Universitetet i Stavanger

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master i Utdanningsvitenskap Profil: Matematikkdidaktikk	Vårsemesteret, 2020 Åpen/ ~~konfidensiell~~
Forfatter: Cathrine Reinertsen	Cathrine Reinertsen (signatur forfatter)
Veileder: Reidar Mosvold	
Tittel på masteroppgaven: *Matematiske krav i ledelse av matematiske diskusjoner* Engelsk tittel: *Mathematical demands of leading mathematical discussions*	
Emneord: Matematikkundervisning, diskusjoner, undervisningsoppgaver, kunnskap	Antall ord: 25 862 + vedlegg/annet: 29 893 Stavanger, 09/06/2020 dato/år

Forord

Innleveringen av denne masteroppgaven markerer slutten på mine fem år som lærerstudent ved Universitet i Stavanger. Arbeidet med oppgaven har vært spennende, lærerikt og utfordrende. Jeg sitter igjen med mye ny kunnskap omkring matematikkundervisning. Nå ser jeg frem til å sette kunnskapen jeg har tilegnet meg fra disse fem årene ut i livet, og forhåpentligvis skape gode læringsmuligheter for elevene.

En spesiell takk rettes til professor Reidar Mosvold. Du har vært en spesielt dyktig, engasjert og vennlig veileder i arbeidet med denne oppgaven. Din hjelp og væremåte har gitt meg den støtten, og det drivet jeg har trengt til å skrive en oppgave jeg er stolt av.

En takk rettes også til deltakerne. Uten slike lærere som i denne studien ville mye spennende og interessant kunnskap fra klasserommet uteblitt. Takk for din åpenhet og villighet til å dele av deg selv og din undervisning.

Til slutt vil jeg takke min samboer, familie, venner og medelever for stor støtte gjennom masteroppgaven og hele studietiden.

Cathrine Reinertsen
Stavanger, 09/06/20

Sammendrag

Denne studien undersøker matematiske krav som læreren kan møte i ledelse av matematiske helklassediskusjoner. En lærer og hennes to klasser på sjette trinn ble observert over en periode på to uker. Læreren ble strategisk utvalgt på grunn av sitt fokus på dialogisk undervisning i matematikk. Ut ifra videoopptakene er det valgt ut tre episoder hvor en matematisk diskusjon er observert. Episodene er analysert for å identifisere matematiske undervisningsoppgaver som læreren kan møte i ledelsen av matematiske diskusjoner basert på matematiske problem som oppstår i undervisningen. Det drøftes så hvordan de matematiske undervisningsoppgavene stiller krav til lærerens matematiske kunnskap.

Gjennom analysearbeidet identifiseres seks matematiske undervisningsoppgaver som stiller matematiske krav til læreren. De seks oppgavene er *å lede elevene til mål, å tolke elevsvar, å vurdere gyldigheten i elevsvarene, å identifisere potensialet i elevenes ytringer, å stille gode og oppfølgende spørsmål, og vurdere tidsbruken.* Til tross for at disse oppgavene ikke er matematiske i seg selv, viser studien at de har betydning for matematikken. Sammenlignet med mer tradisjonell utspørring, kan det se ut som at de identifiserte oppgavene er mer komplekse i arbeidet med å lede matematiske diskusjoner.

Studien konkluderer med at det kan stilles flere matematiske krav til læreren i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner. De matematiske undervisningsoppgavene stiller krav til lærerens matematiske kunnskap som strekker seg utover en allmenn fagkunnskap. Lærerens spesialiserte fagkunnskap og fagdidaktiske kunnskap får en fremtredende plass. Studien er et bidrag til videre forskning på matematisk diskusjon i klasserommet og rustningen av lærere i dette arbeidet.

Summary

This study investigates demands in the work of leading mathematical whole class discussions. One teacher and her two sixth-grade classes were observed for two weeks. The teacher was strategically selected because of her focus on dialogic teaching of mathematics. Based on the video observations, three episodes were selected that involved mathematical discussions. The episodes were analyzed to identify mathematical tasks of teaching that may arise when leading mathematical discussions based on mathematical problems that occur in teaching. The thesis discusses how the mathematical tasks of teaching place demands on the teacher's mathematical knowledge.

Six tasks of teaching that entail mathematical demands for the teacher have been identified. The six tasks are: *guiding students to the goal, interpreting student responses, assessing the validity of student responses, identifying the potential of student statements, asking good follow-up questions, and assessing the time spent.* Although these tasks are not mathematical in themselves, the study shows that they influence the mathematics. Compared with a more traditional teaching through recitation, the identified tasks in the leading of mathematical discussion appear more complex.

The study concludes that the teacher is faced with several mathematical demands in the work of leading mathematical discussions. The mathematical tasks of teaching constitute demands of the teacher's mathematical knowledge that goes beyond a general subject knowledge. The teachers' specialized content knowledge and pedagogical content knowledge gain a prominent place. The study is a contribution to further research on mathematical discussion in the classroom and the strengthening of teachers in this work.

Innholdsfortegnelse

1. Introduksjon

1.1. Bakgrunn for valg av tema

Det er ikke lett å avgjøre hva som er *god* undervisning for elevene i skolen (Franke et al., 2007). Alle de forskjellige læreplanene er eksempler på hvordan synet på hva elevene bør kunne og hvordan de bør læres opp, har endret seg gjennom tidene. Hvordan lærerne legger opp sin undervisning i klasserommet ulikt er et annet eksempel. Det som gjør undervisning så spesielt er at det uansett nivå, engasjerer elever, lærere og skoleledere i en kontekst som er ulik fra dag til dag. Av den grunn er det vanskelig å lage en praktisk håndbok eller formel for hvordan *god* undervisning er eller skal gjennomføres (Franke et al., 2007, s. 226). Samtidig er det dette som gjør undervisning og lærerarbeidet så spennende. Imidlertid gir det antydninger til at som lærer er det nødvendig å kunne beherske ulike undervisningsformer og didaktiske metoder for å kunne formidle kunnskapen best mulig, og skape gode muligheter for læring.

I flere land forventes det nå at lærerens rolle i matematikkundervisningen går fra å være kunnskapsholderen og en dommer for hva som er matematisk korrekt, til å være en veileder i et miljø hvor elevene aktivt utforsker matematiske problemer og konstruerer sine egne forståelser (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008, s. 315). Et slikt syn preger også den nye norske læreplanen i matematikk. «Utforsking og problemløsning», «resonnering og argumentasjon» og «kommunikasjon» står nå som sentrale element i matematikkundervisningen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Jacobs og Spangler (2017) forklarer at en matematikkundervisning preget av diskusjon gir læreren et vindu inn i elevenes hode til å forstå deres matematiske tankegang. Dessuten gir det elevene en mulighet til å artikulere sine matematiske resonnement, samtidig som de får høre medelevenes fremgangsmåter og syn. Imidlertid er det ikke en slik kommunikasjon som er mest vanlig i de fleste klasserom, men heller en kommunikasjon preget av lærersnakk (Franke et al., 2007). Når kun et fåtall av lærere benytter en undervisning i tråd med de nye reformene vil det være både interessant og aktuelt å undersøke hvordan man, på best mulig måte, kan gjennomføre slik undervisning i praksis. Hvordan kan en som lærer arbeide med diskusjonsundervisning i matematikkfaget? Hvilke krav stilles det til læreren for å kunne lede matematiske diskusjoner?

1.2. Tidligere forskning på diskusjon i undervisning

Det er flere som har undersøkt og forsket på diskusjon i undervisning som en metode for læring og utvikling. Imidlertid begynte ikke forskningen på området å tre fram før det sosiale skiftet i utdanningsforskning på 1980-tallet. Bauersfeld (1980, s. 1) skrev at undervisning og læring av matematikk i klasserommet kan sees på som en situasjon av menneskelig interaksjon i en institusjonell setting. Bauersfeld (1980) hevder at man ikke lærer matematikk gjennom å bli fortalt hva som er matematikk, men gjennom et komplekst samspill mellom mennesker som kommer fram til matematikken i sammen. Et stykke fram i tid gir Dillon (1994) ut en bok dedikert kun til diskusjon. Her forklarer han hva diskusjon faktisk er, hva man kan diskutere, hvem deltakerne i diskusjonen er, hvordan man orkestrerer en diskusjon, hvordan man skal snakke i diskusjon og hvorfor man bør bruke diskusjon i skolen. Det påpekes at man ikke diskuterer et tema man allerede vet eller forstår fullt ut, for da er formålet med diskusjonen borte (Dillon, 1994). Selve målet er å utvide kunnskapen og forståelsen til deltakerne i diskusjonen, og deres vurderingsevne for det aktuelle temaet. Med det som mål ligger det store læringsmuligheter i arbeidsmetoden. Imidlertid for å kunne nå målet krever det at læreren leder diskusjonene på en hensiktsmessig måte.

I 2008 prøver Stein et al. å konkretisere hva som må til for å lede matematiske diskusjoner. Forfatterne kommer fram til at det er fem praksiser som bør arbeides med. De fem praksisene er: (1) å predikere elevsvar på oppgaver som er kognitivt krevende, (2) overvåke elevenes svar i utforskningsfasen, (3) bevisst utvelgelse av elever som presenterer sine svar, (4) enkelt sekvensere elevsvarene, og (5) hjelpe elevene til å koble sammen elevsvarene, og nøkkelideene i temaet (Stein et al., 2008, s. 321). I nyere forskning blir ofte det å lede matematiske diskusjoner beskrevet som en kjernepraksis i matematikkundervisningen (f.eks. Jacobs & Spangler, 2017). Imidlertid viser undersøkelser som The Third International Mathematics and Sciences study (TIMSS) at de fleste amerikanske klasserom fortsatt består av en initiering-respons-evaluerings-struktur (IRE), til tross for nye reformer (Stigler & Hiebert, 2009). En IRE-struktur er preget av at læreren stiller spørsmål, elevene foreslår en løsning etterfulgt av at læreren vurderer svaret som rett eller galt. Det er læreren som står ansvarlig for å løse problemet, mens elevenes deltakelse handler om å foreslå det neste steget i prosedyren (Franke et al., 2007, s. 229). Denne formen for undervisning omtales ofte som «tradisjonell» undervisning, og ifølge Cazden (2001, s. 5) er den best egnet for overføring av fakta og prosedyrer. Gapet mellom reformene og praksis kan indikere at man trenger mer forskning på diskusjon som undervisningsmetode for å ruste lærerne til å gjennomføre reformbasert undervisning med mål om å skape bedre læringsmuligheter for elevene.

1.3. Studiens hensikt og forskningsspørsmål

Et ønske med denne studien er å bidra til utvikling av kunnskap omkring dialogisk undervisning for å styrke lærere i å legge om undervisningen sin i tråd med forskning og nye reformer som den nye norske læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Stein et al. (2008) har allerede konkretisert orkestrering av matematiske diskusjoner til ulike praksiser som læreren må håndtere for å lede diskusjonene på en effektiv måte. Han tydeliggjør at læreren trenger kunnskap om klasseledelse for å kunne håndtere en slik undervisningsmetode. Likevel er det mindre tydelig i forskningen hvilken *matematisk* kunnskap læreren trenger (Hoover et al., 2016; Mosvold, 2017).

Det kan se ut til at det er utfordrende å fange opp hva lærere faktisk gjør når de hører på elevenes ytringer, tar avgjørelser om hva de skal respondere med eller hvor de plasserer seg i klasserommet (Ball, 2017, s. 14). Forskerne har gjerne intensjoner om å finne ut hva en lærers arbeid innebærer, men ender opp med å forske på interaksjonene og det som skjer i klasserommet istedenfor det som krever at læreren handler i de konkrete situasjonene (Ball, 2017, s. 14). Hva læreren gjør i og utenfor klasserommet kan være nyttig å undersøke for å tilegne seg kunnskap om hvilke krav undervisning stiller til læreren. Følgelig kan det være med på å styrke lærerne til å bli bedre rustet for å gjennomføre effektive og læringsrike matematiske diskusjoner i klasserommet. Hvis man vet mer konkret hva som kreves, så kan man lettere arbeide med, og forbedre sin kunnskap på disse områdene. Dessuten kan det bli brukt i evaluering av egen praksis: Har jeg tilegnet meg alle kravene som undervisningsformen stiller, eller er det noen hull her? Målet med denne studien er derfor å prøve og identifisere ulike matematiske krav til læreren i undervisning med matematisk diskusjon.

Studien tar utgangspunkt i Ball (2017) og Ball, Thames og Phelps (2008) sin måte å kartlegge matematikkunnskap som læreren trenger for å undervise i faget. De har bevisst og konkret arbeidet med å undersøke *lærernes arbeid*. Hva er det en lærer faktisk gjør i løpet av en arbeidsdag, og på hvilken måte krever det matematisk resonnering, innsikt, forståelse og ferdighet (Ball & Bass, 2002, s. 5)? Fra dette arbeidet oppsto begrepet *undervisningsarbeid* (på engelsk: «work of teaching»). Undervisningsarbeid er de oppgaver som en lærer må gjøre for å hjelpe elever til å lære. Det kan eksempelvis være å velge ut oppgaver elevene skal gjennomføre, høre på elevsvar og respondere på disse, forberede en prøve eller snakke med foreldre. Hver enkelt av de ulike gjøremålene eller oppgavene kalles en *undervisningsoppgave* (på engelsk: «tasks of teaching») (Ball & Bass, 2002). Ved å ta utgangspunkt i konkrete situasjoner som utspiller seg i undervisningsarbeidet, vil studien utforske noen av de matematiske kravene læreren kan møte i ledelse av matematiske diskusjoner. De matematiske kravene som stilles til læreren sier noe om hvilken matematisk kunnskap som kreves for å utføre denne formen for undervisning. Hva kreves av lærernes faglige og fagdidaktiske kunnskap? Hvilke matematiske oppgaver krever dette arbeidet at læreren løser og gjennomfører? Det vil være gunstig å se på initieringen av matematisk diskusjon, selve orkestreringen og avslutningen av diskusjonen, for å få en helhetlig oversikt over de matematiske kravene for undervisningsmetoden. Forskningsspørsmålet for denne studien blir dermed:

> Hvilke matematiske krav kan læreren stå ovenfor i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner?

Det er sentralt at ordet «kan» er benyttet i forskningsspørsmålet. Datamaterialet i denne studien baserer seg på én erfaren lærer som underviser ved hjelp av interaksjon og diskusjon på sjette trinn. Dermed kan prosjektet være begrenset til matematiske krav som stilles for dette alderstrinnet, eller til krav som bare stilles til denne læreren. Likevel kan en anta at mange av utfordringene og kravene i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner vil kunne oppstå uavhengig av klassetrinn og lærer. Dessuten vil ikke studien kunne presentere en endelig liste over alle matematiske krav en lærer møter i undervisningsarbeidet. Imidlertid vil det pekes på noen matematiske krav som *kan* oppstå i arbeidet med å lede matematiske diskusjoner ut ifra virkelige situasjoner.

1.4. Avgrensning og definering

Forskningsspørsmålet begrenser seg til matematiske diskusjoner som utspiller seg i matematikkundervisningen. Det vil si at studien vil undersøke matematiske krav i ledelse av matematiske diskusjoner i klasserommet. Videre begrenser studien seg til å gjelde matematiske helklassediskusjoner. Hva som regnes å være en matematisk diskusjon er noe uklart ut ifra en systematisk gjennomgåelse av litteraturen på området. Det er få forskere eller forfattere som definerer begrepet i sine studier omhandlende diskusjon i undervisning. De som derimot gir en definisjon for hva de mener med diskusjon, definerer ikke begrepet likt. Det er i imidlertid et sentralt begrep for denne studien. Derfor er diskusjon begrenset til å omhandle en spesifikk kommunikasjonsform hvor det skjer en meningsutveksling der flere deltakere tar standpunkt til eller bygger videre på synspunktene som presenteres underveis (se fullstendig definisjon s. 11). Et annet viktig begrep i studien er matematiske krav. I denne sammenheng omhandler matematiske krav de undervisningsoppgavene som læreren møter i undervisningen. Disse undervisningsoppgavene vil stille noen krav til lærerens matematiske kunnskap for å kunne løses. Derfor blir det sentralt at det står «arbeidet med» i forskningsspørsmålet, ettersom det er fokus på det som krever at læreren handler, eller tar stilling til noe i ledelsen av matematiske diskusjoner.

1.5. Oppgavens oppbygging

For å studere de matematiske kravene læreren kan stå ovenfor i ledelse av matematiske diskusjoner, bygges det på et teoretisk rammeverk omhandlende matematisk diskusjon og matematiske krav som blir presentert i del to. Følgelig forklares de metodologiske overveielsene som er gjort for å kunne svare på forskningsspørsmålet. Her gjøres det rede for studiens design, utvalg, innsamling av data og hvordan dataene' er blitt analysert. De etiske vurderingene, og studiens validitet og gyldighet blir også belyst i dette kapittelet. I del fire presenteres hovedfunnene fra studien. Derav følger en diskusjon omkring resultatene sett i sammenheng med andre studier og undervisningsformer. Kapittelet avsluttes med å peke på mulige implikasjoner videre. Til slutt følger en konklusjon av studien.

2. Teoretisk rammeverk

2.1. Matematisk diskusjon

2.1.1. Hva er en diskusjon?

For å studere begrepet *diskusjon* i klasserommet har vi gjort et litteratursøk på begrepet i de største tidsskriftene på fagfeltet. Etter en systematisk gjennomgang av denne litteraturen kom det fram at diskusjon som begrep er brukt med ulike mening og betydning. Majoriteten av artiklene innenfor fagfeltet gir ingen klar definisjon for hva de mener med diskusjon. Ut av 49 artikler var det bare fem artikler som definerte begrepet, og tre artikler som ga en delvis definisjon. Det kan skyldes at diskusjon er et ord som er brukt i dagligtalen. Man tar det for gitt at leseren forstår hva en mener med det og at den forståelsen er unison. Imidlertid ser det ikke ut til å være tilfelle da noen bruker ordet i beskrivelse av en spesifikk samtaleform i klasserommet, mens andre bruker diskurs og diskusjon om en annen (f.eks. Moschkovich & Zahner, 2018; Scherrer & Stein, 2013). Av de artiklene som gir en forklaring eller definisjon på begrepet har ikke forfatterne definert diskusjon helt likt.

En som har definert begrepet er Wilen (2004). Han peker først på flere misoppfatninger knyttet til begrepet diskusjon, hvorav forveksling mellom utspørring og diskusjon viser seg å være typisk i omtale av helklassediskusjon. En viktig forskjell han legger vekt på er at utspørring handler om at læreren stiller spørsmål, og elevene svarer på dem. Utspørring er tett knyttet til en initiering-respons-evalueringsstruktur (IRE) som studier viser er den mest vanlige undervisningsformen (Stigler & Hiebert, 2009). Her er det læreren som løser problemet, mens elevenes deltakelse dreier seg om å forstå det neste steget i prosedyren (Franke et al., 2007). Metoden er som oftest ikke preget av utfordringer eller flerstemmighet (Christensen & Stokke, 2015, s. 20). I diskusjon er derimot både spørsmål og respons gitt av læreren og elevene, og diskusjon gir deltakerne mulighet til å utforske sine idéer og tanker for å løse problemet. Undervisningsmetodene har dessuten ulike formål. Utspørring har som mål om å teste elevene i eksisterende kunnskap. Elevene har derfor liten mulighet til å forholde seg til sine egne ideer eller til hverandre, samt i den grad elevene engasjerer seg kommer fra hva elevene husker og ikke hva de forstår (Christensen & Stokke, 2015, s. 20). Derimot er diskusjonens intensjon å knytte sammenhenger mellom eksisterende, og ny kunnskap. Det generelle målet er at elevene skal forstå emnet mer fullstendig. Ut ifra dette definerer Wilen (2004, s. 35) diskusjon til å være:

> An instructional conversation consisting of higher order questions asked, and statements made by the teacher and students with responses given by both teachers and students for the purpose of applying knowledge and stimulating critical thinking to enhance understanding about an issue, problem, or other content.

Ut ifra denne definisjonen er deltakelsen viktig for om det er en diskusjon eller ikke. En annen som legger tydelig vekt på deltakelse er Cohen (2011). Diskusjon blir sett på som en form for organisering av diskurs hvor læreren og elevene har en felles eller lik deltakelse i diskusjonen. Det betyr altså at elevene vil ha en direkte effekt på diskursen i klasserommet. Læreren er ikke den eneste som bringer samtalen videre, men elevene bidrar med sine synspunkter og tanker. Elevene forteller sine tanker og stiller spørsmål til hverandre, så vell som til læreren (Cohen, 2011, s. 142). Skal man tolke dette bokstavelig kan det bety at elevene må snakke direkte til en annen, men i et klasserom vet en at det ofte ikke er tilfelle. Elevene kan snakke i respons til noe en medelev har sagt, men de henvender seg ofte mot læreren. Skal en gå ut ifra Dillon (1994) så er det heller viktig at deltakerne kommer i sammen om en felles forståelse for det aktuelle temaet eller fenomenet. Det snakkes om et problem, eller et emnet som de har spørsmål om. Denne samtalen dreier seg om å utforske og undersøke ulike sider av problemet. Følgelig skal utforskingen lede deltakerne til ny og bedre forståelse, og hjelpe dem til å skape mening om problemet. Dermed diskuterer man ikke spørsmål man allerede vet svaret til, eller forstår fullstendig. Den saken er da lukket. Mer presist definerer Dillon (1994, s. 8) diskusjon som:

> A particular form of group interaction where members join together in addressing a question of common concern, exchanging and examining different views to form their answer, enhancing their knowledge or understanding, their appreciation or judgement, their decision, resolution or action over the matter at issue.

I likhet med Wilen (2004) og Cohen (2011) vektlegges det i denne definisjonen at det er en bestemt form for interaksjon, altså at det ikke er hvilken som helst samtale. Dessuten peker både Wilen (2004), Cohen (2011) og Dillon (1994) på at diskusjonen må ha et mål, deltakernes rolle, og emnet for diskusjon. Imidlertid kommer dette fram på ulike måter, og vektlegges ulikt. Dillon (1994) sier helt eksplisitt at det er et spørsmål som er utgangspunkt for diskusjonen. Det kan tolkes dit hen at om problemet ikke er formulert som et spørsmål så er det ikke en diskusjon.

For å ytterligere konkretisere hva diskusjon er, legger Dillon (1994, s. 9) fram fem logiske betingelser for at noe skal være en diskusjon. De første er helt grunnleggende som at deltakerne snakker til hverandre, hører etter på hverandre, og responderer på hverandres ytringer. Når deltakerne snakker sammen trenger man at det legges fram mer enn én synsvinkel på saken, og formålet med diskusjonen må være en bedre forståelse for det aktuelle (Dillon, 1994). På denne måten skiller diskusjon seg fra vanlig samtale hvor man kan snakke løst og fritt om hva som helst. I en diskusjon er det et spesielt tema som det konsentreres om. Og man responderer på ytringene som er gjort om det emnet. Man har dessuten en hensikt med gruppeinteraksjonen som er å utvide forståelsen. Dermed er det mer disiplinert og gjennomtenkt snakk som ytres. Dette skiller også diskusjon fra argumentasjon og debatt, ettersom man i slik interaksjon har en bestemt holdning og stilling til det aktuelle fra før, og ønsker å forsvare sin mening i større grad enn i diskusjon hvor man skal komme fram til en felles forståelse. Deltakerens holdning formes underveis i diskusjonen (Dillon, 1994).

