Universitetet i Stavanger

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master i utdanningsvitenskap, Matematikkdidaktikk	Vårsemesteret, 2021 Åpen/ ~~konfidensiell~~
Forfatter: Jeanette Håkull	Jeanette Håkull …………………………………………… (signatur forfatter)

Veileder: Raymond Bjuland, Professor ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk ved Universitetet i Stavanger, UIS.

Tittel på masteroppgaven: **En undersøkelse av en lærers bruk av visuelle mediatorer i den matematiske diskursen for å realisere volumobjektet.**

Engelsk tittel: An examination of a teacher's use of visual mediators in the mathematical discourse to realize the object of volume.

Emneord: Kommognitivt rammeverk Matematisk diskurs Visuell mediator Symboler, ikoner, konkreter og gester Betegner og realisering Multimodalitet Semiotisk node Utviklende Opplæring i Matematikk Volum av rektangulært prisme	Antall ord: 42571 + vedlegg/annet: 7418 Egersund, 9/6-2021 Dato-år

Forord

Det er en god følelse når man kjenner at masteroppgaven nærmer seg ferdigstilt. Det å ta opp studier igjen etter å ha jobbet som lærer i videregående skole i 10 år, var både skummelt og spennende. Videreutdannelsen var økonomisk motivert, men jeg trengte også påfyll og inspirasjon til videre pågangsmot i læreryrket. Jeg hadde nok heller ikke forventet at det skulle være så interessant og lærerikt som det har vært, og nå skal det bli spennende å implementere ny lærdom i matematikkundervisningen i praksis. Ved å gjøre denne studien, har jeg blitt mer bevisst på min egen matematiske diskurs i undervisningen, og håper at det vil gagne alle mine fremtidige elever. Denne videreutdannelsen hadde ikke vært mulig uten tilrettelegging fra arbeidsgiver, så en takk rettes til Dalane Videregående skole, Rogaland fylkeskommune og Utdanningsdirektoratet for muligheten jeg har fått til å spe på med mer kunnskap og inspirasjon til årene som kommer.

Jeg er takknemlig for at Universitetet i Stavanger og fakultetet for utdanningsvitenskap gir masterstudentene på matematikkdidaktikk, mulighet til å delta i et forskningsprosjekt. Dette var veldig lærerikt og til stor hjelp i masterprosjektet. Det var også inspirerende å være på et lavere trinn enn det jeg er i arbeidssammenheng, for å kunne se en mer barnlig nysgjerrighet og læreglede hos barna, som ikke vises på samme måte etter karakterpresset setter inn. Takk til skole, lærer og elever som lot oss komme inn i deres klasserom å ta del i læringsprosessen.

Jeg vil takke familie og gode venninner som har dratt meg med på tur i denne så altfor stillesittende skriveperioden, og setter pris på alle gode samtaler som har gitt meg et pusterom fra en krevende skriveprosess. Takk til dere som har vist interesse, lest gjennom oppgaven og kommet med gode råd til forbedringer. Setter også pris på alle mine medstudenter og professorer som med all sin kunnskap og genuine interesse for faget har gjort disse studieårene til en berikende og minnerik tid i livet mitt.

Til slutt vil jeg rette en spesiell takk til veilederen min, Raymond Bjuland, som har vært støttende og tålmodig i veiledning av oppgaven. Hans grundige og konstruktive tilbakemeldinger har vært uvurderlige, og det settes stor pris på all den tid som er brukt til gjennomlesing, tilbakemeldinger og veiledning. I tillegg har hans engasjement og interesse for faget og temaet i oppgaven vært motiverende, og jeg vil takke for en avslappet holdning og formidlet tro på at jeg var i god prosess underveis, når det var vanskelig å tro på dette selv.

