, 2007) studert lærerstudenters problemløsningsstrategier i smågruppesamtaler. Carlsen (2008, 2009, 2010) har sett på arbeid med problemløsning i smågrupper med elever på videregående skole. Mitt arbeid med problemløsningsstrategier vil kunne plasseres under det sosiokulturelle perspektivet, da dialogene er essensielle i min studie. Derfor vil jeg løfte frem det kognitive og metakognitive, prosessene og strategiene, i et sosiokulturelt perspektiv.

Linn Marie Nordbø skrev sin masteroppgave innenfor problemløsning og strategier til elever i grupper på 8. trinn. Noen av hennes resultater viser at elevene benyttet seg av flere strategier, blant annet modellering gjennom inskripsjon og praktisk gjennomføring av problemet, og ulike monitorerende strategier i varierende grad (Nordbø, 2014). Det ville vært spennende å se om elevene på 9. trinn benytter seg av samme strategier. Bjuland (2002) peker på retninger for videre forskning, der en kan se på samtaler med problemløsning i smågrupper på et lavere klassetrinn, for eksempel 12-16 år. Annen forskning peker også på viktigheten av å arbeide med kognitivt krevende oppgaver som vil fremme resonnering og problemløsning (Wæge &

Nosrati, 2018). Min studie belyser disse perspektivene, da jeg er interessert i å identifisere hvilke problemløsningsstrategier elevene på 9. trinn benytter seg av i arbeid med problemløsningsoppgaver i smågruppedialoger. I tillegg drar jeg dette litt lengre i retning mot dialogene mellom lærer og elever, i form av hvilken rolle det spiller at læreren kommer med hint i elevenes løsningsprosess med tanke på elevenes strategier. Dermed er det sosiokulturelle perspektivet essensielt.

1.3 Forskningsspørsmål

Som det fremkommer av innlendingen, er det tydelig at problemløsning er et økende fokusområde i matematikkundervisningen. Ut fra PISA-undersøkelsen, dybdelæringsfokus og høringen av den nye læreplanen, samt tidligere forskning på området og retninger for videre forskning, ville det vært interessant og sett på problemløsningsstrategiene som elevene benytter seg av på ungdomstrinnet når de arbeider i smågrupper. Dette området er det, som nevnt, en del forskning på. Derfor vil jeg i tillegg til strategiene i elev-elev dialogene se på lærer-elev dialogene for å se på hvilken betydning lærers hint har å si for elevenes strategibruk. Jeg har dermed kommet frem til følgende forskningsspørsmål:

1. Hvilke problemløsningsstrategier kan identifiseres i arbeid med problemløsningsoppgaver i smågruppedialoger på 9. trinn?
2. Hvilken rolle spiller det at læreren kommer med hint underveis i elevenes løsningsprosess?

For å svare på disse forskningsspørsmålene vil jeg altså ha fokus på problemløsningsstrategier som elevene på 9. trinn benytter i løsningsprosessen når de arbeider i smågrupper. I det andre forskningsspørsmålet er fortsatt elevenes strategier i fokus, men jeg vil her også løfte frem hvordan læreren bidrar for å støtte elevene til å bruke problemløsningsstrategier når de arbeider med problemløsningsoppgaver i smågrupper, og hvilke strategier elevene benytter som følge av dette. Med andre ord vil også lærerens veiledning i smågruppedialogene tas frem her.

1.4 Studiens oppbygning

For å forske på problemløsning, ønsker jeg å se på noe som kan observeres. Strategiene elevene benytter seg av i løsningsprosessen er mulig å observere, og er av den grunn valgt som utgangspunkt for forskningsspørsmål. Som sagt, er utgangspunktet mitt Liljedahl (2016) sin hovedlinje om problemløsningsstrategier. Problemløsningsmodellene til Polya (1957), Borgersen (1994) og Mason et al. (2010) vil være grunnleggende for mitt teoretiske rammeverk i studien. I teoridelen vil jeg gjøre rede for hva et matematisk problem og et rikt problem er, og problemløsning vil defineres ut fra de ulike problemløsningsmodellene. Problemløsningsstrategier vil så bli belyst, og innenfor dette delkapittelet vil også en av Schoenfeld (1992) sine kategorier for matematisk tenkning være fokus; monitorering og kontroll. Siden hans fokus er det kognitive, og jeg er interessert i strategier som fremkommer i gruppesamtaler, går jeg videre over til et sosiokulturelt rammeverk med fokus på Vygotsky og medierende verktøy. Jeg er interessert i dialogene, og derfor vil det dialogiske perspektivet - gruppearbeid og problemløsning - være sentralt. Eksempler på hvordan læreren kan veilede elevene i deres løsningsprosesser er også et emne i denne sosiokulturelle delen av oppgaven, da jeg ønsker å få frem betydningen av at lærer veileder i prosessen, som er forskningsspørsmål nummer to. Med andre ord har noe av den teoretiske bakgrunnen røtter i det kognitive, men jeg vil altså se dette ut fra det sosiokulturelle læringsperspektivet, slik som også Bjuland (2002, 2004, 2007) og Carlsen (2008, 2009, 2010) har gjort. Videre, i metodedelen vil forskningsprosessen med datainnsamling bli beskrevet i detalj, og metodiske betraktninger og etiske utfordringer vil diskuteres. I fjerde kapittel vil utvalgte sekvenser analyseres og knyttes opp mot relevant teori. I kapittel 5 vil funnene diskuteres videre, for så å komme med en konklusjon i kapittel 6.

2 Teoretisk bakgrunn

Schoenfeld (1992) har utviklet et rammeverk der han kommer med fem kategorier som er sentrale under arbeid med problemløsning, og kategoriene oppsummerer en enighet blant flere forskere om hva matematisk tenkning, altså kognisjon, og problemløsning betyr. Kategoriene er som følger: Kunnskapsbase, problemløsningsstrategier, monitorering og kontroll, holdninger og påvirkning, og praksis. Da forskningsspørsmålene mine innbefatter problemløsningsstrategier, er kategori to og tre av størst betydning. Disse har fått egne overskrifter senere i dette kapittelet. De andre tre vil kun bli nevnt i følgende avsnitt.

Første kategori, kunnskapsbasen omhandler den kunnskapen elevene allerede sitter med, og hvordan kunnskapen distribueres. En trenger ulik type kunnskap til ulike problemer. Den fjerde kategori kaller Schoenfeld (1992) for holdninger og påvirkning. Dette går på elevenes tidligere erfaringer. Holdninger blir tolket som elevenes forståelse og følelser som ligger til grunn for hvordan elevene danner begrep og engasjerer seg i matematikken. Slik jeg forstår Schoenfeld (1992), har de holdningene som elevene har påvirkning på om de ønsker å løse problemet og om de løser problemet. En typisk holdning som elevene har i matematikkfaget, er at et matematisk problem kun har ett korrekt svar. Også læreres undervisningspraksis blir påvirket av holdninger og erfaringer. Disse holdningene kommer altså av erfaringer og kulturen som en tilhører. Matematikkpraksisen er også en kategori som Schoenfeld (1992) drar frem. Det handler om hvordan en arbeider med matematiske problemer. Å bli en god problemløser i matematikk kan være å skaffe seg vaner og disposisjoner for tolkning og skape mening like mye som å tilegne seg bestemte ferdigheter, strategier eller kunnskaper (Resnick, referert i Schoenfeld, 1992). Men hva er et matematisk problem? Jeg vil videre ta for meg dette og komme inn på hva som legges i problemløsningsbegrepet.

2.1 Problemløsning

Problemløsning er et emne som lenge er blitt snakket om og forsket på. Likevel er det et begrep som kan forstås på ulike måter. Derfor vil det i de neste delkapitlene bli definert og forklart. Før begrepet problemløsning defineres, kan det være hensiktsmessig å forstå hva et matematisk problem er.

2.1.1 Hva er et matematisk problem?

Det finnes flere definisjoner på hva matematiske problem er, og forskere kan legge ulike betydninger i begrepet (Schoenfeld, 1992). Jeg støtter meg her til Sfard (2008) som sier at en bør ha en felles definisjon på ordene en bruker i forskningen. Jeg vil derfor forklare hva jeg i denne studien legger i et matematisk problem ut fra teori. Polya (1957) beskriver problemer som oppgaver som skal utfordre elevenes nysgjerrighet, og som ikke er rutineoppgaver. Ved rutineoppgaver mener han at elevenes interesse for problemene vil forsvinne. Hvis læreren utfordrer elevenes nysgjerrighet ved å gi problemer som passer til deres kunnskaper, og hjelper elevene å løse problemene ved å gi stimulerende spørsmål, kan en kanskje gi elevene muligheter for selvstendig tenkning (Polya, 1957). Blum og Niss (1991) definerer et problem som en situasjon som medfører åpne spørsmål som utfordrer elevene på den måten at det ikke finnes en umiddelbar metode, prosedyre eller algoritme for å svare på spørsmålet. Derfor kan en oppgave for noen være et problem, mens for andre kun en øvelse. Solvang (1992) definerer et problem på denne måten: ”En utfordring vil for en person være et problem dersom denne personen ikke har noen algoritme som vil gi en løsning når personen konfronteres med utfordringen” (s. 135). Schoenfeld (1992) definerer også problemløsningsoppgaver som problemer der det ikke finnes en enkel standardalgoritme for å løse problemet. Ut fra disse definisjonene vil et matematisk problem i denne studien altså være oppgaver som utfordrer elevene ved at de ikke har en umiddelbar metode som de kan bruke for å løse problemet. Problemløsningsoppgaver kan også være rike oppgaver, noe jeg i neste delkapittel vil beskrive.

2.1.2 Rike oppgaver

Ifølge Utdanningsdirektoratet (2015) kan problemløsningsoppgaver kalles rike oppgaver hvis de legger opp til at matematiske ideer til løsningen og forståelse av matematiske begrep skal kunne diskuteres med andre. En rik oppgave skal innvie ideer eller strategier, og være lett å forstå. Dette er fordi alle skal ha mulighet til å komme i gang med oppgaven. Altså skal oppgaven som kalles rik ha lav inngangsterskel (Utdanningsdirektoratet, 2015; Wæge & Nostrati, 2018). En rik oppgave krever anstrengelse og tar tid, og oppleves som en utfordring for elevene. Det skal være mulig å løse oppgaven på flere måter, derav ulike strategier og representasjoner. Strategiene, representasjonene og ideene skal kunne tas opp i en faglig diskusjon (Utdanningsdirektoratet, 2015). At rike oppgaver skal være utfordrende og gi mulighet for å bruke ulike løsningsstrategier støttes også av Wæge og Nosrati (2018). Alle elevene skal ha mulighet til å arbeide og jobbe etter egne interesser og nivåer, hvis oppgaven har lav inngangsterskel (Wæge & Nostrati, 2018). I tillegg skal oppgaven også kunne bygge bro mellom ulike faglige temaer, og hjelpe elever med å formulere nye problemer. Rike oppgaver er gode muligheter til å gi elevene erfaringer med problemløsning, utforsking, matematisk tenkning, samarbeid og kommunikasjon (Utdanningsdirektoratet, 2015). Wæge og Nosrati (2018) betegner rike oppgaver som LIST-oppgaver, altså oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde. Det skal være mulig å gi kognitivt krevende oppgaver til elever på ulike nivå.

Det er blitt utviklet et rammeverk bestående av fire nivåer av kognitive krav som oppgavene kan bli kategorisert i (Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009). Memoriserende oppgaver er det laveste kognitive kravet, og innebærer å reprodusere regler, fakta, definisjoner eller formler som en har lært tidligere. Slike oppgaver kan ikke bli løst ved hjelp av en prosedyre, fordi prosedyre finnes ikke, eller oppgaven vil bli løst på kort tid. Denne type oppgave har ingen sammenheng til begreper eller meningen som ligger bak reglene, faktaene, formlene eller definisjonene, da dette er reproduksjon (Stein et al., 2009). Det neste kognitive nivået, prosedyrer uten forbindelse, er oppgaver som omfatter bruk av prosedyrer eller algoritmer. Men her er det ikke sammenhenger med meningen bak de prosedyrene en bruker. Fokuset er rettet mot å få riktig svar i stedet for å utvikle matematisk forståelse, og krever ingen forklaringer (Stein et al., 2009). Tredje nivå inneholder oppgavetyper der det er prosedyrer med forbindelse. I slike oppgaver må elevene vise en dypere forståelse av konseptene og ideene. Slike oppgaver er vanligvis vist på flere måter, som for eksempel visuelle diagram og symboler. Å skape en sammenheng blant disse ulike representasjonene kan hjelpe med å utvikle mening. Oppgavene på dette nivået krever altså større anstrengelse enn forrige nivå, da elevene må finne ideene som ligger bak prosedyrene for å løse oppgavene og utvikle forståelse (Stein et al., 2009). Det høyeste kognitive kravet er oppgaver som heter å gjøre matematikk. Slike oppgaver krever en ikke-algoritmisk tenkning, der det ikke er vist en måte en skal gjøre oppgaven på, og dermed må elevene utforske og forstå matematiske konsepter, prosesser eller forhold. Det krever også av elevene at de monitorerer eller selvregulerer prosessen. Elevene må ha relevant kunnskap og erfaringer og bruke dette, og de må analysere oppgaven og sjekke informasjon som kan begrense løsningsstrategier og løsninger (Stein et al, 2009). De kognitivt krevende oppgavene kan fremme resonnering og problemløsning, og høye kognitive krav kan bidra til relasjonell forståelse og mange løsninger (Wæge & Nostrati, 2018).

Problemløsningsoppgaven skal kunne gjøre elevene nysgjerrige, gi konsentrert arbeid over tid, gi elevene utfordringer samt bidra til refleksjon rundt egen tenkning og arbeidsmåter. De rike oppgavene gir muligheter for å fremme en positiv klasseromkultur, der hele klassen arbeider sammen, og likevel arbeider de på sitt nivå. Plenumsdiskusjoner kan på denne måten bli verdifulle, da alle kan bidra og bli inspirert av hverandres strategier og resonneringer (Wæge & Nostrati, 2018).

2.1.3 Problemløsningsbegrepet og problemløsningsmodeller

Når det gjelder problemløsning, handler dette ifølge Solvang (1992) om å finne en måte, altså en strategi, for å klare og løse en ukjent situasjon. Denne situasjonen skal en altså ikke ha sett tidligere, og dermed har en heller ikke en metode for å løse problemet. Dette støttes også av Utdanningsdirektoratet (2018), som understreker at problemløsning er løsningsmetoder som elevene fremmer for å løse problemer de ikke er kjent med fra før. Problemløsning er altså hele prosessen med å løse et problem, fra elevene begynner å lese problemet til de har reflektert over mulige løsninger (Blum & Niss, 1991). På bakgrunn av dette, blir problemløsning i denne studien definert som hele denne prosessen med å løse matematiske problem, og derfor er Polya (1957), Borgersen (1994) og Mason et al. (2010) sine problemløsningsmodeller grunnlag for selve problemløsningsbegrepet slik det blir brukt i denne studien. Modellenes faser og trinn vil i denne studien også bli brukt som strategier som elevene benytter i løsningsprosessen. Jeg vil nå gi en nærmere beskrivelse av disse modellene.

Polyas problemløsningsmodell

Polya (1957) sin problemløsningsmodell består av følgende fire faser:

1. Forstå problemet
2. Lage en plan
3. Gjennomføre planen
4. Se tilbake

Polyas (1957) første fase går ut på at en skal forstå problemet. Han mener at problemene elevene tildeles må være på et nivå hvor elevene har mulighet til å klare og løse det. Elevene må kunne oppfatte at de forstår hva problemet dreier seg om, og dermed må språket være forståelig, og oppgaven godt formulert. I denne første fasen skal elevene ha evner til å finne ut hva som er det kjente og ukjente i problemet. De ulike delene bør settes fra hverandre. Klarer en å skrive dem ned? Polya (1957) nevner at å finne den ukjente, finne ut hva som er dataene og hva som er forholdene er viktige spørsmål en kan stille seg.

Fase to går ut på å lage en plan. Ideene har grunnlag i elevenes tidligere erfaringer samt kunnskap (Polya, 1957). Matematisk kunnskap hjelper i arbeidet med å finne for eksempel et mønster (Mason et al., 2010). Det som er ukjent er også her fokus, og elevene kan tenke på om de har funnet en ukjent tidligere, altså hente frem tidligere erfaringer og kunnskap. En må finne sammenhengen mellom dataene og det ukjente (Polya, 1957).

Polyas fase tre går ut på at en prøver ut planen som ble utviklet i fase to. En må sjekke om hvert steg en har gjort er riktig, og her inngår også å bevise at det er riktig. Siste fase går ut på å se tilbake og revurdere løsningen, samt reflektere over løsningsprosessen. En må sjekke resultatene og argumentene. Å prøve og løse problemet på en annen måte innkommer under siste fase, og se om en kan bruke resultatet eller metoden i andre problem (Polya, 1957). Her må en også bruke tidligere kunnskap for å løse problemet. Å se tilbake er en investering i fremtidige problemer en møter, og kan derfor danne koblinger som en kan trenge senere (Liljedahl, 2016).

Polya (1957) kommer med anbefalinger for spørsmål som kan stilles i arbeid med problemløsning. Spørsmålene er (1) "hvor skal jeg starte", (2) "hva kan jeg gjøre" og (3) "hva har jeg igjen for å gjøre slik"? Spørsmålene kan stilles i hver av fasene over, og være til hjelp i prosessen med å løse problemene. Borgersen (1994) har utviklet disse fire stegene til syv trinn, som er mer detaljert enn Polya sine. Jeg vil nå ta disse kortfattet for meg.

Borgersens syv trinn

1. Analysere og definere problemet
2. Modellering eller tegning
3. Kvalifisert gjetning ved prøving og feiling
4. Lage hypotese
5. Utvikling av bevis
6. Reflektere over løsning og løsningsprosesser
7. Generalisere og finne nye problemer

Å analysere og definere problemet er Borgersen (1994) sitt første trinn, og handler om hvorvidt en har forstått problemet, og meningen med ordene. Og videre om problemet gir mening. Det andre trinnet kaller Borgersen (1994) for modellering eller tegning. Han påpeker at tegning er viktig i problemløsning, og elevene må lage en modell. Kvalifisert gjetning ved prøving og feiling for å få en bedre forståelse av problemet er tredje trinn. Torkildsen (2017) påpeker at strategien prøving og feiling bør foregå systematisk, altså ikke tilfeldig. En systematisk prøving og feiling vil kunne lede frem til løsning. Borgersens (1994) fjerde trinn går ut på å finne hypotese i dette arbeidet med gjetningen. Det vil si å se etter ideer og formulere en generell løsning. I løpet av hypoteseformuleringen kan en videre få tanker om hvordan en kan bevise det, og det er dette som er femte trinnet. Blir det bevist, kalles hypotesen for et teorem. Får en ikke bevist, kan hypotesen være feil, og en må se tilbake på problemet (Borgersen, 1994). Schoenfeld (1992) hevder at når en arbeider med matematikk, må en først gjette, så bevise. Sjette trinn handler om å reflektere over løsning og løsningsprosesser. Syvende, og siste trinn kaller Borgersen (1994) å generalisere problemet og finne nye problemer. Her handler det om å samle ideene, og skape nye problemer av problemløsningsoppgaven.

Inngangsfase, gjennomføringsfase og vurderingsfase

Tredje problemløsningsmodell er utarbeidet av Mason et al. (2010) som deler inn prosessen med å arbeide med et problem i tre faser; entry, attack og review, som jeg velger å oversette til inngangsfasen, gjennomføringsfasen og vurderingsfasen. Disse tre fasene er koblet sammen med de nært forbundet matematiske tankeprosessene som kalles spesialisering, generalisering, conjecturing og convincing (Bjuland, 2002). I det videre vil jeg bruke hypotese og overbevisning for de to sistnevnte begrepene.

Det er i den første fasen, altså inngangsfasen den viktigste jobben i prosessen med å løse et problem blir gjort. Arbeidet som gjøres her danner grunnlag for en effektiv neste fase, som er gjennomføringsfasen, og dermed er det viktig å bruke nok tid i inngangsfasen. Fasen begynner når en får et spørsmål. En bør lese spørsmålet nøye, og finne ut hva det virkelig spørres om (Mason et al., 2010). En måte å strukturere dette arbeidet på, er å svare på følgende tre spørsmål: ”What do I know? What do I want? What can I introduce?” (Mason et al., 2010, s. 46).

Jeg har oversatt disse til Hva vet jeg? Hva vil jeg vite? Hva kan jeg introdusere? Mason et al. (2010) anbefaler å skrive ned det en vet. Hva vet en ut fra spørsmålet? Hva vet en av tidligere erfaringer? Kanskje har en sett noe lignende før, som kan være grunnlag for en idé. Spesialiseringsstrategien av å prøve ut enkle tilfeller er ofte et nøkkelord i denne første fasen. Dette kan hjelpe med å få fatt i spørsmålet, altså hva en vet. Videre er det viktig å finne ut hva en må gjøre, altså svare på det andre spørsmålet. Å rekonstruere spørsmålet og skrive det ned med egne ord kan være nyttig. I mange tilfeller er det nødvendig å introdusere for eksempel diagrammer eller tabeller for å organisere data og symboler som kan stå for ulike objekter. Disse strategiene er hjelp til spørsmål tre, ”hva kan jeg introdusere”, og videre hjelp i starten av problemløsningen (Mason et al., 2010). Det kan i denne fasen trekkes linjer til Polyas (1957) første fase, som også innbefatter å forstå problemet.

Selv om det er første og tredje fase som er viktigst i prosessen med å løse et problem, er den største anstrengelsen i gjennomføringsfasen. Denne tenkningen er i gang når en selv føler at en har forstått spørsmålet, og det har blitt ens eget. Fasen innebærer mer spesialisering samt generalisering (Mason et al., 2010). Prosessen med å generalisere handler ifølge Bjuland (2002) om spesifikke tilfeller som blir modifisert til generelle egenskaper ved å fokusere på noen aspekter av likhet. Altså handler det om å generalisere hypoteser eller problem fra spesielle situasjoner til en mer modifisert kontekst (Bjuland, 2002). Ved å spesialisere kan en finne mønster som kan lede til generalisering. Generalisering kan videre føre til hypoteser som kan sjekkes ved spesialisering (Mason et al., 2010).

Å skape hypoteser og overbevisende begrunnelser er også en del av denne fasen. Dette med å jobbe for å finne mønster er en kreativ handling, og matematisk kunnskap hjelper i arbeidet med å finne mønster. En bør prøve mange ulike tilnærminger og ideer. En kan ofte treffe på problemer, og ikke se noen utvei, og føle at en sitter fast (Mason et al., 2010). Dette mener imidlertid Mason et al. (2010) er positivt, da det gir en stor mulighet til å lære hvis en ikke gir opp. Hypoteseprosessen er en prosess av gjetting på om noe kan være sant, så undersøker en sannheten. Hypotesene fører til spørsmålene ”hvorfor kan det ikke bli gjort” og ” hva kan bli gjort?”. I arbeidet med hypotesene, er overgangen til å spørre ”hva kan bli gjort” et viktig aspekt. Grunnen til dette er at når en åpner opp det opprinnelige spørsmålet og generaliserer eller forandrer det, vil et større mønster kanskje dukke opp. Hypotesen bør videre sjekkes og overbevises. Hvis den kan bli overbevisende begrunnet, vil den utgjøre løsningen (Mason et al., 2010).

Overbevisning handler om å søke etter hvorfor og forklare hvorfor. Når en søker etter hvorfor, handler det om å finne noen grunner for sannheten av hypotesen. Å forklare hvorfor innebærer at en skal overbevise seg selv, en venn og en som er skeptisk om at en kan overbevise argumentene sine. En må da rettferdiggjøre hvert steg i argumentene som en kommer med. Dette er altså en utvikling av hypotesen (Mason et al., 2010). Disse prosessene i gjennomføringsfasen kan knyttes til Polyas (1957) andre og tredje fase. Når problemet er forlatt eller løst, er fasen ferdig, og da vil en tredje fase, vurderingsfasen inntre i prosessen (Mason et al., 2010).

Vurderingsfasen innebærer ifølge Mason et al. (2010) at en må se tilbake, forbedre og forlenge tankeferdighetene. Grunnen til dette er at en skal sette løsningen inn i en mer generell kontekst. Etter å ha sett tilbake, bør en sjekke hva en har gjort. Her inngår å sjekke argumenter, sjekke feil, og være sikker på at beregningene er slik en tenkte de skulle være. Hvis en ser feil, kan dette føre tilbake til inngangsfasen eller gjennomføringsfasen. En bør se konsekvenser av hypotesene for å se om de er rimelige. Viktig er det også å sjekke om en faktisk har svart på det opprinnelige spørsmålet. Videre må en reflektere over viktige hendelser. For å forbedre matematisk tenkning kan det være nettopp refleksjon som er den viktigste aktiviteten. Refleksjon er sterkt knyttet til å forlenge, altså å generalisere resultatet. Da ser en fremover for å sette resultatet inn i en bredere kontekst. På denne måten kan en få dyp forståelse for det en holder på med (Mason et al., 2010). Mason et al. (2010) påpeker at en bør skrive ned løsningen sin for noen andre om en skal ha større fordel av vurderingsfasen. Denne fasen blir av Polya (1957) kalt for se tilbake.

Som en ser, inngår de samme elementene i alle de tre nevnte problemløsningsmodellene. Fasene og stegene kan være til hjelp når en løser matematiske problem (Polya, 1957). Det er nå blitt beskrevet prosesser i problemløsningen, men jeg vil i denne studien bruke de overnevnte stegene også som strategier. Bjuland (2002) har skilt spesialisering og generalisering som prosesser og som strategier, og dette vil jeg gjøre ved å integrere dem også under problemløsningsstrategier i neste delkapittel.

2.1.4 Problemløsningsstrategier

En av Schoenfeld (1992) sine fem kategorier som er sentral under arbeid med problemløsning er problemløsningsstrategier. Elevene trenger å kunne ulike strategier for å løse et problem. En strategi defineres av Polya (1957) som hjelp til å utforske, og målet med strategier definerer han på følgende vis: "The aim of heuristic is to study the methods and rules of discovery and invention" (Polya, 1957, s. 112). Målet med (heuristiske) strategier er altså å finne metoder og regler for oppdagelse og oppfinnelse. Strategier kommer av erfaringer og av å se andre løse problemer (Polya, 1957). Slike problemløsningsstrategier kan hjelpe elevene å forstå et problem bedre i tillegg til å få fremgang i oppgaven (Kongelf, 2011).

Lompscher (referert i Liljedahl, 2016) deler mental aktivitet inn i innhold og prosess. Innholdet i problemløsningen består av konsepter, sammenhenger og prosedyrer, mens prosessen beskriver varierte kvaliteter slik som systematisk planlegging, uavhengighet, nøyaktighet og fleksibilitet. Dette er med andre ord psykologiske prosesser som oppstår når en løser problemer. De intuitive problemløserne har ofte høy mental fleksibilitet, og disse aspektene av mental fleksibilitet kan relateres til problemløsningsstrategier. De som er suksessfulle problemløsere, vil klare å redusere et problem til det viktige på en fornuftig måte. Dette kalles reduksjon, og eksempler vil være å lage informative figurer, tabeller og lignende. Med andre ord heuristiske hjelpemidler. De suksessfulle problemløserne klarer også å omvende tankene eller å reprodusere disse baklengs. Dette vil da gjøres automatisk i passende situasjoner. Dette kalles reversibilitet, og er også en problemløsningsstrategi. Å ha flere aspekter i tankene samtidig, og lett gjenkjenne disse, er tredje strategi som suksessfulle problemløsere har i minnet. I tillegg vil de også kunne endre antakelser, kriterier eller aspekter som de har i hodet for å prøve og finne en løsning. Å se problemet fra ulike perspektiv kan forhindre å sitte fast. Siste kvalitet kalles overføring. De suksessfulle problemløserne vil i større grad kunne overføre prosedyrer til andre kontekster. Her inngår hele tiden å kunne spore tilbake til det kjente fra det ukjente. Selv om dette er fleksible kvaliteter som kan hjelpe på veien mot en løsning, er det ikke alle nybegynnere som har disse evnene. Matematisk problemløsningskompetanse kan oppnås ved å fremme mental fleksibilitet, nemlig de overnevnte aspektene. For å oppnå dette må en utforme delhandlinger av problemløsning og anvende bevisste egnede problemløsingsstrategier (Lompscher, referert i Liljedahl, 2016).

Spesialisering og generalisering

Mason et al. (2010) beskriver flere strategier gjennom de tre ulike fasene i deres problemløsningsmodell. Spesialisering ses på som en strategi som er viktig både i starten ved arbeid med problemet, men også senere. Spesialisering betyr at en prøver ut noen spesifikke eller enklere tilfeller. For eksempel kan en prøve ut færre dimensjoner, variabler eller enklere tall. Flere spesialiseringer kan føre til et underliggende mønster (Mason et al., 2010). Strategien spesialisering forenkler problemet, mens generalisering er den tilsvarende strategien som har fokus på et generelt mønster (Bjuland, 2002). Generalisering innbefatter å bevege seg til et bredt spekter av tilfellene (Mason et al., 2010).

Visualisering, konstruere tabell, finne mønster, gjette og sjekke

Kongelf (2011) har i sin studie analysert strategier i matematiske lærebøker. Med dette har han tatt utgangspunkt i ulike matematiske strategier og beskrivelser for disse. Visualisering er en av hans analyserte strategier, som går ut på å skape en visualisering av den informasjonen en har for å representere problemet (Kongelf, 2011). Å tegne kan ifølge Bjuland (2002) kategoriseres som visualisering. Å tegne for eksempel en hjelpefigur er ifølge Polya (1957) en viktig strategi herunder, og spesielt viktig i arbeidet med å forstå problemet.

Andre strategi som brukes i Kongelf (2011) sin studie er utvikling av systematisk tabell, som innebærer at en konstruerer tabell eller liste som inneholder muligheter. Det kan her trekkes linjer til Mason et al. (2010) som beskriver introduksjon av diagram eller tabell som en strategi i inngangsfasen. Dette kan hjelpe med å organisere data.

Å se etter mønster er en strategi som ifølge Kongelf (2011) innebærer at en identifiserer mønster basert på observasjoner av felles egenskaper, variasjoner eller forskjeller i problemet. Schoenfeld (1992) er blant andre som nevner å se etter mønster som strategi i problemløsningen. Gjette og sjekke, en strategi som beskrives ved at en lager en gjetning på svaret og sjekker resultatet for å se om dette fungerer, er fjerde strategi beskrevet av Kongelf (2011). Denne strategien er også blitt eksemplifisert av Schoenfeld (1992).

Forenkle problemet

Jeg har under denne underoverskriften samlet noen strategier som kan tenkes å gå under å forenkle problemet. Å forenkle problemet er en strategi som ifølge Kongelf (2011) innbefatter å endre vanskelige tall eller situasjoner til enklere tall eller situasjoner uten å endre problemet matematisk. Dette kan ses i sammenheng med Mason et al. (2010) sin spesialiseringsstrategi. En annen strategi som fremkommer av Kongelf (2011) sin analyse av strategier i lærebøker, er å løse deler av problemet. Dette går ut på å dele problemet i mindre problemer, og løse ett av disse om gangen for å løse det opprinnelige problemet. Å tenke på et lignende problem er også en strategi som Kongelf (2011) kommer med. Her inngår å bruke metodene eller resultatene til et lignende problem for å løse ønsket problem. En kan også hente frem relaterte problemer og løse disse først (Kongelf, 2011). Polya (1957) hevder at hvis en ikke klarer å løse problemet, kan denne strategien være nyttig.

Monitorering og kontroll

Monitoreringsstrategien kan, slik som Bjuland (2007) bruker den, relateres til elevenes metakognitive aktiviteter gjennom løsningsprosessen, både når elevene monitorerer deres løsningsprosess og når de ser tilbake og sjekker overbevisende argument. Det kan trekkes linjer til Polya (1957) sin se tilbake-fase. Bjuland (2002) viser til flere studier som indikerer at monitorering og selvregulering er viktig for suksessfull problemløsning. Blant annet er monitorering en kontrollerende prosess som innebærer refleksjon, og dette er avgjørende for å gjøre matematikk (Bjuland, 2002). Wæge og Nosrati (2018) vektlegger metakognisjon som det å ”tenke på å tenke” eller ”lære om å lære” (s. 64), og det å være bevisst på og ha kunnskap om egen kognisjon. Når en løser problemer, handler det ikke bare om det en vet, men hvordan, når, og om en bruker det (Schoenfeld, 1992). Selv om elevene sitter med ressurser for å løse et problem, er det ikke sikkert at de har tilgang til nettopp disse ressursene (Carlson & Bloom, 2005).

Ifølge Schoenfeld (1992) handler strategien monitorering om at en går tilbake og for eksempel leser teksten en gang til, eller stopper opp for å være sikker på at en har forstått problemet. Dette med å kontrollere og vurdere fremgangen, og handle i respons til vurderingene er kjernen i selvreguleringen.