Hvilket emnet det skal økes kunnskap i, og dermed diskuteres om, vil i matematikkundervisning naturligvis være matematikk. En *matematisk diskusjon* defineres som «a polyphony of articulated voices on a mathematical object» (Bussi, 1996, s. 16), og «purposeful talk on a mathematical subject in which there are genuine pupil contributions and interaction» (Pirie & Schwarzenberger, 1988, s. 461). Det blir også fremhevet at det er flere som skal delta for at det skal være en matematisk diskusjon. Imidlertid sies det ingenting om hvordan denne formen for samtale skal være unntatt at det skal være snakk om et matematisk objekt eller subjekt. Pirie og Schwarzenberger (1988) utdyper at en matematisk diskusjon må ha et bestemt mål for samtalen, det er noe bestemt de skal finne ut av. For at deltakerne skal løse problemet krever det at flere av deltakerne bidrar til å bringe samtalen og tenkingen videre. Med det prøver de å skille matematisk diskusjon fra annen samtale i klasserommet hvor elevene svarer på lærerens spørsmål. Det betyr altså at elevene og læreren skal bygge videre på det som blir ytret i diskursen, og ikke bare gi svar eller stille spørsmål som ikke henger i sammen med det som allerede ble sagt.

Ettersom litteraturen på området enten gir ingen definisjon eller ulike definisjoner på diskusjon, har vi kommet fram til vår egen definisjon av begrepet. Vi har tatt utgangspunkt i de ulike forklaringene fra litteraturen og satt det sammen til en definisjon som vil være gjeldende for dette prosjektet. Diskusjon som en spesifikk kommunikasjonsform bygger på Dillon (1994, s. 8) som peker på det samme. Det anså vi som sentralt for begrepet ettersom det ikke en hvilken som helst form for samtale, men en spesifikk type. Dillon (1994, s. 8) peker også på at det er et spørsmål som er utgangspunktet for diskusjonen, men det ble viktig for oss i defineringen at det ikke bare må være et konkret spørsmål. Utgangspunktet for en diskusjon kan også være et matematisk konsept, problem, prosedyre eller idé (Bussi, 1996, s. 16). Videre bygger vi både på Bussi (1996), Dillon (1994) og Pirie og Schwarzenberger (1988) når det gjelder deltakerne i en diskusjon. I en diskusjon vil det være flere deltakere, men det er ikke nødvendig at alle deltakerne i gruppen må ytre seg for at det skal være en diskusjon. Disse deltakerne må så ha en meningsutveksling seg i mellom som både Cohen (2011) og Wilen (2004) peker på. De ytringer som foretar seg i diskusjonen skal forholde seg til de andre innspillende og, til en vis grad, bygge videre på dem. Det er viktig ettersom at målet er en felles forståelse for spørsmålet eller problemstillingen som er i fokus (Dillon, 1994, s. 8). Følgelig lyder definisjonen:

> En diskusjon er en spesifikk kommunikasjonsform som skiller seg fra f.eks. utspørring. En diskusjon tar ofte utgangspunkt i et spørsmål eller en problemstilling som gruppen ønsker å finne ut av. En diskusjon innebærer en meningsutveksling der flere deltakere tar standpunkt til, eller bygger videre på, synspunktene som presenteres underveis. I motsetning til debatt, har diskusjoner et mål om at gruppen utvikler sin felles forståelse av spørsmålet eller problemstillingen som er i fokus.

Diskusjon i denne sammenheng er en form for klasseromsaktivitet eller undervisningsmetode. Dermed er ikke dette en generell definisjon på begrepet diskusjon. Videre vil en matematisk klassediskusjon ta utgangspunkt i et matematisk spørsmål eller en matematisk problemstilling. Det vil si at det som skal diskuteres, ut ifra definisjonen over, tar utgangspunkt i et matematisk problem eller spørsmål. I tillegg skilles det på helklassediskusjon og andre gruppediskusjoner på den måten at en helklassediskusjon innebærer at hele klassen deltar samtidig. Studier viser dog at lytting til en diskusjon er en viktig form for deltakelse (Hintz, 2011). Derfor trenger det ikke bety at alle i klassegruppen må ytre seg for at det skal være helklassediskusjon. Noen vil delta ved å aktivt lytte i diskusjonen.

2.1.2. Ledelse av helklassediskusjoner

Når elevene får mulighet til å diskutere sine ideer, høre på ulike perspektiver, og engasjeres i å gi noe mening, får elevene en dypere forståelse for matematikk (Lamberg, 2012, s. 1). Elevene må kommunisere noe matematisk, begrunne sine utsagn eller formulere spørsmål, og da får de innsikt i egen tenking. De blir dermed mer reflekterte over egen læring. Dessuten mener Lamberg (2012, s. 2) at matematisk diskusjon kan bidra til konseptuell forståelse for matematikk. Dette underbygges også av andre studier som forklarer at klassediskusjon gir elevene mulighet til å teste ideer, høre andres tanker og dra nytte av det. Ved å formulere sine ideer inn til ord gir det mulighet for en dypere forståelse av det matematiske fenomen som diskuteres (McCrone, 2005). Dessuten er det ikke bare elevene som drar nytte av denne type undervisning. Når læreren får høre elevenes begrunnelsesstrategier og synspunkter, gir det læreren et vindu inn i elevenes tankemåter. Disse tankemåtene er ofte ulike fra læreren sin som er erfaren på området (Jacobs & Spangler, 2017, s. 767).

Diskusjon som undervisningsmetode gir likevel ingen garanti for at elevene lærer det som er ønskelig. Det er ikke alle diskusjoner i klasserommet som nødvendigvis leder til målet for diskusjonen om en felles forståelse. Her må læreren aktivt jobbe for å sikre dette. Læreren må ha et repertoar av måter å tilføye, sløyfe, styre og ta nye vendinger i elevenes arbeid i diskusjonen for å nå målet (Chazan & Ball, 1999, s. 9). Det blir svært viktig da læreren ikke lenger bare skal fortelle hva som er rett eller galt, men la gruppen finne det ut i sammen. Lærerens rolle er nå å utvikle og bygge på elevenes vei til å skape mening for problemet eller emnet. Men for at elevene skal kunne skape mening til innholdet må elevene få nok tid til å tenke. I motsetning til utspørring som er hurtig, så bør ikke diskusjon være det (Wilen, 2004, s. 35). Læreren må gi elevene nok tid til å reflektere, formulere sin respons og uttrykke dem i diskusjonene. Spesielt viktig blir det i denne undervisningsformen da spørsmålene og problemene som blir adressert i diskusjon ofte er utfordrende for elevene å løse. Imidlertid er det ikke bare nok å la elevene få nok tenketid og la de få ytre seg. Lærerens funksjon i helklassediskusjoner vil også være å hjelpe elevene til å se sammenhenger mellom de ulike fremgangsmåtene, og se sammenhenger mellom fremgangsmåtene og de matematiske ideene som utgjør læringsmålet for timen (Wæge, 2015). Definerte læringsmål vil hjelpe læreren å bestemme hvilke ytringer hun skal spille videre på i diskusjonen. Det er heller ingen selvfølge at alle elever vet hvordan de skal delta i en matematisk diskusjon. Derfor må læreren gi god støtte til elevene i økten, og hjelpe de å formulere seg og bruke hverandres innspill. På den måten kan de utvide sin matematiske forståelse (Ghousseini & Herbst, 2016, s. 80).

Å lede matematiske diskusjoner er ingen enkel oppgave. Tvert imot er det dokumentert at selv erfarne lærere har store utfordringer med å fasiliteter klassediskusjoner i matematikkfaget (Crespo et al., 2011, s. 122). Det ikke er mulig å vite på forhånd hva elevene vil si eller la være å si, noe som gjør at læreren kanskje må forandre på planene sine underveis eller følge uforventede læringsmuligheter som oppstår fra elevenes innspill. Læreren oppfordrer elevene til å gi sine forklaringer på deres ideer og tanker, identifiserer så potensialet i disse ytringene og kartlegger så hvilken retning dette kan ta diskusjonen i. Med andre ord så må læreren i ledelse av matematiske diskusjoner være fleksibel i sitt arbeid (Leikin & Dinur, 2007). For eksempel kan en matematisk diskusjon i klasserommet begynne med introduksjon av et matematisk problem. I denne fasen vil læreren ha kontroll, men deretter følger en utforskningsfase hvor elevene jobber med å prøve og løse dette matematiske problemet. Dette kan gjerne bli diskutert i par eller i små grupper først. Her vet ikke læreren hva som vil bli sagt, eller hvordan elevene vil tenke. Følgelig legger elevene fram ulike måter for hvordan problemet kan løses og klassen diskuterer disse metodene (Stein et al., 2008, s. 315). Det er krevende arbeid når man ikke vet på forhånd hvilke elevutsagn man vil møte, og dermed ikke kan forberede seg på alle situasjoner som kan utspille seg. Dermed blir det også usikkert om man vil nå læringsmålet. Med tanke på dette har Stein et al. (2008) utarbeidet fem praksiser for å styrke lærere i ledelse av matematiske diskusjoner. Disse fem praksisene er: (1) å predikere mulig elevsvar, (2) overvåke elevenes respons til oppgaven under utforskningsfasen, (3) gjennomtenkt utvelgelse av elever til å gi sine svar, (4) sekvensere elevsvarene, (5) og hjelpe elevene til å se sammenhenger mellom de ulike elevsvarene og emnets grunnleggende ideer.

2.2. Matematiske krav

2.2.1. Det komplekse undervisningsarbeidet

Det er gjort mye forskning på hvordan man kan øke undervisningskvaliteten og dermed elevenes læring. For å kunne forbedre undervisningen og læringen er det nærliggende å anta at lærerens kunnskap har en effekt på hvor god undervisningen blir (Ball & Bass, 2002). Men hvem er læreren i klasserommet? Læreren leder klassen og formidler kunnskap, men hva er kravene til dette arbeidet? Et ofte stilt spørsmål i denne sammenheng er «hvor mye» matematikk må læreren kunne for å undervise i faget (Ball, 2017). Åpenbart må en som skal undervise i et fag kunne fagets innhold. Imidlertid er ikke det like åpenbart hva det betyr å «kunne» faget. Ofte har det å kunne matematikk blitt målt i et visst antall studiepoeng eller en viss oppnåelse innenfor regning i faget. Derimot er det flere studier som ikke har klart å vise at lærerens rent matematiske kunnskap, målt gjennom studiepoeng, forutsier læring hos elevene (National Mathematics Advisory Panel, 2008). Forskere har også hatt et mer pedagogisk eller didaktisk syn på forskning i klasserommet. Imidlertid har det manglet fokus på dynamikken i hva læreren faktisk *gjør* når hun underviser som kan si oss noe om hvem læreren er i klasserommet og hvilken kunnskap som kreves i arbeidet (Ball, 2017, s. 14).

Lampert (1985) bruker «dilemma manager» i omtale av lærerjobben. Med det mener hun en som kontinuerlig må løse ulike dilemma. La oss tenke oss en situasjon hvor læreren har engasjert elevene omkring løsningen av et matematisk problem. Til problemet forventer læreren at de fleste vil tenke i banen av en standardalgoritme. En elev fremlegger en løsning som er matematisk korrekt, likevel er fremgangsmåten noe komplisert å få tak i. Hvor lang tid skal læreren bruke på å forstå hva eleven mener? Skal læreren prøve å få resten av klassen med på denne elevens tankemåte? Eller må læreren heller bruke tiden på å få eleven til å forstå standardalgoritmen og fordelene med den? Hvis læreren velger sistnevnte kan det sende signaler som at hun ikke validerer elevens svar, eller ikke anerkjenner andre løsningsmetoder. På den andre siden, om læreren da velger å anerkjenne elevens metode kan det forvirre de andre elevene og hindre at lærerens mål for læring blir oppnådd. Hva læreren velger å gjøre og i det hele tatt om læreren anser dette som et dilemma, er forankret i lærerens subjektivitet (Lampert, 1985). Hvis læreren setter pris på ulike løsningsmetoder og ønsker at elevene skal få en forståelse for at det finnes flere veier til svaret, vil hun bruke tid på elevens innspill. Hvis læreren mener at standardalgoritmer er nettopp *standard* fordi det er denne metoden som er mest «riktig» og enklest for elevene å forstå, da vil løsningen være en annen. Lampert (1985) forklarer dette med at læreren er seg selv som et komplekst menneske i lærerrollen med påvirkning fra egen skolegang og den kompetanse som hun har tilegnet seg i løpet av sin utdanning. Dermed vil elevene møte ulik undervisningspraksis avhengig av hvilken lærer som underviser dem.

Eksempelet med de ulike løsningsmetodene skildrer en lærer som en forhandler, en megler på et vis, som må balansere en rekke interesser som må tilfredsstilles i klasserommet (Lampert, 1985, s. 190). Imidlertid er det dette som er bakgrunnen for å se på læreren som en «dilemma manager». Det vil ikke alltid være en rett eller gal måte å håndtere dilemmaene på, heller tvert imot. I arbeidet som lærer må en kunne håndtere likeverdige alternativer og ta en avgjørelse. I likhet med at man må kunne bruke teori og forskning på området samtidig som man må kunne vurdere når rådene fra teorien ikke vil være tilstrekkelig i den aktuelle sammenheng. Derfor har Lampert (1985) valgt å kalle det en «manager». En som har som jobb å håndtere dilemmaer ser ikke på et dilemma som noe negativt, eller en byrde som må fjernes. Imidlertid vil en dilemmahåndterer se på det som nyttig for arbeidet med læring og utvikling.

Ball (1993) peker på noen andre utfordringer med undervisningsarbeidet som lærer. Målet med undervisningen er åpenbart at elevene skal lære noe bestemt om en matematisk idé, men hvordan skal man legge til rette for at elevene skal kunne forstå det aktuelle? Utfordringene her er mange, men Ball (1993) utforsker tre dilemmaer: representasjon, diskursen og elevene som et felleskap. For at elevene skal forstå det som er ønskelig, må læreren kunne oversette kunnskapen til elevene. Idéen må komme fram gjennom en representasjonsform, men ingen representasjon vil kunne dekke alle aspekter av idéen. Ingen representasjon er like effektiv for alle elever. Dermed må læreren kunne velge den mest effektive representasjonsformen og den som dekker de fleste sidene med det matematiske fenomenet. I utfordringer med diskursen omtaler Ball (1993) at man som lærer må respektere elevene som matematiske tenkere. Læreren skal kunne tolke elevsvarene og erkjenne ytringene deres selv om det ikke er et matematisk korrekt svar. Dessuten må læreren predikere slike elevsvar i planleggingen av undervisningen. For å kunne gjør dette må læreren ha en forståelse for hvor elevene er i sin forståelse og tenking. Dette er ikke enkel oppgave ettersom ikke alle elever kan forklare hvordan de har tenkt, eller at læreren ikke klarer forstå hva eleven mener (Ball, 1993). Imidlertid er det ikke bare læreren som skal forstå. I undervisningsarbeidet møter læreren utfordringer med å få elevene til å stole på seg selv i sin matematiske tenking, samtidig som de skal vurdere og bruke sine medelever til å utvikle sitt perspektiv. Dermed må læreren skape rom for et matematisk felleskap hvor elevene tør å ytre seg. Et rom hvor både læreren og elevene skal kunne vurdere hva som er «rett eller galt».

Alle disse ulike tingene en lærer må gjøre kaller Ball og Forzani (2009) for undervisningsoppgaver (tasks of teaching) som til sammen utgjør undervisningsarbeidet (work of teaching). Det handler om alt en lærer må utføre av oppgaver for å hjelpe elever til å lære. Dette innebærer både aktiviteter i og utenfor klasserommet. I klasserommet finner man oppgaver som å velge ut elever til å ytre seg, vurdere elevsvar, og avgjøre hvor lenge en skal arbeidet med et problem. Utenfor klasserommet er det både oppgaver som går på forarbeidet til undervisning som å planlegge hvilket tema en skal gå igjennom og hvordan man skal føre elevene til forståelse. Det kan også være oppgaver som vurdering av prøver og samarbeid med kollegaer og foreldre. Det sies at lærere må ta hundrevis av små og store valg hver eneste dag. Valg som i ulik grad, og på ulike måter får betydning for elevene, foreldre og kollegaer (Utdanningsforbundet, u.å.). Mange av disse oppgavene og avgjørelsene er ikke lett å identifisere. Oppgavene kan oppstå uforutsette eller planlagte, i større eller mindre grad, og være tidkrevende eller raske. Hvordan undervisningsoppgavene løses handler om hva som er involvert i arbeidet med å maksimere sjansen for at elevene lærer (Ball, 2017). En liste over hvilke undervisningsoppgaver som matematikkundervisningen innebærer er forsøkt utarbeidet av Ball et al. (2008). Tabell 1 viser en oversatt versjon av Ball et al. (2008) sin liste.

Tabell 1: Lærerarbeidets matematiske undervisningsoppgaver (Fauskanger og Mosvold, 2016, s. 75)

Tasks of teaching	Undervisningsarbeidets [matematiske] utfordringer
Presenting mathematical ideas	Presentere matematiske ideer
Responding to students' "why" questions	Respondere på elevens "hvorfor"- spørsmål
Finding an example to make a specific mathematical point	Finne eksempler for å få fram et bestemt matematisk poeng
Recognizing what is involved in using particular representation	Være klar over hva som involveres når en bestemt framstilling tas i bruk
Linking representations to underlying ideas and to other representations	Knytte representasjoner til underliggende ideer og til andre representasjoner
Connecting a topic being taught to topics from prior or future years	Knytte emnet en underviser i, til emner fra tidligere år eller til kommende emner

Explaining mathematical goals and purposes to parents	Forklare matematiske mål og hensikter til foreldre/foresatte
Appraising and adapting the mathematical content of textbooks	Vurdere og tilpasse det matematiske innholdet i lærebøker
Modifying tasks to be either easier og harder	Endre oppgaver slik at de blir mer eller mindre utfordrende
Evaluating the plausibility of students' claims (often quickly)	Forklare om elevens påstander er rimelige (ofte raskt)
Giving or evaluating mathematical explanations	Gi, eller evaluere, matematiske forklaringer
Choosing and developing useable definitions	Velge og utvikle gode definisjoner
Using mathematical notation and language and critiquing its use	Bruke matematisk notasjon og spark, og bedømme bruken
Asking productive mathematical questions	Stille fruktbare matematiske spørsmål
Selecting representations for particular purposes	Velge ut hensiktsmessige representasjoner
Inspecting equivalencies	Undersøke likheter

Forskerne har tatt utgangspunkt i matematikkundervisning fra reelle klasserom, og identifisert undervisningsoppgaver basert på analyse av matematiske problem som oppstår i undervisningen. Imidlertid har listen blitt kritisert for å være mangelfull i en norsk kontekst, samt at den trenger ulike presiseringer (Fauskanger & Mosvold, 2016).

2.2.2. Undervisning som noe unaturlig

Å undervise handler om å lære bort noe (Cohen, 2011, s. 24). Imidlertid er det å lære bort noe til andre, noe som skjer minst like mye utenfor klasserommet. Undervisning er en naturlig del av å være menneske. Du lærte å svømme fordi noen viste deg hvordan du skal bevege armene og beinene i vannet, og du lærte å bake rosinboller fordi noen viste deg hvordan du skal få deigen til å heve seg. Det er mulig du lærte deg å knytte dine sko selv, eller å klatre høyt i trær ved å imitere andre, eller bare ved prøving og feiling. Læring avhenger derfor ikke av undervisning, men læring er målet med undervisning. Hva skiller så klasseromsundervisningen ifra overføring av kunnskap som skjer i hverdagen? Vi har allerede sett på noen perspektiver med lærerarbeidet som dilemmahåndtering, og utfordringer med representasjon, diskurs og læringsfelleskapet. Ball og Forzani (2009) utdyper at lærerarbeidet er et komplekst arbeid som består av mange små og store situasjoner som krever en beslutningstaking av læreren. Det som gjør arbeidet unaturlig er at læreren må stille spørsmål som hun allerede vet svaret på, for å utfordre elevenes forståelse. Læreren skal ikke fremme eget argument, men skal arbeide for å utvikle elevenes argumenter og idéer. Det er ikke typisk for hvordan en ville lært bort i hverdagslivet, hvor underviseren ofte mener sin måte er korrekt. Dessuten skal læreren se alle med like øyne og behandle alle deretter. Læreren er i en profesjonell rolle og skal ikke være «seg selv» (Ball & Forzani, 2009).

Som en profesjonell lærer må en ta noen valg for hvordan en skal prøve å overføre kunnskapen til elevene sine. Noen lærere velger å stå foran på tavlen og *vise* elevene hvordan de skal gjøre matematikk. Det vil si at læreren tar for seg en algoritme som er ment for å løse et bestemt matematisk fenomen. Når eksemplet er ferdig, settes elevene i gang for å løse lignende problem selv. Cohen (2011) kritiserer denne måten å legge fram den «endelige» kunnskapen på, det ferdige produktet. Han mener det ikke er slik man lærer. Tenk deg når du lærte å kjøre bil: du kastet deg ikke bare ut på de mest trafikkerte veiene uten å ha forstått de mest elementære veiskiltene, eller uten å ha lært deg å clutche. Men du begynte gjerne å undersøke skiltene mens du satt på med en erfaren sjåfør, og testet forholdet mellom clutchen og speeden på en parkeringsplass. Læringen skjer i steg og det bygger på eksisterende kunnskap. Eleven må være en del av prosessen fram til den endelige kunnskapen. Imidlertid skriver Cohen (2011) at det er få lærere som vet hvordan man skal pakke ut kunnskapen. Det kan skyldes at få lærere har selv blitt undervist på en slik måte. Men også fordi en endelig og polert fremleggelse av matematikken er et uttrykk for godt arbeid. Det vil si at en enkel og konkret fremleggelse av et matematisk fenomen blir sett på som en mer nøyaktig og feilfri måte å arbeide på. En mer utforskende metode kan ofte virke rotete. Dessuten krever det mer tid, og mer kunnskap av læreren (Cohen, 2011).