Innholdsfortegnelse

Oversikt over figurer

Oversikt over tabeller

Sammendrag

Muligheter for læring er en forutsetning for elevers læring. Gjennom Sfards kommognitive rammeverk er det lagt til rette for å studere den observerbare matematiske diskursen i klasserommet. Man kan studere hvilke muligheter elevene gis til læring og deltakelse i diskursen ved å analysere lærers bruk av matematiske ord, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. I denne kvalitative casestudien ble den visuelle medieringen av ikoner, symboler, konkreter og gester i undervisning og diskusjon av volumoppgaver med rektangulære prismer undersøkt. Med et supplement fra semiotisk teori, var det mulig å studere samspillet mellom disse visuelle mediatorene og ordbruk, og det ga en helhetlig multimodal tilnærming til diskursanalysen. I studien ble en lærers undervisning i tre 4.trinns klasser fulgt gjennom to uker på en skole der det ble undervist i utviklende matematikk. Videoopptak fra undervisning, elevintervjuer og lærerintervju utgjorde studiens datamateriale. Det ble utført en diskursanalyse av lærers matematiske diskurs i plenumsundervisning for å identifisere hvordan volumobjektet ble mediert visuelt. Deretter ble også elevenes volumdiskurs analysert, for å se om det kunne være tegn til utvikling av deres matematiske diskurs. Funn fra analysen viste at visuell mediering av konkreter og gester kan være litt oversett, og at disse anses som viktige for elevers utvikling av abstrakt forståelse av matematiske prinsipper. Spesielt kan pekegester ha en viktig funksjon i å føre oppmerksomhet og fokus mot viktige sider ved symboler, ikoner og konkreter i realisering av volumobjektet. Et av målene med studien er å øke læreres bevissthet rundt det å bruke et mangfold av visuelle mediatorer.

Abstract

Opportunities for learning is a prerequisite of student learning. Sfard's commognitive framework makes it possible to study the observable mathematical discourse in the classroom. One can study what opportunities students are given for learning and participation in the discourse by analyzing the teacher's use of mathematical words, visual mediators, narratives and routines. In this qualitative case study, the visual mediation of icons, symbols, manipulatives and gestures was examined in relation to teaching and discussion of volume problems with rectangular prisms. With a supplement from semiotic theory, it was possible to study the interplay between these visual mediators and the use of words, and it provided a holistic multimodal approach to discourse analysis. This study followed a teacher while teaching in three 4th grade classes in a two-week period, at a school where Developmental Education in Mathematics was taught. Video recordings from teaching, student interviews and teacher interviews constituted the study's empirical data. A discourse analysis of the teacher's mathematical discourse in plenary teaching was performed to identify how the volume object was mediated visually. The students' volume discourse was also analyzed, to see if there could be indications of change in their mathematical discourse. Findings from the analysis showed that visual mediation of manipulatives and gestures can be somewhat overlooked, and that these are considered important for students' development of abstract understanding of mathematical principles. In particular, pointing gestures can have an important function in directing attention and focus towards important aspects of symbols, icons and manipulatives in the realization of the volume object. One of the goals of the study is to increase teachers' awareness of using a variety of visual mediators.

1 Innledning

Et grunnleggende spørsmål i matematikkdidaktikken er: Hvordan påvirker undervisning elevers læring i matematikk? Hiebert og Grouws (2007) hevder at matematikkundervisning har betydning for elevers læring, men at det ikke er lett å dokumentere hvordan. Hva er det ved matematikkundervisningen som gjør at elevene lærer? Dette er et krevende spørsmål å finne svar på, siden klasserom inneholder en kompleks dynamikk, og flere faktorer kan bidra til økt læring. Men vi kan se på hvilke *muligheter* det gis, som kan ses som den viktigste prediktor for elevers prestasjoner. I denne studien handler det om å studere hvilke muligheter som gis til læring ved *visuell mediering* av symboler, ikoner, konkreter og gester i matematiske diskurser[1]. Sfard (2008) har med sitt kommognitive rammeverk satt søkelys på den matematiske diskursen, som er utgangspunktet for analysene i studien.