Under denne kategorien som er sentral i arbeid med problemløsning, viser Schoenfeld (1992) til forskning som er basert på to ulike problemløsere; noviser (elever) og erfarne matematikere. Schoenfeld (1992) viser her til figurer som beskriver deres ulike problemløsningsprosesser. Den ene illustrerer en typisk noviser. Elevene leser problemet og velger kjapt en metode for å løse det, og følger denne metoden uten fremgang. 60 prosent av løsningene i studien var beskrevet slik. Han hevder videre at hvis elever som arbeider med ordentlige problemløsningsoppgaver som er ukjente, så vil dette være den normale atferden. Schoenfeld (1992) påpeker at det ikke er vanlig forekomst av slik atferd, på grunn av at når elevene vanligvis jobber med rutineoppgaver, får de instrukser på teknikker de kan bruke. En matematikers forsøk på å løse et problem, derimot, brukte mye av tiden på å prøve og finne meningen med problemet. I stedet for å raskt finne en løsningsmetode og følge denne, ble det analysert, og undersøkelsen ble strukturert. Han/hun monitorerte løsningen underveis ved at han/hun fulgte metodene som ga fremgang, og forlot veier som ikke så ut til å gi løsning. Dette illustrerer en ekspert. Eksperten klarte ved hjelp av selvreguleringen å løse problemet, selv om han/hun hadde færre fakta og prosedyrer tilgjengelige som krevdes for å løse problemet (Schoenfeld, 1992).

Wæge og Nostrati (2018) viser til Pintrich sine tre sentrale typer metakognitiv kunnskap som lærer og elever kan arbeide med; kunnskap om strategier, oppgaver og seg selv. Kunnskap om strategier omhandler å klare og gjenkjenne samt reflektere over ulike typer strategier. Dette trengs for å kunne lære noe utenat, for å forstå viktig informasjon i en tekstoppgave, oppsummere eller gjøre om en problemstilling til sine egne ord. I tillegg er dette viktig for å organisere informasjonen som en sitter med. Dette kan eksemplifiseres med å lage tankekart, visuell oversikt over begreper og deres sammenheng, og lage notater. Å ha gode kunnskaper om strategier kan gjøre at elevene blir mer fleksible og at de klarer å endre strategiene sine om det trengs (Wæge & Nostrati, 2018). Videre trenger elevene kunnskap om oppgavene for å velge formålstjenlige strategier. Derfor må elevene kunne stille seg spørsmålene hvorfor en strategi skal velges, og hvordan den best kan brukes. Å ha kunnskap om seg selv betyr å ha kunnskap om egen læringsprosess og egne svakheter og styrker i denne læringsprosessen. Videre kan en styre, eller regulere, læringsprosessene sine, noe som kalles selvregulering (Wæge & Nosrati, 2018).

De overnevnte problemløsningsmodellene og problemløsningsstrategiene er, som også innledningsvis påpekt, kognitive strategier. Kognitivismen har mye forskning på problemløsning. Synet kjennetegnes ved at elevene ikke passivt tar imot informasjon, men gjennom sine aktiviteter selv konstruerer forståelsen for omverden. Elevene er selvstyrte innenfor dette synet, og skal helst gjøre erfaringer på egenhånd, uten voksnes forklaring (Säljö, 2001). Elevene tolker informasjonen de får og knytter dette sammen med det som de allerede vet, og reorganiserer de mentale strukturene. Eleven prøver seg altså frem selv (Dysthe, 2001). Undervisning gjennom 1960- og 1970-årene var i stor grad påvirket av dette synet (Alexander, 2008). Siden jeg i min oppgave ønsker å se på dialogene og problemløsningsstrategiene i gruppesamtaler, er jeg opptatt av kognisjon og metakognisjon i et kollektivt perspektiv. Med dette vil jeg nå løfte frem det sosiokulturelle perspektivet, der jeg også vil implementere noen dialogiske strategier. Schoenfeld (1992) peker selv på at det å gjøre matematikk i større grad vil bli sett på som en handling som er sosial og samarbeidende. Goos (2004) beskriver forskning gjort rundt 2000-tallet, som har den sosiokulturelle tilnærmingen i sentrum på ulike måter. Fokus er skiftet fra å se på matematikklæring som tilegnelse til å forstå matematikklæring som deltakelse i den diskursive og kulturelle praksisen i fellesskap. Han fremhever det sosiokulturelle perspektivet for å få forståelse av hvordan elevene kan bli trukket mot deltakelse i felleskap av matematisk praksis.

2.3 Problemløsning i et sosiokulturelt perspektiv

Flere har, som Goos (2004) påpeker, forsket på matematikk og utforsking i et sosiokulturelt perspektiv. Blant annet har Carlsen (2010) forsket på elever som samarbeider i smågrupper med problemløsning i temaet geometri, og ser på hvordan elevene approprierer kulturelle verktøy. Carlsen (2009) har studert rollen inskripsjoner (for eksempel grafer, tegninger og symbol) har i emnet geometri i smågruppesamtaler. Studien viser blant annet at inskripsjoner var viktige støttepunkter for elevenes argumenter i diskusjonen med de andre. Hans funn viser at inskripsjoner hadde en stor betydning for elevenes appropriering av de matematiske verktøyene som i dette tilfellet var i geometri. Det viste seg at elevene var avhengige av inskripsjoner for å løse problemet.

Som nevnt innledningsvis, er undervisningsmetodene mer i retning mot samarbeidslæring (Carlsen, 2008). Sosial samhandling mellom lærer og elev og elevene seg i mellom er av betydning i forhold til læring i klasserommet (Bjuland, 2002). Da jeg ønsker å se på elevenes strategier som kommer frem i smågruppedialogene, samt hvilken rolle det spiller at lærer kommer med hint i løpet av elevenes løsningsprosess, vil det være naturlig å ha fokus på den sosiokulturelle tradisjonen, hvor Vygotsky er kjent teoretiker. Vygotskys teori har fått større betydning i skolen de siste årene, for eksempel er det økende sosial organisering i skoler (Wittek, 2012).

Vygotskys (1978) sosiokulturelle læringsteori går ut på at en lærer i samspill med andre. En lærer av å samhandle med andre først, så tilegner en seg det individuelt, altså internaliserer. En operasjon som er en ekstern aktivitet vil gjenskapes og så begynne å skje internt. Internaliseringsprosessen består av en mellommenneskelig prosess som er forvandlet inn i en intrapersonal prosess. Funksjonene i den kulturelle utviklingen vises to ganger; først på et sosialt nivå, så på et individuelt nivå. Den kommunikative talen går innover og blir grunnlaget for elevenes indre tale (Vygotsky, 1978). En overtar og tar til seg kunnskaper fra andre mennesker i samspillsituasjoner, altså en approprierer (Säljö, 2001). Sosiokulturell forskning behandler kommunikasjon, tenkning og læring som prosesser formet av kultur, der kunnskapen deles og forståelser er felles konstruert. Den kommunikative handlingen kommer av kulturelle og historiske faktorer. Tenkningen og læringen, samt utviklingen kan ikke forstås hvis en ikke tar menneskets sosiale og kommunikative natur i betraktning. Et sosiokulturelt perspektiv gir mulighet for at pedagogisk suksess eller fiasko kan forklares av kvaliteten på den pedagogiske dialogen. Altså ikke bare ved å vurdere de individuelle elevenes evner eller lærers ferdigheter, men dialogen (Mercer & Littleton, 2007). Når en samhandler verbalt, overføres kunnskapen som utvikles innenfor en læringskultur, og blir på denne måten en del av det enkelte individs repertoar. Med andre ord internaliseres (Wittek, 2012) kunnskapen som utvikles i fellesskap.

2.3.1 Medierende verktøy

Säljö (2001) er opptatt av at mennesker er biologiske vesener som lever i en sosiokulturell virkelighet, der en har tilgang til hjelpemidler og verktøy som kan få menneskene utenfor grensene som de biologiske forutsetningene gir. En tilegner seg kunnskap og dannes ved å være deltakende i kulturelle aktiviteter, og tar i bruk redskaper som kulturen legger til rette for. Redskaper kan være språklige og fysiske ressurser som er tilgjengelige. Disse bruker en da for å forstå omverden (Säljö, 2001). Mennesker tar for seg medierte handlinger. Det vil si ressurser overføres gjennom det redskapet som en benytter. Prestasjoner må ses i lys av hvilke medierende verktøy som inngår i den handlingen som utføres. Samtalestrukturer, skriveredskaper, datamaskiner og kalkulatorer er eksempler på redskaper som spiller en viktig rolle i undervisningen. Redskapene er utviklet gjennom historien (Wittek, 2012). Medierende verktøy er altså formidlingsverktøy, og også personer kan være medierende verktøy (Dysthe, 2001).

Carlsen (2008) påpeker at et viktig element i problemløsningen er betydningen av medierende verktøy. Det vil altså si hvordan elevene utnytter disse verktøyene og bruker de kulturelle verktøyene, som for eksempel tekstbøker, matematiske symbol, inskripsjoner og grafiske kalkulatorer. Han viser til en likesidet trekant, der hjørnene symboliserer subjekt, objekt og medierende verktøy, og understreker med denne figuren det nære forholdet mellom disse komponentene. Subjektet er elevene, objektet er problemløsningsoppgaven, og medierende verktøy og handlinger er de verktøyene som elevene bruker under problemløsningen. Eksempler kan være muntlige diskurser, skreven tekst og inskripsjoner, der eksempel på inskripsjoner er algoritmer, grafer, tabeller og tegninger. Når inskripsjoner blir brukt sammen med språket, blir dette medierende verktøy som elevene kan bruke når de kommuniserer og løser problemene (Carlsen, 2008).

Kommunikasjonen til elevene imellom er viktig for å appropriere de nye verktøyene (Carlsen, 2008). Appropriering er ifølge Bakthin (referert i Carlsen, 2008) en individuell prosess, der en integrerer noe som er noen andres, for eksempel ord, til egen diskurs. Men appropriering er ifølge Carlsen (2008) ikke imitering. Carlsen (2010) viser til fem aspekter i approprieringen av verktøyene. Det første aspektet går ut på at elevene må bli involvert i en felles aktivitet. I tillegg må de danne et felles fokus. De må også utvikle felles forståelse, og de må kunne forvandle handlinger og ytringer, og bruke eksisterende kulturkunnskap fra klasserommet i problemløsningen i smågrupper (Carlsen, 2010). Det er altså viktig å utvikle delt forståelse gjennom felles aktivitet i smågruppene (Carlsen, 2008). Inskripsjoner kan være med på å danne felles aktivitet og felles fokus i gruppa (Carlsen, 2009). Læring og utvikling vil ifølge Säljö (2001) skje gjennom å mestre ulike verktøy.

Språket vektlegges som et særlig viktig verktøy i barns læring og utvikling (Alexander, 2008; Mercer & Littleton, 2007; Säljö, 2001; Vygotsky, 1978). Mercer og Littleton (2007) hevder samtidig at språket også er lærerens viktigste pedagogiske verktøy. Handlinger, grafiske representasjoner og ulike typer symbol er noe mennesker sammen kan bruke for at ting skal gi mening, i tillegg til språket (Mercer & Littleton, 2007). Barnets tale er like viktig som handlingen som barnet gjør for å utføre aktiviteten. Det er talen og handlingen som utgjør den psykologiske funksjonen rettet mot løsningen av problemet en har. Jo mindre direkte løsningen av problemet er, og jo mer komplekse handlinger som kreves, desto mer betydning har talen. Språket oppstår som et kommunikasjonsmiddel mellom barnet og det miljøet som barnet er i. Den interne talen og de reflekterende tankene kommer fra samhandlingen mellom barnet og andre personer i miljøet (Vygotsky, 1978). Det er gjennom språket at de som samtaler oppnår en gjensidig forståelse og kommer til en enighet (Gadamer, 2010).

2.3.2 Den proksimale utviklingssonen

Vygotsky (1978) mener videre at utviklingen til barn skjer ved hjelp av en annen person; veien fra objektet til barnet og fra barnet til objektet, vil passere gjennom denne personen. Den proksimale utviklingssonen er avstanden mellom det eleven klarer å få til alene og det som kan klares sammen med en veileder, for eksempel en lærer eller en person som er dyktigere enn seg selv. Vygotsky (1978) beskriver denne proksimale utviklingssonen som "It is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers" (s. 86). Vygotsky (1978) påpeker at det som eleven kan gjøre med veiledning, eller hjelp fra lærer i dag, er eleven i stand til å klare selv i morgen. Imitering kan være et stikkord her, men det matematiske problemet må ikke være på et høyere nivå enn eleven kan klare (Vygotsky, 1978). Med veiledning kan en ofte løse problemer som kan være vanskelige å gjøre selv. Støtten kan være at elevene får hjelp til å finne ut hva det blir spurt om i problemløsningsoppgaven, eller å dele problemet i mindre deler (Säljö, 2001).

2.3.3 Dialogisk perspektiv

Dialog er en samtale mellom to parter (Wittek, 2012), og mening blir skapt i interaksjonen mellom de to partene (Dysthe, 2001). Dialoger er avhengige av at deltakerne har en felles forståelse for hvordan et samspill kan skje, og deltakerne i dialogen må også ha oppfatninger om hva som passer å si og gjøre, og hva som ikke passer (Mercer & Littleton, 2007).

Ifølge Alexander (2008) er dialog et av de viktigste verktøyene for læring, og bruken av åpne spørsmål er viktige. En problemløsningsstrategi i gruppesamtaler kan være å stille åpne og utfordrende spørsmål (Bjuland, 2002, 2007). Gadamer (2010) understreker at det er vanskeligere å stille spørsmål enn å svare på spørsmål, i forhold til Sokrates sin dialog. Men for å kunne spørre om noe, må en ønske å vite, som betyr at en må vite at en ikke vet. Det som en spør om, må også være åpent, slik at svaret ikke er fastsatt (Gadamar, 2010). Gadamer får frem viktigheten av spørsmål og responser i dialogen (Bjuland, 2002). Bjuland (2002) hevder videre at problemløsningsstrategien å stille åpne spørsmål kan bidra til å komme med overbevisende argument i prosessen med å arbeide med problemer. I tillegg kan spørsmål stimulere endring samt gi støtte for elevenes gjenoppfinnelse. Spørsmål som ”hva gjør du” eller å danne uttalelser som ”hun har tegnet en sirkel” er en invitasjon for alle elevene på gruppa til å delta i diskusjonen, og dette kalles ifølge Bjuland (2002) monitorerende ytringer. Dette handler om at en monitorerer det andre elever gjør og stiller spørsmål eller kommer med uttalelser på en måte som gjør at alle på gruppa er bevisst over ideene.

Viktige egenskaper for dialogiske klasserom består av fem prinsipper. Altså er dialogisk undervisning kollektiv, gjensidig, støttende, kumulativ og målbevisst. Med kollektiv menes at lærer og elevene gjør oppgaver sammen som en gruppe eller klasse, heller enn individuelt. Gjensidighet omfatter at elevene og læreren hører på hverandre, deler ideer og ser alternative synspunkter på ting. Å være støttende går ut på at elevene artikulerer ideene fritt, uten å være redd for at svarene er feil, og hjelper hverandre med å komme til en felles forståelse. Med kumulativ menes at læreren og elevene bygger på egne og hverandres ideer og danner dem til en sammenhengende linje av tenkning. Målbevissthet handler om at læreren legger til rette for dialogisk undervisning med sikte på bestemte pedagogiske mål (Alexander, 2008).

Samarbeid om problemløsning

Når elevene jobber sammen for å løse problemer tenker de sammen (Mercer & Littleton, 2007). Når elevene jobber med problemløsning, er det et dynamisk engasjement med ideer blant partene, og språket er hovedverktøyet for å etablere felles forståelse, og teste ut mulige løsninger og prøve å komme til enighet. Forskningen til Mercer og Littleton (2007) viser at når lærerne fokuserer på utvikling av barns språk som verktøy for resonnering, kan dette føre til betydelige forbedringer i forhold til kvaliteten på barnas problemløsning og den faglige oppnåelsen.

I matematikkutdanningslitteraturen finner en tre ulike vilkår som har blitt brukt for å forstå hvordan mennesker samhandler med hverandre gjennom problemløsning (Carlsen, 2008). Tre måter av samarbeid når en arbeider med matematiske problem er: Ekspert-nybegynner samarbeid, peer-samarbeid og gruppesamarbeid med tre eller flere deltakere (Bjuland, 2002). Ekspert-nybegynner samhandling går ut på at læreren stimulerer læringsprosessen (Bjuland, 2002). Læreren har her en monitorerende rolle, og foreslår hvilke strategier elevene kan bruke, eller når det er hensiktsmessig å bruke modeller og inskripsjoner og lignende. Eleven løser en oppgave sammen med en mer kompetent annen, enten lærer eller en annen elev, som eleven ikke ville klart alene (Carlsen, 2008). Når en slik prosess foregår, kaller Vygotsky (1978) det for den proksimale utviklingssonen, som er den avstanden på hva eleven klarer alene og hva han/hun klarer med veiledning. Lærerens oppgave er her å gi støttende kommentarer som skal engasjere elevene og stimulere dem i arbeidet med problemløsningen (Bjuland, 2002).

I peer-samarbeidet, derimot, er det to omtrentlig like elever som arbeider sammen med et problem som er utfordrende, og som ofte har en vanskelighetsgrad høyere enn det elevene klarer alene. Gruppesamarbeid er tredje samhandlingsmåte, som brukes når tre eller flere elever løser problemer sammen (Carlsen, 2008). Innenfor denne type samhandling, er det flere stemmer som viser autoritet (Bjuland, 2002).

Wæge og Nosrati (2018) peker på at hvis gruppearbeidet skal være hensiktsmessig, bør gruppene struktureres og veiledes, slik at alle elevene bidrar til samarbeid og ikke bare én, eller ingen, tar styringen. IGP-modellen er en måte å arbeide på ved problemløsningsoppgaver når en skal ta fatt i gruppearbeid. Individuell tenkning og arbeid først (I). Jobber så i grupper (G). Til slutt avsluttes det med diskusjon i plenum (P). Den individuelle tenkningen kan variere i forhold til oppgaven. Ved denne modellen blir både behovet for individuelt arbeid og samarbeid ivaretatt (Wæge & Nosrati, 2018).

2.3.4 Lærers veiledning i problemløsningsprosessen

I elevenes problemløsningsprosess er det viktig at læreren veileder dem i tillegg til at elevene opplever autonomi. Å få frem hva elevene tenker, samt stille spørsmål til dem er viktig i veiledningen for å fremme læring (Wæge & Nosrati, 2018). Det finnes ulike typer veiledning fra lærer på forskjellige måter for ulike formål. Spørsmål kan tilbakekalle, lokke frem, sjekke, undervise, utvikle eller få til. Spørsmålene kan videre være både åpne, lukkede eller ledete, klare eller forvirrende (Alexander, 2008). Drageset (2014) har studert lærers kommentarer og rollen disse kommentarene spiller i kommunikasjonen i matematikk. Eksempler på verktøy og teknikker som læreren i studien gjorde for å få elevstrategier synlige, og få elevene til å vurdere, foreslå og sikre fremgang mot en konklusjon, eller omdirigere til andre tilnærminger var korrigerende spørsmål, gi råd om ny strategi og sette kommentarer til side. Å demonstrere løsningen, initiere til åpen fremgang og forenkle informasjonen var også noe de gjorde. Å be om forklaringer, spørre hvorfor-spørsmål, og sjekke om elevene kan bruke regler til andre problemer er også vist som lærerkommentarer (Drageset, 2014). Drageset (2015) understreker at alle elevkommentarene kan spille en viktig rolle i utviklingen av matematisk kunnskap.

Elevene tilegner seg så mye erfaring som mulig alene. Likevel er lærerens viktigste oppgave å hjelpe elevene, men en må ikke hjelpe for mye. Læreren skal hjelpe elevene med å løse problemet på egenhånd, og hjelpe dem å utvikle evnen til å løse fremtidige problemer selv. For læreren er det viktig å se problemet fra elevenes ståsted, og prøve å forstå hvordan elevene tenker. Videre bør læreren stille spørsmål som kan ha oppstått av elevene selv. For å hjelpe på en effektiv og naturlig måte, blir det nødvendig å stille samme spørsmålene på ulike måter for å indikere de samme stegene. Eksempler på hva læreren kan spørre om er ”hva er det ukjente?”, ”hva er det nødvendige?”, ”hva ønsker du å finne ut?”. Med andre ord blir dette ledende spørsmål. Disse spørsmålene bør være generelle (Polya, 1957).

De overnevnte forslagene til spørsmål, er generelle spørsmål som ifølge Polya (1957) kan stilles til ethvert problem. Hvis læreren veileder på denne måten, kan elevene selv ta i bruk disse spørsmålene ved senere, liknende situasjoner. Imitasjon og praksis er viktig for å løse problemer. Læreren må lage en atmosfære for problemløsning, og gi mange muligheter for nettopp etterligning og praksis. Da kan læreren stille slike spørsmål som tidligere eksemplifisert, ofte og på en naturlig måte. Når læreren løser problemer foran klassen, er det like viktig med disse spørsmålene. Da må læreren spørre samme spørsmål høyt som en ville spurt når en hjelper elevene i sine løsningsprosesser. En slik veiledning vil hjelpe elevene i arbeidet med å bruke spørsmål på riktig måte (Polya, 1957).

Læreren kan, for å fremme at det er flere måter å løse et matematisk problem på, oppmuntre elevene til å utvikle egne løsningsstrategier og å løse oppgavene på flere måter. Læreren kan danne sosiale normer for diskusjoner, der det forventes at elevene skal begrunne samt argumentere for sine løsningsstrategier. Spørsmål som ”kan du forklare hvordan du tenker?”, ”kan du forklare hvorfor det blir slik?” og ”er det mulig å løse oppgaven på andre måter?” kan bidra til at elevene kan få en forståelse om at det faktisk er flere måter å løse de matematiske problemene på (Wæge & Nosrati, 2018).

Wæge og Nosrati (2018) viser til Chaptin, O’Commor og Anderson sin utvikling av noen samtaletrekk som kan støtte klasseromsdiskusjoner. Å gjenta det eleven sier og la eleven bekrefte om det er riktig eller ikke er et samtaletrekk. Eksempler kan være ”så du sier at…?”. Repetering er det neste trekket. Da kan en spørre eleven om å gjenta en annen elev sin resonnering, og en kan altså spørre ”kan du gjenta hva han eller hun sa med egne ord?”. Tredje samtaletrekk, resonnere, går ut på om en er enig eller uenig, og hvorfor en er enig eller uenig. Altså spør en om elevenes resonnering på andres resonnering. Å tilføye, altså å spørre elevene om de har noe å tilføre til det de har snakket om er fjerde trekk. Dette får elevene til å delta videre i diskusjonen. Femte punkt er å vente, la eleven få tenke seg om før en sier noe. Å la elevene snakke med den de sitter ved er et trekk som kan benyttes. Siste samtaletrekk som læreren kan bruke i klasseromdiskusjoner, kalles endre. En kan da spørre elevene om de har endret tenkingen. På denne måten kan elevene få muligheten til å endre deres tankegang etter å kanskje ha fått et nytt syn.

I henhold til strategibruk, kan strategier beskrives på en handlingsorientert måte ved at en stiller de riktige spørsmålene. Elevene bør alltid få muligheten til å finne deres strategier og notere dem for seg selv. Nøkkelspørsmål læreren kan stille for bruk av problemløsningsstrategier, kan være ”hvordan kan en illustrere og strukturere problemet?” og ”hvordan presentere det på en annen måte?”. Disse strategiene innenfor problemløsning oppstår ikke til vanlig automatisk (Liljedahl, 2016).

Lester, Garofalo & Kroll (referert i Schoenfeld, 1992) viser også til noen retningslinjer for hvordan en kan hjelpe elevene med problemløsning før, under og etter arbeidet, ved å fokusere på metakognitive aspekter ved den matematiske tenkningen. Før løsningen av problemet påpekes det at en skal lese problemet, diskutere ord og fraser som eleven ikke forstår. Dette for å illustrere viktigheten av å lese nøye. Videre kan en ha klassediskusjon sammen for å se på viktigheten av å forstå et problem som skal løses. Hensikten med dette er å fokusere på det viktige og klargjøre prosessen. Å ha klassediskusjon om mulige problemløsningsstrategier er også et punkt som blir tatt opp før problemløsningen. Dette for at elevene skal se mulige måter en kan løse et problem på.

Under problemløsningen, altså mens elevene løser problemer, er det også noen punkter som kan hjelpe læreren å hjelpe elevene med løsningsprosessen. Det første punktet her er å observere og spørre elevene hvor de er. Hensikten med dette er å diagnostisere styrker og svakheter. Å gi elevene hint er neste punkt. Dette er for å hjelpe elevene videre. Videre i prosessen kan en gi elevene problemutvidelser for de som trenger det. Dette har sin hensikt i at de som er fort ferdige skal utfordres til å generalisere. Siste punktet som er under problemløsningsprosessen, er å kreve fra elevene at de som får en løsning svarer på spørsmålet. Med dette kan elevene se over arbeidet som er gjort, og la dem se om det virker fornuftig. Etter problemløsningsøkten bør elevene vise og diskutere løsningen. Ved å gjøre dette kan de se ulike strategier. Å relatere til tidligere løste problemer eller utvidelse av problemet er neste veiledningspunkt i ettertid av arbeidet med problemet. Da kan en demonstrere generelle løsningsstrategier. Det aller siste punktet går ut på å diskutere spesielle egenskaper, som for eksempel bilder. Med dette kan en vise elevene hvordan slike egenskaper kan påvirke tilnærmingen (Lester et al., referert i Schoenfeld, 1992).

3 Metode

I dette kapittelet vil jeg gjøre rede for metodene jeg har benyttet meg av for å svare på forskningsspørsmålene, samt begrunnelser for valgene. Forskningsspørsmålene forsøkes å bli svart på gjennom klasseromsobservasjoner og semistrukturerte intervjuer av lærer og gruppeintervjuer av elever. I tillegg vil elevarbeid fra bøker bli brukt. I kapittelet vil jeg beskrive datainnsamlingen grundig. Videre i metodedelen blir analyse av datamaterialet, forskningsetiske vurderinger og metodiske betraktninger diskutert. Datainnsamlingen har jeg utført sammen med en medstudent.

3.1 Kvalitativ case-studie

Kjennetegn på kvalitative metoder er å innhente mye informasjon om begrenset utvalg (Christoffersen & Johannessen, 2012). På grunn av oppgavens omfang, samt forskningsspørsmål, er kvalitativ metode valgt. Jeg ønsker en forståelse av de sosiale fenomenene i klasserommet (Thagaard, 2013) og få en innsikt i elevgruppers problemløsningsstrategier, samt hvilken rolle det spiller at læreren kommer med hint underveis i løsningsprosessen. Jeg vil altså observere noe som er målbart, elevenes problemløsningsstrategier, både med og uten veiledning fra lærer. Kvalitative metoder har som mål å gå i dybden, og betydning er essensielt (Thagaard, 2013). Da mitt fokus er å gå i dybden i elevenes strategier for å kunne identifisere disse, er det formålstjenlig med kvalitativ tilnærming, nærmere bestemt case-studie. Kjennetegn på case-studier er at en har fokus på nettopp det å studere mye informasjon om få enheter (Thagaard, 2013). Fordelen med case-studie er at en kan komme innpå virkelige situasjoner, og en kan teste synspunkter direkte i forhold til fenomener som utvikles i praksis (Flyvbjerg, 2006). Jeg ønsker i denne studien å komme innpå virkelige problemløsningssituasjoner.

3.2 Utvalg

Jeg og min medstudent tok kontakt med en praksisskole på Vestlandet. En lærer med 14 års erfaring i yrket sa seg villig til å la oss observere og intervjue henne og sin klasse på 9. trinn. Vi valgte derfor å fokusere på én lærer og én klasse, og fulgte denne klassens matematikktimer over to uker i februar. Denne læreren har selv tatt master i matematikkdidaktikk, og har tidligere arbeidet med problemløsning i sine klasser, og har derfor kunnskaper om emnet. Klassen består av 26 elever, som da vil bli regnet som utvalg i denne studien. Hovedfokus er imidlertid på to elevgrupper á tre elever, som læreren valgte ut til oss på grunnlag av ulikt faglig nivå. Disse kaller jeg for gruppe A og gruppe B. Gruppe A består av tre elever med sterkere faglig bakgrunn, og elevene har fått de fiktive navnene Siri, Mari og Liam. Gruppe B består av elever med fiktive navn Pia, Nils og Ole. Begge gruppene vil være mine deltakere i studien, på grunn av deres ulik bruk av strategier og deres ulikt faglige nivå.

3.3 Oversikt over datagrunnlaget

Vi hadde et møte med læreren i forkant av datainnsamlingsperioden, og planla strukturen i de seks matematikktimene vi fikk til rådighet. Datamaterialet består av klasseromsobservasjon med videoopptak av seks undervisningsøkter, lærerintervju før og etter observasjon samt to gruppeintervju av elever, i tillegg til elevbøker. Tabellen nedenfor gir et kort og oversiktlig bilde over toukersperioden.

Dato	Når?	Hva?	Hvordan?
	Før datainnsamling.	Planlegging av forskning for to uker med lærer.	Møte med lærer på skolen.
07.02	Før observasjon	Pre-intervju med lærer.	Møtte lærer på skolen.
11.02	1. undervisningsøkt.	Observasjon av hel klasse.	Samtale i hel klasse, innføring av problemløsningsbegrepet, Polyas modell, tips til strategier. Oppgavearket ble delt ut, og lærer igangsatte en felles oppgave.
11.02	2. undervisningsøkt.	Observasjon av grupper.	Problemløsningsoppgave 1 og diskusjon i grupper.
13.02	3. undervisningsøkt.	Observasjon av grupper.	Problemløsningsoppgaver og diskusjon i grupper.

18.02	4. undervisningsøkt.	Observasjon av grupper.	Problemløsningsoppgaver og diskusjon i grupper.
20.02	5. undervisningsøkt.	Observasjon av grupper.	Problemløsningsoppgaver og diskusjon i grupper.
20.02	6. undervisningsøkt.	Observasjon av hel klasse.	Oppsummering av oppgave 1 og 5, diskusjon i plenum.
21.02	Etter observasjon.	Intervju av elever.	Gruppeintervju elevgruppe A på skolen.
21.02	Etter observasjon.	Intervju av elever.	Gruppeintervju elevgruppe B på skolen.
21.02	Etter observasjon.	Post-intervju av lærer.	Møtte lærer på skolen.
	Under og etter observasjon.	Innsamling av elevbøker.	Lærer samler inn.

Tabell 1: Oversikt over innsamlet empirisk materiale.

I første undervisningstime ble vi, sammen med læreren, enige om at vi studenter skulle presentere oss og forklare kort om prosjektet til elevene. Vi bestemte oss også for at læreren skulle innføre problemløsningsbegrepet, og knytte dette til litteraturen til Polya (1957), samt gi forslag til strategier elevene kunne benytte. I tillegg var det viktig for oss at læreren gjennomgikk oppgavearket som vi hadde laget (Vedlegg 6) og satte elevene i gang med oppgave 1 som var obligatorisk, deretter problem 2. Dette tenkte vi var viktig for å få alle til å komme i gang med oppgavearket.

3.4 Observasjon og egen rolle i prosjektet

Observasjon brukes når en har som mål å se på hvordan personer forholder seg til hverandre, og se på personenes atferd, altså å se på praksisen i dagliglivet (Thagaard, 2013). Som det inngår av mine forskningsspørsmål, er jeg interessert i elevenes strategibruk i smågruppedialoger, samt hvilken rolle det spiller at læreren kommer med hint underveis i problemløsningsprosessen. Dermed er jeg nettopp interessert i hvordan elevene, også med veiledning fra læreren, forholder seg til hverandre. For å best mulig svare på forskningsspørsmålene er dermed observasjon valgt som primærmetode, der min rolle var lite deltakende. Jeg var til stede i felten, men det eneste jeg gjorde i klasserommet var å stå bak det ene kameraet. Jeg presenterte meg før innsamling av data begynte, og påpekte at jeg ikke var villig til å snakke med elevene, og at jeg kun var interessert i det matematiske som ble sagt og gjort. Imidlertid har jeg i stor grad vært med på å bestemme opplegget for toukersperioden samt laget oppgavene sammen med medstudent, og derfor kan min rolle samtidig være deltakende. Jeg la føringer for at alle elevene skulle gjøre både oppgave 1 og 2, og deretter velge oppgaver selv.