Når læreren velger en mer utforskende fremgangsmåte hvor elevene er sentrale i arbeidet med å forstå det matematiske fenomenet, øker hun kompleksiteten i undervisningen (Cohen, 2011). Undervisningen og læringen berikes, men usikkerheten økes også. Læreren kan ikke vite hvordan elevresponsen blir: er det noen som vil bidra med sine tanker, og hva vil de tankene være? Vil vi komme fram til det som var målet med timen? Mens når læreren bruker «ferdig» kunnskap om fakta og prosedyrer, trenger læreren bare å kunne det hun presenterer og elevene trenger bare å reprodusere det. På denne måten trenger ikke læreren å ha en dyp forståelse for emnet ettersom kunnskapen er tydelig definert (Cohen, 2011). For at diskusjon i klasserommet skal være godt gjennomført krever det at elevene er like deltakende, om ikke mer, enn læreren. Elevene skal dele sine tanker og spørsmål omkring problemet eller spørsmålet som skal diskuteres. Dermed få elevene en direkte påvirkning på diskursen i klasserommet. Cohen (2011, s. 144) peker på at diskusjonsformen er mindre regulert enn tradisjonell undervisning. I diskusjonen kan elevene forme diskursen i den retning som blir naturlig for deres forståelse gjennom argumentasjon, forklaringer og spørsmål. Elevene lærer av hverandre, samtidig som læreren får et unikt innblikk i elevenes tankegang og kan dermed skape gode muligheter for læring. Dette er likevel årsaken til at mange lærere opplever det som en stor risiko å benytte diskusjon i klasserommet, ettersom det skaper mulighet for elevene til å endre dagsorden eller å forstyrre klassen i større grad enn ved tavleundervisning (Cohen, 2011). Derfor må læreren kunne regulere elevenes deltakelse, og lære elevene hvordan de skal delta og oppføre seg i matematisk diskusjon. Samtidig som læreren må håndtere kompliserte interaksjoner og holde følge med flere ulike idéer, for og til slutt kunne føre elevene til forståelse av det matematiske fenomenet. For å gjøre det krever det at læreren har spesialisert kunnskap i faget, men også at de har kunnskap om hvordan utforme undervisning som putter dem selv ut av lyset, og plasserer elevene inn (Cohen, 2011).

2.2.3. Undervisningskunnskap i matematikk

I lærerarbeidet innebærer det mange små og store arbeidsoppgaver hvor flere av dem ikke er lett å identifisere. Til dette arbeidet er det nødvendig med kunnskap om undervisning og fag. Denne kunnskapen er det flere som har prøvd å systematisere i ulike kategorier, blant annet Shulman (1986). Han studerte innholdet i lærerutdanningen gjennom flere tiår. Det viste seg at det var noe som manglet i kunnskapen læreren anses å trenge. Det har vært et skiftende fokus mellom faglig kunnskap og pedagogisk kunnskap i historien, men Shulman (1986) definerte nå tre former for kunnskap han mener læreren trenger. Åpenbart så må læreren ha kunnskap om faget (på engelsk: «subject matter knowledge»). Læreren må forstå hva og hvorfor i faget hun underviser. Det innebærer at hun har kjennskap til de ulike elementene som matematikkfaget innebærer, man forstår de ulike elementene, og man har kunnskap om hvorfor det er slik. Shulman (1986) definerer også en form for læreplankunnskap (på engelsk: «curricular knowledge»). Det betyr at læreren må ha oversikt over hva elevene skal kunne og hvordan disse tingene er knyttet i sammen. Hva bør elevene bli introdusert for *nå,* for å kunne forvente å forstå det som kommer på neste trinn. Det handler om å knytte meningsfulle relasjoner mellom det som skal læres.

Det som imidlertid ble det nye og viktige begrepet for kunnskap som ble identifisert og definert var fagdidaktisk kunnskap (på engelsk: «pedagogical content knowledge»). Det var denne kunnskapen Shulman (1986) mente at manglet i lærerutdanningen. Fagdidaktisk kunnskap innebærer å kunne fag og metode i sammen. Hvilke representasjonsformer er mest effektive for at elevene skal forstå et visst matematisk fenomen, og hvordan bør en gå fram for å forklare det til dem? Hva kan være meningsfulle arbeidsmåter for elevene med dette emnet? Det dreier seg om hvordan man skal representere og forklare det aktuelle for å gjøre det forståelse for dem som skal lære. Samtidig handler det om å være klar over hva som gjør en idé vanskelig eller lett å forstå, og hva kan være mulig misoppfatninger og hvordan kan man endre de misoppfatningene. Dessuten lærer ikke elevene nødvendigvis av den samme forklaringen eller har den samme forståelsen, og derfor må læreren kunne håndtere flere ulike representasjonsformer. Dermed er det fortsatt fagkunnskap, men det er fagkunnskap som er spesiell for undervisning (Shulman, 1986, s. 9).

Fra arbeidet til Shulman (1986) har Ball et al. (2008) bygget videre på hvilken kunnskap som kreves for å undervise, og utarbeidet en praksisbasert teori for undervisningskunnskap i matematikk (UKM). Teorien springer ut ifra 16 undervisningsoppgaver identifisert i matematikkundervisning fra reelle klasserom (se Tabell 1). Det de kom fram til var at den fagdidaktiske kunnskapen kunne deles i kunnskap om fag og elever, og kunnskap om fag og undervisning. Dessuten er ofte antakelsene knyttet til hva lærere må kunne at de bare trenger å kunne fagstoffet i læreplanen og litt mer. Derimot viser det seg at fagkunnskapen lærerne trenger innebærer også en spesialisert form for fagkunnskap som er spesiell for undervisning (Ball et al., 2008). For å illustrere den sammensatte kunnskapen en lærer trenger for å undervise i matematikk ble det utarbeidet en modell. Figur 1 er en oversatt versjon av Ball et al. (2008) sin modell.

Figur 1: Undervisningskunnskap i matematikk (UKM) (Fauskanger, Mosvold, & Bjuland, 2010, s. 36)

Fagkunnskapen lærerne trenger blir delt inn i tre underkategorier. Allmenn fagkunnskap omhandler den delen av fagkunnskapen mange ser på som en selvfølge at lærerne må inneha. Det betyr generell kunnskap om faget, altså det som står i læreplanen at elevene skal kunne. Lærerne må selv kunne «måle radius, diameter og omkrins i sirklar og utforske og argumentere for samanhengen» og «utforske matematiske eigenskapar og samanhengar ved å bruke programmering» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Om ikke, hvordan kan hun forvente å få elevene til å forstå det? Allmenn fagkunnskap er ikke unik for undervisningsarbeidet, men den er essensiell (Ball et al., 2008). Matematisk horisontkunnskap kan minne om Shulmans (1986) forklaring på læreplankunnskap. Horisontkunnskapen handler nemlig om å se sammenhenger. Hva må elevene kunne nå for å kunne forstå det som kommer? Man bygger på eksisterende kunnskap for å kunne lede veien videre. Det som dog var det nye Ball et al. (2008) oppdaget, var at det kreves en spesialisert form for fagkunnskap som er unik for undervisning. Det er kunnskap som gjør læreren i stand til å vurdere ulike løsningsmetoders gyldighet og effektivitet, kunne forklare hvorfor du bare kan legge på en 0 når du multipliserer med 10, og kunne knytte sammen de ulike matematiske ideene for elevene.

I likhet med fagkunnskapen, blir den fagdidaktiske kunnskapen delt i tre underkategorier. Kunnskap om fag og elever innebærer at læreren må ha kunnskap som gjør henne i stand til å predikere elevsvar, oppdage misoppfatninger og arbeide med dem, og velge oppgaver som hun tror elevene vil finne interessante. Mens kunnskap om fag og undervisning går mer på organisering av undervisningstimer for å gjøre stoffet forståelig (Ball et al., 2008). Her handler det mer om å kunne avgjøre hva som er best i denne situasjonen med akkurat disse elevene. Det er avgjørende hvor elevene er i sin forståelse for å skape gode læringssituasjoner, siden man bygger på eksisterende kunnskap. Men fokuset er hele tiden på det faglige, altså de vurderingene som omhandler matematikken for elevene og i undervisningen. Til slutt er læreplankunnskap plassert i denne kategorien. Imidlertid peker Ball et al. (2008) på at den kunne like så godt være plassert under samtlige kategorier. De adresserer også noen utfordringer med modellen, som at grupperingene kan overlappe hverandre.

3. Metodologisk tilnærming

3.1. Studiens design

For å kunne si noe om de matematiske kravene som kan oppstå i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner trengs det innsikt inn i dette arbeidet, og en forståelse for hva lærerne opplever. Tilgangen til denne informasjonen ligger i klasserommet, altså i den naturlige konteksten til fenomenet. Derfor ble en kvalitativ forskningsmetode valgt for denne studien da målet med en slik metode er å kunne gå i dybden og gi mye informasjon om få enheter (Thagaard, 2009, s. 17). En slik fremgangsmåte forklarer Thagaard (2009, s. 11) at åpner muligheter for å gi mer inngående informasjon og forståelse for et sosialt fenomen, som i dette tilfelle er matematiske helklassediskusjoner. Den kvalitative forskningsmetoden har ofte utspring ifra konstruktivismen. Forskeren ser på data som skapt av sosiale aktører, og at kunnskapen derfor ikke er umediert eller «ren»; den må fortolkes, i motsetning til positivisme (Skilbrei, 2019, s. 37). Dermed er det nærliggende at det sosiale fenomen blir studert i sin naturlige kontekst.

Etter at en kvalitativ tilnærming var valgt ble case-studie vurdert som den best egnede fremgangsmåten ettersom det kan gi detaljert informasjon om ett eksempel, noe som er nødvendig for å forstå det sosiale samspillet i helklassediskusjon. Case-studier har dog et noe ufortjent rykte på seg da det foreligger flere misoppfatninger om metodens teori, reliabilitet og validitet (Flyvbjerg, 2006). En misoppfatning er at man ikke kan generalisere basert på et enkelt-case. Flyvbjerg (2006, s. 11) avviser dette og forklarer at case-studier åpner opp muligheten for å identifisere «avvik» i normalen som kanskje ellers ikke ville kommet fram. Akkurat det er viktig i denne studien for å kunne forstå de utfordringene, og dermed de matematiske kravene, læreren kan møte i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner. En generell undersøkelse av et slik fenomen kan gjøre at man overser slike avvik ettersom menneskelig interaksjon skjer i en kontekst som er sentral for hvordan situasjonen utspilles (Flyvbjerg, 2006). Dermed blir det viktig å kunne observere og få informasjon fra klasserommet slik diskusjonene utspiller seg i virkeligheten.

Den kvalitative case-studien er basert på observasjon av to klasserom og intervjuer med læreren og noen elever fra klassegruppene. Målet med observasjon er å komme bak fasaden og observere livet slik det arter seg for informantene (Skilbrei, 2019, s. 59). Ettersom man i denne studien er ute etter en helhetlig beskrivelse av arbeidet i klasserommet med matematisk diskusjon ble observasjon et naturlig valg av metode. Det er supplert med intervju for å få tilgang til deltakernes erfaringer og refleksjoner. Intervju gir oss informasjon om hvordan hendelser blir forstått av de som er involvert (Skilbrei, 2019, s. 66). Det vil si at observasjon gjør at vi som forskere kan se hva som skjer i de matematiske diskusjonene, mens intervjuene forteller hvordan læreren selv opplever arbeidet med helklassediskusjon.

3.2. Deltakere

Kvalitative studier baserer seg ofte på strategiske utvalg, som vil si at en velger informanter som har de egenskapene eller kvalifikasjonene som er strategiske med tanke på problemstillingen og undersøkelsens teoretiske perspektiver (Thagaard, 2009, s. 55). Det har vært avgjørende for denne studien ettersom vi trengte en lærer som benytter seg av helklassediskusjon som undervisningsmetode. Den aktuelle læreren er valgt ut ifra tilgjengelighet. Det vil si at seleksjonsmåten er strategisk ved at informanten representerer egenskaper som er relevante for problemstillingen, og fremgangsmåten for å velge ut informanten er basert på den tilgjengelighet hun har for oss som forskere (Thagaard, 2009, s. 56). Læreren har 30 års erfaring med matematikkundervisning, og har i de senere år av hennes karriere valgt en mer dialogbasert tilnærming til undervisning. For henne er det viktig å bygge på elevenes eksisterende kunnskap og på den måten tilrettelegge for en dypere forståelse i emnet. Elevene og læreren danner et matematikkfellesskap som diskuterer og utforsker matematiske fenomen, og sammen finner de en felles løsning eller skaper en felles forståelse for problemstillingene. Av den grunn ble denne læreren attraktiv for å studere matematiske diskusjoner i klasserommet.

En case-studie er situert, noe som vil si at forskningsobjektet er bundet av tid og sted (Postholm, 2010). På det tidspunkt studien ble gjennomført underviste læreren to klasser med henholdsvis 27 og 25 elever, på sjette trinn. Det ble valgt ut to fokusgrupper fra hver klasse av læreren selv. Disse gruppene ble, i likhet med læreren intervjuet. Det ble naturlig å velge et par fokusgrupper ettersom elevene jobbet med utgangspunkt i «Arkitektprosjektet» utarbeidet av Glassco og Fosnot (2018). Prosjektet baserer seg på at elevene skal arbeide i grupper. Fokusgruppene ble studert når undervisningen dreide seg om gruppearbeid. Imidlertid er det helklassediskusjonene i forkant og etterkant av gruppearbeidet som er interessant for denne studien. Det er læreren i interaksjon med elevene i klasserommet som utgjør utvalget for studien, og som vil bidra til å kunne studere de matematiske kravene som kan møtes i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner. Læreren har arbeidet etter en dialogisk undervisning med disse elevene siden oppstarten i femteklasse, og elevene er derfor kjent med undervisningsformen.

3.3. Innsamling av data

Datamaterialet i denne studien er del av et større forskningsprosjekt knyttet til masterprogrammet i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger, kalt MERG 2019. Prosjektet var ledet av faglærer i programmet og jeg var selv deltaker i denne studien. Forskningsprosjektet går under emnet «undervisningskvalitet i matematikk», og målet er at gjennom kurset skal studentene få et praktisk innblikk i forskning knyttet til læring og undervisning i matematikk (UiS, 2020). Innsamlingen av datamaterialet strakk seg over to uker i løpet av våren 2019. På denne tiden er det tatt lyd- og videoopptak fra totalt 17 undervisningstimer i matematikk. I tillegg er det gjennomført et intervju med læreren og et intervju med hver av elevene i fokusgruppene. Totalt åtte elever ble intervjuet.

Deltakerne i kurset «undervisningskvalitet i matematikk» ved UiS våren 2019 utgjør forskningsgruppen for MERG 2019. Gruppen fordelte innsamlingen av video- og lydopptak slik at alle virket som observatør minimum en dag av de to forskningsukene. Prosjektleder var tilstede i alle timene som ble observert. Dermed var det totalt tre observatører til enhver tid i klasserommet, da det var to studenter med hver sine ganger. Det ble plassert et videokamera både foran og bak i klasserommet som studentene håndterte. Læreren bar på lydopptaker og fokusgruppene fikk lydopptaker ved sine gruppebord. Dette ble gjort for å sikre at man fikk med seg mest mulig av det som ble sagt og gjort. Kameraene fulgte læreren og hennes bevegelser i klasserommet når det var helklassedialog. Når elevene arbeidet i grupper ble kameraene flyttet til hver av de to fokusgruppene. Følgelig ble kameraene flyttet til startposisjon når gruppearbeidet endte og undervisningen foregikk i plenum igjen.

Under observasjonen inntok forskerne en rolle som deltakende observatør. Det vil si at det var åpne observasjonsroller hvor deltakerne var klar over at de ble observert og klar over forskernes rolle i klasserommet (Tjora, 2010, s. 45). Likevel betyr ikke det at man engasjerer seg i det som skjer. Ifølge Tjora (2010, s. 46) kan observatørene være passive og forsøke å opptre som en flue på veggen. Det var det som ble forsøkt i denne studien hvor selv om forskerne var deltakende i den forstand at det var en åpen observasjon, så var deres rolle å filme det som skjedde. Noen kaller dette for observasjon uten deltakelse ettersom forskeren skal observere fra sidelinjen, til tross for at det er en åpen observasjon hvor forskeren er tilstede i feltet (Thagaard, 2009). Denne metoden ble valgt ettersom vi ønsket å se lærerens interaksjon med elevene slik den vanligvis utspiller seg. I tillegg til video- og lydopptak skrev forskergruppen et feltnotat i etterkant av timene som hadde blitt observert den aktuelle dagen. Det ble gjort med bakgrunn i at notater kan virke som hjelp til å bearbeide erfaringer underveis og i det videre arbeidet med analysen av data (Thagaard, 2009, s. 83). Eksempler på hva som ble skrevet ned var tema for timen, spesielle hendelser som utspilte seg eller en kontekst som ikke kom fram i videoopptakene som kan være nyttig for å forstå det som skjer. Dette var også til hjelp for neste gruppe som skulle observere slik at de fikk en kontekst for det de skulle observere.

De kvalitative intervjuene med læreren og elevene i fokusgruppene ble utført i slutten av forskningsperioden. Det var studenter fra forskningsgruppen som var ansvarlige for gjennomførelsen. Intervjuene utspilte seg etter en delvis strukturert tilnærming. Forskergruppen utarbeidet en intervjuguide i fellesskap som dannet utgangspunktet for intervjuene. En delvis strukturert tilnærming gir den frihet at spørsmålene som stilles er i hovedsak fastlagt på forhånd, men rekkefølgen av temaene bestemmes underveis. På den måten kan forskeren følge informantenes fortelling, men likevel sikre seg at den informasjonen som er interessant blir innhentet (Thagaard, 2009, s. 89). Det gir også mulighet for at det kommer fram informasjon som ikke var planlagt i forkant. Temaene for intervjuene dreide seg om arbeidet som utspilte seg i undervisningstimene som ble observert, og matematisk diskusjon generelt. Læreren ble dessuten spurt om sitt syn på matematikkundervisning. Elevene ble spurt noen rent matematiske spørsmål som omhandlet temaene elevene hadde arbeidet med i timen. Det ble gjort for å se om elevene hadde fått noe ut av arbeidet med Arkitektprosjektet og gjennom diskusjonene. Alle intervjuene ble filmet for senere transkripsjon. Det ble gjort slik at man ikke måtte gå på kompromiss med datamaterialet som ble samlet inn. Med videoopptak kan forskeren konsentrere seg om informanten og informantens reaksjoner, isteden for å måtte fokusere på å redusere dataen til skriftlig kontekst (Thagaard, 2009). Dette gjør og at den som intervjuer står i en bedre posisjon til å få kontakt med intervjuobjektet da han ikke trenger å bekymre seg for å ikke få med seg alt som blir sagt.

3.4. Analyse av data

Etter at datamaterialet ble samlet inn, startet arbeidet med å transkribere 17 timer med undervisning og intervjuopptakene. Forskningsgruppen fordelte transkriberingen av video- og lydopptakene fra undervisningstimene og intervjuene, seg i mellom. I transkriberingen er det i hovedsak videoopptakene som er utgangspunktet, mens lydfilene er supplert der hvor ytringene var utydelige. Etter at transkriberingen av filmene var ferdig, har noen andre fra forskningsgruppen virket som kontrollører for å kvalitetssikre transkripsjonene. Det finnes ingen objektiv oversettelse fra muntlig til skriftlig tekst (Tjora, 2010, s. 126). Dermed har det vært viktig å skrive ned så mye som mulig av det som deltakerne foretar seg i opptaket. Forskergruppen har skrevet ned all muntlig tale, samt skrevet eventuelle kommentarer til ytringene som krever en kontekst eller utdypning for å kunne bli forstått. Siden vi ikke snakker i avsnitt eller signaliserer tegnsetting når vi snakker så utarbeidet forskergruppen også en transkripsjonsnøkkel (vedlegg 3) slik at man kan få med seg pauser i tale, stamming, eller trykk på enkelte ord i den skriftlige utgaven av datamaterialet (Tjora, 2010, s. 127). Transkripsjonene ble også normalisert i den forstand at man skrev på bokmål istedenfor dialekt. Det ble gjort for å sikre personvernet ettersom en normalisering kan fungere som en anonymisering av deltakerne i studien (Tjora, 2010, s. 127). Dog har dialektiske uttrykk som kan ha spesiell betydning blitt forklart i kommentarfeltet.

Grunnlaget for analysen er de transkriberte undervisningstimene som er samlet inn. I analysearbeidet av et kvalitativ datamaterialet prøver man å forstå større sammenhenger via studie av en mindre gruppe individer. Målet med analysen er ikke å forstå hvorfor akkurat denne personen handlet som hun gjorde, men enheten som studeres virker som et eksempel (Skilbrei, 2019). Det er et viktig poeng i denne studien, da målet ikke er å gi en fullstendig beskrivelse av denne lærerens undervisning. Ei heller er målet å si noe om alle matematikklasserom. Derimot er målet å identifisere noen krav som læreren *kan* møte i ledelse av matematiske helklassediskusjoner. Med dette som mål blir noe av datamaterialet fra MERG 2019 irrelevant i denne sammenheng. Derfor ekskluderes observasjonene av gruppearbeid i fokusgruppene, samt intervjuene av fokuselevene og læreren fra denne studien. Utgangspunktet blir dermed datamaterialet fra helklassesekvensene i undervisningen.

Den kvalitative analysen har som mål å gjøre det mulig å få økt kunnskap om saksområdet det studeres på. Ved bruk av induktiv metode arbeides det fra data mot teori (Tjora, 2010). Det arbeides derfor i denne studien med å skaffe mer kunnskap omkring matematiske diskusjoner i undervisningen. Studien er informert og motivert av arbeidet til Ball (2017) og Ball et al. (2008) hvor det arbeides med å identifisere undervisningsoppgaver som inngår i undervisningsarbeidet. Det betyr at man vil prøve å se, definere og pakke ut matematisk lytting, tale, og samhandling som er en del av undervisningsarbeidet. Ved å fokusere på de matematiske handlingene som undervisningen innebærer kan det hjelpe oss til å belyse søken etter å forstå den matematikkunnskapen som lærerne trenger (Ball, 2017, s. 16). Ball et al. (2008, s. 395) forklarer denne måten å arbeide på som en form for «jobbanalyse». Man arbeider for å forstå hva som er arbeidsoppgaver i lærerjobben og dermed bedre forstå hvilke krav denne jobben stiller. Det betyr at jeg først velger ut episoder fra datamaterialet som kan være en matematisk diskusjon ut ifra definisjonen på begrepet (se s. 11). Dernest studeres lærerens handlinger og ytringer, samt fravær av handling og ytring som er relevant for diskusjonen. Ytringer som ikke er av interesse er for eksempel ytringer som går på praktiske ting som hjelp med PC, eller ytringer omhandlende orden og oppførsel. Situasjonen som krever at læreren gir disse ytringene eller gjør disse handlingene i diskusjonsledelsen identifiseres til undervisningsoppgaver i ledelse av matematisk diskusjon. Undervisningsoppgavene baserer seg dermed på en analyse av matematiske problem som oppstår i undervisningen. Følgelig drøftes det hva en slik undervisningsoppgave krever av læreren for å løses og hvilken matematisk kunnskap som trengs. For eksempel er den følgende episoden plukket ut og vurdert til å være en del av en matematisk diskusjon etter vår definisjon:

Tabell 2: Eksempelepisode (298–306)

Nr.	Tid	Hvem	Diskurs
298	26.28	Lærer	Karl? (9s) *Karl*, hva tro-hva har du-hva- er 3D på en måte?
299	26.47	Karl	ehm, det er (.) eh: 3D det er m når du kan se, når du på en måte kan se ehm, (.) begge: begge sidene på på en gang≈
300	37.04	Lærer	≈*At jeg kan se - oijaa sånn ja* (3s) Det var en god start Karl, jeg kan se begge sidene på en gang

301	37.15	Tuva	ehm, det e når man se mer av den ene siden og (2s) ja
302	37.20	Lærer	uhum, eh, Håvard? (2s) *William*
303	37.26	William	ehm, jeg vet ikke om det er riktig men det er når man ikke ser det i 2D (2s) ikke..
304	37.34	Lærer	Ikke ser det i 2D, men i 3D. Kan du være enig om-(.) ja Svein?
305	37.38	Svein	3D kan være en form som har en 2-dimensjonal skygge og≈
306	37.43	Lærer	≈hehe ja, det kan den men nå begynner det å bli skikkelig vi(.) ehm om vi kan-visst jeg åpner her (2s) Kan du da: på et vis se for deg at den kan fylles med noe? (2s) Jenny?