1.1 Bakgrunn for valg av tema og forskningskontekst

Som en del av masterutdanningen i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger, fikk jeg våren 2020 delta i et forskningsprosjekt med fokus på å lede matematiske samtaler. Under klasseromsobservasjonen oppdaget jeg noe som brøt med forventningene mine, og det var at lærer brukte få konkreter i plenumsundervisning av volumoppgaver. Som matematikklærer på ellevte året hadde jeg med meg noe erfaring, teori og tanker i bagasjen. Et eksempel er at jeg tenkte at bruk av konkreter (en visuell mediator) er fordelaktig i matematikk, spesielt i geometri, og vil gagne elevers læring (utvikling av diskurs). Var det en grunn til at lærer brukte få konkreter og hva har det å si for elevers muligheter til læring? Spiller konteksten som lærers og elevers handlinger skjer i, noen rolle her? Skolen vi observerte ved, driver med Utviklende Opplæring i Matematikk (UOM), såkalt russisk matematikk, og det ble derfor interessant å se mer på prinsippene i denne opplæringen, der fokus på konkrete objekt blir tonet ned til fordel for abstrakte begrep og symbol (Blank et al., 2014). I fagfornyelsen legges det også vekt på representasjoner, kommunikasjon og abstraksjon i kjerneelementene, der det står at elevene skal få mulighet til å bruke ulike matematiske representasjoner, som for eksempel konkreter og symboler, gjennom matematiske samtaler (Udir, 2020).

Våren 2020 skrev jeg et paper som undersøkte en lærers bruk av visuelle mediatorer i volumundervisning gjennom en kommognitiv linse (Håkull, 2020), og denne studien er en mer dyptgående videreføring av det arbeidet. Til grunn for studien ligger et ønske om å finne

[1] Hvordan begrepet matematisk diskurs forstås i denne teksten, forklares i teorikapittel 2.2.3.

ut mer om hvordan ikoner, symboler, konkreter og gester visuelt kan mediere volumobjektet på best mulig måte.

1.2 Studiens teoretiske og analytiske tilnærming

Denne studien tar utgangspunkt i det kommognitive rammeverket til Anna Sfard (2008), med et supplement fra et semiotisk perspektiv. Disse har begge sitt utspring fra sosiokulturell læringsteori der et deltakerorientert syn på læring og mediering av kulturelle redskaper er fremtredende. Resultatene vil tolkes og diskuteres med grunnlag i kommognitive og semiotiske begreper.

1.2.1 Kommognitiv diskursanalyse

Sfard (2007, 2008) mener ordbruk, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner er sentrale faktorer for hvordan vi deltar i matematiske diskurser, og en analyse av lærerens bruk av disse kan peke på læringsmuligheter som gis elevene. Man kan studere om det har skjedd en utvikling av elevens diskurs (læring) ved å se på endringer i bruk av matematiske ord, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. De visuelle mediatorene deles inn i symboler, ikoner, konkreter og gester. Gestene anses som essensielle for at den matematiske kommunikasjonen skal være effektiv, og uvurderlige for vissheten om at man snakker om samme matematiske objekt (Sfard, 2009).

Sfard (2007, 2008) etterlyser mer bruk av operasjonelle definisjoner i forskningen. Det kommognitive rammeverket, og synet på læring som deltakelse i matematiske diskurser, gir muligheter for å forske på læring med operasjonelle begreper og å studere undervisning og læring på en observerbar måte, uten tilgang til indre tanker. Dette har hun for eksempel gjort ved å utføre diskursanalyser av undervisning i en Sør-Afrikansk kontekst. Der identifiserte hun læringsmulighetene som en lærer ga til elevene sine, og hvordan elevene utnyttet disse mulighetene (Sfard, 2017).

Den kommognitive teorien (Sfard, 2007, 2008, 2009, 2017) har fått mye oppmerksomhet innen matematikkdidaktisk forskning de siste tiårene. I studien til Lavie et al. (2019) blir Sfards begrep rutine videre utforsket, operasjonalisert og kategorisert. Gautam og Bjuland (2021) brukte nylig et kommognitivt rammeverk i en studie der de viste at samspillet mellom gester og tale spilte en viktig rolle i å støtte elevers realisering av den matematiske betegneren

25 × 12. Tyskerud og Mosvold (2018) utfører også en kommognitiv analyse av hvordan volumobjektet blir konstruert i læreres diskurs, og hvilke rutiner elevene inviteres inn i.

