Universitetet i Stavanger

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Utdanningsvitenskap - Matematikkdidaktikk

Høstsemesteret, 2020

Åpen/ k~~onfidensiell~~

Forfatter: Stian Anda

……….………Stian Anda………………
(signatur forfatter)

Veileder: Raymond Bjuland

Tittel på masteroppgaven: Læringsmuligheter i matematiske lærebøker – før og etter fagfornyelsen.

Engelsk tittel: Opportunity to learn in mathematical textbooks – before and after a reform of the curriculum.

Emneord: Læringsmuligheter, analyse av lærebøker, kognitive krav, transformasjoner av funksjoner, læringsmål, eksempel, oppgave, matematikkdidaktikk, ungdomsskole, kjerneelementer, kompetansemål.

Antall ord: ……39 957……………
+ vedlegg/annet: …7861………

Stavanger, ……11.12........./2020
dato/år

Forord

Dette arbeidet markerer slutten på et fem og et halvt års langt studie ved UiS. Studie ble litt lenger enn planlagt, men de to jentene mine, som kom i 2018, var absolutt verdt utsettelsen. Det føles rart å sette endelig punktum, men nå har jeg gjort det. Jeg sitter igjen med utrolig mye mer kunnskap enn jeg hadde da jeg begynte.

Det er mange jeg må takke. Takk til min kone Laila som har holdt ut med meg selv om livet de siste årene ikke har handlet om oss. Både du og jeg vet at dette har kostet mye. Takk for at du har passet jentene ekstra mye, særlig den siste tiden. Takk for at du tok ekstra ansvar i heimen. Nå får vi endelig mer tid til å være sammen. Takk til Ingrid og Julie som har akseptert at pappa har jobbet med skole. Jeg skal love å være mer til stede i tiden fremover. Vi skal spille stigespill, pusle puslespill, lese bøker, sparkesykle og være masse på lekeplassen. Takk til mine foreldre og søsken som har stilt opp som barnevakt.

Takk til UiS, særlig representert med Tone Bulien, Janne Fauskanger og Reidar Mosvold, som har akseptert at jeg ikke har vært så mye til stede. Jeg vet at det ikke var ønskelig fra deres side at jeg gjorde det på denne måten, men dere la likevel til rette. Jeg fikk oversendt pensum for høsten i juni, fikk forlenget frist på en innlevering med en helg i en hektisk periode og fikk til og med flyttet en eksamen da jeg selv hadde elever som skulle opp i muntlig eksamen. Jeg hadde nok hatt enda mer utbytte av å være til stede på undervisningen, men jeg har lært utrolig mye av å lese på egenhånd og å studere lysarkene som dere la ut.

Takk til Raymond Bjuland som har fulgt meg gjennom det siste halvannet året. Takk for god veiledning. Du har besvart spørsmål og kommet med konstruktive og positive tilbakemeldinger. Disse har hjulpet meg fremover når jeg har vært usikker på veien videre.

Takk til arbeidsgiveren min ved Sola ungdomsskole som lot meg ta ulønnet permisjon i en måned i september, en uke avspasering i innspurten og som har gitt meg muligheten til å avspasere de få gangene jeg har hatt pliktig oppmøte på forelesning eller seminarer.

Takk til venner og øvrig familie som jeg har forsømt de siste årene. Satser på at kontakten kan bli mer hyppig fremover, nå som jeg er ferdig med å skrive.

Takk til Kristoffer Strand og Carina Aurelie Heimstad som lot meg få tilgang til rådataene fra deres master slik at jeg kunne kvalitetssikre min egen forskning på kognitive krav i lærebøkene. Det var til stor hjelp.

Stian Anda

Stavanger, desember 2020

Sammendrag

Formålet med denne studien har vært å undersøke om lærebøkene som er gitt ut etter fagfornyelsen gir flere muligheter til læring enn lærebøkene som er skrevet til den reviderte læreplanen i 2013. Dette har jeg gjort gjennom en innholdsanalyse der jeg har studert emnet funksjoner i fem lærebøker og undersøkt læringsmål, eksempler og oppgaver. I oppgavene undersøkte jeg både hvilke transformasjoner som ble presentert og de kognitive krav i oppgavene. Jeg valgte ut lærebøker fra samme forlag for å sammenligne to lærebøker skrevet av de samme forfatterne. Bøkene som er undersøkt er Faktor 9/10 og Matematikk 8, og Maximum 9 og Maximum 8. Læringsmålene ble diskutert opp mot kompetansemålene i faget. De kognitive kravene i oppgavene ble anvendt til å undersøke i hvilken grad lærebøkene legger til rette for å tilegne seg kjerneelementene i faget. Eksemplene og transformasjonene i oppgavene ble brukt til å analysere hvilke representasjoner og transformasjoner elevene møtte og dette ble knyttet opp mot forskning på lineære funksjoner. Resultatene fra studien, som ikke kan generaliseres utover kapitlet om funksjoner, viser at lærebøkene har ganske forskjellige læringsmål. Dette gjør at læreren må arbeide aktivt med læreplanen og kan ikke stole på at lærebøkene nødvendigvis har tolket læreplanen riktig. Videre har de kognitive kravene økt i Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9, mens det ikke er særlig endring i Matematikk 8. De kognitive kravene er betydelig høyere i Maximum 8 enn i Matematikk 8 i funksjonskapitlet. Konsekvensen av dette er at Maximum 8 legger bedre til rette for å bli kjent med kjerneelementene enn Matematikk 8. Det er likevel slik at læringsmuligheter i bøkene ikke gir garanti for læring. Lærebøkene skal tolkes av lærerne og elevene før de tilegner seg stoffet. Med en ny ambisiøs læreplan som inneholder programmering og utforskning er det derfor viktig at læreren selv får mulighet til opplæring i hvordan de best kan implementere læreplanen i klasserommet.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning 1

2. Teori 7

2.1 Begrepsavklaringer 7

2.1.1 Lærebok 7

2.1.2 Funksjon 7

2.1.3 Læringsmuligheter (Opportunity to learn) 8

2.2 Hvorfor forske på læreboken? 9

2.3 Læreboksforskning 12

2.4 Hvordan er læreboken bygget opp? 15

2.5 Matematisk kompetanse 16

2.6 Analytisk rammeverk 20

2.7 Transformasjoner av funksjoner 20

2.7.1 “Black-box"- forståelse av transformasjoner 21

2.7.2 “Translation-Verification Model" 23

2.8 “Mathematical Discourse in Instruction" 27

2.8.1 Mål 28

2.8.2 Eksempel 29

2.8.3 Oppgaver 32

2.9 “The Mathematics Task Framework" 33

2.10 Oppsummering 35

3. Metode 36

3.1 Innholdsanalyse 36

3.2 Utvalg 38

3.2.1 Valg av læreverk 39

3.2.2 Valg av læremidler 41

3.2.3 Definering av oppgaver 41

3.3 Transformasjoner 42

3.3.1 Definisjon av representasjoner 43

3.3.2 Tolking av transformasjonene i oppgavene 44

3.3.3 Tolking av vanskegrader av transformasjoner 46

3.3.4 Tolking av “bidirectional" transformasjoner 47

3.3.5 Tolking av sammensatte transformasjoner og ikke-kategoriserte oppgaver 47

3.3.6 Transformasjoner i forklarende tekst og eksempler 49
3.3.7 Kodeskjema for transformasjoner 49
3.4 Kodeprosedyre av læringsmål, eksempler og oppgaver 50
3.4.1 Læringsmål 50
3.4.2 Eksempler 50
3.4.3 Oppgaver 52
3.4.4 Begrunnelse for å bruke både MDITx og MTF 56
3.4.5 Kodeskjema for oppgavene 56
3.5 Kvalitet i studien 58
3.5.1 Validitet 58
3.5.2 Etiske perspektiv 60
3.5.3 Reliabilitet 61
3.6 Oppsummering 66
4. Resultat 67
4.1 Oppbyggingen av bøkene 67
4.2 Oppbyggingen av funksjonskapitlene 68
4.3 Læringsmål 69
4.3.1 Læringsmål i Faktor og Matematikk 8 69
4.3.2 Læringsmål i Maximum 70
4.3.3 Matematikk 8 og Maximum 8 71
4.4 Transformasjoner 73
4.4.1 Permutasjoner 73
4.4.2 Fra situasjon 74
4.4.3 Fra tabell 75
4.4.4 Fra graf 77
4.4.5 Fra formel 79
4.4.6 Vanskegrad på transformasjoner 81
4.4.7 “Bidirectional" transformasjoner 83
4.4.8 Parvise transformasjoner 84
4.4.9 Sammensatte transformasjoner 85
4.4.10 Spor etter transformasjoner i eksempler og tekst 86
4.5 “MDI analysis tool for textbook lessons" 88
4.5.1 Eksempler og eksempelrom 88
4.5.2 Oppgaver 92

4.6 MDITx og “The Mathematics Task Framework" 93
4.7 “The Mathematics Task Framework" 95
4.7.1 Kognitive krav i første leksjon 96
4.7.2 Kognitive krav i Maximum 97
4.7.3 Kognitive krav i Faktor og Matematikk 8 97
4.7.4 Kognitive krav i Matematikk 8 og Maximum 8 98
4.7.5 Kognitive krav i bøker fordelt etter læreplan 99
4.7.6 Kognitive krav i lærebøker fordelt etter forfattere 99
4.8 Oppsummering 100
5. Diskusjon 101
5.1 Læringsmål 101
5.2 Transformasjoner 106
5.2.1 “Bidirectional" transformasjoner 106
5.2.2 Parvise transformasjoner 107
5.2.3 Transformasjonen fra tabell til formel 107
5.2.4 Vanskegrad på transformasjoner og hvor vanlig de er i klasserommet 108
5.2.5 Sammensatte transformasjoner 109
5.3 Eksempler i lærebøkene 111
5.4 Kognitive krav 111
5.5 Kritisk blikk på egen studie 115
5.6 Forslag til videre forskning 116
6. Konklusjon 118
7. Litteraturliste 121
8. Vedlegg 131

Figurliste

Figur 1.1: Diagram som viser norske skoleelevers prestasjoner på TIMSS sammenlignet med et utvalg andre land 4
Figur 2.1: Den potensielt intenderte læreplanen 10
Figur 2.2: Modell over lærebokens plass i matematikkundervisningen 11
Figur 2.3: Intertwined Strands of Proficiency 17
Figur 2.4: "Black-box" modell av transformasjon fra tabell til graf 22
Figur 2.5: Oppgave 3.29 i Maximum 8 22
Figur 2.6: "Translation-Verification Model" 23
Figur 2.7: Lokalt og globalt perspektiv på en gitt transformasjon 24
Figur 2.8: Vanskegrad av transformasjoner 25
Figur 2.9: Vanskegrad av "bidirectional" transformasjoner 27
Figur 2.10: Mathematical Discourse in Instruction 28
Figur 2.11: "The Mathematics Tasks Framework" 33
Figur 3.1: Illustrasjon av en innholdsanalyseprosess 37
Figur 3.2: Oppgave 3.14 i Maximum 8 42
Figur 3.3: Oppgave 3.3 i Maximum 8 42
Figur 3.4: Mengderinger i Maximum 8 43
Figur 3.5: Oppgave 3.49a-1 i Maximum 8 44
Figur 3.6: Eksempel 3.4 i Faktor 10 45
Figur 3.7: Oppgave 3.13 i Faktor 10 45
Figur 3.8: Oppgave 3.48 i Maximum 8 46
Figur 3.9: Oppgave 4.26 i Matematikk 8 47
Figur 3.10: Oppgave 4.23 i Matematikk 8 48
Figur 3.11: Oppgave 2.18a i Maximum 9 48
Figur 3.12: Utdrag av kodeskjema for transformasjoner i lærebøkene 49
Figur 3.13: Eksempel 3.2 i Faktor 10 51
Figur 3.14: Oppgave 3.18 i Maximum 8 53
Figur 3.15: Oppgave 4.7a i Matematikk 8 53
Figur 3.16: Oppgave 3.48 i Maximum 8 54
Figur 3.17: Oppgave 4.18ab i Matematikk 8 54
Figur 3.18: Oppgave 4.16 i Matematikk 8 55
Figur 3.19: Oppgave 3.4 i Maximum 8 55

Figur 3.20: Oversikt over kodeskjema for MDITx og MTF-rammeverk 56
Figur 3.21: Oppgave 2.26d-i i Maximum 9 60
Figur 3.22: Oppgave 2.19 i Maximum 9......63
Figur 3.23: Oppgave 2.86a i Maximum 9 64
Figur 3.24: Oppgave 2.6 i Maximum 9......64
Figur 3.25: Oppgave 2.33 i Maximum 9 65
Figur 4.1: Oppgave 3.27 i Maximum 8 71
Figur 4.2: Eksempel 4.7 i Matematikk 8......71
Figur 4.3: Undring i Matematikk 8......72
Figur 4.4: Oppgave 4.19 i Matematikk 8 72
Figur 4.5: Oppgave 4.11 i Matematikk 8......74
Figur 4.6: Oppgave 4.15 i Matematikk 8......74
Figur 4.7: Oppgave 3.13 i Faktor 10......76
Figur 4.8: Undring i Matematikk 8......76
Figur 4.9: Oppgave 3.11 i Maximum 8......77
Figur 4.10: Oppgave 6.9 i Faktor 9 79
Figur 4.11: Oppgave 4.15 i Matematikk 8......80
Figur 4.12: Undring i Matematikk 8......80
Figur 4.13: Oppgave 3.16 i Maximum 8......80
Figur 4.14: Oppgave 3.58b i Maximum 8......80
Figur 4.15: Oppgave 3.56 i Maximum 8 81
Figur 4.16: Oppgave 2.75 i Maximum 9......81
Figur 4.17: Oversikt over vanskegrad på transformasjoner 81
Figur 4.18: Kategorisering av vanskegrad......83
Figur 4.19: Forklarende tekst hentet fra Maximum 8 88
Figur 4.20: Eksempel 9 i Maximum 9. 89
Figur 4.21: Eksempel 10 i Maximum 9 89
Figur 4.22: Utdrag fra Kort sagt i Maximum 8......91
Figur 4.23: Utdrag fra Kort sagt i Maximum 9......91
Figur 4.24: Oppgave 4.4 i Matematikk 8......96
Figur 5.1: Undring på s. 259 i Matematikk 8......104

Tabelliste

Tabell 2.1: “Translation processes" 21
Tabell 2.2: Eksempel på tabell som kan transformeres til en formel 24
Tabell 3.1: Oversikt over bruk av læreverk i Rogaland januar 2020 39
Tabell 3.2: Cohens Kappa for Faktor 9 og 10 og Maximum 9 61
Tabell 3.3: Viser hvordan en skal forstå ulike Cohens Kappa resultater 62
Tabell 3.4: Fordelingen av oppgavene i Maximum 9 i MTF-rammeverket kodet av meg og Strand og Heimstad (2018) 62
Tabell 3.5: Interrater reliabiliteten i oppgavene i Faktor og Maximum 9 analysert ved hjelp av tre ulike indekser 66
Tabell 4.1: Oversikt over lærebøkene som er med i studien 67
Tabell 4.2: Lærebøkene delt i sider, eksempler, oppgaver og deloppgaver 68
Tabell 4.3: Oversikt over differensierte og utfordrende oppgaveri lærebøkene 68
Tabell 4.4: Læringsmål i Faktor (Hjardar & Pedersen, 2014, 2015) og Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a) 69
Tabell 4.5: Læringsmål i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a) og Maximum 8 (Alseth et al., 2020) 70
Tabell 4.6: Transformasjoner i lærebøkene 73
Tabell 4.7: Fordeling av permutasjoner i lærebøkene 73
Tabell 4.8: Transformasjoner fra situasjon 74
Tabell 4.9: Transformasjoner fra tabell 75
Tabell 4.10: Transformasjoner fra graf 77
Tabell 4.11: Transformasjoner i første leksjon i lærebøkene 78
Tabell 4.12: Transformasjoner i først leksjon justert med delkapittel 2 fra Matematikk 8 79
Tabell 4.13: Transformasjoner fra formel 79
Tabell 4.14: Transformasjoner fordelt etter vanskegrad 82
Tabell 4.15: Transformasjoner fordelt etter teoretisk etablert tidsbruk 82
Tabell 4.16: Transformasjoner fordelt etter teoretisk etablert tidsbruk (moderert) 83
Tabell 4.17: “Bidirectional” transformasjoner 83
Tabell 4.18: “Bidirectional” transformasjoner fordelt etter vanskegrad 84
Tabell 4.19: Transformasjoner som parvis er inkludert i samme leksjon 84
Tabell 4.20: Transformasjoner per oppgave 85
Tabell 4.21: Sammensatte funksjoner i lærebøkene 86

Tabell 4.22: Oppgaver med flere transformasjoner 86
Tabell 4.23: Transformasjoner i eksempler og tekst i Faktor og Matematikk 8 87
Tabell 4.24: Transformasjoner i eksempler og tekst i Maximum 8 og 9 87
Tabell 4.25: Eksempler og eksempelrom i lærebøkene 88
Tabell 4.26: Kategorisering av eksempelrom 89
Tabell 4.27: Eksemplene gradert etter nivå 90
Tabell 4.28: Oppgavene fordelt i MDITx 92
Tabell 4.29: Leksjonene delt inn etter nivå..92
Tabell 4.30: Krysstabell av MDITx og MTF 93
Tabell 4.31: Krysstabell av MDITx og MTF uten repetisjon 94
Tabell 4.32: CTP-oppgaver fordelt på MTF og lærebøker 94
Tabell 4.33: MDITx med Lav-P og Høy-P fra MTF 95
Tabell 4.34: Lærebøkene fordelt i MTF-rammeverket 95
Tabell 4.35: Transformasjoner i Høy-M oppgaver 96
Tabell 4.36: Første leksjon i kapitlene i lærebøkene 96
Tabell 4.37: Kognitive krav i Maximum 97
Tabell 4.38: Kjikvadrattest av sammenhengen mellom Maximum 8 og 9 97
Tabell 4.39: Kognitive krav i Faktor og Matematikk 8 97
Tabell 4.40: Kognitive krav i Matematikk 8 og Maximum 8 98
Tabell 4.41: Kjikvadrattest av tendens i kognitive krav i Matematikk 8 og Maximum 9 98
Tabell 4.42: Kognitive krav fordelt etter bøker skrevet til ulike læreplaner 99
Tabell 4.43: Kjikvadrattest av tendens i kognitive krav fra læreplaner.....................................99
Tabell 4.44: Kognitive krav fordelt etter forfattere 99
Tabell 4.45: Kjikvadrattest av tendens i sammenligning av lærebøker fordelt etter forlag....100

1 Innledning

Skoleverket har gått gjennom en viktig fase de siste årene. Fra høsten 2020 er det iverksatt nye læreplaner i grunnskolen og på videregående utdanning. I forkant av dette har læreplanene vært på høringer flere ganger og mange lærere, forskere, politikere, byråkrater og andre interesserte har kommet med forslag til hvordan disse bør se ut. Læreplanarbeidet er politikerne, byråkratene og forskernes mulighet til å påvirke det som foregår i klasserommet. Nå er læreplanen ferdig utarbeidet og den skal nå fortolkes av lærerne i klasserommet. Forskning kan imidlertid tyde på at det historisk har vært et gap mellom intensjonene i læreplanen, og hva som faktisk foregår i klasserommet rundt om i verden. Den transformative effekten av reformer innenfor skolematematikken synes å være lav (Cai et al., 2017). Det er lærerne med sine daglige avgjørelser som definerer læringsmulighetene til elevene (Chávez-López, 2003). Det finnes og et gap mellom hva som blir regnet for god undervisning av forskerne, og hva som faktisk foregår i klasserommet (Silver & Lunsford, 2017).

Det som tradisjonelt har vært svært definerende for klasseromsundervisningen er læreboken. Den er designet for å implementere læreplanens intensjoner inn i klasserommet (Valverde et al., 2002). Læreboken opererer som en bro mellom læreplanens intensjoner og klasserommets aktiviteter og oppgaver som er formet av de samme intensjonene (Schmidt et al., 2002). Det er derfor ikke overraskende at læreboken brukes av mange som grunnlag for undervisningen. Det ble i forbindelse med TIMSS 2011 gjennomført en undersøkelse blant norsk matematikklærere på 8. trinn. Den viste at 97 % av lærerne brukte læreboken som grunnlag for undervisningen (Espeland, 2017). Tidligere undersøkelser viser og at bruken av læreboken er særlig stor i nordiske land (Valverde et al., 2002). Det kan med andre ord synes som om lærere i Norge har stor tiltro til læreboken. Årsaken til dette kan være at en lærebok i matematikk tilbyr sikkerhet med tanke på oppfyllelse av læreplanen, og frihet fra ansvaret knyttet til å sikre elevene god kvalitet på undervisningen (Love & Pimm, 1996). Hvorvidt læreboken faktisk oppfyller læreplanen er imidlertid et ubesvart spørsmål. Etter at det i år 2000 ble bestemt å legge ned den statlige ordningen som undersøkte hvorvidt lærebøkene faktisk oppfylte læreplanen, har en ingen godkjenningsordning av norske lærebøker (Espeland, 2017; Kongelf, 2019).

Forskning på lærebøker i Norge og internasjonalt er derfor viktig for å sikre at lærebøkene holder den nødvendige kvaliteten. Trouche og Fan (2018) hevder at forskning på læremidler som matematikklærerne anvender i undervisningen er et nytt fagfelt som har vokst frem de siste tre tiårene innenfor det internasjonale matematikkdidaktikk-fagfelleskapet. I 2016, under den trettende internasjonale kongressen for matematikkundervisning, ble det satt ned en komite som jobber med forskning på læremidler som anvendes i matematikkundervisningen (Trouche & Fan, 2018). Blant spørsmål de ønsket å undersøke var hvilken rolle lærebøker spiller i matematikkundervisningen, hvordan digitaliseringen påvirker rollen til læreboken og dermed om læreboken er i ferd med å gå fra å være en autoritet til å bli et supplerende læringsmateriell.

Lokalt i Norge viser nyere forskning at de norske matematikkbøkene på ungdomstrinnet og i videregående skole har mangler. Espeland (2017) skriver i sine implikasjoner for lærerressurser at for at elevene skal utvikle matematisk kompetanse, slik Kilpatrick et al. (2001) skriver om, så er matematikkbøkene, og andre ressurser som læreren kan bruke, i fremtiden nødt til å tilby "research based expositions, example tasks and assigned tasks designed to challenge students and to provide opportunities for new learning to occur" (Espeland, 2017, s. 279). Det samme finner en hos Kongelf (2019). Han hevder å ha funnet at lærebøkene ikke tilfredsstiller læreplanens krav innenfor algebra og problemløsning. Videre skriver han at lærebokforfattere og forlag nå etter hans studie har fått signaler om at lærebøkenes kvalitet kan forbedres for at elevene skal bli eksponert for eksempler og oppgaver som fremmer mer varig læring. Kongelf (2019, s. 81) skriver videre at forhåpentligvis "kan studien min [..] være en bidragsyter til at læremiddel som blir publisert i forbindelse med ny læreplan i 2020 i større grad er i tråd med innholdet i den gjeldende læreplan og oppdatert på matematikkdidaktisk forskning".

Det er imidlertid ikke bare i Norge at det er problemer med at lærebøkene ikke oppfyller læreplanen. Fan et al. (2013) peker på at de fleste lærebok-undersøkelser, i større eller mindre grad, viser at læreboken ikke klarer å presentere det matematiske innholdet på en god nok måte. Videre hevder disse forskerne og at det er forskjell mellom læreplanmålene og de målene lærebøkene prøver å oppnå. Lærebøkene klarer i for liten grad å formidle det intenderte læringsmålet som læreplanen setter.

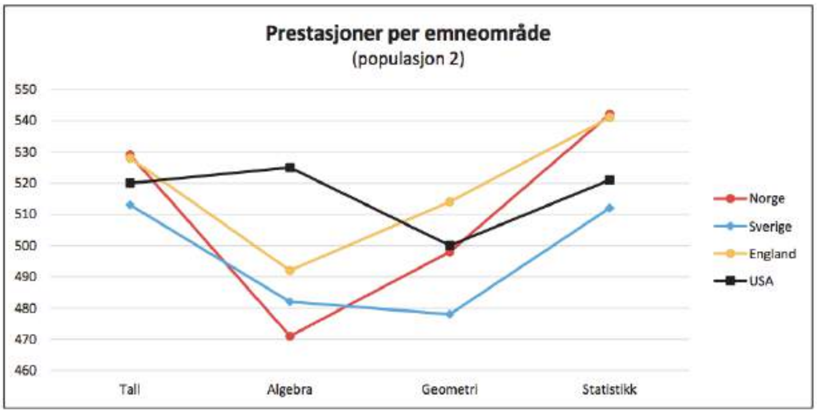
En del av forklaringen til hvorfor det kan være sånn er at lærebøkene er skrevet til og for elevene (Kang & Kilpatrick, 1992), og lærebøkene må derfor være skrevet på en slik måte at elevene skal kunne jobbe med de uten hjelp (Love & Pimm, 1996). Dette påvirker hvordan matematiske ideer fremlegges, hvilket språk som brukes og hvilke oppgaver som gis til elevene. Det gjør igjen at forklaringer, eksempler og oppgaver må forenkles og dette kan redusere de matematiske kravene som stilles av oppgavene i boken ved at oppgavene blir mer formaliserte og rutinepregede (Love & Pimm, 1996).

Selv om forskningen på læreboken kan indikere at den har mangler har læreboken allikevel stor plass i et klasserom i matematikk (Mullis et al., 2012). Autoriteten til læreboken er i det enkelte klasserom avhengig av hvordan den enkelte lærer forholder seg til den. Qi et al. (2018) hevder at de i sin studie fant at i hvor stor grad en lærer anvender læreboken henger sammen med hvor mye erfaring læreren har som underviser. De hevder at bruken av læreboken synker ettersom læreren blir mer erfaren.

Det er ikke bare lærerens erfaring som påvirker bruken av læreboken i klasserommet. Lærebokens oppbyggingen setter og premisser for undervisningen og hvordan den gjennomføres (Dolev & Even, 2015), mens antall sider i boken påvirker hvor mye tid som settes av til et emne (Chávez-López, 2003). Videre er sjansen for at et emne arbeides med i klasserommet liten dersom det ikke er omtalt i læreboken (Alajmi, 2012; Tarr et al., 2006). Dette gjenspeiler seg i resultater som viser at emner som er omtalt i bøker er mer sannsynlig at elevene behersker enn emner som ikke er det (Stein et al., 2007).

Wang og McDougall (2019) antar at lærebøkenes oppbygging påvirker i hvilken grad elevenes læring er effektiv, hvilken kognitiv forståelse elevene utvikler og hvor gode de blir i matematikk. Van den Ham og Heinze (2018) innvender imidlertid at forskning på en slik påvirkning kan være noe usikker da de fleste studiene som er gjennomført på lærebøker har et lite utvalg, variasjonen i design av forskningsstudiene er stor, og lærebøkene som sammenlignes bygger på forskjellig læreplan. Når lærebøkene bygger på forskjellige læreplaner kan en ikke være sikker på at forskjellen i elevprestasjon skyldes læreboken, eller om den kan tilskrives læreplanen. De følger imidlertid Wang og McDougall (2019) på at det ser ut til at lærebøkene påvirker læringsmulighetene til elevene. Det som imidlertid synes klart er at lærebøkene er viktig for klasserommet når det gjelder hvilke læringsstrategier og aktiviteter læreren tar i bruk i klasserommet (Son & Hu, 2016; Valverde et al., 2002) og at flere studier peker i retning av at lærebøkene kan påvirke elevprestasjoner (Son & Hu, 2016; Valverde et al., 2002; Törnroos, 2005; van den Ham & Heinze, 2018).

Med dette som bakgrunn ønsker jeg i min oppgave å undersøke hvilke læringsmuligheter lærebøkene gir elevene og på hvilke måter, om noen, læringsmulighetene har endret seg etter innføringen av ny læreplan. Oppgavens omfang gjør imidlertid at det blir for omfattende å ta for seg hele læreplanen på ungdomsskolen, så jeg har derfor valgt meg ut et emne. Emnet jeg har valgt å undersøke er funksjoner. Funksjoner er en undergruppe av det mer omfattende emnet algebra. Begrunnelsen for å velge emnet funksjoner er for det første at norske elever scorer dårlig på algebra målt opp mot de andre emnene i matematikk ifølge siste publiserte TIMSS undersøkelse (Bergem, 2016).



Figur 1.1: Diagram som viser norske skoleelevers prestasjoner på TIMSS sammenlignet med et utvalg andre land (Bergem, 2016, s. 36).

Figur 1.1 viser at sammenlignet med land som England, USA og Sverige scorer norske ungdomsskoleelever klart dårligere på algebra, mens de på andre områder som tall og statistikk gjør det bedre enn elever fra nevnte land.

En annen grunn til å undersøke funksjoner er at funksjoner er et emne som elevene syns er særlig utfordrende. Noe av grunnen til at elevene synes temaet er utfordrende er at de har vanskeligheter med å skille mellom funksjonen selv og de ulike måtene å uttrykke den samme funksjonen på (Son & Hu, 2016). Dette underbygger Sfard (1992) gjennom å hevde at funksjoners ulike uttrykksmåter ikke er noe elevene klarer å ta inn over seg, og at en del elever i stor grad oppfatter funksjoner utelukkende som algebraiske uttrykk. Videre kan det være utfordrende for elever at funksjoner kan oppfattes både som en prosedyre og et objekt (Gray & Tall, 1994). For eksempel kan funksjonen $y=4x+2$ presenteres av en lærer som et eksempel på en lineær funksjon, mens en elev kan oppfatte den som en prosedyre for å tegne en graf fra en likning . Forfatterne av læreverket Maximum skriver at siden de av erfaring vet at funksjonsbegrepet er vanskelig for flere elever, velger de å legge dette tidlig i 9. trinn slik at elevene får tid til å modne og forstå emnet innen de skal begynne på videregående skole (Tofteberg et al., 2014b).

En tredje begrunnelse for å velge funksjoner som emne er at funksjoner er såpass sentralt i matematikken at det burde være en av hjørnesteinene i lærebokanalyser, men at det er svært lite forskning på dette emnet (Son & Hu, 2016). Et viktige bidrag som er verdt å nevne i denne sammenhengen er Mesa (2004). Hun undersøkte 24 bøker sin presentasjon av funksjoner i ungdomsskolen.

Siden forskning kan tyde på at reformer av læreplanen har hatt lav effekt tidligere (Cai et al., 2017) ønsker jeg i denne oppgaven å undersøke på hvilke måter den nye læreplanen og de tilhørende bøkene gir elevene læringsmuligheter og sammenligne om disse er endret fra lærebøkene skrevet til den forrige revideringen av læreplanen.

Problemstilling:

Hvordan er elevenes læringsmuligheter påvirket av lærebøker skrevet etter fagfornyelsen sammenlignet med lærebøker skrevet til den forrige læreplanen?

Besvarelsen av problemstillingen gjøres ved hjelp av tre ulike tilnærminger. For det første undersøker jeg lærebøkenes læringsmål og setter disse opp mot kompetansemålene i læreplanen.

Den andre tilnærmingen er at jeg undersøker læringsmulighetene i eksemplene og oppgavene. Dette gjør jeg på to måter. Jeg undersøker hvilke transformasjoner elevene møter i oppgavene og eksemplene. Det å gjennomføre en transformasjon innebærer å endre en funksjons uttrykksform fra en representasjon til en annen. I tillegg til dette undersøker jeg hvordan de utarbeidede eksemplene og oppgavene legger til rette for elevlæring ved hjelp av rammeverket "Mathematical Discourse in Instruction analytic tool for textbooks lessons" (MDITx).

Til sist anvender jeg "Task Analysis Guide" i "The Mathematical Task Framework" til å undersøke de kognitive kravene i oppgavene. Disse kognitive kravene knytter jeg i diskusjonsdelen opp mot fem matematiske ferdigheter beskrevet av Kilpatrick et al. (2001), mens jeg i teoridelen drøfter sammenhengen mellom matematiske ferdigheter og kjerneelementene i læreplanen. Jeg bruker derfor de kognitive kravene i oppgavene til å undersøke i hvilken grad lærebøkene gir elevene muligheter til å jobbe med kjerneelementene i matematikkfaget. For å sikre at eventuelle forskjeller i lærebøkene skrevet til de ulike læreplanene faktisk kan tilskrives forskning og læreplanen har jeg analysert lærebøker skrevet av de samme forfatterne. Det vil si at jeg har analysert Faktor (Hjardar & Pedersen, 2014, 2015) og Matematikk 8 (Hjardar og Pedersen, 2020a) og Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a) og Maximum 8 (Alseth et al., 2020). Forfatterne av Maximum 8 har fått med seg en ny forfatter, men de fire andre er med på denne oppdateringen av Maximum-verket. I neste del beskriver jeg det teoretiske bakteppet for studien.

2 Teori

I denne delen vil jeg starte med å definere utvalgte begreper. Deretter følger en begrunnelse for hvorfor det er viktig å forske på læreboken, en oppsummering av tidligere lærebokforskning, utledning av matematisk ferdigheter og en gjennomgang av det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for denne oppgaven.

2.1 Begrepsavklaringer

2.1.1 Lærebok

En lærebok er essensiell for å forstå læringsmulighetene til elevene. Den definerer hvordan elevene forstår og erfarer faget (Valverde et al., 2002). Kongelf (2019, s. 21) definerer læreboken som "den tradisjonelle fysiske klassetrinns-spesifikke boken som brukes til undervisning og læring av matematikk i skolen". Vanligvis utgir forlagene grunnbøker, der en finner forklarende tekst, eksempler og oppgaver, i tillegg til oppgavebøker og digitale nettsteder. Når jeg skriver om lærebøker i denne masteren er det grunnbøkene jeg tenker på og som oftest kapitlene som handler om funksjoner. Det er disse jeg kommer til å undersøke.

2.1.2 Funksjon

Det britiske leksikonet Britannica (u.å.) definerer en funksjon på følgende måte:

"Function, in mathematics, an expression, rule, or law that defines a relationship between one variable (the independent variable) and another variable (the dependent variable). Functions are ubiquitous in mathematics and are essential for formulating physical relationships in the sciences. The modern definition of function was first given in 1837 by the German mathematician Peter Dirichlet". (Britannica, u.å.)

En funksjon er med andre ord en relasjon mellom en uavhengig og en avhengig variabel. Sagt på en annen måte vil et element i mengden M gi et og bare et element i mengde N etter at elementet har blitt behandlet av et matematisk uttrykk eller en regel om relasjonen mellom de to mengdene. Kalchman og Koedinger (2005) hevder at denne formelle definisjonen kan forvirre elevene siden den ikke forteller elevene hva en funksjon vil være for dem. Ifølge læreplanens kjerneelement matematiske kunnskapsområder skal elevene bruke funksjoner til å “studere og modellere endring og utvikling” (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Målet er altså at funksjoner skal være et redskap elevene kan brukes til å løse problemer.

Kalchman og Koedinger (2005) hevder imidlertid at funksjoner for matematikere fremstår som noe helt annet enn hvordan skoleelever oppfatter funksjoner. I stedet for å se funksjoner som et verktøy til å løse kompliserte problemer, ser mange elever på funksjoner som problemet i seg selv. Dette mener de skyldes at funksjoner læres på feil måte. De trekker frem tre viktige prinsipper som må ligge til grunn. Det første prinsippet innebærer å bygge den nye kunnskapen på kunnskaper og forståelse som elevene har fra før. Dette gjøres ved å knytte funksjons-relasjoner som elevene har i sin hverdag opp mot den formelle algebraen. Det andre prinsippet er at elevene må utvikle en begrepsforståelse av hva funksjoner er, ikke bare hvordan en beveger seg mellom de ulike representasjonene. Det nye med funksjoner er at de nå skal jobbe med en variabel som er avhengig av en annen variabel. De skal ikke lenger bare finne et svar på hva en ukjent er, men jobbe med en representasjon som forteller noe om en relasjon mellom to objekter. Det tredje prinsippet handler om at elever må ha et metakognitivt blikk på sin egen læring. Når matematikken blir mer abstrakt er det viktigere å tenke gjennom om løsningene sine kan virke logiske.

En funksjon forstås i denne oppgaven som en relasjon mellom to variabler som kan være representert gjennom tekst, tabell, formel og graf. Elevene jobber med funksjoner når de transformerer relasjonen mellom variablene fra en representasjon til en annen.

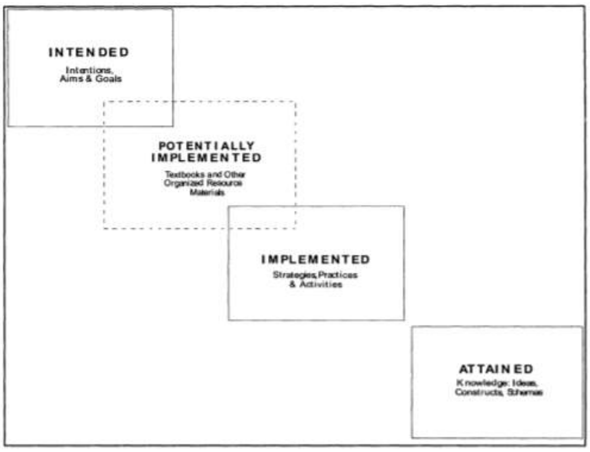
2.1.3 Læringsmuligheter (“Opportunity to learn”)

Begrepet “opportunity to learn” (OTL) kan oversettes til norsk som læringsmuligheter.
OTL kan en finne røtter fra tilbake til Carroll (1963). Modell beskriver hvordan en kan gi elevene muligheten til å lære. Modellen er egentlig utviklet for læring av fremmedspråk, men har blitt anvendt i et bredt utvalg fagfelt etter at den kom ut (Carroll, 1989). Han hevder i sin modell at hva elevene lærer er avhengig av hvor mye tid de har til å lære sammenlignet med tiden de trenger for å lære. Variabler som forkunnskaper, kvalitet på undervisning, tid, elevens evner og konsentrasjon utgjør deler av det som avgjør muligheten eleven har til å tilegne seg læringsmålet. I boken “Mathematical Mindset” hevder Boaler (2015) at læringsmuligheter er den viktigste betingelsen for læring. Hun peker på at læringsmuligheter enkelt forklart er at elever som gis kvalitetsundervisning vil lære mer enn de som ikke gjør det. Jeg vil vise i punktene 2.2 og 2.3 nedenfor at læreboken er en sentral del av

matematikkundervisningen og i forlengelsen av dette definerer hvilke læringsmuligheter elevene får i klasserommet. Jeg vil der etablere at læreboken er den potensielt implementerte læreplanen (Valverde et al., 2002) som er påvirket av den skrevne læreplanen og som igjen påvirker lærerens valg av metode, eksempel og oppgaver som gis til elevene. Hvordan elevene tolker dette blir til slutt den tilegnede læreplanen. De ulike valgene som er tatt av lærebokforfattere kan føre til at elevene får ulike læringsmuligheter i klasserommet (Haggarty & Pepin, 2002), noe som igjen fører til forskjeller i hvor mye elevene lærer (Wijaya et al., 2015; Törnroos, 2005; Xin, 2007).

2.2 Hvorfor forske på læreboken?

Et betimelig spørsmål en kan stille seg er hvorfor en skal forske på lærebøker. En viktig begrunnelse for dette er at lærebøker har en sentral plass i klasserommet (Espeland, 2017; Valverde et al., 2002; Schmidt et al., 2002). Lærebøkene er skrevet ut i fra en læreplan, som de ønsker å oppfylle. Tradisjonelt har lærebøkene vært regnet som en del av den intenderte læreplanen (Fan et al., 2013). Dette justerte Schmidt et al. (2002) og Valverde et al. (2002) ved å hevde at lærebøkene er mediatoren i klasserommet mellom den intenderte og den implementerte læreplanen. Gjennom TIMSS ble det presentert en treparts modell for å forklare hvordan læreplanen blir iverksatt (Valverde et al., 2002). Først designes læreplanen etter en intensjon. Videre implementeres den intenderte læreplanen. Til slutt sitter elevene igjen med den oppnådde læreplanen i klasserommet. Valverde et al. (2002) argumenterte for å legge til et fjerde element, potensielt implementert læreplan, mellom den intenderte og den implementerte læreplanen. Dette fjerde elementet består av læreboken som en konkretisering av den intenderte læreplanen, som en mediator for den implementerte læreplanen. Valverde et al. (2002) presiserer at de la til begrepet potensielt for å peke på at læreboken kan implementeres, av læreren, på andre måter enn det læreboken intenderer. Ved å forske på den potensielt implementerte læreplanen får en altså ikke tilgang til hva som skjer i klasserommet, men en undersøker læringsmulighetene som læreboken gir.

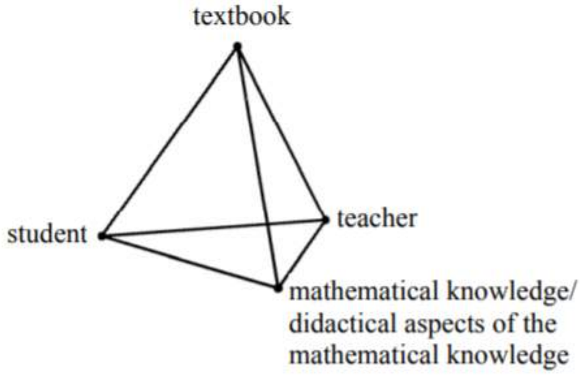


Figur 2.1: Den potensielt intenderte læreplanen (Valverde et al., 2002, s. 13).

Flere andre forskere peker og på viktigheten av læreboken. Haggarty og Pepin (2002) hevder at læreboken påvirker læringsmulighetene til elevene i klasserommet ved å påvirke måten læreren legger frem læringsmålet, forklaringer, eksempler og oppgaver. At læreboken er viktig underbygges og av Johansson (2006) sin studie i tre svenske klasserom. I studien undersøkte hun hvorvidt en gitt sekvens i undervisningen var direkte, indirekte eller ikke knyttet til læreboken. Hun konkluderte at det bare i sjeldne tilfeller var slik at læreboken var helt fraværende. Det var som regel enten en direkte eller indirekte forbindelse til læreboken. En direkte forbindelse vil si at lærer og elever gikk gjennom et eksempel i boken eller jobbet med tilhørende oppgaver, mens en situasjon der en kunne gjenfinne utsagn og eksempler i boken uten en eksplisitt uttalt forbindelse, ble kategorisert som en indirekte forbindelse.

Charalambous et al. (2010) hevder at selv om en ved å forske på lærebøker bare får tilgang til den intenderte delen av læreplanen, og ikke den implementerte, så kan en uansette se på forskjeller i bøkene og hvilke muligheter lærebøkene medierer inn i klasserommet. Senk et al. (2014) hevder sågar at læreboken er en av de aller beste indikatorene på elevers læring. I deres studie ga lærebok-indikatoren bedre resultat enn de andre indikatorene etter at de hadde kontrollert for viktige faktorer som forkunnskap og lærerens påvirkning. En studie som sammenlignet TIMSS resultater og lærebøker fant at det var forskjell mellom læringsmålene og hvilke muligheter elevene blir gitt til å oppnå disse. Ingen av de tre bøkene som ble undersøkt klarte fullt ut å oppfylle læringsmålene som læreplanen definerte (Son & Hu, 2016).

Lærebokens plass i klasserommet underbygges videre av Rezat (2006). Han hevder at forholdet mellom elevene, læreren og deres matematiske kunnskaper alle er påvirket av læreboken i klasseromssituasjonen.



Figur 2.2: Modell over lærebokens plass i matematikkundervisningen. (Rezat, 2006, s. 413).

I Rezat (2006) sin modell viser hvert av de triangulære sidene i tetraederet en del av lærebokens anvendelse. Den første trekanten elev - lærer- lærebok peker på at eleven er den aktive parten som anvender læreboken, med læreren som mediator. Den andre trekanten elev - lærebok - matematisk kunnskap henspeiler på elevens arbeid med læreboken på egenhånd. Her er læreboken mediator for å oppnå matematisk kunnskap. Den tredje trekanten lærer - lærebok - matematisk kunnskap (didaktiske aspekter) beskriver hvordan læreren anvender læreboken. Rezat (2006) hevder at læreren er den medierende effekten i hele systemet, men for denne trekanten er læreren subjektet som bruker læreboken som medierende ressurs for å tilegne seg didaktisk kunnskap som læreren kan hente ut fra læreboken. Den fjerde trekanten elev - lærer - matematisk kunnskap peker på sammenhenger der læreren viser elevene matematisk kunnskap som er representert i læreboken uten å anvende læreboken. Rezat (2006) peker på flere forskningsartikler som trekker frem en slik måte å anvende læreboken (Valverde et al., 2002; Woodward & Elliot, 1990). Denne modellen har senere blitt enda mer nyanserik med enda flere momenter, som i større grad tar inn over seg kompleksiteten i klasserommet (Rezat & Sträßer, 2017). I den samme artikkelen hevder Rezat og Sträßer (2017) at læreboken er viktig fordi matematikk i utgangspunktet er en ikke-materiell vitenskap og dermed trenger elevene ulike representasjoner av matematikk. Denne utfordringen løser læreboken ved å tilby en bevisst ordnet fremlegging av representasjonene i matematikk. Lærebøker er derfor viktige i matematikkundervisningen. Dette fordi de i utgangspunktet skal gi et nøyaktig og sannferdig bilde av den matematikk som elevene og lærerne skal jobbe med.