Observasjonen ble utført i 9. klasse, og klassen besto av 26 elever. Til sammen tok vi videoopptak av seks undervisningsøkter som varte 45 minutter hver. Vi brukte to kamera, derav ett hadde fokus på lærerens undervisning, og ett filmet elevene. Med andre ord sto ett kamera bak i klasserommet og ett foran. Dette for å få med alle elevene og læreren. Etter at felles gjennomgang var ferdig (1. undervisningsøkt), snudde vi kameraene til to elevgrupper, gruppe A og B, og jeg og min medstudent filmet hver vår gruppe. De satt på hver sin side i klasserommet, mens andre grupper fikk arbeide andre steder i rommet og utenfor klasserommet. Det er disse to elevgruppenes strategier og dialoger som er grunnlaget for data i min studie, i tillegg til læreren. De gangene læreren hadde felles introduksjon før timene startet, og i slutten, lot vi kameraene fokusere på læreren og elevene i hel klasse. Også i den siste undervisningsøkten ble kameraene flyttet til læreren som hadde felles gjennomgang. Med andre ord ble det observert både i grupper og i hel klasse.

Det ble brukt lydopptaker på gruppene i tillegg til video, i tilfelle det skulle bli uklar tale på videoene eller at noe uforutsett skulle skje med kameraene. I tillegg til videoobservasjon skrev jeg logg etter hver gang vi hadde observert. Her oppsummerte jeg timene og det jeg så av strategibruk, både med og uten veiledning av læreren. Dette for å gjøre det enklere da jeg skulle velge ut episoder. Dette med å skrive notater i løpet av forskningsprosessen, kan ifølge Thagaard (2013) hjelpe med å bearbeide erfaringer underveis, noe som jeg synes var til hjelp i det videre arbeidet.

3.5 Intervju

"Det kvalitative forskningsintervjuet søker å forstå verden sett fra intervjupersonenes side" (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 20). Vi ønsket at læreren og elevene skulle kunne forklare hvordan de opplevde de enkelte problemene, og måten de arbeidet på. I tillegg ville vi at de skulle få muligheten til å reflektere over de brukte strategiene etter at toukersperioden var over. Vi ønsket å få utdypet elevenes problemløsningsarbeid. Med dette er intervjusamtaler formålstjenlig (Thagaard, 2013). Ved å ha intervju i tillegg til observasjon, kan observasjonsepisoder utdypes, og muligens forstås bedre.

Alle intervjuene er semistrukturerte, det vil si at de er delvis strukturerte med en intervjuguide (Vedlegg 4 og 5). Med andre ord hadde vi klare spørsmål om temaene utarbeidet på forhånd, men likevel var vi åpne for å få utdypet andre relevante ting som intervjupersonene kom med, og som ikke var planlagt på forhånd (Thagaard, 2013; Postholm & Jacobsen, 2011). I tillegg varierte vi oppfølgingsspørsmålene i forhold til svarene vi fikk. På denne måten kan intervjusituasjonen medføre mer gjensidighet, og intervjupersonene kan føle at de blir forstått i forhold til at de får gjensvar (Thagaard, 2013). Etter Kvale og Brinkmann (2015) sin anbefaling, prøvde vi å lage korte og enkle spørsmål.

3.5.1 Lærerintervju

Vi hadde to lærerintervju, før og etter observasjonen. Intervjuet før datainnsamlingen (pre-intervju) var ment for å få bakgrunnskunnskap om læreren og klassen. Vi ønsket lærerens egne synspunkter på problemløsning og matematikk, og hvordan hun praktiserer matematikktimene. Her tenkte jeg på forhånd, med støtte i Sfard (2008), at det var viktig med en lik oppfatning av hva begrepet problemløsning betyr. I intervjuet kom det frem at for denne læreren er problemløsning å løse problemer, og at et problem er noe en i utgangspunktet ikke har løsningen på, eller vet hvordan en kan løse. I matematikken betyr dette for eksempel en matematisk oppgave som en ikke nødvendigvis vet hvordan en skal løse, og som gjerne ligger høyere i nivå enn det en er på, men som en likevel kan klare å løse på ulike måter.

I post-intervjuet med læreren, tok vi frem episoder og snakket om undervisningsøktene som var observert. Vi ba læreren reflektere over enkelte episoder som vi nevnte, og spurte om hun kunne komme med eksempler på ting som hun hadde oppdaget i forhold til gruppenes problemløsningsarbeid, strategier og motivasjon. På forhånd hadde vi tenkt at læreren skulle reflektere over videoepisoder, noe som kunne vært nyttig. Da kunne læreren selv sett videoene samtidig som hun reflekterte. Dette ble ikke gjort av den grunn at vi plutselig fikk et annet tidspunkt for intervju med henne, og dermed hadde vi ikke videoepisodene tilgjengelige. På en annen side hadde vi intervju kort tid etter selve undervisningen, noe som jeg ser som en fordel på grunn av at læreren da hadde episodene ferskt i minnet. Hun husket strategiene som elevene brukte på gruppene, og hvordan hun veiledet dem. Vi fikk dermed refleksjoner over toukersperioden om ting hun hadde lagt merke til rundt på gruppene og strategier elevene benyttet seg av både med og uten veiledning.

3.5.2 Gruppeintervju av elever

Siden min oppgave tar utgangspunkt i et sosiokulturelt perspektiv, er det gjort gruppeintervju av elever. Fordelen med gruppeintervju er at en i tillegg til å få frem den enkeltes utdypning av oppfatning, får frem hvordan de ulike oppfatningene diskuteres. Likevel kan det være at elevene ikke tør å si sine egne meninger med tanke på medelever som hører det de sier (Postholm & Jacobsen, 2011). På den andre siden igjen kan det også være tryggere for elevene å være sammen i et intervju.

Som tidligere nevnt, hadde vi to kamera som fokuserte på hver sin elevgruppe med tre elever i hver. Disse to elevgruppene, gruppe A og B, intervjuet vi etter gjennomføring av observasjon i toukersperioden. Vi ville få frem elevenes egne opplevelser, synspunkter og selvforståelse (Thagaard, 2013). Derfor tok vi frem interessante oppgaver som var blitt gjort i begge gruppene, og med utgangspunkt i våre observasjoner spurte vi elevene i gruppa om spørsmål i forhold til arbeidet de hadde gjort i matematikktimene de siste to ukene. Dette for å få en dypere forståelse av hvordan de tenkte da de løste oppgavene, og for å få frem strategiene på en tydeligere måte. I elevintervjuene brukte vi videoopptak i tillegg til lydopptak, for å få frem gester, kroppsspråk og eventuelle tegninger. Jeg vil påpeke, slik som Postholm og Jacobsen (2011) også fremhever, at intervjuene ble tatt på morgenen, og dermed kan dette medføre andre resultater enn om intervjuene fant sted på slutten av dagen. Trolig er elevene mer opplagte de første timene.

3.6 Oppgavevalg

Jeg fant inspirasjon til problemløsningsoppgaver fra et ark vi fikk av en foreleser tidligere i studiet. Disse har jeg selv arbeidet med i en problemløsningslogg. Her valgte jeg tre problemer som jeg selv finner interessante, og som går på logikk. Jeg tenkte at logikk-oppgaver kan skape interessante strategier, strategier som en på forhånd kanskje ikke er klar over. Problemer er også hentet fra Abelkonkurransen, fra litteraturbøker, en artikkel og ulike nettsider, samt fra forelesning. Vi fikk også tips fra veileder til en oppgave fra SAARMSTE konferansen (Berry, 2019). Målet var å ha varierte oppgaver, slik at vi kunne vekke interesse og motivasjon hos alle elevene. At flere av oppgavene skulle være rike, var også et krav vi hadde, slik at alle kunne klare å jobbe med problemene ut fra sitt faglige nivå. Vi prøvde å variere oppgavene, og fant oppgaver innenfor funksjoner, geometri, logikk, kombinatorikk og sannsynlighet. Oppgavetypene er viktige i forhold til hva en kan forvente av elevene, og slik som Kisa og Stein (2015) nevner, er elevenes muligheter for å lære og tenke innebygd i oppgaveinstruksene som elevene blir dratt inn i.

Vi fikk avtalt at læreren skulle velge elevgrupper med tre elever i hver gruppe på forhånd. Dette var et bevisst valg, da læreren kjenner elevene og kunne plassere dem etter deres faglige evner, slik at det ikke ble for stort sprang i forhold til deres matematiske ståsted. Da vi planla datainnsamlingen, ble vi enige om at elevene skulle få velge problemløsningsoppgaver selv etter at de hadde gjort to obligatoriske; mobiloppgaven og kuleisproblemet, som er to rike oppgaver, og alle kan få til noe på oppgavene, altså såkalte LIST-oppgaver (Wæge & Nosrati, 2018). Vi laget et ark med tolv problemløsningsoppgaver til sammen, og da hadde elevene ti oppgaver å velge mellom, men de som var på samme gruppe måtte naturligvis velge samme oppgave for å få utbytte av diskusjonen og gruppearbeidet. Å la elevene velge oppgaver selv, kan føre til motivasjon for å arbeide med oppgavene (Wæge & Nosrati, 2018). For at alle elevene skulle ha noe å bidra med, bestemte vi oss for at læreren skulle informere om at alle elevene skulle tenke selv i noen minutter, før gruppesamtalen startet. Dette kan ifølge Wæge og Nosrati (2018) være lurt, da elevene på denne måten får tenke gjennom oppgaven selv først, og får oversikten over problemet. I min studie velger jeg å ta frem mobiloppgaven, kuleisproblemet og bordpartnerproblemet. Jeg vil videre skrive om de enkelte oppgavene, hensikten, oppgavenes kognitive nivå og hva en kan forvente av elevstrategier innenfor disse oppgavene.

3.6.1 Mobiloppgaven

En kveld var mobilen til Lise nesten utladet. Da plugget Lise Iphonen i laderen og tok flere skjermbilder av prosenten av oppladet batteri i forhold til tiden. Det var kun skjermbilder som mobilen ble brukt til disse minuttene.
Viser til følgende bilde:

a. Hva ser du?
b. Hva har du lyst å finne ut av når du ser dette?
c. Når tror du (begrunn gjetning) at mobilen vil være fulladet?
d. Hvilken annen informasjon trenger du for å finne ut dette?

e. Ut fra opplysningene du ser på bildene – kan du nå forsøke å finne en løsning på problemet: Når vil mobilen være fulladet? (Berry, 2019)

Det ble presentert en tilsvarende oppgave på SAARMSTE konferansen i Durban (Berry, 2019). Inspirasjonen for oppgaven fikk vi altså herfra, etter tips fra veileder. Vi gjorde oppgaven om til norsk, og brukte egen mobil til skjermbilder slik at elevene kunne gjenkjenne Iphonen.

Mobiloppgavens del a og del b kan også ses i henhold til Mason et al. (2010) sine punkter i inngangsfasen; ”Hva vet jeg?” og ”Hva vil jeg vite?”. Dette for å få alle i gang, da absolutt alle elevene kan få til å si noe her. Meningen med denne oppgaven var altså å få elevene inn på denne tankegangen, og at de på denne måten kunne bruke dette i de andre oppgavene også. Å velge skjermbilder av en mobil er noe som elevene er kjent med, og sannsynligvis kan de mye om mobilbruk. Dette kan gjøre dem interessert i oppgaven, og det kan skape motivasjon for elevene uansett hvilket faglig nivå de er på i matematikk. Problemløsningsoppgaver skal, slik som jeg antyder i teorikapittelet, vekke nysgjerrighet (Wæge & Nosrati, 2018), noe jeg tenkte denne oppgaven ville oppfylle. På forhånd tenkte jeg at elevene kunne si mye om hva de ser, blant annet hva klokka er, strømprosenten, mobilabonnementet og bakgrunnsbildet. Som strategier kan en forvente at elevene vil regne ut tiden i forhold til prosenten (divisjon), tegne graf for hånd eller på Geogebra. En kan også få frem mange forslag til hva en ønsker å finne ut, som for eksempel når mobilen er fulladet og hvilket tidspunkt den begynte å lade.

Ut fra Stein et al. (2009) sine kognitive krav for oppgaver, vil jeg plassere helheten av denne oppgaven under å gjøre matematikk. Grunnen for dette er at det er ingen føringer for hvordan elevene skal finne svaret i oppgave d) og e), og ingen eksempler. De har kun fått oppgitt noen bilder, som de selv må forstå og analysere, og deretter finne svaret ut fra de bildene de har ved å utforske og forstå matematiske konsepter.

3.6.2 Kuleisproblemet

Hanne skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire ulike smaker.
Hun vil ha to iskuler.

a) Hvor mange måter kan hun velge isen sin på?
b) Hva om det er flere smaker å velge mellom? (Wæge & Nosrati, 2018, s. 107).

Kuleisproblemet er en oppgave hentet fra Wæge og Nosrati (2018) sin bok om matematikk og motivasjon. Oppgaven har lav inngangsterskel og stor takhøyde, det vil si at det er en rik oppgave, og oppgaven kan løses på flere måter. Ut fra lærerintervjuet fremkommer det at elevene har hatt lite om sannsynlighet og kombinatorikk, men at elevene likevel bør klare å finne en løsning ved å benytte ulike metoder. Denne går nemlig ut på kombinatorikk, og krever at elevene selv lager premissene. Det står ingenting om at rekkefølgen på iskulene betyr noe eller ikke, og om den samme iskulen kan velges flere ganger eller ikke. Derfor kan en få ulike svar i forhold til hvordan elevene definerer oppgaven. Kan den samme kulen brukes om igjen? Er det forskjell på om iskulene er øverst eller nederst? Dette er spørsmål som elevene kan stille og selv definere, og byr derfor på flere løsninger. Strategier som elevene blant annet kan benytte seg av er å tegne iskulene, lage trediagram eller tabell av kombinasjoner og lete etter mønster. Den kan utvides til å gjelde flere smaker og flere kombinasjoner som for eksempel at tre kuler skal velges av ti smaker. Dette er også en oppgave som kan generaliseres i form av mønster og figurtall, noe som oppgave b) kan få frem.

Ut fra de kognitive kravene, vil jeg plassere denne oppgaven under prosedyrer med forbindelse (Stein et al., 2009). Begrunnelsen for dette er at elevene kan bruke prosedyren om kombinatorikk. Derfor vil jeg ikke plassere oppgaven på det høyeste nivået av de kognitive krevende oppgavene. Selv om elevene ikke har hatt om kombinatorikk, og derfor trolig ikke kan en algoritme for dette, er det mulig å søke opp formler for kombinatorikk på chromebooken, som de har lov å bruke som hjelpemiddel. Likevel må elevene selv finne ideene som ligger bak prosedyren for å løse oppgaven. Av disse grunner, plasserer jeg denne oppgaven under Stein et al. (2009) sitt nest øverste kognitive krav, prosedyrer med forbindelse.

3.6.3 Bordpartnerproblemet

Tone inviterte 17 venner til middag og hun ga hver gjest et kort med et tall fra 2 til 18 og beholdt nummer 1 selv. Da alle hadde satt seg, viste det seg at summen av tallene på kortene til hvert par ble et kvadrattall. Hvilket tall hadde Tones bordkavaler (bord-partner)? (T. Bulien, personlig kommunikasjon, 2017. Problemløsningsoppgaver, fått av foreleser i emnet MUT300).

Bordpartnerproblemet er hentet fra et ark vi fikk av foreleser tidligere på studiet da vi hadde om problemløsning. Dette problemet består av flere deler, og krever at elevene vet hva kvadrattall og sum er, for å forstå det. Det er en logikkoppgave. Strategier som kan forekomme her, er blant annet tegne, prøve og feile og eliminere bordkortene. Elevene kan også utvide problemet til å gjelde flere bordpartnere, eller færre, eller legge føringer for noen av personene og parene.

Problemet kan etter min tolkning plasseres under det kognitive kravet å gjøre matematikk (Stein et al., 2009). Begrunnelsen for dette, er at det ikke er noen prosedyre å bruke, elevene må finne egne fremgangsmåter for å løse problemet. De kan med andre ord ikke tenke algoritmer i problemet, og må med dette utforske og forstå ulike matematiske konsepter med kunnskapen de har (Stein et al., 2009).

3.7 Analyse

3.7.1 Utvelgelse av episoder og sekvenser

Når det kommer til analysen, transkriberte jeg videoepisodene jeg så mest interessante i forhold til strategier elevene brukte ved å sjekke loggene mine etter hver observasjonstime, og fra det jeg husket fra observasjonene. En episode er definert som den sammenhengende perioden/tiden elevene bruker på å løse ett problem. Sekvens er utdrag av episoden. Jeg trengte flere sekvenser med kun elevgrupper som diskuterte, og flere der lærer veiledet, for å få frem strategier elevene benyttet både med og uten veiledning, i både gruppe A og B. Dette for å få best mulig svar på forskningsspørsmålene. Derfor transkriberte jeg mobiloppgaven, kuleisproblemet og bordpartnerproblemet fra både gruppe A og B ved hjelp av en transkripsjonsnøkkel som jeg hadde laget (Vedlegg 7). Kuleisproblemet i gruppe A og bordpartnerproblemet i gruppe B gikk over flere undervisningsøkter. Intervjuene blir med som analysegrunnlag der disse støtter opp. Mobiloppgaven baseres i tillegg på helklasseobservasjon, da læreren brukte denne i introduksjonstimen til problemløsning. Alle ytringer, som vil si hver uttalelse som elevene eller læreren kommer med, er blitt transkribert ordrett på bokmål av hensyn til anonymitet. Ord som er vanskelige å tyde, er blitt merket som "(ukjent tekst)". For å gjøre transkripsjonen mest mulig nøyaktig, tok jeg med gestikuleringer og kommentarer, som i analysen er ført inn i parentes der dette er relevant i de utvalgte sekvensene. Når elevene og læreren bruker lengre enn ett sekund på å si neste ord i setningene, er dette merket som antall sekunder og skrevet i parentes. Ett sekund er merket slik (.). Dette for å synliggjøre at de bruker lengre tid på å tenke enn det ellers ville sett ut som.

3.7.2 Tilnærming til empirisk materiale

Utgangspunktet for det empiriske materialet er dialoger fra gruppe A og gruppe B. Forskningsspørsmålene mine består av to deler, der det første innbefatter hvilke problemløsningsstrategier som kan identifiseres når elevene arbeider med problemløsningsoppgaver i smågruppedialogene. Det andre forskningsspørsmålet omhandler hvilken rolle det spiller at læreren kommer med hint i elevenes løsningsprosess. For å svare på disse forskningsspørsmålene, har jeg valgt å presentere tre ulike problemer og bruke både gruppe A og gruppe B sine strategier i episoder med og uten veiledning fra lærer.

Mobiloppgaven presenteres først (4.1). I introduksjonstimen til problemløsning presenterer læreren problemløsningsbegrepet og denne oppgaven. Dette tar jeg med for å vise at læreren introduserer og oppsummerer emnet de skal jobbe med, samt for å vise hvordan dette blir gjort. Mobiloppgaven har flere deloppgaver, a-e, men i denne studien velger jeg å kun se på gruppe A og gruppe B sin diskusjon i løsningsprosessen ved deloppgave e) for å belyse deres strategier. Deretter vil plenumssamtalen i slutten av arbeidet med mobiloppgaven beskrives. Mobiloppgaven vil presenteres kort, da jeg ser strategiene i kuleisproblemet og bordpartnerproblemet mest interessante. Derfor vil jeg videre i 4.2 løfte frem gruppe A sitt arbeid med kuleisproblemet. Dette er en gruppe med sterk faglig bakgrunn, og gruppa jobber mesteparten av tiden på egenhånd, uten at lærer kommer med mange hint. Elevene arbeider med dette problemet utover flere matematikktimer, noe som gjør at jeg finner mange og interessante strategier som elevene benytter seg av. Fra gruppe B vil jeg kun kort beskrive løsningsprosessen i kuleisproblemet, for å identifisere mulige andre strategier fra en gruppe med en annen faglig bakgrunn.

Videre går jeg inn i gruppe B sitt arbeid med bordpartnerproblemet (4.3). Av videoopptakene og transkripsjonene fremkommer det at læreren besøker denne gruppa flere ganger. Det er dette som er bakgrunnen for valg av gruppe og problem, da jeg ønsker å fremheve lærerhjelpen, nettopp for å svare på forskningsspørsmål to. Jeg vil også her vise noen strategier fra gruppe A sitt arbeid med samme problemet, for å kunne identifisere andre mulige strategier.

For å svare på forskningsspørsmål én vil jeg ta frem strategier fra begge gruppene. For å svare på forskningsspørsmål to vil hovedfokus være på gruppe B sitt arbeid med bordpartnerproblemet, men jeg vil også bruke lærer-elev dialog fra gruppe A i kuleisproblemet for å svare på dette.

Jeg vil bruke Polya (1957) sine faser for å identifisere strategiene som kommer frem, og dermed vil analysen struktureres i henhold til Polya sine fire faser som overskrifter under 4.2 og 4.3. Grunnlaget for dette er at Polya er ett av mine teoretiske rammeverk, i tillegg til at læreren brukte dette rammeverket i introduksjonen til problemløsning. Hun la også på en femte fase, å lage nye problemer, og dette er i tråd med Borgersen (1994) sin utvidelse. Dermed vil også Borgersen sitt rammeverk benyttes under fasene. Noen av hans syv trinn blir også grunnlag for strategier som jeg identifiserer. Det blir også naturlig å nevne Mason et al. (2010) sine tre hovedfaser sammen med Polya og Borgersen sine steg. Under Polyas faser vil jeg ha strategier som overskrifter i kursiv. Her vil elevstrategier bli skilt fra strategiene som kommer etter lærers hint, ved at overskriftene der læreren er inne i gruppa starter med ”lærerens første møte med elevene”, og deretter ”lærerens andre møte med elevene” og så videre. Dette for å tydeliggjøre når læreren er sammen med gruppene og når elevene arbeider uten lærer.

Jeg ønsker også å nevne at jeg i analysen vil skille mellom strategiene visualisering og modellering. Visualisering er skriftlige tegninger som er nedskrevet i bøkene av elevene, noe som Carlsen (2008) kaller inskripsjon. Modellering vil i studien min være konkretisering som blir utført fysisk. Strategiene som identifiseres kommer frem fra smågruppedialogene mellom elevene, og i lærer-elev dialogene. I analysen vil jeg referere til ytringsnummeret fra sekvensene. Ytringsnumrene kommer ikke i kronologisk rekkefølge. Dermed vil sekvensene i kuleisproblemet (4.2) inneholde ytringsnummer bestående av høye tall, mens bordpartnerproblemet (4.3) vil ha lavere tall. Dette kommer av at jeg ikke transkriberte dem kronologisk i forhold til analysen.

3.7.3 Koding

Jeg transkriberte episodene i tabeller hvor jeg hadde ytringsnummer, navn på personen som snakker, ytring og en kolonne for kommentarer. Etter at transkriberingen var ferdig, laget jeg enda en kolonne i tabellen, slik at jeg kunne kode strategiene som jeg så på en effektiv måte. Denne kolonnen kalte jeg strategier, og skrev inn hvilke strategier jeg så i sekvensene. Strategiene vil plasseres i Polya (1957), Borgersen (1994) og Mason et al. (2010) sine faser, og dermed valgte jeg også å legge på en kolonne som jeg kalte for ”fase”. Jeg tok utgangspunkt i Carlson og Bloom (2005) sin koding-tabell III, hvor de skrev transkripsjonene av utdragene i venstre kolonne og den matematiske atferden i kolonne to. I siste kolonne ble det kodet hvilken fase de jobbet i. Dette syntes jeg så oversiktlig og ordentlig ut. De brukte matematisk atferd for kolonne to, men jeg byttet denne ut med de ulike strategiene som ses i dialogene. Dette gjorde analysen enklere. I analysekapittelet i denne studien viser jeg bare ytringsnummer, navn på personen som snakker og ytring, samt relevante kommentarer i parentes. I tillegg vil naturligvis ytringene bli kommentert og diskutert under sekvensene jeg har valgt ut i analysen.

3.8 Forskningsetiske vurderinger

Jeg og min medstudent sendte sammen inn søknad om datainnsamling til Norsk senter for forskningsdata, NSD, og fikk denne godkjent før innsamlingen startet (Vedlegg 3). Vi laget samtykkeskjema til foreldre og lærer. Siden dette prosjektet omhandler barn under 15 år, må altså foreldre godkjenne (NESH, 2016). I skjemaet informerte vi om målet med prosjektet og rettigheter de har, hva de sier ja til, og at de kan trekke seg når som helst uten konsekvenser. Dette ble skrevet under på skriftlig (Vedlegg 1). Alle valgte å godkjenne, noe som medførte at vi ikke trengte å ta ut noen elever fra klasserommet mens observasjonen foregikk.

Alle navn, både lærer, elever og skole er presentert i anonymisert form med fiktive navn, der ingen personopplysninger fremkommer. All transkripsjon er skrevet på bokmål, noe som kan styrke anonymiteten. Dataene er lagret i kryptert form, og alle video- og lydopptak vil bli slettet 31.12.19. I tillegg er jeg som forsker taushetsbelagt (Christoffersen & Johannessen, 2012).

3.9 Metodiske betraktninger

Som tidligere nevnt, er jeg og min medstudent til stede i felten, og dette kan by på både fordeler og ulemper. Fordelen er at vi får observere elevene i sitt vante miljø. Imidlertid kan en stille spørsmålstegn på hvor naturlig dette blir da vi var til stede med kamera og lydopptakere (Thagaard, 2013). Likevel har vi ingen påvirkning på elevene ved at vi deltar i aktivitetene, stiller spørsmål og lignende. Dermed er denne type observasjon lite påvirket av vårt nærvær i forhold til om vi var deltakende eller fullstendig deltakende (Thagaard, 2013). Samtidig får jeg muligheten til å få en dypere forståelse av de sosiale interaksjonene ved å være til stede under observasjonene.

Selv om vi hadde et semi-strukturert intervju, der både lærer og elever fikk utdype på deres egen måte, og vi stilte oppfølgingsspørsmål i forhold til det de sa, er det kvalitative forskningsintervjuet en samtale med et asymmetrisk maktforhold. Vi sitter med kompetanse innenfor emnet, definerer spørsmålene i forhold til temaet, stiller spørsmål, og bestemmer hvilke svar som skal følges opp og avslutter samtalen. I tillegg kan jeg fortolke det som intervjupersonene sier i feil retning (Kvale & Brinkmann, 2015). Likevel vil jeg påpeke at både videokamera og lydopptaker er brukt i alle intervjuene, noe som kan gjøre at all tale er kommet med, og på denne måten lite feilkilder i forhold til hva de sier. Å ha både videoopptak, lydopptak og feltnotater kan gjøre studien mer reliabel (Silverman, 2011).

Da dette er transkripsjoner som er tolket og analysert opp mot teori, kan mine tolkninger ha betydning for drøftingen. Fortolkningen min baseres på mine erfaringer og min kompetanse, og derfor blir analysen preget av min forståelse, altså blir dette min fortolkning av deltakernes forståelse (Thagaard, 2013). Jeg vil påpeke at jeg ikke hadde noe kjennskap til denne skolen, klassen eller læreren fra før, noe som trolig vil redusere utfordringer med dette. Samtidig er videoopptak og opptak fra intervjuer ifølge Thagaard (2013) mindre avhengige av mine egne oppfatninger enn notater. Jeg skrev ikke notater underveis, men heller etter hver og en undervisningsøkt. Grunnen for at jeg valgte dette, var at elevene ikke skulle legge merke til meg mer enn de måtte.

Som det fremgår av delkapittelet om analysen, er sekvensene valgt ut etter hva som var mest interessant i forhold til forskningsspørsmålene. Dette betyr at noe kan bære preg av at det er løsrevet fra sin opprinnelige sammenheng (Thagaard, 2013). Likevel er det av oppgavens omfang begrensninger på hvor mange sekvenser jeg kan ta med i studien. Noen ytringer i samme sekvens er også tatt vekk, da jeg vurderte disse som lite betydningsfulle. Dette er merket med (…).

I ettertid så jeg at det med fordel kunne ha vært flere elever på gruppene. Læreren valgte ut tre elever på hver av gruppene, og i begge gruppene var én av elevene fraværende den ene undervisningsøkten. Dette medførte at det kun var to elever som samarbeidet i begge gruppene den ene timen.

Dette er en case-studie, og som sagt går jeg i dybden i få elevers strategier som strekker seg over seks undervisningsøkter. På grunn av at dette er en liten studie kan ikke mine funn generaliseres. Samtidig kan en case-studie ifølge Flyvbjerg (2006) være viktig for vitenskapelig utvikling, og med tanke på å støtte opp andre studier. Derfor kan case-studier ses på som viktige bidrag, selv om dette er en mindre studie (Flyvbjerg, 2006).

4 Analyse

I denne resultatdelen vil jeg ha følgende struktur ved at jeg presenterer lærers introduksjon til problemløsning og arbeid med mobiloppgaven i plenum først, så identifisere noen strategier til gruppe A og B i løsningen av deloppgave e), og lærers oppsummering av mobiloppgaven. Deretter kommer kuleisproblemet med hovedfokus på gruppe A sine strategier i 4.2. I 4.3 vil gruppe B sine strategier med lærerveiledning være hovedfokus, og identifiseres i henhold til bordpartnerproblemet. Alle disse episodene varer over lengre tid, og jeg har dermed delt dem opp i mindre sekvenser, og det kommenteres mellom sekvensene. Analysen vil knyttes opp mot relevant teori, men videre diskusjon vil også komme i kapittel 5.

4.1 Lærerens introduksjon til problemløsning og mobiloppgave

Læreren forklarer planen for den første timen, som innebærer at de skal arbeide med mobiloppgaven litt sammen, så individuelt, og så i grupper. Deretter deler hun ut bøker som elevene skal kalle ”Abelboka”, som skal synliggjøre strategiene deres. Hun forklarer at det kun skal brukes penn i boka og at de ikke skal stryke over noe. Hun påpeker at de svarene som er feil er like interessante som de riktige, og at elevene ikke skal viske ut tekst som kan vise hvordan de har tenkt.

Hun spør elevene hva de legger i ordet problemløsning, og det kommer flere forslag. Å finne ut av problemer blir foreslått. Hva er et problem spør hun videre, og forslag fra elevene er å stå fast og ikke klare og finne en løsning. Læreren påpeker at problemløsning handler om å få oppgaver som en ikke nødvendigvis vet hvordan en skal løse. Hun understreker også at det kan variere hvor vanskelige oppgavene er for hver og en elev. Det som er vanskelig for den ene trenger ikke å være vanskelig for en annen. Dette er i tråd med Blum og Niss (1991) sin beskrivelse av et problem når de hevder at et problem skal utfordre elevene på en måte slik at det ikke finnes en åpenbar metode for å løse, og at en oppgave derfor kan være et problem for noen mens for andre blir det bare en øvelse.

Fra observasjonene mine ser jeg at Polya sine fire faser er sentrale i introduksjonen. Læreren går gjennom de fire fasene og legger til en femte fase som hun kaller å lage nye problemer. Disse skriver elevene av tavla på sin første side i Abelboka. Hun forklarer hva som ligger inne i de ulike fasene, og gir eksempler på strategier som de kan benytte i løsningsprosessen.

Eksempler på strategier hun skriver opp er å dele problemet i mindre problem, se etter mønster, prøve og feile.

Læreren deler så ut arket med problemløsningsoppgavene og ber dem lese individuelt først. I andre undervisningsøkt leser de mobiloppgaven sammen. Læreren spør hva de ser på bildet og ber dem lese spørsmålene og skrive ned noen egne tanker. Deretter ber hun dem diskutere når de går i grupper. Dette samsvarer med Wæge og Nosrati (2018) sin anbefaling av problemløsning i gruppearbeid, da de hevder at en bør jobbe individuelt før en går i grupper.

4.1.1 Strategier brukt i gruppe A under arbeid med mobiloppgaven

Når jeg begynner mine observasjoner, har elevene allerede skrevet ned noen tanker i forhold til oppgave a) og b) som går på å forstå problemet. I denne oppgaven ønsker jeg derfor å diskutere elevenes strategier i smågruppedialogene når de løser deloppgave e) som stiller spørsmålet "når er mobilen fulladet?". Skjermbildene fra oppgaven er vist under.

Figur 1: Skjermbilder fra mobiloppgaven.