Læreren spør hva 3D betyr (298) ettersom et par elever har brukt begrepet i et forsøk på å forklare hva et rektangulært prisme er. Læreren får flere forslag til hva 3D kan bety. Elevene trenger hjelp til å knytte sine ytringer sammen og for å se sammenhengen med begrepet og hva et rektangulært prisme er. I 306 stiller læreren derfor et nytt spørsmål til elevene. Spørsmålene er oppfølgende til forklaringene omkring 3D. Diskusjonen har stilt krav til at læreren gjør en handling for å nå målet med diskusjonen. Den handlingen som læreren gjør her er å stille oppfølgende spørsmål til elevene. Derav kan det være en undervisningsoppgave læreren *kan* møte ettersom det er noe denne læreren må gjøre i undervisningsarbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner for å hjelpe elevene å se sammenhenger og komme til mål.

3.5. Reliabilitet og validitet

For å styrke reliabiliteten i en kvalitativ studie er det sentralt å gi en detaljert beskrivelse av forskningsstrategi og analysemetoder slik at studien blir mulig å gjennomføre av andre i ettertid (Thagaard, 2009). Det er tilstrebet å gjøre i de foregående avsnittene her, likevel er det relevant og diskutere forskerens rolle i datainnsamlingen for å tydeliggjøre studiens pålitelighet. I studier hvor forskeren er observatør fra sidelinjen, slik tilfelle er her, er det ønskelig at relasjonene som studeres ikke er preget av at forskerne er tilstede (Thagaard, 2009, s. 80). En felles oppfatning i forskergruppen er at vår tilstedeværelse ikke har forstyrret undervisningen i betydelig grad. Både elevene og læreren har vært delaktige i lignende studier før, og er derfor kjent med å bli observert. Læreren selv uttrykte i intervjuet at hun ønsker å delta i forskningen ettersom hun ønsker å vise fram andre undervisningsformer enn de tradisjonelle for kommende lærere. Hvor bevisste informantene er på forskernes nærvær er også knyttet til hvor opptatt de er med sine oppgaver (Thagaard, 2009, s. 81). Datamaterialet i denne studien er hentet fra et klasserom med en lærer, og henholdsvis 27 og 25 elever. Læreren var engasjert i sin rolle som klasseleder og underviser for de store gruppene. Elevene var i likhet også engasjerte under samtalene og aktive under gruppeaktivitetene. Derfor kan en anta at deltakerne i mindre grad har blitt påvirket av forskernes tilstedeværelse og bruken av videokamera, ettersom de var opptatt med sitt.

Observasjonene er utfylt og utdypet med tilhørende intervjuer av deltakerne for å skaffe en helhetlig forståelse av «casen». Det har gitt læreren mulighet til å forklare sin oppfatning av undervisningen og ytre seg om bakgrunn for valg tatt i læringen (Thagaard, 2009). Dessuten kan observasjonene styrke intervjuenes resultater ettersom de beskrivelser informanten gir, kan være preget av hvordan hun ønsker å presentere seg selv (Thagaard, 2009, s. 105). Observasjonene kan da fortelle oss om det informantene sier, stemmer med hvordan personen handler i virkeligheten. Samt har intervjuerne tilstrebet å skape en trygg situasjon for intervjuobjektene, slik at de følte seg ivaretatt og ikke engstelig for å si hva de mener. Lyd- og videoopptakene av observasjonene og intervjuene har også gjort det lettere å skille primærdata fra hva som er tolkninger og vurderinger (Thagaard, 2009). Det har likevel vært noen enkelttilfeller hvor lyden ikke har strukket til og noen av ytringene blir uklare. Det kan medføre at man tolker situasjonen ulikt fra hva den som ytret seg egentlig mente. Imidlertid har ikke det vært tilfelle i de aktuelle episodene som er valgt ut for denne studien.

Fra rådata til tolkninger leder det oss inn på studiens validitet eller gyldighet. Vi kan presisere studiens validitet ved å stille spørsmål om de tolkninger vi kommer fram til, er gyldige i forhold til den virkeligheten som vi har studert (Thagaard, 2009, s. 201). For å styrke studiens gyldighet er det tilstrebet en gjennomsiktighet i hele fremleggelsen. Det vil si at det skal være tydelig for leseren hva som ligger til grunn for tolkninger som er gjort ved å redegjøre for hvordan analysen gir grunnlag for de konklusjonene som er tatt. Dessuten har veileder i studien virket som en kritisk stemme gjennom analyseprosessen. For å styrke validiteten er det fremlagt hvordan studien samsvarer med annen forskning på området. Ved å sammenstille våre funn med funn fra andres tidligere forskning kan det gjøre forskningen noe konservativ ifølge Tjora (2010, s. 179). Samtidig gjør det at forskningen opprettholder høyere kvalitet.

Videre er det sentralt å vurdere studiens gyldighet for andre situasjoner enn den gjeldende, det vil si generaliserbarheten. Generaliseringen i denne studien handler om en teoretisering innenfor arbeidet med matematiske diskusjoner. Det vil falle innenfor det som blir kalt konseptuell generalisering hvor målet er å utvikle innsikt knyttet til et fenomen (Tjora, 2010, s. 181). Selv om dette er en case-studie av én lærer kan andre forskere undersøke om de undervisningsoppgavene som er pekt på i denne studien, forekommer i andre klasserom. Dermed kan studien bidra til økt kunnskap på området og være en del av et større arbeid med å identifisere undervisningsoppgaver tilknyttet ledelse av matematiske diskusjoner og følgelig hvilke krav til matematisk kunnskap som kreves i et slikt arbeid.

3.6. Etiske overveielser

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har utarbeidet noen generelle krav til etikk i samfunnsforskning. Det heter at man som forsker «må både informere og innhente samtykke fra dem som deltar i forskningen eller er gjenstand for forskning. Samtykket må være fritt, informert og uttrykkelig» (NESH, 2016, s. 14). Det ble derfor utarbeidet et informasjonsskriv (vedlegg 1 og 2) for studien som forklarte hvordan studien ville foreta seg og hva som var formålet med den. Dette skrivet presiserte også hva det innebar å delta i studien, at det er frivillig og hvordan opplysningene ville bli håndtert. Informasjonsskrivet ble sendt til både læreren og elevenes foresatte ettersom elevene er under myndighetsalder. Videre måtte foreldrene og læreren skrive under på en samtykkeerklæring for deltakelse i studien. Forskningen skal være basert på frivillighet og derfor sikres og presiseres deltakernes rett til å trekke seg fra studien til en hver tid i samtykkeerklæringen og informasjonsskrivet. Denne retten ble i tillegg presisert i oppstarten av hvert intervju.

Forskningsprosjekt som forutsetter behandling av personopplysninger er meldepliktige. Ettersom denne studien er gjennomført ved Universitet i Stavanger meldes prosjektet til Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste (NSD). I forkant av studien sendte prosjektleder inn meldeskjema og fikk dette godkjent før noe annet ble gjort (vedlegg 4). I meldeskjemaet ble det søkt om å kunne bruke datamaterialet som ble samlet inn våren 2019 i videre arbeid i to år fram i tid. Det ble også godkjent. Et av grunnprinsippene for etisk forsvarlig forskning, som er spesielt viktig ved behandling av personopplysning, er kravet om konfidensialitet. Det omhandler at informasjonen skal bli behandlet konfidensielt og deltakerne ikke skal bli gjenkjent (Thagaard, 2009, s. 27). Forskningsgruppen diskuterte nøye viktigheten av å ivareta personvernet i prosjektet. For å bevare prinsippet om konfidensialitet og anonymiteten til deltakerne ble det utarbeidet en nøkkel for fiktive navn og transkribering. Videofilene ble delt ut av prosjektleder på krypterte minnepinner for å unngå uheldig spredning av materialet. Minnepinnene ble levert tilbake til prosjektleder etter at transkriberingen var ferdig. I dette prosjektet er det bare benyttet det ferdig-transkriberte materialet.

4. Resultater

I ledelse av matematiske diskusjoner er det flere ting læreren må gjøre, eller flere undervisningsoppgaver hun må løse (Ball et al., 2008). De identifiserte undervisningsoppgavene i denne studien er først og fremst *å lede elevene til mål*. Målet med diskusjonen er å nå en felles forståelse for det matematiske problemet eller emnet (Dillon, 1994). Likevel er det ingen selvfølge at dette skjer, og læreren må dermed gjøre et arbeid for å best mulig legge til rette for at elevene når målet. Derav følger flere undervisningsoppgaver som bl.a. *å stille gode, oppfølgende spørsmål* til elevenes innspill. Det innebærer også å stille nok spørsmål. Denne oppgaven handler om å kunne bygge videre på, og utvikle bidragene i diskusjonen på en hensiktsmessig måte.

Diskusjon er friere i form enn utspørring, og det gir elevene mulighet til å fortelle hva de tenker (McCrone, 2005). Læreren må derfor *kunne tolke elevenes ytringer* og forstår hva elevene har tenkt. Det innebærer å kunne avdekke mulige misoppfatninger og håndtere mange tanker som kan være ulik fra lærerens egen tankegang. Disse tankene og idéene må så læreren kunne oversette til resten av klassen. Når læreren har avklart hva eleven mener må læreren *kunne vurdere gyldigheten i elevens utsagn*. Er det matematisk korrekt det som blir påstått eller foreslått? Dessuten må læreren *kunne identifisere potensialet i ytringene* for så å ta en avgjørelse på hvilke innspill som kan være nyttige å spille videre på i den matematiske diskusjonen. Den siste undervisningsoppgaven som er identifisert i de følgende episodene er at læreren må kunne *vurdere tidsbruken* både i selve diskusjonen, men også i et større perspektiv. Hvor lang tid skal vies til de ulike innspillene og hvor viktig er det at elevene når en felles forståelse før timen tar slutt? Læreren må være tålmodig og ikke bare gi elevene svaret, men la de få tid til å tenke. Samtidig må læreren ikke skape for store usikkerheter og risikere at elevene ikke får avklart eventuelle feilantakelser omkring problemet som diskuteres.

Undervisningsoppgavene stiller krav til lærerens matematiske kunnskap på flere vis. Hver for seg, og i sammen, stiller det krav til lærerens matematiske kunnskap som går utover den rent faglige kunnskapen. Læreren må ha en form for spesialisert matematisk kunnskap som er unik for undervisning, samt matematikkdidaktisk kunnskap om elevene og undervisning for å kunne best mulig lede matematiske diskusjoner. De undervisningsoppgavene som er identifisert og de matematiske kravene som er avdekket er hentet ut fra en analyse av tre episoder fra datamaterialet. Disse episodene blir følgelig presentert og analysert.

4.1. «Hva er 3D på en måte?»

Den første episoden er et utdrag fra den aller første timen elevene skal begynne å arbeide med Arkitektprosjektet. I prosjektet skal elevene bygge et rektangulært prisme av papir som skal forestille en bygning. Timen starter med at elevene blir instruert til å samle seg i en halvsirkel på gulvet og læreren presenterer hva de skal arbeide med fremover. Deretter snakker klassen litt om hva en arkitekt gjør, og hva de trenger av informasjon for å kunne løse oppgaven. Samtalen tar seg videre til hva et rektangulært prisme er. Elevene får diskutere litt seg i mellom før læreren tar diskusjonen til plenum. Samtlige av ytringene som blir gitt forklarer rektangulært prisme til å være rektangler i 3D. Som følger spør læreren hva som menes med 3D. Dette er starten på helklassediskusjonen i Episode 1.

Tabell 3: Episode 1 (295–309)

Nr.	**Tid**	**Hvem**	**Diskurs**
295	36.05	Lærer	Det samme som Håvard, 3D på en måte (.) hvem-hvem her vet hva 3D på en måte er? (3s) Å da vet alle hva 3D på en måte er, men jeg s- vet ikke helt hva 3D på en måte er, så hva er 3D på en måte?
296	36.24	Gunnar	3D er når du kan se alle kantene
297	26.27	Lucas	Du kan se det fra en annen vinkel
298	26.28	Lærer	Karl? (9s) *Karl*, hva tro-hva har du-hva- er 3D på en måte?
299	26.47	Karl	ehm, det er (.) eh: 3D det er m når du kan se, når du på en måte kan se ehm, (.) begge:begge sidene på på en gang≈
300	37.04	Lærer	≈*At jeg kan se - oijaa sånn ja* (3s) Det var en god start Karl, jeg kan se begge sidene på en gang
301	37.15	Tuva	ehm, det e når man se mer av den ene siden og (2s) ja

302	37.20	Lærer	uhum, eh, Håvard? (2s) *William*
303	37.26	William	ehm, jeg vet ikke om det er riktig men det er når man ikke ser det i 2D (2s) ikke..
304	37.34	Lærer	Ikke ser det i 2D, men i 3D. Kan du være enig om-(.) ja Svein?
305	37.38	Svein	3D kan være en form som har en 2-dimensjonal skygge og≈
306	37.43	Lærer	≈hehe ja, det kan den men nå begynner det å bli skikkelig vi(.) ehm om vi kan- visst jeg åpner her (2s) Kan du da: på et vis se for deg at den kan fylles med noe? (2s) Jenny?
307	38.00	Jenny	ja, fordi at det er, liksom hvis det er den har mange sider og (ukjent tekst)
308	38.09	Lærer	Den har mange sider og det vil si at den har så mange sider at da vil du rett og slett ha noe som er inni mellom de sidene (.) Aase?
309	38.19	Aase	ehme det er atte det at noe har mer enn to sider

Fra 309 spør læreren om det er plass til noe inni 3D-figuren hvis det er flere enn to sider i prismet. En elev sier at volumet er det som er inni. Læreren ber så elevene vise med tegn om de kunne forklart hva et rektangulært prisme er til sidemannen sin nå. Det er da flere elever som viser at de er usikre.

Tabell 4: Episode 1 (320–323)

320	39.37	Lærer	Da e det noen som er usikker, hva er det eh Tiril som du lure på? (2s)
321	39.44	Tiril	jeg er bare ikke helt sikker
322	39.46	Lærer	Linda, hva lure du på? har-har du noen spørsmål til akkurat det med et rektangulært prisme? Kan du slutte å tegne på tavla Gunnar? eh versegod Linda
323	39.57	Linda	det med prisme, jeg skjønte ikke helt, på en måte hva det er 3D?

En matematisk diskusjon er en meningsutveksling mellom flere deltakere (se definisjon s. 11). I denne sekvensen er det opptil ti ulike elever som bidrar med sine tanker og meninger i tillegg til læreren. Elevene bygger videre på hverandres utsagn ut ifra eleven som kom inn på 3D-begrepet (296). Dermed har elevene en direkte påvirkning på diskursen i klasserommet (Cohen, 2011). Episoden kan også minne om utspørring ettersom læreren stiller spørsmål underveis. Men en viktig forskjell mellom utspørring og diskusjon er at i utspørring stiller læreren spørsmål som elevene svarer direkte på. I diskusjon gis det respons både fra elever og lærer og samtlige kan stille spørsmål (Wilen, 2004). Samtidig som det er elevenes ytringer som læreren tar utgangspunkt i for hvilke spørsmål hun stiller videre. Læreren i Episode 1 forteller ikke hva som er rett eller galt med elevenes svar, men hun virker som en ordstyrer i diskusjonen. I helklassediskusjon er det lærerens rolle å hjelpe elevene til å se sammenhenger mellom de ulike fremgangsmåtene og de matematiske ideene (Wæge, 2015). En annen viktig forskjell mellom diskusjon og utspørring er at utspørring handler om å teste eksisterende kunnskap (Wilen, 2004). I denne episoden handler det om at elevene sammen skal prøve å finne ut av hva et rektangulært prisme er. Da må elevene bruke det de kan om former fra før, men de må også knytte det til ny kunnskap. Elevene vet hva rektangel er og noen vet kanskje også hva prisme er, og ut ifra det må de resonnere seg fram til hva rektangulært prisme kan bety. Dermed vil det være mulig å vurdere denne episoden til å kunne være en diskusjon. I tillegg kan det være en matematisk diskusjon ettersom det tas utgangspunkt i et matematisk objekt: rektangulært prisme (Pirie & Schwarzenberger, 1988).

Målet med diskusjon er at deltakerne skal utvikle en felles forståelse for spørsmålet eller problemstillingen som er utgangspunktet for diskusjonen. Med det skal deltakerne forme deres svar og øke deres kunnskap og forståelse og vurderinger omkring det aktuelle emnet (Dillon, 1994, s. 8). I dette tilfellet handler det om at elevene skal utvikle en felles forståelse for hva et rektangulært prisme er. Derav blir det tydelig at man ikke diskuterer noe man forstår fullstendig ettersom det da ikke er noe å diskutere (Dillon, 1994). I Episode 1 kan det dog se ut til at den felles forståelsen ikke er tilstrekkelig ved diskusjonens ende. Når læreren spør elevene om de nå kan forklare hva et rektangulært prisme er til sidemannen (320), er det fortsatt en del som er usikre. Å skulle *lede elevene til mål* om en felles forståelse for rektangulært prisme kan derfor være en undervisningsoppgave i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner. Innenfor undervisningsoppgaven med å hjelpe elevene til en felles forståelse ligger også undervisningsoppgaven med *å stille gode oppfølgende spørsmål* eller komme med relevante innspill som leder dit (Wæge, 2015). I innspillene læreren gir i Episode 1, ser vi at hun spør hva 3D er fordi det er dit diskusjonen har ført elevene, og hun gjentar det elevene uttrykker. Ettersom flere elever kan synes det er vanskelig å delta i en diskusjon, må læreren gi god støtte til elevene og hjelpe dem med å formulere seg (Ghousseini & Herbst, 2016, s. 80). Det ser vi et eksempel på at læreren gjør i 308. Læreren utdyper Jennys svar og gjør det mer forståelig. Imidlertid stiller ikke læreren mange oppfølgende spørsmål rundt 3D og hvilken sammenheng det begrepet har med rektangulært prisme, for uten om i 308.

Det er utfordrende å skulle stille oppfølgende spørsmål som kan utfordre elevenes tankemønstre. En grunn til at det er så utfordrende kan være fordi undervisningsarbeidet er unaturlig (Ball & Forzani, 2009). Læreren må stille spørsmål om ting hun allerede vet, som hva 3D betyr (295) og om en 3D-figur har et innhold (308). Dessuten må læreren vite hvilke spørsmål hun skal stille. I episoden stiller læreren spørsmål om 3D ettersom det viste seg at flere av elevene beskrev rektangulært prisme som en 3D-figur. Hvis eleven kan forklare hva de mener med å knytte begrepet til 3D kan de kanskje klare å forklare hva begrepet rektangulært prisme faktisk betyr. En slik utfordring og undervisningsoppgave krever at læreren har god kunnskap om faget. Allmenn fagkunnskap er i dette tilfellet å vite hva et rektangulært prisme er, og hva 3D er. Åpenbart må læreren selv ha allmenn kunnskap om begrepene, men læreren må også vite hva som definerer det, og hva som skiller et rektangulært prisme fra andre former. Læreren må forstå de ulike elementene som faget innebærer og hvordan de henger sammen (Shulman, 1986). Det betyr at læreren trenger kunnskap ikke bare om det aktuelle begrepet, men hun må vite hvordan det står i sammenheng til andre elementer i matematikken. For å vite hvilke spørsmål som er nyttige å stille krever det derfor at læreren har en mer spesialisert form for fagkunnskap (Ball et al., 2008). En fagkunnskap som strekker seg utover det som er allment kjent om former og figurer, som gjør læreren kapabel til å avgjøre hvilke spørsmål som kan utfordre elevenes tankegang og lede de til en forståelse for begrepet.

Læreren ser ut til å møte flere undervisningsoppgaver i Episode 1 som følgelig stiller flere krav til hennes matematiske kunnskap. Fordi det å kunne *stille gode, utfordrende og oppfølgende spørsmål* til elevenes utsagn, krever at læreren kan *vurdere gyldigheten i elevenes utsagn* opp mot det som diskuteres. Holder det å si at 3D er slik at man ser alle kantene (296), eller at 3D ikke er 2D (304)? Med disse utsagnene må læreren også vurdere om det er beskrivende for rektangulært prisme, eller om dette hjelper å forstå hva det er. Ettersom det viser seg å være flere elever som er usikre etter at diskusjonen er ferdig, kan det tyde på at disse ytringene ikke holdt for å skape en felles forståelse. Det stilles derfor krav til lærerens matematiske kunnskap for å kunne *vurdere elevutsagnenes gyldighet* på en god måte. Læreren må ha grunnleggende faglig kunnskap som omhandler former og figurer, men også kunnskap om fordeler og ulemper med ulike argumentasjoner. Hva gjør at det ikke holder å si at 3D er slik at man ser alle kantene, og hvilke egenskaper for 3D mangler i denne beskrivelsen? Hvilke egenskaper med 3D-begrepet knytter det til rektangulært prisme? Dette er matematiske krav til kunnskap som strekker seg utover det som er allment, men som er sentralt for denne undervisningsoppgaven (Ball et al., 2008). Likeså må læreren ha en forståelse for hvor elevene er i sin matematiske forståelse og tenking (Ball, 1993). Hva er det som gjør at flere av elevene setter likhetstegn mellom rektangulært prisme og 3D? Det kan være en fordel om læreren har matematisk kunnskap om faget og elevene slik at hun kan forstå hvorfor elevene gir de begrunnelsene de gir, for så og lettere kunne videreutvikle elevenes argumentasjoner. Følgelig vil hun kunne legge seg på nivået til elevene og der hvor de er i sin forståelse. Resultatet kan bli en undervisning som utfordrer elevenes tankegang og mulighet til å utvide deres matematiske forståelse for former og figurer. Derfor stilles det også krav til lærerens fagdidaktiske kunnskap (Ball et al., 2008; Shulman, 1986).