Ovenforstående avsnitt peker i retning av at læreboken er viktig og at den er med på å definere hvilke læringsmuligheter den enkelte elev har i klasserommet. Törnroos (2005) hevder imidlertid at sammenhengen mellom læringsmuligheter og elevresultater har vært vanskelig å dokumentere. Sammenhengen kan best dokumenteres dersom en forsker over flere år. Videre var det først når en begynte å sammenligne læringsmuligheter og elevprestasjoner mellom land at en fant en positiv korrelasjon. Det som gir best korrelasjon mellom læringsmuligheter og elevlæring er å gjennomføre en emnebasert undersøkelse som sammenligner læringsmulighetene de enkelte lærebøkene gir (Floden, 2002; Törnroos, 2005).

Törnroos (2005) hevder at i hvilken grad lærebøker kan forklare elevers prestasjoner avhenger av hvordan undersøkelsen gjennomføres. En innholdsanalyse som undersøker hvor mange sider og oppgaver som dekker de ulike temaene gir lav korrelasjon med elevprestasjon. En analyse som derimot undersøker et enkelt emne og sammenligner flere lærebøker nasjonalt kan derimot i mye større grad forklare elevprestasjoner. En utfordring med læringsmuligheter er at det er viktig å være klar over at det er ikke gitt at dersom elevene gis læringsmuligheter så vil det automatisk gi læring (Törnroos, 2005). En annen utfordring knyttet til læringsmuligheter, særlig knyttet til enkeltemne studier, er at det kan overse sammenhengen til andre emner i læreboken (Charalambous et al., 2010). Det kan og tenkes at en dokumentert forskjell i læringsmuligheter som gir ulikt elevresultat egentlig kan tilskrives forskjeller i den enkelte læreplan. Dette er særlig viktig å ta i betraktning når en gjennomfører en internasjonal undersøkelse (van den Ham & Heinze, 2018).

Oppsummert kan jeg konkludere at læreboken fremstår som en mediator i klasserommet. Den er gitt mye plass og autoritet i klasserommet. Den påvirker hvordan undervisningen legges opp, hvilke oppgaver og eksempler som blir presentert og hvilke emner og hvor lang tid det skal brukes på de ulike emnene. Det finnes og enkeltstudier som tyder på at læreboken påvirker elevresultater. Det er derfor naturlig å forske på læreboken.

2.3 Lærebokforskning

Et forsøk på å kategorisere lærebokforskningen ble fremsatt av Charalambous et al. (2010). De har delt forskningen i tre deler. Det er horisontal, vertikal og kontekstuell del. I horisontal

lærebokforskning blir læreboken undersøkt som en enhet der generelle trekk ved læreboken blir analysert. Dette er for eksempel hvordan boken er delt inn, antall sider tilknyttet ulike emner, antall oppgaver m.m. Kritikerne av denne metoden påpeker at den ikke klarer å belyse de ulike læringsmulighetene elevene får fordi bøker i ulike land vektlegger ulike ting og fremlegger det på forskjellige måter. Dermed vil ikke en slik analyse kunne plukke opp hvilke måter emner og oppgaver blir presentert på.
I vertikal lærebokforskning undersøker en hvordan et emne eller matematisk konsept presenteres og anser læreboken som et læringsmiljø der kunnskapen konstrueres. Kritikere av denne metoden hevder at den ikke fanger opp hvordan emnet henger sammen med andre emner i læreboken. På den annen side gir den bedre innblikk enn en horisontal analyse på hvilke læringsmuligheter elevene får. Den tredje kategorien, kontekstuell, undersøker hvordan læreboken anvendes enten av lærer eller elever. Charalambous et al. (2010) hevder at et rammeverk bør inneholde både en horisontal og en vertikal del for å kunne være kontekstuelt.

De siste to tiårene har det vokst frem tre ulike trender innenfor intendert læreplanforskning (Lloyd et al., 2017). For det første analyseres problemer i lærebøkene i større grad. Denne måten å forske på kommer fra Doyle (1983, 1988). Han utviklet fire kategorier: hukommelsesoppgaver, algoritme eller rutineoppgaver, forståelsesoppgaver og meningsoppgaver. Alle oppgavene i matematikkbøkene kan defineres innenfor en av disse kategoriene. “Mathematical task framework” (MTF) utviklet av Stein et al. (1996) bygger videre på disse kategoriene. Dette rammeverket anvender jeg selv i min studie og jeg kommer til å definere kategoriene i detalj i punkt 2.9. Dette rammeverket har senere blitt anvendt i flere studier (Cai et al., 2002; Jones & Tarr, 2007; Cai et al., 2010), men og andre rammeverk har blitt brukt til å analysere matematiske oppgaver (Fan & Zhu, 2007; Vincent & Stacey, 2008; Lithner, 2004).

Den andre trenden er å studere et utvalgt matematisk emne gjennom en detaljert og dybdeorientert analyse (Lloyd et al., 2017). Disse er blant andre gjennomført innenfor emner som likninger (Cai et al., 2010), brøkregning (Charalambous et al., 2010) og tekstoppgaver (Xin, 2007). Det som kjennetegner disse er at de undersøker hvilke potensielle læringsmuligheter det enkelte emne har og om lærebøkene som undersøkes klarer å gi elevene disse læringsmulighetene (Lloyd et al., 2017). Den tredje trenden er at flere studier har et historisk perspektiv. Enkelte studier undersøker hvordan forskningsfeltet har utviklet seg de siste hundre årene, mens andre undersøker hvordan en reform påvirker den intenderte læreplanen innad i et land (Lloyd et al., 2017).

I min studie kommer jeg til å følge deler av alle disse trendene. For det første skal jeg blant annet undersøke oppgavene i de lærebøkene jeg har valgt ut og kategorisere disse. For det andre har jeg valgt meg ut enkeltemnet funksjoner og skal se på hvilke læringsmuligheter dette gir. For det tredje skal jeg se om LK20 har endret måten lærebøkene presenterer emnet funksjoner sammenlignet med lærebøker skrevet til den reviderte læreplanen i 2013.

Rezat et al. (2018) hevder i en oppsummerende tilstandsrapport for lærebokforskning i matematikk at forskningen har flyttet fokus fra lærebokanalyse til hvordan læreboken anvendes. Det at fokuset flyttes over på hvordan læreboken anvendes henger sammen med at lærebokens autoritet i klasserommet endres. Pepin (2018) hevder at interaktive læringsaktiviteter, videoforelesninger, e-lærebøker og andre læringsressurser har flyttet inn i klasserommet og tilsidesatt læreboken som eneste autoritet. Det er imidlertid fortsatt sånn at læreboken er den viktigste ressursen i klasserommet. I forlengelsen av dette påpeker Rezat et al. (2018) at det fortsatt er mange spørsmål som er ubesvart i lærebokforskningen knyttet til innhold og hvordan innholdet skal presenteres i læreboken. Det er ikke etablert hvordan lærebøkene på en best mulig måte kan gjøre matematiske emner og ferdigheter tilgjengelige for elevene og lærerne. Dette underbygger Rezat et al. (2018) ved å peke på store forskjeller i mål og midler som lærebøkene i ulike land har implementert.

I Norge er det tidligere skrevet en del masteroppgaver om lærebøker i matematikk. Resvoll (2014), Johnsen og Storaas (2015), Bergheim (2017) og Strand & Heimstad (2018) er eksempler på dette. Her vil jeg særlig trekke frem Bergheim (2017) og Strand og Heimstad (2018) som har utført en lærebokanalyse på to av de samme lærebøkene som jeg anvender. De har undersøkt hvilke kognitive krav som elevene gis gjennom oppgavene i lærebøkene på ungdomsskolen.

Det er i de senere årene og skrevet doktorgrader om lærebøker i Norge. Espeland (2017) har undersøkt hvordan algebra blir presentert for elevene i videregående skole gjennom læreboken, oppgaver og hvordan det blir fremlagt i klasserommet. Kongelf (2019) har undersøkt om lærebøkene på ungdomsskolen i Norge oppfyller læreplanen innenfor emnene algebra og i arbeidet med problemløsningsoppgaver. Dette har han forsket på ved å se på i hvilken grad ulike heuristiske metoder presenteres i eksempler og oppgaver som elevene jobber med. Han hevder videre at introduksjonen i algebra i norske lærebøker ikke oppfyller læreplanens mål om å generalisere tallæren. Han hevder at selv om generalisert tallære er det som praktiseres i skolen, gjøres ikke dette på en god nok måte. Dette anser han som et problem ved å vise til Mason (1996), som hevder at generalisering av tallæren er det viktigste en elev kan gjøre for at eleven skal beherske algebra.

Det foregår med andre ord mye interessant forskning på området. Forskningsfeltet er i utvikling, men fortsatt er fagfeltet ganske nytt og mye er ikke undersøkt (Rezat et al., 2018). Det er og knyttet noen metodologiske problemer knyttet til intendert læreplanforskning. Det er for eksempel i for liten grad utviklet retningslinjer for hvordan teksten i lærebøkene skal analyseres (Nicholls, 2003). Det finnes nesten 20 mulige dimensjoner en kan måle intendert læreplan på (Lloyd et al., 2017). Eksempler på dette er i hvilken rekkefølge tema blir presentert, på hvilket klassetrinn emner blir innført, kognitive krav i oppgaver og bruk av teknologi (National Research Council, 2004). Det er heller ingen enighet om hva i læreboken en skal studere. Holder det med et par delkapitler, et kapittel, en lærebok, flere lærebøker på samme trinn? En er heller ikke enige om hvilke enheter en skal bruke. I forskningen frem til nå har en blant annet anvendt antall sider, oppgaver, setninger, eksempler og nøkkelord (Lloyd et al, 2017). Hvilke type materiell og forskningsenheter en skal bruke henger ifølge Lloyd et al. (2017) tett sammen med hvilket forskningsspørsmål en undersøker, men de hevder samtidig at dette virkelig må begrunnes med tanke på om de valgte enhetene og materialene er egnet til å besvare forskningsspørsmålet.

2.4 Hvordan er læreboken bygget opp?

Ifølge Love og Pimm (1996) er lærebøker bygget opp etter en eksponering-eksempel-oppgave-modell. Den presenterer emnet på en diskursiv måte og anvender spørsmål, introduksjonsoppgaver og visuelt materiell. Teksten er som regel utformet med et mål om at elevene skal ta aktiv del i læringen og starte læringsprosesser, men teksten er ofte utformet på en slik måte at det er overtydelig hva en vil at elevene skal finne ut. Det er derfor ikke overraskende at elevene ofte hopper over eksponerings-delen av modellen (Love & Pimm, 1996; Weinberg et al., 2012).

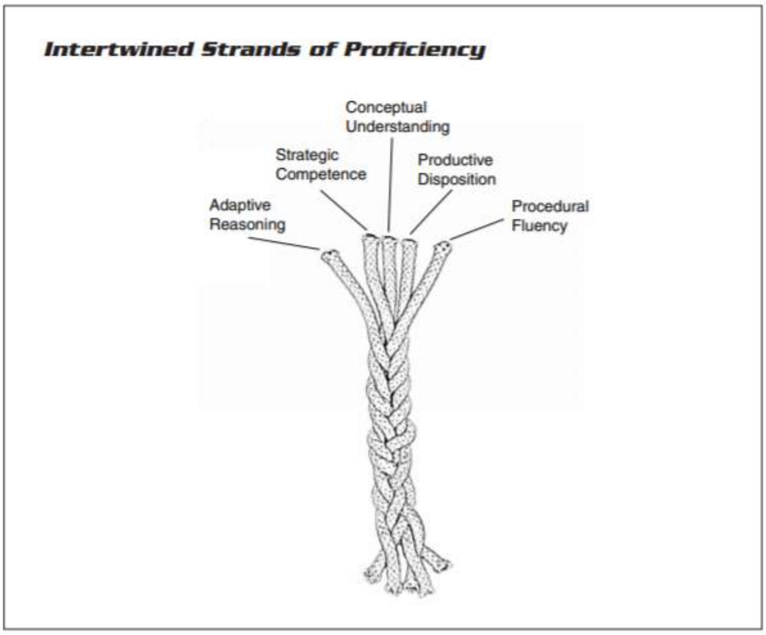
I eksempel-delen presenteres en matematisk sammenheng som elevene forventes å generalisere og å kunne anvende i etterfølgende oppgaver. Enkelte tekster kommenterer eksempler, peker på særlig utfordrende steg og begrunner valg som blir gjort (Love & Pimm, 1996). Dette gjelder imidlertid ikke alle tekster. Mange tekster skjuler hva det er elevene må ta med seg av generaliseringer fra eksemplet (Bills et al., 2006). Oppgavedelen av modellen er der elevene i størst mulig grad skal ta aktivt del i læringen. De skal enten gjøre oppgaver som er veldig like eksemplet eller en mer variert form for oppgaveløsning. Elevene kan og møte på ulike vanskegrader der elevene enten velger vanskegrad, eller at oppgavene blir stadig mer utfordrende (Love & Pimm, 1996).

I alle deler av bøkene forsøker de fleste matematikkbøkene å relatere matematikken til en kjent kontekst for elevene. Dette gjøres enten ved å bruke eksempler fra det virkelige livet i oppgaver, eksempler og forklaringer, eller ved å bruke ting elevene kan se for seg som de kjenner til fra før (Espeland, 2017). Det kan imidlertid være store forskjeller på i hvilken grad bøker gjør dette. I en studie utført av Zhu og Fan (2006) hevdes det at kinesiske bøker har mye mindre koblinger til virkeligheten enn amerikanske lærebøker.

Selv om mange lærebøker i teorien kan tenkes å være bygget opp på samme måte viser Charalambous et al. (2010) studie av tre bøker fra Kypros, Irland og Taiwan at det kan være forskjeller i hvordan bøkene har lagt opp progresjonen i innlæring av brøkregning. Tidligere forskning på brøkregning peker på at dette kan påvirke elevlæring (Resnick et al., 1989). Dersom det påvirker brøkregning, kan det og tenkes at det samme vil gjelde for andre områder innenfor matematikk.

2.5 Matematisk kompetanse

Ovenfor er det etablert at lærebøker er viktige ressurser i klasserommet. Videre er det belyst hvordan lærebøkene er bygget opp. I den sammenheng mener jeg det er viktig å trekke frem hva som er målet for læreplanen, lærebøkene og matematikktimene. Timene skal gi elevene muligheter til å erverve seg kunnskaper og ferdigheter som er formulert i læreplanen. Disse kunnskapene og ferdighetene som læreplanene rundt omkring i verden ønsker at elevene skal tilegne seg kan en finne igjen i begrepet matematisk kompetanse. Denne kompetansen består ifølge Kilpatrick et al. (2001) av fem ulike tråder som til sammen utgjør elevens matematiske kompetanse.



Figur 2.3: "Intertwined Strands of Proficiency". (Kilpatrick et al., 2001, s. 117).

De fem trådene er:

- "Adaptive reasoning"
- "Strategic competence"
- "Conceptual understanding"
- "Procedural fluency"
- "Productive disposition" (Kilpatrick et al., 2001, s. 116).

Trådene kan ifølge Kilpatrick et al. (2001) ikke tilegnes separat. De er knyttet nært sammen og den samlede matematiske kompetansen er avhengig av alle de fem trådene. Utviklingen av trådene må derfor skje samtidig og over tid. I den nye læreplanen kan en finne spor av disse trådene i kjerneelementene tilknyttet faget matematikk. Kjerneelementene i læreplanen er listet på neste side:

- "utforsking og problemløysing"
- "modellering og anvendingar"
- "resonnering og argumentasjon"
- "representasjon og kommunikasjon"
- "abstraksjon og generalisering"
- "matematiske kunnskapsområde" (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2-3).

Kilpatrick et al. (2001) sin punktliste begynner med “adaptive reasoning”. Dette oversetter Kongelf (2019) til adaptiv resonnering eller tilpasset resonnering. Kilpatrick et al. (2001) hevder at elevenes resonneringsevne knyttes til hvordan eleven klarer å se relasjoner mellom begreper og situasjoner. Dette gjøres ved å kunne vurdere alternativer, resonnere på en logisk måte og å kunne begrunne sine konklusjoner. De hevder videre at resonneringen er limet som knytter fakta, begreper, algoritmer og løsningsmetoder sammen sånn at det gir mening. Adaptiv resonnering kan en blant annet finne igjen i kjerneelementet “resonnering og argumentasjon”. Dette kjerneelementet innebærer for eksempel at elevene skal kunne begrunne fremgangsmåter og bevise at løsningene er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3).

“Strategic competence” kan oversettes til strategisk kompetanse (Kongelf, 2019). Kilpatrick et al. (2001) hevder at når en elev utvikler evnen til strategisk kompetanse innebærer dette at han klarer å formulere matematiske problemer. Videre klarer han å representere disse med symboler, visuelle mediatorer og tekst slik at han klarer å løse problemene. Denne tråden kan med andre ord og omtales som evnen til å løse problemløsningsoppgaver. Videre vil en elev med godt utviklet strategisk kompetanse kunne se strukturelle sammenhenger mellom ulike problemer Kjerneelementer som kan knyttes til strategisk kompetanse er “utforsking og problemløysing” og “representasjon og kommunikasjon”. “Utforskning og problemløysing” kan innebære å utvikle strategier for å løse problemer, mens “representasjon” innebærer at blant annet at elevene klarer å uttrykke matematiske sammenhenger og problemer ved hjelp av representasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2-3).

“Conceptual understanding” kan oversettes til begrepsmessig forståelse (Kongelf, 2019). Kilpatrick et al. (2001) hevder at med en begrepsmessig forståelse vil en eleven forstå hvorfor en matematiske idé er viktig og kan anvende den på nye måter der det er hensiktsmessig. Elevene behersker altså ikke bare alenestående regler og matematiske fakta, men klarer å se mønster og sammenhenger som knytter et begrep sammen med andre begreper og løsningsmetoder. Siden eleven fokuserer på sammenhenger mer enn metode er det enklere for eleven å huske det han lærer. Boaler (2015) hevder at begrepsmessig forståelse er det klart viktigste en elev kan oppnå for å fremme dybdelæring og evnen til å anvende matematikk på en nyskapende og kreativ måte. En lignende tanke finner en hos

Sfard (2008). Hun hevder at målet i en matematisk diskurs er å kunne gå fra å anvende noen rutiner som en respons til et uttalt objekt til å konstruere det matematiske objektet på egenhånd som en anvender med stor frihet og kreativitet i den matematiske diskursen. Begrepsmessig forståelse kan blant annet knyttes til "abstraksjon og generalisering" fordi "generalisering" handler "om at elevane oppdager samanhengar og strukturar og ikkje blir presenterte for ei ferdig løysing" (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3).

"Procedural fluency" oversetter Kongelf (2019) til prosedyreevne. Kilpatrick et al. (2001) hevder at eleven må kjenne til prosedyrer og algoritmer knyttet til begreper og problemer. Disse må han kunne anvende på en slik måte at de kan tilpasses den enkelte situasjon. Prosedyrene og algoritmene må kunne anvendes effektivt og nøyaktig. Prosedyreevne er knyttet til begrepsmessig forståelse. Et eksempel på dette vil være forståelsen av titallsystemet, som letter arbeidet med å gjøre regneoperasjoner med flersifrede tall i hodet og på papir på en effektiv og nøyaktig måte. Prosedyreevne kan blant annet knyttes til kjerneelementet "modellering og anvendingar" fordi *"*anvendingar i matematikk handlar om at elevane skal få innsikt i korleis dei skal bruke matematikk i ulike situasjonar..." (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3).

"Productive disposition" oversetter jeg til produktiv disponering. Kilpatrick et al. (2001) hevder at elever som blir gode på produktiv disponering klarer å gjøre matematikk til noe meningsfullt og logisk forståelig. Disse elevene tror at utholdenhet i møte med krevende oppgaver vil lønne seg. Videre ser de på seg selv som effektive lærere som gjør matematikk. Denne tråden ligger til grunn for at en elev skal tilegne seg de fire andre. For at en elev skal utvikle begrepsmessig forståelse og adaptiv resonnering må eleven tro at matematikk er forståelig og at eleven har mulighet til å forstå det. Videre er en forutsetning for at en elev skal utvikle en produktiv disponering at de stadig får muligheten til å gjøre matematikk forståelig, oppleve nytten av det, samt å se nytten av å være utholdende. Dette kan for eksempel knyttes til kjerneelementet "resonnering og argumentasjon" som blant annet innebærer at elevene skal forstå at matematiske sammenhenger ikke er tilfeldige men at de kan begrunnes ved hjelp av logiske resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3).

Det siste kjerneelementet "matematiske kunnskapsområde" er kunnskaper knyttet til emnene tall og tallforståelse, geometri, algebra, funksjoner, statistikk og sannsynlighet. Disse ligger til grunn for at elevene skal utvikle matematiske forståelse gjennom utforsking av sammenhenger mellom disse emnene og innenfor emnene (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Dette kjerneelementet kan for eksempel knyttes til prosedyreevne siden kjerneelementet innebærer at elevene må *"få utvikle varierte reknestrategiar"* (Utdanningsdirektoratet. 2020, s. 3). Det kan og knyttes til adaptiv resonnering siden kjerneelementet og omhandler å utforske strukturer, mønster og relasjoner gjennom å jobbe med emnet algebra (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Samlet sett fremstår kjerneelementene og den matematiske kompetansen som Kilpatrick et al. (2001) beskriver nært knyttet sammen. I diskusjonsdelen forsøker jeg å knytte disse sammen med kognitive krav for å undersøke i hvilken grad lærebøkene gir læringsmuligheter for elevene til å tilegne seg kjerneelementene i faget

2.6 Analytisk rammeverk

I 1992 omtalte Kilpatrick (1992) fagfeltet matematikkdidaktikk som et ateoretisk fagfelt. Lester (2005) hevder at det har skjedd en endring på dette og at det å anvende et rammeverk i stor grad er det mest vanlige. Han trekker frem at en viktig grunn til å ha et rammeverk er at det gir muligheter til å stille hvorfor-spørsmål. En forsker bør stille seg spørsmålene hvorfor de gjør det de gjør og hvorfor deres forklaringer er fornuftige. Dette gir et rammeverk muligheten til, mens en uten et rammeverk blir overlatt til egne spekulasjoner.

I de neste delene av teorikapittelet vil jeg presentere rammeverket som studien bygger på. Jeg benytter meg av Janviers (1978, 1987) skjematiske oversikt over heuristiske tilnærminger for å bevege seg mellom ulike representasjoner av en funksjon. Til å analysere disse anvender jeg Adu-Gyamfi og Bossé med flere sin forskning på transformasjoner mellom ulike representasjoner av funksjoner. Deretter vil jeg utlede Ronda og Adlers (2017) sitt "Mathematical Discourse in Instruction analytic tool for textbooks lessons" (MDITx) rammeverk til lærebøker. Her vil jeg redegjøre for hvilke teoretiske begrunnelser jeg anvender i studien til å analysere læringsmål, eksempler og oppgaver i de utvalgte bøkene. Til sist følger en redegjørelse av Stein og Smith (1998) sitt "Mathematical Task Framework". Dette rammeverket bruker jeg til å analysere de kognitive kravene i oppgavene.

2.7 Transformasjoner av funksjoner

I et tidligere avsnitt viste jeg til Sfard (1992) som hevder at elever har vanskeligheter med å erkjenne at funksjoner er noe mer enn et algebraisk uttrykk, og at de dermed kan uttrykkes ved hjelp av flere ulike representasjoner. Dette fører igjen til at elevene har vanskeligheter med å tilegne seg funksjoner som et begrep, noe som igjen gjør det vanskelig å manipulere og jobbe med de ulike representasjonene av en funksjon. Det er derfor interessant å se på hvilke muligheter læreboken gir elevene til å møte de ulike uttrykksformene. Claude Janvier (1978) har utviklet en skjematisk oversikt som viser hvilke "translation processes" elevene må beherske for å bevege seg fra en start-representasjon til en mål-representasjon. Jeg har oversatt "translation" til transformasjon og bruker dette begrepet gjennomgående i oppgaven.

Fra\Til	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon	permutasjon	måling	skisse	modellering
Tabell	avlesning	permutasjon	plotting	tilpasning
Graf	tolkning	avlesning	permutasjon	kurvetilpasning
Formel	gjenkjenning	utregning	skisse	permutasjon

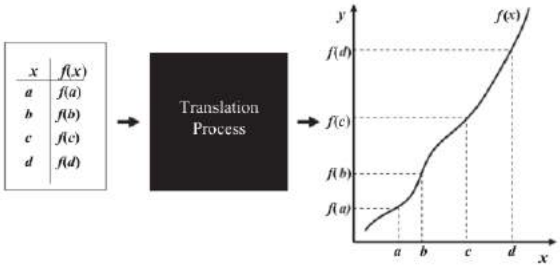
Tabell 2.1: "Translation processes". Hentet fra Janvier (1987, s. 29).

Janvier (1978, 1987) gir ingen detaljert beskrivelse av de enkelte teknikkene, men overlater til leseren å selv tenke gjennom hva det innebærer å gå fra en representasjon til en annen. Dette begrunnes ved å peke på at en del av prosessene er vanskelige å definere fordi "the quasi-impossibility of defining (at least uniquely) a few processes arises from the ill-defined context in which a particular translation is achieved" (Janvier, 1987, s. 28). I tillegg til konteksten påvirker elevens kunnskaper og hvordan eleven lærer og resonnerer hvilken ferdighet som kreves for å bevege seg mellom to representasjoner (Janvier, 1978).

2.7.1 "Black-box"-forståelse av transformasjoner

Det at transformasjonene ikke defineres har senere blitt problematisert. Tradisjonelt har en innenfor forskningsfeltet hatt en "black-box"-tilnærming der eleven gjennomfører transformasjonene og dersom de ikke klarer å ivareta den semantiske kongruensen mellom representasjonene har dette blitt tolket som at elevene ikke i tilstrekkelig grad har tilegnet seg den begrepsmessige forståelsen av representasjonene (Adu-Gyamfi et al., 2012). Med semantisk kongruens menes at de matematiske egenskapene og sammenhengene som en representasjon presenterer bevares gjennom transformasjonen fra en representasjon til en annen. Adu-Gyamfi et al. (2012) henviser til flere andre forskere (Clement et al., 1981;

Monk, 1992; Knuth, 2001) når de hevder at en “black-box”- tilnærming ikke i tilstrekkelig grad forklarer hvorfor elever gjør feil i transformasjonsprosessen.



Figur 2.4: “Black-box” modell av transformasjon fra tabell til graf (Adu-Gyamfiet al., 2012, s. 160).

Den samme motstanden mot “black-box” finner en hos Superfine et al. (2009). De hevder at eksterne representasjoner og transformasjoner mellom disse ikke kan forstås som at enten kan eleven det eller så kan han det ikke. Eksterne representasjoner forstås her som de representasjonene av funksjoner som elevene møter i arbeidet med matematikken, og som eksisterer uavhengig av eleven selv. Når elevene beveger seg mellom ulike representasjoner trenger eleven både sin egen oppfattelse av representasjonene og kunnskap om ferdighetene som trengs for å bevege seg mellom de samme representasjonene. Å bevege seg mellom to ulike representasjoner er derfor ikke, ifølge Superfine et al. (2009), en alt eller ingenting operasjon. I stedet for kan eleven tilegne seg en delvis eller en fullstendig forståelse av transformasjonen mellom de ulike representasjonene. Det som påvirker i hvilken grad en elev klarer å utføre en transformasjon er med andre ord den interne oppfattelsen eleven har av representasjonene som han skal bevege seg fra og til, samt i hvilken grad eleven klarer å gjenkjenne egenskapene ved en representasjon som eleven trenger for å gjennomføre en transformasjonen fra en representasjon til en annen.

Et eksempel på dette er hentet fra Maximum 8 oppgave 3.29. Her skal eleven bevege seg fra en situasjonsbeskrivelse til et funksjonsuttrykk.

3.29 Stine skal sitte barnevakt for sin lille kusine. Tanten gir henne 50 kr per time. I tillegg betaler tanten for bussen, som koster 120 kr tur-retur.

a Skriv opp funksjonsuttrykket $f(x)$ for hvor mye tanten til Stine må betale hvis Stine skal sitte barnevakt i x timer. Sammenlikn med en annen elev. Har dere skrevet det samme uttrykket?

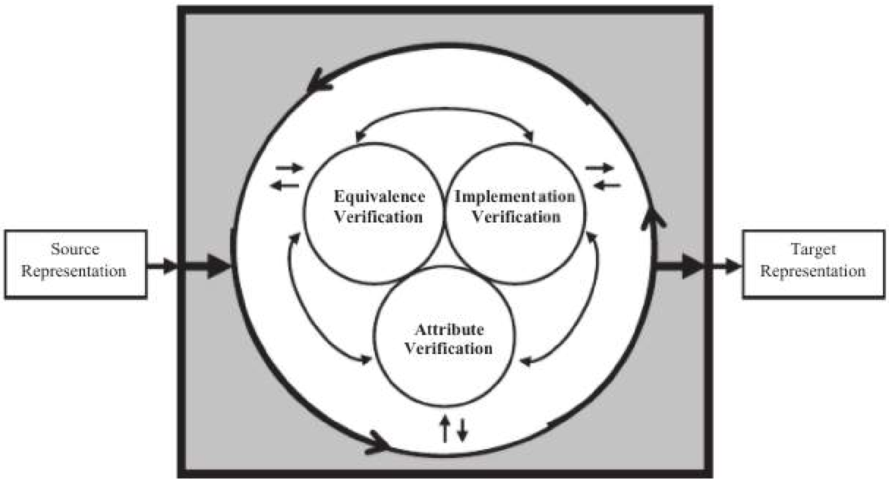
Figur 2.5: Oppgave 3.29 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 178).

Her må eleven gjenkjenne i teksten hva som er viktig informasjon som trengs for å kunne lage et formeluttrykk. Så må eleven plassere denne informasjonen inn i et funksjonsuttrykk. For at en elev skal beherske en slik oppgave må eleven altså ha en god forståelse av representasjonene situasjon og formel, samt vite hvordan en, med Janviers (1987) ord, modellerer situasjonen inn i en formel. Transformasjonen som gjennomføres er altså situasjon → modellering → formel (S→F).

2.7.2 "Translation-Verification Model"

For å besvare denne problematikken har Adu-Gyamfi (et al., 2012) utviklet en "translation-verification" modell. Målet bak modellen er å forklare elevatferd når de beveger informasjon fra en representasjon til en annen.

Ved å anvende denne modellen i en rekke ulike studier (Adu-Gyamfi et al., 2012; Adu-Gyamfi & Bossé, 2014; Adu-Gyamfi et al., 2015, 2017; Adu-Gyamfi et al., 2019; Bossé et al., 2011a; Bossé et al., 2011b; Bossé et al., 2014) har de klart å identifisere at enkelte transformasjoner synes vanskeligere enn andre, og at feil gjøres på litt ulike tidspunkter i transformasjonsprosessen.



Figur 2.6: "Translation-Verification Model" i Adu-Gyamfi et al. (2012, s. 161).

Det som gjør at enkelte transformasjoner er vanskeligere enn andre kan forstås ut fra et elevperspektiv og et representasjons-perspektiv. Sett fra et elevperspektiv kan for det første handlingene som elevene gjør for å utføre transformasjonene variere i fra transformasjon til transformasjon. Det er derfor naturlig å tenke seg at de vil variere i vanskegrad. Videre kan noen transformasjoner gjennomføres med mellomsteg som kan øke vanskegraden. For det tredje spiller erfaring inn. Dersom en elev har gjort en transformasjon mange ganger vil transformasjonen være enklere å utføre korrekt enn dersom eleven skal utføre en transformasjon som er helt ny (Bossé et al., 2011a).

Med et representasjons-perspektiv ser en på selve representasjonen og hva det er med denne som gjør en transformasjon mer utfordrende enn en annen. Det som kan påvirke vanskegraden er hvor kompleks transformasjonen er, om den krever større begrepsmessig forståelse og om den krever flere steg (Bossé et al., 2011a). Dersom en elev skal gjøre en transformasjon fra en tabell til en graf, må eleven kjenne til hvordan en gjør om koordinater til punkter i et koordinatsystem. Han trenger ikke tenke noe på de overhengende sammenhengene i situasjonen, og trenger derfor bare ha et lokalt perspektiv. Dersom eleven skal transformere informasjon fra graf til situasjon må eleven imidlertid forsøke å tolke grafen og ut fra denne trekke ut den relevante informasjonen for å beskrive situasjonen. Dette er ifølge Bossé (et al., 2011a) en transformasjon som krever at eleven har et mer globalt perspektiv, eleven må vurdere hele situasjonen og trekke ut den relevante informasjonen. En global transformasjon er mer kognitivt krevende enn en lokal transformasjon. Figur 2.7 viser hvordan dette henger sammen for de ulike transformasjonene.

To / From	Situations, Verbal Description	Table	Graph	Formulae [Symbolic]
Situations, Verbal Description		Global	Global	Global
Table	Global		Local	Global
Graph	Global	Local		Global
Formulae [Symbolic]	Global	Local	Local	

Figur 2.7: Lokalt og globalt perspektiv på en gitt transformasjon (Bossé et al., 2011a, s.120).

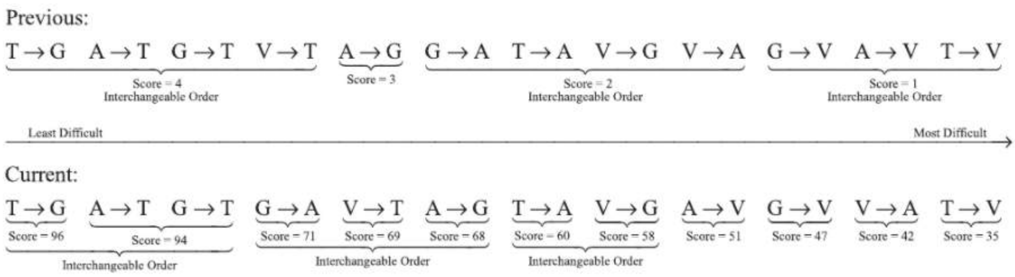
I tillegg til om en transformasjon er lokal eller global, påvirker og "fact-gaps" vanskegraden. Dette er i hvilken grad representasjonen mangler informasjon som trengs for å gjøre transformasjonen (Bossé et al., 2011a). Å gjennomføre en transformasjon fra formel til tabell vil inneholde få "fact-gaps" da en kan anvende formelen til å konstruere noen koordinater i denne tabellen. En transformasjon som kan inneholde flere "fact-gaps" er den inverse transformasjonen fra tabell til formel. Her kan relevant informasjon som trengs for å finne stigningstall og konstantledd til dels være skjult i representasjonen.

x	y
−2	0
5	14
13	30

Tabell 2.2: Eksempel på tabell som kan transformeres til en formel

I tabell 2.2 er det ikke umiddelbart lett å identifisere stigningstall og konstantledd, og eleven må derfor i større grad prøve seg frem for å finne formelen til funksjonen.

Det er imidlertid ikke bare mangel på informasjon som kan gjøre en transformasjon mer utfordrende. Dersom det er mye unødig informasjon i start-representasjonen kan det være vanskelig å identifisere den informasjonen som trengs for å gjennomføre en transformasjon til en annen representasjon. Til sist påvirker og hvor mye informasjon det er i representasjonen vanskegraden (Bossé et al., 2011a). Adu-Gyamfi et al. (2019) hevder at det er mulig å trekke ut mer informasjon fra en formel og en graf enn fra en tabell eller en situasjonsbeskrivelse. En høyere informasjonstetthet gir høyere vanskegrad.



Figur 2.8: Vanskegrad av transformasjoner (Adu-Gyamfi et al., 2019, s. 401).

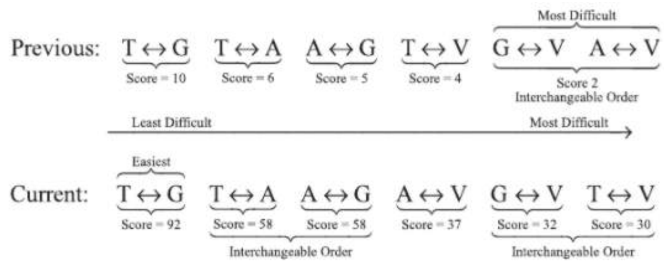
Figur 2.8 viser vanskegrader av de ulike transformasjonene. T står for tabell, G står for graf. A står for *algebra* og dette har jeg oversatt til formel (F) i min studie. V i figur 2.8 står for *verbal* dette har jeg oversatt til situasjon (S). Dette fordi det skrevne ordet beskriver en situasjon. Ved å se elev-utfordringer og representasjons-utfordringer i sammenheng kommer Bossé et al. (2011a) frem til en rangering av vanskegraden til de ulike transformasjonen forbundet med lineære funksjoner. Denne har de i senere tid testet igjen med lærerstudenter (Adu-Gyamfi et al., 2019), universitetsstudenter (Adu-Gyamfi et al., 2012) og ungdomsskoleelever (Adu-Gyamfi & Bossé, 2014). Konklusjonen til Adu-Gyamfi et al. (2019) er at det er stor overensstemmelse mellom den teoretiske rangeringen som er etablert ut fra de tidligere studiene og den rangeringen som kommer frem i undersøkelsen de gjennomførte i 2019.

En oppgave krever som regel at elevene går fra en representasjon til en annen. Enkelte oppgaver gjøres imidlertid oftere på en mer indirekte måte. Dette er understreket med de to pilene hentet fra Janviers tabell (1987). Når en skal gå fra formel til graf, kan det av og til være enklere å gå via tabell. Altså fra formel → tabell → graf. Når en skal gå fra tabell til formel, hevder Janvier (1987) at det kan være naturlig å bevege seg fra via graf, altså tabell

→ graf → formel. Adu-Gyamfi et al. (2012) hevder at det i tillegg kan være en slik indirekte tilnærming når en utfører en transformasjon fra situasjon til formel, og at det kan være naturlig å gå via tabell. Altså situasjon → tabell → formel. Dersom en anvender en mer direkte tilnærming, må en se etter representasjon-spesifikke trekk når en beveger seg fra en representasjon til en annen (Janvier, 1987). Et eksempel på dette kan være dersom en skal bevege seg direkte fra formel til graf, da må en studere formelen med hensyn på å kunne lage en graf. En lineær formel vil ved avlesning avsløre stigningstallet til grafen og hvor grafen skjærer y-aksen som tilsvarer konstantleddet i formelen. Disse egenskapene bruker en når en skal skissere opp grafen. Dette er altså en mer direkte tilnærming enn den indirekte tilnærmingen beskrevet ovenfor.

En oppgave kan også kreve at en beveger seg innenfor en representasjon. Oppgaven kan for eksempel etterspørre at elevene endrer på en formel eller at eleven blir bedt om å beskrive en lignende situasjon (Janvier, 1978). Han kaller det en "transposition". Jeg velger å oversette denne ferdigheten til en permutasjon. Med dette mener jeg å endre på representasjonen uten at funksjonen blir representert med en annen representasjon. Slike operasjoner blir ofte gjort for å gjøre transformasjonen til en annen representasjon enklere (Janvier 1978). Et eksempel på dette kan være en formel som må manipuleres for lettere å kunne anvendes til å tegne en graf.

Ovenfor har jeg beskrevet det Adu-Gyamfi et al. (2019) omtaler som "unidirectional" transformasjoner. Dette vil si transformasjoner som beveger seg i en retning. Når en gjennomfører transformasjoner kan disse og være "bidirectional". Dette vil si at en må gjennomføre en transformasjon og den inverse transformasjonen for å løse oppgaven. Janvier (1978) omtaler dette som at de to representasjonene skal både være start og mål representasjoner. Et eksempel på dette kan være at en elev må løse en oppgave som krever at eleven utfører en transformasjon fra tabell til graf og så tilbake fra graf til tabell. Duval (2006) hevder at ved å knytte transformasjoner sammen på denne måten vil en kunne utvikle en bedre konseptuell forståelse fordi en kan legge merke til regelmessigheter, avvik og sammenhenger mellom to ulike representasjoner. Akkurat som med "unidirectional" transformasjoner, har Adu-Gyamfi et al. (2019) rangert vanskegraden for "bidirectional" transformasjoner.



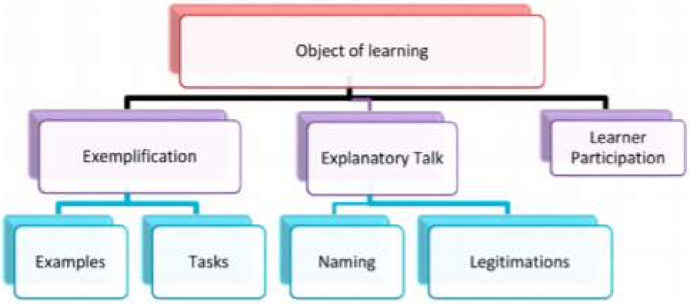
Figur 2.9: Vanskegrad av "bidirectional" transformasjoner (Adu-Gyamfi et al., 2019, s. 402).

I tillegg finnes det transformasjoner som er merket "iterative" (Adu-Gyamfi et al., 2019). Dette er transformasjoner der eleven blir bedt om å gjennomføre både en "bidirectional" transformasjon og en "unidirectional" transformasjon. Det kan for eksempel være at eleven skal gjennomføre en "bidirectional" transformasjon (tabell → plotting → graf og graf → avlesning → tabell). Deretter må eleven klare å gjennomføre en av disse for å kunne besvare det oppgaven etterspør. Jeg kommer i min undersøkelse ikke til å lete etter "iterative" transformasjoner. Grunnen til dette er, som jeg nevner i metodedelen, at antall "bidirectional" transformasjoner er såpass lavt at det ville blitt et svært begrenset utvalg.

Elever som arbeider med transformasjoner mellom representasjoner gjør ulike feil. Adu-Gyamfi et al. (2012) hevder at deres tre kategorier for identifisering av elevfeil var uttømmende i deres empiriske forsøk. Den første kategorien kaller de "implementation error". Dette er feil som oppstår når start og mål representasjonene ikke er semantisk kongruente på grunn av algoritmiske eller transformative feil gjort av eleven. Den andre kategorien omtaler de som "interpretation error". En slik feil oppstår når en elev ikke identifiserer hvilke egenskaper med enten start eller mål representasjonen som trengs for å gjennomføre transformasjonen, og som dermed ikke klarer å gjennomføre transformasjonen slik at start og mål representasjon representerer samme funksjon. Denne feilen oppstår vanligvis tidlig i en transformasjon. Den siste feilen kalles "preservation error". Denne feilen oppstår ofte på slutten av en transformasjon. En slik feil oppstår når den semantiske kongruensen ivaretas men andre egenskaper, som og kan være viktige, tolkes feil.

2.8 "Mathematical Discourse in Instruction"

I tillegg til å undersøke hvilke læringsmuligheter transformasjonene i kapittelet gir ønsker jeg og å undersøke læringsmulighetene gjennom to andre rammeverk. Det første rammeverket heter "Mathematical Discourse in Instruction" (MDI). MDI er et teoretisk rammeverk utviklet av Adler og Ronda (2015). Rammeverket åpner for å kunne diskutere nyanser i den matematikken som blir fremsatt i klasserommet og å utlede hvilke muligheter dette gir for læring i det matematiske klasserommet. Teorien er utarbeidet i sørafrikanske klasserom og er teoretisk begrunnet i den sosiokulturelle forståelsen som de har hentet fra blant andre Vygotsky (1978) og Sfard (2008).



Figur 2.10: Mathematical Discourse in Instruction (Adler & Ronda, 2015, s. 3).

I utgangspunktet er rammeverket utviklet for å studere matematikkundervisningen i klasserommet, men forskerne har tilpasset rammeverket til å kunne analysere matematikken som blir presentert i lærebøker (MDITx) (Ronda & Adler, 2017). Det er da særlig delen "learner participation" som er forskjellig fra det originale rammeverket. Denne er tatt ut av MDITx rammeverket. Dette fordi hvordan elever forholder seg til klasseromssituasjonen ikke kan måles i en lærebok. Det er også gjort noen justeringer med de andre kategoriene og samlet sett gir dette ifølge forfatterne et rammeverk som er robust nok til å kunne anvendes på mange forskjellige pedagogiske tekster som lærebøker og videoforelesninger (Ronda & Adler, 2017). Jeg skal i min analyse fokusere på læringsmålene, oppgavene og eksemplene. Jeg vil derfor gå inn på "object of learning" og "exemplification" delen av rammeverket.

2.8.1 Mål

I boken "Adding it up" (Kilpatrick et al., 2001) defineres læringsmuligheter som muligheten til å jobbe med oppgaver, utforske situasjoner, samle data, bevise og begrunne matematiske sammenhenger og å høre på forklaringer. Det hevdes videre at disse læringsmulighetene er den viktigste variabelen som påvirker elevenes resultater. Det er nettopp disse læringsmulighetene som er utgangspunktet for MDITx. Ronda og Adler (2017) hevder at enhver situasjon der læring foregår har et mål. Ifølge Marton og Pang (2006) finnes det to ulike typer læringsmål. Et direkte læringsmål er det elevene er forventet å lære seg i en undervisningssekvens, mens et indirekte læringsmål er ferdighetene som elevene forventes å utvikle gjennom opplæringen. I matematikkfaget vil de seks kjerneelementene i LK20 for matematikk være de indirekte læringsmålene, mens de direkte læringsmålene finnes som kompetansemål i læreplanen. Både de direkte og de indirekte målene blir mediert gjennom de eksemplene, oppgavene, ordene/navnene og legitimeringene som blir fremsatt. Alle disse danner samlet mulighetene og begrensningene elevene har for å lære matematikk (Ronda & Adler, 2017).