Gruppa diskuterer litt hva de allerede har tenkt på fra det individuelle arbeidet med oppgaven. Det blir ikke observert at læreren besøker gruppa i arbeid med denne oppgaven. Mari adderer alle prosentene på bildene og ser hvor mange minutter det går med i økingen. Dette gjør hun for å finne et mønster. Det kan se ut som at hun også har funnet et mønster når hun presiserer til Siri at tiden ikke er lik hver økning. Mari sin strategi kan dermed identifiseres som å lete etter mønster, som er en vanlig problemløsningsstrategi (Kongelf, 2011; Schoenfeld, 1992). Denne strategien ga også læreren tips om på tavla kort tid før de begynte å arbeide, og med dette kan det se ut som at en felles introduksjon om strategier før problemløsningsoppgavene starter har en viss innvirkning på strategien til denne eleven. Likevel kan det ikke sies om dette er bevisst ut fra notatene, eller om det er tilfeldig. Hun har kommet frem til at det økes med syv, ni, ni og åtte minutter for hver gang det er foretatt et skjermbilde. Siri spør så om de skal ta et overslag med ett prosent, noe som da er hennes plan videre. Elevene dividerer trettisyv på trettitre og får 1,1, og konkluderer med at mobilen går opp cirka ett prosent per minutt. Videre divider de trettitre med trettisyv og får 0,89. De multipliserer dette med femti, i og med at mobilen kun viser opplading til femti prosent. Da får de som svar 44,5 minutter, og dermed at mobilen er fulladet kl. 02.02. De bruker altså regneartene multiplikasjon og divisjon i utregningen. Da de har kommet frem til løsningen, reflekterer de over svaret, og befinner seg derfor i Borgersen (1994) sitt sjette trinn som omhandler refleksjon over løsningen, samt Polyas (1957) fase fire som går på å se tilbake og Mason et al. (2010) sin vurderingsfase. Sekvensen under viser dette.

1198	Mari	Det gir jo litt mening da. Det har gått trettitre minutter, hun startet på tretten prosent. Så hvis du venter førtifire minutter til, eller førtifire komma fem minutter til og da har den gått opp femti prosent, fordi vi starter ikke på null. Den har ikke hele tiden gått, men den har økt cirka like mye.
1199	Siri	Jeg føler at dette svaret gir mest mening.
1200	Mari	Ja men det virker logisk da.

Sekvensen viser at de ser tilbake på problemet. Mari vurderer svaret deres som meningsfullt (1198) og bygger med dette på logikk. Hun synes det virker logisk at det blir mer enn trettitre minutter, da de ikke startet på null. De ser altså om svaret ser rimelig ut, noe som kommer under vurderingsfasen til Mason et al. (2010). Samtidig er det begrenset hvor mye de ser tilbake, da de kun sjekker om det ser logisk ut. De sjekker ikke regnestykkene sine, beviser ikke, og begrunner kun med at det virker meningsfullt. Likevel diskuterer de dette en stund, og konkluderer med at dette ikke er det nøyaktige svaret, men ut fra informasjonen i oppgaven er dette det beste de kan få til. Med dette er det tydelig at de reflekterer over løsningsprosessen, og befinner seg i refleksjonsstegene (Polya, 1957; Borgersen, 1994; Mason et al., 2010).

Det blir også observert at de i løsningsprosessen går tilbake til oppgaveteksten og leser for å sjekke at de har forstått problemet. Dette er i tråd med det som Schoenfeld (1992) beskriver som monitorering når han sier at det dreier seg om at en går tilbake og for eksempel leser teksten en gang til for å være sikker på at en har forstått problemet. Av denne grunn kan strategien monitorering antydes identifisert. Dette er en viktig strategi i problemløsningen (Bjuland, 2002).

4.1.2 Strategier brukt i gruppe B under arbeid med mobiloppgaven

Gruppe B arbeider også med denne oppgaven uten at lærer kommer til gruppa. Det eneste hintet de får av læreren er at de kan bruke hjelpemidler, og elevene bruker kalkulator på chromebooken. Denne gruppa finner ut hvor mange prosent mobilen lades i løpet av ett minutt, slik som gruppe A, noe sekvensen under viser.

1225	Ole	Hvor lang tid var det mellom, fra den er tretten prosent til femti prosent.
1226	Pia	Trettisyv. Trettisyv minutter. Den er ladet opp trettisyv minutter, trettisyv prosent.
1227	Ole	Ja. trettisyv minutter. Så deler du det på trettitre minutter.
1228	Pia	En komma tolv.
1229	Ole	En komma tolv prosent hvert minutt.

De velger å runde dette av til én prosent per minutt. Det er dette som blir deres utgangspunkt for å løse oppgaven. De tenker trolig logisk her, fordi de tar 37 prosent, som det har gått fra 13 til 50 prosent, og dividerer med 33 minutter, som er minuttene før klokka ett (15 min) og minuttene etter klokka ett (18 min). De bruker regneartene subtraksjon og divisjon. Som en ser, blander de her prosent og minutter i sammen. Mobilen har ladet 37% på 33 minutter. Det ser derfor ut som at Pia (1226) blander hva som er prosent og hva som er minutter. Her kunne de ha laget et mønster, og skrevet tallene de vet ned i bøkene for å holde styr på prosent og minutter. Tallene 37 og 33 virker å gå litt i surr for dem, noe som neste sekvens også viser.

1244	Ole	Et prosent hvert minutt.
1245	Pia	Et minutt. Og så er det femti prosent når det er gått, hva var det, trettisyv minutt?

1246 Ole Trettisyv.

1247 Pia Nei, det var. Trettisyv. Trettitre minutt. Ja trettitre minutt. Så kan vi skrive femti prosent når det har gått trettisyv minutt.

Konklusjonen, og dermed svaret deres, er siste setning fra Pias ytring (1247). De svarer med andre ord ikke på oppgaven, som spør etter *når* mobilen er fulladet. Det de har kommet frem til med denne løsningen er hvor mange minutter det har gått fra 13 til 50 prosent, noe som en kan se ut fra skjermbildene i oppgaven. De virker ikke å ha forstått mobiloppgaven, da det er usikkerhet rundt prosent og minutt, og hva de skal finne ut (1245-1247), og de leser den heller ikke om igjen. Dette ville muligens bidratt til mer forståelse, og de kunne da ha funnet ut hva det virkelig spørres om (Mason et al., 2010). Denne oppgaven har lav inngangsterskel, og alle kan si noe om oppgaven, slik som Wæge og Nosrati (2018) beskriver rike oppgaver, men samtidig kan det se ut som deloppgave e) er vanskelig for gruppe B. Dette kan muligens komme av at de ikke har forstått problemet ordentlig.

Gruppa legger bort problemet etter Pia sin siste ytring (1247). Det vil si at de ikke ser tilbake, og heller ikke sjekker eller reflekterer over løsningen. I både elevintervjuet og lærerintervjuene blir det understreket at de ikke er vant med problemløsningsoppgaver, og dette er første time med slike problemer. Det kan tenkes at de enda er inne i rutineoppgaver, hvor de jobber med mange lignende oppgaver og går videre, som i intervjuene ble nevnt som vanlig i klassens matematikktimer. Dette kan være årsaken til at de ikke sjekker eller går tilbake, og setter to streker under svaret og går fort videre på neste. Det er nettopp slik matematikkundervisningen er kjennetegnet (Svingen & Gilje, 2018).

4.1.3 Lærers oppsummering av mobiloppgaven i plenum

I oppsummeringen går læreren gjennom mobiloppgaven fra a-e, og alle elevene er inkludert i plenumssamtalen. Å jobbe først individuelt, så i grupper, og deretter i plenum er en anbefaling som Wæge og Nosrati (2018) gir i forhold til problemløsning og det sosiokulturelle perspektivet. I deloppgave a) og b) kommer det mange forslag, og elevene dekker det meste av det en kan se fra mobilen, blant annet abonnement, klokkeslett og prosent. Her ber læreren om begrunnelser, som ”hvordan ser du det?”. Slike spørsmål er ifølge Wæge og Nosrati (2018) viktige i problemløsning, fordi elevene får da begrunnet sine tanker, i tillegg kan de på denne måten få en forståelse om at det er flere måter å løse problemet på.

Det som elevene i plenumssamtalen sier at de har lyst å finne ut (deloppgave b) er blant annet når mobilen er fulladet og hvor lang tid det tar, nettopp det som er spørsmålet i deloppgaven. De lurer også på hvilken dag det er og hvilken Iphone Lise har. Mange tipper at mobilen vil være fulladet cirka klokka to (deloppgave c), og her drar flere elever frem sine erfaringer med opplading av egen telefon. Ideene har, som Polya (1957) hevder, grunnlag i erfaringer. Dette går på den kunnskapsbasen og de erfaringene elevene allerede sitter med i forhold til Iphone (Schoenfeld, 1992).

En slik rik oppgave kan føre til at alle kan bidra og bli inspirert av andres strategier og resonneringer (Wæge & Nosrati, 2018), noe som trolig er tilfelle her. Hele klassen er stille, følger med og veldig mange elever er aktive i diskusjonen. Ved at læreren gjennomgår oppgave én på tavla etter at elevene har løst den på ulike måter, kan det tenkes at de nettopp blir inspirert av andres strategier og resonneringer. I tillegg kan læreren på denne måten bidra til at elevene får forståelse om at det er flere måter å løse matematiske problemer på (Wæge & Nosrati, 2018). For å støtte dette, ønsker jeg å nevne at læreren spør elevene om det er et fasitsvar på denne oppgaven, og elevene svarer nei. Elevene sier at oppgaven er annerledes enn andre oppgaver, fordi en får ulike svar på den, og dette kommer av at en løser oppgaven på forskjellige måter. Det fremkommer også av klasseromsdiskusjonen at de bruker mye lengre tid på denne oppgaven og de andre problemløsningsoppgavene enn oppgaver de vanligvis jobber med fra boka, og at de får mer tid til å tenke. Dette støtter at disse oppgavene er problemløsningsoppgaver etter definisjonen på hva et matematisk problem er. Problemløsningsoppgaver skal nettopp gi arbeid over tid, og elevene skal få tid til refleksjon og tenkning (Wæge & Nosrati, 2018). I tillegg skal en ikke ha en oppskrift der en vet hvordan en kan løse problemet (Schoenfeld, 1992), noe som de også får frem i plenumssamtalen.

4.2 Strategier brukt i kuleisproblemet av gruppe A

Jeg vil i denne delen identifisere de strategiene som er mest fremme i gruppe A sin samtale i arbeidet med kuleisproblemet ved å presentere sekvenser fra smågruppedialogen. Gruppa kommer med flere innretninger på problemet selv. De lager to premisser for oppgaven, og som følge av dette kommer de frem til to løsninger. De jobber på egenhånd, men læreren kommer noen ganger til gruppa for å høre hvordan det går, og gir dem noen hint. Det blir synliggjort i overskriftene når lærer er til stede i gruppa, og tydeliggjort i overskriftene når strategiene fremkommer som følge av lærers hint. Polya (1957) sine faser blir overordnete overskrifter. De rekker aldri opp hånda, og resonnerer seg selv frem til svaret, men lærerens hint om at de kan finne et algebraisk uttrykk kan det diskuteres om de hadde gjort uten hennes veiledning. Siri sin ytring (528) viser gruppa sin oppstart i arbeid med dette problemet.

4.2.1 Forstå problemet og lage en plan

Visualisering ved konkretisering

528	Siri	Okei. Hanne skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire ulike smaker. Hun vil ha to iskuler. Hvor mange måter kan hun velge isen sin på. Åja, så to iskuler, fire ulike smaker.
529	Siri	Vi kan lage slik eksempel med fire penner.
530	Mari	Jeg har penner i flere farger.
531	Siri	Jeg vet at det er en slik ting som er lett egentlig. Det er fire smaker og du kan velge to kuler.
532	Mari	Men du kan jo ha to av den samme.

Siri leser oppgaveteksten høyt for de andre på gruppa, og det ser ut som at Siri og Mari forstår hva den går ut på, da Siri lager en plan ganske kjapt. Likevel er dette et problem som krever at de må lage premisser selv, og dermed har de flere måter å løse den på, da det er en rik oppgave (Wæge & Nosrati, 2018). Planen er å bruke fire penner (529). De bruker altså en konkretisering der ulike farger på pennene skal representere smaker på iskulene. Strategien visualisering med ulike farger ved å tegne blir dermed brukt, da de videre tegner iskulene ned i boka. Som ytring 532 antyder, har Mari laget premiss for problemet. Hun mener at en kan ha to smaker av den samme iskulen, det vil si at hver smak kan velges flere ganger per is. Videre i løsningsprosessen bruker de farger som konkretisering for kombinasjonene i stedet for smaker.

4.2.2 Gjennomføring av planen

534	Mari	Skal vi se. Hvis du har. En smak.
535	Siri	Okei, vi bare gjør det på din, tar tid å gjøre det på alle.

536 Mari Så her er liksom fire forskjellige.

537 Siri Kan vi ikke bare eliminere det og og ta alle sammen sammen. Liksom for seg selv. Så det er det fire, kun med seg selv, blå blå, oransje oransje, lilla lilla, grønn og grønn. Sant. Der er det fire (Liam prøver å si noe, men Siri og Mari snakker på likt med han, så det er vanskelig å tyde hva han sier).

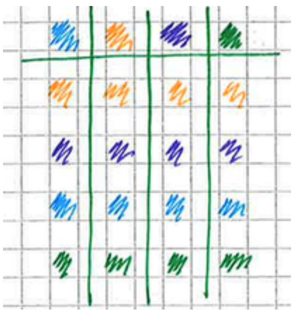
538 Mari Se hvis du gjør slik, oransje, oransje, oransje, oransje. Det sto jo ikke noe om at du ikke kunne ha samme.

539 Siri Ja, ja, det er jo det som kunne være. Da prøver vi det, så ser vi det. Grønn, grønn, grønn.

(…)

542 Mari Her er i hvert fall alle kombinasjonene vi kan velge.

Det virker som at Siri ønsker å løse problemet ved å ta kombinasjonene av to like først. Dette kan være for å strukturere problemet. Som hun selv sier, ønsker hun å bruke strategien eliminere, og på denne måten kan problemet bli lettere å løse. Mari tegner opp alle kombinasjonene hun tenker er mulige. De blir enige om at de kun tegner i Mari si bok. Her er det tydelig at de samarbeider (535), og bruker Maris tegning i skriveboka, altså inskripsjon, som medierende verktøy som binder sammen kuleisproblemet, tegningen og elevene, da alle elevene ser på denne tegningen, og jobber ut fra den (Carlsen, 2008). Det er denne tegningen som blir brukt videre i løsningsprosessen og dermed skaper fremdrift i problemløsningen.



Figur 2: Mari sin tegning i arbeid med kuleisproblemet.

Som en ser ut fra tegningen deres, blir det tegnet blå, oransje, lilla og grønn farge over en linje. Under linjen har de tegnet en rad med oransje, en med lilla, en med blå og en med grønn farge. Av dette kan en se at Hanne kan velge blå - oransje, blå - lilla, blå - blå, blå - grønn. Det samme gjelder for de andre fargene. Dette representerer altså smakene. Mari sier at de har nå alle kombinasjonene som kan velges (542), og dette er altså funnet ut ved hjelp av strategien visualisering i form av tegning ved farger som konkretisering for issmakene.

Liam har ikke sagt så mye, men prøver å si noe (537). Likevel kommer han mer til uttrykk i sekvensen under, etter at Siri og Mari har sagt at de ikke skal telle med de kulene over den grønne streken på tegningen.

Stille spørsmål

547	Liam	Kan du ikke ha samme av forskjellige farger?
548	Mari	Jo du kan velge den samme.
549	Siri	Jojo, men da er det liksom oransje oransje.
550	Mari	Fordi hvis du velger blå, så kan du ha fire oppå liksom.
551	Liam	Ja.
552	Mari	Så hvis du h≈
553	Liam	≈hvorfor skal vi ikke telle med den øverste?
554	Siri	Det er ikke det, liksom. Hvis den ene kulen din er blå så kan du ha fire andre ting. Det er de forskjellige tingene du kan ha der. Hvis kulen din er oransje, kan du ha fire forskjellige ting der, hvis den ene kulen din er lilla, kan du ha fire forskjellige ting der, og hvis den er grønn kan du ha fire forskjellige ting der.
555	Mari	Så for hver av fargene så kan du ha fire. Så hvis du har fire ganger fire så har du seksten mulige måter.
556	Liam	Ja, men har ikke hun tjue da, siden du kan ta to av samme?
557	Siri	Ja men det er allerede tatt ser du ser du.
558	Mari	Men jeg forstår hva du mener altså. Men vi har allerede tatt med den ene.
559	Siri	Mhm. Hvis det ikke hadde vært slik så hadde du bare tatt de andre tre, da hadde vi ikke lagt til den fjerde.
560	Liam	Okei.
561	Siri	Okei. Det var seksten mulige måter hun kan ha isen på.

Liam er også med på premisset om at det er lov å velge samme iskule, altså at hver smak kan velges flere ganger per is. Men han forstår ikke hvorfor de ikke skal telle med de fargene over den grønne streken. Dermed er han trolig ikke helt med på Siri og Mari sin visualiserende strategi i form av tegning. Med dette virker ikke tegningen som et medierende verktøy som

Liam approprierer (Carlsen, 2008). Derfor kan det tenkes at han ikke helt har utbytte av denne strategien på nåværende tidspunkt. Han stiller tre spørsmål, hvorav to er om de ikke skal ta med de øverste (553, 556). Å stille åpne spørsmål er en viktig strategi i problemløsningen (Bjuland, 2002, 2007), og disse spørsmålene indikerer at Liam ikke helt har forstått problemet, eller løsningen, men ønsker å finne ut av hvordan Siri og Mari tenker. Hvorfor-spørsmålet (553) fører til at Mari og Siri må argumentere for og forklare hvordan de har tenkt, noe som er i tråd med Bjuland (2002) når han sier at problemløsningsstrategien av å stille åpne spørsmål kan bidra til at en kommer med overbevisende argument i problemløsningsprosessen. Det virker imidlertid som at både Siri og Mari har felles forståelse for tegningen og deres løsningsprosess, da de utfyller hverandres ytringer i forklaringene til Liam. Her ser en samarbeidsevner og det sosiokulturelle perspektivet kommer frem. Ved å stille spørsmål om tegningen på denne måten kan det være at de får en bedre felles forståelse for problemet, og felles forståelse i gruppa er viktig i henhold til det sosiokulturelle perspektivet (Mercer & Littleton, 2007).

Siri og Mari har tydeligvis strukturert problemet på den måten at de har alle fargene øverst, og under streken har de mulighetene hver smak kan ha over seg, fire smaker. Liam forstår ikke hvorfor svaret ikke blir tjue kombinasjoner (556), og dette er trolig på grunn av at hvis en tar med de ulike fargene over streken som Mari har tegnet, blir det tjue. Det er flere måter å vise deres tankegang på. For eksempel kunne de laget et trediagram for å vise Liam, slik at tegningen også for han kunne vært et verktøy han approprierer. En kunne også laget en kolonne med en strek før alle kombinasjonene, slik som de har gjort med den øverste raden vannrett, og på denne måten vist to og to kuler sammen.

Det er usikkert om Liam har forstått hvorfor det blir seksten smaker, og ikke tjue. Elevene skriver ned et svar på denne deloppgaven (a) nokså kort tid etter at de har begynt på problemet, og er i Polyas (1957) fase tre og gjennomføringsfasen til Mason et al. (2010), der de jobber i prosessen med å lage hypotese om at det er seksten mulige kombinasjoner å ha iskulene på, og prøver å overbevise ved å svare på spørsmålene som Liam stiller. Likevel beviser de ikke hypotesen i form av for eksempel formel, og den blir dermed stående som en hypotese (Mason et al., 2010; Borgersen, 1994). Strategier som er brukt til nå er visualisering ved hjelp av konkretisering av iskulene som farger samt strategien å stille spørsmål. Både visualisering og stille spørsmål er kjente problemløsningsstrategier (Bjuland, 2002). De går nå videre til deloppgave b), der de får spørsmål om hva som skjer hvis det er flere smaker å velge mellom. Denne deloppgaven gir dermed mulighet til utvidelse.

Finne mønster og generalisere

564	Siri	Hva om det er flere smaker å velge mellom. (2s) Det er jo bare samme systemet.
565	Mari	Det blir jo akkurat samme systemet. Fordi hvis du legger til en her så blir det en under alle. Hver side av liksom (ukjent tekst) så ganger du en.
566	Siri	Men hvordan kan vi forklare det systemet vi tegnet opp her med ord, i en slik setning. Vi må utfordre oss litt med å gjøre det.
567	Mari	Ja men for hver smak så ganger du det med antall smaker. Hvis du har to smaker så kan du ha fire kombinasjoner. Hvis du har tre kan du ha femten, fire seksten. Fem tjuefem.
568	Siri	Så hvis
569	Mari	Er ikke det slik, hva heter det, slik, det er jo slik, er ikke det slik kvadrattall eller noe slik.
570	Siri	Ja, jeg tror det er egentlig.
571	Mari	Det er jo kvadrattall siden det er jo kvadratet.
572	Siri	Det er det det blir. For se den, den.
573	Mari	Den eneste forskjellen er hvis de hadde sagt at du måtte ha to forskjellige.
574	Siri	Jaja.
575	Mari	Så lenge de ikke har sagt det så blir det jo et kvadrattall. Så hvis du har liksom, du kan si at det er hundre smaker og da vet du med en gang at du kan gange hundre med hundre.
		(…)
581	Mari	Går det ikke an å skrive at x ganger x er lik antallet kombinasjoner.

Løsningsprosessen deres preges av at de støter på få problemer på veien, og kommer frem til løsningen også på deloppgave b) kjapt. Mari og Siri finner et mønster ved hjelp av tegningen de visualiserte i deloppgave a), og deres tegning gir dem derfor fremdrift også i deloppgave b). Dermed kan det tenkes at oppgaven etter definisjonene ikke er et problem for denne gruppa, da problemløsningsoppgaver ifølge Wæge og Nosrati (2018) blant annet skal være utfordrende og gi arbeid over tid. Dette er noe som også støttes av at læreren i intervjuet sier at kuleisproblemet ikke vil være et problem for alle. Utfordringen deres er mer hvordan de skal skrive systemet de har funnet (566). Mari har en forklaring på det (567), men hun sier at tre smaker vil bli femten, noe som ikke er et kvadrattall. Det kan tenkes at dette er en slurvefeil, siden hun i de andre eksemplene nevner kvadrattall, og ytringene 569 og 571 viser at det er kvadrattall hun mener. Med andre ord har de funnet et mønster ved å se på tegningen, og bruker dermed strategien visualisering kombinert med å finne mønster. Begge disse strategiene er også blitt identifisert av Kongelf (2011) sine analyserte strategier i matematiske lærebøker, og han sier at mønster kan komme av observasjoner av felles egenskaper, som i dette tilfellet blir mønster basert på tegning av fargene som representerer iskulene.

Mari (567) eksemplifiserer med to, tre, fire og fem samt hundre smaker (575). Med andre ord ser det ut som at hun generaliserer i problemløsningsprosessen. Ved hjelp av likheter i mønsteret fra tegningen og tallene kommer hun frem til et generelt mønster. Hun kommer frem til en generell formel, og dermed kan strategien identifiseres som generalisering, da dette er gjeldende for et vidt spekter av tilfellene i henhold til Mason et al. (2010). Dette kan også kalles å bevise, noe som inngår under Polyas (1957) tredje fase og Borgersens (1994) femte fase. De har bevist hypotesen (571) om at det er kvadrattall ved å lage en generell formel, x^2 (581).

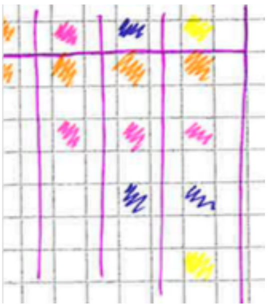
Elevene har til nå bare laget ett premiss for problemet; rekkefølgen betyr noe (det vil si at sjokoladesmak og vaniljesmak er ikke det samme som vaniljesmak og sjokoladesmak), og hver smak kan velges flere ganger per is. De har ikke tatt de tre andre mulighetene i betraktning, som er: Rekkefølgen på kulene betyr noe og smakene kan kun velges én gang per is, rekkefølgen betyr ikke noe og smakene kan kun velges én gang per is, rekkefølgen betyr ikke noe og smakene kan velges flere ganger per is. Da ville de fått andre kombinasjoner, og dermed andre løsninger. Imidlertid påpeker Mari at dette er svaret på oppgaven hvis de kan ha to iskuler med samme smak (573), og dette kan indikere at hun er klar over at det er flere løsninger.

4.2.3 Se tilbake

I neste time sier Siri at hun ønsker å sjekke løsningen igjen. Dette er også nevnt i slutten av forrige time. Med andre ord beveger hun seg inn i fjerde fase, se tilbake, som er å sjekke stegene som er gjort, og her inngår også å bevise at det er riktig, og sjekke alle utregningene og argumentene (Polya, 1957). Mari sier at hun har tenkt på dette problemet utenfor skolen, og kommer med en ny innretning.

Refleksjon over løsning fører til ny visualiserende tegning

598	Siri	Jeg tror vi må sjekke igjen oppgavene.
599	Liam	Mhm.
600	Siri	For jeg er litt usikker på toen.
		(…)
608	Mari	Se her, forrige gang sa jeg at det var kvadrattall men det er egentlig trekanttall, fordi at halvparten av de må du ta vekk.
609	Siri	Er det trekanttall?
610	Mari	Se, fordi at
611	Siri	Det er forskjell på vanilje og sjokolade, det er ikke noe forskjell på vanilje og sjokolade, sjokolade og vanilje. På en måte.
612	Mari	Se hvis du tar fire farger, så har du først den, sant, den kan være med seg selv. Det samme med den neste, den kan også være med seg selv. Men den kan også være med den oransje. Sant. Så hvis du setter strek der. Den fungerer ikke så bra. Så hvis du setter (Viser i boka si med tegning og farger for de ulike smakene).
613	Siri	Ahh, jeg tror jeg ser hva tankegangen din er.
		(…)
619	Mari	Sånn. Det samme med den. Den kan være med seg selv. Den kan både ha lilla og gul. Fordi at men den oransje kan ikke ha rosa, for den rosa har allerede oransje. Det samme med den gule.
620	Siri	Okei.
621	Mari	Eller. Men det går i hvert fall ikke som en firkant, det går som en trekant hvert fall. Fordi da går den oransje på alle men (ukjent tekst).



Figur 3: Mari sin nye tegning i løsningen av kuleisproblemet.

Med den nye tegningen har Mari utviklet oppgaven til å gjelde for uordnet utvalg, i stedet for ordnet. Det vil si at hun legger et nytt premiss der forskjellen fra sist time er at de da la føringer om at rekkefølgen spiller en rolle, mens nå er føringen at rekkefølgen ikke betyr noe. Det vil si at plasseringen av kulene betyr ikke noe, og da er smakene sjokolade og vanilje samme som vanilje og sjokolade, slik som Mari uttrykker det med farger (619). Premisset om at hver smak kan velges flere ganger er det samme enda. Siri påpeker også i ytring 611 at det ikke er forskjell på om en har vanilje først så sjokolade, eller omvendt. Med andre ord ser det ut som at de er enige i premisset om at plasseringen ikke betyr noe. Mari finner ut at det blir en trekant i stedet for et kvadrat. Strategiene er også i arbeid med dette premisset konkretisering av iskulene med farger, og visualisering ved tegning. Tegningen blir også her brukt i fortsettelsen av løsningsprosessen.

Refleksjon fører videre til nytt mønster og generalisering

629	Siri	Det blir ti.
		(…)
631	Siri	Og så blir det seks, så ti. Så blir det. Nå har det nesten vært én to tre fire.
632	Mari	Det blir én pluss to pluss tre pluss fire, fordi det er fire tall og siden.
633	Siri	Så da er det trekanttall. Så hvis du hadde hatt fem stykker, så hadde det vært femten, ikke sant.
634	Mari	Da hadde det vært pluss fem.
635	Siri	Ja, så hvis det hadde vært seks stykker så hadde det vært tjueen.

De finner nytt mønster; addisjon av alle de forrige tallene (631, 632). Siri eksemplifiserer med fem, og finner at fem smaker ville gitt femten mulige kombinasjoner som svar (633). Mari understreker at da hadde det vært pluss fem, og Siri fortsetter med seks. Disse eksemplene viser at de har funnet et mønster som gjelder for de tallene som de prøver ut. Prosessen med generalisering dreier seg ifølge Bjuland (2002) om spesifikke tilfeller som blir generelle ved å fokusere på likhet. De ser ut til å generalisere mønsteret i prosessen med ulike tall ved at de ser likheter i mønsteret; det økes med de forrige tallene, og det blir trekanttall.

Etter å ha tenkt på problemet fra forrige time, har de altså funnet et nytt premiss for oppgaven, og dermed enda en løsning på problemet. De har reflektert over løsningen, og arbeider videre med problemet. En ser her at strategien å se tilbake ved å studere sin egen tolkning er et viktig steg videre i løsningsprosessen. Det er ved refleksjon og at de ser seg tilbake at de finner et nytt premiss i problemet, og dermed driver dette dem videre i problemløsningen. Strategiene visualisering, finne mønster og generalisering gjentas i arbeid med dette premisset, men disse strategiene gjentas under det overordnete trinnet – se tilbake – i løsningsprosessen. De nåværende strategiene har de brukt uten veiledning eller hint fra lærer.

Lærers første møte med gruppa: Spørsmål om overbevisning fører til strategien monitorering
Læreren tipser dem nå om å lese oppgaven igjen, og dobbeltsjekke at det de har funnet ut stemmer. Hun sier at de må overbevise henne om at dette er riktig neste gang hun kommer tilbake, og går så fra gruppa. Dette kan ses i sammenheng med Mason et al. (2010) sin modell, som vektlegger viktigheten av at en skal overbevise seg selv, en venn og en som er mer skeptisk i arbeidet med å forklare hvorfor og overbevise argumentene sine i problemløsningsprosessen. I tillegg kan det ses i sammenheng med Polyas (1957) fase tre og fire som blant annet omhandler at en må sjekke hvert steg en har gjort og bevise at det er riktig, og reflektere over løsningsprosessen og sjekke resultatene og argumentene. Hun inviterer her til at elevene skal komme med en begrunnelse. Sekvensen under viser elevenes dialog etter lærers hint.

654	Siri	≈Når en tenker på det, hvor mange kan en <u>velge</u>. Er det forskjell på om en velger sjokolade og vanilje eller velger vanilje og sjokolade da, hvis det liksom? For da sier vi jo forskjellig rekkefølge. Fordi ting, ting, ting en gjør.
655	Mari	I så fall da fungerer den øverste. For hvis du starter med den grønne isen og tar på oransje, så blir det ikke det samme som om oransje tar på grønn.
656	Siri	Mhm
657	Mari	Men jeg tror ikke det er det de mener.
658	Siri	Ja, men det er det at. Vi kan jo si at vi tenkte på det og hvis det er slik de

		mente.
659	Liam	Ja.
660	Mari	Ja. Okei så vi har to like kombinasjoner bare at de er motsatt. Men det er jo det samme som at hvis du liksom plusser tall så har det ikke så mye å si om du har det ene tallet før eller ikke, for svaret blir jo det samme. Så jeg tror ikke det gjør så mye om du har tatt liksom motsatt. Men.
		(…)
665	Siri	Okei, hva synes du om dette svaret Liam? Det er ti mulige kombinasjoner av de fire smakene hvis du vil ha to kuler. Hvis du teller med forskjellig rekkefølge som et valg, er det seksten valg.
666	Liam	Ja, jojo.
		(…)
670	Mari	Da blir det jo det samme på neste da, for da er det bare i stedet for å plusse med fem ganger vi med fem liksom.
671	Siri	Ja men vi sier bare at da regner du ut som kvadrattall og da regner du ut som trekanttall.
672	Mari	Ja.
673	Mari	Det burde jo gå det. Da har du liksom begge mulighetene.
674	Siri	Mhm. Det kommer an på hva de egentlig spør om.
675	Mari	Er ikke dette, stemmer ikke dette da. Se. Fordi at i hvert fall den oransje kan være med oransje. Rosa kan være med oransje eller rosa. Lilla kan være med oransje, rosa eller lilla. Men hvis du setter lilla der så har den allerede gått der, sant?
676	Siri	Mhm.
677	Liam	Mhm.

Ytring 654 kan indikere at Siri stiller et monitorerende spørsmål, fordi hun stiller seg spørrende og kritisk, tenker over teksten, og sier at de da legger premisset forskjellig rekkefølge. Med dette virker det som om hun stopper opp for å være sikker på at de har forstått problemet ordentlig, og dermed kan dette ses i sammenheng med Schoenfeld (1992) sin forklaring på monitorering, der han eksemplifiserer monitorerig ved at en stopper opp for å være sikker på at en har forstått oppgaven. Siri legger trykk på ordet velge, noe som understreker at hun tenker gjennom oppgaveteksten igjen. Hun lurer på om rekkefølgen betyr noe. Dette har Mari (655) et svar på, og da er løsningen kvadrattall, altså rekkefølgen betyr noe og samme smak kan velges flere ganger. Likevel tror ikke Mari at det er det oppgaven spør etter (657), og dette begrunner hun (660) når hun påstår at det kan sammenlignes med å addere tall - at det ikke er av betydning hvilket tall som står først og sist. Siri prøver trolig videre å inkludere Liam i dialogen, og få han med på tankemåten ved å lese opp det hun har skrevet (665).