Berger (2013) har brukt Sfards rammeverk for å analysere læreres bruk av ord, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner, i arbeidet med en matematisk oppgave om funksjoner, og jeg drar inspirasjon fra hennes oppsett av disse faktorene i analysene. Det er viktig at klasserommets kompleksitet reduseres i en analyse (jamfør Bauersfeld, 1980), og i denne studien kommer diskursanalysen til å sentrere seg rundt de visuelle mediatorene i den matematiske diskursen; symboler, ikoner, konkreter og gester (Sfard, 2008), i undervisning og arbeid med volumobjektet, der elever og lærer er deltakere i en matematisk diskurs.

1.2.2 Multimodal analysetilnærming

Undervisning i matematikk er multimodal og kompleks, da man bruker både tall, symboler, bokstaver, figurer, tabeller, grafer, bilder og gester i tillegg til tale. For å studere hvordan de visuelle mediatorene fungerer sammen med ordbruk, kan det derfor være nyttig å bruke et multimodalt semiotisk perspektiv (2.3.1). Semiotisk teori om gester og kategorisering av disse (Arzarello et al., 2015; Bjuland et al., 2008; McNeill, 1992, 2005; Radford, 2003), brukes som et supplement til det kommognitive rammeverket, for å kunne si noe om gesters form og funksjon i analysen. I semiotisk teori er mediering gjennom kulturelle verktøy sentralt. Den matematiske diskursen ses i lys av hvordan ulike semiotiske modaliteter fungerer i samspill (Radford, 2003), for å få en helhetlig tilnærming til diskursanalysen i studien.

En slik kombinasjon av kommognitiv og semiotisk teori kan peke på nytten av at lærer er bevisst en multimodal tilnærming til bruk av semiotiske ressurser og visuelle mediatorer i matematikkundervisningen. Mildenhall (2013) brukte denne kombinasjonen i en studie om en lærers bruk av semiotiske ressurser i brøkundervisning. Hun pekte på fordeler ved en bevissthet rundt variasjon i bruk av semiotiske ressurser og særlig på hvordan lærer bruker gester i den visuelle medieringen. Denne studien ønsker også å bidra til det kommognitive og multimodale forskningsfeltet med kunnskap om visuelle mediatorer. Studien vil særlig belyse hvilken rolle gester kan ha i å løfte fram andre modaliteter, og behovet for å bruke gester og konkreter i tillegg til ikoner og symboler i visuell mediering av volumobjektet.

1.3 Tidligere forskning

Det er forsket mye på elevers volumforståelse, og resultater viser at elever mangler forståelse for størrelser; hvor stort noe er, at de har begrensede oppfatninger av dimensjon, og at de er veldig formelfokuserte. I motsetning til andre matematiske objekter, er volum sterkt knyttet til det fysiske rommet og til fysiske konkrete objekter. Derfor er det flere forskere som mener at det er viktig for begrepsdannelsen at elever får erfaring med måling (for eksempel å fylle en konkret romfigur) før man beregner volum med formler (symbolbruk) (Battista & Clements, 1996; Hong & Runnalls, 2020; Tekin-Sitrava & Isiksal-Bostan, 2014; Vestersjø, 2002). I en nyere studie belyser Hong og Runnals (2020) dette ved å beskrive en mulig måte å endre volumoppgaver på, for å fremme begrepsmessig forståelse av volumformelen for et rektangulært prisme. Det er tradisjoner for å bruke konkreter mye i begynneropplæring i matematikk (Svingen, 2018), men det er uenigheter i fagfeltet, og i for eksempel utviklende matematikkopplæring legges det vekt på å lære begreper og abstrakte uttrykk framfor fokus på konkreter, fordi det skal gagne overgangen fra objektkunnskap til teoretisk kunnskap (Moe & Moe, 2016). Det viktigste virker å være om konkretene som brukes, er hensiktsmessige (Halvorsen & Waaler, 2011; Laski et al., 2015). Resultatene er også avhengig av tema, og om lærer gir tydelig veiledning (Carbonneau et al., 2013; Laski et al., 2015).