2.8.2 Eksempel

Love og Pimm (1996) hevder at de fleste lærebøker er bygget opp etter en "forklaring-eksempel-oppgave-modell". Eksempeldelen av denne modellen er en viktig del av matematikken i klasserommet, fordi eksemplene bidrar til å fremme generalisering, abstraksjon, argumentasjon og analogisk tenkning (Zodik & Zaslavsky, 2008). Et eksempel kan defineres som "a particular case of a larger class, from which one can reason and generalise" (Zodik & Zaslavsky, 2008, s.165). Eksempler kan vise et konsept, en fremgangsmåte eller et matematisk bevis (Bills et al., 2006). For å kunne trekke logiske slutninger og generalisere hevder Zodik og Zaslavsky (2008) at en og må presentere moteksempler og ikke-eksempler som undergrupper av eksempler. Med moteksempler mener de eksempler knyttet til utsagn ("claims") og falsifisering ("refutation") av disse. Bills et al. (2006) fremmer en lignende forståelse ved å hevde at et mot-eksempler forutsetter en hypotese eller utsagn som kan motbevises. Dette kan gjøres blant annet gjennom et konsept, fremgangsmåte eller et bevis. Ikke-eksempler er knyttet til konseptualisering og definisjoner og brukes til å peke på kritiske aspekter ved et begrep (Zodik & Zaslavsky, 2008). Ikke-eksempler kan videre gjøre grensene for et konsept eller en algoritme tydelige (Bills et al., 2006). Eksempler kan være ganske forskjellige med tanke på oppbygging og mål (Zodik & Zaslavsky, 2008). Bills et al. (2006) hevder i forlengelsen av dette at de tre ulike kategoriene av eksempler handler mer om hvordan den enkelte oppfatter det matematiske læringsmålet, enn hvordan det matematiske konseptet faktisk er.

Ethvert eksempel vil inneholde elementer som er viktige og elementer som er irrelevante for det som skal læres (Zodik & Zaslavsky, 2008). Det som er irrelevant kaller Skemp (1971) for støy. Dersom det blir mye støy, vil det være vanskelig å få fatt i læringsmålet. Love og Pimm (1996) hevder at mange lærebøker ikke eksplisitt uttrykker hvilke generaliteter elevene skal ta med seg fra et gitt eksempel. De hevder videre at det er uklart om dette er for å fremme at elevene selv skal jobbe med generalisering eller om det er forventet at læreren skal peke på dette. Dette følger Bills et al. (2006) opp ved å hevde at slike underliggende generaliteter må gjøres eksplisitte, ellers kan en risikere at elever tar med seg unøyaktige generaliteter fra eksemplene, eller at de ikke klarer å finne generaliteter i det hele tatt og bare tilegner seg en prosedyre eller teknikk. Det er nemlig ikke gitt at det en lærer leser ut av et eksempel, er det samme som en elev gjør (Zodik & Zaslavsky, 2008; Bills et al., 2006).

Ronda og Adler (2017) hevder at for å øke læringsutbytte må en belyse de forskjellige egenskapene til et begrep eller matematisk konsept. En samlet gruppe med eksempler skal derfor definere begrepet, der hvert enkelt eksempel viser en del av begrepet. En gruppe med eksempler kan klassifiseres enten som kontrast (K), generalisering (G) eller fusjon (F). Ronda og Adler (2017) klassifiserer disse gruppene som eksempelrom og en leksjon kan inneholde flere eksempelrom. Alle disse eksempelrommene gir de samlede læringsmulighetene for elevene.

Kontrast (K)

Lo (2012) hevder at en enklere kan finne de kritiske egenskapene ved et objekt dersom det står i kontrast med et annet. Hun hevder videre at selv om en presenterer et fullstendig konsept, så er det ikke gitt at mottaker klarer å sette dette opp mot den tidligere kunnskapen mottakeren har. Marton et al. (2004) følger denne tanken ved å definere kontrast som at for at eleven skal gis muligheten til å erfare noe så må eleven og erfare andre ting som skiller seg fra dette noe. For at eleven skal forstå hva tallet "tre" representerer, må eleven og møte "to" og "fire" for å kunne se på forskjeller og dermed få en forståelse av hva "tre" er. Marton og Pang (2006) definerer kontrast som at eleven må erfare ikke-X for å kunne erfare hva X er. I denne sammenhengen defineres kontrast som mulighet til å sammenligne og sette egenskaper ved et læringsmål opp mot hverandre (Ronda & Adler, 2017). Det vil si at læreboken presenterer et eller flere eksempel som skal vise ulike deler av læringsmålet.

Generalisering (G)

For at et eksempel skal virke generaliserende må det fremheve likheter som gjør et begrep til det det er (Ronda & Adler, 2017). Lo (2012) hevder at en ved å generalisere belyser de definerende egenskapene til begrepet. Hun viser dette gjennom et eksempel med trekanter. For å generalisere hva en trekant er må en først sette en trekant opp mot andre geometriske former. Dette er det samme som kontrast som er beskrevet ovenfor. Deretter når en så har definert hva en trekant er, må en vise flere ulike trekanter. Det generaliserende elementet her er å peke på likheten mellom de ulike trekantene, og hva det er som gjør de ulike trekantene til trekanter. En lignende tanke finner en hos Marton og Pang (2006) som hevder at for at en egenskap ved et begrep skal læres må denne egenskapen holdes konstant mens andre dimensjoner i et eksempel må variere. Utfra dette vil forhåpentligvis eleven kunne trekke den konstante egenskapen og generalisere en egenskap ved læringsobjektet. Marton et al. (2004) hevder at for at en elev skal fullt ut forstå et begrep, må eleven oppleve ulike representasjoner av begrepet. Ved å bruke eksempelet med tallet "tre", hevder de at eleven må erfare ulike grupper av "tre". Dette kan være tre apekatter, tre jenter, tre terninger, tre på terningen osv. Ved å se begrepet "tre" representert på ulike måter styrkes elevens forståelse av hva tallet "tre" er for noe. Oppsummert kan en derfor hevde at et eksempel som er generaliserende fremmer en egenskap ved læringsobjektet som holdes konstant i eksempelrommet.

Fusjon (F)

Lo (2012) trekker og frem at et begrep kan ses i lys av flere kritiske aspekter som påvirker det samtidig. Da må en studere hvordan disse aspektene ved begrepet relaterer seg til hverandre og hvordan de påvirker begrepet som helhet. At læringsobjektet presenteres med flere varierende elementer samtidig trekkes og frem av Marton et al. (2004). De hevder at når et læringsobjekt har flere viktige aspekter som påvirker det samtidig, må disse erfares av eleven samtidig. Dette fordi det er sjelden at eleven kun opplever at bare en ting ved et læringsobjekt varierer om gangen. Ofte vil flere aspekter variere samtidig. Marton og Pang (2006) eksemplifiserer dette ved å peke på at når en person som bruker briller tar av seg brillene vil hans syn variere med det faktum at han tar av seg brillene og på hvilken distanse personen ønsker å se noe fra.

Gradering

Ronda og Adler (2017) graderer delkapitlet etter hvor mange og hvilke typer eksempler som blir presentert. Et delkapitel er på nivå 1 dersom det brukes bare en form for variasjon fordelt over alle eksempelrommene. Det samme delkapitlet er på nivå 2 dersom det tas i bruk to forskjellige variasjoner, mens dersom alle de tre variasjonene tas i bruk klassifiseres delkapittelet som nivå 3. Dersom det ikke gis noen eksempler som oppfyller noen av kriteriene blir den kodet som NONE.

2.8.3 Oppgaver

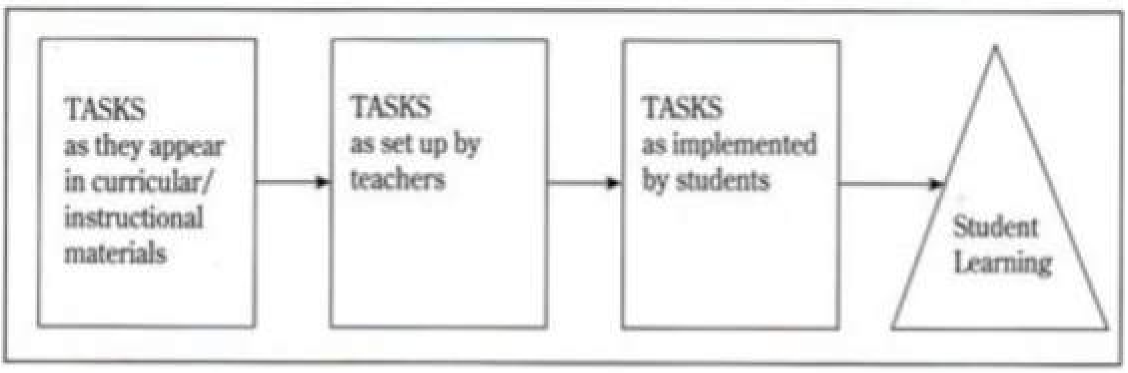
Oppgaver er viktige i et klasserom. Hiebert et al. (2003) hevder at de i deres TIMSS 1999 studie fant at 80 % av en matematikktime brukes til matematiske oppgaver. En oppgave kan defineres på flere ulike måter. Den kan for eksempel defineres "by the answers students are required to produce and the routes that can be used to obtain these answers" (Doyle, 1988, s. 161). Her ligger fokuset på prosedyrene elevene må bruke og typen svar som elevene må gi. Ronda og Adler (2017) hevder at en oppgave kan defineres som det leseren blir bedt om å gjøre med eksemplene. Oppgaver er koblet med eksempler, men der eksempler skal mediere læringsmålet ved å fremheve sentrale egenskaper ved læringsmålet, skal oppgavene vise hva en kan bruke egenskapene til. Gjennom å jobbe med ulike oppgaver blir læringsmålets egenskaper tydeligere. Derfor undersøker en evnen oppgavene har til å koble egenskaper av det matematiske innholdet.

Videre hevder Espeland (2017) at oppgavene påvirker hvordan elevene oppfatter matematikk og hva de lærer. Dette underbygger hun ved å vise til Stein et al. (2007) som hevder at oppgaver som krever å gjøre en memorert prosedyre på en rutinemessig måte gir elevene en type læringsmulighet, mens oppgaver som krever at elevene jobber med begreper og sammenhengen mellom disse gir elevene en annen type læringsmuligheter. Det er imidlertid ikke gitt at læringsmuligheten opprettholdes siden elever kan ha et ønske om å unngå å mentalt jobbe med en oppgave og spør læreren eller medelever for å slippe (Hiebert & Grouws, 2007). Det vil i så fall hindre eleven fra å oppnå den intenderte læringseffekten.

Ronda og Adler (2017) grupperer oppgaver i tre kategorier. Den første kategorien "known procedure/fact" (KPF) er oppgaver der eleven bare må bruke kunnskap fra tidligere delkapitler for å løse oppgavene. Den andre kategorien "Current Topic/Procedure" (CTP) krever at eleven må bruke prosedyrer og kunnskaper som er presentert i økten for å løse dem. Den siste kategorien "application/making connection tasks" (AMC) krever at eleven må gjøre en vurdering på hvilke prosedyrer og konsepter eleven skal bruke eller at eleven må knytte nye konsepter sammen for å løse oppgaven. For å definere mulighetsrommet oppgavene gir definerer Ronda og Adler (2017) delkapitelets oppgaver som nivå 1 dersom de bare inneholder KPF-oppgaver. Delkapittelet defineres som nivå 2 dersom noen CTP-oppgaver blir presentert, mens delkapittelet blir definert som nivå 3 dersom det inneholder både CTP og AMC-oppgaver.

2.9 "The Mathematics Task Framework" (MTF)

I tillegg til å anvende MDITx til å analysere oppgavene bruker jeg "The Mathematics Tasks Framework" (MTF) som er utviklet av QUASAR ("Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning") som et nasjonalt reformprosjekt i USA (Stein & Smith, 1998). Helt konkret anvender jeg "Task Analysis Guide" som er en del av dette rammeverket. Dette reformprosjektet fant sted i ungdomsskoler som lå i økonomisk vanskeligstilte områder. Inspirasjonen bak prosjektet var en påstand om elever som gjør det dårligere på skolene ikke kan forklares ved at de har manglende evner eller potensial. I stedet hevder forskerne at det skyldes manglende muligheter for elevene til å delta i meningsfulle og utfordrende læringsoppgaver (Stein et al., 1996). Bakgrunnen for rammeverket er at de ønsker å bevisstgjøre lærere på hvordan en oppgave kan omformes og hjelpe lærerne til å reflektere rundt sin egen praksis (Stein & Smith, 1998). Rammeverket presenterer hvordan en oppgave påvirker klasserommet fra den bli laget til den har blitt behandlet av elevene og dermed gitt et resultat. Kort fortalt blir en matematisk oppgave presentert. Denne oppgaven blir presentert i klasserommet av læreren eller læreboken. Dernest blir oppgaven implementert av elevene som til slutt skal sitte igjen med kunnskaper og ferdigheter. Alle de tre fasene er viktige for å lage mulighetsrommet oppgaven gir elevene, men særlig den siste fasen trekker forfatterne frem som viktig. Oppgaven kan skifte karakter mellom de ulike fasene og fremstå ganske annerledes når elevene jobber med dem, enn det som kanskje var tanken til lærebokforfatterne (Stein & Smith, 1998).



Figur 2.11: "The Mathematics Tasks Framework" (Stein & Smith, 1998, s. 270).

Et kjent problem innenfor forskningsfeltet er at de kognitive kravene en oppgave stiller sjeldent økes av lærerne. Det er derfor viktig at lærebøkene inneholder nok oppgaver som stiller høye kognitive krav. De kognitive kravene i en oppgave kan imidlertid synke når læreren har presentert oppgaven, eller når læreren har hjulpet en elev som ikke ønsker å jobbe mentalt for å løse oppgaven (Hiebert & Grouws, 2007). Stein et al. (1996) hevder at de kognitivt mest utfordrende oppgavene er de som elevene har vanskeligst for å gjennomføre slik de er intendert.

I min studie er det den første delen av oppgaveteorien jeg anvender. De andre delene av rammeverket involverer lærere og elever og det er utenfor min ramme. Til å analysere denne første delen av rammeverket har Smith og Stein (1998) utviklet "Task Analysis Guide". Denne er delt i fire ulike kategorier som beskriver oppgavenes kognitive nivå. Disse er hukommelse, prosedyre uten sammenheng, prosedyre med sammenheng og matematikk. Nå følger en kort beskrivelse av de ulike kategoriene, mens en utfyllende beskrivelse av disse finnes i vedlegg 1.

Hukommelse karakteriseres ved at oppgavene ikke krever noe mer enn at elevene kan reprodusere noe de kan fra før. Dette kan være en regel, definisjon, formel eller fakta som de har blitt presentert for tidligere eller rett i forkant av oppgaven. Det kan og være oppgaver som ikke har noen relasjon til konseptet eller meningen som ligger til grunn for læringsmålet. Videre løses ikke oppgavene med en prosedyre fordi denne ikke eksisterer, eller oppgaven løses fortere uten (Smith & Stein, 1998). Disse oppgavene kommer som regel i litt større klynger og elevene jobber dermed med mange lignende oppgaver på kort tid (Stein & Smith, 1998). Denne kategorien stiller lave kognitive krav til elevene.

Den neste kategorien er algoritme uten sammenheng. Denne karakteriseres enten ved at det ikke er tvil om at elevene skal bruke en algoritme som er vist i foregående eksempel, eller at det tydelig fremgår hva som skal gjøres på grunn av rekkefølgen oppgaven kommer i eller med erfaring fra tidligere oppgaver. Oppgaven knyttes heller ikke opp mot den eller de underliggende matematiske ideene som skal læres, og tanken bak oppgaven er å produsere et svar, mer enn å reflektere rundt hvorfor det blir slik (Smith & Stein, 1998). Denne kategorien stiller og lave kognitive krav til elevene.

Den tredje kategorien er algoritme med sammenheng. Dette er oppgaver som legger opp til at elevene skal bruke algoritmer for at elevene skal utvikle et dypere nivå av forståelse for matematiske begreper og ideer. Disse oppgavene foreslår implisitt eller eksplisitt hvordan oppgavene skal løses, men de er tettere knyttet til generelle prosedyrer som er viktige konseptuelle ideer, mer en perifere algoritmer. Oppgavene bruker ofte ulike representasjoner og forsøker å legge til rette for at elevene skal skape relasjoner mellom disse (Smith & Stein, 1998). Denne kategorien stiller høyere kognitive krav til elevene.

Den fjerde kategorien gjøre matematikk krever at elevene bruker kompleks og ikke-algoritmisk tenkning. Med dette menes at elevene ikke kan bruke en fremgangsmåte men må bruke det de kan på nye måter. Elevene må analysere oppgaven, vurdere hvilke kunnskaper, algoritmer og matematiske konsept som kan være relevante, samt vurdere eget arbeid (metakognisjon). Slike oppgaver kan virke frustrerende for en del elever siden løsningene av slike oppgaver er uforutsigbare (Smith & Stein, 1998). Denne kategorien stiller derfor høyere kognitive krav til elevene.

2.10 Oppsummering

Samlet sett utgjør dette det analystiske rammeverket for studien. Studien bygger på tre ulike rammeverk som alle skal anvendes til å analysere problemstillingen. Hvordan dette ble gjort i praksis utledes i metodedelen.

3. Metode

En metode har ingen verdi i seg selv. Verdien en metode har skapes ved at den legger til rette for at kunnskapen som kommer frem gjennom forskningsprosessen er valid og reliabel (Krippendorff, 2004). I min studie har jeg anvendt innholdsanalyse for å undersøke lærebøkene. Nedenfor følger en redegjørelse av innholdsanalyse. Deretter følger forklaring av hvilke metodologiske grep jeg har foretatt i denne studien. Til sist kommer en diskusjon av validiteten, reliabiliteten og etiske betraktninger knyttet til studien.

3.1 Innholdsanalyse

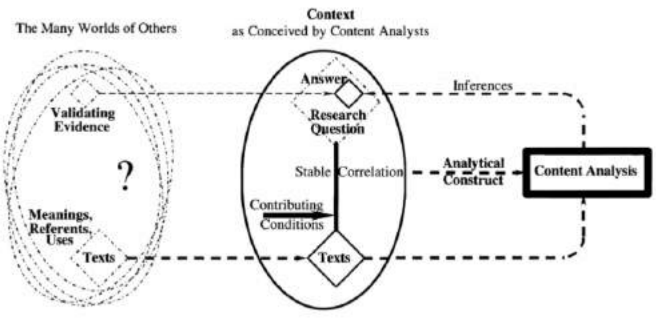
Når en analyserer skrevne tekster analyserer en ofte tekster som har et annet mål enn å bli analysert. De har som regel en annen mottaker enn forskeren (Krippendorff, 2004). Tekstene blir forstått i en kontekst og denne konteksten er det viktig at forskeren har med seg inn i analysen av dataen. Krippendorff (2004) hevder at det er viktig at forskeren anvender analytiske rammer som ivaretar konteksten når teksten blir analysert. Med dette menes at dersom en analyserer en tekst uten å ta hensyn til konteksten, kan en få resultater og funn som ikke har noen verdi. I denne studien ble det derfor viktig å være klar over at lærebøkene jeg analyserte var skrevet til elevene. Det gjør igjen at forklaringer, eksempler og oppgaver må forenkles og den matematiske presisjon må kanskje i noen grad vike for å gjøre lærestoffet tilgjengelig for elevene. Dette kan redusere de matematiske kravene som stilles av oppgavene i boken ved at oppgavene blir mer formaliserte og rutinepregede (Love & Pimm, 1996).

Innholdsanalyse kan defineres som *"a research technique for making replicable and valid inferences from texts (or other meaningful matter) to the contexts of their use"* (Krippendorff, 2004, s. 18). Med teknikker mener Krippendorff (2004) prosedyrer som gir nye innsikter og autoritet til funnene uavhengig av forskeren selv. Det at metodene skal være replikerbare innebærer at metodene må være eksplisitt og tydelig formulerte og de må anvendes likt på alle forskningsenheter, dette for å sikre at det kan gjentas av andre forskere på et senere tidspunkt med samsvarende konklusjoner.

En fordel med innholdsanalyse er at det tar hensyn til konteksten i tillegg til at en kan velge et fleksibelt forskningsdesign tilpasset forskningsobjektet (Krippendorff, 2004). Innholdsanalyse kan brukes enten som en kvalitative metode, som en kvantitativ metode eller som en blanding. Jeg brukte i min studie en mix av metoder med elementer fra både kvalitativ og kvantitativt forskningsdesign. Det er dette Cresswell (2014) kaller for mixed-methods. Konkret i studien hadde jeg en kvantitativ tilnærming da jeg undersøkte transformasjonene og de kognitive kravene i oppgavene. Den kvalitative tilnærmingen kom særlig frem da jeg analyserte læringsmålene, eksemplene i lærebøkene og trakk frem enkelte observasjoner i forklarende tekst og figurer.

Innholdsanalyse kan gjennomføres enten som en induktiv eller en deduktiv metode. En induktiv tilnærming anvendes når en ikke har så mye kunnskap om forskningsobjektet fra før. Da utleder en teori og analyseverktøy etterhvert med utgangspunkt i forskningsobjektet (Elo & Kynäs, 2008). Et eksempel på dette er studien Mesa (2004) gjennomførte på 24 lærebøker i matematikk på ungdomsskolenivå. Det var en empirisk studie av oppgaver innenfor temaet funksjoner. Her ble kategorier og analyseverktøy utledet fra noen teoretiske prinsipper og oppgavene som ble analysert. Deretter ble kategoriene mer grupperte og samlet sammen. Det motsatte av dette, deduktiv, vil si at en begynner med teorien og anvender denne gjennom analyser på forskningsobjektet til å fremskaffe kunnskap. Da har en klare kategorier og koderegler som strukturerer analysen (Elo & Kynäs, 2008). Denne studien bygget på en deduktiv tilnærming. Jeg anvendte allerede etablerte teoretiske rammeverk til å analysere lærebøkene.

Krippendorff (2004) har utarbeidet en modell for hvordan en innholdsanalyse kan foregå:



Figur 3.1: Illustrasjon av en innholdsanalyseprosess (Krippendorff, 2004, s. 30).

Det første som møter forskeren er en mengde tekst. Forskeren utarbeider et forskningsspørsmål som han ønsker å finne svar på ved å undersøke den foreliggende teksten. Forskeren velger en kontekst som han bruker for å skape mening i teksten. Videre velger forskeren ut et analytisk rammeverk som operasjonaliserer det han kjenner til om konteksten fra før. Ut ifra dette arbeidet trekker forskeren konklusjoner som skal besvare forskningsspørsmålet. Til sist må forskningen valideres for å sikre at funnene er reelle (Krippendorff, 2004). I denne studien var teksten lærebøker. Forskningsspørsmålet for studien var å sammenligne læringsmulighetene i lærebøkene som var laget til den nye læreplanen med læringsmulighetene i de foregående bøkene. Konteksten var ungdomsskoleelever og læringsmålene var knyttet til emnet funksjoner. Det analytiske rammeverket var tredelt. For det første sjekket jeg hvilke transformasjoner jeg kunne finne i eksempler og oppgaver, hvilke kognitive krav oppgavene inneholdt og analyserte eksempler og oppgaver i MDI-rammeverket. Ut ifra dette arbeidet trakk jeg konklusjoner som ble forsøkt validert gjennom de operasjonaliseringene, metodene og rammeverkene jeg anvendte.

Logikken bak å bygge opp et forskningsdesign på denne måten er, ifølge Krippendorff (2004), at studien skal fremme sammenhengende forskning. Målet er å behandler all data likt, og å sørge for at forskeren ikke favoriserer et utfall. I tillegg til å forsøke å hindre at støy kan påvirke resultatet. Dette gjøres ved å anvende effektive prosessuelle steg.

En utfordring med innholdsanalyse er at det ikke finnes en riktig måte å gjennomføre en studie på. En forsker må tilpasse designet slik at det er best mulig tilpasset problemet forskeren forsøker å besvare (Weber, 1990). På den annen side kan dette og være en fordel siden en kan tilpasse analysen til mange ulike kontekster (Harwood & Garry, 2003). En annen ulempe med innholdsanalyse av lærebøker er at det er ganske omfattende og tidkrevende, samt at det ikke finnes en garanti for at det forskeren tolker ut av teksten er det samme som eleven leser ut av teksten (Kongelf, 2019). Det er heller ingen garanti for at en annen forsker leser teksten på samme måten. Kongelf (2019) hevder derfor i forlengelsen av dette at det er viktig at en er tydelig på hvilke metodologiske valg en har foretatt for å sikre en intersubjektiv forståelse av datagrunnlaget og analysene.

3.2 Utvalg

Når en skal gjennomføre en studie er en avhengig av å ha et utvalg som en kan studere. I dette delkapitlet begrunner jeg hvilke valg jeg tok med hensyn til hvilke læreverk jeg skulle bruke, hva av lærebøkene jeg skulle bruke og hvordan jeg definerte en oppgave.

3.2.1 Valg av læreverk

I en master fra 2014 hevdes det at de meste solgte læreverkene i matematikk er Faktor og Grunntall. Tallene har Elisabeth Resvoll fått av en redaktør i et større forlag i 2012 (Resvoll, 2014). I en annen master fra 2018 hevder Strand og Heimstad (2018) at forlaget Cappelen Damm i en mailkorrespondanse skriver at de tror Maximum og Faktor er de mest brukte, og at Grunntall fra 2006 som tidligere var markedsledende var i ferd med å byttes ut i skoleverket. Læreverket Maximum var nytt i 2013 og kom som et svar på den reviderte læreplanen i 2013. Faktor ble og oppdatert etter den reviderte læreplanen, mens Grunntall la ut en revidert del på nettsidene sine. For å få et bedre grunnlag for å vurdere om lærebøkene Faktor og Maximum var blant de mest brukte, utførte jeg en undersøkelse. Jeg lette på samtlige ungdomsskoler i Rogaland sine nettsider for å finne ut hvilket læreverk de benyttet. Dette gjorde jeg i januar 2020. På de nettsidene dette ikke fremkom sendte jeg mail til ungdomsskolene. Dette ga følgende oversikt:

Læreverk	Antall skoler (58)
Nummer	2
Faktor	25
Maximum	10
Sirkel	2
Tetra	5
Nye Mega	4
Grunntall	9
Ingen	1

Tabell 3.1: Oversikt over bruk av læreverk i Rogaland januar 2020.

Tabell 3.1 viser at Faktor var et mye brukt læreverk og at Maximum så vidt var mer anvendt enn Grunntall. Jeg innså at en fare ved å bare undersøke skolene i Rogaland var at det kunne gi en skjevfordeling sammenlignet med resten av landet. Det var og en mangel med denne undersøkelsen at en god del ungdomsskoler ikke svarte. Totalt fant jeg ut hvilket læreverk 58 av 91 ungdomsskoler i Rogaland anvendte. Jeg valgte imidlertid å lene meg på tidligere masterstudier som hevder at Maximum og Faktor er de mest brukte læreverkene (Strand & Heimstad, 2018), siden dette var sammenfallende med mine resultater.

Cai og Cirillo (2014) hevder at når en forsker på den intenderte læreplanen bør en kunne begrunne hvor mange bøker en skal analysere og hvilke bøker en skal analysere. Bakgrunnen for mitt valg var at Faktor fremsto som det mest anvendte læreverket, mens Maximum var et såpass nytt læreverk som virket å ha tatt markedsandeler fra læreverk som Grunntall. Jeg valgte og å begrense meg til to læreverk på grunn av oppgavens omfang, det ble derfor naturlig å undersøke noen av de mest brukte lærebøkene. Siden jeg og skulle undersøke de to nye utgavene av lærebøkene som ble utgitt i forbindelse med den nye læreplanen ville det blitt for omfattende å undersøke flere enn to læreverk.

Ettersom det kom en ny læreplan høsten 2020 ønsket jeg å undersøke om det var noen endring i hvilke læringsmuligheter disse bøkene gav, og i tilfelle hvilke endringer dette var. Jeg skulle altså sammenligne en utgave utgitt i 2014/2015 i forbindelse med revisjonen av læreplanen og ny utgave i forbindelse med fagfornyelsen 2020. Jeg valgte å undersøke lærebøkene som var skrevet av de samme forfatterne som bøkene fra forrige læreplanrevidering. Dette for å sammenligne endringer foretatt av forfatterne på tvers av de to læreplanene. Begrunnelsen for hvorfor jeg valgte å gjøre det på denne måten fant jeg i tidligere forskning gjort i Norge i senere tid.

Johnsen og Storaas (2015) fant at 90,2 % av oppgavene i Faktor (1, 2 og 3) kunne kategoriseres under lavere kognitive nivåkrav. De undersøkte bøker som kom ut rett etter kunnskapsløftet i 2006. Bergheim (2017) undersøkte kognitive krav i tre læreverk blant annet Faktor og Maximum og fant at i Faktor hadde 90% lavere kognitive krav, mens i Maximum var det 83 %. Strand og Heimstad (2018) fant at 84 % av oppgavene i Faktor (8, 9 og 10) og 78 % av oppgavene i Maximum kunne kategoriseres under lavere kognitive krav. Strand og Heimstad (2018) og Bergheim (2017) har undersøkt en revidert utgave som kom ut i 2013. Strand og Heimstad (2018) diskuterer ikke forskjellen utover at de mener at det er små forskjeller i prosentandelen og at det kan skyldes ulike definisjoner og oppfattelse av kategorier. Noe som kunne vært interessant å undersøkt var hvorvidt forskjellen i prosentpoeng mellom Johnsen og Storaas (2015) og Strand og Heimstad (2018) ikke bare skyldes ulike definisjoner og kategoriseringer, men at lærebokforfatterne faktisk endret en del på oppgavene. Cappelen Damm skriver i emnebeskrivelsen til den oppdaterte boken at de har lagt inn flere frie oppgaver i den reviderte versjonen, noe som skulle tilsi at en slik prosentandel kunne endres (Cappelen Damm, u.å.). I tillegg har både Espeland (2017) og Kongelf (2019) uttrykt et håp om at deres forskning kan føre til endring i lærebøkene. Ved å sammenligne to lærebøker skrevet til den forrige læreplanen med to lærebøker skrevet etter den nye læreplanen håpet jeg å kunne avdekke om det var gjort noen endringer, målt ut fra de teoretiske rammeverkene mine, basert på læreplanen. Det var derfor viktig å sammenligne læreverk som var skrevet av de samme forfatterne. Dermed kunne jeg se bort fra forfattere som en variabel som kunne påvirke resultatene.

3.2.2 Valg av læremidler

Til alle matematikkbøker i Norge finnes det en mengde ulike læremidler. Alle læreverk i Norge har en grunnbok. Her finner en eksempler, forklaringer og oppgaver. Det finnes og oppgavebøker. Dette er bøker som er designet for at elevene skal få mulighet til å repetere fagstoffet som gjennomgås i grunnboken. Ofte er oppgavebøkene delt i ulike nivåer slik at alle elever skal ha oppgaver tilpasset sitt nivå. Den viktigste begrunnelsen for å se bort fra disse i denne studien er at det hadde blitt for omfattende å undersøke funksjonskapittelet i fire oppgavebøker i tillegg til grunnbøkene. Videre er oppgavene og eksemplene nært knyttet sammen i MDITx-rammeverket, slik at jeg så det som mer naturlig å undersøke grunnbøkene enn oppgavebøkene. I tillegg til oppgavebøker har de fleste forlagene digitale løsninger som de tilbyr. Disse kunne jeg og undersøkt nærmere, men som for oppgavebøkene valgte jeg å ikke inkludere disse på grunn av oppgavens omfang.

Det er og viktig å legge til at jeg valgte å ta med to bøker fra Faktor. Dette er Faktor 9 og 10. Begrunnelsen for dette var at LK06 hadde alle læreplanmålene for ungdomsskolen etter 10. klasse. Det var opp til de enkelte lærebokforfatterne hvilket trinn de ønsket å legge de ulike læringsmålene på. Det kunne derfor tenkes at forfatterne av lærebøkene hadde tatt ulike valg for når de ulike emnene skulle presenteres. For å sørge for at lærebøkene Faktor og Maximum 9 fra den reviderte læreplanen i 2013 dekket mest mulig av de samme læringsmålene valgte jeg å inkludere en god del av Faktor 10. Det vil si at det eneste jeg utelot fra Faktor 10 var andregradsfunksjoner og omvendt proporsjonale funksjoner da disse emnene var plassert i Maximum 10. Det samme problemet eksisterte ikke i samme grad for den nye læreplanen. I den nye læreplanen er kompetansemålene ordnet etter årstrinn. Forfatterne av de to lærebøkene Maximum 8 2.utg og Matematikk 8 forholdt seg derfor til de samme kompetansemålene da de utformet bøkene.

3.2.3 Definering av oppgaver

Gjennom kodeprosessen behandlet jeg hver deloppgave som en egen oppgave som ble analysert for seg. Det vil si at en oppgave som inneholdt tre merkede deloppgaver a), b) og c) ble regnet som tre oppgaver. Det som gjorde kategoriseringen litt ekstra utfordrende var at Maximum i tillegg hadde et tredje nivå for oppgaveinndeling. Måten dette er gjennomført på er at en deloppgave merket a) kan deles opp i nye oppgaver nummerert med tall som i oppgave 3.14 i Maximum 8.

3.14 Samarbeid to og to.

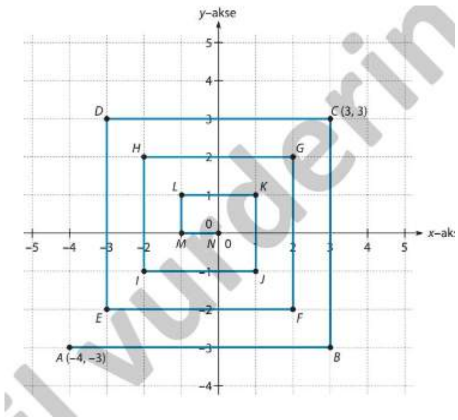
a Finn et funksjonsuttrykk, og regn ut funksjonsverdiene til 2, 4 og 6 for funksjonene som

1. ganger et tall med 4 og legger til 5
2. legger 2 til et tall og ganger svaret med 3
3. trekker 4 fra et tall og deler svaret på 2
4. ganger et tall med seg selv

b Utforsk funksjonene videre, og forklar om de lineære eller ikke.

Figur 3.2: Oppgave 3.14 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 167).

I de tilfelle der oppgavene var nummerert slik valgte jeg å kategorisere det som egne oppgaver. Strand og Heimstad (2018) valgte å ikke ta hensyn til dette tredje nivået, og jeg er åpen for at det kan ha vært en feilvurdering, men slik som i oppgave 3.14 i Maximum 8 oppfatter jeg nummereringen som en klar indikasjon på at dette skulle klassifiseres som egne oppgaver. Fordelen til Strand og Heimstad (2018) er at deres vurdering ikke åpner opp for tvilstilfeller, mens jeg fikk noen sånne. Et eksempel på dette er oppgave 3.3 i Maximum 8.



Figur 3.3: Oppgave 3.3 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 158).

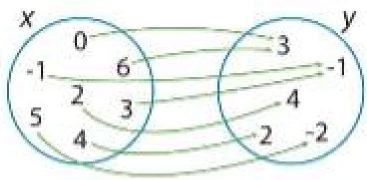
I denne oppgaven skal elevene finne koordinatene til alle punktene i koordinatsystemet i deloppgave a). Jeg valgte å kategorisere dette som en deloppgave siden bokstavene som stod i koordinatsystemet var merket med navnet til punktet og ikke nødvendigvis måtte være en nummerering av oppgaver. Noe som underbygget dette var at koordinatene til punkt A og C allerede var gitt, som betydde at punktene A og C ikke kunne være egne oppgaver. For Maximum 8 innebar det at 13 flere deloppgaver ble klassifisert, mens det i Maximum 9 ble klassifisert 20 flere deloppgaver en viss jeg hadde brukt klassifiseringen til Strand og Heimstad (2018).

3.3 Transformasjoner

Da jeg analyserte transformasjonene i oppgavene brukte jeg Janviers (1978) diagram til å undersøke i hvilken grad elevene ble gitt muligheten til å jobbe med alle de ulike representasjonene av funksjoner. Jeg analyserte oppgavene i rekkefølge og plasserte dem inn i kategorien som passet. Dette gjør det ganske oversiktlig, men en utfordring er at Janvier (1978) ikke definerer disse transformasjonene. Jeg har derfor forsøkt å definere de ulike representasjonene og transformasjonene. En liste med definisjoner av de ulike transformasjonene mellom representasjonene finnes i vedlegg 2.

3.3.1 Definisjon av representasjoner

I Janviers (1978) diagram identifiseres fire representasjoner. Den første representasjonen er en situasjon eller en verbal beskrivelse. I resten av oppgaven omtales denne representasjoner enten som situasjon eller forkortelsen S. Jeg tolket en situasjon som en skriftlig beskrivelse av funksjonen. Dette kunne være en oppgavebeskrivelse, en forklaring eller beskrivelse av funksjonen. Denne representasjonen kunne for eksempel være mål-representasjon når elevene ble bedt om å tolke en graf. Den andre representasjonen er en tabell. Den omtales videre av og til bare med en stor T. En tabell definerte jeg som representasjoner uttrykt gjennom koordinater eller oppstilling i tabell. Maximum 8 fra 2020 har og innført mengderinger. Disse tolket jeg og under representasjonen tabell.



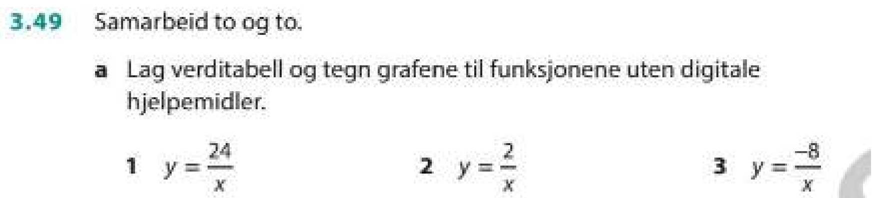
Figur 3.4: Mengderinger i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 159).

Dersom en oppgave etterspurte et konkret svar fra en graf tolket jeg det som Janvier (1987) omtaler som avlesing fra graf til tabell. Dette fordi svaret finnes ved å lese av diagrammet og krever ikke en tolking av hvordan en skal forstå diagrammet eller hvordan grafene utvikler seg. Tabell som representasjon kunne med andre ord være en tabell, mengderinger, en koordinater, eller en gitt koordinat i et koordinatsystem. Den tredje representasjonen er graf. Denne representasjonen omtales av og til som G. Denne representasjonen finner en i det kartesiske koordinatsystemet. Den største delen av oppgavene som hadde graf som mål var når elevene ble bedt om å tegne en graf enten på ark eller grafisk. Mens flesteparten av transformasjonene som hadde graf som start-representasjon var knyttet til oppgaver der en skulle finne svaret direkte i en gitt graf eller tolke grafen for å kunne beskrive en situasjon. Den siste representasjonen er formel. Denne omtales av og til som F. Denne representasjonen gjenkjente jeg ofte som et algebraisk uttrykk. Å bevege seg til formel innebar å gjenkjenne elementer i start-representasjonen som kunne overføres til formelen. Når formelen var start-representasjon ble den ofte brukt til å lage tabeller, regne ut verdier eller lage grafer. En transformasjon mellom to ulike representasjoner omtales med en pil fra en representasjon til en annen. En transformasjon fra graf til formel omtales som G→F. En "bidirectional" transformasjon som går begge veier beskrives med piler begge veier. "Bidirectional" transformasjon mellom en tabell og en situasjon vil derfor omtales som T↔S.

3.3.2 Tolking av transformasjonene i oppgavene

Bakgrunnen for å forske på transformasjonene i oppgavene var at jeg ønsket å undersøke om elevene ble gitt muligheter til å bli kjent med hele bilde av funksjonene. Sfard (1992) hevder at elever ofte forbinder funksjoner med algebraiske uttrykk, mens Adu-Gyamfi et al. (2019) hevder at det er ulike vanskegrader på transformasjonene og store forskjeller i hvilke transformasjoner elevene behersker og møter i klasserommet. Jeg vurderte det derfor som interessant å undersøke hvilke transformasjoner elevene ble bedt om å utføre.

Hver enkelt deloppgave ble analysert for seg. Deloppgaver som inneholdt flere uttrykte transformasjoner kategoriserte jeg som flere transformasjoner i en deloppgave. Kriteriet for at det skulle bli kategorisert i flere kategorier var at deloppgaven uttrykte dette spesifikt. Et eksempel på dette var 3.49a-1 i Maximum 8.


3.49 Samarbeid to og to.

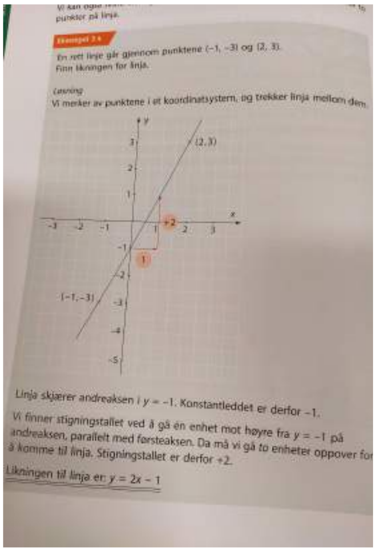
a Lag verditabell og tegn grafene til funksjonene uten digitale hjelpemidler.

1 $y = \frac{24}{x}$ **2** $y = \frac{2}{x}$ **3** $y = \frac{-8}{x}$

Figur 3.5: Oppgave 3.49a-1 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 192).

Her skulle elevene bruke formelen til å lage en verditabell, så skulle de anvende verditabellen til å tegne grafen. Transformasjonene var altså F→T og T→G. Dersom det ikke eksplisitt hadde stått at eleven skulle lage en tabell ville jeg tolket det som transformasjonen F→G. Unntaket fra dette kriteriet var dersom det rett i forkant av en oppgave var gitt et eksempel som anvendte en mellom-representasjon uten å vise en direkte transformasjon. Eksempel 3.4

og oppgave 3.13 i Faktor 10 er eksempel på en slik situasjon. I eksempelet skal en finne formelen til en funksjon ut fra to koordinater. Dette gjøres i eksemplet ved at en lager en graf og ut fra denne grafen finner en formelen til funksjonen.



En rett linje går gjennom punktene (−1, −3) og (2, 3).
Finn likningen for linja.

Vi merker av punktene i et koordinatsystem, og trekker linja mellom dem.

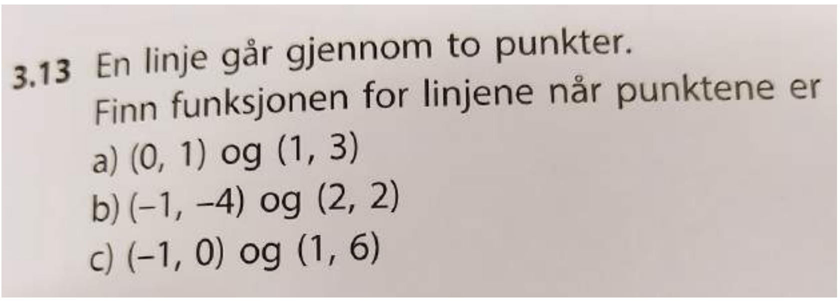
Linja skjærer andreaksen i $y = -1$. Konstantleddet er derfor −1.

Vi finner stigningstallet ved å gå én enhet mot høyre fra $y = -1$ på andreaksen, parallelt med førsteaksen. Da må vi gå to enheter oppover for å komme til linja. Stigningstallet er derfor +2.

Likningen til linja er: $y = 2x - 1$

Figur 3.6: Eksempel 3.4 i Faktor 10 (Hjardar & Pedersen, 2015, s. 116).

Oppgave 3.13 som kommer rett etter dette eksemplet tolket jeg derfor som transformasjonene T→G og G→F, selv om det å gå via graf ikke stod omtalt i oppgaven.



3.13 En linje går gjennom to punkter.
Finn funksjonen for linjene når punktene er
a) (0, 1) og (1, 3)
b) (−1, −4) og (2, 2)
c) (−1, 0) og (1, 6)

Figur 3.7: Oppgave 3.13 i Faktor 10 (Hjardar & Pedersen, 2015, s.117).

Da jeg analyserte en deloppgave og det kunne være litt uklart hvor utgangspunktet var, tok jeg utgangspunkt i der forrige deloppgave sluttet. Et eksempel på dette kunne være a) lag en tabell, b) tegn en graf. Oppgave b tolket jeg da som T→G . Dette selv om formelen kanskje var gitt i oppgavetekst og det derfor like gjerne kunne vært tolket som F→G.

I enkelte oppgaver i Maximum kunne eleven selv velge uttrykksmåte. Da jeg tolket disse oppgavene tok jeg en vurdering på hvilken uttrykksmåte jeg selv antok ville være mest nærliggende tatt omkringliggende oppgaver og eksempler i betraktning. Oppgave 3.48 fra Maximum 8 er et eksempel på dette. Her skal elevene selv velge fremstillingsmåte. Denne tolket jeg som S→G og G→S. Begrunnelse for dette er at jeg mente det mest naturlige var å putte situasjonen inn i et diagram og bruke diagrammet til å analysere situasjonen. Siden elevene i oppgaven blir bedt om å finne flere alternative fremstillinger kunne jeg selvsagt tolket dette som situasjon til tabell, situasjon til formel m.m., og så kunne elevene brukt tabellen eller formel til å beskrive situasjonen.