Mari (675) begrunner hvorfor dette kan stemme ved å vise med kulene som er konkretisert med farger og visualisert. Dette kan også minne om monitorerende strategi ved at hun kontrollerer løsningen (Schoenfeld, 1992), der hun går tilbake til tegningen og vurderer svaret de har fått, samt argumenterer for at det er riktig ved at det virker som at hun dobbeltsjekker kombinasjonene for å sjekke om de har fått brukt alle iskulene i forhold til premisset. Monitoreringsstrategien kan ifølge Bjuland (2007) relateres til når elevene ser tilbake og sjekker overbevisende argument, noe som ser ut til å være tilfelle i Mari sin ytring. Siden denne dialogen fremkommer etter lærers hint om å dobbeltsjekke og overbevise, kan det tyde på at det er lærerens hint som fører til at elevene tar i bruk monitorerende strategier. Hintet hennes om dette ser altså ut til å ha innflytelse på elevene på den måten at de sjekker gjennom problemet, og bruker monitorerende strategier.

Å finne mønster er altså en strategi som elevene i elev-elev dialogene har brukt for å finne de to svarene ti og seksten kombinasjoner. Mari (670) ser at mønsteret også gjelder på deloppgave b), noe som Siri (671) utdyper. De har mer eller mindre generalisert denne oppgaven ved hjelp av visualiseingen og enkelttilfeller, men uten å ha funnet en formel for trekanttallene. De har generalisert ved at de ser at det gjelder for tallene de har prøvd, og ser hvilket mønster dette forsetter i, enten rekkefølgen betyr noe eller ikke, eller om det er kvadrattall eller trekanttall. Med andre ord bygger denne generaliseringen på mønsteret som har oppstått av deres visualiserende tegning. Det er disse strategiene som gir dem fremdrift og løsning på problemet. Likevel har de ikke bevist dette med en formel som alltid vil gjelde for trekanttallene. Dermed har de fortsatt bare en hypotese og for at denne skal bli gjeldende, må de bevise (Borgersen, 1994), slik de har gjort med kvadrattallene.

De har altså nå kommet frem til at hvis en mener at rekkefølgen ikke betyr noe, har en ti mulige kombinasjoner, mens hvis rekkefølgen på iskulene betyr noe, da er det seksten mulige kombinasjoner en kan ha smakene på. Første time kommer de kun frem til seksten kombinasjoner, men etter å ha sett tilbake på oppgaven, slik som Mari (608), og sett gjennom den som Siri (598) foreslo, kom de frem til enda en løsning. Her ser en betydningen av å se tilbake (Polya, 1957), da det er dette som gir dem fremgang i løsningen ved at de finner enda et svar. Lærers hint fører til at de kontrollerer disse løsningene de har kommet frem til i begge premissene de har laget, og bruker monitorerende strategier.

Lærers andre møte med gruppa: Hint om å lage en formel

Læreren kommer bort til gruppa igjen, og elevene forklarer svarene. Læreren utfordrer dem til å finne en regel med et algebraisk uttrykk.

740	Liam	Det er vel slik, x antall smaker, også må du plusse, em, naturlige rekkefølge med tall foran det. Slik, hvis du har seks, så plusser du alle, en to tre fire fem seks sammen (2s) så får du trekanttall.
741	Siri	Em, er vi klar for å ta alternativ b, jeg tror den er lettere. Kvadrattall er lettere å skrive en formel på. Tror jeg.
742	Mari	Ja men det er jo bare x ganger x.
743	Siri	Ja, egentlig, x i andre.

Liam (740) finner mønsteret til kombinasjonene på smakene der rekkefølgen ikke betyr noe. Dette har Mari og Siri snakket om før, og det kan derfor tenkes at Liam med denne ytringen bekrefter at de har felles forståelse i gruppa (Carlsen, 2008), selv om han ikke har deltatt aktivt i dialogen. Det er tydelig at de ser mønsteret, og klarer å bruke trekanttallene basert på de foregående tallene. Siri (741) foreslår at de kan finne formelen på kvadrattall i stedet, da dette er enklere, og vil dermed bruke strategien å forenkle problemet (Kongelf, 2011). Men denne formelen har allerede Mari klar (742), x multiplisert med x. Dette sa Mari også tidligere (567, 581). Dermed har de allerede en formel for kvadrattallene, altså hvis rekkefølgen har betydning, og det er lov å ha to like iskuler. Det ser imidlertid ikke ut som at Siri ser dette før nå. Det kan derfor være at hun ikke var helt med på Mari sin tankegang i ytringene 567 og 581.

Videre arbeid med problemet etter lærers hint: Prøving og feiling i forsøk på videre generalisering

De tre elevene jobber nå i hver deres bok og prøver å finne en generell formel for trekanttall ved bruk av x, etter lærers hint om algebraisk uttrykk. De prøver å generalisere ved hjelp av strategien prøving og feiling. De prøver ut noen spesifikke tilfeller med x og setter ulike tall inn for x. I generaliseringsprosessen prøver de altså ut enkelte tall inn i ulike uttrykk, og derfor kan dette indikere strategien spesialisering, som omhandler å prøve ut noen spesifikke tilfeller (Mason et al., 2010). Med andre ord ser det ut som at de i forsøk på å generalisere prøver ut spesialiseringer. Mason et al. (2010) peker på at spesialisering kan hjelpe med å finne mønster som kan lede til en generalisering. På denne måten ser det ut som at spesialisering og generalisering foregår samtidig i prosessen med å finne en formel. De jobber med andre ord med strategier som skjer under Polyas (1957) fjerde fase samt Borgersens (1994) sjette og syvende trinn, da de her reflekterer over løsningen og arbeider videre med den i forsøk på generalisering. I prøvingen og feilingen av ulike uttrykk med x som variabel, prøver de å bevise at det gjelder flere enn det enkelte tilfellet de prøver. Dette blir observert fra alle elevene flere ganger, og Mari sin ytring under viser et eksempel på dette.

749	Mari	Slik, først tenkte jeg slik, eller slik, hvis du har bare tre tall fungerer det, men det fungerer ikke lengre oppe, for jeg tenkte at hvis du har x ganger x minus x, for jeg tenkte tre ganger tre det er ni, minus seks, og trekanttallet til tre det er jo seks. Men det fungerte ikke med fire da. Fordi fire ganger fire er seksten minus seksten har du tolv og ikke ti.

Det blir observert flere ganger at det fungerer med ett eller noen få tall, men ikke med alle. Denne prøvingen og feilingen av ulike uttrykk og tall er tydelig deres strategi for å prøve og nå et generelt uttrykk i dette problemet, noe som er en tidkrevende prosess.

De går i niende klasse, noe som kan være grunnen for at de trolig ikke har vært borti formlene for trekanttall og kvadrattall. I elevintervjuene og lærerintervjuet understrekes det at de er vant med å jobbe med rutineoppgaver. Dette kan også være årsaken til at de ikke klarer å skrive ned formelen selv om de ser sammenhengene. Likevel bruker de x som en variabel, som står for ulike smaker. En kan kanskje ikke forvente av niendeklassinger å komme frem til en slik formel, selv om dette er en sterk faglig gruppe elever. På den andre siden er formelen for når mønsteret er kvadrattall funnet tidligere. Tipset fra læreren om å finne et generelt uttrykk, fører til at elevene arbeider lengre med problemet, og dermed jobber de seg videre i problemløsningsprosessen hvor de tar i bruk strategiene prøving og feiling og prøver å spesialisere og generalisere samtidig.

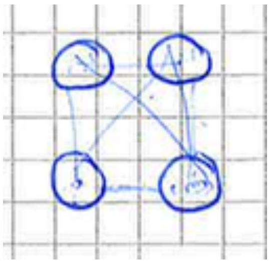
Videre gir læreren elevene tips om at de kan legge bort problemet for en stund, og ta det opp senere. Selv om læreren ber dem om å legge bort problemet, fortsetter gruppa å diskutere uttrykkene. Det kan av denne grunn se ut som at problemet gjør elevene nysgjerrige etter utvidelsen de har fått fra lærer, og videre kan dette tolkes i retning mot at problemløsningsoppgaven virker motiverende for elevene. Basert på Polya (1957), skal problemer utfordre elevenes nysgjerrighet, noe som kuleisproblemet virker å gjøre i denne gruppa spesielt etter at de har sett tilbake, og etter utvidelsen med å lage algebraisk uttrykk.

Siri spør også om deres nåværende svar er greit, og læreren svarer at det var overbevisende (894). I gjennomføringsfasen er nettopp å overbevise seg selv og andre, altså å forklare hvorfor, sentralt (Mason et al., 2010). På den andre siden har ikke Siri rettferdiggjort stegene i argumentene sine, og det hun sier fungerer ikke for alle tall. Derfor kan det tenkes at læreren synes det var et greit svar i forhold til den kunnskapsbasen de har (Schoenfeld, 1992).

Som tidligere påpekt, er dette en rik oppgave. En rik oppgave skal ta tid, og gruppe A har brukt flere matematikktimer på å løse problemet. Elevene gir ikke opp selv om læreren har anbefalt dem å jobbe med et annet problem. Etter at læreren ber dem finne en formel ser det ut som at oppgaven blir en utfordring for elevene, og de jobber lenge med denne delen av problemet, der de benytter seg av flere strategier som prøving og feiling og spesialisering og generalisering i forsøk på å finne formel. Som Polya (1957) anbefaler, bør læreren i problemløsningsarbeidet utfordre elevenes nysgjerrighet på den måten at en gir problemer som passer til deres faglige kunnskaper. Dette kan læreren gjøre ved å gi stimulerende spørsmål i forhold til hvilken kunnskapsbase elevene har. På denne gruppa ser det ut som at læreren tilpasser spørsmålene. Hun understreker at hun tror de er flinke nok til å klare å lage formel. Dette tyder på at hun utfordrer dem ut fra deres faglig sterke nivå i matematikk, og videreutvikler oppgaven. At hun sier at hun har troen på dem, kan også være en av grunnene for at elevene ikke gir seg med oppgaven, og støtten kan på denne måten være en motivasjonsfaktor.

Gruppe B sine strategier i kuleisproblemet

I denne delen av analysen vil jeg kun beskrive kort hvordan gruppe B arbeider med samme problem, før jeg går over til bordpartnerproblemet der fokus vil være gruppe B og lærerhjelp. Gruppa arbeider med dette problemet i cirka 14 minutter. De leser problemet høyt, Nils sier at han ikke forstår oppgaven, og Ole forklarer han med eksempler på issmaker. Pia lager en tegning av iskulene, og bruker pennen mens hun forklarer de mulige kombinasjonene.



Figur 4: Pia sin tegning i løsningen av kuleisproblemet.

Her bruker Pia Polya (1957) og Borgersen (1994) sin anbefalte problemløsningsstrategi å lage tegning, som jeg har valgt å kalle visualisering. Pia foreslår først åtte kombinasjoner, så ombestemmer hun seg og sier det er seks kombinasjoner. Dette er Nils og Ole uenige i, de mener det er tolv. Grunnen til uenigheter kommer av at de har laget ulike premiss for problemet, de har altså definert problemet forskjellig. Dette med å definere problemet er Borgersens (1994) første trinn i problemløsning, og strategien er derfor en viktig del i starten av prosessen. Pia og Ole forklarer ut fra sine egne tegninger hvordan de tenker. Derfor kan tegningene bli sett på som et medierende verktøy hver for seg, da disse er Pia og Ole sine formidlingsverktøy (Dysthe, 2001), sammen med språket (Carlsen, 2008). Ole tenker at rekkefølgen har betydning, sjokolade og vanilje er ikke det samme som vanilje og sjokolade. Pia, derimot, mener at rekkefølgen ikke har betydning, da hun fremhever at ”den kulen har allerede vært med den”. Hun kommer plutselig frem til enda et premiss, at en kan ha samme smak. Dette er Ole uenig i, da han sier at kulen ikke kan brukes to ganger. På deloppgave b) svarer de at hvis det er flere smaker å velge mellom, kan Hanne få flere alternativer å velge mellom. Mangel på felles fokus og forståelse av hverandres tegninger kan være grunnen for at de ikke blir enige om løsningsmetode (Carlsen, 2010).

Læreren kommer til gruppa én gang i løpet av arbeidet, og spør om det er forskjell på om jordbær er øverst eller nederst. Hun sier at de må være bevisste på hva de bestemmer seg for. Likevel skriver elevene kun det ene svaret som Pia mener er riktig; ti mulige kombinasjoner. Det kan tenkes at grunnen til at de bare skriver ett svar, som ikke engang Ole og Nils er enige i, kommer av deres erfaringer med matematikk samt holdningene deres i faget. Dette kan ses i sammenheng med Schoenfeld (1992) sitt poeng om at mange elever har holdninger i matematikk om at det kun er ett riktig svar på problemet. I tillegg kan lærerens kommentar i lærerintervjuet supplere dette poenget med ytringene under.

1248	Meg	Hvor ofte har dere arbeidet med problemer med mer enn én løsning?
1249	Lærer	Det er ikke så veldig ofte vi gjør det faktisk.

De er altså ikke vant med å arbeide med oppgaver som gir flere svar, og dermed kan det kanskje ikke forventes at de plutselig skriver ned flere svar etter så kort tid med problemløsningsoppgaver. Elevene snakker ikke mer om oppgaven, og sjekker heller ikke om de har gjort riktig. Fraværet av dette kan forklares ut fra deres erfaringer med å arbeide med matematikkoppgaver som kjennetegnes som rutinepreget oppgaver, der de er vant med å gjøre mange liknende oppgaver, for så å gå over til neste, slik som matematikkundervisningen i skolen generelt er blitt kjennetegnet som (Svingen & Gilje, 2018). Slik som Schoenfeld (1992) i sin studie viser, vil en stor del av elever velge en metode og følge denne for å løse problemet, mens en ekspert problemløser vil følge metoder som gir fremgang ved hjelp av monitorering. Elevene er ikke eksperter, de er i nybegynnerfasen. Derfor kan deres fravær av å se tilbake på løsningen, sjekke hvilken metode som virker logisk, og jobbe videre med problemet også forklares ut fra dette.

Løsningen har de altså funnet ved hjelp av Pia sin visualiserende tegning og hennes streker med pennen. En ser også i dette problemet at det er strategien visualisering som fører til fremdrift. I neste del av analysen vil jeg analysere samme gruppe i arbeid med bordpartnerproblemet, der lærerens stemme kommer mer til uttrykk.

4.3 Strategier brukt i bordpartnerproblemet av gruppe B

I kommende analyse er gruppe B med lærerhjelp fokus. For å synliggjøre lærerhjelpen, og skille strategiene som blir brukt med og uten lærerhjelp, vil jeg i analysen tydeliggjøre lærerens møter med elevene i overskriftene. Dette gjøres ved å skrive bare strategiene når elevgruppa kommer med strategier på egenhånd i elev-elev dialogene, og lærers møte med gruppa blir brukt som overskrift der lærer gir hint som fører til strategiene. Dette vil bli integrert under de overordnete overskriftene som er Polyas (1957) faser. Denne gruppa jobber i de tre første fasene. Problemet er selvvalgt av gruppe B, og i intervjuet begrunner de valget ved at det virket interessant. Problemet er som følger:

”Tone inviterte 17 venner til middag og hun ga hver gjest et kort med et tall fra 2 til 18 og beholdt nummer 1 selv. Da alle hadde satt seg, viste det seg at summen av alle kortene til hvert par ble et kvadrattall. Hvilket tall hadde Tones bordkavaler (bordpartner)?”. (T. Bulien, personlig kommunikasjon, 2017. Problemløsningsoppgaver fått av foreleser i emnet MUT300).

Gruppa arbeider med problemet i tredje og fjerde undervisningsøkt (oversikt i tabell 1, kapittel 3.3). Når elevene begynner å arbeide med problemet er det kun Pia og Nils som er til stede. Analysene av dialogen fra den første smågruppetimen viser derfor diskusjonen mellom Pia og Nils, før Ole deltar i den andre timen med problemet. Timen begynner med at Pia og Nils leser problemet hver for seg. Dette med å lese problemet hver for seg først, kan ifølge Wæge og Nosrati (2018) være lurt slik at de får dannet seg noen egne tanker før gruppesamtalen.

4.3.1 Forstå problemet

Dele opp problemet: Definering av ord, eksemplifisering

6	Pia	Okei. Forsto du det?
7	Nils	Em, ja.
8	Pia	Vil du prøve deg?
9	Nils	(8s) Hva er kvadrattall?
10	Pia	Em, kvadrattall. Det er slik (3s) (tar opp chromebook).
11	Pia	Kvadrattall er hele tall som samtidig er produkt av to like tall. (.) Det forsto jeg ikke noe av.
12	Pia	Ja. Forsto du det?
13	Nils	Nei.
14	Pia	Huff, huff, huff.
15	Nils	(5s) Åja.
16	Pia	Åja, kan du forklare til meg?
17	Nils	Vent litt.
18	Nils	Et kvadrattall er et tall som er et annet tall. (3s) Jeg forstår det ikke.
		(…)
21	Pia	Vi må spørre lærer hvis hun kommer. (8s) Som du kan ta kvadratroten av

		og få et heltall som svar. (3s) Kvadratroten av åttien er ni. (4s) Det er ikke det vi skal finne ut av da. Dette er fordi (2s) å, jeg tror jeg forstår det.
22	Pia	Fordi hvis du tar et tall og ganger det med seg selv, så blir (.) det tallet som du får til svar et kvadrattall.
23	Nils	Hva? Forklar igjen.
24	Pia	Det står at kvadratroten av åttien er ni, og det, det er fordi ni ganger ni er åttien, sant.
		(…)
28	Pia	Okei, hvilket tall hadde Tones bordpartner (.) hva?
29	Pia	Jeg forsto fortsatt ikke oppgaven.
		(…)
34	Pia	Lærer, vi trenger hjelp.
35	Lærer	Trenger dere hjelp. Så kjekt.
36	Pia	Vi forsto ikke oppgave seks.
37	Lærer	Okei. Kan du lese den for meg?

Det kan se ut som at Nils (9) er klar over at de må vite hva kvadrattall er for å løse problemet. Dette spørsmålet fører til at Pia søker opp ordet kvadrattall, og hun leser en definisjon som verken hun eller Nils forstår. Fra ytringene 21-22 kan det se ut som at Pia begynner å forstå ordet, etter å ha tatt i bruk datamaskinen som verktøy der hun også gir eksempel på kvadrattall fra internett. De bruker dermed strategiene å definere ordet kvadrattall og eksemplifisering. Analysere og definere problemet er Borgersens (1994) første trinn i problemløsningsmodellen, og i denne sekvensen kommer viktigheten av å forstå og definere ord frem. Uten å forstå kvadrattall vil trolig ikke elevene forstå selve problemet. Likevel har de enda ikke forstått helheten av oppgaven, noe som ytringene 34 og 36 viser. Polya (1957) understreker at delene i problemet bør settes fra hverandre. Ved å definere samt prøve og forstå ord for å forstå problemet, kan det forsøkes og deles opp.

Lærers første møte i veiledning av elevene: Dele opp problemet og analysere problemet

Pia leser oppgaven for læreren. Læreren spør hva som er vanskelig, og Pia sier å forstå oppgaven. Lærer spør om det er ord de ikke har forstått, og elevene sier at de har funnet ut hva kvadrattall er. Dette ønsker læreren å sjekke, og spør om Nils kan forklare hva et kvadrattall er. Slike spørsmål som læreren stiller for å sjekke er viktige i lærers veiledning ifølge Alexander (2008).

46	Nils	Det er liksom slik (.) eh, det er et tall (.) det er vanskelig å forklare. Men liksom. Et kvadrattallet av ni er åttien siden liksom, du ganger med deg selv og så det du ganger med deg selv. Nei jeg klarer ikke å forklare.
47	Lærer	Jo det gjør du, absolutt. Veldig bra.
48	Nils	Okei. Ni, for eksempel, også ganger du med ni igjen så blir det åttien.
		(…)
51	Lærer	Ja, så kvadrattallet til tre vil da være?
52	Nils	Tr, Ni. Vent. Hva?
		(…)
55	Lærer	Og da. Okei. Så sto det her videre. Hva sto det mer da? Da har dere funnet ut hva kvadrattall var.

Nils bruker strategien å eksemplifisere når han forklarer læreren hva et kvadrattall er. Det virker som at han er usikker på hva et kvadrattall er, men det kan også være at han synes det er vanskelig å forklare, slik han selv uttrykker (46). Eksempelet gjør det trolig lettere for han å forklare, og det kan være at det er eksempelet som gjør at han forstår bedre hva et kvadrattall er. Læreren spør hva kvadrattallet til tre vil være, og med dette tester hun ut om han virkelig har forstått hva et kvadrattall er, noe som er viktig for å løse problemet. Dette med å diskutere ord som elevene ikke forstår er også av Lester et al. (referert i Schoenfeld, 1992) påpekt som viktig under lærerveiledningen i fasen med å forstå problemet.

Videre ber læreren Pia å lese oppgaven en gang til. Å lese oppgaven nøye er viktig for å forstå selve problemet (Polya, 1957; Mason et al., 2010).

61	Lærer	Så summen (2s) viser det seg at summen av tallene på kortene (.) til hvert par.
62	Pia	Hvert par.
63	Lærer	Mhm. Hvert par. Hva betyr det? Summen av tallene på kortene til hvert par (.) ble et kvadrattall.
64	Pia	Eh.
65	Nils	Liksom. Når du plusser alle eh, kortene sammen (.) og det var et kvadrattall.

66 Lærer Så summen har noe med pluss å gjøre?
67 Nils Ja, eller liksom, ja
68 Lærer Mhm.
69 Lærer Hvilke kvadrattall kan dere da? (2s) Hadde det vært litt lurt og funnet ut?

Læreren legger trykk på ordene summen og par. Meningen med dette kan være at hun prøver å dele opp problemet for dem, og hjelper dem med å finne ut hva det spørres om i problemet, ved å analysere det og definere ordene. Dette er noe som kan ses i henhold til Säljö (2001), når han foreslår at læreren kan veilede elevene i problemløsningsprosessen ved å dele opp problemet for elevene. Hun stiller et ledende spørsmål (66) i hjelpen med å forstå problemet bedre. Hun har påpekt at det spørres om både kvadrattall og sum. I tillegg gir læreren et tips om at de bør finne ut hvilke kvadrattall en har (69). Lærerens spørsmål ser ut til å ha en monitorerende rolle (Carlsen, 2008), da hun foreslår hvordan elevene kan jobbe videre med problemet, å skrive ned kvadrattallene, i tillegg til at hun ber dem lese oppgaven høyt flere ganger. Før læreren går, ber hun Pia snakke med Nils mens de arbeider. Det er viktig med en felles forståelse i dialogen (Mercer & Littleton, 2007; Carlsen, 2010), og her fremhever læreren den sosiokulturelle tilnærmingen.

Lærers hint fører til å skrive ned kvadrattall og stille spørsmål om videre prosess

I neste sekvens gjør de som læreren gir hint om, og skriver ned kvadrattallene.

95 Pia Så har vi tre ganger tre (2s) ni.
96 Nils Om vi skal plusse alle disse etterpå?
97 Pia Sikkert. Jeg vet ikke. Eh, ni. så har vi fire ganger fire
(…)
126 Pia Femten. Tohundre og tjuefem. (7s)
127 Pia Ja. Okei. Hva skal vi gjøre nå?
128 Nils Tror vi skal plusse dem.
(…)
131 Pia La oss plusse dem. Hvis du sier tallene.
137 Nils Seksten, tjuefem, trettiseks, førtini, sekstifire, åttien, hundre, hundre og tjueen, hundre og førtifire, hundre og sekstini, hundre og nittiseks, tohundre og tjuefem, tohundre og femtiseks, tohundre og åttini.
(…)

140	Pia	Jeg forstår fortsatt ikke hva vi driver med. Okei.
141	Nils	Hehe, også skal vi gange det med, nei. Hva er det vi holder på med.
143	Pia	Okei. Også. Skal vi gange det?

Elevene finner kvadrattallene til alle tall opp til femten, og dette gjør de ved hjelp av regnearten multiplikasjon og verktøyet kalkulator. Ytringene 96-97 viser at elevene enda ikke helt forstår problemet, og jobber fortsatt i denne fasen. At de ikke vet hva de holder på med, blir understreket flere ganger i sekvensen, og dette kan komme av at det var læreren sitt hint som trigget dem i å finne kvadrattallene. At de finner kvadratet av tall helt opp til 15, tyder også på at de ikke har forstått problemet, da de ikke hadde trengt høyere kvadrattall enn 25, altså kvadratet av tall opp til fem. Trolig etter lærers hint er også addisjon på banen, da Nils ganske tidlig (96) kommer med spørsmålet om de skal plusse. Likevel virker det som at det går litt i surr med multiplikasjon og addisjon, og hva de faktisk skal gjøre. Sekvensen er preget av strategien å stille spørsmål til hverandre om hva de skal gjøre videre i prosessen. Åpne spørsmål som problemløsningsstrategi i dialogen er viktig (Bjuland, 2002). Disse spørsmålene tyder imidlertid på usikkerhet rundt problemet, og de klarer ikke å besvare dem. Det blir ikke observert at de går tilbake til problemteksten og leser den en gang til. Dette kunne muligens ha vært til hjelp for å svare på spørsmålene de stiller, og til å forstå problemet bedre.

Lærers andre møte med gruppa: Hint om kvadrattall fra 1-18 samt spørsmål om mulige tall på Tones bordpartner

Lærer kommer bort til gruppa, og Nils sier at de ikke vet hva de holder på med. Hun anerkjenner deres arbeid av å ha skrevet ned kvadrattallene, og spør om de klarer å lage noen kvadrattall av tallene fra én til atten. Med andre ord, hun gir dem enda et hint, og dermed deler hun opp problemet enda mer for dem, slik som Säljö (2001) anbefaler i veiledningen. Læreren leser problemet for dem, og mens hun gjør dette modellerer hun med hendene sine, og bruker elevene som konkreter for par som sitter over hverandre. Dette gjør hun sent og tydelig i form av gestikulering mens hun snakker. Læreren spør videre hvilke tall bordpartneren til Tone kan ha, og går så videre til en annen gruppe. Hun gir dem dermed et hint før hun går.

198	Pia	Okei. Hva var det hun stilte spørsmål om før hun gikk?

199	Nils	Jeg husker ikke. Jojojo, nå husker jeg det, nå husker jeg det. Det var (2s) det siste her, hvilket tall har Tones bordkavaler, bordpartner?
200	Pia	Men det er jo hele spørsmålet. Hvordan skal vi komme med svaret?
201	Nils	Ja, men hun spurte om det så gikk hun.

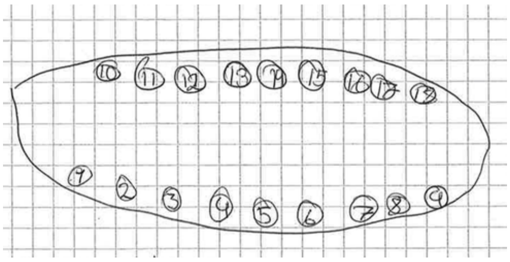
Det er tydelig at det er lærerens hint og spørsmål som fører elevenes samtale og strategier videre, og de virker avhengig av læreren. Det kan se ut som om de enda ikke helt forstår problemet, da de ikke vet hva de skal gjøre. De forsøker å finne ut hva læreren spurte dem om, i stedet for å lese problemet igjen. Dermed virker det som at lærerens spørsmål betyr mye for hva elevene gjør og hvilke strategier elevene i denne gruppa benytter seg av. Likevel kan det se ut som om lærerens hint om kvadrattall fra 1-18 ikke hjelper elevene, siden de trolig ikke husker hva hun spurte om. Neste sekvens viser strategier uten at lærer har gitt hint om dette.

Visualisering og prøving og feiling

203	Pia	Kanskje vi kan finne det oppgaven på. Vi kan prøve og tegne. La oss tegne.
204	Nils	Tegne?
205	Pia	Vi kan tegne bordet. Sant (tegner et rundt bord og sirkler inni bordet).
206	Nils	Okei.
208	Nils	Men hvor mange folk er det? Er de ikke atten?
209	Pia	De er atten (sier dette på likt med Nils sin forrige ytring) åja, da må det være ni (tegner ni sirkler på hver side av bordet).
210	Nils	Okei.
211	Pia	Okei. Jeg bare skrev sånn, nummererer de helt random. Vet ikke om det var vits. Og så må vi finne ut hvem som sitter over nummer én. Én ganger elleve (peker med fingeren på nummer én).
212	Nils	Okei, så dette er liksom Tone?
213	Pia	Sikkert. Jeg vet ikke hvor Tone sitter.
214	Nils	Vi bare sier hun sitter der.
215	Pia	Vi sier hun sitter der.
216	Nils	Hvor er din én?
217	Pia	Én, så går du ni så går du sånn.
218	Nils	Okei.

219 Pia Også skal, ja, finne ut én ganger elleve, det er elleve. Én ganger ti er ti. Men kvadrattall er bare ditt eget tall. Da står jo, huff.

220 Pia Trenger hjelp av lærer.



Figur 5: Pia sin tegning av bordet og personene i bordpartnerproblemet

Pia tar i bruk strategien visualisering. Å tegne en modell av bordet fører til at problemet visualiseres, og det kan være at de da forstår problemet bedre på den måten at det forenkles. Å tegne er en strategi som er anbefalt i litteraturen for å forstå problemet (Polya, 1957; Borgersen, 1994). Nils sitt spørsmål (204) indikerer at han ikke helt forstår hvordan Pia har tenkt å tegne problemet. Likevel virker det som at han samtidig følger med, da han senere kommer med et spørsmål (208) som trigger Pia sin tankemåte, noe som gjør at hun tegner ni på hver side av bordet. Spørsmålene Nils stiller i denne sekvensen kan tyde på at han prøver å danne en felles forståelse av problemet, noe som er viktig i gruppearbeid (Mercer & Littleton, 2007; Carlsen, 2008). Mening og forståelse ser det ut til at de prøver å oppnå ved hjelp av inskripsjon i form av tegning samt medelev som medierende verktøy (Carlsen, 2008).

Pia antyder bruk av strategien prøve og feile når hun prøver ut to tilfeller av Tone og bordpartnerens tall (219). Å prøve og feile er Borgersen (1994) sitt tredje trinn i problemløsningsprosessen, og en problemløsningsstrategi. Hun prøver én ganger elleve og én ganger ti, men finner fort ut at dette ikke kalles kvadrattall. Dette ser ikke ut til å være systematisk prøving og feiling, da hun prøver med tilfeldige tall, og kun to tall (Torkildsen, 2017). Hun kommer altså ikke frem til et mønster med prøvingen og feilingen, og dette fører til at hun blir oppgitt, og ønsker å få hjelp av lærer. Det virker ikke som hun helt har forstått problemet enda, fordi hun multipliserer bordkortet til Tone med et annet kort. Av problemteksten fremkommer det at de skal summere.

Lærerens tredje møte med gruppa: Ledende spørsmål for å forstå problemet

Læreren kommer til gruppa igjen, og Pia forklarer at de har laget bordet. Dette synes læreren er smart. Likevel kan det se ut som at de trenger enda mer hjelp for å forstå problemet ordentlig, da visualiseringen ikke ser ut til å hjelpe dem med å forstå det. Pia spør hvordan én kan ganges med et annet tall som blir kvadrattall. Med dette spør læreren om det står at det skal ganges. Fra problemet fremkommer at de skal ta summen av dem, og derfor spør læreren hva summen betyr, og de blir enige om at det betyr til sammen. Lærerens ledende spørsmål fører altså til at elevene får definert ordet sum, som er sentralt for å forstå problemet.

Læreren, sammen med elevene, jobber fortsatt med å dele opp problemet og analysere det ved å definere ordene hver for seg for å forstå problemet. De har brukt en del tid på å finne ut hva kvadrattall er, og det virker som om de blander litt og ikke helt klarer å holde styr på forskjellen på sum og multiplikasjon, som er sentralt i problemet. Elevene har hengt seg opp i at de må multiplisere et tall med seg selv for å få kvadrattall, og det virker som de glemmer det andre leddet i problemet. Læreren stiller ledende spørsmål for at elevene skal forstå at de er nødt til å addere to og to kort for å svare på problemet. Med andre ord gir hun dem ikke svaret, men bruker spørsmål for å lede dem på riktig spor. Dette er observert flere ganger. Dette funnet kan også suppleres med lærerintervjuet når læreren svarer på spørsmålet mitt om hvordan hun stiller spørsmål i veiledningen. Da sier hun følgende:

1250	Lærer	Jeg pleier alltid å spørre dem spørsmål i stedet for å gi dem svaret. (…) Still et nytt spørsmål som setter dem på sporet på det de egentlig ønsker å få til svar.