En annen undervisningsoppgave læreren møter i ledelse av den matematiske diskusjonen i Episode 1 er å *vurdere tidsbruken* i diskusjonen. I dette tilfelle kan vi se på læreren som en «dilemma manager» (Lampert, 1985). Flere av elevene knytter sine tanker om rektangulært prisme til 3D, men det kan se ut som at de opplever det utfordrende å forklare hva rektangulært prisme faktisk betyr. Læreren prøver å utfordre elevene på hva 3D er (295), og vier tre-fire minutter av diskusjonen til denne tanken. Dog kommer det fram at flere elever har blitt forvirret når læreren prøver å avslutte diskusjonen (320). Her må læreren balansere interessene til elevene som fokuserte på 3D, og ta hensyn til de som opplever denne forklaringen som uklar. En fordel med diskusjon som undervisningsmetode er at læreren får et godt innblikk i elevenes tankemønstre og at elevene kan forme diskursen (Cohen, 2011). Samtidig viser Episode 1 at læreren skal være tålmodig og gi elevene tid til å tenke og vurdere, men hun skal også lede diskusjonen og med det prøve å lede elevene til en felles forståelse. Læreren må derfor ha et repertoar av måter å tilføye, styre og ta nye vendinger i elevenes arbeid i diskusjonen for å skape mest mulig effektive diskusjoner (Chazan & Ball, 1999). Et slikt repertoar stiller krav til god didaktisk kunnskap i faget som innebærer å kunne velge elevinnspill som er nyttige, og hvilke som tar opp unødvendig med tid (Ball et al., 2008). Det krever også matematisk kunnskap om hvilke forklaringer og representasjonsformer som er nyttige for at elevene skal forstå hva 3D betyr, og hva et rektangulært prisme er. Helt grunnleggende blir derfor den rent faglige kunnskapen som omhandler at læreren har god kunnskap om de ulike elementene i emnet og hvorfor ting er slik (Shulman, 1986). Det innebærer å ha forståelse for hva et rektangulært prisme er og hva 3D er. I tillegg må læreren vite hva som er sentralt eller spesielt med rektangulært prisme og 3D-begrepet slik at elevene skal kunne forstå hva det betyr og hvordan det henger sammen med andre matematiske fenomen. En slik fag- og fagdidaktiskkunnskap er ikke noe alle har selv om de vet hva et rektangulært prisme er. Derfor stiller det krav til en dypere forståelse for emnet hos læreren eller en mer spesialisert form for kunnskap (Ball et al., 2008; Cohen, 2011).

Å skulle *vurdere tidsbruken* er en undervisningsoppgave som må ta stilling til tidsbruken av de ulike resonnementene som kommer fram i diskusjonen slik som pekt på over. Imidlertid må det også sees på i et større bilde. Som en kan anta så har ikke diskusjonen ledet elevene fram til en felles forståelse for hva et rektangulært prisme faktisk er. Skal læreren nå la elevene være usikre og håpe at de forstår med tiden? Skal hun la diskusjonen fortsette, eller hvordan skal man gå videre? Her har vi enda et eksempel på hvorfor Lampert (1985) kunne omtale læreren som en «dilemma manager». Læreren står ovenfor et dilemma om hun skal prøve å sikre seg at elevene forstår begrepet, eller om hun skal la de få utforske videre. Dette er samtidig et dilemma som omhandler tid. Cohen (2011) forklarer at elevene må være en del av prosessen fram til den «endelige» kunnskapen. Imidlertid må læreren se diskusjonen i sin helhet. Hvor viktig er det for oppgaven at elevene får en klar forståelse for rektangulært prisme, og hvor viktig er det i det videre løpet? Det stiller krav til lærerens kunnskap om å se de matematiske elementene i sammenheng. Det innebærer å kunne se Arkitektprosjektet i sammenheng med elevenes videre utdanning. En slik matematisk kunnskap kan kalles horisontkunnskap (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Imidlertid betyr det at læreren må ha en dypere forståelse for matematikken og vite hva som er avgjørende å få avklart, og dermed er det også en spesialisert form for matematisk kunnskap. I dette tilfellet ender Episode 1 med at læreren svarer Linda (323) at et prisme er når veggene står vinkelrett på underlaget.

4.2. «Er dere enig eller uenig?»

Den andre episoden er hentet fra første time dag to med observasjon. I denne timen arbeider elevene med addisjon av brøk, og det er ikke knyttet til Arkitektprosjektet. Timen starter med at elevene setter seg i en halvsirkel på gulvet. Læreren henviser til et tidligere prosjekt de har arbeidet med som omhandler et valpesnop som skulle lages av ulike typer protein. Elevenes oppgave er å finne ut hvor stor andel hver del skal utgjøre for å lage en bestemt mengde valpesnop. Videre gir læreren elevene ulike addisjonsoppgaver med brøk. Elevene løser disse oppgavene relativt raskt med å bruke klokken som hjelpemiddel noe som de har lært tidligere. Læreren gir så elevene følgende oppgave: 3/12+1/4+1/5. Hun ber elevene om å diskutere dette sammen først. Episode 2 begynner når samtalen fortsetter i plenum igjen. Episoden er klippet et par steder for å korte ned episoden til det som var relevant for resultatet. Dette er markert med en tom rad i mellom ytringene.

Tabell 5: Episode 2 (263–329)

Nr.	**Tid**	**Hvem**	**Diskurs**
263	40.42	Peter	Altså tre tolvdeler er ett kvarter e:h (2s) plusser du de til 30 minutter for eksempel så pluss en femdel som er 12 minutt som er 42 minu-e:h minutt så blir det førtito eh sekstideler
264	40.58	Lærer	Er dere enig?
265	41.00	Roar	Jeg e enig
288	42.23	Mats	Jeg og han har eh e:h forskjellige svar
289	42.26	Lærer	Dere har forskjellige svar? Ja men det er fint~
290	42.27	Erik	~ (ukjent tekst) at det er tjueseks mens (ukjent tekst) hadde tjuetre
291	42.30	Lærer	Tjuetre hva for noe?
292	42.33	Truls	Syv tjuetredeler
293	42.34	Lærer	Syv tjuetredeler ja (.) Hvorfor har dere fått tjuetredela?
294	42.38	Truls	Je:g har fått det på grunn av e:h en fjerdedel (.) Jeg tror det ble:i (.) tre sjettedeler (ukjent tekst)
295	42.47	Lærer	E-s-d hva sa du nå? At de tre tolvdelene blir tre sjett- e tre?
296	42.52	Truls	En fjerdedel

327	44.21	Lærer	Okay (2s) skal vi se hvem er det som e:h har eh som har et forslag til løsning her på den oppgaven der? Den e jo grusom (4s) Er dere e:h uenige elle:r eh va det helt bom stopp eller
328	44.40	Mia	Ehm (.) Vi vet ikke helt fordi vi vet ikke om førtito tolvdeler er: svar fordi tolv, det er tolv deler, så (.) ja
329	44.50	Lærer	Tenke dere at dere skal bevare den høyeste nevneren? (2s) Eller hvorfor vil dere ha tolvdeler? (2s) Så var det så var det et tall til som var interessant, du sier førtito tolvdeler (.) Hvorfor førtito?

Etter at et par minutter er brukt på Mias løsning (328) vil læreren høre flere forslag til problemstillingen og får da enda en løsning som er ulik de andre.

Tabell 6: Episode 2 (359–376)

359	47.32	Lærer	Okay, det er greit (.) E:h skal vi høre da på:: på:: e:h Ellen og Siren?
360	47.49	Ellen	Ja vi kom hvert fall fram til e:h en hel og to tolvdeler.
361	47.56	Lærer	Skal vi se da va det å finne penner igjen
362	48.01	Isak	En heil og to tolvdeler?
363	48.03	Lærer	Dere sier at det er (.) svaret er en hel og
364	48.08	Siren	To tolvdeler
365	48.10	Lærer	Mhm
368	48.15	Ellen	Ja eh hvert fall den måten jeg tenkte på var jeg tok vare på eh den tolven altså nevneren da e:h også tok jeg fire pluss fem som er ni pluss de to som er telleren opp forbi som er elleve pluss tre er fjorten, og fjorten tolvdeler går jo ikke så da må vi ta (.) da (ukjent tekst) en heil
369	00.00	Siren	Tar vekk tolv fra de fjorten (ukjent tekst) blir en hel også tar jeg to (.) tolvdeler fordi (ukjent tekst)
370	00.08	Lærer	Om dere hørte det siste som Siren sa her, hun sa fjorten tolvdeler og så sa hun at det går ikke og derfor så må jeg ha e:n og to
371	00.19	Thea	To tolv

372	00.26	Lærer	Stemme det? (3s) Det her? (3s) Hvis du ser på fjorten tolvdeler, er det det samme som en hel og to tolvdeler? (ukjent tekst) Og så er det noen som har rekt opp hånda og da skal vi kommentere det Siren sier eller?
373	00.46	Lukas	Jepp
374	00.47	Lærer	E:h Lukas?
375	00.48	Lukas	Ehm (2s)
376	00.51	Lærer	Men vent litt, vent litt vent litt. E det noen som hørte hvordan de to tenkte. Hva som de sa grunnen var til at de fikk fjorten tolvdeler? (2s) For det var jo faktisk interessant. (6s) Eh:m: ja

I Episode 2 er det en meningsutveksling mellom flere av elevene og læreren omkring addisjonsstykket 3/12+1/4+1/5. En slik meningsutveksling er i tråd med definisjonen for diskusjon (se s. 11). Deltakerne legger fram ulike synsvinkler på saken med forskjellige angrepsmåter og løsningsforslag. Meningsutvekslingene skjer i respons til hverandre som i 288 hvor eleven ytrer at han har fått et annet svar enn medeleven. Dessuten diskuteres det mot et mål om å forstå løsningen av addisjonsstykket med brøk. En slik diskurs henger sammen med betingelsene for at det skal være en diskusjon (Dillon, 1994). Samtidig er temaet for diskusjonen av matematisk karakter. Utgangspunktet er hva verdien av summen til 3/12+1/4+1/5 blir. Følgelig har vi en matematisk diskusjon (Bussi, 1996; Pirie & Schwarzenberger, 1988). Imidlertid kan Episode 2 minne om en utspørringssistuasjon. Læreren stiller et spørsmål og elevene svarer på det. Men læreren evaluerer ikke svarene slik en IRE-struktur innebærer (Franke et al., 2007). Læreren ber elevene utdype sine synspunkt (291; 293; 329), og etterspør flere meninger omkring problemet (288; 327). Dette er en måte for å tilføye til, og styre diskusjonen som er nødvendig for å nå målet (Chazan & Ball, 1999). Samtidig som det gir flere elever mulighet til å delta i diskursen, noe som er viktig for at det skal være en diskusjon (Cohen, 2011; Dillon, 1994; Wilen, 2004).

Ved å diskutere ulike matematiske problem og spørsmål får elevene mulighet til å legge fram sine ideer og høre andre perspektiver. Når elevene arbeider med å gi noe mening kan det føre til en dypere forståelse for matematikken (Lamberg, 2012). For å legge til rette for en felles forståelse arbeider læreren med å få fram ulike syn på problemet fra elevene. Likevel kan det se ut til at undervisningsoppgaven med *å lede elevene til mål* ikke blir nådd. Timen tar nemlig slutt like etter læreren har prøvd å få elevene til å gjenta hva som ble sagt i 368 og kommentert at dette var et interessant innspill. Det betyr at diskusjonen avsluttes med flere ulike svar på oppgaven og ingen felles oppfatning av hva som vil være riktig. Denne undervisningsoppgaven kan igjen knyttes til arbeidet med å *stille gode og oppfølgende spørsmål* til elevenes innspill. Læreren skal hjelpe elevene å se sammenhenger mellom de ulike fremgangsmåtene og matematiske ideene (Wæge, 2015). Det krever at læreren stille oppfølgende spørsmål til elevenes forslag som kan utfordre deres tankemåter om problemet. Eksempelvis så forteller Truls at han mener svaret er 7/23 (292). Lærer spør så hvorfor (293) og ber han forklare et par ganger til hva han mener (295). Følgelig går læreren videre og etterspør flere forslag. Ut ifra transkripsjonene er det uklart hva Truls mener ettersom det er noen ytringer som ikke kommer fram. Imidlertid er det ikke en åpenbar løsning til problemet. Derfor kunne dette vært et innspill som hadde vært interessant å utdype. Det kan derimot være at læreren har forstått hva eleven tenker, og vurdert det til å være mindre viktig i det store bildet for å forstå denne oppgaven. Likevel ser vi de samme tendensene hvor læreren går videre etter å ha gitt elevene tid til å forklare hva de mener i de andre forslagene.

I 368 kommer det fram at Ellen og Siren har funnet løsningen 1 2/12. Det har de gjort ved å addere nevnerne 4 og 5, samt alle tellerne: 3, 1 og 1. Summen av disse tallene er blitt til telleren, og 12 har de latt stå som den gjeldende nevneren. I 372 prøver læreren å få noen andre til å forklare hva jentene ha tenkt. Det er ingen som ser ut å kunne forklare det, og timen avsluttes uten noen flere utdypninger til tankemåten. Jentene har ikke en løsningsmetode som er selvsagt til problemet og det kan se ut til at de roter med aritmetiske regler. Det krever derfor at læreren har god matematisk forståelse for de teorier og lover som gjelder for de ulike regneartene og brøk. Hva er det som kan gjøre at jentene har tenkt slik? Kan de ha blandet med nærmeste fellesnevner og derfor valgt å la den høyeste nevneren stå? For å stille de gode og utviklende spørsmålene må læreren derfor ha kunnskap om sammenhenger i matematikken men også mulige misoppfatninger og hva som gjør addisjon med brøk vanskelig å forstå. Likeså må læreren ha kunnskap om hvor jentene er i sin forståelse og hva de har vist at de kan før. Med den kunnskapen kan læreren lettere bygge på elevenes eksisterende kunnskap og la de være en del av prosessen fram til den «endelige» kunnskapen (Cohen, 2011). Dermed holder det ikke bare å selv kunne løse regnestykket 3/12+1/4+1/5. For å kunne stille gode spørsmål må læreren ha kunnskap om faget som er mer omfattende og kunnskap om elevene sine og undervisningsmetoder som hjelper henne i å vite hva som er nyttig for læring å spørre elevene om nå. Når jentene ikke får noen oppfølgende spørsmål til sitt forslag (368) som utfordrer deres tankemåte, kan det være at de ikke vil forstå hvorfor deres løsning ikke stemmer og heller ikke forstå det som er rett. Da vil de ikke utvide sin kunnskap i denne diskusjonen. Undervisningsoppgaven om *å stille gode og oppfølgende spørsmål* stiller med det krav til lærerens spesialiserte fagkunnskap og fagdidaktiske kunnskap (Ball et al., 2008)

I ledelsen av diskusjonen i Episode 2 må læreren ikke bare løse undervisningsoppgaven med *å stille gode, oppfølgende spørsmål.* Læreren må avgjøre hvilke ytringer som er nyttige for diskusjonen og dermed *identifisere potensialet i elevenes ytringer*. Her må læreren være fleksibel i ledelsen av matematiske diskusjoner for å kartlegge hvilken retning det kan ta diskusjonen, for så å ta den veien som kanskje ikke var den planlagte (Leikin & Dinur, 2007). Når Ellen uttrykker at de har kommet fram til 1 2/12 (360) sier læreren at dette er veldig interessant (376). Etter at læreren har prøvd å få noen andre elever til å forklare hva Ellen mente, så tar timen slutt. Her kan en anta at læreren har sett potensialet i ytringen, men det blir ikke utnyttet med oppfølgende spørsmål som kan utfordre de matematiske resonnementene til elevene. I diskusjon skal læreren bygge på elevenes måte å skape mening for problemet og hjelpe de med å se sammenhengene mellom innspillene (Wæge, 2015). En mulighet kunne vært å prøve og knytte de ulike ytringene til hverandre. Hva er likt, og hva er ulikt med fremgangsmåten til elevenes innspill? Her kan Peter sitt løsningsresonnement i 261 være nyttig å bruke ettersom det er et korrekt svar for oppgaven. Han har dessuten benyttet den løsningsmetoden elevene er opplært i ved bruk av klokken. Hvis Peter sitt forslag skal stemme, kan Ellen sitt forslag stemme da? Er det sannsynlig at flere av elevene har tenkt likt som Ellen, og derfor er det nødvendig å bruke tid på det? Eller hva med Mias løsning (328) med 42/12, hvilket potensial ligger her? Mia har muligens rotet med utregningen av brøk ved bruk av klokken. Telleren viser til en deling av klokken i 60 deler, mens nevneren viser til en deling av klokken i 12 deler. Det er ikke utenkelig at flere av elevene har de samme utfordringene. Potensialet i denne ytringen kan derfor være en diskusjon som utfordrer elevene på utregningen av dette stykket og hva som gjør at Peter har rett.

For å vite hvilke spørsmål og innspill som bør spilles videre på, krever det en dypere forståelse for matematikken enn hvis læreren valgte å bare fortelle elevene om svaret var rett eller galt (Cohen, 2011). Læreren kan ikke på forhånd vite at det var disse forslagene elevene ville komme med, og derfor er kompleksiteten i undervisningen økt. I dette tilfellet hvor det blir viktig å se sammenhengen mellom de ulike elevforslagene for å få en felles forståelse for problemet, krever det en mer spesialisert form for matematisk kunnskap hos læreren. Det er nemlig dette som gjør læreren i stand til å kunne forklare hvordan elevens løsninger henger sammen, og vite hva som er viktig å få fram i en diskusjon om addisjon av brøk (Ball et al., 2008). Hvis læreren har god kunnskap om hva som gjør addisjon av brøk vanskelig, hva elevene kan om dette fra før og hva som må fokuseres på for å bedre sikre forståelse hos elevene, er det større sannsynlighet for at hun tar gode valg i identifiseringen av potensialet i ytringene. Det er kunnskap som er spesiell for undervisningsarbeidet. Her skal læreren stille spørsmål om ting hun allerede vet svaret på. Hun skal prøve å utfordre andres forståelse og utvikle deres argumenter og ideer. Det er unaturlig sammenlignet med den undervisningen som skjer utenfor klasserommet (Ball & Forzani, 2009). Problemet som kan oppstå hvis læreren ikke klarer å velge strategiske utsagn å spille videre på er at elevene ikke får en felles forståelse for problemet. Definerte læringsmål vil derfor kunne hjelpe læreren i å bestemme hvilke ytringer hun skal bruke tid på i diskusjonen (Wæge, 2015). Hvis målet er at elevene skal addere brøk av høyere grad, kan det være til hjelp å sammenligne Peter (263) og Mias (328) løsninger. Begge disse elevene har en løsning som er forståelig med tanke på problemet selv om Mia ikke har et korrekt svar. Hennes løsningsfeil er muligens en feil flere av elevene kan relatere til. Ved bruk av disse to forslagene holder læreren seg nær opp til læringsmålet. En fordypning i Ellens forslag (360) er mer uforutsigbart og kan øke usikkerheten i måloppnåelse.

Arbeidet med *å stille gode, oppfølgende spørsmål til elevene*, og å kunne *velge ut nyttige elevinnspill* leder til en ny undervisningsoppgave. Læreren må kunne *tolke elevenes ytringer* for å kunne ta gode avgjørelser i diskusjonen og for å kunne stille nyttige spørsmål til elevene. Det er ingen enkel oppgave da ikke alle elever klarer å forklare hvordan de har tenkt, eller at læreren ikke klarer å gripe fatt i hva eleven prøver å si (Ball, 1993). I Episode 2 er det flere tilfeller hvor læreren prøver å få elevene til å utdype sine svar eller forklare hva de mener (291; 293; 295; 329). I tilfellet med Ellens forslag (360) prøver lærere å få noen andre elever til å kommentere dette forslaget. Det kan være at læreren ikke helt klarer å forstå hvordan eleven har tenkt og derfor prøver å få noen av medelevene til å forklare. Av samme grunn kan det være at læreren ikke stiller flere oppfølgende spørsmål til løsningsforslagene. Dette krever at læreren kan håndtere kompliserte interaksjoner og holde følge med flere tankeganger samtidig, slik at hun kan lede elevene til forståelse for det matematiske problemet (Cohen, 2011). Hvis læreren ikke forstår hva elevene har tenkt kan det bli vanskelig å stille spørsmål som kan utfordre elevenes tanker om problemet, og kunne velge nyttige innspill for den matematiske forståelsen.

I arbeidet med å forstå hva eleven mener blir det også sentralt å avdekke mulige misoppfatninger hos elevene. Disse vil være sentrale å få fram og jobbe seg igjennom slik at de ikke vil få større konsekvenser for elevenes utvikling av sin matematiske forståelse. Fordelen med diskusjon som undervisningsmetode er at læreren får et vindu inn i elevenes tankemåter (Jacobs & Spangler, 2017). Tankegangen til elevene er ofte ulike fra læreren sin, og derfor krever det en dypere forståelse i faget for å kunne forstå og forutsi elevenes resonnement og mulige misoppfatninger. For eksempel kan en anta at Ellens metode for å løse addisjonsstykket ikke er forutsett av læreren. Hva mener Ellen når hun sier hun lar 12 stå og adderer 3, 4, 5 og 2 (368)? Her må læreren ha kunnskap om faget generelt, og kunnskap om ulike regneoperasjoner med brøk og hvordan disse henger sammen. Igjen er det en mer spesialisert form for fagkunnskap som er avgjørende for å ha en inngående forståelse for andre perspektiver på et problem (Ball et al., 2008). Samtidig blir den fagdidaktiske kunnskapen sentral for å forstå mulige misoppfatninger og hvordan man skal endre disse, og for å kunne predikere elevsvar (Shulman, 1986).

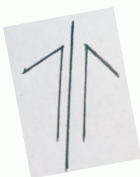
I tillegg til undervisningsoppgavene i arbeidet med ledelse av matematisk diskusjon som vi allerede har vært inne på, foreligger det enda en utfordring for læreren i Episode 2. I matematisk helklassediskusjon må læreren arbeide for å lede elevene i mål til en felles forståelse (Dillon, 1994). En undervisningsoppgave som kommer til synet i dette arbeidet er å *vurdere og håndtere tidsbruken* for diskusjonen. Læreren lar elevene diskutere hva verdien av summen 3/12+1/4+1/5 er i omkring 20 minutter, uten å komme til en form for enighet. En skal dog ikke skynde fram en diskusjon siden diskusjon ikke bør være hurtig i motsetning til utspørring (Wilen, 2004). Hvis elevene skal kunne få reflektere og formulere sin respons, må læreren gi elevene nok tid. Spesielt viktig er dette i diskusjon ettersom man diskuterer ting som man ikke vet med sikkerhet fra før og derfor trenger tid til å utforske (Dillon, 1994). Læreren gir elevene god tid til å dele sine tanker om problemet og får fram flere løsningsforslag og perspektiver på det aktuelle. Det som blir problemet er at diskusjonen ikke blir ferdig før timen tar slutt. Elevene har bare fått ytret sine meninger, men de ulike synspunktene er ikke blitt diskutert, prøvd ut og satt opp mot hverandre for å utforske hva som kan være riktig svar og hvorfor. Hvor lenge skal elevene være usikre på hva som er gode fremgangsmåter og riktig løsning for problemet?

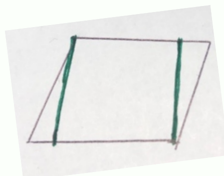
En utforskende undervisningsmetode krever ofte mer tid enn tradisjonell undervisning (Cohen, 2011). Imidlertid er det lærerens ansvar å sikre at elevene får muligheten til å lære det de skal. Læreren må derfor kunne utnytte den tiden hun har til rådighet på en nyttig og effektiv måte som er begrunnet i de faglige målene for elevene. Hva betyr det for elevene at de må gå til friminutt uten å egentlig vite hva som er riktig løsning av addisjonsstykket? Læreren må balansere det å ikke skape for mye usikkerhet med og ikke bare gi elevene svaret uten at de får ta del i arbeidet selv. Her kan læreren oppleve og måtte være en «dilemma manager», og ta et valg som er best mulig ut ifra de to verdiene som står i konflikt (Lampert, 1985). For å kunne vurdere og håndtere tidsbruken i matematiske diskusjoner er det derfor viktig at læreren har fagkunnskap som går ut på og kunne se det matematiske problemet som arbeides med i perspektiv, altså matematisk horisontkunnskap (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Læreren må kunne vurdere hvor viktig dette addisjonsstykket er for det videre arbeidet og om det er mulig å komme tilbake til det i neste matematikktime. Dessuten kan det være nødvendig med en fagdidaktisk kunnskap som omhandler hvor elevene er i sin matematiske tankegang (Ball et al., 2008). I Episode 2 har læreren muligens vurdert at elevene klarer å løse noen enklere addisjonsstykker med brøk i begynnelsen av timen uten problem, og derfor er det ikke så farlig at de nå ikke kommer fram til en felles forståelse før friminuttet. Elevene vil kunne få muligheten til å forstå dette addisjonsstykket i det videre arbeidet oppgaven omhandlende valpesnop. Igjen krever det matematisk fag- og fagdidaktisk kunnskap for å kunne ta en god avgjørelse på elevenes vegne. Hvis Mia aldri vil bli utfordret på sitt syn om at når hun adderer brøk så beholder hun den høyeste nevneren (328), kan det være uheldig for hennes matematiske forståelse.