3.48 Et dagskort i en alpinheis koster 390 kr. En enkelttur koster 45 kr. Samarbeid to og to. Bruk det dere kan om funksjoner og grafer til å analysere situasjonen. Presenter analysen skriftlig, slik at dere viser hvilket alternativ som lønner seg for hvilke kunder. Finn flere alternative fremstillinger.

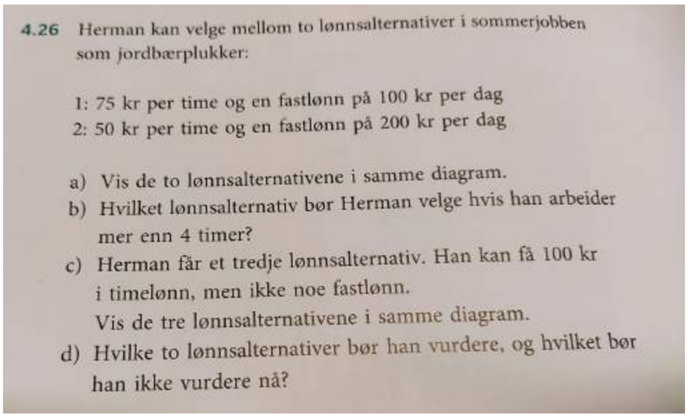
Figur 3.8: Oppgave 3.48 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 190).

3.3.3 Tolking av vanskegrader av transformasjoner

I teoridelen viste jeg at Adu-Gyamfi et al. (2019) hevder at det er stor overensstemmelse i rangeringen av vanskegrad i de studiene de har gjennomført. Dette fremgår og av figur 2.8 på side 25. Det er allikevel noen forskjeller. Da jeg skulle rangere vanskegradene måtte jeg derfor ta et valg på hvilken rangering jeg skulle forholde meg til. Siden det var så stor overensstemmelse mellom de teoretisk etablerte transformasjonene og transformasjonene som fremkommer i de empiriske studiene, valgte jeg å ta utgangspunkt i den teoretiske inndelingen. Dette gjorde jeg for det første siden disse er delt inn i fire likeverdige grupper og de kan begrunnes teoretisk ut fra egenskaper med transformasjonen. Det var enklere å kategorisere vanskegraden i fire kategorier enn sju kategorier. For det andre er ikke kategoriene ordnet etter relativ vanskegrad. Kategoriene er ikke ordnet på en skala som sier noe om hvor mye vanskeligere en kategori er enn en annen. Å anvende syv kategorier der forskjellen i vanskegrad på kategoriene kunne variere stort kunne derfor gi misvisende resultater. For det tredje er den teoretisk begrunnede rangeringen testet på ulike grupper (Adu-Gyamfi et al., 2019), mens den empiriske studien fra 2019 undersøker lærerstudenters forståelse. Dette er en annen gruppe enn ungdomsskoleelever som er målgruppen for tekstene jeg har analysert. Adu-Gyamfi et al. (2019) hevder allikevel at den store overenstemmelsen på tvers av forskningsobjekter styrker rangeringens troverdighet, og jeg valgte derfor å anvende de teoretisk etablerte kategoriene i min studie.

3.3.4 Tolking av “bidirectional” transformasjoner

Jeg undersøkte og i hvilken grad lærebøkene fulgte Janvier (1987) og Duval (2006) sin oppfordring om at å bevege seg mellom ulike representasjoner best ble gjennomført i par. Dette analyserte jeg først ved å lete etter oppgaver der jeg fant transformasjoner som var “bidirectional”. I tabellene i resultatdelen er disse transformasjonene merket med en pil som peker i begge retninger (↔). For at en oppgave skulle kategoriseres som en “bidirectional” oppgave krevde jeg at det fantes to deloppgaver som anvendte de inverse transformasjonene. Et eksempel på en slik oppgave kan en finne i Matematikk 8 oppgave 4.26. I oppgave a) skal elevene bevege seg fra situasjon til graf. Elevene vil nok ofte gå via formel her, men siden dette ikke er uttalt er den tolket som fra situasjon til graf. I oppgave b skal en gjøre den inverse transformasjonen, altså fra graf til situasjon. Her skal nemlig elevene anvende diagrammet til å beskrive en situasjon det Herman jobber mer enn 4 timer.


4.26 Herman kan velge mellom to lønnsalternativer i sommerjobben som jordbærplukker:

1: 75 kr per time og en fastlønn på 100 kr per dag
2: 50 kr per time og en fastlønn på 200 kr per dag

a) Vis de to lønnsalternativene i samme diagram.
b) Hvilket lønnsalternativ bør Herman velge hvis han arbeider mer enn 4 timer?
c) Herman får et tredje lønnsalternativ. Han kan få 100 kr i timelønn, men ikke noe fastlønn. Vis de tre lønnsalternativene i samme diagram.
d) Hvilke to lønnsalternativer bør han vurdere, og hvilket bør han ikke vurdere nå?

Figur 3.9: Oppgave 4.26 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 274).

Siden jeg bare fant et lite utvalg av disse “bidirectional” oppgavene i bøkene undersøkte jeg og om det fantes transformasjoner og inverse transformasjoner innad i delkapitlene. Delkapitler definerte jeg utfra overskrifter. Disse transformasjonene kalte jeg for parvise transformasjoner.

3.3.5 Tolking av sammensatte transformasjoner og ikke-kategoriserte oppgaver

Adu-Gyamfi et al. (2019) har identifisert transformasjoner som de kaller “iterative”. Disse har jeg ikke undersøkt i datamaterialet mitt, da antall oppgaver som var “bidirectional” var ganske lite. For at en oppgave skal kunne klassifiseres som en “iterative” transformasjon, må den inneholde en “bidirectional” transformasjon og en “unidirectional” transformasjon.

Utvalget ville derfor vært såpass lite, at jeg ikke anså det som hensiktsmessig å lete etter disse transformasjonene. I stedet for å lete etter "iterative" transformasjoner identifiserte jeg oppgaver som endte opp i samme representasjon som de startet, men som ikke kunne defineres som en "bidirectional" transformasjon fordi transformasjonene gikk innom en eller flere andre transformasjoner. Et eksempel på dette er oppgave 4.23 i Matematikk 8. Denne ble kategorisert som S → F → G → S.

4.23 Raketten Saturn V brakte mennesket til månen for første gang den 20. juli 1969. Den kunne oppnå en hastighet på 20 000 km/h.

a) Lag et funksjonsuttrykk $f(x)$ som viser hvor mange kilometer den tilbakela på x timer.

b) Tegn grafen til $f(x)$.

c) Bruk grafen til å finne ut hvor mange kilometer raketten hadde tilbakelagt etter 3 timer.

d) Månen er omkring 400 000 km unna jorda. Bruk grafen til å finne ut hvor lang tid raketten brukte på turen til månen.

Figur 3.10: Oppgave 4.23 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 272).

Ved å sammenligne de to ovenforstående oppgavene 4.23 og 4.26 i Matematikk 8 er det klart at det ikke er store forskjeller. At den ene da ble kategorisert som "bidirectional" og den andre ikke innså jeg at kunne fremstå inkonsekvent. Jeg valgte imidlertid å beholde en slik fordeling med bakgrunn i det etablerte prinsippet om å kategorisere uttrykte transformasjoner. Oppgave 4.23 ble derfor ikke definert som "bidirectional", siden den ikke inneholdt en transformasjon og dens inverse. Mange elever vil kanskje likevel anvende de samme transformasjonene til de to oppgavene. For å hindre en skjevfordeling med bakgrunn i slike valg, valgte jeg derfor å kategorisere oppgaver som 4.23 som sammensatte transformasjoner. En sammensatt transformasjon ble definert som en oppgave der oppgaven hadde samme start og mål representasjon men der mellom-representasjoner gjorde at transformasjonene ikke kunne defineres som "bidirectional".

Noen oppgaver lot seg ikke klassifisere. Dette var oppgaver der elevene ikke skulle gjennomføre en transformasjon. Oppgave 2.18a i Maximum 9 er et eksempel på en slik oppgave. Her skal elevene lage en glider i et dynamisk geometriprogram. Det kan ikke knyttes en transformasjon til en slik oppgave.

2.18 I denne oppgaven skal du bruke dynamisk geometriprogram

a Lag en glider a, med verdier fra −5 til 5.

Figur 3.11: Oppgave 2.18a i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a, s. 79).

3.3.6 Transformasjoner i forklarende tekst og eksempler

I tillegg til å tolke oppgavene lette jeg etter transformasjoner i eksemplene og forklarende tekst. Jeg lette i eksemplene etter eksplisitte forklaringer og redegjørelser av de heuristiske metodene som kan anvendes for å bevege seg mellom transformasjonene. Begrunnelsen for dette fant jeg hos Bills et al. (2006) som hevder at dersom elevene skal tilegne seg generaliteter fra et eksempel, må disse uttrykkes eksplisitt.

3.3.7 Kodeskjema for transformasjoner

Da jeg kategoriserte transformasjonene plasserte jeg de inn i et regneark for å lettere kunne få en oversikt over de ulike transformasjonene. Et utdrag fra regnearket til Maximum 9 finnes nedenfor. I kolonne A stod navnet på delkapittelet. I kolonne B plasserte jeg oppgavenummeret. I kolonne C til R ble de ulike transformasjonene kategorisert. I kolonne S plasserte jeg deloppgavene som ikke kunne kategoriseres. I kolonne T ble det kodet inn et tall som representerte en "bidirectional" transformasjon. Dersom det stod et tall i kolonne U representerte dette en sammensatt transformasjon dersom det var et positivt tall, mens et negativt tall representerte en oppgave som manglet en representasjon for å kunne kategoriseres som en sammensatt transformasjon. Det kunne f.eks. være at oppgaven krevde følgende transformasjoner F → T → G → S. Hadde oppgaven krevd at elevene skulle finne formelen ut ifra en situasjon i forkant ville dette blitt definert som en sammensatt transformasjon.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1		Fra	Situasjon				Tabell				Graf				Formel								
2	Del	Opgnr/Til	S	T	G	F	S	T	G	F	S	T	G	F	S	T	G	F	IK	BI		T	T2
173	Delkapittel 4	2.39a				1															2	4	
174	jonale størrelser	2.39b															1					15	
175		2.39c									1											9	
176		2.40a		1																		2	
177		2.40b	1																			1	
178		2.40c								1												8	
179		2.40d	1																			1	
180		2.41a	1																			1	
181		2.41b	1																			1	
182		2.41c				1															2	4	
183		2.41d				1																4	
184		2.41e									1						1					9	15
185		2.42	1																			1	
186		2.43	1																			1	
187		2.44a		1																4		2	
188		2.44b					1															5	
189		2.44c															1					15	
190		2.45a	1																	6		1	
191		2.45b	1																			1	
192		2.45c				1																4	
193		2.45d													1							13	
194		2.46	1																			1	
195		2.47	1																			1	
196		2.48a					1															5	

Figur 3.12: Utdrag av kodeskjema for transformasjoner i lærebøkene.

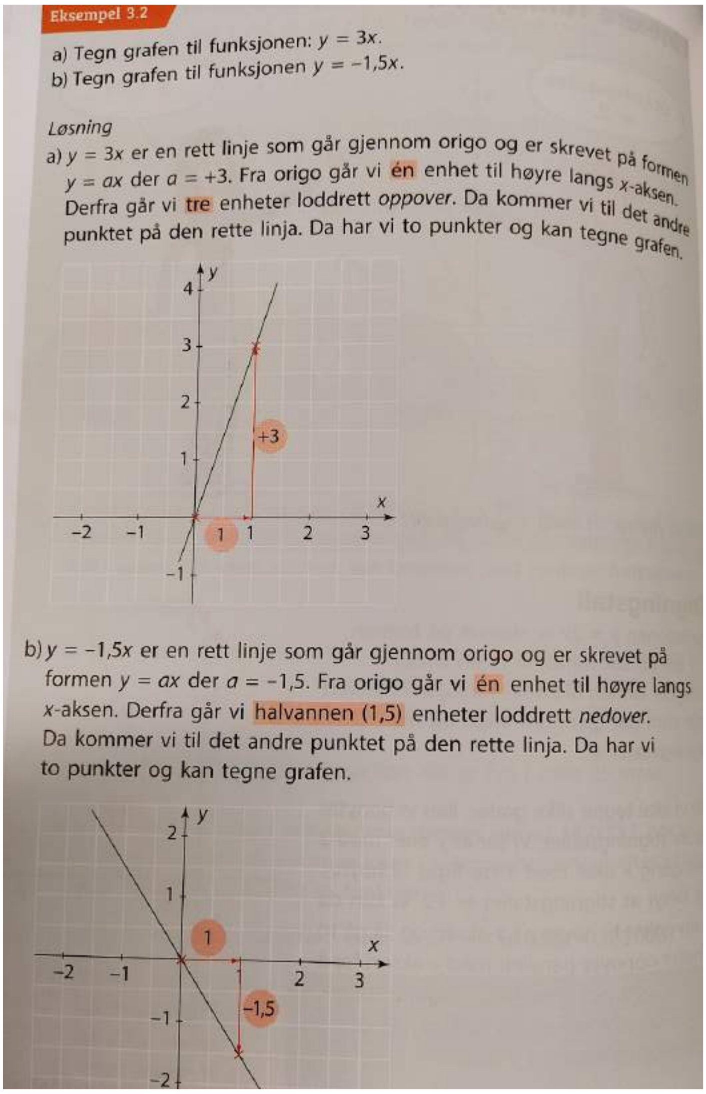
3.4 Kodeprosedyre av læringsmål, eksempler og oppgaver

3.4.1 Læringsmål

I teoridelen etablerte jeg at det i en situasjon der læring foregår vil det være noen konkrete læringsmål. Disse kan være overordnede ferdighetsmål eller konkrete læringsmål knyttet til de enkelte timene (Adler & Ronda, 2015). Da jeg undersøkte lærebøkene brukte jeg de skrevne læremålene i begynnelsen av kapitlene eller delkapitlene til å identifisere hva forfatterne av lærebøkene mente var læringsmålene for emnet funksjoner. En begrunnelse for at dette er en legitim måte å analysere læringsmålene fant jeg hos forfatterne av Maximum som skriver at disse er skrevet med kompetansemålene i læreplanen som utgangspunkt (Tofteberg et al., 2014b). Jeg sammenlignet læringsmålene i bøkene skrevet til den reviderte læreplanen i 2013 med bøkene skrevet til læreplanen i 2020. Jeg undersøkte og om det var noen forskjell mellom bøkene. Begrunnelsen for å gjøre det på denne måten var at det er lite sannsynlig at emner som ikke er omtalt i læreboken behandles i klasserommet (Alajmi, 2012; Tarr et al., 2006), og det er mer sannsynlig at elevene behersker et læringsmål dersom det er omtalt i bøkene enn dersom det ikke er det (Stein et al., 2007). Jeg antok derfor at en forskjell i læringsmål ville gi forskjell i læringsmuligheter.

3.4.2 Eksempler

Før jeg startet å analysere lærebøkene tenkte jeg at andelen som omhandlet eksempler skulle utgjøre en god del av datamaterialet i studien. Ronda og Adlers (2017) rammeverk for lærebokanalyse har i sin gjennomgang av to leksjoner mange eksempelrom innenfor hvert enkelt delkapittel. Deres analyse av leksjonene viser at det kan være mange eksempelrom innenfor en leksjon i forklarende tekst, tabeller, utarbeidede eksempler og i oppgaver. Etter at jeg kom over Adu-Gyamfi og Bossé sin forskning, måtte jeg ta et valg for å begrense omfanget av studien. Dette gjorde at jeg minsket omfanget av eksempler, og valgt å bare undersøke utarbeidede eksempler. Jeg delte kapitlene opp i delkapitler og behandlet hvert delkapittel som et eksempelrom. I eksemplene undersøkte jeg hvorvidt de ga mulighet for at elevene opplevde kontrast (K), generalisering (G) og fusjon (F) som beskrevet i teoridelen. For å illustrere hvordan jeg jobbet viser jeg nedenfor begrunnelsen for kategoriseringen av eksempel 3.2 i Faktor 10.



Eksempel 3.2

a) Tegn grafen til funksjonen: $y = 3x$.
b) Tegn grafen til funksjonen $y = -1{,}5x$.

Løsning

a) $y = 3x$ er en rett linje som går gjennom origo og er skrevet på formen $y = ax$ der $a = +3$. Fra origo går vi én enhet til høyre langs x-aksen. Derfra går vi tre enheter loddrett *oppover*. Da kommer vi til det andre punktet på den rette linja. Da har vi to punkter og kan tegne grafen.

b) $y = -1{,}5x$ er en rett linje som går gjennom origo og er skrevet på formen $y = ax$ der $a = -1{,}5$. Fra origo går vi én enhet til høyre langs x-aksen. Derfra går vi halvannen (1,5) enheter loddrett *nedover*. Da kommer vi til det andre punktet på den rette linja. Da har vi to punkter og kan tegne grafen.

Figur 3.13: Eksempel 3.2 i Faktor 10 (Hjardar & Pedersen, 2015, s. 112).

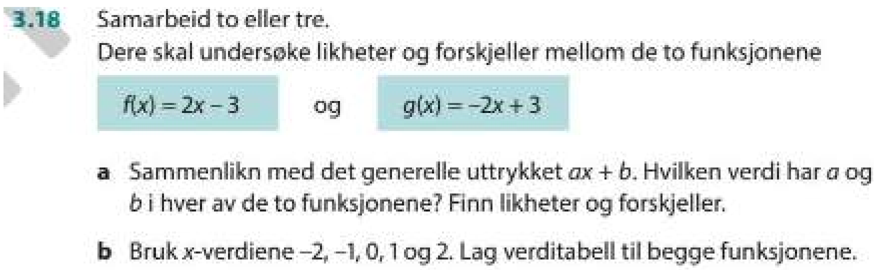
Dette eksemplet kategoriserte jeg som kontrast og generalisering. Grunnen til at jeg har kategorisert dette som kontrast er fordi eksemplet viser hvordan en tegner både en funksjon med negativt og positivt stigningstall. Grunnen til at jeg kategoriserte dette som generalisering er fordi eksemplet ved hjelp av to ulike koordinater viser fremgangsmåten for å sjekke om de ligger på linjen til funksjonen. Det generaliserende her er at eksemplet viser at det er samme fremgangsmåte uansett om x er negative eller positiv.

Jeg anvendte og Ronda og Adler (2017) sin nivåinndeling for å bestemme hvilket nivå eksemplene i et delkapittel befant seg på. Det å anvende nivåinndelingen kan være noe misvisende siden jeg bare valgte å analysere de utarbeide eksemplene og ikke undersøkte eksempelrom i figurer, tabeller, forklarende tekst og oppgaver. Årsaken til at jeg likevel valgte å inkludere dette var for å kunne sammenligne læreverkene på tvers av læreplaner og forlag, og jeg kan derfor ikke hevde at nivåinndelingen nødvendigvis sier noe om den objektive kvaliteten på eksempelrommene i lærebøkene, men den kan kanskje peke på den relative kvaliteten på de utarbeide eksemplene.

3.4.3 Oppgaver

Alle oppgavene som tilhørte emnet funksjoner ble undersøkt. Jeg fulgte Mesa (2004) sin antagelse om at en undersøker hva elevene vil lære dersom de gjør alle oppgavene i boken. Et problem med denne måten å gjøre det på var at læreverket Maximum var fylt med flere oppgaver enn Faktor. Med tanke på at elevene i et klasserom i norsk skole har like mye tid til matematikk uavhengig av hvilken lærebok de har kan en se for seg at resultatene kan bli litt vridd ved å følge en “analyser alle oppgavene” tankegang. Elevene som bruker Faktor/Matematikk 8 kan i større grad anvende oppgaveboken eller alternative oppgavekilder. Jeg ville derfor fått en mer fullverdig analyse ved å inkludere oppgavebøkene og. Dersom det ikke er tilfelle kan det tenkes at elevene som jobber med Maximum ikke vil ha mulighet til å arbeide med alle oppgavene som er omtalt i grunnboken, og at læreren velger et utvalg som de gir til elevene. Uansett vil resultatet kunne bli skjevfordelt. En tredje mulighet er at oppgavene i Faktor/Matematikk 8 tar lenger tid å løse og at dette veier opp for færre antall oppgaver, men ut fra analysen jeg gjorde har jeg ingen grunn til å anta dette.

Jeg analyserte oppgavene ved hjelp av totalt tre teoretiske rammeverk. For det første har jeg som nevnt tidligere analysert transformasjonene i oppgavene. Dernest anvendte jeg Ronda og Adlers (2017) MDITx-rammeverk til å kategorisere oppgavene. Innenfor dette rammeverket ble oppgavene plassert i tre deler. Dette var som nevnt i teoridelen KPF, CTP og AMC. Oppgaver som ble klassifisert som KPF var oppgaver som krevde at elevene gjorde noe de hadde blitt vist i en tidligere leksjon eller som de kunne fra før. Et eksempel på en slik oppgave er 3.18b i Maximum 8.



3.18 Samarbeid to eller tre.
Dere skal undersøke likheter og forskjeller mellom de to funksjonene

$f(x) = 2x - 3$ og $g(x) = -2x + 3$

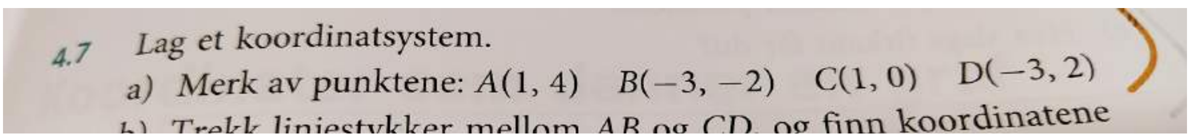
a Sammenlikn med det generelle uttrykket $ax + b$. Hvilken verdi har a og b i hver av de to funksjonene? Finn likheter og forskjeller.

b Bruk x-verdiene $-2, -1, 0, 1$ og 2. Lag verditabell til begge funksjonene.

Figur 3.14: Oppgave 3.18 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 168).

Her skal elevene bruke gitte verdier som de plasserte inn i de to formlene for å lage to verditabeller. Denne typen oppgave har de allerede jobbet med i en del andre oppgaver tidligere i boken og de kjenner derfor til fremgangsmåten de må bruke. Oppgaven ble derfor kategorisert som KPF. Jeg hadde imidlertid en utfordring knyttet til denne kategorien siden jeg ikke undersøkte hele læreverket. Dermed kunne det tenkes at noen oppgaver hadde blitt vist i forkant av kapitlene med funksjoner. Jeg valgte derfor å bare kategorisere oppgaver som KPF dersom jeg hadde sett lignende oppgaver eller eksempler i foregående delkapitler, samt hvis jeg visste at de hadde arbeidet med lignende oppgaver på barneskolen.

Et unntak fra dette prinsippet var dersom oppgaven var en del av læringsmålet i den gitte leksjonen. Spiralprinsippet har gjennomsyret læreplanen lenge og elever kan for eksempel ha glemt hvordan koordinatsystemet fungerer dersom det er flere år siden de hadde om dette sist. Oppgave 4.7a i Matematikk 8 kan belyse dette. Læringsmålet i denne leksjonen er å plassere koordinater i et koordinatsystem og å finne koordinatene til merkede punkter i et koordinatsystem. Dette lærer og elever på barneskolen, men siden dette er læringsmålet for leksjonen valgte jeg å kategorisere dette som en CTP oppgave. Alle oppgaver som kunne knyttes til læringsmålet ble derfor kategorisert som CTP.



4.7 Lag et koordinatsystem.
a) Merk av punktene: $A(1, 4)$ $B(-3, -2)$ $C(1, 0)$ $D(-3, 2)$

Figur 3.15: Oppgave 4.7a i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 249).

For at en oppgave skulle kategoriseres som en AMC-oppgave måtte den enten kreve at eleven skulle gjøre en vurdering på hvilke prosedyrer og konsepter eleven anvendte eller eleven måtte knytte nye konsepter sammen for å løse oppgaven. Et eksempel på en slik oppgave var oppgave 3.48 i Maximum 8. Her er det ingen klar fremgangsmåte og elevene må fremstille alternative sine på flere måter. Elevene må med andre ord anvende det de kan fra før og sette dette sammen på nye måter.

3.48 Et dagskort i en alpinheis koster 390 kr. En enkelttur koster 45 kr. Samarbeid to og to. Bruk det dere kan om funksjoner og grafer til å analysere situasjonen. Presenter analysen skriftlig, slik at dere viser hvilket alternativ som lønner seg for hvilke kunder. Finn flere alternative fremstillinger.

Figur 3.16: Oppgave 3.48 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 190).

I tillegg til å kategorisere alle oppgavene i de tre MDITx kategoriene anvendte jeg og MTF-rammeverket utviklet av Stein og Smith (1998). Helt konkret brukte jeg deres "Task Analysis Guide" til å kategorisere oppgavene i en av fire kategorier. Dette var hukommelse, algoritme uten sammenheng, algoritme med sammenheng og matematikk. Disse omtalte jeg som lav-H, lav-P, høy-P, høy-M.

Oppgaver som ble definert som Lav-H var i stor grad oppgaver som enten ikke kunne knyttes til læringsmålet eller som bare etterspurte en gjengivelse av tidligere lærte fakta. Oppgave 4.18a og b er et eksempel på slike oppgaver.

4.18 Martin kjøper epler til 18 kr per kg.

a) Hvor mye må Martin betale for 3 kg epler?

b) Lag et funksjonsuttrykk $f(x)$ som viser hvor mye Martin må betale for x kg.

Figur 3.17: Oppgave 4.18ab i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 261).

Årsaken til at disse ble kategorisert som Lav-H er todelt. Oppgave a ble plassert i Lav-H fordi den etterspør at elevene skal beregne hvor mye 3 kg epler koster når et kilo koster 18 kr. Slike oppgaver har elevene jobbet mye med på barneskolen og de kan ikke så lett knyttes til læringsmålet som handler om å lage et funksjonsuttrykk. Årsaken til at jeg kategoriserte 4.18b som Lav-H er fordi oppgave 4.16 ligner veldig på 4.18. Det er de samme tallene eneste forskjellene er at det er snakk om gjennomsnittsfart i stedet for pris på kg epler. Denne er vist i figur 3.18 på neste side.

4.16 Mehmet sykler med en gjennomsnittsfart på 18 km per time.
a) Hvor mange kilometer sykler han på 2 timer?
b) Hvor mange kilometer sykler han på 3 timer?
c) Lag et funksjonsuttrykk $f(x)$ som viser lengden han sykler i løpet av x timer.

Figur 3.18: Oppgave 4.16 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 260).

Dersom oppgaven krevde at elevene skulle anvende en algoritme der fremgangsmåten var åpenbar eller fokuset var rettet mot å finne riktig svar og oppgaven ikke krevde at eleven skal forklare og begrunne sitt svar klassifiserte jeg disse som en lav-P oppgave.

3.4 Tegn et koordinatsystem der begge aksene går fra –10 til 10, eller bruk en digital graftegner. Sett inn de tre punktene, og finn ut om de ligger på en rett linje.

a $(-4, -3)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$

b $(-6, 8)$, $(-3, 2)$, $(1, -5)$

c $(-1, -5)$, $(2, 3)$, $(4, 8)$

d $(-10, 7)$, $(0, 1)$, $(5, -2)$

e Diskuter to og to, og finn en fremgangsmåte dere kan bruke for å være helt sikre på om punktene ligger på en rett linje eller ikke.

Figur 3.19: Oppgave 3.4 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 158).

Oppgave 3.4 a-d er klassifisert som Lav-P. Dette fordi elevene blir bedt om å tegne inn tre koordinater og undersøke om de ligger på en rett linje. Fremgangsmåten er med andre ord klart definert og den er ikke koblet til et matematisk begrep som elevene skal lære seg. Dersom oppgaven i tillegg til å inneholde en algoritme knyttet dette opp mot matematiske ideer, og algoritmene ikke bare kan anvendes blindt økes de kognitive kravene i oppgavene. Da klassifiserte jeg det som en høy-P oppgave. Oppgave 3.14e er kategorisert som Høy-P. Årsaken til dette er at elevene må diskutere seg imellom om en kan finne en fremgangsmåte som gjør at elevene er helt sikre på at punktene ligger på en rett linje. Elevene må i større grad begrunne sin fremgangsmåte og dette er mer kognitivt krevende enn å bare utføre en algoritme.

Hvis oppgaven derimot ikke hadde et ikke-algoritmisk preg og elevene måtte koble sammen flere begreper eller konsepter for å løse oppgaven kategoriserte jeg dette som Høy-M. Figur 3.16 som viser oppgave 3.48 i Maximum 8 er et eksempel på en slik oppgave. En fullstendig oversikt over kodeguiden finnes i Vedlegg 1.

3.4.4 Begrunnelse for å bruke både MDITx og MTF

Den første begrunnelsen jeg hadde for å inkludere kognitive krav i min analyse var at jeg ville undersøke i hvilken grad de var sammenfallende med MDITx-kategoriene. Da jeg leste meg opp på rammeverkene oppfattet jeg det som at rammeverkene var forholdsvis like. Forskjellen var at MDITx hadde tre kategorier, mens MTF hadde 4 kategorier. Jeg ønsket derfor å undersøke i hvilken grad de var sammenfallende og om MTF-rammeverket kunne gi studien mer dybde. Etter å ha analysert oppgavene så jeg at jeg i tillegg til dette kunne bruke de fire kategoriene til å undersøke hvilke kognitive krav som ble stilt i kapitlene som helhet og koble dette sammen med kjerneelementene i læreplanen.

3.4.5 Kodeskjema for oppgavene

For å kunne plassere oppgavene i de ulike kategoriene var jeg avhengig av noen kriterier for å kunne plassere disse. Jeg benyttet meg derfor av Palm et al. (2011), Strand og Heimstad (2018) og Bergqvist (2007) sine kriterier for å plassere oppgavene i passende kategorier. De bruker kategorier som i stor grad er sammenfallende med Stein og Smith (1998). Jeg kategoriserte først en leksjon i MTF-rammeverket før jeg anvendte MDITx-rammeverket til å analysere de samme oppgavene. Slik arbeidet jeg meg gjennom bøkene. I forkant av analysen min av de enkelte oppgavene opparbeidet jeg meg et regneark der jeg fylte inn kategoriseringen av de enkelte oppgavene.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Del	Opgnr	Tema	Vanskegrad	Umulig	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M	KPF	CTP	AMC	KK	MDI	S
2	Leksjon 1	3.1	Plassering av punkter i planet					1			1		3	2	1
3	Koordiantsystemet	3.2	Plassering av punkter i planet				1				1		2	2	1
4		3.3a	Plassering av punkter i planet				1				1		2	2	1
5		3.3b	Plassering av punkter i planet					1			1		3	2	1
6		3.4a	Plassering av punkter i planet				1				1		2	2	1
7		3.4b	Plassering av punkter i planet				1				1		2	2	1
8		3.4c	Plassering av punkter i planet				1				1		2	2	1
9		3.4d	Plassering av punkter i planet				1				1		2	2	1
10		3.4e	Plassering av punkter i planet					1			1		3	2	1
11		3.5	Plassering av punkter i planet				1				1		2	2	1
12					0	0	7	3	0	0	10	0			
13	Leksjon 2	3.6a	Kurver og funskjoner i koordinatsystemet				1				1		2	2	1
14	koordinatsystemet	3.6b	Kurver og funskjoner i koordinatsystemet				1				1		2	2	1
15		3.6c	Kurver og funskjoner i koordinatsystemet				1				1		2	2	1
16		3.7	Kurver og funskjoner i koordinatsystemet				1				1		2	2	1
17		3.8a	Kurver og funskjoner i koordinatsystemet					1			1		3	2	1
18		3.8b	Kurver og funskjoner i koordinatsystemet					1			1		3	2	1
19		3.8c	Kurver og funskjoner i koordinatsystemet					1			1		3	2	1
20		3.8d	Kurver og funskjoner i koordinatsystemet					1			1		3	2	1
21		3.9	Kurver og funskjoner i koordinatsystemet					1			1		3	2	1
22					0	0	4	5	0	0	9	0			

Figur 3.20: Oversikt over kodeskjema for MDITx og MTF-rammeverk.

I kolonne A står overskriften for en hoveddel plassert. I kolonne B er oppgavenummeret plassert, mens kolonne C beskriver overskriften til delkapittelet. I kolonne E ble alle oppgavene som ikke ble kategorisert plassert, men kolonne F-I inneholder de fire kategoriene i MTF-rammeverket. Kolonne J-L inneholder kategoriene i MDI-rammeverket, mens M-O er formelbaserte celler som avgjør om det er overensstemmelse mellom MTF- og MDI-rammeverkene. En oppgave ble bare plassert i en kategori i MTF og en kategori i MDITx.

For å kunne plassere de enkelte oppgavene inn i rammeverkene leste jeg teorien som stod i forkant av oppgavene. Her søkte jeg i eksempel og forklaringer etter hvilke løsningsmetoder, algoritmer, begreper, forklaringer, regler og beskrevne fakta som kunne være relevante for de etterstående oppgavene. Dette gjorde jeg fordi hvilken teori som ble presentert i forkant av oppgavene ville kunne påvirke hvilket kognitivt nivå oppgaven var på. Dersom en algoritme presenteres eller en regel introduseres og oppgaven krever at disse skal anvendes, vil de kognitive kravene være mindre enn dersom disse ikke er gitt i forkant (Smith & Stein, 1998). Jeg måtte og blikke litt på hvilke emner elevene hadde jobbet med i forkant av emnet funksjoner, for å kunne sette det inn i en større sammenheng. Jeg har imidlertid i liten grad brukt dette som et kriterie. Dette fordi jeg i liten grad hadde mulighet til å sjekke alle oppgavene og om de lignet på forestående oppgaver i tidligere kapitler i bøkene. Et viktigere grep var å se hva eleven hadde jobbet med i tidligere delkapitler innenfor emnet funksjoner. Strand og Heimstad (2018) undersøkte alle oppgavene i lærebøkene og kunne derfor i større grad se oppgavene i sammenheng med tidligere teori, oppgaver og forklaringer. Dette er en fordel nettopp fordi de kognitive kravene i oppgavene er påvirket av hva de kan fra før (Smith & Stein, 1998).

Det andre analysesteget jeg gjorde var å analysere oppgavene. Da så jeg etter hvilke mulige løsningsstrategier som kunne anvendes. Videre undersøkte jeg hvilke algoritmer som kunne være relevante å bruke til den konkrete oppgaven. Det var og viktig å undersøke hvilke type svar oppgaven krevde. Dersom oppgaven krevde at eleven skulle begrunne svaret eller forklare tilnærming til oppgaven utover å beskrive hva de hadde gjort vil det være tegn på høyere kognitive krav. Videre undersøkte jeg i hvilken grad oppgaven knyttet seg til underliggende emner som ville kunne gi muligheter for dypere forståelse av emnet eller om oppgaven kunne løses uten en kontekst og kobling til læringsmålet. Til sist vurderte jeg om oppgaven anvendte ulike representasjoner. Dette er et tegn på høyere kognitive krav.

Etter å ha analysert konteksten som oppgaven var en del av og hvordan oppgaven var bygget opp plasserte jeg hver enkelt oppgave inn i Smith og Stein (1998) og Ronda og Adler (2017) sine rammeverk.

3.5 Kvalitet i studien

En studie har ikke mye verdi dersom ikke kvaliteten er av en slik karakter at det som fremkommer i studien er sant og at dataene er fremskaffet på en slik måte at de kan gjentas på et senere tidspunkt av andre forskere. Det første kalles validitet og det andre kalles reliabilitet (Lester & Lambdin, 1998). Lester og Lambdin (1998) har utarbeidet en liste på syv kriterier de mener kan brukes til å stadfeste at en artikkel eller studie har god kvalitet. De hevder at det viktigste kriteriet for å sjekke kvaliteten til en studie er "worthwhileness". Dette oversetter Kongelf (2019) til verdifullhet. Verdifullheten til et studie forteller hvilken verdi en studie har for forskningsfeltet, i dette tilfelle matematikkdidaktikk. For at den skal ha verdi for forskningsfeltet må den undersøke noe som er relevant og viktig for forskningsfeltet på det gitte tidspunktet. Lester og Lambdin (1998) hevder at om en studie er verdifull for forskningsfeltet, sett fra forskerens ståsted, kan være gjenstand for partiskhet. En forsker kan fort overvurdere sin egen forsknings relevans. Det er derfor viktig at forskeren begrunner hvorfor sin egen forskning er relevant slik at dette kan bedømmes av de som måtte lese forskningen. Ettersom Kongelf (2019) og Espeland (2017) uttrykte håp om at deres studier skulle føre til endring av lærebøkene, kan en kanskje bruke min oppgave som et lite steg på veien til å undersøke om det har skjedd en endring i enkelte av lærebøkene. Ettersom jeg bare undersøker et emne og to lærebøker kan det selvsagt ikke generaliseres, men gi et bilde av et emne i to læreverk som brukes av en del skoler.

3.5.1 Validitet

Validitet er det som gir overbevisende grunner til å ta et vitenskapelig resultat seriøst (Krippendorff, 2004). Måleinstrumenter anses som valide dersom de måler det som det påstås at de måler. Dette henger sammen med Lester og Lambdins (1998) kriterie *kredabilitet* som fokuserer på i hvilken grad en utenforstående som forholder seg objektivt, logisk og åpent til studien finner den troverdig. For at studien skal fremstå som troverdig må konklusjonene som fremsettes være begrunnet på en logisk måte.

Jeg har i min studie anvendt tre forskjellige rammeverk for å undersøke læringsmulighetene i lærebøkene. Et av disse er Smith og Steins (1998) rammeverk for å undersøke de kognitive kravene i oppgavene. Disse vurderes teoretisk ut fra gitte kriterier. Det kan tenkes at en teoretiske tilnærming ikke stemmer med virkeligheten. Jeg hadde ikke muligheten til å sjekke hvorvidt disse teoretiske kategoriene stemte overens med vanskegraden i elevenes løsningsmetoder. Imidlertid har det tidligere blitt gjennomført studier som har undersøkt nettopp om teoretisk etablert nivåkrav stemmer overens med de faktiske nivåkravene. Palm et al. (2011) ønsket å undersøke hvorvidt deres teoretiske analyse av kognitive krav samstemte med faktiske kognitive krav. De gjennomførte en analyse av kognitive krav i nasjonale matematikkprøver og et tilfeldig utvalg av prøver laget av lærere. De gjorde en ettertest for å sjekke om de teoretiske analysene stemte overens med det elevene gjennomførte. Resultatene av denne testen viste at i bare 3 % av tilfelle ble oppgavene løst med lavere kognitive krav enn det de hadde konkludert med teoretisk. De hevder og at i bare 4 % av tilfellene ble oppgave løst med høyere kognitive krav enn det de hadde forespeilet teoretisk. Palm et al. (2011) konkluderer derfor med at deres rammeverk på en overbevisende måte kan predikere hvilke kognitive krav som kreves for å løse en oppgave. Palm et al. (2011) anvendte et rammeverk som er ganske sammenfallende med Stein og Smith (1998).

I en gjennomgang av forskningen innenfor intendert læreplananalyse påpekes det at en i større grad enn en har gjort innenfor forskningsfeltet må begrunne sine valg av analyseenheter (Lloyd et al., 2017). Dette fordi det kan være vanskelig å generalisere ut fra forskningen som allerede foreligger da de har svært forskjellige forskningsobjekt som antall sider, oppgaver, setninger og nøkkelord. Jeg hadde ingen intensjon om å bidra til å sementere forskningsobjekter og hvordan disse ble analysert innenfor forskningsfeltet, men valgte metoder som anvendes av flere nettopp for å sikre så valide resultater som mulig. MTF-rammeverket som jeg anvendte på oppgaver er et mye anvendt rammeverk til å undersøke oppgaver i lærebøker (Lloyd et al., 2017). Analysen av transformasjoner bygger på forskning fra Adu-Gyamfi, Bosse med flere som har gjennomført en rekke studier på transformasjoner. MDITx-rammeverket til Ronda og Adler (2017) er noe mindre anvendt, men er utarbeidet av anerkjente forskere. Videre har jeg anvendt noen av de mest anvendte lærebøkene i matematikk i Norge, for å kunne undersøke hvilke læringsmuligheter en god del av norske elever har. Med bakgrunn i disse punktene vil jeg hevde at jeg har tok en del ulike valg for å ivareta validiteten i studien.

3.5.2 Etiske perspektiv

Det er viktig for meg å få frem at jeg anvender Maximum i jobben min. Dette kan selvsagt påvirke mine analyser. Jeg vil derfor trekke frem at jeg tidligere har irritert meg over to ulike ting med funksjonskapittelet i Maximum 9. Den første tingen har vært at kapittelet begynner brått med alle de ulike representasjonene og transformasjonene, uten å gi elevene mulighet til å bli kjent med disse på en mer gradvis måte. Videre har jeg irritert meg over at en del av oppgavene har blitt gjort mer utfordrende ved å trekke inn unødvendige detaljer. Disse detaljene er ikke knyttet til læringsmålet, men oppleves mer som støy. Oppgave 2.26 på side 81 i Maximum 9 er et eksempel på dette. Her skal elevene finne ut hvilke funksjoner som har samme konstantledd. Elevene må gjøre om på formelen for å kunne bevare en slik oppgave. Deloppgave i er sågar ikke en funksjon.

d $4y + 3x = 4$	**g** $0{,}3y - x = 0{,}3$
e $6x - 2y = 6$	**h** $y = \frac{2 - 6x}{2}$
f $y - 5x = 5$	**i** $-6x + \frac{1}{2}$

Figur 3.21: Oppgave 2.26d-i i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a, s. 81).

Jeg har derfor tidligere tenkt at det måtte vært enklere å hatt Faktor som lærebok. Dette fordi jeg har likt måten eksempler og oppgaver er bygget opp på. Det at jeg bruker det ene læreverket i jobben min er noe jeg har forsøkt å være veldig bevisst på at ikke skal påvirke forskningen min. Jeg forsøkte derfor å jobbe systematisk etter gitte kriterier for å unngå en "biased" holdning til lærebøkene.

En annen problemstilling det er viktig å ta hensyn til er at forskningen kan ha konsekvenser for andre mennesker. Denne studien undersøkte offentlig tilgjengelig informasjon og ingen mennesker var direkte forskningsobjekt. Den var likevel underlagt de forskningsetiske retningslinjene som er gjeldende for fagfeltet (NESH, 2016). Forlagene og forfatterne av lærebøkene er indirekte involvert ved at en kan se for seg at forskningsresultater kan få konsekvenser for disse. Forfatterne har brukt mye tid på å utarbeide lærebøkene og forsøkte derfor så godt som mulig å bruke objektive kriterier for å vurdere forskningsresultatene.

3.5.3 Reliabilitet

En forskningsstudie må i tillegg til å frembringe valide resultater frembringe reliable resultater. At en studie er reliabel vil i denne sammenhengen si at spørsmålet som studien forsøker å besvare frembringes av metoder som er repliserbare. Forskeren bak studien må kunne argumentere for reliabiliteten ved å gjøre rede for hvordan dataene har blitt utviklet gjennom forskningsprosessen (Thagaard, 2013).

Jeg har forsøkt å beskrive innsamlingen av dataene mine så utfyllende og detaljert som mulig. Jeg har redegjort for hvilke metodologiske grep jeg har foretatt i forbindelse med undersøkelsen av transformasjoner, eksempler og oppgaver i MDITx-rammeverket og kognitive krav i MTF-rammeverket. Dette gjorde jeg fordi jeg ønsket en så transparent forskningsprosess som mulig.

Thagaard (2013) hevder at en måte en kan styrke reliabiliteten på er ved at flere forskere deltar i prosjektet enten ved å kritisk evaluere fremgangsmåter i prosjektet eller ved å samarbeide og diskutere avgjørende beslutninger i forskningsprosessen. Dette kan for eksempel foregå ved at en samarbeider om å kvalitetssikre informasjonen studien baserer seg på. Dette masterstudiet har jeg skrevet alene og jeg var overlatt til meg selv og min egen forståelse av kategorier og data. MTF-rammeverket har imidletid tidligere blitt brukt av flere andre masterstudenter. For å korrigere for egen *"biased"* oppfattelser og feiloppfattelser tok jeg derfor kontakt med Kristoffer Strand og Carina Aurelie Heimstad. De har tidligere brukt MTF-rammeverket til å analysere Faktor og Maximum utgitt i 2014. Jeg fikk tilgang til rådataene deres og anvendte dette til å kontrollere min egen forståelse av kognitive krav i lærebøkene. Jeg analyserte kapitlene i Maximum 9 og Faktor ferdig før jeg begynte på Maximum 8 og Matematikk 8 for å sikre at min forståelse av kategoriene var konsistent. I tabell 3.2 viser jeg Cohens K for sammenligningen av min og Strand og Heimstad (2018) sin analyse av kognitive krav i funksjonskapitlene i Faktor og Maximum.

Cohens Kappa	1. gang	2. gang	3. gang
Faktor	0,797	0,734	0,830
Maximum	0,573	0,383	0,467

Tabell 3.2: Cohens Kappa for Faktor 9 og 10 og Maximum 9.