Timen avsluttes like etter. Hele timen har elevene, med mye veiledning fra lærer, jobbet med å forstå problemet, mer presist å definere de ulike ordene i problemet; kvadrattall og sum. Læreren har hjulpet dem med å dele opp problemet, og forstå ord hver for seg. Sekvensene er i stor grad preget av å gjøre det som læreren hinter om, og hennes hint fører til at elevene bruker strategiene å dele opp problemet, analysere problemet og definere ord. Andre strategier som elevene har brukt er å stille spørsmål, visualisering og spor av prøving og feiling.

4.3.2 Lage en plan

Lærers fjerde møte med gruppa: Hint om konkretisering (modellering)

I neste time er også Ole med i samtalen. Pia rekker opp hånda uten å prøve og jobbe selv, og læreren kommer til gruppa etter en stund. Pia sier at de ikke forstår. Da kommer læreren med en idé om at de kan lage bordkortene, og finne ut hvor de skal være i forhold til hverandre, og finner ark og saks til dem.

Læreren ber Ole, som ikke var med i arbeidet med problemet forrige time, om å lese problemet nøye, noe som er i tråd med Polya (1957) og Mason et al., (2010). Pia og Nils klipper opp og skriver tall på ni bordkort hver, og Pia legger bort kort nummer én, og sier at det tilhører Tone.

348	Pia	Eh, hehe. Jeg vet ikke helt hva vi skal gjøre. Vi skal finne ut. Hehe. Eh≈
349	Ole	≈hva tall Tones bordpartner har, for at det ble et partall, nei kvadrattall.
350	Pia	Mhm. Når de satt seg ned, viste det seg at <u>summen</u> av tallene på kortene til hvert par, altså hvis de sitter over hverandre så blir det et kvadrattall. (Leser problemet, og viser med hendene når hun sier ”over hverandre”)
351	Ole	Ja.
352	Pia	Okei. Så da må vi regne ut. (4s) Okei. Så. En sitter her.
353	Ole	(Ukjent tekst) kvadrattall?
354	Pia	Kvadr, nei vi søkte, vi brukte hele tiden på å søke opp det sist gang. Det er slik når du for eksempel tar fire ganger fire, så får du seksten. Så, kvadrattall av seksten er ni, nei fire, er det det?
355	Nils	Ja.
		(…)
359	Pia	Så må vi finne ut én pluss hva da for å bli et kvadrattall. Og det må vi også gjøre på to, og sånn. Neste. Alle skal bli kvadrattall. (Legger hånda på én, og ser på resten av kortene mens hun snakker).

Pia leser problemet, noe som er viktig i prosessen med å løse problemet, og som Mason et al. (2010) vektlegger spesielt i inngangsfasen. Det ser ut som at Pia er på vei til å forstå problemet bedre, da hun legger trykk på ordet summen, og sier med egne ord ”altså hvis de sitter over hverandre så blir det et kvadrattall” (350). Å gjøre oppgaven om til egne ord kan indikere at hun har forstått problemet, siden problemet virker å ha blitt hennes eget. Dette tyder videre på at hun beveger seg over i gjennomføringsfasen, da Mason et al. (2010) påpeker at denne fasen er i gang når en har forstått spørsmålet og det har blitt ens eget. Hun har gjort det litt enklere, og modellerer med hendene sine. Som en ser ut fra sekvensen over, virker det som om Ole jobber med å forstå problemet. Han kommer inn i problemet en time senere enn Pia og Nils, og det virker ikke som han vet hva et kvadrattall er (353). Pia forklarer han med et eksempel (354), og Nils bekrefter at hennes eksempel er riktig (355). Dette med å ha en felles forståelse er viktig i den sosiokulturelle tilnærmingen (Mercer & Littleton, 2007), noe som det ser ut som de prøver å få når Ole inkluderes i samtalen og blir forklart hva kvadrattall er. Som Carlsen (2010) også understreker, må elevene blant annet bli involvert i aktiviteten og danne felles fokus og felles forståelse for problemet.

I ytring 359 ser det ut som at Pia har forstått problemet, og forklarer en plan. Det kan tenkes at hun forsto problemet bedre etter at bordkortene var laget, med grunnlag i at de allerede har analysert problemet og definert ordene forrige matematikktime. Dette fordi hun også bruker gester og viser med hendene sine når hun forklarer og snakker nå. Konkretisering ser derfor ut å være en strategi som gjør at hun forstår problemet ordentlig, og nå vet hun også hva ordene betyr. Her ser en at lærers hint om konkretisering fører til at de kommer seg videre i prosessen med å løse problemet, ved at de benytter strategien som hun gir hint om. Ytring 359 viser også planen til Pia for å løse problemet, ”vi må finne én pluss hva da for å bli et kvadrattall”, og planen gjennomføres ved prøving og feiling ved hjelp av bordkortene som nå er konkretisert. Dermed kan det se ut som at de, som følge av lærerens hint, har jobbet seg videre i Polyas (1957) andre og tredje fase og Borgersens (1994) tredje trinn, samt Mason et al. (2010) sin gjennomføringsfase. Videre, i neste sekvens følger de Pias plan, og prøver ut to og to bordkort.

4.3.3 Gjennomføring av planen

Prøving og feiling gjennom modellering

360	Pia	Okei. Hva kan gå da. Én, én pluss én, ganger, og én pluss, sant. Èn pluss (3s) sytten. Atten (Sitter med kortene i hånda og blar med dem. Legger tallet sytten ned).
361	Ole	Hva er kvadrattallet av, eh.
362	Pia	Nei (tar syttentallet i hånda igjen).
363	Nils	Jeg forstår ikke.

364	Pia	Ikke jeg heller. Jo her har vi det. Femten, seksten (legger kort nummer femten på bordet). Kvadrattallet av seksten, fire. Fire ganger fire er seksten (2s) okei.
365	Ole	Ja men (5s) det kan jo være flere.
366	Pia	Ja men derfor må vi prøve og regne sammen, så hvis det er noe feil så vet vi at det og er feil.
367	Ole	Vi kan og ta åtte og der, så blir det ni, kvadrattall av ni (ukjent tekst). (Pia tar bort tallet femten når Ole sier dette)
368	Pia	Jeg vet ikke. Vi må bare finne ut, altså må bare…

Planen som de har laget, etter hint om konkretisering fra lærer, gjennomføres ved strategien prøving og feiling sammen med modellering i from av konkretisering av bordkortene. Dette betegnes i denne studien som modellering da det gjennomføres fysisk. På denne måten skilles modellering fra visualisering, hvor visualisering er blitt betegnet som inskripsjoner som er nedskrevet i skriveboka. Pia har kortene i hånda og prøver ut ulike tilfeller. Hun prøver først med én og sytten, men finner fort ut at dette ikke blir et kvadrattall (362). Ytring 364 indikerer at hun nå har en bedre forståelse for problemet. Hun bruker her kvadrattall riktig, og det ser også ut som at hun har forstått delen av problemet som krever at hun vet hva sum er, da hun legger femten og én sammen, og får kvadrattallet seksten. I tillegg sjekker hun også dette andre veien da hun begrunner med å si at fire ganger fire er seksten. Ytring 364 viser at hun går i gang med Tones bordpartner med en gang.

Ole (365) kommer med en kommentar som understreker at de ikke bare kan si at dette paret er sammen, og bruker moteksempel (367). Slik som Schoenfeld (1992) fremhever, må elevene først gjette så bevise, noe som Ole synes å være på vei til. Dette kan indikere monitirerende kommentarer i den forstand at han ikke godtar svaret uten å stoppe opp og vurdere andre svar, og ønsker å kontrollere at dette er det riktige på veien mot løsningen, noe som kan ses i sammenheng med Schoenfeld (1992) sin beskrivelse på monitorering. Denne monitorerende kommentaren fører til at de prøver å finne bordpartneren til tallet to.

385	Pia	To pluss≈
386	Ole	≈fire (Ole legger kort fire på bordet).
387	Pia	To pluss fire er seks.

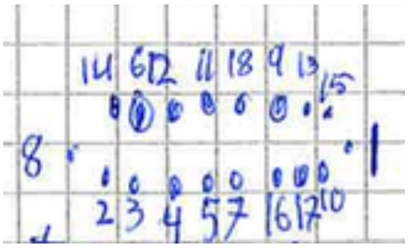
388	Ole	Seks.
389	Pia	Nei.
390	Pia	To pluss (7s) åtte, ti (Ole legger åtte på bordet. Pia rister på hodet).
391	Ole	Nei, går ikke.
392	Pia	To pluss, fjorten, seksten, fire (fjorten og to ligger som par).
393	Pia	Så kan vi gå på tre.
394	Ole	Pluss seks er ni, så blir det (tre og seks er par).
395	Ole	Tre ganger tre.

Siden elevene tar lang tid på å forstå problemet, noe som er viktig i problemløsningsprosessen (Mason et al., 2010), kan det se ut som at det går fort å løse problemet når de først har forstått det. Sekvensen viser deres prøving og feiling av bordkortene. Pia legger videre kort elleve sammen med kort fem, som blir kvadrattallet seksten. Syv og ni blir også lagt ned som et par samt sytten og åtte og ti og femten. Når de har ett tall igjen, og dette ikke passer med tallet én (som er Tone sitt bordkort), bytter de det ut med ett av de andre tallene, og ser om dette tallet passer. Sekvensen under viser et eksempel på dette.

459	Pia	Okei. Så da må vi finne ut hva vi har gjort feil her, eller nei vent.
460	Ole	Vi må finne en annen til å bytte (Ole prøver å ta vekk tallet seks fra tre. Pia stopper han. Så prøver han å ta tolv fra fire. Pia stopper han igjen).

Seksten blir satt sammen med ni, og syv fra nitallet settes med atten. De står igjen med tretten i hånda.

476	Ole	Går de opp? Nei de går ikke opp.
477	Pia	Nei, derfor må du ta tre.
478	Ole	Men det går (peker på én og tre).
479	Pia	Men det finnes jo et annet svar her, så må heller bytte med.
480	Pia	Tretten. Får det opp til tjuefem kanskje.
481	Pia	Sytten. Ni. Tre ganger tre. Sånn. Da er det én åtte (tar sytten sammen med tretten, og én med åtte).



Figur 5: Ole sitt svar på bordpartnerproblemet.

Denne tegningen over viser hvilke par de kommer frem til, og dermed deres løsning oppsummert. Sekvensen over viser at gruppa støter på problemer i prosessen med å finne hvilket tall som passer med nummer én. Strategien modellering ser ut til å gjøre det enklere for dem å prøve og feile, fordi da kan de ta bort et kort fysisk. Likevel kommer de ikke frem til riktig løsning, fordi de glemmer å sjekke om sytten og tretten passer sammen. Sytten addert med tretten blir ikke kvadrattall, men siden alle de andre blir kvadrattall virker det som at de glemmer å sjekke de siste, og muligens tar det som en selvfølge at disse også passer da. En annen mulig forklaring på dette, kan være at de har regnet feil i hodet, og tror at dette blir kvadrattall. Det blir til sammen tretti, og som jeg observerte, har de en tendens til å blande kvadrattall med andre multipliserte tall, som for eksempel fire multiplisert med fem, og nå fem multiplisert med seks.

Ut fra sekvensene, kan en antyde at måten de bruker strategien prøving og feiling på ikke er systematisk med støtte i Torkildsen (2017). Dette fordi det virker som at de prøver og feiler med tilfeldige tall så lenge det blir kvadrattall. I tillegg bytter de med et tilfeldig tall slik at de også blir kvadrattall, uten å sjekke med *flere* av tallene om det kan være andre muligheter for de enkelte tallene de prøver. Torkildsen (2017) nevner at prøvingen og feilingen ikke bør foregå tilfeldig, og derfor kan dette kan være grunnen for at de ikke kommer frem til riktig løsning. En ser at Ole sine tidligere monitorerende kommentarer (365 og 367) om at det kan være flere som passer ikke ser ut til å føre til at de sjekker flere, da de fortsatt prøver tilfeldige tall uten å sjekke om tallet kan være med andre.

Det er altså som følge av lærers hint om konkretisering av bordkortene og hennes tips om at de kan finne ut hvor kortene skal være i forhold til hverandre at de tar i bruk strategien modellering og prøving og feiling, og det er disse strategiene som fører dem frem til et svar. De prøver ut to og to kort, og begrunner at kortene kan være sammen ved å argumentere for at de blir et kvadrattall når de adderes. Likevel sjekker de altså ikke om alle stemmer, og går videre så fort de har funnet to og to par.

Lærers femte møte med gruppa: Spørsmål om overbevisning

Læreren kommer til gruppa og spør om de kan overbevise henne, noe som ifølge Mason et al. (2010) er viktig i problemløsningsprosessen. Pia forklarer da følgende:

485	Pia	Vi gikk bare fra, vi la alle ut, så fant vi ut alle. Også la vi én her, og så tok vi den som var igjen til én og regnet ut om det passet. Så fant vi ut at, eller, ja, åtte og én passer.
486	Lærer	Åtte og én passer. Og da har dere≈
487	Ole	≈Og da passet alle andre også.

Ole argumenterer for at alle passer, noe som altså ikke stemmer. Derfor kunne de ha reflektert over løsningsprosessen og dobbeltsjekket en gang til for å få det riktige svaret. De jobber seg dermed ikke videre i refleksjonsfasene; Mason et al. (2010) sin tredje fase, Polya (1957) sin fjerde fase og Borgersen (1994) sitt sjette trinn. Det virker som om de er fornøyde når de finner ut at dette stemmer med alle. Dette kan ha forklaring ut fra deres rutinearbeid i matematikktimene, de er enda ikke vant med å arbeide med problemløsningsoppgaver. Det kan også tenkes at de var lei av å arbeide med problemet, noe som Pia sin kommentar i elevintervjuet kan illustrere. Jeg spurte om de ville ha funnet ut om det var flere svar på dette problemet, og da svarer Pia et klart nei. Likevel sa de også i intervjuet at det helt sikkert kunne vært flere svar når jeg spurte om dette. Pia forklarer også i intervjuet at hun ikke tror de ville klart dette problemet uten lærerens hjelp.

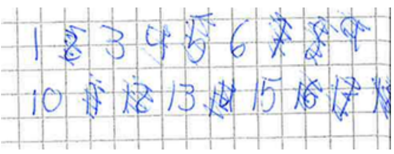
Læreren kunne her ha utfordret dem til å sjekke alle en gang til eller å spørre om det kan være en annen løsning på problemet, noe som Wæge og Nosrati (2018) hevder er en viktig lærerjobb i elevers arbeid med problemløsningsoppgaver. På den andre siden har elevene jobbet med problemet i to matematikktimer, og det kan derfor tenkes at læreren ønsker at de skal få prøve seg på et annet problem også. Det kan også tolkes som at læreren selv ikke vet svaret på problemet, og tror at elevenes svar og argumenter er riktig. Hun påpeker selv i intervjuet at hun burde ha jobbet mer med problemene før elevene fikk dem. Dermed kan også dette være grunnen.

Gruppe A sine strategier i bordpartnerproblemet

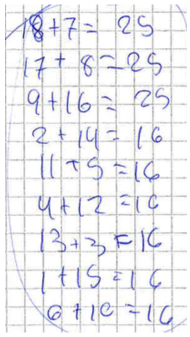
Gruppe A velger også bordpartnerproblemet. Det er kun Siri og Liam som er til stede i arbeidet med dette problemet, og de jobber med det i cirka 17 minutter. De bruker kort tid i første fase, og bruker en annen strategi enn gruppe B for å få fremgang i prosessen. Siri leser problemteksten to ganger høyt. Med andre ord leser de problemet nøye, slik som Mason et al. (2010) i første fase anbefaler. Dette går på å forstå problemet, og det virker som at de forstår hva det går ut på. De vet hva kvadrattall og sum er, og bruker ikke tid på å definere ordene. Med andre ord ser det ut som at dette er i deres kunnskapsbase (Schoenfeld, 1992). Liam skriver ned bordkortene, og Siri skriver kvadrattallene. Følgende ytring (1099) viser planen deres.

1099	Siri	Vi kan bare korte det ned og ned og ned til vi finner det svaret det kan være.

De bruker strategien eliminering for å finne bordpartneren til Tone. De starter med å kombinere tre bordkort (18 og 7, 17 og 8, 16 og 9) som kun har én mulighet og derfor må være med hverandre. Med dette utgangspunktet stryker de ut de brukte bordkortene, helt til de kun står igjen med ett bordkort for Tone. Dette kan ses på som en systematisk metode, siden de fra starten kombinerer tallene som må være med hverandre for å bli et kvadrattall, og med dette som utgangspunkt kan de eliminere tallene slik at de videre i løsningsprosessen også finner to og to tall som kun har én mulighet når noen tall er "brukt opp".



Figur 6: Liam sin eliminering av bordkortene.



Figur 7: Siri sitt løsningsforslag.

Etter at de har funnet svaret, ønsker Siri å dobbeltsjekke alle tallene, og hun sier at hun vil bruke kalkulator for å være ekstra sikker. Med andre ord befinner de seg i se tilbake-fasen til Polya (1957), i og med at de går tilbake og sjekker at resultatene stemmer, og at alle blir kvadrattall. Samtidig vil jeg påpeke at de ikke ser om det kan være andre løsninger. Imidlertid sjekker de underveis ved at de finner ut hvilke tall som kun har én mulighet, og kan kun være med ett kort. På grunn av strategien de bruker, eliminering, vet de at fremgangen blir riktig, da noen av kortene ikke passer med noen andre enn dem de har prøvd. Videre fører dette til at de kun står igjen med én mulig partner for Tone. Å sjekke feil for å være sikker på at beregningene er riktig er viktige stikkord i vurderingsfasen (Mason et al., 2010). Siri indikerer her bruk av monitorerende strategi, da hun går tilbake for å sjekke om svaret stemmer. Ifølge Bjuland (2007) kan monitoreringsstrategien relateres til når elevene går tilbake og sjekker argument. Hun sier seg dermed ikke ferdig med løsningen før hun har kontrollert den. Hun finner ut at alle passer sammen, og at alle blir kvadrattall.

4.4 Oppsummering av resultater

Jeg vil nå løfte frem en oppsummering av strategiene elevene benytter samt tydeliggjøre lærerhintene fra hver av de to gruppene i hvert sitt problem, det vil si de to problemløsningsoppgavene jeg har hatt størst fokus på i analysen.

4.4.1 Strategier identifisert i gruppe A i arbeid med kuleisproblemet

Visualisering ved konkretisering
Stille spørsmål
Finne mønster og generalisere
Refleksjon over løsning fører til ny visualiserende tegning
Refleksjon fører videre til nytt mønster og generalisering
Lærers første møte med gruppa: Spørsmål om overbevisning fører til strategien monitorering
Lærers andre møte med gruppa: Hint om å lage en formel
Videre arbeid med problemet etter lærers hint: Prøving og feiling i forsøk på videre generalisering

Tabell 2: Identifiserte strategier i gruppe A oppsummert.

Tabellen over er en kort oppsummering av elevgruppe A sine strategier som er blitt identifisert i deres arbeid med kuleisproblemet. En ser her at elevene får veiledning av læreren, men læreren er ikke til stede i gruppa før de har brukt flere strategier selv samt funnet løsning, og er kommet langt i problemløsningsprosessen.

4.4.2 Strategier identifisert i gruppe B i arbeid med bordpartnerproblemet

Dele opp problemet: Definering av ord, eksemplifisering
Lærers første møte i veiledning av elevene: Dele opp problemet og analysere problemet
Lærers hint fører til å skrive ned kvadrattall og stille spørsmål om videre prosess
Lærers andre møte med gruppa: Hint om kvadrattall fra 1-18 samt spørsmål om mulige tall på Tones bordpartner
Visualisering og prøving og feiling
Lærers tredje møte med gruppa: Ledende spørsmål for å forstå problemet
Lærers fjerde møte med gruppa: Hint om konkretisering (modellering)
Prøving og feiling gjennom modellering.
Lærers femte møte med gruppa: Spørsmål om overbevisning

Tabell 3: Identifiserte strategier i gruppe B oppsummert.

Denne tabellen viser gruppe B sine strategier i deres arbeid med bordpartnerproblemet oppsummert. Her ser en at læreren veileder tidlig i prosessen, og hun er til stede flere ganger i deres løsningsprosess.

5 Diskusjon

Denne studien har rettet søkelyset mot elevenes problemløsningsstrategier i elev-elev og lærer-elev dialoger. Første forskningsspørsmål ser mest på hva elevene klarer alene, og andre forskningsspørsmål ser også på elevstrategiene, men når elevene får lærerhjelp. Selv om analysen i hovedsak har hatt fokus på gruppe A sitt arbeid med kuleisproblemet og gruppe B i arbeid med bordpartnerproblemet, vil jeg i diskusjonen løfte frem noen av strategiene som fremkommer i alle de tre problemene som er analysert, og diskutere dem i lys av forskningsspørsmålene. Kapittelet er delt inn i to deler ut fra de to forskningsspørsmålene, der det sentrale i 5.1 er elev-elev dialogene, og det sentrale i 5.2 er lærer-elev dialogene når de arbeider med problemløsningsoppgavene i smågrupper.

5.1 Elevenes problemløsningsstrategier i løsningsprosessen

Fra observasjonene og analysen er det blitt vist innblikk i to elevgruppers strategier gjennom tre problemløsningsoppgaver. Jeg vil med dette kunne svare på første forskningsspørsmål: *"Hvilke problemløsningsstrategier kan identifiseres i arbeid med problemløsningsoppgaver i smågruppedialoger på 9. trinn?"*. For å svare på dette vil jeg løfte frem strategier som er fremtredende, og se på begge gruppene. Fokus er i hovedsak strategiene fra elev-elev dialogene, men noen strategier som tas frem kommer også som følge av lærers hint.

Som en ser ut fra analysen og oppsummeringstabellene over (4.4), er det blitt brukt flere strategier gjennom løsningsprosessen i disse problemene. Flere av strategiene jeg har antydet er også blitt identifisert av Kongelf (2011) i hans analyse av strategier i matematiske lærebøker. Han identifiserte blant annet leting etter mønster, visualisering og dele opp problemet. Disse strategiene er også fremtredende i min studie, og dermed samsvarer mine funn av strategier med hans. Likevel identifiserte han andre strategier i tillegg, som jeg ikke har antydet. Dette kan derimot skyldes at dette er en liten studie med to elevgrupper og kun noen få problemløsningsoppgaver. I tillegg var hans studie gjeldende for lærebøker. Samtidig er flere av strategiene som er identifisert i tråd med Polya (1957), Borgersen (1994) og Mason et al. (2010) sine nært knyttede modeller og strategier, som for eksempel å tegne, analysere problemet, definere ord, modellere, prøve og feile, lete etter mønster, danne hypoteser og se tilbake. Som påpekt i teoridelen, har jeg brukt fasene også som strategier. Problemløsningsstrategien å stille åpne og undrende spørsmål er i samsvar med Bjuland (2002, 2007) som beskriver dette som en viktig gruppesamtalestrategi. Schoenfeld (1992) fremhever strategien monitorering, og dette er også observert ved at elevene går tilbake til oppgaveteksten og sjekker om de har forstått problemet, og kontrollerer løsningene.

Innledningsvis henviste jeg til Nordbø (2014), en masteroppgave om elevstrategier identifisert i smågrupper på 8. trinn i arbeid med problemløsning. Funnene hennes viser at elevene brukte modellerende strategier både gjennom inskripsjoner og praktisk gjennomføring av problemet. I tillegg brukte de monitorering i varierende grad. I min studie er også visualisering og modellering fremtredende, der min bruk av visualisering kan knyttes til Nordbøs (2014) bruk av inskripsjon. Jeg har antydet modellering når konkretisering av bordkortene gjennomføres fysisk, og dette kan ses i sammenheng med Nordbø (2014) sin bruk av modellering og praktisk utføring. Spesielt i gruppe A har jeg antydet bruk av ulike monitorerende strategier. Ut fra denne studien kan en si at flere av strategiene indikerer de samme hovedstrategiene til Nordbø (2014). Likevel har jeg tatt dette videre i form av hvilken rolle det spiller at læreren kommer med hint underveis i elevenes løsningsprosess med tanke på strategier, og med dette er et annet sentralt funn hos meg at læreren differensierer lærerhjelpen i de to ulike gruppene, og det ser ut som at læreren gjennom problemløsningsprosessen kan bidra til ulike strategier i fasene ved at læreren leder elevene mot disse strategiene. Dette vil jeg ta opp igjen etter at jeg har løftet frem noen av de mest sentrale strategiene i min studie.

5.1.1 Visualisering og modellering

Det er interessant at begge gruppene bruker visualisering eller modellering, og at disse strategiene i problemene blir utgangspunkt for videre strategier, og dermed fører til fremdrift i problemløsningen. I kuleisproblemet fra gruppe A blir tegningene som Mari tegner utgangspunkt for videre strategier som leting etter mønster og generalisering, og dermed hele løsningsprosessen. De systematiserer tegningen på en måte som gjør at de finner et mønster, og med dette mønsteret klarer de også å generalisere. Gruppas tegning, i begge premissene, kan en antyde at blir nyttiggjort godt, fordi tegningene systematiseres og fører frem til løsning ved hjelp av de andre strategiene kombinert med tegningene. Fra Lompscher (referert i Liljedahl, 2016) fremkommer det at suksessfulle problemløsere klarer å redusere et problem til det viktigste, på en måte som er fornuftig, som for eksempel å lage informativ figur. Tegningene som de tegner i kuleisproblemet inneholder de fire smakene og iskulene i to premisser, konkretisert ved farger, slik at kombinasjonene kommer godt frem og mønster dukker opp, som fører til at de klarer å generalisere til formel i det ene premisset. Dermed kan det antydes at de klarte å redusere problemet på en fornuftig måte med disse tegningene som strategi.

Modelleringen av bordkortene som er konkretisert, gir gruppe B fremdrift i bordpartnerproblemet sammen med strategien prøving og feiling. Både visualiseringen og modelleringen får medierende roller ved at de binder sammen elevene med problemet, da alle elevene jobber ut fra tegningene eller konkretene (Carlsen, 2008). Disse visualiserende og modellerende strategiene blir nyttiggjort ved hjelp av språket samt ved at elevene stiller spørsmål og forklarer hverandre hva de tenker ut fra tegningene og konkretene. Dette funnet kan ses i sammenheng med Carlsen (2009) sin studie som viser at inskripsjoner var viktige støttepunkter for elevenes argumenter i diskusjonen med andre. Det sosiokulturelle perspektivet kan bli fremhevet ved å stille åpne spørsmål, fordi da må deltakerne i gruppa forklare til hverandre og kommunikasjonen tas i bruk (Bjuland, 2002). Å lage tegning er også ut fra teorien blitt nevnt som en viktig begynnende strategi i problemløsningen (Polya, 1957; Borgersen, 1994).

5.1.2 Strategien å se tilbake og monitorering

I arbeidet med alle tre oppgavene, er et av funnene at gruppe B ser ut til å ha en tendens til å finne én løsning og gå over på neste problem så fort de har et svar, uten å se tilbake eller sjekke beregningene. Dette funnet indikerer at de aldri befinner seg i se tilbake-fasen i Polyas problemløsningsmodell (Polya, 1957) og reflekterer ikke over løsningen (Borgersen, 1994). I tillegg ser en også at løsningen i mobiloppgaven og bordpartnerproblemet ikke er riktig. At de ikke ser tilbake, og virker fornøyde med ett svar, kan forklares ut fra deres erfaringer med å jobbe med rutinepreget oppgaver, der de gjør mange liknende oppgaver etter hverandre (Schoenfeld, 1992; Svingen & Gilje, 2018), noe de i intervjuene påpeker. Det kan også forklares ut fra Schoenfelds (1992) påstand om at mange elever har oppfatninger om at matematikkoppgaver kun har er ett svar. De strever også med å definere kuleisproblemet likt, samt bordpartnerproblemet, noe som kan forklares ut fra Schoenfeld (1992) sitt poeng om at elever er vant med å få instrukser på hvilken metode de skal bruke i oppgaver. Når de da ikke får disse instruksene, kan dette føre til slike utfordringer. Ifølge læreren har disse elevene ikke erfaring med å arbeide med problemløsning på denne måten, og derfor kan en ikke forvente av niendeklassingene å jobbe slik en erfaren problemløser ville gjort uten øving på dette (Schoenfeld, 1992). Likevel vil jeg påpeke at spesielt kuleisproblemet, som er en rik oppgave, gir mulighet til å se tilbake i deloppgave b), men likevel blir ikke strategien tatt i bruk. De svarer at hvis det er flere smaker å velge mellom, så kan Hanne få flere alternativer å velge mellom, deretter går de videre.

Et annet funn fra observasjonene og analysen er at gruppe A ser tilbake i hvert av de tre problemene, og reflekterer over løsningene på ulike måter. I tillegg skriver de flere svar på kuleisproblemet, som følge av at de reflekterer og ser tilbake på løsningen. Dette er et interessant funn, da disse elevene har samme erfaringer ved at de har jobbet lite med problemløsning før, er vant med rutineoppgaver og har samme lærer. Verken mobiloppgaven eller bordpartnerproblemet legger opp til refleksjon i samme grad som kuleisproblemet, likevel ser gruppe A tilbake og sjekker løsningsprosessene uten lærers veiledning. Å monitorere handler om at en i løpet av løsningsprosessen sjekker, eller kontrollerer. Det kan være for eksempel å sjekke om en har forstått problemet (Schoenfeld, 1992), og denne strategien kan relateres til metakognitive aktiviteter når elevene ser tilbake og vurderer argument (Bjuland, 2007). Gruppe A antydes å bruke strategien monitorering i hvert problem på ulike måter. I mobiloppgaven er det antydet monitorering ved at de går tilbake til oppgaveteksten for å lese om igjen og sjekke om de har forstått den riktig. I tillegg tenker de gjennom løsningen for å se om den virker logisk, og vurderer svaret deres i forhold til det de vet fra oppgaven. I kuleisproblemet ønsker de å sjekke problemet og løsningen, og de går også tilbake for å kontrollere løsningsprosessen og løsningen i forhold til premissene. I bordpartnerproblemet går de tilbake for å dobbeltsjekke at alt stemmer. Med andre ord ser det ut som at de stiller seg kritiske til alle tre løsningene, og kontrollerer dem før de går videre. Monitorering er viktig for at en problemløser skal oppleve suksess (Bjuland, 2002).

5.1.3 Videre diskusjon av problemløsningsstrategiene

Jeg har i denne studien identifisert elevenes problemløsningsstrategier, og elevenes strategier kan ses på som en sentral kunnskap med tanke på problemløsning og dybdelæring i lys av fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2018). Nosrati og Wæge (2018) understreker at det er viktig å bruke relevante strategier, og refleksjon er sentralt når en snakker om dybdelæring. Ut fra strategiene gruppene tar i bruk og hvordan de arbeider i problemløsningsprosessen, ut fra det jeg har sett, kan det derfor tenkes at gruppe A har et godt utgangspunkt for å jobbe med problemløsning i videre arbeid med disse kjerneelementene, da de virker å forstå problemene og bruker strategier som skaper fremdrift i løsningsprosessen, og jobber gjennom alle problemløsningsstegene i henhold til Polyas (1957) fire faser. Denne tanken kan støttes ut fra Mason et al. (2010) som hevder at refleksjon kan være den viktigste aktiviteten for å forbedre matematisk tenkning. Elevene i denne gruppa reflekterer og monitorerer gjennom hvert av problemene, og dette er som regel uten lærerhjelp. Å reflektere og monitorere er altså en viktig del av problemløsningen (Nosrati & Wæge, 2018; Schoenfeld, 1992), noe som derfor også er viktig for dybdelæring som den nye læreplanens fokus vil være på (Nosrati & Wæge, 2018).

Dette kan videre indikere en tanke om at gruppe B trenger mer erfaring for å lære gjennom problemløsning. Begrunnelsen for denne tanken er at det ser ut som at de strever med å forstå problemene og har mangel på strategiene se tilbake og refleksjon. Det er blitt antydet monitorering kun i liten grad, fordi Oles monitorerende kommentar i bordpartnerproblemet ”det kan jo være flere” fører ikke til at de sjekker alle bordkortene, da de fremdeles setter bordkortene sammen med et *tilfeldig* annet bordkort, så lenge det blir kvadrattall. En annen begrunnelse for min tanke om at gruppe B muligens trenger mer erfaring, er at det i denne gruppas løsningsprosesser er observert eksempler på at strategier ikke alltid fører til fremdrift eller riktig løsning i elev-elev dialogen. I bordpartnerproblemet bruker gruppa strategien prøving og feiling, men denne prøvingen virker ikke systematisk siden de prøver tilfeldige tall uten å sjekke om tallene kan være med flere andre, og av dette blir ikke løsningen korrekt. Dette kan ses i sammenheng med Torkildsen (2017) som understreker at prøvingen og feilingen bør være systematisk for å lede frem til løsning. I samme problem bruker de strategien visualisering, en tegning av bordet og personene, men denne gir dem heller ikke fremdrift. Med dette ser det ut som at gruppe A bruker flere målrettede strategier som medfører fremdrift og riktig løsning, reflekterer og monitorerer, samt beveger seg gjennom alle problemløsningsstegene i alle problemene. Gruppe B bruker flere strategier, men disse ser ikke alltid ut til å være formålstjenlige og fører ikke alltid til fremdrift eller riktig løsning, og de beveger seg ikke gjennom alle problemløsningsstegene, da de blant annet aldri ser tilbake på løsningen eller løsningsprosessen, og heller ikke beviser sine hypoteser. Å bruke hensiktsmessige strategier og reflektere er altså viktig for problemløsning og dybdelæring i fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2018; Nosrati & Wæge, 2018).