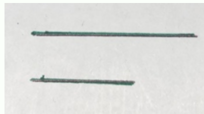
4.3. «De er parallelle hvis de er like lange»

I den tredje, og siste episoden befinner vi oss i slutten av første observasjonsuke. Dette er klassens andre time med Arkitektprosjektet. Fra starten av timen går det bort noe tid til praktiske beskjeder. Når det er unnagjort, tar læreren opp tråden fra forrige time da en elev spurte om en pyramide er et rektangulært prisme. Klassen bruker litt tid på dette problemet før samtalen drar seg over til om et kvadrat er et rektangel. Det er flere elever som har tanker omkring dette, og parallelle linjer blir tatt opp som et poeng. Eleven mener at i et rektangel er to og to sider parallelle, mens i et kvadrat er to og to sider like. Læreren ber så elevene om å snakke med sin læringspartner om hva parallelt betyr, før hun styrer samtalen over i en helklassediskusjon. Episode 3 er første innspill i denne diskusjonen. I kommentarfeltet er det lagt inn det som blir tegnet på tavlen av læreren og elevene. Illustrasjonene er tegnet på nytt ut ifra videoklippene for å forbedre kvaliteten.

Tabell 7: Episode 3 (179–215)

Nr.	Tid	Hvem	Diskurs	Kommentar
179	34.37	Sofie	Vi snakket om e:h, men eller han mente at hvis du hadde to like streker, så er de like, mens du deler det i som e:h e:h i halv så er de jo parallelle og det vil si at da blir de jo like.	
180	34.56	Lærer	Like, hvordan like er det, her snakka vi om lengden blir de like lange og?	
181	35.06	Sofie	E:h ja::::	
182	35.07	Lærer	Emil?	
183	35.09	Emil	Eller, jeg mener at like lange, at den ene siden er like lange er parallelle, mens e:h	
184	35.16	Lærer	kan du komme og vise her hva du mener?	
185	35.26	Emil	hva jeg skal gjør?	
186	35.26		Du kan bare merke, du kan bare ta også merke av de sidene som du tenke er like, e:hm som du sa og så kan du bare bruke merkepenn over e:h	
187	35.35	Emil	E:h hva mener du at at jeg den og den er like lang?	
188	35.41	Lærer	Merk, merk av den. (2s) Bare tegn av den. Den siden og den siden e like lang.	Emil merker de lange sidene på lærerens rektangel
189	35.49	Emil	Å så er de parallelle??? De er parallelle hvis de er like lange og ???? og hvis en person deles sånn så så får vi to parallelle (.)	

				Emil tegner
190	36.18	Lærer	Ja, sånn ja, hvis jeg hadde, hvis jeg ja: ja, at hvis jeg hadde delt i to på langs så hadde jeg fått to, fått to parallelle sider av meg?	
191	36.33	Emil	Ja	
192	36.34	Lærer	A::h. (2s) E::h, Linda?	
193	36.39	Linda	E:h da er de like	
194	36.40	Lærer	E:h, ja	
195	36.49	Linda	E:h eller hvis vi har en strek sånn og en strek sånn, Da har du like lange. (.) E:h, og når de parallelle, når de går (.) rett ved siden av hverandre, (.) men hvis du har e:h (.) like lange bare at en stikke litt ut sånn, så blir den ikke parallell, fordi da går det, da er det ikke like langt i mellom de hele veien.	 Linda tegner
196	37.25	Lærer	Om du kan være enig i at det er avstanden mellom de to linjene eller de to strekene dine som er, som er like lang (.) på den første figuren? (.) avstanden mellom de to linjene er like lang.	
197	37.38	Linda	Ja	
198	37.38	Lærer	Like stor, (.), mens på den siste figuren så er, så ser du at det er større avstand på en plass enn en annen. Gjør en ikke det?	
199	37.47	Linda	M:hm	
200	37.49	Lærer	Vil, (.) Aase?	
201	37.52	Aase	Kan, kan jeg vise?	
204	37.55	Lærer	M:hm	
207	37.59	Aase	Her, ser at de, hvis du har denne her (.) så går de helt ned sånn rett så da er ikke de parallelle, men hvis den er sånn så er de parallelle, for da går de rett ned ?????	 Aase tegner de grønne strekene

208	38.15	Lærer	Sier du nå at på den figuren nederst i bildet ikke to og to sider er parallelle?	
209	38.20	Aase	Ja	
210	38.23	Lærer	Fordi du tenke at vinklene må være rett?	
211	38.25	Aase	Ja	
214	38.31	Lærer	E:h, vil det da (.) har jeg, Linda (.) har jeg forstått deg? (.) hvis du da sier at (.) e:h, (4s) de to linjene er ikke parallelle?	 Læreren tegner
215	38.56	Linda	E:h, nei, de er ikke	

Videre fra 215 diskuterer elevene om de to linjene som læreren har tegnet på tavlen er parallelle eller ikke. Læreren får tvetydige svar og ber elevene vise med tommel opp eller ned om disse er parallelle.

Tabell 8: Episode 3 (224–230)

224	41.02	Lærer	... hva tenker dere her, er de to linjene her parallell? Vis meg med tegn. (3s) Uenig, er veldig stor. De fleste mener at de her to ikke er parallell. (3s) Sara hvorfor er de ikke parallell?	
225	41.25	Sara	Fordi hvis du skal på en måte dele de i to, to, så	
226	41.32	Lærer	hvis jeg deler, hvis, tenke du at jeg skal del dem sånn?	Deler linjen på tvers
227	41.37	Sara	Ja, å så, (.) så hvis du skal liksom dele den andre så blir ikke den like lange	
228	41.45	Lærer	hvorfor skal jeg dele de? (.) Tenker du på det Emil sa? (.) Okay, når Emil har delt meg i to, da har vi et annet fenomen (.) som heter, som heter	
229	42.00	Elev	Symmetri	
230	42.01	Lærer	Som heter symmetri (2s) Speiling som vi holdt på med i 3.klasse. (.) Dere hadde tenkt en speilingssymmetri her og så tegnet vi for eksempel en trekant her, så skulle du speile trekanten. (.) Husker du? (.)....	

I likhet med Episode 1 og 2 ser vi her en meningsutveksling mellom elevene og læreren. Elevene deler sine tanker omkring hva det betyr at noe er parallelt og viser det fram slik at andre kan gjøre seg opp en mening om deres forslag. Meningsutveksling er sentralt i diskusjoner (definisjon s. 11). Dessuten er det flere deltakere som er aktive og ytrer sine meninger. Elevene former diskursen med sine bidrag til diskusjonen. Uten elevenes fremleggelse av deres tankegang er det ikke sikkert læreren ville vært klar over at elevene tror at to parallelle linjer ikke er parallelle hvis de ikke har lik lengde. Slik ser en også at elevene er med på å bringe diskusjonen videre. Deltakelsen er dermed i tråd med flere av definisjonene på diskusjon (Cohen, 2011; Dillon, 1994; Wilen, 2004). Derimot pekes det på i litteraturen at både elevene og læreren skal stille spørsmål og respondere til en annen (Cohen, 2011). Av den grunn kan episoden forveksles med utspørring. Ettersom det i utspørring er læreren som stiller spørsmålene og elevene som gir respons deretter (Wilen, 2004). Slik er det også i Episode 3. Elevene snakker kanskje ikke direkte til en medelev, men de henvender seg mot læreren. Det er lærerens jobb i ledelse av diskusjoner å styre elevenes arbeid i diskusjonen mot mål og derfor blir det ofte naturlig at elevene henvender seg til nettopp henne (Chazan & Ball, 1999). I 225 ser man også et eksempel på hvordan elevene bygger sin tankegang på innspillene i diskusjonen, noe som betyr at de ikke snakker helt uavhengig av en annen. Ut ifra definisjonen på diskusjon (s. 11) er det et moment som vektlegges. Derav er det flere aspekter ved Episode 3 som knytter den til å være en diskusjon.

Noen av fordelene med helklassediskusjon er at det gir elevene mulighet til å teste idéer, høre andres meninger, og sette ord på sine tanker som kan bidra til en dypere forståelse for det matematiske problemet (McCrone, 2005). Imidlertid kan det skape utfordringer for læreren. Selv om læreren får et godt innblikk i elevenes begrunnelsesstrategier og synspunkter, får læreren mange løsningsforslag hun må håndtere. I Episode 3 er det tre forslag til hva parallelle linjer betyr, som er fremtredende (189; 195; 207). Linda (195) viser at hun er inne på noe sentralt ved fenomenet når hun sier at de to strekene som går vannrett bortover er parallelle, mens de to strekene hvor den ene skrår mot den andre ikke er parallelle. Læreren prøver å hjelpe Linda med å få fram at det er noe med avstand mellom linjene som er viktig (196). Her kan en anta at læreren har *identifisert potensialet* i Lindas forslag. Det kan dog se ut som hun ikke får med alle elevene på dette da Aase (207) mener at parallellogrammet ikke har parallelle linjer på grunn av at de ikke har linjer som står imot i 90 graders vinkel.

Dessuten viser det seg at Linda mener at linjene må være like lange for å være parallelle (215). I tillegg ser vi at selv om læreren velger seg ut et elevsvar som hun ønsker å spille videre på, betyr det ikke at diskusjonen ikke blir påvirket av de elevsvarene som ikke blir utdypet. I 189 foreslår Eskil at man har parallelle linjer når man deler et menneske i to. Dette blir ikke utdypet noe videre, men i 225 viser det seg at Sara ikke henger med på den videre diskusjonen fordi hun hang seg opp i Eskil sitt forslag. Det er mulig alt læreren vurderte Eskil sitt innspill til å være mindre interessant for diskusjonen, eller at det ikke var flere enn han som blandet symmetri og parallelle linjer. Likevel så er målet med matematisk diskusjon å skape en felles og dypere forståelse for deltakerne omkring det aktuelle (Dillon, 1994). Derav kan det være nyttig å vurdere de ulike innspillene opp mot det matematiske problemet som diskuteres for å gjøre fenomenets egenskaper mer tilgjengelig for elevene. Dessuten er det mulig at det å ikke *vurdere noen innspills gyldighet* kan skape usikkerhet for elevene om hvordan dette forslaget stiller seg til det som er gjeldende for problemet.

Når det er mange ulike ytringer blir det ikke en enkel oppgave å skulle *identifisere potensialet* i hvert enkelt elevutsagn. For å kunne identifisere potensialet må læreren se for seg hvordan hun kan utnytte elevens forslag til hjelpe elevene til en felles forståelse. Læreren må da kunne utvikle og bygge videre på elevenes innspill for å skape en vei mot mening for problemet (Chazan & Ball, 1999). Det krever at læreren har spesialisert kunnskap i faget (Cohen, 2011). Naturligvis må læreren ha kunnskap om hva parallelle linjer er selv, men det er bare helt grunnleggende. Læreren trenger kunnskap om hvordan parallelle linjer henger sammen med andre matematiske fenomen og hva som er nødvendige egenskaper å få fram for at elevene skal kunne identifisere slike paralleller og dermed også kunne skille de fra andre objekter i matematikken. Læreren må vite hvordan man kan hjelpe andre med å forstå hva begrepet innebærer. Det vil kreve en spesialisert matematisk kunnskap som omhandler å kunne vurdere elevsvarenes gyldighet og effektivitet, men også å kunne knytte disse ideene i sammen. Det er kunnskap som er spesiell for undervisning (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Det leder dog til en annen undervisningsoppgave for læreren i dette tilfelle. Hvis læreren skal kunne *vurdere elevenes ideer og tanker som gyldige*, og dermed også *kunne se potensialet i dem*, forutsetter det at læreren *forstår hva elevene mener*. Det er ikke alltid lett ettersom ikke alle elever klarer å artikulere hva de tenker og få fram sitt budskap (Ball, 1993). Dessuten er det ikke lenger læreren alene som skal vurdere «rett eller galt», men hun skal prøve å få med elevene i vurderingen også. Dermed må læreren forstå hva eleven mener for *å kunne vurdere* *potensialet* og *vite hvilke spørsmål som er nyttig å stille,* men også for å kunne «oversette» elevens innspill til resten av klassen. I Episode 3 forklarer både Eskil (189), Linda (195) og Aase (207) sine tanker omkring hva parallelle linjer innebærer. Mens i 214 ser vi at læreren har tolket det som at elevene mener at parallelle linjer avhenger at linjene er like lange. Dette er ikke noe som kommer tydelig fram i elevenes egne ytringer.

Når læreren arbeider med å forstå hva elevene mener, jobber hun samtidig med å avdekke mulige misoppfatninger. Ut ifra Episode 3 kan det tenkes at noen av elevene har en feilaktig forståelse knyttet til parallelle linjer. Hvis det er tilfelle vil det være viktig å arbeide seg gjennom disse feiltakelsene for å hente elevene inn på rett spor i sin matematiske forståelse. Et slikt arbeid kan knyttes til undervisningsoppgaven med å *styre tidsbruken* i klasserommet. Å bruke matematisk diskusjon som undervisningsform krever mer tid fordi elevene trenger tid til å reflektere og resonnere over problemet. Deretter må det være nok til tid å diskutere selve problemet og prøve å komme fram til en felles forståelse (Wilen, 2004). Hvis læreren da bruker for mye tid på å forstå hva elevene mener, kan det ta opp tiden man har til å nå målet. Konsekvensen kan da være at elevene ikke forstår problemet, eller at de får en forståelse av problemet som ikke er matematisk korrekt. Når læreren oppdager at en ny elev har tenkt på samme måte som Eskil (227), så velger hun å forklare at det ikke stemmer for dette problemet og sier at det er et annet matematisk fenomen kalt symmetri (230). Det kan være læreren gjør det fordi hun ser at det går mye tid til løsningen av problemet og når noen av elevene blander begrepene så avviser hun disse oppfatninger for å kunne fokusere på det som er sentralt for problemet. Her kan læreren oppleve å måtte være en «dilemma manager» ovenfor disse to elevene som har blandet begrepene, og resten av klassen (Lampert, 1985). Hvor lang tid skal hun bruke på denne tankegangen som vil ta tid vekk fra de mer relevante forslagene? Hvis hun går videre slik hun valgte å gjøre med Eskils forslag i 186 så kan det forvirre andre elever slik det gjorde med Sara (226). Samtidig kan det hindre elevene å nå en felles forståelse for det matematiske problemet, om det brukes for mye tid på dette forslaget. Derimot kan det også virke hindrende på måloppnåelsen om det ikke vies tid til å få med alle inkludert Eskil og Sara.

En slik undervisningsoppgave vil kreve at læreren har kunnskap til å vurdere hva som kan gjøre noe vanskelig å forstå, mulige misoppfatninger og hvordan man kan endre dem. I tillegg krever det at læreren vet hva som kan være nyttige arbeidsmåter for å forstå det matematiske problemet, og hvor nyttige de enkelte innspillene til elevene er for dette arbeidet. Det er kunnskap som er knyttet til faget, men også til kunnskap om undervisning og elever. Dermed trenger man en mer fagdidaktisk kunnskap (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Hvis læreren har tilegnet seg den kunnskapen vil hun lettere kunne avgjøre hvilke innspill som bør vies mest tid til. Hun vil også lettere kunne vurdere når diskusjonen kan avsluttes med tanke på videre arbeid for timen. Følgelig er det sentralt for undervisningsoppgaven omhandlende *tidsbruk*, at læreren har matematisk kunnskap sett i perspektiv med fremtidig læring. Er det viktig for prosjektarbeidet at elevene får dette på plass nå? Eller kan man arbeide med begrepene underveis i prosjektet? I et større bilde må læreren ha kunnskap om hvor viktig er det at elevene har «endelig» kunnskap om parallelle linjer på sjette trinn. Dermed blir også matematisk horisontkunnskap eller matematisk læreplankunnskap inkludert i løsningen av denne undervisningsoppgaven (Ball et al., 2008; Shulman, 1986).

5. Diskusjon

5.1. Spesielle undervisningsoppgaver for ledelse av matematisk diskusjon?

Resultatene synliggjorde seks undervisningsoppgaver læreren kan møte i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner:

1. Å lede elevene til mål
2. Å tolke elevenes ytringer
3. Å vurdere gyldigheten i elevenes ytringer
4. Å identifisere potensialet i elevenes ytringer
5. Å stille gode, oppfølgende spørsmål
6. Å vurdere tidsbruken

Undervisningsoppgavene henger tett sammen, og de øvrige handler i bunn og grunn om å lykkes med undervisningsoppgaven med *å lede elevene til mål*. Det som blir interessant er om disse undervisningsoppgavene er spesielle for arbeidet med å lede matematiske diskusjoner. Eller er dette undervisningsoppgaver læreren kan møte i andre undervisningsformer som utspørring?

La oss se på den første undervisningsoppgaven som er *å lede elevene til mål*. I en matematisk diskusjon er formålet å knytte sammenhenger mellom eksisterende og ny kunnskap, altså å forstå emnet mer fullstendig (Wilen, 2004, s. 35). Slik vi ser i Episode 1, 2 og 3 snakkes det om et problem de har spørsmål om. Problemene dreier seg om hva 3D betyr og hva rektangulært prisme er, et addisjonstykke med brøk, og hva begrepet parallelt betyr. Samtalene dreier seg om å utforske og undersøke ulike sider ved problemet. Hva kan være mulige løsninger? Hvorfor eller hvorfor ikke er noe parallelt? Ut ifra en slik diskusjon skal det lede elevene til ny og bedre kunnskap om det aktuelle. Denne kunnskap skal knytte elevene omkring en felles forståelse for problemet (Dillon, 1994). Selv om det er elevene som gjør mye av arbeidet i den matematiske diskusjonen er det allikevel læreren som aktivt må arbeide for å få elevene i mål. Mens i en utspørringssituasjon handler det om å teste elevene i eksisterende kunnskap (Christensen & Stokke, 2015). Læreren stiller et spørsmål, og elevene skal svare på det for så og få en «rett eller galt»-vurdering av læreren. Det er læreren som løser problemet, mens elevenes deltakelse dreier seg om å foreslå det neste steget (Franke et al., 2007).

Undervisningsoppgaven blir derfor ikke lik for de to undervisningsformene. Både utspørring og matematisk diskusjon har et mål som læreren arbeider for, men målene er ulike. Når utspørring handler om å teste eksisterende kunnskap og det er læreren som løser problemet, blir undervisningsoppgaven ikke *å lede elevene til mål* på samme måte som i diskusjonsarbeid. I en matematisk diskusjon må læreren aktivt arbeide for å føre elevene til målet da det er elevene selv som skal skape mening med problemet og tilegne seg ny kunnskap. Det blir derfor passende å kalle undervisningsoppgaven *å lede elevene til mål.* Mens i en utspørringssituasjon blir det ikke like passende. Det kunne vært mer naturlig å kalle oppgaven for eksempel *å sikre måloppnåelse*.

Undervisningsoppgaven *å tolke elevenes ytringer* er en oppgave som læreren kan møte i utspørring. Likevel kan undervisningsoppgaven se ut til å være mer kompleks og utfordrende for læreren i ledelse av matematisk diskusjon. I en matematisk diskusjon kan elevene utforske sine idéer og tanker for å løse problemet. Dessuten er problemene i denne undervisningsformen ofte mer krevende ettersom det skal utvikle deres matematiske forståelse, mens i utspørring skal det testes i eksisterende kunnskap (Christensen & Stokke, 2015). Følgelig blir ytringene til elevene av en karakter som kan være mer krevende å tolke ettersom det er ytringer som går på elevenes matematiske ideer til noe som utfordrer deres forståelse. Av samme grunn økes også kompleksiteten i undervisningen, i tillegg til at læreren ikke kan vite på forhånd hva elevene blir å si (Cohen, 2011). Derfor kan ikke læreren være like forberedt på elevutsagnene og det kreve mer av læreren på stående fot når hun må tolke elevenes ytringer. I en utspørringssituasjon har læreren mer kontroll på situasjonen (Cohen, 2011). Når elevene skal reprodusere stoff eller svare på spørsmål knyttet til matematiske tema de allerede har blitt forklart, vet læreren hva de skal kunne siden det har hun allerede fortalt. Dermed er hun bedre forberedt på hvilke ytringer som kan komme. Følgelig er ytringene ikke av den samme kompleksiteten ettersom de skal testes i etablert kunnskap så læreren trenger ikke tolke svarene på samme måte. Eksempelvis om elevene skal løse 1/2+1/3 og en elev svarer 5/6 så kan læreren godta dette svaret uten å ha forstått elevens fremgangsmåte. For da har hun fått testet om eleven kan regne enkle brøkstykker. Mens i en matematisk diskusjon vil det være avgjørende å forstå hva eleven begrunner sine argumenter med for å kunne holde en fruktbar diskusjon og enes om en felles forståelse. Samt blir det viktig for å kunne løse de resterende undervisningsoppgavene i diskusjonsledelse.

I likhet med å tolke elevenes ytringer blir undervisningsoppgaven *å vurdere gyldigheten* i disse ytringene mer komplisert. Ettersom elevene får mulighet til å ytre sine tanker og ideer omkring problemet, og læreren ikke vet hva disse tankene er på forhånd, må læreren kunne vurdere alle disse uttalelsene på stående fot. Dessuten er det flere elever som deltar i diskusjonen og det blir dermed komplekse interaksjoner som læreren må lede og kunne vurdere gyldigheten til (Cohen, 2011). Hvis vi ser på Episode 2 så får læreren flere forslag til løsningen av addisjonsstykket. Ellen (368) foreslår at det blir 1 2/12. Læreren kan først vurdere at svaret ikke stemmer, men når hun får Ellens begrunnelse har hun gjort riktig når hun går fra en uekte brøk til blandet tall. I en utspørringssituasjon er ytringene ofte et svar som kan vurderes til rett eller galt. Metoden er verken preget av store utfordringer eller flerstemmighet (Christensen & Stokke, 2015, s. 20). Dermed blir kompleksiteten mindre og utfordringene med å vurdere gyldigheten blir også mindre. Samt at læreren er mer forberedt på hva elevene vil svare ettersom hun spør om svar på stoff hun allerede har fortalt elevene. I matematisk diskusjon kan elevene lettere endre dagsorden eller ytre seg om uforutsette ting (Cohen, 2011). Derav kan det stilles større krav til denne undervisningsoppgaven i ledelse av matematisk diskusjon enn i mer tradisjonell undervisningsform.