Årsaken til at Cohens Kappa var relativt høy første gang sammenlignet med andre gang skyldes at jeg den gangen anvendte Strand og Heimstad (2018) sin rådata som en rådgivende ekspert. Den første gangen jeg analyserte lærebøkene var jeg svært usikker på min egen forståelse av kategoriene, og hver gang jeg ikke klarte å bestemme meg gikk jeg til Strand og Heimstad (2018) og brukte deres forståelse som fasit. Andre gang jeg jobbet meg gjennom oppgavene begynte jeg med blanke ark og kikket ikke på Strand og Heimstad (2018) sine analyser. Det er derfor naturlig at denne overensstemmelsen er lavest for begge læreverkene. Siste gangen jeg jobbet meg gjennom lærebøkene tok jeg utgangspunkt i andregangs-gjennomgangen. Jeg gikk kritisk til verks mot alle vurderingene mine og jobbet særlig tettere opp mot Heimstad og Strand (2018) på de oppgavene hvor vi var uenige. Jeg har derfor måttet argumentere ut fra definisjonen av kategoriene de gangene jeg var uenig med Strand og Heimstad (2018). I figuren nedenfor beskrevet av McHugh (2012) kommer det frem at tredjegangs gjennomgangen av Cohens K for Faktor er sterk (0,830), mens den for Maximum er svak (0,470). Den prosentvise overensstemmelsen var 85,4% for Faktor og 70,4% for Maximum.

Kappa Statistic	*Strength of Agreement*
<0.00	Poor
0.00–0.20	Slight
0.21–0.40	Fair
0.41–0.60	Moderate
0.61–0.80	Substantial
0.81–1.00	Almost Perfect

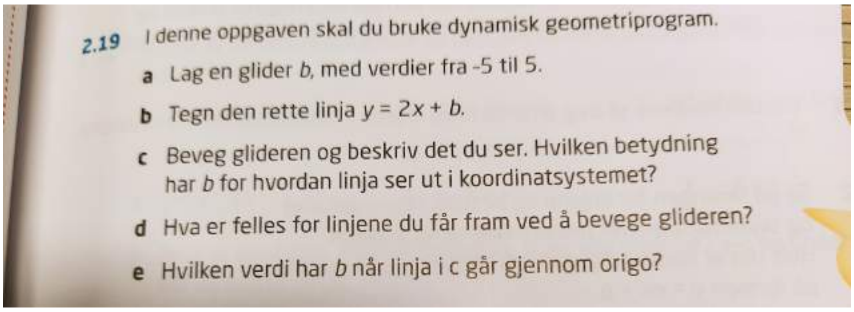
Tabell 3.3: Viser hvordan en skal forstå ulike Cohens Kappa resultater. (McHugh, 2012, Tabell 3).

Siden overensstemmelsen i Maximum var såpass svak har jeg nedenfor gjennomgått noen av de viktigste og mest typiske beslutningene der jeg kategoriserte annerledes enn Strand og Heimstad (2018). Tabell 3.4 viser at antall oppgaver i kategoriene Lav-H og Lav-P er ganske lik, men at fordelingen er litt ulik. Jeg har imidlertid vurdert at det er flere oppgaver i Høy-P og mindre Høy-M enn Strand og Heimstad (2018).

Maximum (3. gang)					
Meg/S-H	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M	Totalt
Lav-H	4	6	0	0	10
Lav-P	5	123	35	1	164
Høy-P	0	34	87	10	131
Høy-M	0	0	1	5	6
Totalt	9	163	123	16	311

Tabell 3.4: Fordelingen av oppgavene i Maximum 9 i MTF-rammeverket kodet av meg og Strand og Heimstad (2018).

Mine samlede kategoriseringer finner en i den borterste kolonnen, mens Strand og Heimstad (2018) sin totale fordeling finnes i nederste rad. Den største og viktigste forskjellen er i Høy-M kategorien. Jeg har kategorisert 6 oppgaver i kategorien Høy-M, mens Strand og Heimstad (2018) har kategorisert 16 oppgaver innenfor den samme kategorien. Dette er en betydelig forskjell og for å forsvare denne måtte jeg gå inn i hvert enkelt tilfelle og begrunne mitt valg. Nedenfor presenterer jeg et utvalg av disse.


2.19 I denne oppgaven skal du bruke dynamisk geometriprogram.

a Lag en glider b, med verdier fra -5 til 5.

b Tegn den rette linja $y = 2x + b$.

c Beveg glideren og beskriv det du ser. Hvilken betydning har b for hvordan linja ser ut i koordinatsystemet?

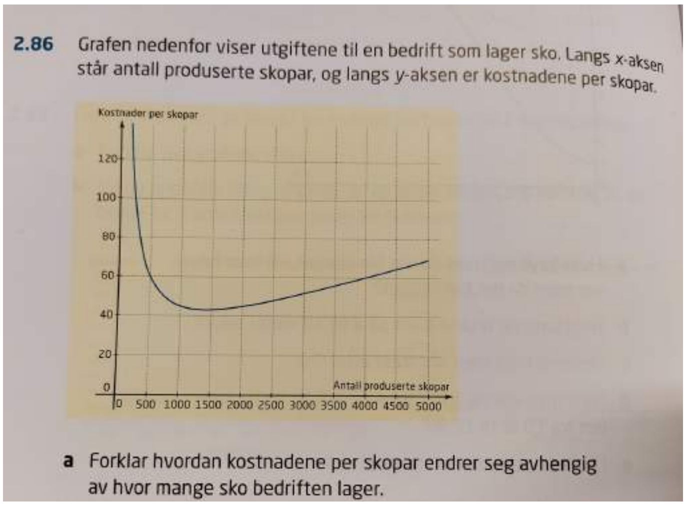
d Hva er felles for linjene du får fram ved å bevege glideren?

e Hvilken verdi har b når linja i c går gjennom origo?

Figur 3.22: Oppgave 2.19 i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a, s. 79).

Oppgave 2.19 etterspør at elevene skal lage en glider i et dynamisk geometriprogram og tegne grafen til y=2x+b inn i programmet. Så skal de beskrive hva som skjer når de beveger på glideren. Oppgave 2.19c, d og e er i Strand og Heimstad (2018) definert som Høy-M. Jeg definerte 2.19c og d som Høy-P. Begrunnelsen min for dette var at begge oppgavene instruerer elevene til å bevege på glideren å se hva som skjer og beskrive dette. Det er derfor en forutsigbar tilnærming til hvordan denne skal løses. Samtidig skal de koble det de ser sammen med den matematiske ideen om konstantledd (c) og parallelle linjer (d) i oppgavene slik at det kan forsvares at jeg ikke kategoriserte dem som Lav-P. I oppgave 2.19e skal elevene finne ut verdien til b når linjen går gjennom origo. Denne kategoriserte jeg som Lav-P. Dette har jeg gjort fordi elevene i de tidligere oppgavene har flyttet på glideren b og dermed kan de allerede ha innsett at b er lik 0 når linja går gjennom origo. Dersom de ikke har innsett dette, vil de ved å flytte linjen til origo se at b blir lik 0. Oppgaven løses altså ved å gjøre som oppgaven etterspør. Oppgave 2.18c og d som Strand og Heimstad (2018) har kategorisert som Høy-M er samme type som 2.19c og d og jeg har derfor og kategorisert disse som Høy-P.

Et annet eksempel på forskjell i forståelse av Høy-M fant jeg i oppgave 2.86a. Her skulle elevene forklare hvordan kostnadene til en bedrift endret seg avhengig av hvor mange sko de produserte. Elevene måtte knytte forståelsen av grafen sammen med situasjonen og redegjøre for hvordan kostnadsutviklingen var. Jeg mente at dette var en Høy-P oppgave fordi fremgangsmåten var klart definert og det å tolke grafer har de gjort i flere oppgaver tidligere. Videre inneholdt oppgaven graf og situasjonsbeskrivelse som elevene måtte se sammenhengen mellom, noe som gjorde at jeg landet på å kategorisere oppgaven som Høy-P.

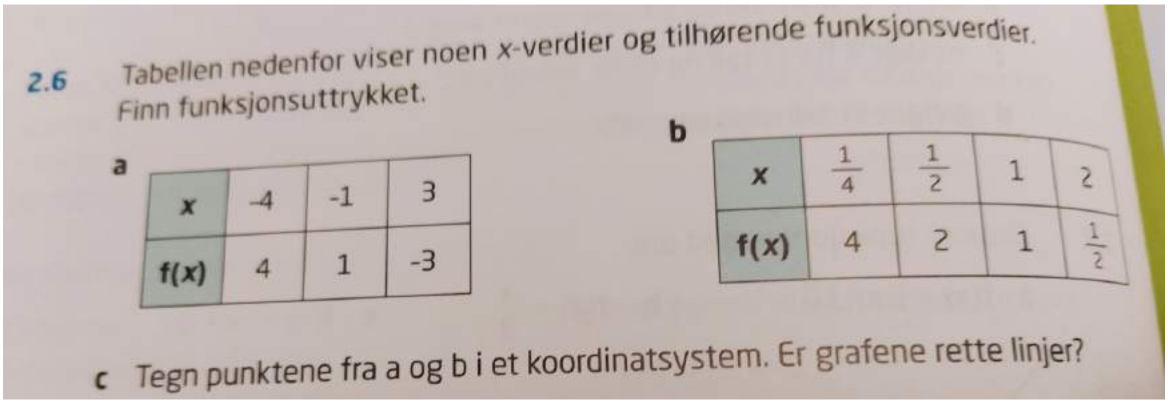


2.86 Grafen nedenfor viser utgiftene til en bedrift som lager sko. Langs x-aksen står antall produserte skopar, og langs y-aksen er kostnadene per skopar.

a Forklar hvordan kostnadene per skopar endrer seg avhengig av hvor mange sko bedriften lager.

Figur 3.23: Oppgave 2.86a i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a, s.116).

Det var og en god del forskjeller innad i de andre kategoriene. Oppgave 2.6b og c vist i figur har jeg og Strand og Heimstad (2018) tolket forskjellig.



2.6 Tabellen nedenfor viser noen x-verdier og tilhørende funksjonsverdier. Finn funksjonsuttrykket.

a

x	-4	-1	3
$f(x)$	4	1	-3

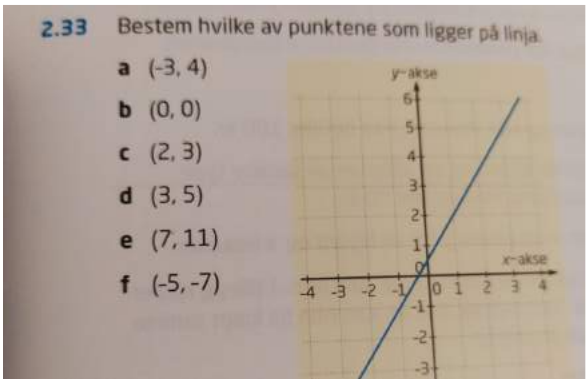
b

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$

c Tegn punktene fra a og b i et koordinatsystem. Er grafene rette linjer?

Figur 3.24: Oppgave 2.6 i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a, s. 70).

Oppgave b har jeg tolket som høy-P. Dette fordi det ikke er noe eksempel i forkant som viser hvordan dette skal gjøres. Noen av koordinatene er i tillegg brøker noe som er et nytt element sammenlignet med oppgave a. Så selv om de skal gjøre det samme som i oppgave a, valgte jeg likevel å kategorisere den som Høy-P. Strand og Heimstad (2018) har nok tolket denne oppgaven som Lav-P nettopp fordi en skal gjøre det samme i oppgave b som i oppgave a. Oppgave 2.6c tolket jeg som lav-P. Dette fordi det å tegne inn koordinater i et koordinatsystem har elevene jobbet med på 8.trinn. Når de har tegnet inn koordinatene vil de kjapt se om de utgjør en rett linje eller ikke. Strand og Heimstad (2018) tolket denne oppgaven som Høy-P. Det kan for eksempel skyldes at det ikke er vist eksempler i forkant hvordan en tegner inn koordinater i koordinatsystemet, samt at dette er den først oppgaven som etterspør at elevene gjør dette.



Figur 3.25: Oppgave 2.33 i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a, s. 85).

Et annet eksempel er oppgave 2.33a-d i figur 3.25. Disse deloppgavene kategoriserte jeg som Lav-H. Dette gjorde jeg fordi de fire oppgavene kan løses ved å se om punktene ligger på linjen som er avbildet på siden av selve oppgaven. Siden læringsmålet var å beregne om disse punktene lå på linjen mener jeg at det var mulig å løse oppgavene på et lavere kognitivt nivå enn det som var utgangspunktet til oppgaven. Oppgave e og f kategoriserte jeg som Lav-P. Dette fordi elevene ikke bare kan se på koordinatsystemet om disse passer på linjen, men er nødt til å regne det ut. Strand og Heimstad (2018) tolket disse 6 oppgavene som Lav-P. Noe av grunnen til forskjellen på disse oppgavene skyldes nok at jeg gjorde justeringer på analyseguiden sammenlignet med Strand og Heimstad (2018) og justeringene slår nok ut på akkurat disse oppgavene.

I avsnittene ovenfor har jeg vist eksempler på ulike tolkninger i Maximum mellom meg og Strand og Heimstad (2018) siden det fremgikk av tabell 3.2 ovenfor at Cohens K viste sterk sammenheng i Faktor og svak sammenheng i Maximum. Jeg har derfor forsøkt å forklare noe av forskjellen i Maximum ovenfor. Krippendorff (2004) hevder imidlertid at Cohens K overvurderer reliabilitet og ikke kan brukes som en reliabilitetsindeks i innholdsanalyse. Videre hevder han at Cohens K er populær innenfor utdanningsforskning hvor den stort sett fungerer, men at den er uegnet til innholdsanalyse. Grunnen til at først valgte å bruke Cohens K var at Strand og Heimstad (2018) hadde anvendt denne som mål på interrater reliabiliteten. Årsaken til at jeg ikke kuttet den helt ut er at resultatene fra 1. og 2. gangs gjennomgangen ble slettet og jeg satt bare igjen med resultatene fra den tredje gjennomgangen. For å kontrollere for dette analyserte jeg derfor reliabiliteten gjennom to andre reliabilitetesindekser som Krippendorff (2004) hevder kan anvendes i innholdsanalyse. Dette er Scotts π og Krippendorffs α.

Reliabilitetsmål	Cohens kappa	Krippendorffs alpha	Scotts pi
Faktor	0,830	0,737	0,703
Maximum	0,467	0,463	0,467

Tabell 3.5: Interrater reliabiliteten i oppgavene i Faktor og Maximum 9 analysert ved hjelp av tre ulike indekser.

Tabell 3.5 viser at Cohens K overvurderer reliabiliteten til Faktor, mens reliabiliteten til Maximum er konsistent svak men forholdsvis lik på alle de tre indeksene. Krippendorff (2004) hevder at en ikke kan stole på variabler med en lavere reliabilitet enn α=0,800, mens α må være større enn 0,667 for at en skal kunne komme med usikre påstander om sammenhenger. Årsaken til at jeg allikevel har valgt å stole på mine egne data var for det første at årsaken til at jeg inkluderte Strand og Heimstad (2018) var for å styrke min egen forståelse av kategoriene og dermed øke reliabiliteten. For det andre gjorde jeg justeringer på kategoriene, noe som gjorde at reliabilitetsindeksen de facto måtte være lavere enn dersom jeg ikke hadde gjort det. For det tredje gikk jeg aktivt inn for å begrunne overfor meg selv hvorfor jeg har tatt et annet valg i de tilfellene der det var forskjell mellom Strand og Heimstad (2018) og meg. Ovenfor har jeg trukket frem flere eksempler på forskjeller med tilhørende begrunnelse. Lavere reliabilitet en anbefalt kan derfor være et tegn på at jeg gjennomførte en mer selvstendig fortolkning av kategoriene og oppgavene, enn dersom reliabiliteten hadde vært høyere.

3.6 Oppsummering

I denne delen har jeg forsøkt å begrunne mine metodologiske grep. Jeg har redegjort for hvordan jeg har operasjonalisert de tre teoretiske rammeverkene og pekt på hvilke vurderinger jeg har gjort da jeg gjennomførte analysen av dataen i lærebøkene. I neste del presenterer jeg funnene mine.

4. Resultat

I denne delen presenteres resultatene fra studien. Først kommer en gjennomgang av oppbyggingen av bøkene og kapitlene. Deretter presenteres funn fra læringsmålene, transformasjonene og eksempler og oppgaver i MDITx. Til slutt følgere en redegjørelse av de kognitive kravene i oppgavene analysert gjennom "Task Analysis Guide" i MTF-rammeverket.

4.1 Oppbyggingen av bøkene

Nedenfor følger en oversikt over de fem bøkene jeg brukt i min analyse. Bøkene er hentet fra to ulike forlag. Maximum 9 og Faktor 9 og 10 er skrevet til den reviderte læreplanen som gjaldt fra og med 01.08.13. Maximum 8 2.utg og Matematikk 8 er skrevet til fagfornyelsen (LK20) som ble iverksatt 01.08.20. I resten av dette kapittelet vil jeg omtale Faktor 9 og 10 som Faktor og Maximum 8 2. utg som Maximum 8. Det fremgår av tabellen at de nyeste lærebøkene er skrevet av de samme forfatterne som skrev bøkene til den reviderte læreplanen i 2013, bortsett fra Linda Wibecke Tangen Bråthe som er nye forfatter av Maximum 8.

Bok	Forfattere	Utgiver	Sidetall	Årstall
Maximum 9 Grunnbok	Grete Normann Tofteberg Janneke Tangen Ingvill Merete Stedøy-Johansen Bjørn Alseth	Gyldendal	289	2014
Faktor 9 Grunnbok	Espen Hjardar Jan-Erik Pedersen	Cappelen Damm	293	2014
Faktor 10 Grunnbok	Espen Hjardar Jan-Erik Pedersen	Cappelen Damm	346	2015
Maximum 8 Grunnbok	Bjørn Alseth Linda Wibecke Tangen Bråthe Ingvill Merete Stedøy Janneke Tangen Grete Normann Tofteberg	Gyldendal	293	2020
Matematikk 8 Grunnbok	Espen Hjardar Jan-Erik Pedersen	Cappelen Damm	332	2020

Tabell 4.1: Oversikt over lærebøkene som er med i studien.

Tabell 4.1 viser at Matematikk 8 inneholder 39 flere sider enn Maximum 8. Det er imidlertid verdt å påpeke at 29 av disse sidene er fasit til oppgavene, dermed fremstår sideantallet mellom de ulike lærebøkene forholdsvis likt. Min forskning er imidlertid ikke på bøkene som helhet men på emnet funksjoner. I etterfølgende referanser til lærebøkene er det derfor til funksjonskapitlet i de enkelte lærebøkene jeg mener, og ikke lærebøkene som helhet. I tabellen nedenfor følger sider, eksempler, oppgaver og deloppgaver i de ulike kapitlene fra bøkene.

4.2 Oppbyggingen av funksjonskapitlene

I metodedelen redegjorde jeg for utvalget av sider fra Faktor. I Faktor 10 har jeg derfor ikke telt med de sidene og oppgavene som jeg har valgt å ikke ha med i studien. Sideantallet fremstår derfor ganske likt i Faktor og Maximum 9.

Bok	Sidetall	Eksempler	Oppgaver	Deloppgaver
Faktor	50	9	69	170
Matematikk 8	54	8	40	143
Maximum 9	52	15	90	340
Maximum 8	60	8	80	272

Tabell 4.2: Lærebøkene delt i sider, eksempler, oppgaver og deloppgaver.

For bøkene fra Cappelen Damm har det totale antall sider endret seg fra 50 til 54, mens det i Gyldendal sitt læreverk har endret seg fra 52 til 60 sider i de nye læreverkene. Antall oppgaver og deloppgaver har imidlertid gått ned i begge læreverk. Fortsatt er det imidlertid slik at en finner betydelig flere oppgaver i Maximum enn i bøkene fra Cappelen Damm. I lærebøkene fra 2014 kan noe av årsaken være at Maximum er bygget opp etter en differensieringsmodell. Dette innebærer at en del oppgaver er fargekodet blå, gul eller grønn. Tanken bak er at alle elevene skal kunne jobbe med det samme emnet med med ulik grad av utfordring tilpasset eget nivå. Eleven skal i samarbeid med lærer finne ut hvilken fargekode han skal bruke til det enkelte emnet (Tofteberg et al., 2015b).

Lærebok	Differensierte oppgaver	Differensierte deloppgaver
Matematikk 8	5	30
Maximum 9	15	65
Maximum 8	3	25
	Utfordrende oppgaver	Utfordrende deloppgaver
Faktor 9 og 10	10	24

Tabell 4.3: Oversikt over differensierte og utfordrende oppgaveri lærebøkene.

Et interessant funn i denne sammenhengen er da at forfatterne av Maximum 8 har tonet ned antall differensierte oppgaver sammenlignet med Maximum 9. I Faktor 9 og 10 hadde en differensiering av oppgaver ved å merke særlig utfordrende oppgaver med en stjerne. Disse utfordrende oppgavene er nå tatt bort og erstattet med en tredelt nivådifferensiering. Totalt er 5 av 40 oppgaver merket med nivådifferensiering, mens 30 av 143 deloppgaver er nivådifferensierte oppgaver. Matematikk 8 og Maximum 8 har dermed forholdsvis likt antall nivådifferensierte oppgaver.

4.3 Læringsmål

I den nye læreplanen er det særlig tre kompetansemål som kan knyttes til funksjoner. Dette er:

- "utforske, forklare og samanlikne funksjonar knytte til praktiske situasjonar".
- "representere funksjonar på ulike måtar og vise samanhengar mellom representasjonane".
- "utforske korleis algoritmar kan skapast, testast og forbetrast ved hjelp av programmering" (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12).

4.3.1 Læringsmål i Faktor og Matematikk 8

Med kompetansemålene som utgangspunkt har forfatterne av lærebøkene brutt ned disse i læringsmål. Målene som står beskrevet i Matematikk 8 er representert nedenfor sammen med læringsmålene hentet fra Faktor. Nummereringen er min og ikke hentet fra lærebøkene.

	Læringsmål (I dette emnet skal du få lære om:)	
	Faktor (9 - for Faktor 9, 10 - for Faktor 10)	Matematikk 8
1	koordinatsystemet (9)	Koordinater og koordinatsystemet
2	hvordan funksjoner kan beskrive praktiske situasjoner (9)	funksjonsuttrykk som beskriver en situasjon
3	hvordan vi kan sette opp en funksjon på grunnlag av en tabell (9)	avlesning og tolkning av ulike grafer
4	hvordan vi kan tegne en graf til en funksjon (9)	grafen til en funksjon
5	funksjoner i praktiske situasjoner og uttrykt i tabeller, bokstavuttrykk eller formler og grafer (10)	
6	stigningstall og konstantledd i funksjonsuttrykk (10)	
7	proporsjonale størrelser (10)	

Tabell 4.4: Læringsmål i Faktor (Hjardar & Pedersen, 2014, 2015) og Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a).

Fra tabell 4.4 fremgår det at læringsmålene i Matematikk 8 er i stor grad sammenfallende med læringsmålene i Faktor 9. Eneste forskjellen er at læringsmål merket nummer tre i Faktor er byttet ut med avlesning og tolkning av ulike grafer i Matematikk 8. Det å tolke og avlese er et nytt læringsmål som ikke har vært en del av Faktor sine læringsmål knyttet opp mot funksjoner tidligere. Elevene skal imidlertid som i Faktor 9 bli kjent med koordinatsystemet, funksjonsuttrykk som beskriver en situasjon og grafen til en funksjon. Årsaken til at Faktor 10 er med i studien er for å sikre at Faktor 9/10 og Maximum 9 dekker de samme kompetansemålene, da tidligere læreplan ikke delte opp kompetansemålene etter årstrinn. Siden gjeldende læreplan har delt kompetansemålene etter årstrinn kan en vente at lærebøkene dekker de samme læringsmålene.

4.3.2 Læringsmål i Maximum

Læringsmålene i Maximum er beskrevet i tabell 4.5. Nummereringen er min og ikke hentet fra lærebøkene.

	Læringsmål (Her skal du lære å:)	
	Maximum 9	Maximum 8
1	kjenne igjen og finne formler for rette linjer	kjenne igjen og finne formler for rette linjer
2	kjenne igjen situasjoner fra dagliglivet som beskrives ved hjelp av lineære funksjoner	kjenne igjen situasjoner fra dagliglivet som beskrives ved hjelp av lineære funksjoner
3	lage verditabell og tegne graf ut fra formelen for rette linjer	å forklare hvordan punkter og linjer kan plasseres i et koordinatsystem
4	beskrive og kjenne igjen funksjoner	å kjenne igjen og utforske funksjoner og skille dem fra kurver som ikke er funksjoner
5	bestemme om et punkt ligger på en gitt rett linje	beskrive og presentere lineære funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom uttrykksformene
6	lage og bruke tabeller med empiriske data og tegne funksjoner i et koordinatsystem	bruke ulike digitale verktøy til å utforske, analysere og behandle funksjoner
7	beskrive situasjoner fra dagliglivet med funksjoner	kjenne igjen proporsjonale og omvendt proporsjonale sammenhenger
8		uttrykke proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet på ulike måter
9		utforske om en sammenheng mellom to størrelser er proporsjonal eller omvendt proporsjonal

Tabell 4.5: Læringsmål i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a) og Maximum 8 (Alseth et al., 2020).

I tabell 4.5 er det flere læringsmål som er beholdt i Maximum 8 fra Maximum 9. Dette gjelder læringsmål 1, 2 og 4 i bøkene. I flere av læringsmålene i Maximum 8 kan en finne igjen spor av kompetansemålene. Dette gjelder for eksempel læringsmål 5 og 8 der målet er at elevene skal kunne beskrive og presentere lineære funksjoner, proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet på ulike måter. En del nye læringsmål er inkludert i Maximum 8 som gjelder omvendt proporsjonalitet og å bruke digitale verktøy til å analysere funksjoner. Læringsmålene om omvendt proporsjonalitet har tidligere vært plassert i Maximum 10, mens læringsmålet om digitale verktøy nå inkluderer programmering. I oppgaven 3.27 presenteres et script i python som skal gi en tilhørende y-verdi når brukeren skriver en x-verdi. Oppgaven går ut på å gjøre tilpasninger på scriptet slik at det oppfyller noen nye kriterier.

3.27 Velg ett eller flere av punktene eller andre punkter dere selv kommer på, og programmer forbedrede versjoner av funksjonsmaskinen.

- Vi kan få så mange punkter vi vil, uten å starte programmet på nytt.
- Brukeren kan bestemme hvilken funksjon som skal brukes.
- Funksjonsmaskinen takler flere ulike funksjonstyper.
- Gir tilbakemelding hvis brukeren gir feil informasjon.

Figur 4.1: Oppgave 3.27 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s.174).

Denne oppgaven sammenfaller dermed bra med kompetansemålet om å anvende programmering til å teste algoritmer. En lignende oppgave finnes ikke i Matematikk 8.

4.3.3 Matematikk 8 og Maximum 8

Det å sammenlikne læringsmålene i Matematikk 8 og Maximum 8 kan til dels være misvisende. Dette fordi læringsmålene i Matematikk 8 bærer preg av å være overskrifter, mens Maximum 8 sine læringsmål går mer i detalj. Et eksempel på dette er at eleven skal lære å “bruke ulike digitale verktøy til å utforske, analysere og behandle funksjoner” (Alseth et al., 2020, s. 164) i Maximum 8. I Matematikk 8 er ikke dette nevnt som et læringsmål. Ved å sammenstille disse læringsmålene kunne en forvente at Maximum vil går mer i detalj på hvordan elevene skal anvende digitale verktøy til å arbeide med funksjoner. Det er imidlertid bare Matematikk 8 som i detalj forklarer hvordan eleven skal løse en funksjonsoppgave ved hjelp av digital graftegner slik som i eksempel 4.7. Dette selv om det ikke er et uttalt læringsmål i starten av kapittelet.

Løsning

a) Vi tegner grafen til $f(x)$ slik:
I Skriver inn $f(x) = 15x$ i inntastingsfeltet og trykker enter.
II Justerer grafikkfeltet og aksene ved hjelp av justeringsverktøyet.
III Skriver inn $x = 60$ og markerer skjæringspunktet A med grafen.
IV Skriver inn $y = 2000$ og markerer skjæringspunktet B med grafen.
V Setter navn på aksene og tar bort negative x- og y-verdier.
VI Velger til slutt om det skal vises navn på grafer, punkter og liknende.

Figur 4.2: Eksempel 4.7 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 269).

I tabellene om læringsmål kan en se at omvendt proporsjonale størrelser er inkludert i Maximum 8, dette gjelder ikke for Matematikk 8. Kompetansemålet “utforske, forklare og samanlikne funksjonar knytte til praktiske situasjonar” (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12) er altså tolket forskjellig. Det finnes imidlertid et lite spor av omvendt proporsjonale funksjoner i Matematikk 8. I en boks med et spørsmål på side 259 der elevene skal tenke på en situasjon som kan passe til funksjonsuttrykket. Hjardar og Pedersen (2020b) skriver i lærerveiledningen til boken at de unummererte oppgavene som er merket med spørsmålstegn har de kalt for *Undringer.* Disse skal ifølge forfatterne løses i par eller mindre grupper og kan brukes til å "avdekke misoppfatninger, utforske og problematisere kjente og ukjente strategier, legge til rette for modeller og konkretisere matematikken" (Hjardar & Pedersen, 2020b, s. 3).

? Kan du finne en situasjon som passer til funksjonsuttrykket:

$$f(x) = \frac{5000}{x}$$

Figur 4.3: Undring i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 259).

De Bock et al. (2015) hevder at elever knytter situasjoner bra til proporsjonale modeller men at det samme ikke kan hevdes om omvendt proporsjonale situasjoner. Elevene har en tendens til å knytte disse situasjonene til proporsjonale modeller. Jeg vil derfor hevde at elevene må arbeide med omvendt proporsjonale modeller for å bli fortrolige med disse. Matematikk 8 gir liten mulighet for elevene til å bli kjent med omvendt proporsjonale situasjoner. Hva angår proporsjonale størrelser i Matematikk 8 finnes det flere oppgaver som inneholder dette, men disse omtales ikke som det og begrepet blir heller ikke diskutert i kapittelet. Et av flere eksempler på en slik oppgave er 4.19 i Matematikk 8.

4.19 Under en fotballkamp selges det lodd til 5 kr per stykk. Inntektene kan beskrives ved hjelp av funksjonsuttrykket $f(x) = 5x$ der $f(x)$ er inntektene i kroner og x er antall solgte lodd.

Figur 4.4: Oppgave 4.19 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 266).

Det er verdt å nevne at dette og gjelder for Faktor 9. Det er først i Faktor 10 at begreper som proporsjonale størrelser omtales eksplisitt. Et annet funn er at mens Matematikk 8 har tatt inn avlesing og tolkning av diagrammer fra virkeligheten sammenlignet med Faktor som ikke hadde dette med, har en i Maximum 8 tatt vekk avlesing av diagrammer. En variant av dette læringsmålet var med i Maximum 9. Dette er altså en ny forskjell i måten å tolke læringsmålene på. Forfatterne av Maximum forstår altså læreplanen slik at avlesning av diagrammer og tolkning av disse med tanke på virkeligheten ikke er noe som ligger på 8.trinn i matematikk etter den nye læreplanen. Forfatterne av Matematikk 8 tenker helt annerledes og har inkludert dette i sitt læreverk, det selv om det ikke var en del av funksjonskapitlene i Faktor 9 og 10.

4.4 Transformasjoner

En transformasjon er som definert i metodedelen en heuristisk teknikk for å bevege seg mellom to ulike representasjoner. Nedenfor beskriver tabellen fordelingen av transformasjoner i læreverkene.

Fra	Situasjon				Tabell				Graf				Formel				
Opgnr/Til	S	T	G	F	S	T	G	F	S	T	G	F	S	T	G	F	Totalt
Faktor	19	0	0	6	3	3	24	0	11	22	3	9	22	11	19	15	167
Matematikk 8	10	0	2	12	0	1	19	0	18	48	11	2	1	6	5	0	135
Maximum 9	25	11	10	31	9	1	33	27	42	39	4	19	18	15	31	65	380
Maximum 8	21	3	12	36	7	1	22	4	30	40	2	5	55	17	44	33	332

Tabell 4.6: Transformasjoner i lærebøkene.

Jeg vil i de senere avsnittene gå mer inn i detalj på enkeltresultater i denne tabellen. Det som er verdt å nevne fra denne oversikten er nedgangen i transformasjoner i begge læreverk, samt at det er ganske stor forskjell mellom læreverkene i antall transformasjoner. Den store forskjellen i antall transformasjoner henger sammen med forskjellen i antall deloppgaver som og er belyst ovenfor.

4.4.1 Permutasjoner

I alle læreverkene krever flere av oppgavene ikke at elevene beveger seg mellom ulike representasjoner, men at elevene permuterer representasjonen.

Permutasjoner	S↔S	T↔T	G↔G	F↔F	Totalt
Faktor	19	3	3	15	40
Matematikk 8	10	1	11	0	22
Maximum 9	25	1	4	65	95
Maximum 8	21	1	2	33	57

Tabell 4.7: Fordeling av permutasjoner i lærebøkene.

Det fremgår av tabell 4.7 at begge læreverkene etter fagfornyelsen har færre deloppgaver som krever at elevene beveger seg innenfor en representasjon. Dette gjelder særlig oppgavene der eleven skal bevege seg fra formel til formel. Dette er oppgaver som krever at elevene enten skal identifisere hva som er stigningstall og konstantledd i en funksjon, samt omgjøring av funksjonsuttrykk for å enklere transformere representasjonen fra formel til graf/tabell. En årsak til dette for Maximum 8 sin del kan være at algebra og likninger er lagt som kapittel etter funksjonskapittelet. Elevene har derfor mindre erfaring med manipulering av formeluttrykk i forkant av innlæringen av funksjoner i Maximum 8 enn i Maximum 9.

Den eneste permutasjonen som har økt er fra graf til graf der det er flere permutasjoner i Matematikk 8 enn i faktor 9 og 10. Eksempler på dette er oppgave 4.11b på side 250. Her skal eleven trekke linjer mellom punkter i koordinatsystemet. Denne typen oppgave er svært lite kognitivt krevende for eleven siden den ikke kobler noen av de fire representasjonene sammen.

4.11 Tegn et koordinatsystem. Bruk passende enheter på første- og andreaksen.
a) Merk av punktene: $A(0, 0)$, $B(-2, 0)$, $C(-2, -2)$ og $D(0, -2)$
b) Trekk linjer mellom punktene.
c) Hva slags firkant får du?

Figur 4.5: Oppgave 4.11 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 250).

4.4.2 Fra situasjon

I de neste avsnittene vil jeg gå gjennom transformasjonene fra de fire forskjellige representasjonene til de tre andre representasjonene. Tabell 4.8 nedenfor viser hvordan transformasjonene fra situasjon har fordelt seg.

	Fra:	Situasjon		
Lærebok	/Til	Tabell	Graf	Formel
Faktor		0	0	6
Matematikk 8		0	2	12
Maximum 9		11	10	31
Maximum 8		3	12	36

Tabell 4.8: Transformasjoner fra situasjon.

Det jeg særlig vil trekke frem fra denne tabellen er at Matematikk 8 har dobbelt så mange transformasjoner fra S→F som Faktor. Dette skyldes at elevene i større grad må finne formelen i stede for at den bli gitt. Oppgave 4.15b er et eksempel på dette.

4.15 Under en håndballkamp selges det flasker med vann til 20 kr per flaske.
a) Hva blir de totale inntektene hvis det selges 35 flasker vann?
b) Lag et funksjonsuttrykk $f(x)$ som viser inntekten i kroner når det selges x flasker vann.

Figur 4.6: Oppgave 4.15 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 260).

Forskjellen mellom Matematikk 8 og Maximum 8 er likevel stor, med tre ganger så mange transformasjoner fra S→F i Maximum 8 som i Matematikk 8. Ellers har verken Faktor eller Matematikk 8 noen transformasjoner fra situasjon til tabell. Maximum har og redusert antallet oppgaver som krever denne transformasjonen. Nitsch et al. (2014) hevder at denne og den inverse transformasjonen (T→S) ikke er interessant å undersøke. I sin modell for transformasjoner har de utelatt denne “bidirectional” transformasjonen S↔T fordi de hevder at den har mer teoretisk relevans enn relevans i et klasserom på ungdomsskolen. Med bakgrunn i dette er det derfor ikke overraskende at denne transformasjonen er nedprioritert av lærebokforfatterne.

4.4.3 Fra tabell

Adu-Gyamfi et al. (2012) hevder at lærebøker og læreplaner i større grad bør fokusere på transformasjonen fra tabell til formel. Dette fordi dette er en vanskeligere transformasjon enn transformasjonen fra tabell til graf. Dette skyldes at transformasjonen fra tabell til funksjonsuttrykk innebærer å identifisere egenskaper i tabellen som kan anvendes til å lage et funksjonsuttrykk. Dette kan være utfordrende da egenskapene som trengs for å lage funksjonsuttrykket kan være skjult i tabellen. Tabellen kan og inneholde mye unødvendig informasjon som kan gjøre det vanskeligere å avdekke de sentrale elementene som trengs for å lage funksjonsuttrykket. Tabell 4.9 viser antall transformasjoner fra tabell til en mål-representasjon de fem lærebøkene krever at elevene utfører.

	Fra: Tabell		
Lærebok /Til	Situasjon	Graf	Formel
Faktor	3	24	0
Matematikk 8	0	19	0
Maximum 9	9	33	27
Maximum 8	7	22	4

Tabell 4.9: Transformasjoner fra tabell.

Tabell 4.9 viser at begge de nye læreverkene har mye mer fokus på overgangen fra tabell til graf enn fra tabell til formel. Maximum 9 har mange transformasjoner fra tabell til formel, men disse er nesten helt fraværende i Maximum 8. Hverken Faktor eller Matematikk 8 har noen deloppgaver som krever at elevene transformerer en tabell til en formel. I faktor 10 kunne oppgave 3.13 vært tolket som å bevege seg fra tabell til funksjonsuttrykk.

3.13 En linje går gjennom to punkter.
Finn funksjonen for linjene når punktene er
a) (0, 1) og (1, 3)
b) (−1, −4) og (2, 2)
c) (−1, 0) og (1, 6)

Figur 4.7: Oppgave 3.13 i Faktor 10 (Hjardar & Pedersen, 2015, s. 117).

Denne oppgaven følger imidlertid etter et eksempel som viser en fremgangsmåte der denne oppgavetypen skal løses ved å gå via graf. Eksemplet er avbildet i figur 3.6 s. 45 i metodedelen. Når elevene ikke er vist hvordan de kan bruke punktene til å finne funksjonsuttrykket er det å forvente at elevene i stedet vil lage en graf og anvende denne til å finne funksjonsuttrykket akkurat som i eksemplet. I Faktor er begreper som stigningstall og konstantledd og det å jobbe med funksjonen uavhengig av en virkelig situasjon plassert i Faktor 10. Det kan derfor tenkes at lærebokforfatterne vil legge inn transformasjonen mellom tabell og formel i Matematikk 10. Dette kan underbygges av at det i den nye læreplanen for 10.trinn står følgende:

- "utforske og samanlikne eigenskapar ved ulike funksjonar ved å bruke digitale verktøy"
- "rekne ut stigningstallet til ein lineær funksjon og bruke det til å forklare omgrepa endring per eining og gjennomsnittsfart" (Utdanningsdirektoratet, 2020, s.14).

Med bakgrunn i disse punktene kan det forsvares å legge denne transformasjonen til 10.trinn. Selv om det ikke er noen oppgaver som behandler denne transformasjonen i Matematikk 8, er det lagt inn en *Undring* som tar for seg denne transformasjonen.

? Lag funksjonsuttrykk på grunnlag av tallene i tabellene.

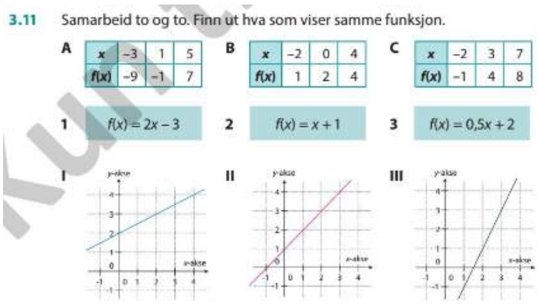
x	0	2	4	6
$f(x)$	0	8	16	24

x	0	1	2	3
$g(x)$	2	4	6	8

Figur 4.8: Undring i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 261).

Siden dette ikke er en nummerert oppgave er den ikke inkludert i oppgavene som er analysert. *Undringen* står helt for seg og det gis det ikke noe eksempel på hvordan dette kan løses i læreboken. Forfatterne skriver imidlertid at slike oppgaver bør løses i fellesskap gjennom diskusjon (Hjardar & Pedersen, 2020). Det finnes derfor spor etter denne transformasjonen i Matematikk 8 og ved en gjennomtenkt fremlegging av lærer kan elevene i hvert fall få litt kjennskap til transformasjonen. Elevene som velger å gjøre denne oppgaven individuelt er imidlertid overlatt til seg selv med tanke på hvordan de skal gå frem for å løse denne.

I Maximum 8 er det 4 deloppgaver som behandler denne transformasjonen. Dette er en kraftig reduksjon fra Maximum 9. Transformasjonen finner en i oppgave 3.11 i Maximum 8. Denne har jeg tolket som T→F og F→G. Dette fordi jeg følger prinsippet jeg etablerte i metodedelen om at en transformasjon gjennomføres fra det som nevnes først til det som står etterpå. Oppgaven kan selvsagt løses på mange andre måter, og det er derfor ikke gitt at denne oppgaven må løses ved å transformere tabellen til et funksjonsuttrykk. Det er med andre ord ikke store forskjeller mellom Maximum 8 og Matematikk 8 på denne transformasjonen.



Figur 4.9: Oppgave 3.11 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s.165).

4.4.4 Fra graf

I tabell 4.10 nedenfor er transformasjonene fra graf til de andre representasjonene listet opp.

Lærebok	Fra: Graf /Til	Situasjon	Tabell	Formel
Faktor		11	22	9
Matematikk 8		18	48	2
Maximum 9		42	39	19
Maximum 8		30	40	5

Tabell 4.10: Transformasjoner fra graf.

En av de største forskjellene mellom Faktor og Matematikk 8 er det økte fokuset på transformasjonen G→T. Antall transformasjoner er doblet fra Faktor til Matematikk 8. En lignende økning finner en ikke i Maximum, men her var antall transformasjoner på nivå med nåværende nivå i Matematikk 8. Transformasjonen G→S har og økt i Matematikk 8 sammenlignet med Faktor. Samlet sett gir dette et bilde av at transformasjoner fra graf har økt i antall i Matematikk 8 kontra Faktor, selv med en nedgang i transformasjonen G→F. Med tanke på at læringsmålet å avlese og tolke av ulike grafer er inkludert i Matematikk 8 er et slikt resultat ikke overraskende.

Adu-Gyamfi et al. (2012) hevder at det er viktig at lærebøker og lærere gir elevene mulighet til å jobbe med kurvetilpasning, altså transformasjonen G→F. For Maximum sin del holder tallene seg stabile bortsett fra nettopp denne transformasjonen. Dette kan skyldes at det på 10.trinn er lagt inn et kompetansemål om å beregne stignstallet til en lineære funksjon (Utdanningsdirektoratet, 2020), og at dette derfor er flyttet opp på 10. trinn. Hvorvidt dette medfører riktighet blir først mulig å undersøke når læreboken for 10. trinn utgis.

Et annet funn Adu-Gyamfi et al. (2012) påpeker er at elever er gode på å bevege seg mellom tabell og graf. Adu-Gyamfi et al. (2019) har etablert at å bevege seg mellom graf og tabell er blant de enkleste “unidirectional” transformasjonene. Det er og den enkleste “bidirectional” transformasjonen. Det er derfor naturlig å tenke seg at lærebøkene legger opp til at disse transformasjonene er noe av det første elevene møter slik at inngangen til emnet funksjoner blir overkommelig for elevene. Antall oppgaver knyttet til disse transformasjonene bør imidlertid ikke være så altfor mange da det kan være viktigere å øve på de mer utfordrende transformasjonene. I tabell 4.11 vises transformasjonene fra første leksjon i hvert av de fire læreverkene.

Fra	Situasjon				Tabell				Graf				Formel				
Lærebok Til	S	T	G	F	S	T	G	F	S	T	G	F	S	T	G	F	IK
Faktor	0	0	0	0	0	0	5	0	1	5	3	0	0	0	0	0	0
Matematikk 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	1
Maximum 9	0	0	0	4	4	0	0	4	0	2	0	0	6	4	4	1	0
Maximum 8	0	0	0	0	0	0	5	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0

Tabell 4.11: Transformasjoner i første leksjon i lærebøkene.

Ut fra tabell 4.11 kan en lese at Faktor og Maximum 8 er ganske like med tanke på transformasjoner, mens de andre er litt annerledes. Årsaken til dette er for det første at Maximum 9 ikke begynner med koordinatsystemet som læringsmål, men har inkludert en rekke forskjellige transformasjoner. Matematikk 8 på sin side har inkludert en leksjon i forkant av transformasjonen mellom graf og tabell der elevene skal lese av ulike grafiske fremstillinger for å finne koordinater og informasjon. Ved å sette delkapittel 2 inn i stedet for det første delkapitlet for Matematikk 8 ser bilde slik ut.