Det er verdt å merke seg at disse gruppene består av elever med ulikt faglig nivå. Det betyr at kunnskapsbasen ikke er den samme hos de to gruppene (Schoenfeld, 1992). Dette kan være en forklaring på min antydning om elevgruppenes ulike problemløsningstendenser, og at gruppe

B strever med å forstå for eksempel bordpartnerproblemet. Gruppe A har begrepene kvadrattall og sum inne i sin kunnskapsbase, mens dette ser det ikke ut som gruppe B har. At elevenes faglige nivå kan ha betydning for gruppenes ulike problemløsningstendenser kan ses i sammenheng med Kjærnsli et al. (2014) som jeg innledningsvis henviste til. Kjærnsli et al. (2014) viser til resultatene av PISA-undersøkelsen fra 2012, som viser sammenheng mellom prestasjoner i matematikk og prestasjoner i problemløsning. Dette mønsteret kan en muligens antyde i denne studien. Gruppe A er en sterk faglig gruppe, og en kan antyde at gruppa jobber i større grad "problemløsende" med tanke på deres se tilbake-strategi og monitorerende strategier, samt at de skriver flere svar i kuleisproblemet. De gir seg ikke så fort de har funnet et svar, men reflekterer over løsning og løsningsprosessen, og jobber i henhold til Polya (1957) gjennom hele problemløsningsprosessen, der de også beviser og generaliserer en formel i kuleisproblemet. Gruppe B, en mindre faglig sterk gruppe, kan en muligens anta, ut fra disse resultatene, at har mindre problemløsende tendenser, da de ikke befinner seg i alle fasene, og ser ut til å ikke alltid bruke målrettede strategier, samt har rutinepregete tendenser der de skriver ett svar og går fort over til neste problem uten å sjekke løsningsprosess og løsning. Denne forskjellen er gjennomgående i alle tre problemene. Likevel vil jeg påpeke at i gruppe B ser lærerhjelpen ut til å kunne påvirke deres problemløsningsprosess med tanke på strategier under Polyas (1957) faser. Med lærerveiledning kan det derfor tenkes at gruppe B har større potensial for læring gjennom problemløsning, noe som jeg i neste del av diskusjonen vil fremheve.

5.2 Hvilken rolle spiller det at læreren kommer med hint i elevenes løsningsprosess?

I denne delen av diskusjonen vil jeg svare på mitt andre forskningsspørsmål: "*Hvilken rolle spiller det at læreren kommer med hint underveis i elevenes løsningsprosess?".* Dette vil bli gjort ved å se på hvordan læreren er inne og veileder i problemene, og hvilke strategier som fremkommer som følge av dette i smågruppedialogene. Jeg vil først ta opp introduksjonen til mobiloppgaven. Deretter vil jeg vise til lærer-elev dialogene både hos gruppe A i kuleisproblemet og hos gruppe B i bordpartnerproblemet, men størst fokus er gruppe B sitt arbeid med bordpartnerproblemet, som har vært ett av hovedproblemene i analysen, og som har hatt større fokus på lærer-elev dialog. Videre diskusjon blir løftet frem i 5.2.4.

5.2.1 Lærerens betydning i mobiloppgaven

I arbeid med mobiloppgaven, bruker læreren tid på å gjennomgå den både før og etter individuelt arbeid og gruppearbeid. Dette gjøres på samme tid som hun gjennomgår Polya sine steg i introduksjonen til toukersperioden. Elevene kommer raskt i gang med oppgaven. Dette kommer trolig av at læreren har gjennomgått den grundig, og dermed dannet felles fokus (Carlsen, 2010) samt at de har fått jobbet litt individuelt først (Wæge & Nosrati, 2018). Ut fra mine observasjoner, virker lærerens stemme i denne oppgaven før og etter, til å være en fordel i den forstand at elevene bruker kort tid på å komme i gang med oppgaven, og nesten alle elevene i klassen er aktive i klasseromsdiskusjonen etterpå, der det kommer mange forslag på deloppgavene a-e. Det kan på denne måten se ut som at elevene blir inspirert av hverandres strategier, slik som Wæge og Nosrati (2018) hevder, da de følger med og flere hender løftes i været. Dette kan på den andre siden være utfordrende tidsmessig for læreren i en skolehverdag, og dermed kan trolig ikke dette gjennomføres i praksis i arbeid med alle problemløsningsoppgavene. Likevel er det kun én oppgave som er gjennomgått av læreren på denne måten, og derfor er det for lite grunnlag å konkludere dette. Samtidig ser elevene i liten grad over modellene og tips til strategier som læreren introduserte dem til, også videre i de andre problemløsningsoppgavene. Dette kan skyldes deres vaner med rutineoppgaver, og at de trenger tid på å implementere disse. Å introdusere en rik oppgave på denne måten kan likevel trolig være sentralt for å gi elevene grunnlag for egen problemløsning med støtte fra Polya (1957) som hevder at læreren skal hjelpe elevene å løse fremtidige problemer på egenhånd.

I arbeid med mobiloppgaven i grupper, finner gruppe A mønster, går tilbake til oppgaveteksten for å sjekke at de har forstått den riktig, og reflekterer over løsningen, mens gruppe B svarer en setning, uten at dette er svaret på det oppgaven spør om, og går raskt videre. Det ser ut som at gruppene har det som Schoenfeld (1992) kaller ulik kunnskapsbase. Ingen av gruppene får lærerveiledning. Det kan derfor tenkes at lærerhjelp kunne vært til nytte for gruppe B, for å hjelpe dem med tankegangen i problemløsning, og bidra til strategier. De trenger trolig mer støtte fra lærer. På den andre siden har læreren flere elever å veilede, og elevene rekker aldri opp hånda i arbeid med denne oppgaven. I tillegg går læreren nøye gjennom den både før og etter at de har arbeidet i gruppene. Dette er en oppgave som er tatt med for å få alle elevene inn på problemløsningstankegangen, der deloppgave a) og b) går på å forstå problemet og skrive ned det en ser og vil finne ut, noe som kan ses i sammenheng med Mason et al. (2010) sin inngangsfase der to av spørsmålene er ”hva vet jeg” og ”hva vil jeg vite". Derfor er oppgaven i seg selv en inngang til problemløsning ved at den er rik og de kan bruke ulike strategier for å løse den, noe som kan være sentralt når elevene skal arbeide med problemløsning. Dette kan være noen av grunnene for at hun ikke gir hint underveis.

5.2.2 Lærerveiledning hos gruppe A i kuleisproblemet

Gruppe A er selvstyrte store deler av tiden. De jobber sammen i gruppa, og kontakter ikke læreren ved noen av problemene, men læreren kommer bort med hint to ganger uten at de rekker opp hånda i kuleisproblemet. Læreren tipser dem, etter at de har sett tilbake selv, om å lese problemet igjen og dobbeltsjekke at det de har funnet stemmer, og hun vil de skal overbevise henne. Med dette inviterer læreren til begrunnelser og at elevene skal forklare hvorfor deres løsning er riktig, noe som kan begrunnes av Mason et al. (2010) sin definisjon på overbevisning. Det kan også ses i sammenheng med Polyas (1957) fase tre og fire, som blant annet går ut på at en må sjekke stegene en har gjort, bevise at det er riktig, samt reflektere over løsningsprosess og se over resultatet og argumentene. Også Lester et al. (referert i Schoenfeld, 1992) påpeker viktigheten av at læreren leder elevene mot å se over arbeidet som de har gjort. Lærers hint fører til at elevene ser ut til å bruke monitorerende strategier ved å lese teksten igjen, og tenke over hva det står i teksten, samt stille seg kritisk til teksten og premissene de har laget. I tillegg prøver også Mari å sjekke i forhold til at hun kontrollerer om tegningen hun har tegnet stemmer med deres premiss. Med dette kontrollerer de løsningsprosessen ved å gå tilbake og sjekke argument, noe som, slik jeg forstår det, kan ses i sammenheng med Schoenfeld (1992) og Bjuland (2007) sine beskrivelser av monitorering. I dette tilfellet ser det ut som at lærers hint om å dobbeltsjekke fører til at de tar i bruk monitorerende strategier. På den andre siden ser de selv tilbake på problemet og reflekterer over løsningen *før* lærers hint. I tillegg er det også observert monitorerende strategier i ulike former ved de andre to problemene de arbeider med. Dermed ser en at elevene også ser ut til å bruke monitorerende strategier uten lærers veiledning, og det kan derfor tenkes at denne gruppa monitorerer og ser tilbake også uten lærers hint om dette.

Videre utfordrer læreren gruppa til å lage et algebraisk uttrykk. Dette er i tråd med Lester et al. (referert i Schoenfeld, 1992) som påpeker at under elevenes problemløsningsarbeid kan læreren gi problemutvidelser for dem som trenger det. Elevene har allerede formelen for når mønsteret blir kvadrattall, det vil si når premisset er at rekkefølgen på iskulene har betydning og det er lov å bruke samme iskule flere ganger. Lærerens hint om algebraisk uttrykk fører til at elevene bruker strategien prøving og feiling, og spesialiserer og generaliserer på samme tid i forsøk på å prøve og finne et generelt uttrykk. De tar med andre ord i bruk flere strategier etter lærers hint, og dette fører til at de jobber lengre med problemet samt går enda dypere i problemløsningsprosessen. De ser at mønsteret er trekanttall når rekkefølgen ikke har betydning og samme iskule kan brukes flere ganger, men dette rekker dem ikke frem til en generell formel, og mønsteret blir derfor med støtte fra Borgersen (1994) og Mason et al. (2010) kun en hypotese, siden de ikke beviser mønsteret som de ser. Formelen ser ut til å bli utfordring for elevene. Dette kan indikere at læreren tilpasser ut fra deres faglig sterke nivå, noe som er i tråd med Polya (1957) sin beskrivelse for lærerveiledning når han sier at læreren skal veilede og lage utfordringer ut fra elevenes kunnskaper.

5.2.3 Lærerveiledning hos gruppe B i bordpartnerproblemet

Ut fra observasjonene ser en at læreren bruker mye tid på å hjelpe gruppe B til å forstå bordpartnerproblemet. Elevene tar selv kontakt med læreren flere ganger. Säljö (2001) anbefaler at læreren kan dele opp problemet for elevene hvis det er vanskelig for dem, slik at de på denne måten kan løse problemet, noe som læreren gjør. Hun sjekker først om de vet hva kvadrattall er, og sjekker om de kan kvadrattallet til tre. Dette er trolig for å forsikre seg om at elevene vet hva ordet betyr for å kunne forstå resten av problemet. Videre legger hun trykk på ordene summen og par mens hun leser problemet for dem. Hun stiller dem ulike spørsmål flere ganger. Et eksempel er: ”Hvert par. Hva betyr det?” Dette spørsmålet fører til at Nils forklarer at par er de som sitter over hverandre. Videre spør hun ”Hvilke kvadrattall kan dere? Hadde det vært litt lurt og funnet ut?” Tipset om kvadrattall fører til at elevene finner mange kvadrattall og skriver ned. De gjør som lærer hinter om, men det er tydelig at elevene ikke vet hva de skal gjøre videre, da de stiller spørsmål om videre prosess. Ytringene ”Hva skal vi gjøre nå? Tror vi skal plusse det. Skal vi gange det?” viser dette. Dermed har de enda ikke forstått helheten av problemet tross hennes hint om par og kvadrattall.

Andre gang læreren kommer til gruppa modellerer hun med hendene og de leser problemet sammen. Hun spør om elevene kan finne kvadrattall fra én til atten, deretter leser hun problemet til dem igjen. Hun spør dem hvilke tall bordpartneren til Tone kan ha, og går fra gruppa. Elevene husker ikke hva læreren spurte dem om før hun gikk, og prøver å finne ut hva læreren stilte spørsmål om i stedet for å lese problemet igjen. Dette kan bety at det her er lærerens hint som drar dem videre, noe som kan komme av at det er lite drahjelp i gruppa, da det kun er to elever, Pia og Nils, som arbeider sammen.

Læreren kommer for tredje gang til gruppa, og Pia har multiplisert bordkortene i stedet for å summere mens hun var borte. Å forstå ordene er viktig for å kunne løse problemet (Borgersen, 1994), og her ser en at de enda ikke har forstått problemet siden de ikke helt forstår ordene. Læreren stiller dem ledende spørsmål for å få dem inn på at summen ikke er det samme som å multiplisere. Dermed får de ved hjelp av hennes ledende spørsmål klarhet i hva sum er. Alle disse hintene fører til at elevene, ved hjelp av læreren, benytter strategiene å analysere og definere problemet (Borgersen, 1994) og dele problemet opp (Kongelf, 2011) i fasen med å forstå det (Polya, 1957). Læreren deler altså opp problemet for elevene, ved å gi ett og ett hint om ord de må definere og hva de bør finne ut for å hjelpe dem med å forstå helheten av problemet.

Etter en 45 minutters matematikktime med å definere ordene og hjelpe elevene til å forstå problemet ved å dele det opp, kommer læreren med nytt hint. Lærer finner ark og saks, og gir dem tips om å lage bordkortene og gjennomføre det fysisk. Lærers hint om dette fører til at elevene lager bordkortene. Det ser ut som at konkretiseringen gjør at elevene forstår problemet ordentlig, med grunnlag i at de allerede har definert ett og ett ord ved hjelp av lærers spørsmål og hint. Som følge av lærers hint om konkretisering, tar elevene i bruk strategien prøving og feiling gjennom modellering. Her ser en at lærers hint om konkretisering og fysisk gjennomføring fører til at elevene kommer seg videre i problemet og også finner en løsning.

Læreren kommer tilbake når de har funnet alle parene og spør om de kan overbevise henne. Elevene sier at alle bordkortene stemmer når bordpartneren til Tone har bordkort åtte, noe som ikke er riktig. Her drar ikke læreren det videre, og ber dem ikke dobbeltsjekke. Da kunne de trolig ha funnet ut at de har gjort feil, og de kunne ha gått tilbake og reflektert over løsning, og på denne måten kunne de ha gjennomført planen på ny (Polya, 1957). Det kan være flere grunner til at læreren ikke utfordrer dem videre. De har på dette tidspunktet jobbet med problemet i to matematikktimer, og læreren vil kanskje at de skal få jobbe med et annet problem også. I tillegg har hun hjulpet dem mye, og gitt dem flere hint for å dra dem videre i problemløsningsprosessen. Hun tilpasser trolig hintene her, og kanskje tenker hun at dette var et greit svar i forhold til deres kunnskapsbase (Schoenfeld, 1992).

I teorikapittelet blir det understreket at spørsmål er viktige i lærerveiledningen i elevenes problemløsningsprosess (Wæge & Nosrati, 2018; Polya, 1957; Alexander, 2008). Læreren i min studie stiller flere spørsmål, noe som dermed samsvarer med teoretiske anbefalinger. Polya (1957) understreker at læreren bør stille flere spørsmål som indikerer samme spørsmålene, og spørsmål om hva som er det ukjente er sentralt. I studien stiller ikke læreren spørsmål om hva som er det ukjente, slik som Polya (1957) eksemplifiserer. Hun stiller derimot flere spørsmål trolig for å dele opp problemet, og for at elevene skal forstå helheten av det, da problemet består av flere matematiske ord. Likevel kan disse spørsmålene samlet indikere at hun ønsker å få elevene til å være bevisst over hva det ukjente er. Hun stiller spørsmål som "hvert par, hva betyr det?". "Hvilke kvadrattall kan dere da? Hadde det vært litt lurt og funnet ut?" "Så summen har noe med pluss å gjøre?" Dette viser at hun ikke legger svarene i armene deres, men hun gir dem hint om hva de bør finne ut. Dette suppleres av intervjuet der hun sier at hun prøver å ikke gi dem svaret, men stiller spørsmål. Det ser ut til at det blant annet er noen av spørsmålene som driver elevene videre i problemløsningen, da elevene gjør som læreren gir hint og stiller spørsmål om. Dermed kan en antyde at spørsmålene til læreren spiller en viktig rolle for hvilke strategier elevene benytter samt for deres fremdrift i problemløsningsprosessen.

Polya (1957) hevder at elevene skal tilegne seg så mye erfaring som mulig alene, og at læreren ikke bør hjelpe for mye. På den andre siden blir det også påpekt at imitasjon er viktig for elevene (Polya, 1957). Med dette kan det tenkes at slike spørsmål som læreren stiller, kan hjelpe elevene å stille samme spørsmål selv, og på den måten hjelpe dem å bruke strategier og løse problemer på egenhånd senere. Jeg vil igjen understreke at dette er elevenes første seks timer med problemløsningsarbeid, og det kan dermed ikke forventes at elevene er erfarne problemløsere (Schoenfeld, 1992). Som Liljedahl (2016) også påpeker, bør elevene få mulighet til å finne strategier selv, og læreren kan med dette stille åpne spørsmål som for eksempel "hvordan kan en illustrere dette?". Dette gjør læreren imidlertid ikke, men likevel får elevene rom til å arbeide selv og finne egne strategier når læreren går fra gruppa. Det kan tenkes at hvis læreren gir for mye hint, kan dette føre til at alternative strategier ikke kommer frem. Likevel ser en at elevene i dette problemet finner noen strategier selv, blant annet visualisering av bordet og bordkortene. På den andre siden har de etter å ha tatt i bruk denne strategien behov for mer lærerhjelp, da det ikke ser ut som at visualiseringen fører til bedre forståelse eller fremdrift, og de kontakter læreren. Dette kan også vise viktigheten av at denne gruppa får hint fra lærer.

Det kan videre diskuteres om bordpartnerproblemet, som jeg har vurdert som en kognitivt krevende oppgave i henhold til Stein et al. (2009), er for vanskelig for gruppe B, da de kontakter læreren mye, og siden det er hennes hint om strategier som gir fremdrift i løsningsprosessen ved at de da får definert ordene og bruker modellering som strategi. Problemet skal ifølge Vygotsky (1978) ikke være på et høyere nivå enn hva elevene kan klare. Imidlertid kan også årsaken til at de har vanskeligheter med å forstå, og løse problemet, være at de er vant med å arbeide med rutineoppgaver (Schoenfeld, 1992). Dette kan videre medføre at elevene gir opp raskere, og dermed kontakter læreren, siden de er vant med å finne svaret på øvelsesoppgaver raskt, samt få instrukser på metode de kan bruke (Schoenfeld, 1992).

5.2.4 Videre diskusjon: Betydningen av lærerhjelp

En ser ut fra problemene som er analysert og diskutert, at gruppe A er mer selvgående, og kommer langt på veien før læreren utfordrer dem videre med å overbevise og lage et algebraisk uttrykk. Gruppe B trenger mer støtte, og læreren veileder dem flere ganger i prosessen. Dette gir indikasjon på lærerens arbeid med ulike grupper, der læreren både må veilede tidlig i prosessen men også langt inn i problemløsningen. Dette kan vise hvor viktig lærerveiledningen i hele problemløsningsprosessen til elevene er. Dette stemmer overens med Wæge og Nosrati (2018) og Polya (1957) som understreker at lærerveiledning er viktig i problemløsningsprosessen. Det ser ut som at lærerens veiledning foregår under Polyas faser. Hun bruker lang tid på å analysere bordpartnerproblemet sammen med gruppe B, for at de skal forstå det ved å definere ordene. Å diskutere ordene er et viktig punkt under lærerveiledning for at elevene skal se viktigheten av å forstå et problem (Lester et al., referert i Schoenfeld, 1992). Både hos gruppe A og hos gruppe B sier læreren at elevene må overbevise henne om at deres svar er riktig. Det kan virke som at hun vil ha dem over i se tilbake-fasen og reflektere over svaret, samt bevise for å gjennomføre hele problemløsningsprosessen (Blum & Niss, 1991). Når læreren arbeider på denne måten, kan hennes veiledning hjelpe til refleksjon og dermed hjelpe elevene gjennom hele problemløsningsprosessen, som kanskje videre kan imiteres av elevene, slik at de senere kan gjøre dette selv (Polya, 1957). Refleksjon er, som tidligere diskutert, også viktig for dybdelæring (Nosrati & Wæge, 2018), og på denne måten kan læreren hjelpe elevene i deres problemløsningsarbeid med matematikken som den nye læreplanen vektlegger.

Det skal sies at kuleisproblemet og bordpartnerproblemet, som er hovedproblemene fra analysen, er to forskjellige oppgaver som stiller ulike krav, og som baseres på forskjellige matematiske emner. Likevel er det gjennomgående at gruppe A driver seg frem selv, og ser tilbake på løsningene i hvert problem. Dette kan, som tidligere diskutert, forklares ut fra deres kunnskapsbase (Schoenfeld, 1992) og faglige nivå (Kjærnsli et al., 2014). En annen forklaring kan være at det er mer drahjelp i gruppa. I lærers hverdag kan det tenkes at elever som er på grupper hvor de kan hjelpe hverandre kan være et alternativ, for at læreren skal ha mulighet til å hjelpe flere. En ser fra gruppe B at Nils og Pia stiller flere spørsmål i bordpartnerproblemet, og spørsmålene klarer de ikke alltid å svare på. Dette kan tyde på at det er mindre drahjelp i denne gruppa, og på bakgrunn av dette kan det tenkes at gruppa har behov for mer lærerhjelp. Det kan tenkes at problemet ligger utenfor det elevene kan klare alene, og dermed at de har behov for en mer kompetent annen i deres proksimale utviklingssone, som i deres tilfelle er læreren (Vygotsky, 1978). På den andre siden fører noen av spørsmålene Nils stiller til at Pia tenker annerledes. Dette kan derfor også samtidig vise fordelen med problemløsning i gruppearbeid, slik som Borgersen (1994) også fremhever, i stedet for individuelt arbeid. Ved problemløsning i gruppearbeid kan også muntlige ferdigheter utvikles, noe som også vil være viktig for dybdelæring (Utdanningsdirektoratet, 2018).

Læreren hjelper elevene i gruppe B til å løse problemet ved å gi hint om strategier elevene trolig ikke klarer å komme på alene. Bjuland (2002) hevder at ekspert-nybegynner samarbeid finner sted når læreren stimulerer læringsprosessen. Det blir av Carlsen (2008) pekt på at i dette samarbeidet har læreren en rolle som er monitorerende der det foreslås strategier elevene kan bruke, eller når det er formålstjenlig å bruke for eksempel modeller eller inskripsjoner. Gruppe B sitt samarbeid med læreren kan beskrives slik, fordi det ser ut som at læreren stimulerer læringsprosessen ved hjelp av spørsmål og forslag til strategier. Det er tydelig at hun hjelper gruppe B med å forstå problemet ved å dele det opp, slik at elevene tar i bruk strategiene å analysere og definere problemet ved å forstå ordene. En ser på den andre siden at i både mobiloppgaven og kuleisproblemet får elevene lite veiledning. Siden bordpartnerproblemet, med mye hint og veiledning, hjelper gruppe B med å forstå problemet ved at lærer veileder mot strategien å analysere det, samt påvirker dem til å bruke strategien modellering, kan det tenkes at mer veiledning i mobiloppgaven og kuleisproblemet også ville ha ført dem videre, og hjulpet dem på veien mot mindre rutinepregete tendenser. En utfordring her kan være at læreren har mange elever som skal tilpasses og veiledes. Dette kan dermed muligens føre til begrensninger i forhold til lærerstøtten.

Lærerens hint antydes å ha stor betydning for hvilke strategier elevgruppe B benytter, da de gjør som læreren hinter og stiller spørsmål om. Dette kan begrunnes ut fra at de virker avhenge av læreren for å komme seg videre, noe som også blir understreket av Pia i gruppeintervjuet når hun sier at hun ikke tror de ville klart problemet uten læreren. Dette ser en også ut fra Pia sin kommentar ”hva var det hun stilte spørsmål om før hun gikk?”. I stedet for å lese problemet om igjen, tenker hun altså på hva *læreren* spurte dem om. En ser også at strategien visualisering, som elevene kommer på selv, ikke gir dem fremgang i problemløsningen. Likevel vil jeg påpeke at dette også er en mindre sterk gruppe, og deres bakgrunnskunnskaper kan være noe av grunnen for at de ofte kontakter læreren og prøver lite selv, i og med at gruppe A er selvstyrte. Dette kan ses i sammenheng med Schoenfeld (1992) som hevder at elever har ulik kunnskapsbase. De har som sagt heller ikke arbeidet noe særlig med problemløsningsoppgaver tidligere, og er dermed ikke vant til å streve for å finne løsningen. Dette kan også være en av grunnene for at de nokså kjapt kontakter læreren for hjelp flere ganger.

En ser ut fra observasjonene at læreren tilpasser hintene til de to ulike gruppene. I gruppe A gir hun dem mindre antall hint, og hintene blir gitt på slutten av arbeidet med problemet som en utfordring, uten at elevene selv rekker opp hånda. I arbeid med bordpartnerproblemet og mobiloppgaven er hun ikke innom gruppa i det hele tatt. I forhold til kuleisprobelmet utfordrer hun gruppe A til å lage et algebraisk uttrykk for å bevise deres hypotese og mønster, noe gruppe A trolig ikke hadde gjort uten hennes veiledning. Det kan tenkes at hun ville gi dem en utfordring til å gå enda dypere i problemløsningen, noe som de da gjør. Hintet fører til at de benytter seg av flere strategier: Prøving og feiling, spesialisering og generalisering. Det vil si at de jobber dypere i problemløsningsprosessen, og holder på med problemet lengre ved at de får hintet. Selv om de ikke kommer frem til et algebraisk uttrykk i dette tilfellet, fører hintet dem likevel dypere i prosessen og de tar i bruk flere strategier. Dette hintet gir hun derimot aldri til gruppe B. I gruppe B har læreren en annen rolle. Denne gruppa får hjelp til å forstå bordpartnerproblemet ved å definere ordene, ledende spørsmål, og tips til strategier som gjør at de kommer seg videre i forståelsen av problemet, og ved tips om konkretisering av bordkortene tar de i bruk strategien modellering, som gjør at de klarer å løse problemet. Dette kan dermed indikere at med lærerhjelp vil også gruppe B ha godt utgangspunkt for å arbeide videre med problemløsning. Dette kan støttes av Polya (1957) som understreker at hvis læreren utfordrer elevene ved å gi problemer som passer til deres kunnskaper, og hjelper elevene å løse problemene ved å gi stimulerende spørsmål, så kan elevene ha potensial for selvstendig tenkning.

Det kan ut fra denne studien se ut som at læreren har en sentral rolle i elevenes arbeid med problemløsning, fordi hintene hun gir ser ut til å ha betydning for strategiene elevene tar i bruk, og begge gruppene arbeider på denne måten lengre med problemene, noe som kan hjelpe dem på veien mot egen problemløsning (Polya, 1957). Hun differensierer lærerhjelpen i de to gruppene, og det ser ut som at hun kan bidra til ulike strategier i fasene ved at hun leder elevene mot disse strategiene. Gruppe B gjør det som læreren gir hint om, og bruker for det meste strategier som læreren gir dem tips om i bordpartnerproblemet. Funnene indikerer at de stopper raskt opp når læreren ikke er til stede i dette problemet. Gjennomgående ser det ut som at gruppe B er fornøyd med ett svar, ser ikke tilbake eller reflekterer over løsning. Wæge og Nosrati (2018) påpeker at læreren må oppmuntre elevene til å løse problemene på flere måter. Det kan tenkes at læreren her kan oppmuntre til dette, siden elevene gjør strategier som læreren gir hint om. Dette vil trolig ikke gruppe B gjøre av seg selv, noe som kan begrunnes ut fra deres arbeid med kuleisproblemet hvor de skriver én løsning selv om de har vært inne på flere løsninger. På denne måten kan muligens også denne gruppa bli mer selvstendige i problemløsningen. Mine funn kan altså indikere at læreren tilpasser hintene til ulike elever, ut fra elevenes faglige nivå; deres kunnskapsbase (Schoenfeld, 1992). På den andre siden kan forskjellen på veiledningen komme av ulike oppgaver som stiller forskjellige krav til elevene, og som gir ulike muligheter til utvidelse.

Innledningsvis henviste jeg til den nye læreplanen som vektlegger problemløsning og dybdelæring som sentralt (Utdanningsdirektoratet, 2018). Mine funn kan indikere at lærerens hint har stor betydning for hvilke strategier elevene benytter seg av, spesielt hos elever med smalere kunnskapsbase der de benytter strategier som læreren hinter om for å komme seg videre. Læreren ser ut til å veilede ulikt i grupper ut fra deres kunnskapsbase (Schoenfeld, 1992). Dette vil trolig være tilfelle i arbeidet med den nye læreplanen, at læreren må tilpasse hintene ut fra oppgavene, elevenes kunnskapsbase og forutsetninger. Min studie er dermed et eksempel på dette. I tillegg indikerer studien at læreren bruker mer tid på å veilede elever med en smalere kunnskapsbase. En utfordring kan være at læreren har mange å veilede, og at elevene ikke får tilstrekkelig veiledning i problemløsningsarbeidet ved kommende læreplan på grunn av tidspress. Dette er imidlertid ikke et stort problem i denne studien da læreren kommer rundt på de to gruppene som er mitt utvalg, spesielt i bordpartnerproblemet hos gruppe B. Samtidig kan det tenkes at de andre gruppene i klassen fikk mindre veiledning på grunn av hennes tilstedeværelse hos gruppe B.

Som en oppsummering, ser det ut som at læreren veileder ut fra Polyas (1957) ulike faser, både i forståelsen av problemet hos gruppe B men også i utvidelsen av problemet i gruppe A. Hun har også fokus på at de skal overbevise henne, noe som kan gå under Polyas (1957) fase tre og fire. Hintene hun gir fører elevene videre i problemløsningsprosessen, der elevene i gruppe B bruker strategiene som læreren leder til; dele opp og analysere problemet, definere ord, samt modellering ved konkretisering, som også gir dem en løsning. Elevene i gruppe A bruker monitorerende strategier, samt jobber seg enda dypere i problemløsningen ved å ta i bruk flere strategier; prøving og feiling, spesialisering og generalisering, etter lærers hint. Dermed kan dette gi indikasjoner på at lærers bruk av Polyas problemløsningsmodell og strategier som hun leder til i disse fasene kan være viktige verktøy i elevenes løsningsprosesser.

6 Konklusjon

Ut fra klasseromsobservasjonene og intervjuene fra smågruppedialogene på niende trinn er det gjort noen interessante funn. Likevel er det viktig å presisere at disse funnene ikke kan generaliseres utover annet materiale enn mitt, da dette er en liten kvalitativ case-studie som kun har fokus på én klasse, derav to elevgrupper, og én lærer, samt noen få problemløsningsoppgaver. Jeg vil i dette kapittelet oppsummere hovedresultatene mine i henhold til forskningsspørsmålene.

Det første forskningsspørsmålet i denne studien er: *"Hvilke problemløsningsstrategier kan identifiseres i arbeid med problemløsningsoppgaver i smågruppedialoger på 9. trinn?"*. Ut fra analysene ser en at det er brukt en rekke problemløsningsstrategier gjennom løsningsprosessen til to grupper elever med ulikt faglig nivå ut fra én introduksjonsoppgave og to problemløsningsoppgaver som har større fokus (oppsummert i tabell 2 og 3). Det er blitt observert at visualisering, som vil si tegninger innskrevet i boka, og modellering, altså konkretisering som gjennomføres fysisk, er strategier som er sentrale i hovedproblemene. Disse gir fremdrift, og er utgangspunkt for flere andre strategier. Visualiseringen er sentral for gruppe A sin strategi å finne mønster som videre fører til generalisering i kuleisproblemet. Modelleringen i den andre gruppa er utgangspunktet for deres strategi prøving og feiling i bordpartnerproblemet. Visualiseringen og modelleringen fungerer som et medierende verktøy, fordi det binder sammen elevene med problemet (Carlsen, 2008).