Å identifisere potensialet i elevenes ytringer ser ikke ut til å vise seg på samme måte i utspørring som i helklassediskusjon. I ledelse av matematisk diskusjon skal læreren utvikle og bygge videre på elevenes vei til å skape mening for problemet (Chazan & Ball, 1999). Derfor må læreren identifisere potensiale i de ulike ytringene for å vurdere hvilke som på best mulig vis kan lede eleven til en felles forståelse for problemet. Læreren skal bygge videre på elevenes tanker da det er de som skal løse problemet gjennom en felles diskusjon (Franke et al., 2007). Elevene har stor påvirkningskraft på diskursen og læreren må derfor holde fokus på det som er målet for diskusjonen. For eksempel i Episode 1 hvor Emil ser ut til å blande begrepene parallell og symmetri, går læreren bare videre (190) etter at hun har forstått hva han mente. Det kan være fordi hun ikke så et potensial i denne ytringen fordi elevene skulle forstå hva parallelle linjer er, og denne ytringen omhandler et annet begrep og kan lede elevene vekk fra målet. Mens Linda og Aase får mer tid viet til seg etter at de har lagt fram sine tanker. Det kan tyde på at her så læreren noen muligheter for å få fram relevante poeng med parallelle linjer. Å identifisere potensialet i elevenes ytringer blir en sentral undervisningsoppgave for læreren i dette arbeidet fordi det er elevenes deling av tanker og meninger som drar diskusjonen videre. Mens læreren må på kort tid se mulighetene eller begrensningene i disse ytringene for å styre elevene i riktig retning. I utspørring som undervisningsmetode er det læreren som løser problemet, og elevene skal foreslå det neste steget (Franke et al., 2007). Spørsmålene er derfor mer ledende og det er et rett eller galt svar. Læreren skal ikke på samme måte bruke elevenes ytringer til noe annet enn å teste deres eksisterende kunnskap (Christensen & Stokke, 2015). Elevene gir en respons som sier noe om de har forstått det matematiske problemet eller ikke. Læreren spør seg fram til hun har fått det ønskelige svaret i utspørringen. Dermed får man ikke den samme undervisningsoppgaven med *å identifisere potensialet* fordi det er ikke et potensial som skal brukes.

Ettersom læreren ikke skal bruke elevsvarene i utspørring på samme måten som i en matematisk diskusjon, blir heller ikke undervisningsoppgaven *å stille gode oppfølgende spørsmål* lik for de to arbeidsmetodene. Det er mulig at responsen i utspørring kan være at læreren stiller spørsmål til det eleven sier. Likevel vil det typisk være spørsmål som går på oppklaring i hva eleven mener for så å kunne vurdere ytringen til rett/gal. Mens i ledelse av matematiske diskusjoner blir det *å stille gode oppfølgende spørsmål* sentralt for måloppnåelsen. Intensjonene med denne arbeidsmåten er at elevene skal bruke eksisterende kunnskap til å skape ny kunnskap for slik å kunne forstå emnet mer fullstendig (Wilen, 2004). Elevene må kommunisere sine egne matematiske tanker og idéer. For at de skal kunne gjøre dette, samt å se sammenhenger mellom de ulike idéene trenger de hjelp av læreren. Eksempelvis i Episode 2 kunne man sett på likheter og ulikheter i elevenes løsningsmetoder. Hvordan har Peter (263) og Mia (328) gjort det ulikt når det kommer til nevneren? Hva gjorde de likt i utregningen av telleren? Kan begge svarene være riktige? Hvorfor/hvorfor ikke? *Å stille gode oppfølgende spørsmål* blir en måte til å kunne få elevene til å utdype og utforske sine egne og andres tanker. Samtidig blir det en måte for læreren til å tilføye og styre diskursen ut ifra elevenes ytringer mot mål (Chazan & Ball, 1999).

Den siste undervisningsoppgaven vi fant i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner omhandler *tidsbruken*. Både i utspørring og i diskusjonsledelse må læreren forholde seg til tidsbruken på et og annet vis. Likevel kan betydningen av den vurderingen som tas ha større innvirkning i ledelse av matematiske diskusjoner. I en tradisjonell undervisningsform har læreren lagt fram en form for «endelig kunnskap» (Cohen, 2011). Det betyr at elevene har blitt fortalt hvordan de skal løse addisjonsstykket i Episode 2. Utspørringen vil da dreie seg om å teste elevene i om de kan løse dette stykket. Læreren kan derfor lettere planlegge hvor lang tid hun vil bruke på denne sekvensen. Men slik vi ser i den matematiske diskusjonen som utspiller seg i Episode 2 så er det flere elever som har ulike forslag til hvordan regnestykket kan løses. Elevene kommer derfor ikke fram til en felles enighet omkring problemet. En slik utforskende tilnærming hvor elevene skal være en del av prosessen krever mer tid (Cohen, 2011). Læreren må gi elevene nok tid til å reflektere og formulere sin respons og uttrykke dem i diskusjonene (Wilen, 2004). Deretter må elevene få nok tid til å bruke disse ytringene til å knytte sammenhenger og forstå problemet. Dessuten gir diskusjon mulighet for elevene til å endre dagsorden (Cohen, 2011). Læreren kan ikke på forhånd vite hva som blir sagt av nytte og hva som være ytringer med lite potensial. Dermed blir det vanskeligere å planlegge tidsbruken på forhånd for matematiske diskusjoner i klasserommet og læreren må ta raske avgjørelser angående dette i klasserommet. Det kan derfor resultere i at elevene ikke får tid til å bli ferdige med et problem slik som i Episode 2.

Det vil også være naturlig å sammenligne de identifiserte undervisningsoppgavene i denne studien med Ball et al. (2008) sin liste over 16 matematiske undervisningsoppgaver. Vi har sett på diskusjonsformen i klasseromsundervisningen, mens de har sett på matematikkundervisning generelt. Det kan innebære tradisjonell undervisning med utspørring, tavleundervisning og oppgavejobbing. Samtidig kan det innebære prosjektarbeid, problemløsning og mer utforskende arbeid som diskusjon. Noen av de identifiserte undervisningsoppgavene i arbeidet med ledelse av matematisk diskusjon kommer fram i listen til Ball et al. (2008), mens andre gjør ikke. Oppgaven *å tolke elevenes ytringer* kan knyttes til det Fauskanger og Mosvold (2016, s. 75) kaller «gi, eller evaluere, matematiske forklaringer». Læreren må prøve å forstå hva elevene sier gjennom å evaluere og tolke deres ytringer. På den måten får læreren et innblikk i elevenes tankeganger og hun stiller bedre til å utfordre deres eksisterende kunnskap. I ledelse av matematiske diskusjoner har vi også sett hvor viktig denne oppgaven blir for de andre undervisningsoppgavene.

Andre undervisningsoppgaver vi kan finne igjen i listen til Ball et al. (2008) er *å vurdere gyldigheten i elevens ytringer* og *stille gode oppfølgende spørsmål*. De kan knyttes til oppgavene å «forklare om elevenes påstander er rimelige (ofte raskt)» og å «stille fruktbare matematiske spørsmål» (Fauskanger & Mosvold, 2016, s. 75). For å kunne forklare om elevenes påstander er rimelige må læreren kunne vurdere om elevenes ytringer er matematisk gyldig eller ikke. Imidlertid innebærer ikke det å vurdere gyldigheten at man faktisk forklarer dette til elevene ettersom læreren skal prøve å få elevene til å finne ut hva som stemmer for problemet selv (Chazan & Ball, 1999). Likevel er det viktig at læreren faktisk vet om påstandene er matematisk korrekt eller ikke slik at hun kan ta gode valg når hun skal styre og hjelpe elevene til mål. Hva det gjelder spørsmålsstillingen så kommer det ikke fram i listen til Ball et al. (2008) om disse spørsmålene er innledende eller om det er spørsmålsstilling i respons til elevenes ytringer. Det er mulig det er ment til å inkludere begge deler. Det gjør dog at viktigheten med *å stille gode oppfølgende spørsmål* slik det har vist seg å være i ledelse av matematisk diskusjon, ikke kommer tydelig fram. I en matematisk diskusjon er det viktig med et spørsmål eller problem som skal utforskes og som deltakerne ikke forstå fullstendig fra før (Dillon, 1994). Men dette spørsmålet kan læreren forberede på forhånd. Spørsmålene læreren må stille til elevenes ytringer kan hun ikke forberede på samme måte, da hun ikke kan vite med sikkerhet hva elevene vil si (Leikin & Dinur, 2007). Imidlertid er de oppfølgende spørsmålene et viktig middel for å tilføye, og å ta nye vendinger i elevenes arbeid i diskusjonen, samt å hjelpe elevene til å formulere sine matematiske tanker.

De resterende oppgavene *å lede elevene til mål*, *identifisere potensial i elevenes ytringer* og *å vurdere tidsbruken* kan ikke knyttes til noen av de 16 oppgavene i Ball et al. (2008) sin liste. Det betyr likevel ikke at det er oppgaver som ikke forekommer i matematikkundervisning generelt. Slik det ble pekt på tidligere i kapittelet så må også en lærer i utspørringssituasjon på et hvis arbeide mot mål og vurdere tidsbruken, men oppgavene forekommer på en annen måte. Det er fordi målet er annerledes og tiden er lettere å planlegge på forhånd. Derfor kan det være at disse undervisningsoppgavene ikke kommer like godt fram, eller ikke vil ha samme grad av betydning i andre undervisningsformer i matematikkundervisning. Det vil si at det er mulig at denne studien belyser noen undervisningsoppgaver som Ball et al. (2008) har oversett, eller som ikke var tilstede i deres studie. Imidlertid kan det også være at Ball et al. (2008) ikke har vurdert disse tre undervisningsoppgavene til å være *matematiske*, og derfor er de ikke å finne i deres liste over matematiske undervisningsoppgaver. *Å lede elevene til mål, identifisere potensial i elevenes ytringer* og *å vurdere tidsbruken* er ikke oppgaver som i seg selv er spesielt matematiske. Likevel ser vi i Episode 1, 2 og 3 hvordan det stilles krav til lærerens matematiske kunnskap i møte med disse undervisningsoppgavene. Det er generelle oppgaver som blir viktige for ledelse av matematiske diskusjoner i helklassen. Derfor kan oppgavene være matematiske i den forstand at de har betydning for matematikken selv om oppgavene i seg selv ikke er en matematisk oppgave isolert sett.

5.2. Undervisningsoppgavenes krav til kunnskap

De matematiske kravene læreren kan stå ovenfor i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner kommer fram av de undervisningsoppgavene læreren møter. Disse oppgavene er noe av det undervisningen kan stille til krav av lærerens matematiske kunnskap. De seks identifiserte undervisningsoppgaven ser ut til å være mer komplekse sammenlignet med en utspørringssituasjon. I tillegg er det noen av undervisningsoppgavene som ikke kommer fram eller er identifisert i utspørring eller annen matematikkundervisning. Mer komplekse oppgaver som må løses i arbeidet med undervisning og/eller flere oppgaver som møtes, stiller mer krav til lærerens matematiske kunnskap. Både Shulman (1986) og Ball et al. (2008) peker på hvilken kunnskap læreren trenger for å undervise matematikk. Deres oversikter viser seg også å være gjeldende for arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner. Likevel er det noen av kunnskapskategoriene som viser seg å være spesielt viktige i dette arbeidet. Helt grunnleggende må læreren ha kunnskap som er rent faglig om hva og hvorfor i matematikk (Shulman, 1986). Et minimum er at læreren selv har den kunnskapen som står i læreplanen til elevene. Læreren trenger allmenn matematikkunnskap (Ball et al., 2008). I Episode 1 må læreren vite hva et rektangulært prisme er og hun må vite hva 3D betyr for og i det hele tatt kunne lære elevene hva det er. I Episode 2 må læreren selv vite reglene for addisjon av brøk og kunne svaret på regnestykket 3/12+1/4+1/5. Og i Episode 3 må læreren ha kontroll på hva det betyr at noe er parallelt og ikke, samt vite om elevenes bruk av begreper og fremgangsmåter er riktige.

Når det er sagt er ikke en allmenn kunnskap nok for å lede gode matematiske diskusjoner. I en utspørringssituasjon kan læreren til en viss grad klare seg med å kunne det grunnleggende i faget så lenge hun kan vurdere elevenes svar til rett eller galt. Men nå skal læreren ikke bare fortelle elevene svaret, men la de arbeide seg fram til en felles forståelse. Det skal ikke elevene gjøre på egenhånd. Læreren skal hjelpe og veilede elevene fram til denne forståelsen (Cohen, 2011). Det innebærer som vi har sett *å tolke elevsvar, vurdere gyldigheten, identifisere potensialet, stille gode oppfølgende spørsmål* og *vurdere tidsbruken*. Til det må læreren ha kunnskap som strekker seg utover den allmenne. Dermed blir det spesielt viktig for ledelse av matematiske diskusjoner det som Shulman (1986) kaller for fagdidaktisk kunnskap, og det Ball et al. (2008) kaller for spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap om elever og undervisning. For eksempel når læreren skal identifisere potensialet og stille gode oppfølgende spørsmålet til elevenes ytringer i de nevnte episodene, trenger læreren å vite hvordan man gjør fagstoffet tilgjengelig for elevene. Læreren må kunne «pakke ut» de matematiske emnene i faget (Cohen, 2011). Hva gjør det vanskelig å forstå hva rektangulær prisme er og hva kan gjøre det enklere? Hva er gode forklaringer og argumenter for dannelse av dette begrepet? Hvis læreren ikke har noen kunnskap om dette kan det bli vanskelig å velge gode retninger til mål i diskusjonen. For eksempel i 305 i Episode 1 forslår Svein at «3D kan være en form som har en 2-dimensjonal skygge og». Det velger læreren å se bort ifra og stiller et nytt spørsmål for å dra diskusjonen videre. Læreren kan ha vurdert Svein sitt forslag til å kunne skape mer forvirring enn å være til nytte i utforskningen omkring rektangulært prisme.

Kunnskap om ulike måter elevene kan tenke på og hva de kan finne utfordrende, men også motiverende, er en del av den fagdidaktiske kunnskapen (Ball et al., 2008). Slik som i Episode 2 kunne det vært en fordel å predikere mulige elevsvar for å være bedre rustet til å håndtere og forstå de forslagene som dukker opp på stående fot. Dette støttes også av Stein et al. (2008) hvor det pekes på at det kan være lurt å la elevene få tenke først to og to og dermed gå rundt og se hva elevene gjør. Da kan læreren «kjøpe seg» litt tid til å forstå elevenes tankegang. Videre i arbeidet må læreren ha kunnskap til å oppdage mulige misoppfatninger og vanlige forestillinger som i dette tilfelle dreier seg om addisjon av brøk. Hva er det som gjør at Mia (328) får til å bruke klokken riktig til å regne ut telleren, men ikke nevneren? Hva er viktig å peke på i løpet av diskusjonen for å hjelpe Mia til å forstå hvordan man skal regne ut dette stykket?

Den fagdidaktiske og spesialiserte fagkunnskapen for disse undervisningsoppgavene handler om *å vite* hva som er gode og oppfølgende spørsmål å stille, vite hva som gjør de ulike elevutsagnene gyldige eller ikke og hvordan man kan hjelpe eleven forstå det. Det handler om å kunne se potensialet i elevens ytringer og dra nytte av dette potensialet. Samtidig som man må kunne tolke disse ytringene og håndtere flere forslag på en gang, og kunne oversette disse forslagene til de andre elevene. Angående *vurderingen av tidsbruk* vil det være nyttig med kunnskap om det matematiske problemet i et større perspektiv. Hva gjør dette problemet viktig for elevene og hvordan er det relatert for de andre emnene i matematikken? Hva har elevene lært tidligere og hva skal de lære videre i utdanningsløpet? En slik kunnskap handler mer om det Shulman (1986) kaller læreplankunnskap og Ball et al. (2008) kaller læreplan- og horisontkunnskap.

5.3. Videre implikasjoner

De matematiske kravene til kunnskap som kommer fram i denne undersøkelsen er i tråd med flere andre studier og tidligere forskning (bl.a. Shulman, 1986; Ball et al., 2008; Cohen, 2011). Matematikkundervisning krever mer enn bare rent faglig kunnskap. Det stilles krav til matematisk kunnskap som er spesiell for undervisning og didaktisk kunnskap i faget for å best mulig legge til rette for læring. Dette kommer fram av de seks matematiske undervisningsoppgavene som er identifiserte i episodene 1, 2 og 3. Flere av disse undervisningsoppgavene er i samsvar med Ball et al. (2008) sin identifisering av matematiske undervisningsoppgaver. Likevel viser resultatene at arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner kan kreve noen undervisningsoppgaver som ikke kommer fram i denne listen. Det kan forklares med at Ball et al. (2008) har sett på matematikkundervisning generelt mens denne studien har tatt for seg diskusjonsledelse i klasserommet. Eller det kan være at Ball et al. (2008) ikke har vurdert undervisningsoppgavene til å være matematiske. Ut ifra en enkel sammenligning mellom diskusjonsledelse og utspørring kan det se ut til at ledelse av matematiske diskusjoner stiller andre, flere eller mer komplekse matematiske krav til læreren enn utspørring. Dette støttes av Cohen (2011) som peker på at med en utforskende fremgangsmåte hvor elevene står i sentrum for arbeidet øker læreren kompleksiteten i undervisningen. Men hvis læreren bruker «ferdig» kunnskap om fakta og prosedyrene trenger hun ingen dyp forståelse for emnet.

Denne studien virker derfor til å tydeliggjør matematiske krav til ledelse av matematiske diskusjoner i klasserommet som er i tråd med tidligere forskning. Rammene for dette forskningsprosjektet tilsier likevel avgrensninger med tanke på funn og inkludering av perspektiver. På mange måter kan studien derav sees på som et utgangspunkt til videre forskning omkring arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner. Det kunne ha vært interessant å undersøke flere mulige undervisningsoppgaver for dette arbeidet. I en større studie kunne man tatt for seg en full sekvens av en matematisk diskusjon for å få et mer helhetlig bilde av en slik situasjon. Det ville også vært interessant å undersøke hvorvidt de matematiske undervisningsoppgavene som er identifisert i denne studien, viser seg i ledelse av matematiske diskusjoner med en annen lærer og en annen klasse. Det ville vært nyttig slik at man bedre kan forstå hva lærere bør inneha av kunnskap for å undervise i matematikk ettersom mange opplever ledelse av matematisk diskusjon som utfordrende og derfor velger tradisjonell undervisning (Cohen, 2011). Følgelig ville det vært nyttig og undersøke nærmere hvilke krav som møter læreren i utspørringsarbeidet versus i matematisk diskusjon. En kunne ha sammenlignet to ulike klasserom som bruker de to ulike undervisningsformene og sammenlignet de kravene som læreren møter. En siste tanke for videre implikasjoner er å undersøke om det er forskjell på de matematiske undervisningsoppgavene en erfaren lærer møter i ledelse av matematiske diskusjoner og de kravene en nyutdannet lærer møter. Med tanke på den nye læreplanen som vektlegger utforskende arbeid vil det være nyttig forskning for å bedre ruste lærerne i det som faktisk kreves av de i undervisningen (Utdanningsdirektoratet, 2020).

6. Konklusjon

Formålet med denne studien har vært å undersøke hvilke matematiske krav læreren kan stå ovenfor i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner. Intensjonene bak prosjektet har vært å bidra til økt kunnskap omkring matematisk diskusjon i klasserommet med bakgrunn i nye forventninger om at elevene skal få en mer aktiv rolle i utforskningen av matematiske problemer og læreren skal virke mer som en veileder (Stein et al., 2008, s. 315). I norske klasserom er også dette forventet med læreplanen av 2020 hvor resonnering, argumentasjon og utforsking står sentralt (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det er likevel få lærere som praktiserer en slik undervisningsmetode fremfor en mer tradisjonell lærerstyrt matematikkundervisning (Franke et al., 2007). Ved å utforske hva som kreves av læreren i utføringen av diskusjonsledelse kan det bidra til at flere lærere velger å benytte denne metoden i sin undervisning.

For å undersøke hvilke matematiske krav læreren kan møte er det gjennomført et kvalitativt observasjonsstudium av en lærer som underviser ved bruk av matematisk diskusjon på sjette trinn. Fra datamaterialet er det valgt ut tre episoder som inneholder en matematisk helklassediskusjon. I episodene er matematiske undervisningsoppgaver læreren møter identifisert og analysert med tanke på hvilke matematiske krav dette stiller til læreren. Metoden er en slags «jobbanalyse» etter Ball (2017) og Ball et al. (2008). Etter en systematisk gjennomgang av relevant litteratur kom det fram at diskusjon som begrep er brukt med ulik mening og betydning. Derfor ble det nødvendig å utarbeide en definisjon på begrepet som er gjeldende for denne studien (se fullstendig definisjon s. 11).

Definisjonen er brukt til å velge ut de tre aktuelle episodene fra datamaterialet. I disse episodene er det identifisert seks ulike matematiske undervisningsoppgaver for læreren. De seks oppgavene er *å lede elevene til mål, tolke elevenes ytringer, vurdere gyldigheten i elevenes ytringer, identifisere potensialet i elevenes ytringer, stille gode og oppfølgende spørsmål,* og *vurdere tidsbruken. Å lede elevene til mål* en mer overordnet undervisningsoppgave i arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner. Likevel må læreren jobbe aktivt for å prøve å sikre seg at elevene kommer fram til en felles forståelse for det aktuelle problemet som er målet for diskusjonen (Dillon, 1994). Det er elevene som skal gjøre arbeidet og utforske det matematiske spørsmålet, men læreren må hjelpe elevene dit ved å styre, sløyfe og ta nye vendinger i elevenes arbeid slik at elevene ikke endrer dagsorden ifra det som er målet (Chazan & Ball, 1999). De resterende undervisningsoppgavene er oppgaver som læreren møter i arbeidet med å lede elevene til mål.

I matematisk diskusjon får elevene mulighet å ytre sine tanker og meninger, samt å argumentere for sine påstander og forslag (Lamberg, 2012). Derfor må læreren kontinuerlig og hyppig arbeide for *å forstå og tolke disse ytringene*. Dessuten er det flere elever som kan synes det er vanskelig å formulere hva de mener (Ghousseini & Herbst, 2016). Det gjør det ekstra utfordrende for læreren å forstå hva eleven har tenkt. Derfor er det viktig at læreren bruker tid til å forstå hva eleven sier, og *ikke* sier. Når læreren har tolket elevens ytring må hun *vurdere den matematiske gyldigheten* i det som blir sagt. Er elevens argumenter matematisk korrekt? Hvorfor eller hvorfor ikke? Er det en effektiv metodebruk? Hvis læreren ikke kan vurdere elevenes forslag blir det vanskelig å kunne lede elevene fram til en riktig, felles forståelse for problemet. Videre må læreren *identifisere potensialet i disse ytringene.* Læreren skal utvikle og bygge videre på elevenes ytringer for å skape mening for problemet (Wilen, 2004). For å gjøre det på en effektiv måte, og en måte som legger best til rette for det som skal læres, må det bygges videre på de ytringene som har et godt potensial til å skape forståelse hos elevene. Spesielt viktig blir det ettersom diskusjonsformen gir elevene mulighet til å ytre det sine tanker og med det kan de endre dagsorden (Cohen, 2011). En ytring med et godt potensial betyr ikke at det må være et riktig svar, men det kan være en vanlig feil eller misoppfatning som en diskusjon omkring kan bidra til å sikre bedre forståelse hos elevene for det aktuelle.