Fra	Situasjon				Tabell				Graf				Formel				
Lærebok Til	S	T	G	F	S	T	G	F	S	T	G	F	S	T	G	F	IK
Faktor	0	0	0	0	0	0	5	0	1	5	3	0	0	0	0	0	0
Matematikk 8	0	0	0	0	0	0	6	0	1	4	1	0	0	0	0	0	0
Maximum 9	0	0	0	4	4	0	0	4	0	2	0	0	6	4	4	1	0
Maximum 8	0	0	0	0	0	0	5	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0

Tabell 4.12: Transformasjoner i først leksjon justert med delkapittel 2 fra Matematikk 8.

Nå fremstår Faktor, Matematikk 8 og Maximum 8 forholdsvis like i den første fasen av kapittelet om funksjoner med tanke på hvilke transformasjoner elevene må utføre for å løse oppgavene. Det kan derfor se ut til at Maximum 8 ved å inkludere koordinatsystemet i kapittelet om funksjoner er mer på linje med Faktor og Matematikk 8 enn Maximum 9 i første leksjon.

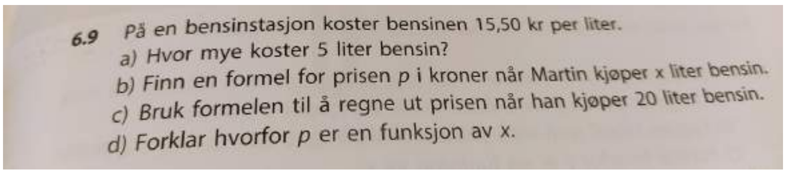
4.4.5 Fra formel

Sfard (1992) hevder at formeluttrykk er det elevene mest forbinder med funksjoner. Nedenfor viser tabellen hvordan lærebøkene legger til rette for at elevene skal bevege seg fra formel til de tre andre representasjonene.

	Fra: Formel		
Lærebok /Til	Situasjon	Tabell	Graf
Faktor	22	11	19
Matematikk 8	1	6	5
Maximum 9	18	15	31
Maximum 8	55	17	44

Tabell 4.13: Transformasjoner fra formel.

Det som er interessant fra denne tabellen er at forfatterne av Matematikk 8 har redusert antall transformasjoner fra Faktor til Matematikk 8 for alle de tre transformasjonene fra formel. Overgangen fra formel til en annen representasjon er derfor sterkt nedprioritert i det nye læreverket. I Faktor 9 er det mange oppgaver av samme type som 6.9c nedenfor. Her skal elevene anvende formelen til å si noe om en gitt situasjon.


6.9 På en bensinstasjon koster bensinen 15,50 kr per liter.
a) Hvor mye koster 5 liter bensin?
b) Finn en formel for prisen *p* i kroner når Martin kjøper *x* liter bensin.
c) Bruk formelen til å regne ut prisen når han kjøper 20 liter bensin.
d) Forklar hvorfor *p* er en funksjon av x.

Figur 4.10: Oppgave 6.9 i Faktor 9 (Hjardar & Pedersen, 2014, s. 209).

Disse oppgavene er tatt bort fra Matematikk 8 noe oppgave 4.15 på side 260 er et eksempel på dette.

4.15 Under en håndballkamp selges det flasker med vann til 20 kr per flaske.
a) Hva blir de totale inntektene hvis det selges 35 flasker vann?
b) Lag et funksjonsuttrykk $f(x)$ som viser inntekten i kroner når det selges x flasker vann.

Figur 4.11: Oppgave 4.15 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 260).

Etter at elevene har laget formelen, skal de ikke gjøre noe med den. Dette gjør at transformasjonen F→S er så godt som borte fra Matematikk 8. Blant *Undringene* som er plassert rundt i Matematikk 8 finnes det imidlertid en oppgave der elevene skal finne en situasjon som kan passe til en gitt formel. Dersom denne hadde blitt klassifisert ville den økt transformasjonen F→ S i Matematikk 8 fra en til to.

? Kan du finne en situasjon som passer til funksjonsuttrykket:
$f(x) = \frac{5000}{x}$

Figur 4.12: Undring i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 259).

I læreverket Maximum er trenden helt motsatt. Transformasjonen fra formel til en annen representasjon har økt for alle tre representasjonene. Særlig sterk er økningen for transformasjon F→S. Eksempler på denne transformasjonen finner en i oppgave 3.16 og 3.58b i Maximum 8.

3.16 Beskriv funksjonen med ord, lag verditabell, og tegn grafen til funksjonen. Sammenlikn løsningene dine med en annen elev i klassen. Hva har dere gjort likt, og hva er forskjellig? Finn årsaker til ulikhetene.

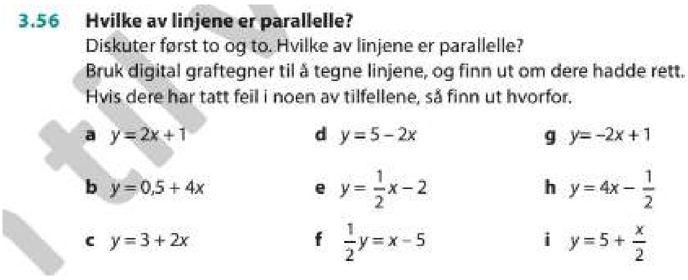
a $f(x) = 5x - 10$ **b** $f(x) = \frac{x}{3}$ **c** $f(x) = -x + 3$

Figur 4.13: Oppgave 3.16 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 167).

b Skriv funksjonene med ord.
1 $f(x) = 3x + 1$
2 $g(x) = x^2$
3 $h(x) = (10 - x) \cdot 3$
4 $i(x) = -2x + 7$

Figur 4.14: Oppgave 3.58b i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 203).

Den store økningen skyldes og delvis nyanseforskjeller i spørsmålsstillingen fra Maximum 9 til Maximum 8. Oppgave 3.56 er hentet fra Maximum 8. Her har deloppgavene blitt kategorisert som transformasjon fra formel til situasjon for å identifisere hvilke av linjene som er parallelle og formel til graf for å kontrollere svarene. Noe som gir 9 transformasjoner fra formel til situasjon.

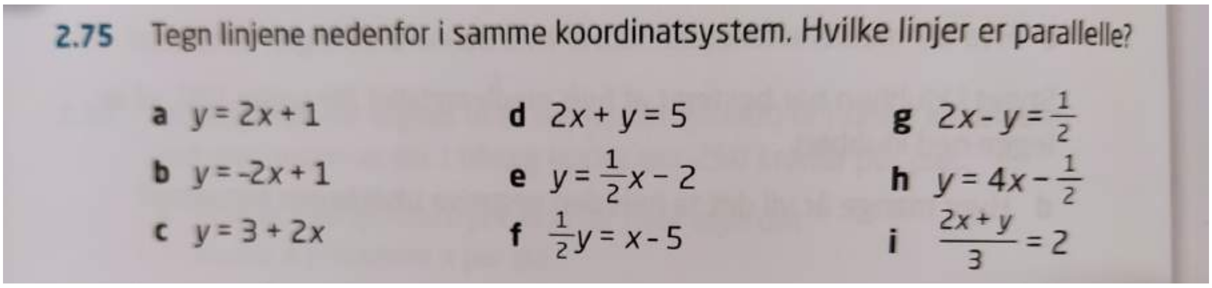


3.56 Hvilke av linjene er parallelle?
Diskuter først to og to. Hvilke av linjene er parallelle?
Bruk digital graftegner til å tegne linjene, og finn ut om dere hadde rett.
Hvis dere har tatt feil i noen av tilfellene, så finn ut hvorfor.

a $y = 2x + 1$	**d** $y = 5 - 2x$	**g** $y = -2x + 1$
b $y = 0{,}5 + 4x$	**e** $y = \frac{1}{2}x - 2$	**h** $y = 4x - \frac{1}{2}$
c $y = 3 + 2x$	**f** $\frac{1}{2}y = x - 5$	**i** $y = 5 + \frac{x}{2}$

Figur 4.15: Oppgave 3.56 i Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s.202).

En veldig lik oppgave i Maximum 9, oppgave 2.75, har blitt kategorisert som fra formel til graf og fra graf til situasjon. Dette fordi en i denne oppgaven blir bedt om å tegne inn funksjonene i et koordinatsystem og ut fra dette identifisere hvilke av de lineære funksjonene som er parallelle. Her er dermed ingen av transformasjonene identifisert som fra formel til situasjon.



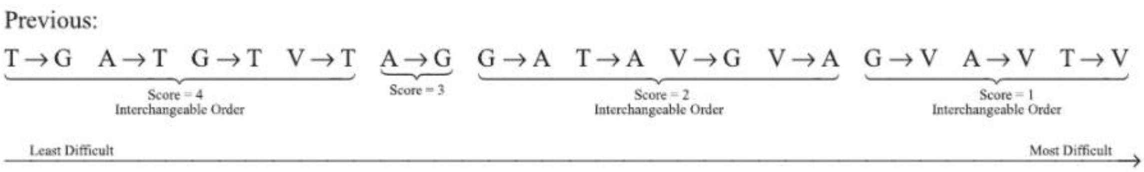
2.75 Tegn linjene nedenfor i samme koordinatsystem. Hvilke linjer er parallelle?

a $y = 2x + 1$	**d** $2x + y = 5$	**g** $2x - y = \frac{1}{2}$
b $y = -2x + 1$	**e** $y = \frac{1}{2}x - 2$	**h** $y = 4x - \frac{1}{2}$
c $y = 3 + 2x$	**f** $\frac{1}{2}y = x - 5$	**i** $\frac{2x + y}{3} = 2$

Figur 4.16: Oppgave 2.75 i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014, s.112).

4.4.6 Vanskegrad på transformasjoner

I teoridelen viste jeg til Adu-Gyamfi et al. (2019) som har kategorisert transformasjonene i ulike vanskegrader. I figuren 4.17 transformasjonene gruppert i fire grupper med de enkleste transformasjonene til venstre og så blir transformasjonene mer utfordrende når en beveger seg mot høyre.



Figur 4.17: Oversikt over vanskegrad på transformasjoner hentet fra Adu-Gyamfi et al. (2019, s. 401).

Det er viktig å påpeke at V står for “verbal” og er oversatt til situasjon i denne studien, mens A er “algebra” og er oversatt til formel. Gruppert etter vanskegrad ser transformasjonene i mine utvalgte lærebøker slik ut:

Vanskegrad	1	2	3	4
Faktor	57 (44,9%)	19 (15%)	15 (11,8%)	36 (28,3%)
Matematikk 8	73 (64,6%)	5 (4,4%)	16 (14,2%)	19 (16,8%)
Maximum 9	98 (34,4%)	31 (10,9%)	87 (30,5%)	69 (24,2%)
Maximum 8	82 (29,8%)	44 (16%)	57 (20,7%)	92 (33,5%)

Tabell 4.14: Transformasjoner fordelt etter vanskegrad.

Tabell 4.14 viser at Matematikk 8 har økt transformasjoner på nivå 1, mens transformasjonene har sunket på nivå 2 og 4. For Maximum sin del har vanskegraden på transformasjonene på nivå 1 og 3 sunket, mens de har økt på nivå 2 og 4. Den største forskjellen er imidlertid mellom Matematikk 8 og Maximum 8. 65 % av transformasjonene befinner seg på nivå 1 i Matematikk 8, mot ca 30 % i Maximum 8. Tilsvarende er over halvparten av transformasjonene i Maximum 8 på nivå 3 og 4, mens den tilsvarende andelen for Matematikk 8 er 31%.

Adu-Gyamfi et al. (2019) hevder at forskning viser at lærere underviser mye i transformasjonene F→G, F→T, T→G og G→T. Videre brukes mye mindre plass på transformasjonene S→F, S→T, T→F og G→F, mens transformasjonene F→S, T→S og G→S nesten ikke behandles. Grupperingen av disse transformasjonene er i stor grad sammenfallende med vanskegraden til transformasjonene. Eneste forskjellen er at F→G og S→T har byttet gruppe. De som brukes mest i klasserommet er på nivå 1. De som vies mindre plass er på nivå 2 og 3, mens de som nesten ikke behandles er på nivå 4.

Tid i klasserommet	Mye	Mindre	Nesten ikke
Faktor	76	15	36
Matematikk 8	78	14	19
Maximum 9	118	88	69
Maximum 8	123	48	92

Tabell 4.15: Transformasjoner fordelt etter teoretisk etablert tidsbruk.

Ut fra denne tabell 4.15 kan en ikke hevde at Adu-Gyamfi et al. (2019) sin forskning blir bekreftet i disse bøkene, selv om en ser en nedgang i “Nesten ikke” for Matematikk 8 sin del. Dersom en tar vekk transformasjonen G→S fremkommer imidlertid tabell 4.16.

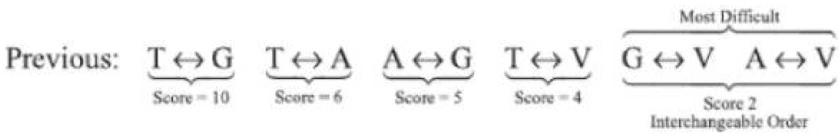
Tid i klasserommet	Mye	Mindre	Nesten ikke (-GS)
Faktor	76	15	25
Matematikk 8	78	14	1
Maximum 9	118	88	27
Maximum 8	123	48	62

Tabell 4.16: Transformasjoner fordelt etter teoretisk etablert tidsbruk (moderert).

Tabell 4.16 viser at sett bort fra transformasjonen G→S følger Matematikk 8 Adu-Gyamfi et al. (2019) sin prediksjon av hvilke transformasjoner som blir presentert og jobbet med i klasserommet. Det samme kan ikke sies om Maximum 8. Her er det riktignok en nedgang i transformasjoner i kategorien Mindre, mens kategorien "Nesten ikke" utgjør en betydelig del av transformasjonene og har økt betydelig fra Maximum 9 til Maximum 8.

4.4.7 "Bidirectional" transformasjoner

Adu-Gyamfi et al. (2019) har og kategorisert vanskegraden på "bidirectional" transformasjoner.



Figur 4.18: Kategorisering av vanskegrad hentet fra Adu-Gyamfi et al. (2019, s. 402).

Årsaken til at dette er interessant er at Janvier (1987) hevder at en transformasjon og den inverse transformasjonene bør arbeides med samtidig. I metodedelen operasjonaliserte jeg en oppgave til å være "bidirectional" dersom deloppgavene i en oppgave inneholdt både en transformasjon og den inverse transformasjonen. Fordelingen av "bidirectional" transformasjoner ser derfor slik ut.

Bidirectional	S↔T	S↔G	S↔F	T↔G	T↔F	G↔F
Faktor	0	0	4	3	0	0
Matematikk 8	0	2	1	3	0	2
Maximum 9	1	8	4	2	2	0
Maximum 8	1	13	13	2	0	1

Tabell 4.17: "Bidirectional" transformasjoner.

Tabell 4.17 viser at forskjellen fra Faktor til Matematikk 8 er at forfatterne har lagt inn to oppgaver med den "bidirectional" transformasjonen S↔G og G↔F. Imidlertid er det tatt vekk tre oppgaver med S↔F. Totalt sett økes dermed antallet "bidirectional" transformasjoner med

1 og i stedet for bare to ulike typer "bidirectional" transformasjoner er det fire ulike typer i Matematikk 8.

I Maximum 8 har en fjernet den "bidirectional" transformasjonen T↔F sammenlignet med Maximum 9. Alle andre "bidirectional" transformasjoner er der imidlertid og særlig S↔F og S↔G har økt markant.Ved å bruke Adu-Gyamfi et al. (2019) sin kategorisering etter vanskegrad ser det slik ut:

Vanskegrad	1	2	3	4	5
Faktor	3	0	0	0	4
Matematikk 8	3	0	2	0	3
Maximum 9	2	2	0	1	12
Maximum 8	2	0	1	1	26

Tabell 4.18: "Bidirectional" transformasjoner fordelt etter vanskegrad.

Tabell 4.18 viser at Matematikk 8 har lagt til to oppgaver på nivå 3, sammenlignet med Faktor, ellers er vanskegradene nokså like viss en sammenligner Faktor og Matematikk 8. Når det gjelder Maximum er den største endringen at antall "bidirectional" transformasjoner har økt markant på nivå 5. Det er her en finner de aller fleste av de "bidirectional" transformasjonene til Maximum.

4.4.8 Parvise transformasjoner

I metodedelen forklarte jeg at siden antallet "bidirectional" transformasjoner var såpass få, undersøkte jeg i tillegg om de inverse transformasjonene fantes innad i delkapitlene. I tabellen nedenfor vises de parvise transformasjonene innad i et delkapittel. Det er viktig å merke seg at tallene i tabellen er antall deloppgaver som innenfor samme delkapittel kan knyttes sammen med den inverse transformasjonen. Et eksempel på dette er dersom det er 3 transformasjoner fra situasjon til graf i et delkapittel, og det er 14 transformasjoner fra graf til situasjon i det samme delkapitlet så vil S↔G være lik 17.

Parvis	S↔T	S↔G	S↔F	T↔G	T↔F	G↔F
Faktor	0	0	25	36	0	23
Matematikk 8	0	6	2	39	0	4
Maximum 9	5	48	38	47	28	40
Maximum 8	4	26	84	54	9	33

Tabell 4.19: Transformasjoner som parvis er inkludert i samme leksjon.

Det fremgår av tabell 4.19 at Matematikk 8 har inkludert 6 transformasjoner S→G og G→S i samme delkapittel, mens dette ikke fantes i Faktor. Derimot var det et betydelig antall transformasjoner mellom situasjon og formel og mellom graf og formel i samme delkapittel som nå ikke lenger er like fremtredende. Det totale antallet parvise transformasjoner er redusert i Matematikk 8 sammenlignet med Faktor. For Maximum 8 sitt vedkommende er det totale antallet parvise transformasjoner ganske stabilt sammenlignet med Maximum 9. Den største endringen er økningen i de parvise transformasjonene mellom situasjon og formel, noe som henger sammen med økningen i transformasjonen fra formel til situasjon.

4.4.9 Sammensatte transformasjoner

Adu-Gyamfi et al. (2012) hevder at det er viktig at læremidler og lærere fokuserer på sammensatte transformasjoner. Med dette menes oppgaver der elevene må gjøre flere transformasjoner for å finne løsningen på oppgaven.

	Transformasjoner	Oppgaver	Gjennomsnitt
Faktor	167	160	1,04
Matematikk 8	135	126	1,07
Maximum 9	380	336	1,13
Maximum 8	332	265	1,25

Tabell 4.20: Transformasjoner per oppgave.

Tabell 4.20 viser at både Matematikk 8 og Maximum 8 har en liten økning i gjennomsnittlig transformasjon per oppgave. For Maximum sin del inneholder i snitt hver fjerde deloppgave mer enn en transformasjon. Hver fjerde deloppgave vil likevel ikke inneholde flere transformasjoner ettersom noen deloppgaver inneholder mer enn to transformasjoner. I Adu-Gyamfi et al. (2012) sin studie inneholder ikke oppgavene deloppgaver. Det gjør oppgavene i bøkene i denne studien. Hadde jeg telt oppgavene som en helhet og ikke telt deloppgave for deloppgave ville snittet vært mye høyere. Oppgavene blir imidlertid enklere å løse når de er delt opp i deloppgaver, og det kan være derfor dette er gjort.

En annen måte å undersøke sammensatte transformasjoner på er å identifisere hvor mange oppgaver som har samme start og slutt representasjon, men som ikke ble kategorisert som en "bidirectional" transformasjon. Disse oppstår fordi transformasjonene ikke er inverse men går via en mellomrepresentasjoner som gjør at det ikke regnes som en "bidirectional" transformasjon. I tabellen nedenfor er det listet opp oppgaver som ikke regnes som "bidirectional" fordi de går via andre representasjoner og dermed ikke får den direkte transformasjonen begge veier.

Sammensatte	F - T - G - S - F	S - F - G - S	S - F - T - G - S	S - T - G -S	S - F - G - T - S
Faktor	1	0	0	0	0
Matematikk 8	0	2	0	0	0
Maximum 9	0	6	1	3	0
Maximum 8	0	10	0	2	1

Tabell 4.21: Sammensatte funksjoner i lærebøkene.

Forskjellen mellom Faktor og Matematikk 8 er liten, men det er to oppgaver som krever at elevene beveger seg fra S→F→G→S i Matematikk 8 som ikke er regnet med i de "bidirectional" transformasjonene. Resultatet tyder imidlertid på at det finnes få sammensatte transformasjoner i Matematikk 8. I Maximum 8 er det 13 oppgaver som kunne vært inkludert i "bidirectional" dersom ett eller to mellomledd hadde vært fjernet. Forskjellen mellom Maximum 9 og Maximum 8 på dette punktet er imidlertid ikke stor.

En tredje måte en kan undersøke sammensatte transformasjoner på er ved å undersøke hvor mange deloppgaver som inneholder mer enn en transformasjon. Disse oppgavene vil tvinge elevene til å gjøre flere operasjoner og vil øke kompleksiteten i oppgaven.

Oppgaver med flere transformasjoner	To transformasjoner	Mer enn to transformasjoner
Faktor	7	0
Matematikk 8	9	0
Maximum 9	36	4
Maximum 8	29	18

Tabell 4.22: Oppgaver med flere transformasjoner.

Tabell 4.22 viser at antall oppgaver med flere enn en transformasjon har holdt seg forholdsvis likt i Faktor og Matematikk 8 med en liten økning i Matematikk 8. Sammenligner en Maximum 9 og Maximum 8 er det en liten nedgang i oppgaver med to transformasjoner, mens det er en betydelig økning i antall oppgaver med flere enn to transformasjoner.

4.4.10 Spor etter transformasjoner i eksempler og tekst

Elevene blir og kjent med hvordan de skal gjennomføre de heuristiske transformasjonene gjennom eksempler. Nedenfor viser jeg hvilke heuristiske metoder som er forklart i eksempler og tekst i bøkene.

Faktor/Matematikk 8	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon	—			X
Tabell		—	X	-
Graf		X	—	-
Formel		X	-	—

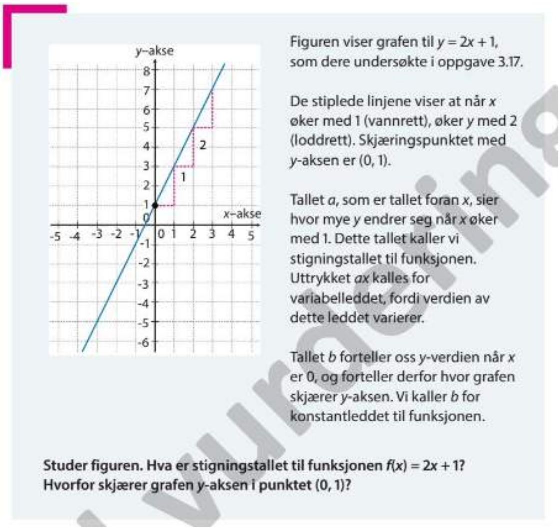
Tabell 4.23: Transformasjoner i eksempler og tekst i Faktor og Matematikk 8.

I tabell 4.23 står start-representasjonen nedover i den første kolonnen, mens mål-representasjonene er plassert i første rad. X betyr at transformasjonen er funnet i begge lærebøker. - betyr at transformasjonen er funnet i gammel versjon men ikke i ny, mens dersom det står O betyr at det er funnet i ny versjon, men ikke gammel versjon. Det som fremgår av tabell 4.23 er at Matematikk 8 har noen færre heuristiske metoder forklart enn Faktor. Transformasjonene mellom formel og graf finnes i Faktor, men er ikke tilstede i Matematikk 8. Det er ikke forklart noen transformasjoner i Matematikk 8 som ikke er forklart i Faktor.

Maximum	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon	—			X
Tabell		—	X	-
Graf		O	—	-
Formel		X	O	—

Tabell 4.24: Transformasjoner i eksempler og tekst i Maximum 8 og 9.

Når det gjelder Maximum har det nye Maximum 8 eksempel som tar for seg transformasjonene G→T og F→G som ikke fantes i Maximum 9. Imidlertid er transformasjonene T→F og G→F borte fra Maximum 8. Et annet interessant funn som gjelder for alle fem lærebøker er at ingen transformasjoner som har situasjon som mål-representasjon er uttrykt i lærebøkene. Adu-Gyamfi et al. (2019) hevder at disse tre transformasjonene er lite tilstede i klasserommet. Ser en de to tabellene samlet viser Matematikk 8 og Maximum 8 stort sett de samme heuristiske transformasjonene. Eneste forskjellen er at Maximum 8 viser G→F som fantes i Faktor men som ikke vises i Matematikk 8. Dette gjøres i delen som klassifiseres som fagtekst av Maximum 8. Skjæringspunkt, stigningstall og variabelledd forklares og elevene blir i slutten av teksten bedt om å finne stigningstallet og skjæringspunktet i y-aksen.



Figur 4.19: Forklarende tekst hentet fra Maximum 8 (Alseth et al., 2020, s. 170).

4.5 "MDI analysis tool for textbook lessons"

I teori og metodedel har jeg redegjort for MDITx rammeverket og hvordan jeg har operasjonalisert dette. I dette delkapittelet vil jeg presentere funnene fra analysen av eksemplene og oppgavene.

4.5.1 Eksempler og eksempelrom

Alle lærebøkene inneholder eksempler. Ronda og Adler (2017) leter etter eksempler og eksempelrom i illustrasjoner, forklarende tekst, oppgavetekster og utarbeidede eksempler. Jeg har valgt å forholde meg til de utarbeidede eksemplene. Tabell 4.25 nedenfor viser antall eksempler i de ulike bøkene. Det fremgår av tabellen at Maximum 8 har nesten en halvering av utarbeidede eksempler sammenlignet med Maximum 9.

Lærebok	Eksempler	Eksempelrom
Faktor	9	6
Matematikk 8	8	4
Maximum 9	15	6
Maximum 8	8	5

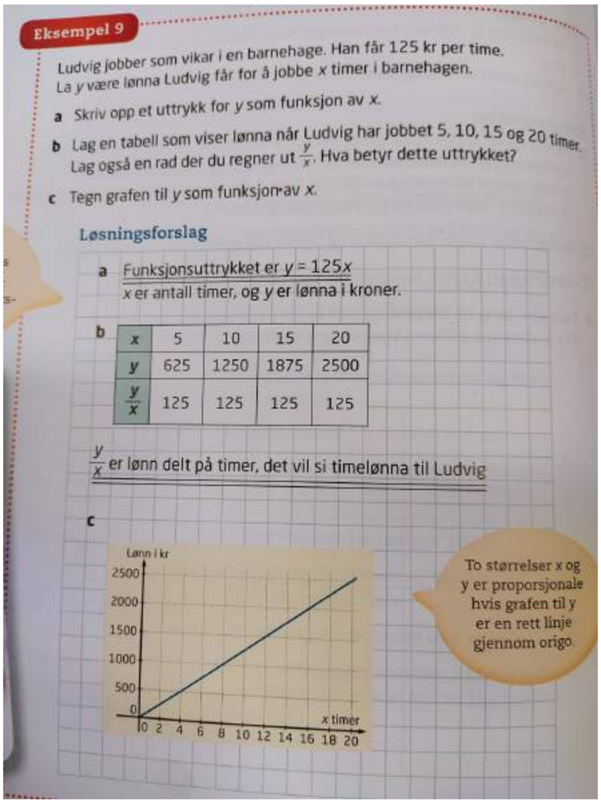
Tabell 4.25: Eksempler og eksempelrom i lærebøkene.

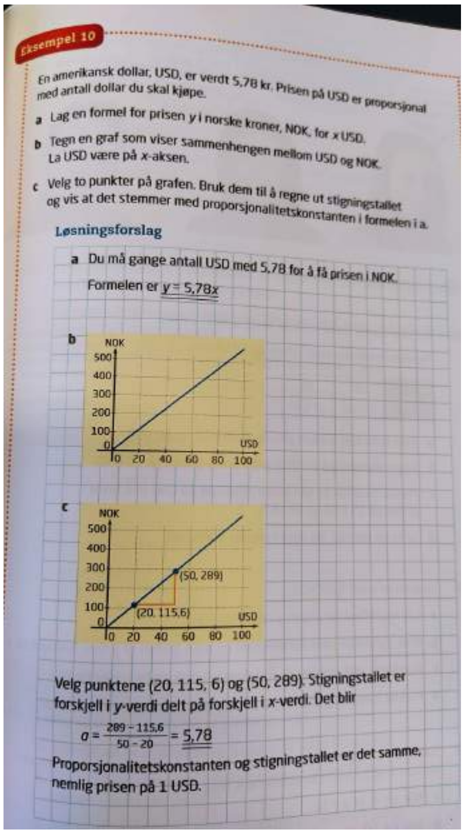
Jeg redegjorde i metodedelen for at jeg valgte å dele leksjonene i de ulike bøkene etter overskrifter. Deretter satte jeg eksemplene i den tilhørende leksjonen sammen og undersøkte hva jeg kunne trekke ut fra disse eksemplene. Siden det varierer hvilke emner og i hvilken rekkefølge emnene presenteres er de nummerert i rekkefølge i samletabellen. Noen av leksjonene er merket med NONE. I disse leksjonene finnes det enten ingen utarbeide eksempler, eller så inneholder de utarbeidede eksemplemene ikke *kontrast, generalisering* eller *fusjon*.. En fullstendig oversikt med tilhørende overskrifter kan finnes i vedlegg 3.

Eksempler	1	2	3	4	5	6	7
Faktor	G	G,K	G	NONE	G	K,G	G
Matematikk 8	G,K	G	G	G	NONE		
Maximum 9	G	G,K	G	K,G	K,G,F	NONE	G,K,F
Maximum 8	NONE	G	G	NONE	K,F	G	K,G

Tabell 4.26: Kategorisering av eksempelrom.

Fra tabell 4.26 vil jeg særlig trekke frem eksempelrom 5 i Maximum 9. Dette er eksempel 9 og 10 i Maximum 9. Læringsmålet for denne leksjonen er proporsjonale størrelser. Begge eksemplene påpeker en definerende egenskap med proporsjonale egenskaper, nemlig at timelønnen til Ludvig og prisen på en amerikansk dollar er konstant og at dermed er forholdet mellom total lønn/timelønn og antall dollar/kostnad proporsjonalt. Eksemplene er derfor generaliserende (G). Videre er det veldig forskjellige situasjoner, som i utgangspunktet kanskje ikke forstås som like.





Figur 4.20: Eksempel 9 i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a, s. 88).

Figur 4.21: Eksempel 10 i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a, s. 91).

Eksemplene sett opp mot hverandre frembringer imidlertid at selv to situasjoner som kan se svært forskjellige kan modelleres matematisk på samme måte. Jeg har derfor merket eksemplene som kontrast (K). I tillegg viser eksemplene to ulike måter å finne proporsjonalitetskonstanteen på. I eksempel 9 anvendes en tabell der y-koordinaten deles på x-koordinaten. I eksempel 10 beregnes stigningstallet til grafen målt ut fra to punkter i grafikkfeltet. Eksemplene varierer altså både i situasjon og i løsningsmetode, selv om de kan beskrives ved hjelp av samme matematiske modell. Eksemplene er derfor og kategorisert som fusjon (F). I Maximum 8 er eksemplet med Ludvig som jobber i barnehage beholdt, mens eksempel 10 er tatt bort. Dette skyldes sikkert at beregning av stigningstallet til en lineær funksjon er lagt på 10. trinn i den nye læreplanen. Det er likevel ikke satt inn et nytt eksempel, og eksemplet med Ludvig blir stående alene som et eksempel på en proporsjonal situasjon. Dette eksempelrommet er derfor merket som G siden det generaliserer hvordan en kan finne proporsjonalitetskontstanten.

Videre er det verdt å merke seg fra tabellen er at både Maximum 9 og Maximum 8 har eksempler som inneholder alle de tre klassifiseringene, mens Faktor og Matematikk 8 mangler fusjon i eksemplene sine.

Ronda og Adler (2017) kategoriserer leksjonene på nivå alt etter hvilke kategorier de finner i eksempelrommene. Tabellen nedenfor viser hvordan dette fordeler seg i mine utvalgte lærebøker:

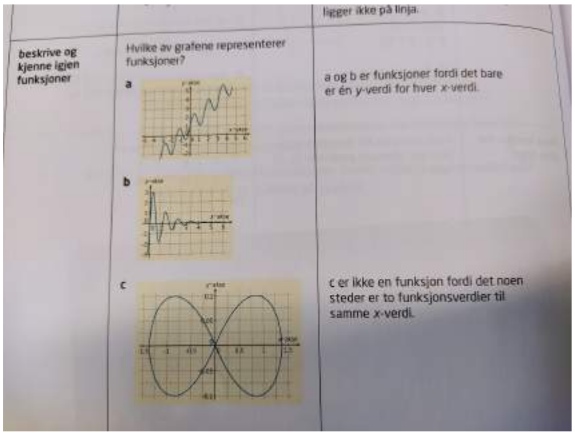
Nivå	1	2	3	4	5	6	7
Faktor	1	2	1	NONE	1	2	1
Matematikk 8	2	1	1	1	NONE		
Maximum 9	1	2	1	2	3	NONE	3
Maximum 8	NONE	1	1	NONE	2	1	2

Tabell 4.27: Eksemplene gradert etter nivå.

Tabell 4.26 og 4.27 viser at Matematikk 8 har færre eksempelrom enn Faktor. Når det gjelder nivået på disse eksempelrommene så er de ganske like. Faktor har et eksempelrom mer på nivå 2. For Maximum sin del har nivået på eksempelrommene gått noe ned. Mens det i Maximum 9 fantes to eksempelrom på nivå 3 finnes det ingen eksempelrom på nivå 3 i Maximum 8. To leksjoner har og ingen eksempelrom som kan brukes til å generalisere, se kontraster eller fusjonere kunnskaper.

Maximum 9 og 8 har noen sider med eksempler under overskriften Kort sagt. Disse er plassert etter leksjonene som introduserer nye læringsmål og foran bli bedre/se sammenhenger som repeterer og og trekker tråder mellom lærestoffet. Her finner en eksempler knyttet opp mot læringsmålene som er gitt i begynnelsen av kapitlene. Nedenfor er et utdrag fra to slike eksempler. Det første er hentet fra Maximum 8, mens det andre er hentet fra Maximum 9. Totalt finnes det 9 slike eksempler i Maximum 8, mens det finnes 8 slike eksempler i Maximum 8. Årsaken til at disse ikke er analysert er at de ikke kan settes opp mot hverandre da læringsmålet er forskjellig for alle eksemplene, men som eksemplet fra Maximum 9 viser så kan en likevel se en del av disse eksemplene for seg selv.

Figur 4.22: Utdrag fra Kort sagt i Maximum 8 (Alseth et al, 2020, s. 196).



Figur 4.23: Utdrag fra Kort sagt i Maximum 9 (Tofteberg et al., 2014a, s. 108).

I figur 4.23 hentet fra Maximum 9 er læringsmålet å kjenne igjen funksjoner. Det presenteres tre ulike grafer. Graf a og b er ganske forskjellige, men har likevel egenskapen som definerer dem som funksjoner, nemlig at de har en y-verdi for hver x-verdi. Jeg tolker derfor dette som G. Graf c står i kontrast til disse nettopp fordi her er det flere y-verdier til mange av x-verdiene. Dette står derfor i kontrast til graf a og b og kan kategoriseres som K. I Faktor var det et par sider med oppsummerende tekst som skulle fortelle hva kapittelet handlet om i et kortere format. Disse sidene finnes ikke i Matematikk 8. Det er ikke noen oppsummerende tekst eller utarbeide eksempler i komprimert format som konkluderer hva kapittelet handler om på en kort og oversiktlig måte.

4.5.2 Oppgaver

Jeg kategoriserte og oppgavene i MDITx-rammeverket. Tabell 4.28 viser fordelingen av oppgavene i de tre kategoriene KFP, CTP og AMC. Som det fremgår av tabellen er fordelingen av oppgaver i CTP forholdsvis lik i alle de fire læreverkene. Prosentandelen for KPF er og forholdsvis like, selv om de er litt høyere i Matematikk 8 enn i de andre. Det er og verdt å merke seg at AMC er betydelig høyere i
Faktor enn i Matematikk 8, mens Maximum 8 har økt andelen AMC-oppgaver sammenlignet med Maximum 9.

Lærebok/Kategori	KPF	CTP	AMC	Totalt
Faktor	44	109	14	167
Prosentvis fordeling	(26,4%)	(65,3%)	(8,4%)	-
Matematikk 8	43	90	2	135
Prosentvis fordeling	(31,9%)	(66,7%)	(1,5%)	-
Maximum 9	87	242	6	331
Prosentvis fordeling	(26%)	(72,2%)	(1,8%)	-
Maximum 8	64	185	23	272
Prosentvis fordeling	(23,5%)	(68%)	(8,5%)	-

Tabell 4.28: Oppgavene fordelt i MDITx.

Akkurat som eksemplene i leksjonene kan kategoriseres etter nivå kan og oppgavene det. Dersom leksjonen bare inneholder KPF oppgaver kategoriseres den som nivå 1. Dersom den og inneholder CTP kategoriseres den som nivå 2. Mens dersom den inneholder både AMC og CTP kategoriseres den som nivå 3. Jeg satte et minstekrav at det måtte være minst 2 AMC oppgaver for at en leksjon skulle bli kategorisert som nivå 3.

Nivå	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Faktor	2	2	2	2	1	3	2	2	2	1	3
Matematikk 8	2	2	2	2	2	2	2	1	1		
Maximum 9	2	2	2	3	2	3	2				
Maximum 8	2	2	3	3	2	3	3	3	3		

Tabell 4.29: Leksjonene delt inn etter nivå.

I tabell 4.29 fremgår det at Faktor sammenlignet med Matematikk 8 er forholdsvis likt med unntak av de to leksjonene der det er merket med nivå 3. Dette er delkapittel som er kalt “Noe å tenke på”. De oppgavene som er her er ikke like rett frem å løse og elevene må derfor knytte det de har lært sammen for å kunne løse disse. Disse er tatt vekk i Matematikk 8 og erstattet med en tverrfaglig oppgave der elevene skal søke i tabeller og på nettet for å samle informasjon. Disse er dermed merket med nivå nr. 1.

For Maximum 8 sin del har en god del flere leksjoner nå blitt merket med nivå 3, faktisk er det bare tre leksjoner som ikke er merket med nivå 3. Dette er en endring fra Maximum 9 der 2 av 7 leksjoner var på nivå 3. Det har derfor skjedd en endring her. Flere oppgaver krever mer av elevene og disse oppgavene er plassert utover i leksjonene, noe som løfter nivået til mange av leksjonene i Maximum 8.

4.6 MDITx og "The Mathematics Task Framework"

Tabell 4.28 viser at fordelingen i KPF, CTP og AMC er forholdsvis lik i de tre kategoriene. Særlig CTP er veldig lik med få prosentpoeng i forskjell. Ronda og Adler (2017) bruker imidlertid ikke en slik kvantitativ tilnærming i sin anvendelse av rammeverket, og jeg er usikker på om det finnes teoretisk belegg for å gjøre en slik kvantitativ analyse ved hjelp av MDITx-rammeverket. Årsaken til at jeg trekker frem denne tabellen er imidlertid at nivåinndelingen i tabell 4.29 er ganske forskjellig mellom Matematikk 8 og Maximum 8. Dette skyldes i første rekke antallet AMC oppgaver i Maximum 8, men det er likevel overraskende at den prosentvise fordelingen er såpass lik. Jeg nevnte i metodedelen at jeg oppfatter MDITx og MTF til dels å være overlappende. Ved å sette disse to rammeverkene opp mot hverandre fremkommer denne tabell 4,30.

Totalt	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M
KPF	27	211	0	0
CTP	3	300	323	0
AMC	0	0	0	45

Tabell 4.30: Krysstabell av MDITx og MTF.

Gitt at min forståelse av kategoriene er korrekt viser tabellen at det er klar overensstemmelse mellom kategoriene AMC og Høy-M. Videre er alle bortsett fra tre oppgaver som er kategorisert som CTP plassert i enten Lav-P eller Høy-P. Disse tre oppgavene er å lage en glider i geogebra. Dette er oppgave 2.18a, 2.19a og 2.20a i Maximum 9 på side 79. Disse har jeg, som nevnt i metodedelen, kategorisert som Lav-H innenfor kognitive krav, fordi elevene skal tilegne seg digitale tekniske ferdigheter. De må allikevel kategoriseres som CTP fordi de ikke er en kjent tidligere algoritme og de trengs for å kunne tilegne seg læringsmålet for leksjonen.

For kategorien KPF er bilde litt mer nedslående. Av totalt 242 oppgaver er bare 27 oppgaver plassert i Lav-H, mens 211 oppgaver er plassert i Lav-P. Dermed ser det ikke ut til at kategoriene er sammenfallende for KPF og Lav-H. Et viktig poeng i denne sammenhengen er imidlertid at KPF er operasjonalisert på en slik måte at dersom oppgaven etterspør noe som har blitt vist i et tidligere delkapittel skal den kategoriseres som KPF. Repetisjonskapitler i bøkene har en tendens til å komme med lignende oppgaver som elevene har møtt før for å gi elevene nye muligheter til å tilegne seg kunnskapen fra tidligere leksjoner. Dersom en tar vekk disse kapitlene fra bøkene viser tabell 4.31 følgende sammenheng.

Uten rep.	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M
KPF	23	40	0	0
CTP	3	293	291	0
AMC	0	0	0	38

Tabell 4.31: Krysstabell av MDITx og MTF uten repetisjon.

Det store utslaget er nå kraftig redusert for KPF. Imidlertid er det fortsatt flere oppgaver i Lav-P enn i Lav-H. Det som imidlertid er interessant er at de andre to kategoriene, som i tabellen ovenfor er konsistente. CTP fordeler seg på Lav-P og Høy-P sett bort fra de tre oppgavene som er i Lav-H, mens AMC og Høy-M er overlappende. I tabell 4.28 varierer prosentandel i CTP mellom 65-72%. Det gir derfor ikke så mye informasjon. Ved å fordele oppgavene som er kategorisert CTP inn i rammeverket for kognitive krav kommer denne tabellen frem.

CTP-oppgaver	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M	Totalt
Faktor	0	80	29	0	109
Matematikk 8	0	62	28	0	90
Maximum 9	3	96	143	0	242
Maximum 8	0	62	123	0	185

Tabell 4.32: CTP-oppgaver fordelt på MTF og lærebøker.

Det mest merkbare fra tabell 4.32 er forskjellen på de to læreverkene. Tabellen ovenfor med oppgavene fordelt i MDI-rammeverket ga en forholdsvis lik prosentandel for CTP. I denne tabellen fordeler oppgavene seg ganske forskjellig. I Maximum 8 er cirka to tredjedeler av CTP oppgavene Høy-P. Dette er en andel som er betydelig større en andelen Høy-P oppgaver i Matematikk 8. Matematikk 8 og Maximum 8 har samme antall CTP-oppgaver som faller i kategorien Lav-P, men andelen oppgaver er ganske forskjellig. De forholdsvis like prosentandelene i MDI-rammeverket for CTP-oppgaver blir altså nyansert ved å plassere de samme oppgavene inn i MTF-rammeverket. Ved å bytte ut CTP med Lav-P og Høy-P får en denne tabellen. Tabell 4.33 mangler de tre oppgavene der de skulle lage glider, da disse ikke ble kategorisert som CTP men som KPF.

Lærebok/Kategori	KPF	CTP (Lav-P)	CTP (Høy-P)	AMC
Faktor	44 (26,4%)	80 (47,9%)	29 (17,4%)	14 (8,4%)
Matematikk 8	43 (31,9%)	62 (45,9%)	28 (20,7%)	2 (1,5%)
Maximum 9	87 (26,2%)	96 (28,9%)	143 (43,1%)	6 (1,8%)
Maximum 8	64 (23,5%)	62 (22,8%)	123 (45,2%)	23 (8,5%)

Tabell 4.33: MDITx med Lav-P og Høy-P fra MTF.

4.7 "The Mathematics Task Framework" (MTF)

Ovenfor har jeg sett på hvordan kognitive krav kan brukes til å belyse variasjon i CTP i MDITx-rammeverket. Jeg har imidlertid ikke sett på resultatene av undersøkelsen av kognitive krav for seg selv og hva disse kan fortelle. Nedenfor følger en oversikt over hvordan oppgavene i lærebøkene fordeler seg i de fire kategoriene. Årsaken til at det totale antall oppgaver ikke stemmer overens med antall oppgaver i bøkene er fordi noen av oppgavene ikke kunne kategoriseres innenfor kategoriene.

Læreverk	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M	Totalt
Faktor	12	112	29	14	167
Prosentfordeling	7,19%	67,07%	17,37%	8,38%	
Matematikk 8	5	91	28	2	126
Prosentfordeling	3,97%	72,22%	22,22%	1,59%	
Maximum 9	11	175	143	6	335
Prosentfordeling	3,28%	52,24%	42,69%	1,79%	
Maximum 8	2	124	123	23	272
Prosentfordeling	0,74%	45,59%	45,22%	8,46%	

Tabell 4.34: Lærebøkene fordelt i MTF-rammeverket.