Elevene har ifølge lærer ikke arbeidet noe særlig med problemløsningsoppgaver tidligere, noe som vil si at noen av løsningsmetodene kan minne om rutinepregete tendenser. En erfaren problemløsers kjennetegn er bruken av strategien monitorering (Schoenfeld, 1992), og refleksjon er viktig under problemløsningsprosessen for at læring skal fremtre (Mason et al., 2010). I min studie er problemløsning blitt definert som hele prosessen fra en starter å lese problemet til en har reflektert over løsning, med utgangspunkt i Polya (1957), Borgersen (1994) og Mason et al., (2010) sine problemløsningsmodeller, der fasene i modellene også er blitt brukt som strategier. Et av mine funn viser at gruppe A ser tilbake, reflekterer over løsning, og bruker monitorerende strategier på ulike måter i hvert av de tre problemene, og på denne måten ser det ut som at de stiller seg kritiske til løsningene deres. I tillegg er det antydet at de befinner seg i alle problemløsningsfasene i henhold til Polya (1957). Gruppe B ser aldri tilbake, og monitorerer kun i liten grad, og går videre så fort de har et svar, noe som kan skyldes erfaringer med rutineoppgaver (Schoenfeld, 1992). De befinner seg dermed ikke i alle problemløsningsstegene (Polya, 1957). Dette kan indikere at deres faglige nivå påvirker deres problemløsningsstrategier og evne til å gjennomføre problemløsningsprosessen fullt, noe som muligens kan ses i sammenheng med resultatene av PISA-undersøkelsen fra 2012 som viser sammenheng mellom elevenes prestasjoner i matematikk og prestasjoner i problemløsning (Kjærnsli et al., 2014). I fagfornyelsen blir det vektlagt å reflektere og bruke relevante strategier (Nosrati & Wæge, 2018). Begge gruppene i denne studien bruker flere strategier, men funnene indikerer at gruppe A trolig bruker flere hensiktsmessige strategier som gir fremdrift, blant annet systematiserer de visualiseringen på en måte slik at den blir grunnlag for flere andre strategier og løsning. Det er blitt antydet at gruppe B bruker flere strategier, men at noen av disse ikke alltid ser formålstjenlige ut, blant annet gir ikke tegningen i bordpartnerproblemet fremdrift, og prøvingen og feilingen virker ikke systematisk, og muligens av dette fører ikke strategien til riktig løsning.

Det kan videre tenkes at potensialet for problemløsningssuksess for grupper som har en smalere kunnskapsbase, kan være i lærerens hender. Det andre forskningsspørsmålet som jeg stilte er: *"Hvilken rolle spiller det at læreren kommer med hint underveis i elevenes løsningsprosess?"*. Læreren i denne studien hjelper i stor grad gruppe B i bordpartnerproblemet, som medfører at gruppa bruker strategier som læreren gir dem hint om. Læreren hjelper elevene i fasen med å forstå problemet, og bruker flere runder på å dele problemet opp for elevene, for at elevene skal analysere det og forstå ordene hver for seg, ved å gi ett og ett hint om hva de bør finne ut. I tillegg medfører strategien modellering, etter lærers tips om konkretisering, frem til løsning. Med dette ser det ut som at lærerens hint har stor betydning for hvilke strategier elevene benytter og deres fremdrift i problemløsningsprosessen. Det kan derfor tenkes at med lærerveiledning gjennom hele problemløsningsprosessen, og hint om refleksjon over løsning og monitorering vil potensialet for problemløsningssuksess for disse elevene også være stort. I studien er det antydet at læreren veileder elevene ulikt i forhold til deres faglige nivå, noe som også Polya (1957) beskriver som viktig under lærerveiledningen. En ser at læreren er viktig i starten for den ene elevgruppa, der hun hjelper med å forstå problemet og leder mot strategier som de tar i bruk, men viktig i slutten for den andre elevgruppa, der hun utfordrer dem til overbevisning og å lage en formel og dermed til å gå enda dypere i problemløsningsprosessen. I den faglig sterke gruppa fører lærers hint om å dobbeltsjekke løsningen til monitorerende strategier og hintet om å lage formel fører til at de benytter seg av flere strategier og jobber lengre med problemet og dypere i problemløsningsprosessen. Med andre ord differensieres lærerhjelpen. Med dette ser det ut som at læreren kan bidra til ulike strategier i de ulike fasene ved at læreren leder elevene mot disse strategiene.

6.1 Implikasjoner for videre forskning

Studien jeg har gjennomført er en mindre kvalitativ case-studie som kun strekker seg over to uker. Det kunne vært spennende å forske på samme tema over en lengre periode, men også med flere klasser, andre trinn og flere lærere. Studiens fokus har vært på to grupper med ulikt faglig nivå. Det kunne videre vært interessant å studere elevgrupper som ligger på samme nivå for å se hvilke strategier de benytter og hvilken rolle det spiller at læreren kommer med hint tross samme faglig nivå. Et annet videre forskningsbidrag kunne vært og sett på hvorvidt det er utvikling av problemløsningsstrategier over tid både med og uten lærerveiledning. Jeg har hatt fokus på tre problemer, hvor kun to av disse er større fokus. Dette er en begrensning på grunn av oppgavens omfang. Et videre bidrag til forskning kunne derfor vært å observere samme problemløsningsoppgaver over lengre tid, men også andre problemer kunne vært interessante. I tillegg kunne videre forskning benyttet elevgrupper med flere elever, slik at det er flere elever å spille på i tilfelle noen er borte fra skolen, eller bidrar lite.

6.2 Pedagogiske implikasjoner

Funnene fra denne studien er ikke generaliserbare, og derfor kan en ikke forvente at annen forskning vil finne akkurat samme antydninger, og derfor trengs mer forskning på dette. Men studiens funn kan gjøre oss lærere bevisste på elevers strategier og arbeid i problemløsningsprosessen, spesielt med tanke på i arbeidet med den nye læreplanen som snart vil inntre. På bakgrunn av både funnene i studien samt fagfornyelsens fokus på problemløsning, kan det se ut som at en bør bruke mer tid på problemløsning i klasserommet samt problemløsningsmodeller og problemløsningsstrategier for at elevene skal få mer erfaring med problemløsning. Noe en også kan ta med seg fra denne studien, er at elever som ligger på et lavere nivå trolig trenger mer veiledning og hint i de første fasene for å forstå problemene, mens faglig sterke elever kan ha en tendens til å drive seg frem selv og ha behov for utfordrende hint. Dette trenger ikke å være tilfelle i andre klasserom, men uansett må en som lærer legge til rette for alle elevene, og veilede elevene under ulike faser ved å gi hint om strategier i problemløsningsprosessen slik at de kommer seg videre. Lærerhjelpen må differensieres ut fra elevenes faglige nivå, og dermed må en være bevisst på hvilke hint en gir til ulike elever i problemløsningsprosessen.

7 Referanseliste

Alexander, R. J. (2008). *Towards dialogic teaching: rethinking classroom talk* (4. utg.). Cambridge: Dialogos.

Berry, R. Q. (2019). Identity, agency, positionality, and teaching practices. Invitert plenumspresentasjon at the 27th annual conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education. University of KwaZulu-Natal, Durban: SAARMSTE.

Bjuland, R. (2002). *Problem solving in geometry. Reasoning processes of student teachers working in small groups: A dialogical approach* (Doktoravhandling). Universitetet i Bergen, Bergen.

Bjuland, R. (2004). Student Teachers' Reflections on Their Learning Process through Collaborative Problem Solving in Geometry. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 199–225.

Bjuland, R. (2007). Adult Students' Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *4*(1), 1–30.

Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordisk matematikkdidaktikk, 2*(2), 6–35.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – state, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37–68.

Carlsen, M. (2008). *Appropriating mathematical tools through problem solving in collaborative small-group settings* (Doktoravhandling). Universitetet i Agder, Kristiansand.

Carlsen, M. (2009). Reasoning with Paper and Pencil: The Role of Inscriptions in Student Learning of Geometric Series. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(1), 54–84. https://doi.org/10.1007/BF03217538

Carlsen, M. (2010). Appropriating geometric series as a cultural tool: a study of student collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 95–116. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9230-0

Carlson, M. P. & Bloom, I. (2005). The Cyclic Nature of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(1), 45–75. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0808-x

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions – a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(2), 281–304. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9515-1

Drageset, O. G. (2015). Different types of student comments in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 29–40. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.003

Dysthe, O. (Red.). (2001). *Dialog, samspel og læring.* Oslo: Abstrakt forlag.

Fauskanger, J. & Bjuland, R. (2018). Deep learning as constructed in mathematics teachers' written discourses. *International Electronic Journal of Mathematics Education* (IEJME), *13*(3), 149–160.

Flyvbjerg, B. (2006). Five Misunderstandings About Case-Study Research. *Qualitative Inquiry*, *12*(2), 219–245. https://doi.org/10.1177/1077800405284363

Gadamer, H. G. (2010). *Sannhet og metode: grunntrekk i en filosofisk hermeneutikk*. Oslo: Pax Forlag.

Goos, M. (2004). Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*. *35*(4), 258–291.

Kisa, M. T. & Stein, M. K. (2015). Learning to See Teaching in New Ways: A Foundation for Maintaining Cognitive Demand. *American Educational Research Journal, 52*(1), 105–136. https://doi.org/10.3102/0002831214549452

Kjærnsli, M., Nortvedt, G.A., & Jensen, F. (2014). Norske elevers kompetanse i problemløsning i PISA 2012. Hentet 1. mars 2019 fra https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/publikasjoner/publikasjoner/pisa2012_problemlosing.pdf

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16*(4), 5–44.

Kunnskapsdepartementet. (2016). *Fag-Fordypning-Forståelse – En fornyelse av kunnskapsløftet*. (Meld. St. 28. (2015-2016)) Hentet 29. november 2018 fra https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem-solving. I P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (s. 361-386). Springer.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2. utg.). Harlow: Prentice Hall.

Mercer, N. & Littleton, K. (2007). *Dialogue and the Development of Children's Thinking: A sociocultural approach.* London: Routledge.

NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi* (4. utg.). Oslo: De nasjonale forskningsetiske komiteene.

Nordbø, L. M. (2014). *Problemløsning i smågrupper på ungdomstrinnet – en studie av elevers problemløsningsstrategier og deres appropriering av ulike medierende verktøy i problemløsningsfasen.* (Mastergradsavhandling, Universitetet i Stavanger). Hentet 12. november 2018 fra https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/196770/Hele%20oppgaven.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Nosrati, M. & Wæge, K. (2018). Dybdelæring i matematikk. Hentet 29. november 2018 fra http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/MN%20KW%20dybdelæring%2015.04.18_0.pdf

Polya, G. (1957). *How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method*. (2. utg.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk : Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv*. Oslo: Cappelen akademisk forlag.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334–370). New York: MacMillan.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

Silverman, D. (2011). *Interpreting Qualitative Data: A Guide to the Principles of Qualitative Research.* (4. utg.). Los Angeles, Calif: Sage.

Stein, M. K., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2009). *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction: Casebook for Professional Development* (2. utg.). New York: Teachers College, Colombia University.

Solvang, R. (1992). *Matematikkdidaktikk* (2. utg.). Bekkestua: NKI.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. New York: Free Press.

Svingen, O. & Gilje, Ø. (2018). Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk. Hentet 22. mai 2019 fra https://www.udir.no/contentassets/9178af2725fd4773a46374be4ba54de9/grunnlagsdokument_kvalitetilareremidler_udir_2018.pdf

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Torkildsen, S. H. (2017). Matematisk problemløsning Hentet 25. mai 2019 fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Torkildsen%20Matematisk%20Problemløsing.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet 5. mars 2019 fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter

Utdanningsdirektoratet. (2015, 11. september). Vær bevisst i valg av oppgaver. Hentet 1. desember 2018 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/regning/god-regneopplaring/2.-var-bevisst-i-valg-av-oppgaver/

Utdanningsdirektoratet. (2018). *Fagfornyinga – innspelsrunde skisser til læreplanar i matematikk*. Hentet 6. november 2018 fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/286

Vygotsky, L. S. (1978) *Mind in society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Wittek, L. (2012). *Læring i og mellom mennesker - en innføring i sosiokulturelle perspektiver* (2. utg.), Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Oslo: Universitetsforlaget.

8 Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv til foresatte

Informasjonsskriv

Vil du la barnet ditt delta i et forskningsprosjekt om problemløsning i matematikkfaget?

Dette er et spørsmål til deg/dere som foresatte til barn på XX ungdomsskole om å la barnet delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke problemløsningsstrategiene til elevene, samt om problemløsning skaper motivasjon i matematikkfaget. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære.

Vi er to masterstudenter fra Universitetet i Stavanger som ønsker å samle inn data til våre masteroppgaver. Formålet med prosjektet er å tilegne seg kunnskaper og erfaringer om læring og undervisning i matematikk. Arbeidet vil dreie seg om bruk av problemløsningsoppgaver, der vi ønsker å se på hvilke strategier elevene bruker, hva lærerens rolle betyr for arbeidet, og se hvordan problemløsningsoppgaver kan føre til motivasjon i faget.

Vi kontaktet en praksisskole, og tok videre kontakt med en lærer som jobber på denne skolen. Dermed er utvalget denne læreren og hennes klasse. Vi ønsker å observere elevene og læreren i matematikktimene over to uker i februar. Det er også ønskelig å samle inn to gruppeintervju av elever, samt to lærerintervju, i tillegg til aktuelle arbeidsbøker. Det vil bli gjort video- og lydopptak fra undervisningen og intervjuene, i tillegg til feltnotater. Hvis dere ønsker å se intervjuguidene på forhånd, ta kontakt med Pontus eller Linda.

Det er frivillig å delta i prosjektet, og eventuell deltakelse innebærer at dere når som helst kan trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for dere eller barna deres hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke dere.

Vi vil bare bruke opplysningene om barna dine/læreren til formålene vi har fortalt i dette skrivet. Veileder i tillegg til oss to studenter har tilgang til opplysningene. Vi behandler observasjoner og kommentarer konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Dette vil vi være bevisste på gjennom hele prosessen, altså i innsamling, bearbeidelse, analyse og presentasjon av data. Alle navn vil anonymiseres med fiktive navn. Skolen vil også være anonym. Deltakerne vil derfor ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen. Video- og lydopptak vil bli oppbevart på en sikker måte på egen datamaskin til bruk i prosjektet. Prosjektet skal avsluttes 31.12.19. Da vil alle opptak bli slettet/destruert. Vi behandler opplysninger om barna basert på ditt samtykke. Prosjektet er meldt til NSD – Norsk senter for forskningsdata AS. Alle involverte parter fra UiS er underlagt taushetsplikt, og data vil bli behandlet deretter.

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med Pontus Thente på telefon xxxxxxxx eller Linda Årthun på telefon 93241663, som er ansvarlige for dette prosjektet sammen med veileder Raymond Bjuland ved Universitetet i Stavanger. Du kan også ta kontakt med NSD på epost personverntjenester@nsd.no, telefon xxxxxxxx.

Med vennlig hilsen

Veileder Raymond Bjuland Studenter Pontus Thente og Linda Årthun

Svarslipp:
Jeg har mottatt og forstått informasjon om forskningsprosjektet, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at deltakere i prosjektet fra UiS observerer og eventuelt intervjuer vårt barn.

Underskrift at foresatt(e):………………………………………………………………………
Dato:………….

Jeg godtar også at det blir samlet inn data som beskrevet ovenfor

Ja Nei (sett ring)

Vedlegg 2: Informasjonsskriv til lærer

Informasjonsskriv

Vil du delta i et forskningsprosjekt om problemløsning i matematikkfaget?

Dette er et spørsmål til deg som lærer til elever på XX ungdomsskole om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke problemløsningsstrategiene til elevene, samt om problemløsning skaper motivasjon i matematikkfaget. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære.

Vi er to masterstudenter fra Universitetet i Stavanger som ønsker å samle inn data til våre masteroppgaver. Formålet med prosjektet er å tilegne seg kunnskaper og erfaringer om læring og undervisning i matematikk. Arbeidet vil dreie seg om bruk av problemløsningsoppgaver, der vi ønsker å se på hvilke strategier elevene bruker, hva lærerens rolle betyr for arbeidet, og se hvordan problemløsningsoppgaver kan føre til motivasjon i faget.

Vi ønsker å observere dine elever og deg som lærer i matematikktimene over to uker i februar. Det er også ønskelig å samle inn to gruppeintervju av elever, samt to lærerintervju, i tillegg til aktuelle arbeidsbøker. Det vil bli gjort video- og lydopptak fra undervisningen og intervjuene, i tillegg til feltnotater. Hvis du ønsker å se intervjuguidene på forhånd, ta kontakt med Pontus eller Linda.

Det er frivillig å delta i prosjektet, og eventuell deltakelse innebærer at du når som helst kan trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger vil bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller elevene hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Vi vil bare bruke opplysningene om elevene/læreren til formålene vi har fortalt i dette skrivet. Veileder i tillegg til oss to studenter har tilgang til opplysningene. Vi behandler observasjoner og kommentarer konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Dette vil vi være bevisste på gjennom hele prosessen, altså i innsamling, bearbeidelse, analyse og presentasjon av data. Alle navn vil anonymiseres med fiktive navn. Skolen vil også være anonym.

Deltakerne vil derfor ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen. Video- og lydopptak vil bli oppbevart på en sikker måte på egen datamaskin til bruk i prosjektet. Prosjektet skal avsluttes 31.12.19. Da vil alle opptak bli slettet/destruert. Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke. Prosjektet er meldt til NSD – Norsk senter for forskningsdata AS. Alle involverte parter fra UiS er underlagt taushetsplikt, og data vil bli behandlet deretter.

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med Pontus Thente på telefon xxxxxxxx eller Linda Årthun på telefon 93241663, som er ansvarlige for dette prosjektet sammen med veileder Raymond Bjuland, telefon xxxxxxxx, ved Universitetet i Stavanger. Du kan også ta kontakt med NSD på epost personverntjenester@nsd.no, telefon xxxxxxxx.

Med vennlig hilsen

Veileder Raymond Bjuland　　　　　Studenter Pontus Thente og Linda Årthun

Svarslipp:
Jeg har mottatt og forstått informasjon om forskningsprosjektet, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til at deltakere i prosjektet fra UiS observerer og eventuelt intervjuer meg og min klasse.

Underskrift lærer: ………………………………………………………………………
Dato: …………

Jeg godtar også at det blir samlet inn data som beskrevet ovenfor

Ja　　　　　Nei　　　　　(sett ring)

Vedlegg 3: Kvittering NSD

NSD NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Problemløsning

Referansenummer

387018

Registrert

05.12.2018 av Pontus Thente - p.thente@stud.uis.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Stavanger / Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora / Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Raymond Bjuland, raymond.bjuland@uis.no, tlf:

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Pontus Thente, pontusthente@hotmail.com, tlf:

Prosjektperiode

01.01.2019 - 31.12.2019

Status

27.01.2019 - Vurdert

Vurdering (1)

27.01.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD, den 27.01.19. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER

Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.19.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf.
personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD finner at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

De registrerte vil ha følgende rettigheter i prosjektet: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).
Rettighetene etter art. 15-20 gjelder så lenge den registrerte er mulig å identifisere i datamaterialet.
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.
Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).
For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp behandlingen ved planlagt avslutning for å avklare status for behandlingen av opplysningene.
Lykke til med prosjektet!
Kontaktperson hos NSD: spesialrådgiver Kjersti Haugstvedt
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)


NSD MELDESKJEMA FOR BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Norsk

Meldinger | Eksporter | Vurdering

Alle endringer er lagret

Personopplysninger

Type opplysninger

Prosjektinformasjon

Behandlingsansvar

Tilleggsopplysninger

Tilleggsopplysninger

Vi er to masterstudenter som samler inn data på samme skole
Pontus Thente og Linda Årthun

Vedlegg 4: Intervjuguide lærer

Intervjuguide lærer

Pre-intervju lærer

Bakgrunn

- Hvor lenge har du jobbet som lærer?
- Hva er utdanningen din?
    - Fag, videreutdanning
- Hvilke fag underviser du i?
- Har du arbeidet på flere skoler tidligere?
- Hvilke trinn har du arbeidet med?
- Hvilke erfaringer har du med denne klassen?
    - Gruppearbeid?
    - Diskutere?
- Hvordan er elevene i forhold til faglig nivå?
    - Forkunnskaper
- Er de vane med å samarbeide?
- Hvordan er læringsmiljøet i matematikktimene?

Matematikktimene

- Hvordan er en normal matematikktime for deg?
    - Eksempel
- Hvordan pleier du å starte matematikktimene?
    - Hvilke eksempler bruker du?
    - Har du et eksempel der du merket at elevene var med?
        - Hva var det som gjorde at de var med?
- Hvordan er avslutningene av matematikktimene?
    - Eksempel
    - Hvilke elevsvar trekker du frem?
- Hva er en god time for deg?

- Hvordan jobber du for at elevene skal være med i en matematisk samtale?
- Hva tenker du i forhold til det å spørre spørsmål?
- Hva tenker du om valg av oppgaver?
    - Kan du gi eksempler?
- På hvilken måte deler elevene ideer med hverandre?
- Hvordan bruker du innspill du får av elevene?
- Hvordan stiller du spørsmål generelt i matematikktimene?

Problemløsning

- Hva legger du i ordet problemløsning?
- Arbeider dere med problemløsning i klasserommet? Kan du gi eksempler på hvordan dere eventuelt arbeider?
    - Hvordan er ”problemløsningskulturen” i ditt klasserom?
    - Hvor ofte har de arbeidet med problem som har mer enn én løsning?
- Har du tidligere arbeidet med problemløsning?
    - Når?
- Hvordan kan kollegaer eventuelt støtte i arbeidet med problemløsning?
- Har du erfaringer du ønsker å formidle angående elevers arbeid med problemløsning?
    - Ser du utvikling i forhold til elevers strategier? Kan du gi eksempel?
    - Ser du at elevene blir motiverte? Kan du gi eksempel?
- Hvordan ser du på problemløsning som en mulighet for å lære?
- Hvordan veileder du elevene under løsningsprosessen?
- Hva er din rolle når de arbeider med problemløsning?
    - I de ulike stegene. (Hva er din rolle i Polyas steg 1, 2, 3 og 4?)
- Hva tenker du om problemløsning i smågrupper?
    - Ser du læringseffekt? Kan du gi eksempel?
- Hva er en rik oppgave for deg?
- Hvem mener du problemløsning passer for?
    - Har det like stor effekt for svake og sterke elever?
- Ta frem oppgaven om kuleis.
    - Hva tenker du om denne oppgaven?
    - Er dette en oppgave for alle elevene dine?

Post-intervju lærer

- Hva tenker du etter gjennomføring av denne toukersperioden i forhold til problemløsning?
- Ta frem videoepisoder. Utgangspunkt for samtalen. Kuleis og bordpartner.
    - Hva tenker du om denne episoden?
    - Spisset spørsmål om disse videoene, om strategibruken.
    - Hvilke strategier ser du kommer frem?
    - Hvorfor tror du elevene bruker den strategien?
- Tror du elevene har hatt læringsutbytte av opplegget?
    - Eventuelt hvem synes du har fått mest utbytte av å arbeide med problemløsning?
    - Har du sett noen utvikling i forhold til motivasjonen til elevene ved å arbeide slik?
- Er det noe du sitter igjen med som utfordringer med å arbeide slik?
- Hvilke fordeler ser du med denne arbeidsformen?
- Hva tenker du nå om elevers strategier?
- Trekke frem noe fra pre-intervjuet, og reflektere over dette. Innledningen, når hun introduserer problemløsning, og oppgaven de skal gjøre i begynnelsen.
    - Hva tenker du om denne introduksjonen? Reflekter sammen med henne.
- Ta frem videoklipp fra når lærer samtaler med gruppe A. Hva tenker du om denne episoden? Reflektere over elevenes strategibruk.
    - Hvilke strategier ser du kommer frem?
    - Hva tenker du om strategiene?
    - Hvorfor tror du elevene bruker denne strategien?
- Ta frem videoklipp fra når lærer samtaler med gruppe B. Reflektere over dette.
- Er det noe du er ”sjokkert” over, både positiv og negativ hendelse?
- Strategibruk – hvilke strategier så du kom frem her?

Vedlegg 5: Intervjuguide elever

Gruppeintervju elever

- Hva synes dere om faget matematikk?
    - Kan du utdype det du sier? Hvorfor. Hva er gøy osv.?
    - Kan du gi eksempel på dette?
    - Spør de andre også.
- Hvilket tema liker dere best i faget?
- Hvordan liker dere best å arbeide med matematikk?
    - Lærer underviser på tavla
    - Gjøre oppgaver alene
    - Jobbe sammen med medelever
- Hva er problemløsning for dere?
    - Bruk eksempel fra en oppgave som gruppen arbeidet med. Dette er utgangspunkt for samtalen. Vis til denne oppgaven.
    - Hva vil det si å generalisere? Hva tenker dere dette ordet betyr?
- Liker dere å arbeide på denne måten som dere har gjort disse to ukene?
- Hva likte dere best?
- Hva gjør dere om dere ikke forstår oppgaven?
    - Får du mer motivasjon og vil løse oppgaven etter å ha gjort dette?
- Hva gjør dere om dere ikke klarer å løse oppgaven?
    - Gjør dette at du vil lære mer matematikk?
    - Hvis du får til oppgaven, blir du motivert til å utvikle og generalisere et svar?
    - Hvis du får til en oppgave, blir du da motivert til å løse andre oppgaver?
- Hvordan benytter dere dere av at læreren hjelper dere?
- Bruke noe fra oppgavebøkene (loggen) → Kuleis. Bordpatner.
    - Jeg ser du gjorde slik. Kan du utdype dette mer?
    - Hva tenkte du her?
    - Hvordan kunne du generaliser?
- Er det greit at vi tar frem en problemløsningsoppgave nå?
    - Hva tenker dere når dere får en oppgave som dette?
    - Hvordan vil du starte opp?
    - Hva vil du gjøre så?

- Hva tenkte dere da dere løste denne oppgaven?
- Hvordan kom dere frem til dette svaret?

Vedlegg 6: Problemløsningsoppgaver

Problemløsningsoppgaver

Alle skal gjøre oppgave 1 og 2. Deretter kan dere velge oppgaver sammen på gruppen. Skriv med **PENN**, ikke blyant. Dere skal ikke viske ut noe som skrives ned. Begrunn hvorfor dere på gruppa velger den enkelte oppgaven.

1. Mobiloppgave

   En kveld var mobilen til Lise nesten utladet. Da plugget Lise Iphonen i laderen og tok flere skjermbilder av prosenten av oppladet batteri i forhold til tiden. Det var kun skjermbilder som mobilen ble brukt til disse minuttene.

   Viser til følgende bilde:

   a. Hva ser du?
   b. Hva har du lyst å finne ut av når du ser dette?
   c. Når tror du (begrunn gjetning) at mobilen vil være fulladet?
   d. Hvilken annen informasjon trenger du for å finne ut dette?

Se nå på disse bildene:


Telia N
21 %
00:52
21 % oppladet


Telia N
30 %
01:01
30 % oppladet


Telia N
42 %
01:10
42 % oppladet


Telia N
50 %
01:18
50 % oppladet

e. Ut fra opplysningene du ser på bildene – kan du nå forsøke å finne en løsning på problemet: Når vil mobilen være fulladet?

(Michael Fenton´s Reason and Wonder Web Site http://reasonandwonder.com/charge/ i Berry, 2019).

2. Kuleis

Hanne skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire ulike smaker.

Hun vil ha to iskuler.

a) Hvor mange måter kan hun velge isen sin på?

b) Hva om det er flere smaker å velge mellom?

(Wæge & Nosrati, 2018).

3. Produkt

a. Finn det største mulige produktet som kan lages av to tall som har sum 41.

b. Hvordan vet du at dette er riktig svar?

(T. Bulien, personlig kommunikasjon, 2017. Problemløsningsoppgaver fått av foreleser i emnet MUT300).

4. Ektepar

Fire ektepar som møtes ofte har navnene Alice, Barbara, Christa, Edith, Al, Frank, Fred og Ernest. Kan du finne ut hvem som er gift med hvem når Al og Edith er søsken, Edith og Fred var forlovet en gang, men det ble slutt da Edith møtte sin nåværende mann, Christa har en søster, men mannen hennes er enebarn og Alice er gift med Ernest.

Kan det være andre muligheter enn det dere kom frem til?

(T. Bulien, personlig kommunikasjon, 2017. Problemløsningsoppgaver fått av foreleser i emnet MUT300).

5. Blondt hår problemet

Etter mange år uten å ha sett hverandre, møtes to venner igjen, med navnene Hypatia og Pythagoras. Begge har likt matematikk godt. Her er samtalen mellom dem:

Pythagoras: *Er du gift? Har du noen barn? Hvor mange? Hvor gamle er de?*

Hypatia: *Ja, jeg er gift! Jeg har tre barn og produktet av deres alder er 36.*

Pythagoras: *(etter noe tenking) Jeg kan ikke finne det ut. Jeg har ikke nok ledetråder.*
Hypatia: *Ok. Hva hvis jeg sier at summen av alderen deres er det samme som tallet på din adresse?*
Pythagoras: *(etter noe tenking) Jeg kan fortsatt ikke finne ut alderen deres. Jeg trenger et annet hint.*
Hypatia*. Jeg forteller deg også at det eldste barnet har blondt hår.*
Pythagoras: aha! Nå kan jeg, uten tvil, si hva alderen på dine barn er.

a) Hva er alderen på Hypatias barn? (Alderen deres kan bare være naturlige tall).
b) Hvordan kan du vite at dette er det eneste riktige svaret?

(Stylianides & Stylianides, 2014).

6. Bordpartner

Tone inviterte 17 venner til middag og hun ga hver gjest et kort med et tall fra 2 til 18 og beholdt nummer 1 selv. Da alle hadde satt seg, viste det seg at summen av tallene på kortene til hvert par ble et kvadrattall. Hvilket tall hadde Tones bordkavaler (bord-partner).

(T. Bulien, personlig kommunikasjon, 2017. Problemløsningsoppgaver fått av foreleser i emnet MUT300).

7. Trekant

I en trekant ABC er ∠A=22° og ∠B=100°. Punkt D på AC er slik at AD=AB. Hva er ∠DBC?

(Abelkonkurransen, 2014).

8. Terninger

Du kaster tre vanlige sekssidede terninger. Hva er sannsynligheten for at du får ett oddetall og to partall

(Abelkonkurransen, 2012).

9. Ståltråder

Du har to ståltråder som begge er 24 cm.

a) Lag to ulike rektangler av disse ståltrådene. Vil disse ha samme areal?

b) Kan du lage flere figurer av samme areal?

c) Hvilken figur må du lage for å få størst areal?

(Nämnaren Tema, 1995).

10. Kvadrat

Du har et kvadrat ABCD, og et punkt P i det indre av kvadratet.

a) Vis at hvis trekant PCD er likesidet, så er $\angle ABP=15°$.

b) Undersøk om det omvendte gjelder: Hvis $\angle ABP=15°$, så er trekant PCD likesidet.

(R. Bjuland, personlig kommunikasjon, 4. september 2017. Powerpoint: Oppstart Problemløsning. Gitt i forelesning i MUT300)

11. Skoletur

730 elever og lærere fra en skole skal på tur. Hver buss kan ha 50 passasjerer. Hvor mange busser trenger skolen?

(Introdusert av medstudent)

12. Kvadratisk ark

Et kvadratisk ark klippes til seks rektangler. Hvis vi regner ut omkretsen på hvert av disse rektanglene og adderer disse sammen, så blir summen 120 cm.
Hvor stor er arealet av kvadratet?

(Matematikksenteret, u.å.)

Referanseliste

Abelkonkurransen. (2014, 6. november). Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2014-2015. Hentet 31. januar 2019 fra https://abelkonkurransen.no/problems/abel_1415_r1_prob_nb.pdf

Abelkonkurransen. (2012, 8. november). Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2012-2013. Hentet 31. januar 2019 fra https://abelkonkurransen.no/problems/abel_1213_r1_prob_nb.pdf

Berry, R. Q. (2019). Identity, agency, positionality, and teaching practices. Invitert plenumspresentasjon at the 27th annual conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education. University of KwaZulu-Natal, Durban: SAARMSTE.

Matematikksenteret. (u.å.). Areal og omkrets. Hentet 29. mai 2019 fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Areal%20og%20omkrets.pdf

Nämnaren Tema. (1995). *Matematikk – ett Kärnämne.* Göteborg: Nämnaren Göteborgs universitet. Hentet 1. juni 2019 fra http://ncm.gu.se/media/namnaren/n-tema/karnamnet-ntema1.pdf

Stylianides A. J. & Stylianides, G. J. (2014). Impacting positively on students' mathematical problem solving beliefs: An instructional intervention of short duration. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 8–29. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.08.005

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Oslo: Universitetsforlaget.

Vedlegg 7: Transkripsjonsnøkkel

Transkripsjonsnøkkel

Tegn	**Beskrivelse**
≈	Person overtar snakkingen mens en annen snakker.
(.)	Ett sekund pause.
(ns)	n betyr antall sekunder pause.
Understreking	Ord som blir forsterket.
( )	Tekst inni parentes når noe skjer på likt med ytringen.
(…)	Indikerer at ytringer mellom andre ytringer er tatt vekk.
(ukjent tekst)	Ikke transkribert på grunn av ugjenkjennelig tale.