Når elevene får mulighet til å ytre sine tanker og meninger blir det også viktig *å stille gode oppfølgende spørsmål* til dem. Læreren skal ikke fremme egne argument, men arbeide for å utvikle elevene sine egne argument og ideer (Ball & Forzani, 2009). Derfor må læreren stille spørsmål ved elevenes ytringer som kan utfordre deres forståelse og hjelpe dem til en felles løsning og forståelse for problemet. Undervisningsoppgavene følger ikke en bestemt rekkefølge. Derfor kan det være at læreren møter oppgaven med *å stille gode oppfølgende spørsmål* før hun har *identifisert potensialet*. Det kan være læreren må stille spørsmål for å hjelpe eleven til å formulere sine tanker slik at hun kan *forstå hva eleven mener* og for å kunne *vurdere gyldigheten i elevens argumenter.* Den siste undervisningsoppgaven som kommer fram av resultatene er å *vurdere eller håndtere tidsbruken*. I en matematisk diskusjon er det viktig at elevene får nok til tid å tenke og reflektere. Samt å formulere respons og uttrykke dem i diskusjonen (Wilen, 2004). Spesielt viktig er det i diskusjon da de matematiske problemene som adresseres ofte er av høyere vanskelighetsgrad enn i en vanlig utspørringssituasjon. Læreren kan heller ikke vite hva elevene blir å si i diskusjonen og derfor heller ikke hvor lang tid de trenger for å komme fram til en felles forståelse. Derfor må læreren kunne vurdere hva som er best utnyttelse av tiden som er til rådighet. Det gjelder ikke bare i den enkelte timen, men også å vurdere timebruken og problemet sett i et større bilde.

Med tanke på de matematiske undervisningsoppgavene som kommer fram i denne studien er det noen som viser seg i tidligere forskning og noen som ikke gjør (Se Ball et al., 2008). Det kan se ut til at de identifiserte matematiske kravene for ledelse av matematisk diskusjon er mer komplekse, eller ikke identifiserbare i en mer tradisjonell undervisningsform som utspørring. Dette kan eventuelt videre forskning belyse på en nærmere måte. Med mer komplekse undervisningsoppgaver som må løses, stiller det høyere krav til lærerens matematiske kunnskap. Helt grunnleggende må læreren ha allmenn matematikkunnskap. Imidlertid er ikke det spesielt for ledelse av matematiske diskusjoner ettersom læreren trenger dette for å undervise matematikk uavhengig av metode. Det som dog kan se ut til å være spesielt for diskusjonsledelse er at den kunnskapen som Ball et al. (2008) og Shulman (1986) kaller for den spesielle og fagdidaktiske kunnskapen, blir svært viktig for å løse de matematiske undervisningsoppgavene som læreren møter her. Det holder ikke med den allmenne kunnskapen. Læreren trenger kunnskap om hvordan hun skal gjøre fagstoffet tilgjengelig for elevene og hva som kan være gode forklaringer og argumenter for det aktuelle. Hun trenger kunnskap om ulike måter elevene kan tenke på og hva de kan finne utfordrende (Ball et al., 2008). For *å stille gode og oppfølgende spørsmål* til elevene må læreren vite hva som er gode spørsmål å stille. Læreren må ha kunnskap om hva som kan være et godt potensial i elevsvarene for å kunne identifisere dem. Dessuten trenger læreren kunnskap som setter det matematiske problemet i et større perspektiv for å ta gode beslutninger om tidsbruken. Dette dreier seg også om en læreplan- og horisontkunnskap (Ball et al., 2008; Shulman, 1986).

Denne studien ser derfor ut til å støtte Cohen (2011) i at når læreren velger en mer utforskende fremgangsmåte hvor elevene er sentrale i arbeidet øker hun kompleksiteten i undervisningen og det krever derfor mer av læreren. Det betyr ikke at lærere skal unngå å undervise ved bruk av matematiske diskusjon. Tvert imot. Ut ifra teori og forskning på område kan metoden bidra til en dypere forståelse for matematikk hos elevene (Lamberg, 2012). Dessuten blir matematisk diskusjon sentralt i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Derfor blir det heller viktig å øke kunnskapen omkring arbeidet med ledelse av matematiske diskusjoner for å betrygge og ruste læreren i dette arbeidet.

Referanser

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, *93*(4), 373–397.

Ball, D. L. (2017). Uncovering the special mathematical work of teaching. I G. Kaiser (Red.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*, (s. 11–34). Hamburg: Springer

Ball, D. L., & Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. I E. Simmt & B. Davis (Red.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, (s. 3–14). Queens University: CMESG/GCEDM

Ball, D. L., & Forzani, F. M. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education*, *60*(5), 497–511. https://doi.org/10.1177/0022487109348479

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(1), 23–41. https://doi.org/10.1007/BF00369158

Bussi, M. G. B. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1–2), 11–41. https://doi.org/10.1007/BF00143925

Cazden, C. B. (2001). *Classroom Discourse. The Language of Teaching and Learning* (2.utg.). Portsmouth, NH: Heinemann

Chazan, D., & Ball, D. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics, 19*(2), 2–10. https://www.jstor.org/stable/40248293

Christensen, H., & Stokke, R. I. S. (2015). *Samtalens didaktiske muligheter*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Cohen, D. K. (2011). *Teaching and its predicaments*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Crespo, S., Oslund, J. A., & Parks, A. N. (2011). Imagining mathematics teaching practice: Prospective teachers generate representations of a class discussion. *ZDM Mathematics Education*, *43*(1), 119–131. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0296-z

Den nasjonale forskningsetiske komite for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) (2006): *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.*

Dillon, J. T. (1994). *Using discussion in classrooms*. Buckingham, UK: Open University.

Fauskanger, J., & Mosvold, R. (2016). Lærerarbeidets matematiske undervisningsoppgaver. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *21*(3), 73–88.

Fauskanger, J., Mosvold, R., & Bjuland, R. (2010). Hva må læreren kunne. *Tangenten*, *4*, 35–38. Hentet fra http://www.caspar.no/artikkel_pdf/35c_t2010-4.pdf

Flyvbjerg, B. (2006). Five misunderstandings about case-study research. *Qualitative Inquiry*, *12*(2), 219–245. https://doi.org/10.1177/1077800405284363

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, *1*(1), 225–256. Hentet fra https://www.researchgate.net/publication/285328217_Mathematics_teaching_and_classroom_practice

Ghousseini, H., & Herbst, P. (2016). Pedagogies of practice and opportunities to learn about classroom mathematics discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(1), 79–103. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9296-1

Glassco, S., & Fosnot, C. T. (2018). *Arkitektprosjektet. Areal, volum og rutenett*. Bergen: Caspar forlag.

Hintz, A. B. (2011). Understanding students' experiences as listeners during mathematical discussion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(3), 261–272. https://doi.org/10.1080/14926156.2011.595883

Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L., & Lai, Y. (2016). Making progress on mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Enthusiast*, *13*(1), 3–34. Hentet fra https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1363&context=tme

Jacobs, V. R., & Spangler, D. A. (2017). Research on core practices in K–12 mathematics teaching. I J. Cai (Red), *Compendium for Research in Mathematics Education* (s. 766–792). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamberg, T. (2012). *Whole class mathematics discussions: Improving in-depth mathematical thinking and learning*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Lampert, M. (1985). How do teachers manage to teach? Perspectives on problems in practice. *Harvard Educational Review*, *55*(2), 178–195. https://doi.org/10.17763/haer.55.2.56142234616x4352

Leikin, R., & Dinur, S. (2007). Teacher flexibility in mathematical discussion. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 328–347. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.08.001

McCrone, S. soucy. (2005). The development of mathematical discussions: An investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(2), 111–133. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0702_2

Moschkovich, J., & Zahner, W. (2018). Using the academic literacy in mathematics framework to uncover multiple aspects of activity during peer mathematical discussions. *ZDM Mathematics Education*, *50*(6), 999–1011. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0982-9

Mosvold, R. (2017). Studier av undervisningskunnskap i matematikk: Internasjonale trender og nordiske bidrag. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *22*(2), 51–69.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: US Department of Education

Pirie, S. E. B., & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(4), 459–470. https://doi.org/10.1007/BF00578694

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Scherrer, J., & Stein, M. K. (2013). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(2), 105–124. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9207-2

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Skilbrei, M.-L. (2019). *Kvalitative metoder. Planlegging, gjennomføring og etisk refleksjon*. Bergen: Fagbokforlaget.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2009). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY: Free press

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse– en innføring i kvalitativ metode* (3. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Tjora, A. (2010). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

UiS. (2020). *Studere matematikkundervisning—Studieemner—Universitetet i Stavanger*. UiS. Hentet fra https://student.uis.no/subject/?code=MUT303_1&path=nb

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn* (MAT01-05). Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Utdanningsforbundet. (u.å.). *Derfor skal elevene ha kvalifiserte lærere.* Utdanningsforbundet. Hentet fra https://www.utdanningsforbundet.no/var-politikk/utdanningsforbundet-mener/artikler/derfor-skal-elevene-ha-kvalifiserte-larere/

Wilen, W. W. (2004). Refuting misconceptions about classroom discussion. *The Social Studies*, *95*(1), 33–39. https://doi.org/10.3200/TSSS.95.1.33-39

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk–redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten*, *2*, 2015. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P3_M4-Waege-Samtaletrekk-Tangenten-2-2015-Waege.pdf

Vedlegg 1: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring foreldre/foresatte

Vil du delta i forskningsprosjektet «Lede matematiske samtaler»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan lærere leder matematiske samtaler i klasserommet og hvilke muligheter det gir elevene til å fremstå som flinke i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Prosjektet vil foregå i perioden 2019-2021, og målet er å utforske viktige sider ved undervisningsarbeidet i matematikk. Prosjektet har et særlig fokus på det å lede matematiske samtaler i klasserommet, og vi undersøker her hvordan lærere gjennomfører denne delen av undervisningen, hvilke krav dette arbeidet kan stille til læreren og hvilke muligheter elevene gjennom samtalene får til å fremstå som flinke i matematikk. Det overordnede målet med prosjektet er å bidra til større forståelse for den komplekse matematikkundervisningen. Dette er et forskningsprosjekt som ledes av erfarne forskere ved Universitetet i Stavanger, og masterstudenter deltar i innsamling og analyse av forskningsdata. Resultatene av studien vil kunne formidles i forskningsrapporter, tidsskriftartikler, bok-kapitler og konferansepaper.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet, og prosjektet ledes av professor Reidar Mosvold ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Vi har spurt lærere/klasser i universitetets praksisnettverk om å delta i prosjektet, og lærer/klasse er valgt strategisk fordi vi har grunn til å tro at dette er lærere/klasser som har et spesielt fokus på å utvikle gode samtaler i matematikk-klasserommet.

Hva innebærer det for deg å delta?
I løpet av de 2-3 ukene prosjektet foregår i klassen vil grupper av forskere og masterstudenter observere matematikkundervisningen og gjøre lyd- og videoopptak av denne. Forskerne vil også skrive feltnotater under observasjonene. Intervju med lærer vil gjøres etter avtale, og i løpet av perioden vil vi også gjennomføre intervju med to elevgrupper. Disse elevgruppene vil velges ut i samsvar med lærer, og dette vil bli avklart med foreldre. Det vil også bli gjort lyd- og video-opptak under intervjuene. Lærer vil få intervjuguide på forhånd, og foreldre kan få se intervjuguiden på forhånd ved å ta kontakt med lærer.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Dette kan gjøres ved å ta kontakt med

prosjektansvarlig. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Opplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet vil kun være tilgjengelig for de ansvarlige forskerne i prosjektgruppen, og for de masterstudentene som deltar. Opptakene vil under prosjektperioden lagres på ekstern harddisk som blir forsvarlig lagret og innelåst. I alle skriftliggjøringer av datamaterialet vil både elever, lærere og skoler blir gitt fiktive navn. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjoner.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 31. desember 2021. Alle lyd- og video-opptak blir da forsvarlig slettet, og kun anonymiserte tekster vil bli tatt vare på.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Stavanger har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved professor Reidar Mosvold (tlf. xxx xx xxx).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Reidar Mosvold
Prosjektansvarlig
(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Lede matematiske samtaler», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ at ____ (navn på barnet) kan delta i undervisning som observeres
- ☐ at ____ (navn på barnet) kan delta i elevintervju (i gruppe med 2-5 elever)

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 31. desember 2021.

(Signert av foreldre/foresatte, dato)

Vedlegg 2: Informasjonsskriv og samtykkeerklæring lærer

Vil du delta i forskningsprosjektet «Lede matematiske samtaler»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan lærere leder matematiske samtaler i klasserommet og hvilke muligheter det gir elevene til å fremstå som flinke i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Prosjektet vil foregå i perioden 2019-2021, og målet er å utforske viktige sider ved undervisningsarbeidet i matematikk. Prosjektet har et særlig fokus på det å lede matematiske samtaler i klasserommet, og vi undersøker her hvordan lærere gjennomfører denne delen av undervisningen, hvilke krav dette arbeidet kan stille til læreren og hvilke muligheter elevene gjennom samtalene får til å fremstå som flinke i matematikk. Det overordnede målet med prosjektet er å bidra til større forståelse for den komplekse matematikkundervisningen. Dette er et forskningsprosjekt som ledes av erfarne forskere ved Universitetet i Stavanger, og masterstudenter deltar i innsamling og analyse av forskningsdata. Resultatene av studien vil kunne formidles i forskningsrapporter, tidsskriftartikler, bok-kapitler og konferansepaper.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet, og prosjektet ledes av professor Reidar Mosvold ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Vi har spurt lærere/klasser i universitetets praksisnettverk om å delta i prosjektet, og lærer/klasse er valgt strategisk fordi vi har grunn til å tro at dette er lærere/klasser som har et spesielt fokus på å utvikle gode samtaler i matematikk-klasserommet.

Hva innebærer det for deg å delta?
I løpet av de 2-3 ukene prosjektet foregår i klassen vil grupper av forskere og masterstudenter observere matematikkundervisningen og gjøre lyd- og videoopptak av denne. Forskerne vil også skrive feltnotater under observasjonene. Intervju med lærer vil gjøres etter avtale, og i løpet av perioden vil vi også gjennomføre intervju med to elevgrupper. Disse elevgruppene vil velges ut i samsvar med lærer, og dette vil bli avklart med foreldre. Det vil også bli gjort lyd- og video-opptak under intervjuene. Lærer vil få intervjuguide på forhånd, og foreldre kan få se intervjuguiden på forhånd ved å ta kontakt med lærer.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Dette kan gjøres ved å ta kontakt med

prosjektansvarlig. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Opplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet vil kun være tilgjengelig for de ansvarlige forskerne i prosjektgruppen, og for de masterstudentene som deltar. Opptakene vil under prosjektperioden lagres på ekstern harddisk som blir forsvarlig lagret og innelåst. I alle skriftliggjøringer av datamaterialet vil både elever, lærere og skoler blir gitt fiktive navn. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjoner.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 31. desember 2021. Alle lyd- og video-opptak blir da forsvarlig slettet, og kun anonymiserte tekster vil bli tatt vare på.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Stavanger har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved professor Reidar Mosvold (tlf. xxx xx xxx).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Reidar Mosvold
Prosjektansvarlig
(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Lede matematiske samtaler», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i undervisning som observeres
- ☐ å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 31. desember 2021.

(Signert av lærer, dato)

Vedlegg 3: Transkripsjonsnøkkel

Funksjon	**Tegn**	**Beskrivelse**
Overlapp	[tekst] [tekst]	Blir brukt når to personer sier noe samtidig
Overtakelse	tekst≈ ≈tekst	Indikerer når en person overtar og fortsetter å snakke uten at det er pause imellom
Pause (≥ 1 s)	(ns) der n = antall sekunder Eks. (6s)	Pauser i antall sekunder
Kort pause (≤ 1 s)	(.)	Pauser på under et sekund
Konklusjon	.	Som punktum
Spørsmål	?	Indikerer et spørsmål
Forlengelse	: eller :: for lengre	Indikerer at ordet forlenges
Lav prat	*tekst*	Indikerer at det blir snakket lavt
Ukjent tekst	(ukjent tekst)	Indikerer når det som blir sagt er helt ugjenkjennelig og blir ikke transkribert
Forsterkning	tekst	Indikerer at ord eller setninger blir forsterket

Vedlegg 4: Meldeskjema NSD

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Meldeskjema 502242

Sist oppdatert

14.01.2019

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

- Navn (også ved signatur/samtykke)
- Bilder eller videoopptak av personer
- Lydopptak av personer

Type opplysninger

Skal du behandle særlige eller strafferettslige personopplysninger?

Nei

Prosjektinformasjon

Prosjekttittel

Lede matematiske samtaler

Prosjektbeskrivelse

En sentral del av matematikkundervisningen er å initiere og lede matematiske samtaler. Dette er et krevende arbeid hvor læreren må ta både faglige og relasjonelle hensyn. I dette prosjektet studerer vi det komplekse arbeidet med å initiere og lede matematiske samtaler. Fokuset er særlig på hvilke samtaletrekk lærere bruker og hvordan, og hvilke muligheter elevene gis til å delta og til å fremstå i et positivt lys. I tillegg er det et fokus på hvilke krav dette komplekse undervisningsarbeidet stiller til læreren. Det overordnede målet med prosjektet er å bidra til konseptualisering av det matematiske undervisningsarbeidet, og til å utvikle kunnskap om de utfordringene og kravene dette komplekse arbeidet stiller til lærere.

Prosjektet vil foregå i perioden 2019-2021. I denne perioden vil det samles inn kvalitative forskningsdata i utvalgte klasser. Datainnsamlingen i hver klasse vil foregå over 2-3 uker, og vi vil i løpet av prosjektet samle inn data i flere valgte klasser. Det vil også være mulig å samle inn data i samme klasse eller hos samme lærer i flere perioder, men dette vil da avtales på nytt for hver gang. Forskningsdata vil bli samlet inn i form av feltnotater, intervjuer, oppgaveanalyse og klasseromsobservasjoner. Det vil bli gjort video- og lydopptak fra matematikkundervisningen og intervjuene. Det vil ikke bli samlet inn direkte personidentifiserende opplysninger i prosjektet. Alle observasjoner og kommentarer fra lærer og elever vil bli behandlet konfidensielt, og både elever, lærere og skole vil bli gitt fiktive navn. Ved prosjektets slutt vil alle lyd- og video-opptak bli slettet, og kun anonymiserte transkripsjoner og feltnotater vil bli oppbevart.

Fagfelt

Matematikk og naturvitenskap

Dersom opplysningene skal behandles til andre formål enn behandlingen for dette prosjektet, beskriv hvilke

Det vil i forbindelse med prosjektet ikke bli samlet inn personopplysninger. Datamaterialet som samles inn i prosjektet vil kun være tilgjengelig for analyser i en forskergruppe bestående av 2-3 seniorforskere og ca. 20 masterstudenter. Datamaterialet vil brukes til analyser som vil ende opp som forskningsrapporter, og resultater fra prosjektet vil også kunne publiseres i tidsskriftartikler, konferansepaper og/eller bok-kapitler.

Begrunn behovet for å behandle personopplysningene

Prosjektet har fokus på matematikkundervisning og ikke på enkeltlærere eller elever. Det er et mål i prosjektet å utvikle teori heller enn å generalisere til en større populasjon av elever eller lærere. Derfor anser vi det som unødvendig å samle inn personopplysninger i prosjektet. Det vil naturligvis være nødvendig å forholde seg til en viss form for personopplysninger i form av kontaktinformasjon med lærer og skole, men det vil ikke bli lagret personopplysninger som del av forskningsdata i prosjektet.

Ekstern finansiering

- Andre

Annen finansieringskilde

Prosjektet finansieres av forskernes egne FoU-tid, og masterstudentenes bidrag er knyttet til deltakelse i masterutdanningen.

Type prosjekt

Forskerprosjekt

Behandlingsansvar

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Stavanger / Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora / Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Reidar Mosvold, reidar.mosvold@uis.no, tlf: 51832342

Skal behandlingsansvaret deles med andre institusjoner (felles behandlingsansvarlige)?

Nei

Utvalg 1

Beskriv utvalget

Utvalget vil bestå av strategisk valgte lærere og deres matematikk-klasser. Utvalg 1 er definert som lærerne.

Rekruttering eller trekking av utvalget

Utvalget vil rekrutteres gjennom universitetets praksisnettverk. Prosjektleder vil ta kontakt med lærer og skoleledelse.

Alder

21 - 67

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 1

- Navn (også ved signatur/samtykke)
- Bilder eller videoopptak av personer
- Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 1

Personlig intervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Ikke-deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Informasjon for utvalg 1

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?

Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Utvalg 2

Beskriv utvalget

Utvalg 2 defineres som elevene i de strategisk valgte matematikk-klassene. Studien fokuserer på grunnskolen.

Rekruttering eller trekking av utvalget

Det er lærerne som trekkes, og elevene blir dermed utvalgt i kraft av å være i de valgte lærernes klasser. Førstegangskontakt vil skje mellom prosjektleder og lærer/skoleledelse.

Alder

6 - 15

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 2

- Navn (også ved signatur/samtykke)

- Bilder eller videoopptak av personer
- Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 2

Gruppeintervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Ikke-deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Informasjon for utvalg 2

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?

Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Tredjepersoner

Skal du behandle personopplysninger om tredjepersoner?

Nei

Dokumentasjon

Hvordan dokumenteres samtykkene?

- Manuelt (papir)

Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?

Samtykke kan trekkes tilbake ved å ta kontakt med prosjektansvarlig. Dette er opplyst om i informasjonsskriv.

Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet opplysninger om seg selv?

Det vil ikke bli samlet inn noen personopplysninger, og det vil derfor ikke være behov for å få rettet opplysninger. Deltakerne i studien kan når som helst få innsyn i datamateriale ved å ta kontakt med prosjektleder.

Totalt antall registrerte i prosjektet

1-99

Tillatelser

Skal du innhente følgende godkjenninger eller tillatelser for prosjektet?

Behandling

Hvor behandles opplysningene?

- Mobile enheter tilhørende behandlingsansvarlig institusjon
- Fysisk isolert maskinvare tilhørende behandlingsansvarlig institusjon

Hvem behandler/har tilgang til opplysningene?

- Prosjektansvarlig
- Student (studentprosjekt)
- Interne medarbeidere

Tilgjengeliggjøres opplysningene utenfor EU/EØS til en tredjestat eller internasjonal organisasjon?

Nei

Sikkerhet

Oppbevares personopplysningene atskilt fra øvrige data (kodenøkkel)?

Ja

Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?

- Opplysningene anonymiseres
- Adgangsbegrensning

Varighet

Prosjektperiode

01.01.2019 - 31.12.2021

Skal data med personopplysninger oppbevares utover prosjektperioden?

Nei, data vil bli oppbevart uten personopplysninger

Vil de registrerte kunne identifiseres (direkte eller indirekte) i oppgave/avhandling/øvrige publikasjoner fra prosjektet?

Nei

Tilleggsopplysninger