Et noe overraskende resultat fra tabell 4.34 er at Faktor har relativt høy andel oppgaver med Høy-M sammenlignet med Matematikk 8. Det som imidlertid er verdt å merke seg er at disse oppgavene finner en i leksjonen "Noe å lure på". Siden jeg har tatt med funksjons-kapittelet i Faktor 9 og 10 er det og inkludert to leksjoner med tittlen "Noe å lure på". Av disse 14 oppgavene er det 10 stykker som kan kategoriseres som permutasjonen fra situasjon til situasjon, tre kunne ikke kategoriseres i Janviers diagram og en ble kategorisert som fra formel til formel. Med andre ord er det tvilsomt at elevene blir kjent med funksjonsbegrepet og de ulike representasjonene gjennom disse oppgavene selv om det er betydelig flere av disse i Faktor enn i Matematikk 8. Tallet i seg selv ville blitt halvert til 7 dersom jeg bare hadde inkludert en leksjon med "Noe å lure på". I tabell 4.35 nedenfor har jeg kategorisert Høy-M oppgavene etter hvilke transformasjoner de inkluderer. Det er verdt å legge merke til at for Maximum 8 er det flere transformasjoner enn oppgaver. Dette skyldes at det i en del av oppgavene kreves flere transformasjoner. Maximum 8 har og et ganske bredt spekter av transformasjoner i Høy-M oppgavene.

Høy-M/Transformasjon	IK	SS	FF	GS	SG	SF	FS	FT	TF	TG	GF	FG
Faktor	3	10	1									
Matematikk		1		1								
Maximum 9		2		2	1	1						
Maximum 8	5	7		4		3	2	2	2	1	1	1

Tabell 4.35: Transformasjoner i Høy-M oppgaver.

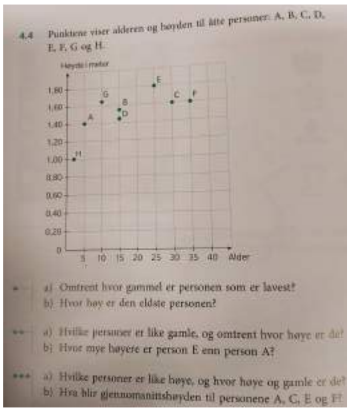
4.7.1 Kognitive krav i første leksjon

I punkt 4.4.4 viste jeg at første leksjon hadde endret karakter med tanke på hvilke transformasjoner elevene skulle jobbe med i Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9. Tabell 4.36 viser hvordan oppgavene i første leksjon fordeler seg i forhold til kognitive krav.

1. leksjon	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M
Faktor	0	13	0	0
Matematikk 8	0	13	5	1
Maximum 9	0	2	16	0
Maximum 8	0	7	3	0

Tabell 4.36: Første leksjon i kapitlene i lærebøkene.

Fra tabell 4.36 kan en se at Maximum 8 har redusert antall Høy-P og økt Lav-P i første leksjon sammenlignet med Maximum 9. Sammenligner en Faktor og Matematikk 8 er det inkludert noen flere oppgaver på et høyere kognitivt nivå. Et eksempel på en slike deloppgavene er 4.4 i Matematikk 8. I oppgave 4.4b med tre prikker må elevene koble sammen hvordan de måler gjennomsnittshøyden med diagrammet for å kunne løse denne oppgaven. Denne fremgangsmåten er ikke vist tidligere, og elevene må være kreative for å løse den. Denne er derfor kategorisert som Høy-M. Flere av de andre deloppgavene er kategorisert som Høy-P.



Figur 4.24: Oppgave 4.4 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 244).

4.7.2 Kognitive krav i Maximum

Et utdrag nedenfor av tabell 4.34 vist i punkt 4.7 viser fordelingen av oppgavene i Maximum 9 og Maximum 8:

Kognitive krav	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M
Maximum 9	11 (3,3%)	175 (52,2%)	143 (42,7%)	6 (1,8%)
Maximum 8	2 (0,7%)	124 (45,6%)	123 (45,2%)	23 (8,5%)

Tabell 4.37: Kognitive krav i Maximum.

Ved å sammenligne kategoriene kan det se ut til at de kognitive kravene har økt noe. Andelen oppgaver i kategoriene Høy-P og Høy-M har økt, mens oppgavene i kategoriene Lav-H og Lav-P har sunket. Hypotesene i en kjikvadrattest blir derfor:

H_0= Ingen forskjell mellom Maximum 9 og Maximum 8.

H_1= De kognitive kravene har økt i Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9.

Lærebøker	Signifikansnivå	Frihetsgrader	k	Q-verdi
Maximum 8/9	$\alpha = 0{,}01$	3	11,34	20,08

Tabell 4.38: Kjikvadrattest av sammenhengen mellom Maximum 8 og 9.

Siden Q > k er resultatet signifikant og den alternative hypotesen om at det er en endring må gjelde. Med andre ord kan jeg hevde at det på signifikansnivå $\alpha = 0{,}01$ er slik at de kognitive kravene er høyere i Maximum 8 enn i Maximum 9.

4.7.3 Kognitive krav i Faktor og Matematikk 8.

Et utdrag av tabell 4.34 vist i punkt 4.7 viser fordelingen av oppgavene i Faktor og Matematikk 8:

Kognitive krav	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M
Faktor	12 (7,2%)	112 (67,1%)	29 (17,4%)	14 (8,4%)
Matematikk 8	5 (4,0%)	91 (72,2%)	28 (22,2%)	2 (1,6%)

Tabell 4.39: Kognitive krav i Faktor og Matematikk 8.

De kognitive kravene i Faktor og Matematikk 8 ser prosentvis ut til å være forholdsvis like. Det noen prosentpoeng høyere andel oppgaver i kategoriene Lav-H og Høy-M i Faktor, mens det er noen prosentpoeng høyere andel oppgaver i kategoriene Lav-P og Høy-P. Det kan derfor se ut til at det er små forskjeller mellom de to lærebøkene og at lærebøkene ikke har endret seg nevneverdig. Det er ingen tendens å teste statistisk signifikans av og det er derfor ikke noe hensikt å gjennomføre en kjikvadrattest.

4.7.4 Kognitive krav i Matematikk 8 og Maximum 8.

Maximum 8 og Matematikk 8 er begge skrevet til den nye læreplanen. Det som skiller denne læreplanen fra den forrige læreplanen er at disse forholder seg til en trinnvis inndelt læreplan. Det vil si at det ikke er slik at læreplanmålene kan behandles på ulike tider i et treårsløp. En kunne derfor forvente en viss overensstemmelse mellom disse lærebøkene. I utdraget fra tabellen 4.34 nedenfor kan en se hvordan Matematikk 8 og Maximum 8 fordeler seg innenfor kategoriene i MTF-rammeverket:

Kognitive krav	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M
Matematikk 8	5 (4,0%)	91 (72,2%)	28 (22,2%)	2 (1,6%)
Maximum 8	2 (0,7%)	124 (45,6%)	123 (45,2%)	23 (8,5%)

Tabell 4.40: Kognitive krav i Matematikk 8 og Maximum 8.

Det kan se ut til at det er ganske stor forskjell mellom Matematikk 8 og Maximum 8. Maximum 8 har høyere andel Høy-P og Høy-M, mens den har lavere andel Lav-H og Lav-P enn Matematikk 8. Hypotesene blir derfor:

H_0= Ingen forskjell mellom Matematikk 8 og Maximum 8.

H_1= De kognitive kravene er større i Maximum 8 enn i Matematikk 8.

Lærebøker	Signifikansnivå	Frihetsgrader	k	Q-verdi
Matematikk 8/Maximum 8	$\alpha = 0{,}01$	3	11,34	34,90

Tabell 4.41: Kjikvadrattest av tendens i kognitive krav i Matematikk 8 og Maximum 9.

Siden Q > k er resultatet signifikant og den alternative hypotesen om at de kognitive kravene er høyere i Maximum 8 enn i Matematikk 8 må gjelde. Løvås (2013) hevder at en bør ha som tommelfingerregel at alle forventningsverdier i en kjikvadrattest bør være ≧5. Den forventede verdien til Lav-H i Matematikk 8 er 2,85. Bjørndal og Hofoss (2004) hevder på sin side at så lenge mindre enn ⅕ av rutene i tabellen har en forventet verdi under 5 kan en anvende kjikvadrattesten. Med dette som bakteppe og siden det faktiske antallet oppgaver i Matematikk 8 som er kategorisert som Lav-H er 5 og dette utgjør en veldig liten del av tallmaterialet vil jeg fortsatt hevde at dette ikke påvirker resultatet i noen særlig grad.

4.7.5. Kognitive krav i bøker fordelt etter læreplan

Hva så med læreplanen kan den forklare forskjeller i kognitive krav. Utvalget mitt er bare to kapitler i to lærebøker, resultatet vil derfor ikke gjelde generelt men for kapitlene om funksjoner. Ved å sette sammen lærebøkene skrevet til læreplanen fra 2014 og lærebøkene skrevet til læreplanen fra 2020 fremkommer følgende tabell:

Kognitive krav	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M
Læreplan 2013	23 (4,6%)	287 (57,2%)	172 (34,3%)	20 (4,0%)
Læreplan 2020	7 (1,8%)	215 (54,0%)	151 (37,9%)	25 (6,3%)

Tabell 4.42: Kognitive krav fordelt etter bøker skrevet til ulike læreplaner.

Fra selve tabellen er det små forskjeller, men det er noen få prosentpoeng lavere andel av Lav-H og Lav- P etter den nye læreplanen. Tilsvarende er det noen prosentpoeng høyere andel av Høy-P og Høy-M i lærebøkene utgitt etter 2020. Det kan derfor se ut til å være en liten tendens for at de kognitive kravene har økt i bøkene skrevet til LK 2020.

H_0=Ingen forskjell mellom bøker skrevet til Læreplan 2014 og Læreplan 2020

H_1=Forskjell mellom bøker skrevet til læreplan 2014 og læreplan 2020. De kognitive kravene har økt.

Læreplan	Signifikansnivå	Frihetsgrader	k	Q-verdi
2013/2020	$\alpha = 0{,}01$	3	11,34	8,88

Tabell 4.43: Kjikvadrattest av tendens i kognitive krav fra læreplaner.

Siden Q < k er sammenhengen ikke statistisk signifikant med $\alpha = 0{,}01$. Jeg kan derfor ikke med bakgrunn i disse kapitlene om funksjoner hevde at de kognitive kravene har økt i lærebøkene som er skrevet til den nye læreplanen samlet sett.

4.7.6 Kognitive krav i lærebøker fordelt etter forfattere

Uten å kommentere resultatene for mye kan det se ut til at det er en viss forskjell mellom lærebøkene skrevet av de ulike forfatterne. I en sammensatt tabell ser dette slik ut:

Forfattere	Lav-H	Lav-P	Høy-P	Høy-M
Faktor/Matematikk	17 (5,8%)	203 (69,3%)	57 (19,5%)	16 (5,5%)
Maximum	13 (2,1%)	299 (49,3%)	266 (43,8%)	29 (4,8%)

Tabell 4.44: Kognitive krav fordelt etter forfattere.

Her ser det ut til å være større andel oppgaver i Høy-P i Maximum enn i Faktor/Matematikk 8. Tilsvarende ser andelen Lav-H og Lav-P ut til å være høyere i Faktor/Matematikk 8. Andelen for Høy-M er ganske lik, selv om Faktor/Matematikk 8 har litt høyere andel. Hypotesen blir derfor:

H_0= Ingen forskjell mellom bøkene

H_1= De kognitive kravene er høyere i Maximum.

Læreplan	Signifikansnivå	Frihetsgrader	k	Q-verdi
2013/2020	α = 0,01	3	11,34	55,03

Tabell 4.45: Kjikvadrattest av tendens i sammenligning av lærebøker fordelt etter forlag.

Siden Q > k er resultatet signifikant og den alternative hypotesen om at de kognitive kravene er høyere i Maximum enn i Faktor/Matematikk 8 må gjelde.

4.8 Oppsummering

I denne delen har jeg presentert funnene fra analysen av læringsmål, transformasjoner, eksempler og kognitive krav i oppgavene. I den neste delen vil de viktigste funnene bli diskutert opp mot relevant forskning for å forsøke å besvare studiens problemstilling.

5. Diskusjon

Formålet med denne studien har vært å undersøke om lærebøkene etter fagfornyelsen gir flere muligheter til læring enn lærebøkene som er skrevet til den reviderte læreplanen i 2013. Kongelf (2019) og Espeland (2017) har begge skrevet doktorgrader som har pekt på svakheter med norske lærebøker i henholdsvis ungdomsskolen og på videregående skole. Videre viser internasjonal forskning at lærebøker som regel ikke oppfyller læreplanen i tilfredsstillende grad (Fan et al., 2013). Kongelf (2019) skriver i sin doktorgradsavhandling at han håper arbeidet han har gjort kan påvirke lærebøkene som utgis til den nye læreplanen, slik at de blir bedre. Cai et al. (2017) hevder imidlertid at reformer av læreplanen i matematikk historisk sett har hatt liten effekt. Det som imidlertid påvirker hva som foregår i klasserommet er læreren med sine daglige avgjørelser (Chávez-López, 2003). Årsaken til dette er blant annet at det finnes et gap mellom hva forskningen anser som god undervisning, og hva som foregår i klasserommet (Silver & Lunsford, 2017). Mitt anliggende for denne studien har derfor vært å undersøke om den nye læreplanen og arbeidet med denne har påvirket det som står i lærebøkene på en slik måte at læringsmulighetene i lærebøkene har økt, og i tilfelle på hvilke måter. Dette har jeg gjort gjennom en innholdsanalyse der jeg har studert emnet funksjoner i fem lærebøker og undersøkt læringsmål, eksempler, transformasjoner og kognitive krav i oppgavene. Törnroos (2005) hevder at en av de metodene som gir best korrelasjon mellom læring og læringsmuligheter er nettopp en innholdsanalyse av en emnebasert undersøkelse som sammenligner læringsmulighetene i lærebøkene. I forlengelsen av dette hevder Senk et al. (2014) at læreboken er en av de viktigste faktorene for å forklare elevlæring. Jeg skal i de neste avsnittene diskutere funnene min og når jeg refererer til de ulike bøkene er det kapitlene som omhandler funksjoner jeg diskuterer, og ikke lærebøkene som helhet.

5.1 Læringsmål

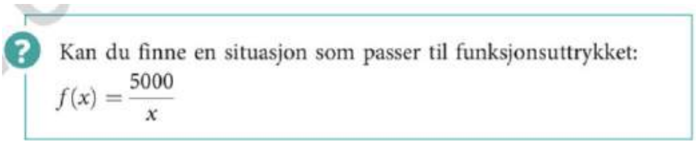
Noe av det første som står beskrevet i et kapittel i en lærebok i matematikk er læringsmålene. Disse er ofte mål konkretiseringer av læreplanen. Forfatterne av en lærebok har på denne måten bearbeidet læreplanen for læreren og eleven. Forskning viser at sjansen for at et emne arbeides med i klasserommet er liten dersom det ikke er omtalt i læreboken (Alajmi, 2012; Tarr et al., 2006). Dette gjenspeiler seg i resultater som viser at det er mer sannsynlig at elever behersker emner som er omtalt i lærebøker enn emner som ikke er det (Stein et al., 2007). Læringsmulighetene til elevene er derfor til dels avhengig av hvordan lærebokforfatterne har tolket læreplanen. Det er nemlig slik at enhver situasjon der læring foregår har et mål, og dette målet definerer hva elevene skal lære (Adler & Ronda, 2015)

I tabell 4.4 fremgår det at Faktor 9 og Matematikk 8 har forholdsvis like læringsmål. Det er ingen læringsmål som er overlappende mellom Matematikk 8 og Faktor 10. I metodedelen redegjorde jeg for at jeg inkluderte Faktor 10 i studien for å sikre at sammenligningsgrunnlaget mellom Faktor og Maximum skulle være forholdsvis likt. Læringsmålene i Faktor 9 og 10 samlet sett er derfor forholdsvis like læringsmålene i Maximum 9, selv om det finnes forskjeller her og. Bakgrunnen for dette valget var at læreplanen fra 2006/2013 hadde læreplanmål etter 10. trinn. Dermed kunne det tenkes at forfatterne av lærebøkene hadde plassert læremålene på ulike steder i lærebøkene laget for 8., 9. og 10. trinn. Den nye læreplanen har læreplanmål delt inn etter trinn. Denne trinnvise inndeling trodde jeg i forkant av studien ville tvinge lærebokforfatterne til å i større grad inkludere de samme læringsmålene i lærebøkene. Analysen av læringsmålene kan imidlertid tyde på noe annet. Det er betydelig større likhet mellom Matematikk 8 og Faktor 9 hva gjelder læringsmål, enn det er likhet mellom Matematikk 8 og Maximum 8. Det samme kan hevdes om Maximum. Likheten i læringsmålene i Maximum 8 og 9 er betydelig større enn likheten mellom lærebøkene skrevet etter fagfornyelsen. Det interessante blir da hvem som har tolket læreplanen riktig. Følgende kompetansemål er relevante for kapitlene om funksjoner:

- "utforske, forklare og samanlikne funksjonar knytte til praktiske situasjonar".
- "representere funksjonar på ulike måtar og vise samanhengar mellom representasjonane".
- "utforske korleis algoritmar kan skapast, testast og forbetrast ved hjelp av programmering" (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12).

I resultatdelen nevnte jeg at det kan være misvisende å sammenligne læringsmålene i Matematikk 8 og Maximum 8. Det fremgår av tabell 4.4 og 4.5 at læringsmålene i Matematikk 8 bærer preg av å være overskrifter, mens Maximum 8 sine læringsmål går mer i detalj. Læringsmålene i Faktor og Matematikk 8 forteller hva eleven skal lære om. Blant annet skal de lære om *"grafen til en funksjon"* (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 239). I Maximum 8 er læringsmålene skrevet i verbform og beskriver hva elevene skal kunne etter at de har jobbet med læreboken. Det er og verdt å legge merke til at læringsmålene i Maximum er mye større grad er knyttet til kompetansemålene i læreplanen ved at en tar i bruk mange av de samme begrepene. Et eksempel på dette er kompetansemålet "representere funksjonar på ulike måtar og vise samanhengar mellom representasjonane*"* (Utdanningsdirektoratet, 2020, s.12). I Matematikk 8 er dette tolket til at elevene skal lære om "funksjonsuttrykk som beskriver en situasjon*"* og "grafen til en funksjon" (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 239). Forfatterne av Maximum 8 har tolket det å vise sammenhenger mellom representasjoner som å "kjenne igjen proporsjonale og omvendt proporsjonale sammenhenger" (Alseth et al., 2020, s. 182). Videre har de tolket det å "representerer funksjonar på ulike måtar" (Utdanningsdirektoratet, 2020, s.12) som "uttrykke proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet på ulike måter" (Alseth et al., 2020, s. 182).

En annen interessant observasjon er at det i Maximum 8 uttrykkes eksplisitt at elevene skal lære om proporsjonale og omvendt proporsjonale funksjoner. Forfatterne av Maximum 8 mener med andre ord at kompetansemålene beskriver at elevene skal lære om proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet på 8. trinn. Bills et al. (2006) hevder at for at elever skal få med seg generaliteter fra eksempler må disse uttrykkes eksplisitt. Det samme må nødvendigvis gjelde for forklarende tekst og oppgaver også. Skal elevene vite hva proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet er for noe, må enten læreboken eller læreren fortelle de dette. I Matematikk 8 uttrykkes det ikke eksplisitt at det finnes proporsjonale og omvendt proporsjonale funksjoner. Dette ligner på Faktor 9. Heller ikke her anvendes disse begrepene, de kommer først i Faktor 10. En forklaring på dette kan en finne hos Love og Pimm (1996) som hevder at lærebøker forenkler matematiske ideer og det matematiske språket for å tilpasse seg elevene. Det kan tenkes at forfatterne av Matematikk 8 forenkler fordi de mener at elevene ikke er klare for dette i 8.klasse, men at de er mer mottakelige i 10. klasse. Dersom mønsteret fra Faktor fortsetter i Matematikk vil nemlig Matematikk 10 anvende begrepene proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet. Ved å anvende Matematikk 8 er det små sjanser for at elevene vil lære seg hva proporsjonalitet er etter å ha arbeidet med læreboken. Dette selv om det finnes oppgaver og eksempler som omhandler proporsjonale funksjoner. Når det gjelder omvendt proporsjonale funksjoner i Matematikk 8 er det eneste sporet å finne i en *Undring* på side 259, der elevene skal tenke på en situasjon som kan passe til funksjonsuttrykket.



Kan du finne en situasjon som passer til funksjonsuttrykket:

$f(x) = \frac{5000}{x}$

Figur 5.1: Undring på s. 259 i Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 259).

Ut fra denne *Undringen* kan en ikke forvente at elevene skal tilegne seg kunnskaper og ferdigheter knyttet til omvendt proporsjonale funksjoner gjennom bare å anvende Matematikk 8.

Med tanke på at sjansen for at noe behandles i klasserommet dersom det ikke er omtalt i læreboken er liten (Alajmi, 2012; Tarr et al., 2006) og at elevene behersker bedre det som står omtalt i læreboken enn det som ikke gjør det (Stein et al., 2007) er det grunn til å forvente at elevene som anvender Maximum 8 har større mulighet til å tilegne seg kunnskaper og ferdigheter knyttet til proporsjonale og omvendt proporsjonale funksjoner enn elevene som bruker Matematikk 8. Det interessante spørsmålet blir da om en skal forstå kompetansemålene til å inkludere omvendt proporsjonale funksjoner.

Jeg nevnte ovenfor at det er stor likhet i læremål mellom bøkene som er skrevet av de samme forfatterne. Da er det interessant å se at omvendt proporsjonale funksjoner er flyttet ned fra 10. trinn i Maximum. Omvendt proporsjonale funksjoner er ikke omtalt i Maximum 9. Dette er altså noe forfatterne har tolket at er inkludert i kompetansemålet og har dermed inkludert dette i Maximum 8. Et annet læreverk Matemagisk, utgitt av Aschehoug og, forfattet av Kongsnes og Wallace (2020) har ikke inkludert omvendt proporsjonale funksjoner som et læringsmål. Faktum er derfor at Matemagisk 8 og Matematikk 8 ikke har læringsmål tilknyttet omvendt proporsjonale funksjoner, mens Maximum 8 har dette. Forutsatt at kompetansemålet skal forstås å inkludere omvendt proporsjonale funksjoner gir da Maximum 8 elevene større mulighet til å tilegne seg hva omvendt proporsjonale funksjoner er. Det må imidlertid innvendes at det nok må forventes at dette blir presentert for elevene i Matematikk 10. I tillegg kan det tenkes at kompetansemålet ikke skal forstås på denne måten og da vil en inkludering av omvendt proporsjonale funksjoner på et senere tidspunkt i utdanningsløpet være en riktigere tilnærming av lærebokforfatterne. Selv om en i matematikk har fått en trinnvis inndeling av læreplanen er det altså likevel forskjeller i når elevene skal tilegne seg kunnskaper og ferdigheter knyttet til omvendt proporsjonale funksjoner ut fra hvilket læreverk som blir brukt.

Et annet interessant funn er at Matematikk 8 har tatt inn avlesing og tolkning av diagrammer fra virkeligheten. Dette læringsmålet fantes ikke i Faktor. Et læringsmål som hadde visse likheter med dette læringsmålet fantes i Maximum 9, men er ikke med i Maximum 8. Forfatterne av Maximum forstår altså læreplanen slik at avlesning av diagrammer og tolkning av disse med tanke på virkeligheten som et eget læringsmål ikke er noe som ligger på 8.trinn i matematikk etter den nye læreplanen. Forfatterne av Matematikk 8 tenker helt annerledes og har inkludert dette i sitt læreverk.

På den andre siden kan en lese ut fra tabell 4.10 at Matematikk 8 og Maximum 8 har omtrent samme antall transformasjon fra graf til situasjon eller tabell. Det er disse transformasjonene som er knyttet til læringsmålet om avlesning og tolkning av diagrammer i Matematikk 8. Dette kan derfor tyde på at Maximum 8 har prioritert disse transformasjonene. Mot dette kan en innvende at Maximum 8 har mer en dobbelt så mange transformasjoner som Matematikk 8, ifølge tabell 4.6, med 335 transformasjoner mot 135 transformasjoner. Den relative andelen transformasjoner som behandler dette læringsmålet er derfor betydelig større i Matematikk 8 enn i Maximum 8. En annen innvending er at de transformasjonene fra graf til situasjon eller tabell i Maximum 8 er knyttet til praktiske situasjoner der elevene skal bruke formelen til å tegne en graf og tolke grafen. I Matematikk 8 finner en de transformasjonene, som er knyttet til det omtalte læringsmålet, i oppgaver der diagrammene allerede er gitt og elevene skal ikke arbeide med formler eller tegne grafene når de jobber med dette læringsmålet. Jeg vil derfor argumentere for at selv om transformasjonene ligner på hverandre kan det at de er knyttet til ulike læringsmål gjøre at elevene lærer forskjellige ting fra transformasjonene.

Videre har forfatterne av Maximum 8 inkludert en oppgave med programmering i kapittelet om funksjoner. Dette er i overensstemmelse med læreplanen som har et nytt kompetansemål som lyder "utforske korleis algoritmar kan skapast, testast og forbetrast ved hjelp av programmering" (Utdanningsdirektoratet, 2020, s.12). En slik oppgave finnes ikke i Matematikk 8 og læreren må derfor innhente materiell andre steder for å dekke dette kompetansemålet.

5.2 Transformasjoner

Lærebøkene definerer ikke bare læringsmulighetene med tanke på hvilke læringsmål de fremlegger, de definerer og i stor grad hvordan disse legges frem for elevene. Dette fordi norske lærere i stor utstrekning bruker læreboken som eneste kilde til undervisningen (Espeland, 2017). Marton og Pang (2006) hevder at enhver læringssituasjon har et læringsmål. Dette kan være direkte eller indirekte. De direkte læringsmålene er de som skal læres i en gitt undervisningssituasjon, mens de indirekte læringsmålene er hva elevene skal lære seg å gjøre med det direkte læringsmålet (Lo, 2012). I min studie blir de direkte læringsmålene konkret analysert gjennom en undersøkelse av de oppgavene og eksemplene elevene gis muligheten til å arbeide, og hvilke ulike representasjoner og transformasjoner de møter i lærebøkene.

5.2.1 "Bidirectional" transformasjoner

Duval (2006) hevder at å lære å gjennomføre transformasjoner parvis øker den konseptuelle forståelsen av transformasjonene. Innlæringen av transformasjoner bør altså foregå på den måten at en transformasjon og den motsatte transformasjonen presenteres samtidig. Tabell 4.17 viser at Maximum 8 har økt muligheten for at elevene lærer seg de "bidirectional" transformasjonene mellom situasjon og graf (S↔G) og mellom situasjon og formel (S↔F) sammenlignet med Maximum 9. Dette er og de "bidirectional" transformasjonene som Adu-Gyamfi et al. (2019) har klassifisert som de vanskeligste for elevene å gjennomføre. Det er derfor interessant at disse får så mye plass i Maximum 8. På den andre siden er de andre "bidirectional" transformasjonene så og si fraværende i Maximum 8. Jeg kategoriserte totalt 26 "bidirectional" transformasjoner som var enten S↔G eller S↔F de fire resterende "bidirectional" transformasjonene finnes det bare 4 av i Maximum 8. Forskjellen på Faktor og Matematikk 8 er små med tanke på "bidirectional" transformasjoner. Den største forskjellen finner en imidlertid mellom Maximum 8 og Matematikk 8. Der Maximum 8 har 26 "bidirectional" transformasjoner som var enten S↔G eller S↔F er det tilsvarende tallet i Matematikk 8 for "bidirectional" transformasjoner lik 3. Her er det med andre ord en betydelig forskjell mellom lærebøkene. Maximum 8 gir større læringsmuligheter til å beherske disse transformasjonene enn Matematikk 8. Matematikk 8 og Maximum 8 har imidlertid omtrent like få av de fire andre "bidirectional" transformasjonene.

5.2.2 Parvise transformasjoner

Siden det ikke var mulig å finne særlig mange av "bidirectional" transformasjoner i lærebøkene undersøkte jeg og antall parvise transformasjoner. Disse definerte jeg som antall transformasjoner og inverse transformasjoner i samme delkapittel. I tabell 4.19 fremkommer det at antall parvise transformasjoner er redusert i Matematikk 8 sammenlignet med Faktor bortsett fra mellom tabell og graf. I Maximum er bildet litt mer sammensatt. De fleste parvise transformasjonene har sunket litt, men det er en betydelig økning i transformasjoner mellom situasjon og formel. Felles for både Matematikk 8 og Maximum 8 er imidlertid en nedprioritering av parvise transformasjoner mellom situasjon og tabell og mellom tabell og formel. Fra tabell 4.8 og 4.9 fremgår det at det ikke finnes en eneste transformasjon mellom situasjon og tabell i Matematikk 8, mens det var 3 transformasjoner fra tabell til situasjon i Faktor. I Maximum 8 er det 10 transformasjoner mellom situasjon og tabell, noe som er en halvering fra Maximum 9. At transformasjonene mellom situasjon og tabell er nedprioritert kan forklares ved Nitsch et al. (2015). De hevder, basert på sine empiriske studier, at disse transformasjonene i svært liten grad brukes i ungdomsskolen som separate transformasjoner og de har derfor utelatt disse transformasjonene fra sin modell. Bossé et al. (2011b) hevder på sin side at denne transformasjonen riktignok ikke er blant de vanligste transformasjonene som lærerne viser i klasserommet gjennom eksempler og oppgaver, men at de brukes av lærere i klasserommet. Det blir uansett vanskelig for lærere som forholder seg til læreboken slik Espeland (2017) beskriver å vise denne transformasjonen til elevene, da den i svært liten grad er å finne i lærebøkene.

5.2.3 Transformasjonen fra tabell til formel

Nedprioriteringen av transformasjoner mellom tabell og formel kan imidlertid ikke forklares ved at den ikke er relevant for klasserommet. Nitsch et al. (2015) hevder at bortsett fra transformasjonene mellom situasjon og tabell finnes det ikke en transformasjon som er viktigere, eller mindre viktig, for at elevene skal beherske funksjoner og forstå de ulike representasjonene og sammenhengene mellom de. Elevene må derfor jobbe med alle. Adu-Gyamfi et al. (2012) hevder på sin side at det nettopp burde vært et større fokus på transformasjonen fra tabell til formel i lærebøker. Dette begrunner de ved å vise til at det i deres forsøk var denne transformasjonen elevene gjorde "interpretation errors". En "interpretation" feil oppstår når en elev ikke identifiserer hvilke egenskaper med enten start eller mål representasjonen som trengs for å gjennomføre transformasjonen, og som dermed ikke klarer å gjennomføre transformasjonen slik at start og mål representasjonen representerer samme funksjon (Adu-Gyamfi et al., 2012). Tabeller inneholder mye informasjon som kan gjøre det vanskelig å finne egenskapene som trengs for å lage et funksjonsuttrykk. Egenskapene som trengs for å lage funksjonen, som stigningstall og konstantledd, kan være skjult i tabellen. Funnene fra min studie viser at elevene i liten grad får muligheten til å bli kjent med denne transformasjonen. Transformasjonen er nesten helt fraværende både i Faktor og Matematikk 8. Eneste sporet etter denne transformasjonen i Matematikk 8 er en *Undring* vist i figur 4.8. Her er det to tabeller der elevene blir bedt om å finne funksjonsuttrykket til. I Maximum 9 fantes det 27 slike transformasjoner mens det i Maximum 8 er kategorisert 4 slike transformasjoner. Begge lærebøkene har med andre ord tolket kompetansemålet *"*representere funksjonar på ulike måtar og vise samanhengar mellom representasjonane*"* (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 12) til å ikke gjelde transformasjonen fra tabell til formel. Jeg vil hevde at det med bakgrunn i kompetansemålet absolutt kan forsvares å inkludere transformasjonen fra tabell til graf. Kompetansemålet etterspør at funksjonene skal bli representert på ulike måter, dette kan absolutt være tabell som en representasjon. Videre skal en vise sammenhenger mellom representasjonene. En transformasjon fra tabell til formel er nettopp en slik sammenheng. På den annen side er et kompetansemål for 10. trinn formulert slik: "rekne ut stigningstallet til ein lineær funksjon…*."* (Utdanningsdirektoratet, 2020, s.14). Det kan tenkes at forfatterne av lærebøkene har tenkt å inkludere denne transformasjonen i Maximum 10 og Matematikk 10. Det vet jeg imidlertid ikke på nåværende tidspunkt, siden disse ikke er utgitt. Det som imidlertid er klart er at det kan se ut til at læringsmulighetene er betydelig større for å lære seg transformasjonen fra tabell til formel i Maximum 9 enn Maximum 8, og at de er nedprioritert i både Matematikk 8 og Maximum 8. Det er dermed ikke å forvente at elevene vil beherske denne transformasjonen etter å ha arbeidet seg gjennom disse lærebøkene.

5.2.4 Vanskegrad på transformasjoner og hvor vanlig de er i klasserommet

Adu-Gyamfi et al. (2019) har sortert transformasjonene etter vanskegrad. Av tabell 4.14 fremgår det at Matematikk 8 har en nedgang i vanskegrad sammenlignet med Faktor. Hele 65 % av transformasjonene befinner seg på nivå 1. Tilsvarende finnes det færre transformasjoner på nivå 4 i Matematikk 8 enn i Faktor. Vanskegraden i transformasjonen er forholdsvis like i Maximum 8 og Maximum 9, i tillegg så er fordelingen i Maximum mye jevnere fordelt utover kategoriene enn i Matematikk 8. Et bevis for dette er at elevene gis flere muligheter til å tilegne seg de vanskeligste transformasjonene i Maximum 8 enn i Matematikk 8. Dette kan underbygges av at det finnes 92 transformasjoner på nivå 4 i Maximum 8, noe som utgjør 33,5 % av de totale transformasjonene i Maximum 8. De tilsvarende tallene for Matematikk 8 er 19 og 16,8%. Vanskegraden på transformasjonene i Maximum 8 er derfor større enn i Matematikk 8, noe som gir elevene flere muligheter til å beherske de mer utfordrende transformasjonene.

Adu-Gyamfi et al. (2019) har og etablert hvilke transformasjoner som det er vanligst å se i et klasserom. Transformasjonene i Matematikk 8 slik Adu-Gyamfi et al. (2019) beskriver transformasjonene i et vanlig klasserom, med unntak av transformasjonen G→S slik det fremgår av tabell 4.15 og 4.16.. Det er 78 transformasjoner i kategorien "Mye", 14 transformasjoner i kategorien "Mindre" og 19 transformasjoner i kategorien "Nesten ikke". Fjerner en transformasjonen G→S fra "Nesten ikke" er det imidlertid bare 1 transformasjon igjen. Andelen transformasjoner som var i kategorien "Nesten ikke" var noe større i Faktor enn i Matematikk 8. Transformasjonene i Matematikk 8 har derfor beveget seg i mer tradisjonell retning enn det som var tilfelle for Faktor. Dersom en sammenligner Maximum 8 og Maximum 9 er antallet transformasjoner i kategorien "Mindre" nesten halvert fra 88 til 48, mens i kategorien "Nesten ikke" har antall transformasjoner økt betydelig fra 27 til 62. Maximum 8 fremstår derfor ikke slik Adu-Gyamfi et al. (2019) hevder at det ser ut i et klasserom til det er det for mange transformasjoner i kategorien "Nesten ikke".

5.2.5 Sammensatte transformasjoner

Adu-Gyamfi et al. (2012) hevder og at lærebøker bør fokusere mer på sammensatte transformasjoner. Grunnen til dette er at en god del elever gjør feil når oppgavene blir litt mer kompliserte og de må tenke på flere ting samtidig for å løse en oppgave. De bør derfor få trening i dette. Hvorvidt lærebøkene legger til rette for dette har jeg undersøkt på tre ulike måter. Den første måten var å undersøke gjennomsnittlig antall transformasjoner per oppgave. Tabell 4.20 viser at mens Faktor har et snitt på 1,04 transformasjoner har Matematikk 8 et snitt på 1,07. Dette er en økning, men den er forholdsvis liten tatt i betraktning at det i Faktor er 7 flere transformasjoner enn oppgaver, mens det i Matematikk 8 er 9 flere transformasjoner enn det er oppgaver. For Maximum har snittet økt fra 1,13 for Maximum 9 til 1,25 for Maximum 8. Snittet til Maximum 8 er og en god del høyere enn snittet til Matematikk 8.

En lignende måte å undersøke sammensatte transformasjoner på kan gjøres ved å analysere hvor mange deloppgaver som inneholder flere transformasjoner. I tabell 4.22 fremkommer det at Faktor og Matematikk 8 har henholdsvis 7 og 9 deloppgaver med to transformasjoner og ingen deloppgaver som inneholder flere transformasjoner. Dette er ganske mye mindre enn i Maximum 9 og Maximum 8. I Maximum 8 har det vært en liten nedgang i deloppgaver med to transformasjoner fra 36 til 29. Antall oppgaver med flere transformasjoner har imidlertid økt fra 4 til 18.

En tredje måte jeg undersøkte dette på var med å undersøke om det var noen oppgaver som ikke ble kategorisert som en "bidirectional" transformasjon fordi oppgavene la opp til at en skulle bevege seg via en mellom-representasjon i stedet for å gjennomføre en direkte "bidirectional" transformasjon. I tabell 4.21 fremkommer det at det nesten ikke er noen slike oppgaver i Faktor eller Matematikk 8. For Maximum 8 er antallet oppgaver som er bygget opp av transformasjonene fra S→F→G→S økt noe sammenlignet med Maximum 9, ellers er de andre sammensatte transformasjonene forholdsvis like.

Når en ser alle disse tre måtene å undersøke sammensatte transformasjoner på under ett vil jeg hevde at det kommer frem et ganske tydelig bilde. For alle de tre parameterne scorer Faktor og Matematikk 8 relativt likt. Det er bare små nyanseforskjeller, og jeg kan ikke hevde med bakgrunn i tallene at det er skjedd noen endring i Matematikk 8 sammenlignet med Faktor. For Maximum er bilde anderledes. Gjennomsnittlig antall transformasjoner per oppgave har økt i Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9, samt at antall deloppgaver som inneholder mer enn to transformasjoner har økt betraktelig. Jeg vil derfor hevde at Maximum 8 i større grad enn Maximum 9 følger Adu-Gyamfi et al. (2019) oppfordring om å tilby elevene sammensatte transformasjoner. Den største forskjellen finner en imidlertid mellom bøkene fra de to ulike forlagene. Maximum 8 har et klart høyere antall transformasjoner per oppgave enn Matematikk 8. Oppgaver med flere transformasjoner er og betydelig høyere i Maximum 8 enn i Matematikk 8. Så for sammensatte transformasjoner gir Maximum 8 flere læringsmuligheter enn Matematikk 8.

5.3 Eksempler i lærebøkene

Resultatene fra analysen av eksemplene viser at det har skjedd noen endringer. For det første viser tabell 4.25 at antall eksempel er halvert i Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9. Det er derfor færre muligheter for elevene å tilegne seg kunnskaper gjennom eksempler i Maximum 8 enn i Maximum 9. Antall eksempler har holdt seg stabilt i Matematikk 8 og Faktor, mens antall eksempelrom har sunket. Dette gjør at elevene i mindre grad kan se sammenhenger mellom eksempler da de i større grad er enkeltstående eksempler i Matematikk 8 sammenlignet med Faktor.

Når det gjelder nivået på eksempelrommene har det ifølge tabell 4.27 sunket i begge lærebøker. Det kan derfor se ut til at det både er færre eksempler og at nivået på de eksemplene som er i boken er noe lavere enn i eksemplene i bøkene fra 2014/2015. Det er vanskelig å vite hva som er årsaken til dette, men det kan tenkes at et økt fokus på utforsking har minsket behovet for utarbeidede eksempler, og at forfatterne nedprioriterer eksempler. Det finnes imidlertid ikke grunnlag i min studie for å fremme en påstand om en slik sammenheng, til det kreves det mer forskning på flere kapitler og et intervju av forfatterne for å eventuelt få bekrefte en slik påstand.

5.4 Kognitive krav

En læringssituasjon har i tillegg til direkte læringsmål også indirekte læringsmål (Marton og Pang, 2006). I teoridelen definerte jeg disse som kjerneelementene i læreplanen og knyttet disse opp mot Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder for utvikling av matematisk ferdigheter. Kilpatrick et al. (2001) bruker ordene "mathematical proficiency" til å beskrive matematiske ferdigheter. Det samme ordet "proficiency" finner en igjen hos Tekkumru-Kisa et al. (2020) som i en oppsummering av forskning på oppgaver i matematikken de siste 40 årene hevder at for å undersøke elevers "proficiency" er oppgaver helt sentralt. Tekkumru-Kisa et al. (2020) hevder at det er viktig å jobbe med kognitivt krevende oppgaver for å utvikle matematiske ferdigheter. Dette begrunner de ved å hevde at lærebøker bruker oppgaver som middel for å sikre at elevene skal utvikle matematiske ferdigheter. De henviser videre til Stein og Lane (1996) sin studie som ifølge Tekkumru-Kisa et al. (2020, s. 609) viste at "maintaining cognitive demand was associated with students' gains on an assessment of thinking, reasoning and problemsolving".

En av Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder er prosedyreevne. Denne inkluderer det å ha kunnskaper og ferdigheter til å utføre algoritmer. Dette kan til dels læres ved å gjennomføre oppgaver på lavere kognitivt nivå. Oppgaver på lavere kognitivt nivå er av natur algoritmiske og krever at elevene anvender algoritmer som de tidligere har blitt vist (Smith & Stein, 1998). Skal en imidlertid fullt ut utvikle prosedyreevne må en kunne vite når algoritmene skal anvendes og kunne anvende de fleksibelt og nøyaktig. Dette gjør at prosedyreevne er nært knyttet med begrepsforståelse (Kilpatrick et al., 2001), og skal en utvikle en begrepsmessig forståelse må en ifølge Smith og Stein (1998) jobbe med kognitivt krevende oppgaver. Når elever er gode på produktiv disponering er de utholdende i møte med krevende oppgaver og har troen på seg selv (Kilpatrick et al., 2001). Smith og Stein (1998) hevder at kognitivt krevende oppgaver øver opp utholdenheten til elevene ved at de må tåle et visst nivå av usikkerhet i møte med disse oppgavene da det ikke er åpenbart hvordan disse skal løses . En strategisk kompetent elev klarer å representere et problem med ulike mediatorer slik at han klare å løse problemet (Kilpatrick et al., 2001). Dette kan øves på i kognitivt krevende oppgaver som krever at eleven lager forbindelser mellom ulike representasjoner for å løse problemene (Smith & Stein, 1998).

Med bakgrunn i dette vil jeg hevde at jeg kan anvende de kognitive kravene til å undersøke i hvilken grad lærebøkene legger til rette for at elevene skal tilegne seg kjerneelementene i læreplanen. Jones og Tarr (2007) hevder at siden Stein et al. (1996) viste at lærere sjelden øker de kognitive kravene i en oppgave, er det viktig at det er nok kognitive krav i oppgavene slik at elevene får muligheten til å se at matematikk handler om mer enn uavhengige prosedyrer og fakta. Oppgaver som er lavere kognitivt krevende er nemlig ofte kjennetegnet av at elevene blir bedt om å utføre en algoritme, som er løsrevet fra begrepet og læringsmålet.

I tidligere masteroppgaver fremkommer det at mye brukte lærebøker i Norge inneholder for mange oppgaver som stiller lave kognitive krav og for få oppgaver som stiller høyere kognitive krav (Strand & Heimstad, 2018; Bergheim 2017). Selv om det er gjennomført mange studier som anvender Smith og Stein (1998) sitt rammeverk, finnes det ingen definerte tall på hvor stor andel det må være i de enkelte gruppene for at en skal hevde at lærebøkene stiller nok kognitive krav. Strand og Heimstad (2018) og Bergheim (2017) har undersøkt de kognitive kravene i alle de tre grunnbøkene til Faktor og Maximum. Jeg har bare studert et kapittel i lærebøkene og kan derfor ikke på samme måte hevde noe om nivået for lærebøkene totalt sett. Strand og Heimstad (2018) hevder at deres funn viser at funksjoner er det emnet der lærebøkene stiller høyest kognitive krav. En årsaken til dette kan være at oppgaver knyttet til funksjoner ofte anvender flere ulike representasjoner som elevene må bevege seg mellom. Dette er et av kjennetegnene på høyere kognitive krav (Stein & Smith, 1998). Jeg kan derfor ikke anvende mine funn til å hevde noe om nivået på de kognitive kravene i de to lærebøkene skrevet til den nye læreplanen.

Siden jeg har studert lærebøker skrevet til to ulike læreplaner kan jeg imidlertid undersøke om det finnes en tendens fra den ene læreboken til den andre for kapitlene om funksjoner. I tabell 4.34 kan en se at det prosentvis har vært små endringer i kognitive krav mellom Faktor og Matematikk 8. En del av nedgangen i kategorien Høy-M kan forklares med det metodologiske grepet å ta med Faktor 10. For det første kan det tenkes at en bok skrevet for 10. trinn vil inneholde flere oppgaver med høyere kognitive krav, enn en bok skrevet for 8. trinn, og at Faktor derfor ligger litt kunstig høyt på grunn av dette sammenlignet med Matematikk 8. I tillegg fikk jeg inkludert to delkapitler med “Noe å lure på”, dette har gitt en kunstig høy andel Høy-M oppgaver i Faktor. En annen ting som er interessant med “Noe å lure på” oppgavene er som vist i Tabell 4.35 at de i stor grad bare inneholdt permutasjoner fra situasjon til situasjon eller var oppgaver som ikke kunne kategoriseres med tanke på transformasjoner. Jeg vil derfor hevde at de i liten grad peker på læringsmålet. Et lignende funn beskriver Bergheim (2017) som hevder at 43 % av oppgavene som ble kategorisert som Høy-M i Faktor enten ikke klarte å knytte oppgaven til læringsmålene i kapittelet eller et dypere ferdighetsmål. I tabell 4.39 fremkommer det at de kognitive kravene ikke har endret seg i noe særlig grad for kapitlene om funksjoner. Noe som forsterker inntrykket av dette er MDITx-analysen av oppgavene. I tabell 4.29 kan en se at bortsett fra “Noe å lure på” delkapitlene forholder nivået på oppgavene seg nokså likt.

For Maximum 8 er resultatet annerledes. Tabell 4.37 viser at 53,7% av oppgavene er klassifisert som høyere kognitive krevende oppgaver mens det tilsvarende tallet for Maximum 9 er 44,5 %. Etter å ha gjennomført en kjikvadrattest fremgår det av tabell 4.37 at de kognitive kravene har økt i Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9 for kapittelet om funksjoner. Forskjellen er statistisk signifikant på signifikansnivå α=0,01. Mulighetene for å tilegne seg matematiske ferdigheter knyttet opp mot kjerneelementene i matematikkfaget har derfor økt for elevene som anvender Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9. I tabell 4.29 styrkes denne tendensen gjennom nivåinndelingen av oppgavene i

MDITx-rammerverket. Det er en klar økning i delkapitler som ble kategorisert på nivå 3 i Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9.

Ifølge Strand og Heimstad (2018) og Bergheim (2017) sine studier er de kognitive nivåene på oppgaven noe høyere i Maximum enn i Faktor. De to lærebøkene skrevet til den nye læreplanen Matematikk 8 og Maximum 8 har ut fra tabell 4.40 en ganske klar tendens i favør av flere kognitivt krevende oppgaver i Maximum 8. 53,7% av oppgavene er klassifisert som høyere kognitivt krevende i Maximum 8, den tilsvarende prosentandelen for Matematikk 8 er 23,8%. De lavere kognitivt krevende oppgavene utgjør 76,2% av oppgavene i Matematikk 8, mens de utgjør 46,3% i Maximum 8. Det er med andre ord ganske stor forskjell de to bøkene i mellom. Dette funnet er og statistisk signifikant på signifikansnivå α=0,01. Ut fra mine funn kan det se ut til at funnene fra Strand og Heimstad (2018) og Bergheim (2017) har blitt forsterket i lærebøkene knyttet til den nye læreplanen. Dette kan underbygges videre av å sammenstille lærebøker skrevet av samme forfatter. Tabell 4.44 viser betydelige forskjeller i de kognitive kravene i oppgaver skrevet i Faktor/Matematikk 8 og Maximum. Dette funnet kan selvsagt ikke generaliseres og det kreves mer forskning for å kunne si at dette gjelder for hele læreverket. For funksjonskapitlene er det betydelige forskjeller i de kognitive kravene oppgavene stiller i Maximum sammenlignet med Matematikk 8 og Faktor. Med bakgrunn i forskningen til Kilpatrick et al. (2001) og Tekkumru-Kisa et al. (2020) vil jeg derfor hevde at dette gir flere muligheter for elevene å tilegne seg matematiske ferdigheter i Maximum 8 enn Matematikk 8. En implikasjon for lærere som bruker Matematikk 8 eller Faktor er da at de må finne oppgaver andre steder som kan bøte på denne forskjellen.

Cai et al. (2017) hevder at reformer av læreplanen i matematikk historisk sett har hatt liten effekt. I lys av dette er det interessant at tabell 4.42 viser en liten økning i kategoriene Høy-P og Høy-M i lærebøkene skrevet etter fagfornyelsen, sammenlignet med de eldre lærebøkene. Denne tendensen er imidlertid ikke statistisk signifikant. Datamaterialet i denne studien er bare fra et kapittel i to ulike lærebøker så resultatet kan uansett ikke generaliseres. På den andre siden viser tabell 4.37, som nevnt tidligere, at de kognitive kravene har økt i Maximum. Dette funnet er statistisk signifikant. Dette er likevel ingen garanti for at reformen vil ha effekt for de elevene som anvender Maximum. Cobb og Jackson (2011) hevder at en ambisiøs læreplan krever at lærerne får utførlig opplæring i hvordan de skal legge til rette for at læreplanen implementeres slik den er intendert. Det finnes nemlig ingen garanti for at lærerne ivaretar det kognitive nivået på oppgavene som teksten har intendert når de fremlegger oppgavene for elevene (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 2000). Tekkumru-Kisa hevder at tidligere forskning har vist at enkelte lærere er nølende til å la svakt presterende elever jobbe med kognitivt krevende oppgaver (Leikin et al., 2006) og at lærerne mener at disse elevene heller trenger mer struktur og rutinepregede oppgaver før de jobber med kognitivt krevende oppgaver (Duschl & Wright, 1989). Det kan derfor tenkes at de kognitive kravene synker på veien fra lærebok til elev (Hiebert & Grouws, 2007; Stein & Smith, 1998).

5.5 Kritisk blikk på egen studie

Et annet mer grunnleggende utfordring med MTF er at det ikke er gjennomført mange repliserte (gjentatte) studier av funnene i MTF. Otten et al. (2017) hevder at hele 44 % av de undersøkte studiene de analyserte bare hadde Stein og Lane (1996) som kilde på at kognitive krav i oppgaver og elevlæring henger nært sammen. I en gjennomgang av forskningen på oppgaver de siste 40 årene er det nettopp denne artikkelen som blir trukket frem som grunnlaget for å hevde at kognitivt krevende oppgaver fremmer læring (Tekkumru-Kisa et al., 2020). Otten et al. (2017) etterlyser flere storskala forskningsprosjekt for å få verifisert at sammenhengen mellom kognitive krav og elevlæring stemmer. En viktig grunn til å bygge på flere studier er ifølge Makel og Plucker (2014) at det i deres studie viste seg at det var en lav andel gjentatte studier, som var gjennomført av andre forskere enn de originale, som viste en tilsvarende signifikant suksessrate som de originale studiene. Det betyr ikke at dette må gjelde for MTF. Lloyd et al. (2017) hevder at MTF-rammeverket er anvendt av flere og sammenhengen mellom kognitive krav og elevlæring er ifølge Otten et al. (2017) allment akseptert innenfor forskningsfeltet. Rammeverket har og sine røtter lengre bak enn Stein og Lane (1996) og trekker veksler på forskning utført av Doyle (1983, 1988). Det kunne tenkes at den allment aksepterte sammenhengen mellom kognitivt krevende oppgaver og læring egentlig kom av at elevene jobbet sammen og diskuterte oppgavene, mer enn oppgavene i seg selv. Tekkumru-Kisa et al. (2020) hevder imidlertid at i den matematiske samtalen er gode oppgaver viktige for å holde det matematiske nivået på samtalen oppe. Oppgavene er nemlig konteksten som elevene anvender når de diskuterer matematikken.

For studien av transformasjoner er det mulig å kritisere min operasjonalisering av "bidirectional" og parvise transformasjoner. Adu-Gyamfi et al. (2012, 2019) bruker i sine studier oppgaver uten deloppgaver. Jeg har definert en oppgave som "bidirectional" dersom den inneholder deloppgaver som er motsatte transformasjoner. Enda mer kritikkverdig er de parvise transformasjonene som er definert ved at det finnes motsatte transformasjoner i et delkapittel, for eksempel T→G og G→T. Begrunnelsen for å gjøre det på denne måten var at det var såpass få "bidirectional" oppgaver. Derfor anså jeg dette som den beste muligheten til å undersøke om elevene fikk muligheten til å lære seg to motsatte transformasjoner samtidig. Årsaken til at dette er viktig er at Duval (2006) hevder at elevene utvikler en bedre begrepsmessig forståelse dersom transformasjonene jobbes med parvis. Uten en slik operasjonalisering kunne jeg ikke undersøkt om det fantes muligheter for å jobbe med parvise transformasjoner på noenlunde samme tid.

5.6 Forslag til videre forskning.

Basert på denne studien mener jeg at det har dukket opp en rekke interessante ting som det ville være interessant å forske videre på.

For det første er mitt utvalg funksjonskapittelet i fem lærebøker skrevet til to ulike læreplaner. Det ville vært svært interessant å undersøkt hvilke resultater som fremkommer dersom jeg hadde sammenlignet alle kapitlene i lærebøkene med tanke på hvilke kognitive krav de stiller til elevene gjennom oppgavene som er formulert i lærebøkene. Resultatene mine peker i retning av at det er en forskjell mellom lærebøkene skrevet av ulike forfattere og det kunne vært interessant å undersøkt om det gjaldt de andre kapitlene i bøkene og. Resultatene mine kan ikke generaliseres så en mer helhetlig analyse ville gitt en klarere indikasjon på hvilken lærebok som i størst mulig grad oppfyller læreplanens intensjoner om dybdelæring, utforsking og argumentering.

Videre kunne det vært interessant å gjennomført en enda mer omfattende studie der en inkluderte flere læreverk. I min studie har jeg ikke mer enn to læreverk inkludert. Riktignok var disse tidligere av de mest brukte, men det er ingen garanti for at dette fortsatt gjelder etter fagfornyelsen. En mer omfattende studie med flere læreverk vil kunne fortelle hvilke læreverk som gir flest læringsmuligheter.

For det tredje er skolen i ferd med å få stadig flere digitale løsninger. Kikora og Campus Matte er eksempler på dette. Kikora har frem til nå frontet seg som et supplement til læreboken, mens Campus Matte hevder at de er et heldigitalt læreverk som kan erstatte læreboken. Det kunne vært interessant å anvendt de ulike rammeverkene på disse løsningene for å undersøkt i hvilken grad disse gir elevene læringsmuligheter til å oppnå matematiske ferdigheter slik Kilpatrick et al. (2001) beskriver.

For det fjerde kunne jeg tenkt meg å undersøkt hvorvidt min teoretisk baserte forståelse av de kognitive kravene i oppgaven faktisk stemmer overens med det som kreves for at elevene faktisk løser oppgavene. Det kunne vært interessant å ta et utvalg av oppgavene og latt en skoleklasse forsøke å løse et utvalg av oppgavene for så å analysere elevenes besvarelser og teste hvorvidt deres løsningsmetoder var i overensstemmelse med de teoretiske baserte konklusjonene.

Til sist vil jeg trekke frem at resultatdelen min viste at kognitive krav kan anvendes til å si noe mer spesifikt om CTP kategorien i MDITx-rammeverket. Dette forutsetter selvsagt at min forståelse av kategoriene og oppgavene er korrekt. I min studie viste det seg at selv om Matematikk 8 og Maximum 8 hadde veldig lik andel oppgaver innenfor kategorien CTP, så var forskjellen stor dersom jeg kategoriserte CTP-oppgavene i Lav-P og Høy-P. Dybden i oppgaveanalysen ble derfor større. Det kunne vært interessant å gjort videre studier på dette undersøkt om den påståtte sammenhengen mellom MTF og MDITx kan vises i et gjentatt studie.

6. Konklusjon

Denne studien har undersøkt hvilke læringsmuligheter som gis til elevene gjennom lærebøker utviklet til to ulike læreplaner. Tanken bak har vært å sammenligne lærebøkene på tvers av læreplanen de er laget til, for å se om den nye læreplanen og nyere forskning har endret læringsmulighetene i de nye lærebøkene. Problemstillingen har vært:

Hvordan er elevenes læringsmuligheter påvirket av lærebøker skrevet etter fagfornyelsen sammenlignet med lærebøker skrevet til forrige læreplan?

Begrunnelsen for å gjennomføre denne studien har jeg blant annet funnet hos Kongelf (2019), som uttrykte at han håpte hans studie ville føre til endringer i lærebøkene. Denne masteroppgaven har undersøkt læringsmålene, eksemplene og oppgavene i kapitlene. Når det gjelder læringsmålene har diskusjonen vist at det fremstår viktig for den enkelte lærer å være klar over forskjellene i læremål i lærebøkene. Matematikk 8 har inkludert avlesning og tolkning av grafer, mens et lignende læringsmål som var i Maximum 9 er tatt vekk i Maximum 8. Videre er omvendt proporsjonale funksjoner og programmering inkludert i Maximum 8, mens dette ikke finnes i Matematikk 8. Det er derfor ganske forskjellige læringsmål i bøkene. Forfatterne av lærebøkene er ikke enige om elever på 8. trinn skal lære om omvendt proporsjonalitet. En utfordring med dette blir da at tidligere forskning har vist at mange lærere bare bruker læreboken som kilde til undervisningen (Espeland, 2017). Dermed er elevene og lærerne prisgitt tolkningene til lærebokforfatterne. Siden forfatterne av lærebøkene har tolket læreplanen så forskjellig er det viktig at den enkelte lærer foretar en faglig vurdering på hvilke læringsmål som skal inkluderes i undervisningen. Diskusjonen ovenfor viser at en ikke bare kan stole på at lærebøkene har tolket læreplanen riktig.

I studien har jeg og undersøkt eksempler og oppgaver og analysert transformasjonene som blir presentert i de utvalgte lærebøkene. Basert på diskusjonen vil jeg hevde at læringsmulighetene fra transformasjonene i Maximum 8 har økt noe sammenlignet med Maximum 9. Dette begrunner jeg ved at de sammensatte transformasjonene har økt. Både antall transformasjoner per oppgaver og antall oppgaver med flere transformasjoner har økt. Videre har andelen av transformasjoner som ifølge Adu-Gyamfi et al. (2012) nesten ikke er tilstede i klasserommet økt betydelig. Antall "bidirectional" transformasjoner har og økt og da særlig for de Adu-Gyamfi et al. (2019) omtaler som de vanskeligste transformasjonene S↔G eller S↔F. De andre “bidirectional” transformasjonene er det imidlertid nesten ingen av. Vanskegraden på de “unidirectional” transformasjonene har ikke økt i særlig grad og muligheten til å lære seg transformasjonen T→F som Adu-Gyamfi et al. (2012) omtaler som særlig viktig har blitt kraftig redusert i Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9. Det totale bilde er derfor noe nyansert, men jeg vil allikevel hevde at læringsmulighetene har økt noe.

Læringsmulighetene fra transformasjonene i Matematikk 8 kan ikke sies å være noe flere enn i Faktor. Det er ikke noe særlig forskjell på “bidirectional” transformasjoner. Vanskegraden på transformasjonene har sunket noe sammenlignet med Faktor. På den positive siden har imidlertid gjennomsnittlig antall transformasjoner per oppgave steget litt og transformasjonen G→S har steget noe. Dette er en transformasjon Adu-Gyamfi et al. (2001) hevder er blant de mest utfordrende å gjennomføre. Imidlertid har Matematikk 8 flere likheter med Adu-Gyamfi et al. (2019) sin typiske beskrivelse av hvilke transformasjoner som vises i et klasserom. Samlet sett vil jeg hevde at dette gir tilnærmet like læringsmuligheter i Matematikk 8 sammenlignet med Faktor, særlig hvis en korrigerer for at oppgavene fra Faktor er fra to lærebøker og ikke en.

Setter en de to lærebøkene skrevet til den nye læreplanen opp mot hverandre er det store forskjeller. Det er flere “bidirectional” transformasjoner i Maximum 8 enn i Matematikk 8, og vanskegraden på transformasjonene er høyere. Videre er oppgavene mer sammensatte og Maximum 8 vier mer plass til de transformasjonene Adu-Gyamfi et al. (2019) hevder er fraværende i klasserommet, enn det Matematikk 8 gjør. Maximum 8 gir dermed klart bedre læringsmuligheter med tanke på transformasjoner i kapitlene enn Matematikk 8.

Til sist undersøkte jeg i hvilken grad de kognitive kravene i oppgavene har økt i de nye lærebøkene. Konklusjonen blir at de kognitive kravene har økt i Maximum 8 sammenlignet med Maximum 9, mens jeg ikke kan hevde at de kognitive kravene har økt i Matematikk 8. De kognitive kravene er og en god del høyere i Maximum 8 enn i Matematikk 8. Basert på min operasjonalisering vil jeg derfor hevde at læringsmulighetene til å tilegne seg matematiske ferdigheter og å jobbe med kjerneelementene i faget er størst i Maximum 8 i kapittelet som omhandler funksjoner.

At kapittelet i Maximum 8 gir flere læringsmuligheter er imidlertid ingen garanti for at det vil være slik i klasserommet. En kan risikere at de kognitive kravene som i utgangspunktet finnes i oppgavene ikke ivaretas av lærerne. Dette skjer enten når lærerne presenterer oppgavene for elevene, eller når elevene jobber med oppgaver og får hjelp av læreren eller andre medelever (Hiebert & Grouws, 2007). Til forsvar for lærerne hevder Tekkumru-Kisa et al. (2020) at det å ivareta kognitive krav i oppgaver er utfordrende og at lærere må gis kursing i hvordan oppgavene skal implementeres i klasserommet. Bare på denne måten kan de kognitivt krevende oppgavene forbli kognitivt krevende i klasseromsdiskursen. I forlengelsen av dette hevder Cobb og Jackson (2011) at et sentralt mål med den nye måten å tenke læring i matematikk på er at alle elever skal få de samme mulighetene til å lære seg fagstoffet. En utfordring da er at lærerne ikke i tilstrekkelig grad vet hvordan de skal implementere læreplanen for å oppnå dette. Cobb og Jackson (2011) hevder at det er gjort for lite forskning på hvordan det kan sikres at elever gis de samme læringsmulighetene og det er utviklet for lite konkrete retningslinjer som lærerne kan følge for å sikre likeverdige læringsmuligheter for elevene. Når lærerne ikke vet hvordan de skal implementere oppgavene hjelper det ikke at oppgavene er tilpasset ny læreplan.

Studien viser at uansett hvilke lærebøker elevene har tilgang til er det viktig at lærere har en bevisst tilnærming til hvordan de tolker kompetansemålene. Lærebøkene har tolket kompetansemålene forskjellig og har valgt ulike måter å presentere fagstoffet på. Læreplanen er med andre ord såpass vidt formulert at det er viktig at lærere tenker gjennom hvordan de på best mulig måte skal forstå kompetansemålene for å gi alle elevene læringsmuligheter. Videre må en sørge for at elevene får muligheten til å tilegne seg både de direkte og de indirekte målene i læreplanen. Dette krever et sterkt fagfellesskap på skolene og tett samarbeid slik at alle elevene både får muligheten til å lære seg kompetansemål knyttet til de enkelte emnene og kjerneelementene som har mer generell og overhengende karakter. I forlengelsen av dette velger jeg derfor å avslutte med Napoleon I: *"Ability is nothing without opportunity"*. Ferdigheter er ingenting uten muligheter.

7. Litteraturliste

Adler, J. & Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 1-18. https://doi.org/10.1080/10288457.2015.1089677

Adu-Gyamfi, K. & Bossé, M. J. (2014). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12* (1), 167-192. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Chandler, K. (2015). Situating student errors: Linguistic-to-algebra translation errors. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* Hentet fra: http://www.cimt.org.uk/journal/bosse6.pdf

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Chandler, K. (2017). Student connections between algebraic and graphical polynomial representations in the context of a polynomial relation. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(5), 915-938. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9730-1

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J. & Lynch-Davis, K. (2019) Three types of mathematical representational translations: comparing empirical and theoretical results. *School Science and Mathematics, 119* (7), 396-404. https://doi.org/10.1111/ssm.12360

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V. & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School science and Mathematics, 112* (3), 159-170. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00129.x

Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 239–261. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9342-1

Alseth, B., Bråthe, L. W. T., Stedøy, I. M., Tangen, J. & Tofteberg, G. N. (2020) *Maximum 8* (2.utg). Gyldendal undervisning. https://issuu.com/gyldendalnorskforlag/docs/maximum_8_bib_4f483d58dd2ea7?fr=sMTFkNzE1MjM5ODM

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i Matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 22–44). Universitetsforlaget. https://www.idunn.no/file/pdf/66911876/vi-kan-lykkes-i-realfag.pdf

Bergheim, R. (2017). *Lærebøkers tilrettelegging for problemfylt aktivitet—En mixed methods studie* [Masteroppgave, Universitetet i Tromsø]. UiT Munin. https://hdl.handle.net/10037/11313

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(4)*,* 448-370. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.11.001

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. I J. Novotná, H. Moraová, & N. Stehlíková (Red.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd 1, s. 126-154). PME.

Bjørndal, A. & Hofoss, D. (2004). *Statistikk for helse- og sosialfagene* (2.utg). Gyldendal akademisk.

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching*. Jossey-Bass.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. (2011a). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6*(3), 113–133.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. (2011b). Translations among mathematical representations: Teacher beliefs and practices. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 1-23. Hentet fra http://www.cimt.org.uk/journal/bosse4.pdf

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Chandler, K. (2014). Students' differentiated translation processes. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Hentet fra: http://www.cimt.org.uk/journal/bosse5.pdf

Britannica. (u.å.). Function. I *Function: Mathematics*. Hentet 19. november 2020 fra https://www.britannica.com/science/function-mathematics

Cai, J. & Cirillo, M., (2014). What do we know about reasoning and proving? Opportunities and missing opportunities from curriculum analysis. *International Journal of Educational Research*, *64*, 132-140. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.10.007

Cai, J., Lo, J. J. & Watanabe, T. (2002). Intended treatments of arithmetic average in U.S. and Asian school mathematics. *School Science and Mathematics*, *102*(8), 391–404.

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V. & Hiebert, J. (2017). Making classroom implementation an integral part of research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(4), 342–347. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.4.0342

Cai, J., Nie, B. & Moyer, J. (2010). The teaching of equation solving: approaches in standards-based and traditional curricula in the United States. *Pedagogies: An International Journal*, *5*(3), 170–186. https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.485724

Cappelen damm (u.å) *Faktor: Om læreverket.* Hentet 11. november 2020 fra: https://www.cappelendammundervisning.no/verk/Faktor-106279

Carroll, J. B. (1963). A model for school learning. *Teachers College Record*, *64 (8)*, 723–733.

Carroll, J. B. (1989). The Carroll model: a 25-year retrospective and prospective view. *Educational Researcher*, *18*(1), 26–31. https://doi.org/10.3102/0013189X018001026

Caspi, S. & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, *51–52*, 45–65. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.006

Charalambous, C., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*, 117–151. https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Chávez-López, Ó. (2003). *From the textbook to the enacted curriculum: Textbook use in the middle school mathematics classroom.* [Doktorgradsavhandling, Missouri-Columbia]. http://hdl.handle.net/10355/10363

Clement, J., Lockhead, J. & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly, 88* (4), 286-290. https://doi.org/10.2307/2320560

Cobb, P. & Jackson, K. (2011). Towards an empirically grounded theory of action for improving the quality of mathematics teaching at scale. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(1), 6-33.

Creswell, J. W. (2014). Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (4. utg.). SAGE.

De Bock, D. (2015). Students' understanding of proportional, inverse proportional, and affine functions: Two studies on the role of external representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(1), 47-69. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9475-z

Dolev, S. & Even, R. (2015). Justifications and explanations in israeli 7th grade math textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(S2), 309–327. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9488-7

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research, 53*(2), 159-199.

Doyle, W. (1988). Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking During Instruction. *Educational Psychologist*, *23*(2), 167-180.

Duschl, R. A. & Wright, E. (1989). A case study of high school teachers' decision making models for planning and teaching science. J*ournal of Research in Science Teaching*, *26*(6), 467–501.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61* (1), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, *62*(1), 107-115.

Espeland, H. (2017). *Algebra at the start of upper secondary school: A case study of a Norwegian mathematics classroom with emphasis on the relationship between the mathematics offered and students' responses.* [Doktorgradsavhandling, Universitetet i Agder]. http://hdl.handle.net/11250/2435518

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 61–75. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9069-6

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM - Mathematics Education*, *45*(5), 633–646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. I A. C. Porter & A. Gamoran (Red.), *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement*. The National Academy Press. https://doi.org/10.17226/10322

Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, *28*(4), 567–590.

Harwood, T. & Garry, T. (2003). An overview of content analysis. *The Marketing Review*, *3*(4), 479-498. https://doi.org/10.1362/146934703771910080

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A. M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P. & Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: results from the TIMSS 1999 video study* (NCES 2003-013). National Center for Education Statistics.

Hiebert. J. & Grouws, D. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning. I F. K. Lester jr. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 371–404). The National Council of Teachers of Mathematics.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2014). *Faktor 9: Grunnbok*. Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2015). *Faktor 10: Grunnbok*. Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2020a). *Matematikk 8: Grunnbok*. Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2020b). *Matematikk 8: Lærerens bok*. Cappelen Damm.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Nottingham.

Janvier, C. (1987). Translation process in mathematics education. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (s. 27–31). Lawrence Erlbaum Associates.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks: A classroom and curricular perspective* [Doktorgradsavhandling, Luleå]. DiVA. diva2:998959

Johnsen, M. K. M. & Storaas, A. E. (2015). *En komparativ studie av matematikkoppgaver i et norsk og et finsk læreverk* [Masteroppgave, Universitetet i Tromsø]. UiT Munin.

https://hdl.handle.net/10037/8119

Jones, D. L. & Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, *6*(2), 4–27.

Kalchman, M. & Koedinger, K. R. (2005). Teaching and learning functions. I National Research Council. *How students learn: mathematics in the classroom.* The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/11101

Kang, W. & Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the learning of mathematics*, *12*(1), 2–7.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. I D. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 3-38). Macmillan Publishing Co, Inc.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822

Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the cartesian connection: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 500–507. https://doi.org/10.2307/749655

Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?* [Doktorgradsavhandling, Universitetet i Agder]. HVL Open. http://hdl.handle.net/11250/2616700

Kongsnes, A. L. & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 8: Lærebok*. Aschehoug undervisning.

Krippendorff, K. (1980). Validity in content analysis. I E. Mochmann (Red.), *Computerstrategien für die kommunikationsanalyse* (s. 69-112). Campus.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: an introduction to its methodology* (2. utg.) Sage Publications.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I. & Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: do students' attitudes support teachers' reluctance? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *28*(1), 1–22.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education,* 37 (6), 457–467. https://doi.org/10.1007/BF02655854

Lester, F. & Lambdin, D. V. (1998). The ship of Theseus and other metaphors for thinking about what we value in mathematics education research. I A. Sierpinska, & J. Kilpatrick, (red.) Mathematics education as a research domain: A search for identity: An ICMI study, (s. 415-425). Kluwer Academic Publishers.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of*

Mathematical Behavior, *23*(4), 405–427. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.003

Lloyd, G. M., Cai, J. & Tarr, J. E. (2017). Issues in curriculum studies: Evidence-based insights and future directions. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 824–854). National Council of Teachers of Mathematics.

Lo, M. L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning.* Mun Ling Lo. Hentet fra: https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/29645

Love, E. & Pimm, D. (1996). "This is so`: A text on texts". I A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Red.), *International handbook of mathematics education* (s. 371–409). Springer.

Løvås, G. G. (2003). *Statistikk: For universiteter og høgskoler*. Universitetsforlaget.

Makel, M. C. & Plucker J. A. (2014). Facts are more important than novelty: Replication in the education sciences. *Educational Researcher*, *43*(6), 304-316. https://doi.org/10.3102/0013189X14545513

Marton, F. & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences, 15*(2), 193–220. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1502_2

Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. I F. Marton, A. B. M. Tsui, P. P. M. Chik, P. Y. Ko & M. L. Lo (Red.), *Classroom discourse and the space of learning* (s. 43-62). Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee, *Approaches to algebra*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

McHugh, M. L. (2012). Interrater reliability: the kappa statistic. *Biochemia Medica , 22*(3), 276–282. Hentet 24. oktober 2020 fra: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3900052/

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 255–286. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040409.63571.56

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. I G. Harel & E. Dubinsky (Red.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (s. 175–193). Mathematical Association of America.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Stanco, G. M. (2012). *TIMSS 2011 international results in science*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

National Research Council. (2004). *On evaluating curricular effectiveness: Judging the quality of K-12 mathematics evaluation*. The National Academy Press.

NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*, Oslo (4. utg). Hentet 04.desember 2020 fra:

https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi/

Nicholls, J. (2003). Methods in school textbook research. *International Journal of Historical Learning, Teaching and Research*, *3*(2), 11–26. https://doi.org/10.18546/HERJ.03.2.02

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. *International Journal of Science and Mathematics Education (2015)*, *13*(3), 657-682. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9496-7

Otten, S., de Araujo, Z. & Webel, C. (2017). Analyzing claims about cognitive demand and student learning. I E. Galindo & J. Newton (Red.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (s. 1391-1398). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Pepin, B. (2018). Enhancing Teacher Learning with Curriculum Resources. I L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat & J. Visnovska (Red.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: Advances and issues*. ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_17

Qi, C., Zhang, X. & Huang, D. (2018). Textbook use by teachers in junior high school in relation to their role. I L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat & J. Visnovska (Red.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: Advances and issues* (s. 29–51). ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_2

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 8–27. https://doi.org/10.2307/749095

Resvoll, E. (2014). *Lærebøker i matematikk og læreres bruk av dem: En analyse av karakteristiske trekk ved de mest brukte lærebøkene på ungdomstrinnet og hvordan de blir brukt av tre lærere til planlegging og gjennomføring av undervisning* [Masteroppgave, Høgskolen i Sør-Trøndelag]. NTNU Open. http://hdl.handle.net/11250/217278

Rezat, S. (2006). A model of textbook use. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Red.), *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Bd. 4, s. 409–416). Charles University.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2017). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influence. Research in nordic and baltic countries* (s. 495–514). Cappelen Damm Akademisk.

Rezat, S., Visnovska, J., Trouche, L., Qi, C. & Fan, L. (2018). Present research on mathematics textbooks and teachers' resources in ICME-13: Conclusion and perspectives. I L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat & J. Visnovska (Red.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: Advances and issues*. ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_16

Ronda, E. & Adler, J. (2017). Mining mathematics in textbook lessons. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1097-1114. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9738-6

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Raizen, S. A., Jakwerth, P. M., Valverde, G. A., Wolfe, R. G., Britton E. D., Bianchi, L. J. & Houang, R. T. (2002). *A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education*. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47209-0

Senk, S., Thompson, D. & Wernet, J. (2014). Curriculum and achievement in algebra 2: Influences of textbooks and teachers on students' learning about functions. I Y. Li & G. Lappan (Red.), *Mathematics curriculum in school education* (s. 515–540). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7560-2_24

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification—The case of function. I E. Dubinsky & G. Harel (Red.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Bd. 25, s. 59–84). Mathematical Association of America.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Silver, E. A. & Lunsford, C. (2017). Linking research and practice in mathematics education: Perspectives and pathways. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 28–47). National Council of Teachers of Mathematics.

Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Penguin.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematical Teaching in The Middle School, 3*(5), 344-350. National Council of Teachers of Mathematics.

Son, J.-W. & Hu, Q. (2016). The initial treatment of the concept of function in the selected secondary school mathematics textbooks in the US and China. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(4), 505–530. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1088084

Stein, M. K., Grover, B. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455–488. https://doi.org/10.2307/1163292

Stein, M. K. & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50–80.

Stein, M. K., Remillard, J. & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. I F. K. Lester jr. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 319–369). The National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M.K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275. https://www.jstor.org/stable/41180401

Strand, K. & Heimstad, C. A. (2018). *Kognitive utfordringer i to norske lærebokserier fra ungdomsskolen—En mixed methods studie* [Masteroppgave, Universitetet i Tromsø]. UiT Munin. https://hdl.handle.net/10037/13791

Superfine, A. C., Canty, R. S. & Marshall, A. M. (2009). Translation between external representation systems in mathematics: all-or-none or skill conglomerate? *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(4), 217–236. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.10.002

Tarr, J. E., Chávez, Ó., Reys, R. E. & Reys, B. J. (2006). From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Science and Mathematics*, *106*(4), 191–201. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18075.x

Tekkumru-Kisa, M., Stein, M. K. & Doyle, W. (2020). Theory and research on tasks revisited: Task as a context for students' thinking in the era of ambitious reforms in mathematics and science. *Educational Researcher*, *49*(8), 606–617. https://doi.org/10.3102/0013189X20932480

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Fagbokforlaget.

Tofteberg, G.N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2014a). *Maximum 9: Grunnbok*. Gyldendal undervisning.

Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M. & Alseth, B. (2014b). *Maximum 9: Lærerens bok*. Gyldendal undervisning.

Trouche, L. & Fan, L. (2018). Mathematics textbooks and teachers' resources: a broad area of research in mathematics education to be developed. I L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat & J. Visnovska (Red.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: Advances and issues* (s. xiii–xxiii). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, *31*(4), 315–327. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2005.11.005

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. Trinn* (MAT01−05). https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the Book*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0844-0

van den Ham, A.-K. & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, *59*, 133–140. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.07.005

Vincent, I. R., & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS Video Study criteria to Australian eight-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(1), 82–107. https://doi.org/10.1007/BF03217470

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Wang, Z. & McDougall, D. (2019). Curriculum matters: What we teach and what students gain. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(6), 1129–1149. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9915-x

Weber, R. (1990). *Basic content analysis* (2.utg).SAGE Publications, Inc. https://doi.org/10.4135/9781412983488

Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B. & Boester, T. (2012). Undergraduate students' self-reported use of mathematics textbooks. *PRIMUS*, *22*(2), 152–175. https://doi.org/10.1080/10511970.2010.509336

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *89,* 41-65. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9595-1

Woodward, A., & Elliot, D. L. (1990). Textbook use and teacher professionalism. I A. Woodward & D. L. Elliot (Red.), *Textbooks and schooling in the United States* (s. 178–193). The University of Chicago Press.

Xin, Y. P. (2007). Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. *The Journal of Educational Research*, *100*(6), 347–359. https://doi.org/10.3200/JOER.100.6.347-360

Zhu, Y. & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(4), 609–626. https://doi.org/10.1007/s10763-006-9036-9

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 165–182 . https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6

8. Vedlegg

Vedlegg 1

Min definisjon av Task Analysis Guide i stor grad hentet fra Strand og Heimstad (2018) med enkelte justeringer.

Lower-level demands (memorization) lav-H=Hukommelse

- Oppgaver som går ut på å reprodusere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definisjoner. *I tillegg knyttes oppgaver som går ut på å pugge fakta, regler, formler eller definisjoner til lav-H.*
- Oppgaver der elevene skal øve/bli kjent med matematiske verktøy (for eksempel passer, vinkelmåler, dynamiske geometriprogram).
- Oppgaver som etterspør et numerisk svar ut fra en situasjon uten at den knyttes til en formel. Denne oppgavetypen kommer gjerne i forkant av formelen og skal lede eleven mot algoritmen.
- Oppgaver som ikke kan løses ved hjelp av prosedyrer fordi prosedyrene ikke eksisterer. Det vil si at oppgaver der du kan gå rett fra oppgavetekst til et svar vil bli kategorisert som hukommelse.
- Oppgaver der det ikke foreligger noen tvil om hva som må gjøres. Slike oppgaver involverer eksakt reproduksjon av tidligere materiale, samt at det som skal reproduseres eksplisitt er angitt tidligere i læreboka.
- Oppgaver som ikke har noen sammenheng med konseptet eller den matematiske ideen som ligger til grunn for faktaene, reglene, formelen eller definisjonene som skal læres eller reproduseres.

Lower-levels demands (procedures without connections) lav-P=Prosedyre uten sammenheng

- Oppgaver som er algoritmiske. Prosedyren er enten eksplisitt bedt om, eller er åpenbar fra tidligere oppgaver, eksempler eller på grunn av oppgavens plassering i læreboka.
- Oppgaver som krever begrenset kognitiv aktivitet for å løse dem. Det er liten tvil om hva som må gjøres og hvordan det må gjøres for å løse oppgaven.
- Oppgaver som ikke har noen sammenheng med konseptet eller den matematiske ideen som ligger til grunn for prosedyren som anvendes i oppgaven.
- Oppgaver der fokuset er å finne det rette svaret i stedet for å utvikle matematisk forståelse.
- Oppgaver som ikke krever forklaring eller som kun krever at man forklarer prosedyren som ble brukt.

Higher-level demands (procedures with connections) høy-P=Prosedyre med sammenheng

- Oppgaver der prosedyrer brukes for å utvikle en dypere forståelse av konsepter og matematiske ideer.
- Oppgaver som eksplisitt eller implisitt foreslår generelle prosedyrer som har nær sammenheng med underliggende konsepter og matematiske ideer.
- Oppgaver som ofte blir presentert ved hjelp av ulike representasjoner. For eksempel ved grafer, tabeller, symboler og gjennom tekst. Det som er kognitivt krevende her er å se sammenhenger mellom de ulike representasjonene.
- Oppgaver som krever en viss grad av kognitiv innsats. Selv om generelle prosedyrer kan følges, kan de ikke brukes uten å tenke seg om. Elevene må reflektere rundt konseptuelle ideer for å løse oppgaven.

Higher-level demands (doing mathematics) høy-M=Matematikk

- Oppgaver som krever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning – det finnes ingen innøvd eller forutsigbar tilnærming i oppgaven eller fra eksemplene.
- Oppgaver som krever at elevene utforsker og forstår matematiske konsept, prosesser og/eller matematiske forhold.
- Oppgaver krever selvregulering og aktsomhet rundt ens egne kognitive prosesser.
- Oppgaver som krever at elevene har tilgang til relevant kunnskap og erfaring, samt evner å bruke dem på en hensiktsmessig måte.
- Oppgaver som krever at elevene analyserer og aktivt utforsker oppgavens rammer for å begrense mulige løsningsstrategier og løsninger.

- Oppgaver som krever høy kognitiv innsats og kan involvere noen grad av angst på grunn av oppgavens svært uforutsigbare natur.

Vedlegg 2

Definisjon av permutasjoner

Fra situasjon til situasjon

Dette var spørsmål som var knyttet til situasjonen der oppgaven spurte etter konkrete ting med situasjonen som eleven måtte kunne gjenfinne i teksten eller forklare utfra det som stod i teksten.

Fra tabell til tabell

En slik transformasjon innebar at elevene ble bedt om å endre på formen til tabellen. Dette kan for eksempel være at en elev har en tabell og blir bedt om å skrive ut koordinatene til punktene i tabellen eller motsatt. Siden Maximum 8 har inkludert mengdediagram, kunne det og inkludere å bevege seg fra et mengdediagram til en tabell eller koordinater.

Fra graf til graf

Denne permutasjonen innebar å gjøre endringer i koordinatsystemet. En av få oppgaver som ble plassert her innebar å ta utgangspunkt i en forestående oppgave der elevene skulle plotte inn koordinater fra en tabell. Med dette som utgangspunkt skal elevene tegne en graf som passet til punktene.

Fra formel til formel

Denne permutasjonen innebar å gjøre om på formelen slik at en kunne bruke den videre. Denne permutasjonen fant jeg særlig i maximum der en oppgave kunne være å gjøre om på en formel slik at den enklere kunne brukes til å lage en tabell eller graf. Et eksempel på dette var: $8x+12y-36=0$ må gjøres om til formen $y=ax+b$. Jeg inkluderte og oppgaver som innebar å finne stigningstall og konstantledd i en formel som formel til formel. Dette fordi elevene ikke ble spurt å tolke hva det betydde utover å kunne identifisere stigningstallet eller konstantleddet.

Transformasjoner

Fra situasjon til tabell (S→T)

Denne transformasjonen har jeg kalt måling. Her ble eleven bedt om å gjennomføre en måling ut fra situasjonen og plassere målingene inn i en tabell.

Fra situasjon til graf (S→G)

Denne transformasjonen har jeg oversatt til skisse. Utfra situasjonsbeskrivelsen skulle eleven gjenfinne elementer som kunne brukes til å tegne grafen. Ofte ville dette kunne gjennomføres på en indirekte måte ved å lete etter konstantledd og stigningstall i situasjon og dermed lage en formel. Dersom det ikke var eksplisitt nevnt at eleven skal lage en formel, tolket jeg det som at eleven ved hjelp av de to elementene skulle gå direkte fra situasjon til graf. Dersom oppgaven eksplisitt uttrykte at eleven skulle lage en formel og lage en skisse ut fra denne ble oppgaven plassert i to deler. Nemlig fra situasjon til formel og fra formel til graf. Preece (1985) hevder at for gjennomføre denne transformasjonen må eleven avgjøre hvordan aksene skal skaleres og hvordan eleven skal begrense grafen.

Fra situasjon til formel (S→F)

Denne transformasjonen kalte jeg modellering. Her skulle eleven lage en modell som beskrev situasjonen. Dette ble gjort ved å se etter konstantledd og stigningstall til funksjonen ut fra situasjonen. Deretter ble dette plassert inn i formelen for grafen, ofte uttrykt på formen y=ax+b.

Fra tabell til situasjon (T→S)

Denne transformasjonen oversatte jeg til avlesning. Her skulle eleven ut fra en tabell forsøke å sette tallene inn i en kontekst og beskrive den situasjonen som han leste ut fra tabellen. Dette var med andre ord en fortolkning av hvordan tabellen beskrev situasjonen.

Fra tabell til graf (T→G)

Denne transformasjonen kalte jeg plotting og innebar at elevene brukte tabellen til å finne punkter i koordinatsystemet som de anvendte til å tegne en graf.

Fra tabell til formel (T→F)

Denne transformasjonen heter tilpasning. Med tilpasning mente jeg at eleven hadde en gitt tabell og ut fra denne tabellen ble eleven bedt om å finne en formel som passet til koordinatene i tabellen. Janvier (1987) hevder at denne transformasjonen ofte gjøres mer indirekte ved å gå via graf. Jeg tolket oppgaver inn i denne transformasjonen direkte dersom det ikke stod eksplisitt at eleven skal gå innom graf-representsjonen. Dersom det ikke stod direkte tolket jeg det som to andre transformasjoner altså tabell til graf og fra graf til formel. Dette gjaldt og dersom det ikke stod eksplisitt beskrevet i oppgaven men det i forkant av oppgaven var eksempler som brukte to transformasjoner for å bevege seg fra tabell til formel.

Fra graf til situasjon (G→S)

Denne transformasjonen har jeg oversatt til tolkning. Med det mente jeg at eleven måtte ut fra grafen forsøke å si noe om den situasjonen som grafen uttrykte.

Fra graf til tabell (G→T)

Denne transformasjonen kalte jeg avlesing. Denne transformasjonen innebar å finne et enkelt svar i et koordinatsystem. Dette kunne være å finne koordinatene til et punkt i koordinatsystemet, men jeg tolket det og som denne transformasjonen når elevene skulle finne svar på et konkret spørsmål ut fra et diagram. For eksempel å avlese hva temperaturen var kl. 15 på ettermiddagen. Dette skiller seg fra G→S siden denne transformasjonen innebærer å tolke hele eller store deler av diagrammet og se det i sammenheng.

Fra graf til formel (G→F)

Denne transformasjonen kalte jeg kurvetilpasning. Her skulle eleven ut fra grafen identifisere elementer som han kunne plassere inn i formelen som representerer funksjonen.

Fra formel til situasjon (F→S)

Denne transformasjonen kalte jeg gjenkjenning. Med dette mente jeg at formelen ble tolket og en trakk ut elementer som stigningstall og konstantledd til å beskrive situasjonen.

Fra Formel til tabell (F→T)

Denne transformasjonen kalte jeg utregning. Den innebar at eleven anvendte formelen til å lage koordinater som enten stod for seg selv eller i en tabell.

Fra formel til graf (F→G)

Denne transformasjonen heter skisse. ifølge Janvier (1987) kunne denne gjennomføres mer indirekte ved at eleven ut fra formelen laget en tabell. Denne ble anvendt til å tegne opp grafen. Dersom oppgaven eksplisitt uttrykte at en skulle gå via tabell har jeg tolket dette som to transformasjoner altså formel til tabell og fra tabell til graf. Dersom det ikke eksplisitt var uttrykt at en skulle lage tabell har jeg tolket dette som fra formel til graf. Det som kunne påvirke en elevs strategi var kjennskap til representasjonene. Dersom eleven har gjort en slik transformasjon mange ganger før vil han kunne klare å lage grafen uten å gå via tabell, i hvert fall for de oppgavene jeg studerer.

Vedlegg 3

Faktor	
Koordinatsystemet	G
Formler og funksjoner	G, K
Grafen til en funksjon	G
Mer om funksjoner	NONE
(10) Funksjoner i dagliglivet	G
Lineære funksjoner	K, G
Proposjonale størrelser	G

Matematikk 8	
Bestemme et punkt	G, K
Koordinater som graf	G
Fra situasjon til funksjonsuttrykk	G
Tegning av grafer ved hjelp av funksjonsutk	G
Avlesing og tolking av diagrammer	NONE

Maximum 9	
Lineære funksjoner	G
Lineære funksjoner fra dagliglivet	G,K og F
Graf og formel for rette linjer	G
Graf og formel for rette linjer (2)	K og G
Proporsjonale størrelser	G, F
Empiriske og ikke-lineære funksjoner	NONE
Funksjoner fra virkeligheten	G, K, F

Maximum 2020 8.trinn	

Koordinatsystemet	NONE
Lineære funksjoner, rette linjer	G
Utforske f(x)=ax+b	G
Digitale funksjonsmaskiner	NONE
Lineære funksjoner i praktiske situasjoner	K, F
Proporsjonale størrelser	G
Omvendt proporsjonale størrelser	K, G