Flere av disse studiene fokuserer hovedsakelig på elevenes mangel på forståelse, og kan derfor representere et syn på læring som *tilegnelse* av kunnskap. Sfards (2008) kommognitive rammeverk fremmer et *deltakerorientert* læringssyn, der det å løse matematiske problemer vil være en gradvis utvikling fra å kunne ta del i kollektive utførelser av en oppgave, til det å klare og utføre slike oppgaver alene. Tyskerud og Mosvold (2018) bruker Sfards rammeverk i en Lesson Study kontekst der de har fokus på hvordan volumobjektet blir konstruert i lærernes diskurs, og hvilke rutiner elevene inviteres inn i. De setter søkelyset på lærernes kommunikative undervisningsarbeid, og finner slik at tilsynelatende mangel på forståelse hos elevene, heller kan tolkes som egenskaper ved lærerens diskurs, som elevene er deltakere i.

Hvorfor er dette et viktig og relevant fokus? Blir visuelle mediatorers betydning oversett i diskursen? Er det for eksempel en overveid bruk av konkreter i klasserommet, eller bruker vi lærere det vi har tilgjengelig der og da, uavhengig av konkretets egnethet? Og tenker vi over bruken av gester i medieringen vår? Analysene kan tyde på at spesielt viktigheten av å bruke hensiktsmessige konkreter og gester overses, selv om de har viktige funksjoner som å utvikle abstrakt forståelse og opprettholde et felles fokus. I denne studien kombineres derfor innsikten fra tidligere forskning på volumforståelse med en kommognitiv og semiotisk linse for å studere hvordan en lærer kan bruke de visuelle mediatorene; symboler, ikoner, konkreter og gester, for å realisere volumobjektet.

1.4 Avgrensning av studiens problemstilling og forskningsspørsmål

Dette leder fram til oppgavens problemstilling, som er:

Hvordan kan en lærers bruk av visuelle mediatorer i den matematiske diskursen, fremme og hemme elevers muligheter til læring av volum?

For å kunne svare på problemstillingen skal lærers bruk av visuelle mediatorer i undervisning av volum først identifiseres, og deretter skal det analyseres hvilke muligheter denne bruken gir elevene til utvikling av sin egen volumdiskurs. Problemstillingen er delt opp i to forskningsspørsmål som følger:

> Forskningsspørsmål 1: *Hvordan bruker lærer visuelle mediatorer i den matematiske diskursen for å realisere det matematiske objektet volum?*
>
> Forskningsspørsmål 2: *Hvilke indikasjoner til endringer i elevenes volumdiskurs kan observeres, og hvilken sammenheng kan dette ha med lærers bruk av visuelle mediatorer i plenumsundervisningen?*

For å svare på forskningsspørsmålene skal både lærers og elevers visuelle mediering av volumobjektet, analyseres med et kommognitivt analyseverktøy som suppleres med en semiotisk kategorisering av gester. Der det er mulig vil samsvarende episoder fra plenumsundervisning og elevintervjuer analyseres for å se etter indikasjoner på utvikling av elevenes matematiske diskurs. Det diskuteres deretter om denne endringen kan ha sammenhenger med lærers visuelle mediering i plenumsundervisningen. I denne studien er det hovedsakelig volum av et rektangulært prisme diskursen kommer til å dreie seg om.

1.5 Oppbygning av oppgaven

Nå har studiens forskningstilnærming og formål blitt presentert i korte trekk. Videre vil studien rammes inn teoretisk (Kapittel 2), ved en innføring i aktuell læringsteori, studiens kontekstuelle rammer (UOM) og matematisk innhold som kan bistå i tolkninger og diskusjon av resultatene. I metodekapittelet (Kapittel 3) settes leser inn i forskningsdesign, fremgangsmåter og refleksjon over studiens kvalitet og forskningsetikk. Deretter presenteres resultatene av diskursanalysen med hensyn til forskningsspørsmålene (Kapittel 4). Resultatene fra analysen diskuteres i kapittel 5, og til slutt oppsummeres og konkluderes det ut fra studiens funn ved kritisk refleksjon over kvalitet og studiens implikasjoner (Kapittel 6).

2. Teoretisk bakgrunn og innramming

I denne masteroppgaven tas det utgangspunkt i et kommognitivt rammeverk med støtte i en semiotisk-kulturell teori (2.3). I det kommognitive rammeverket (2.2) til Anna Sfard (2008) ses læring som deltakelse i den matematiske diskursen (2.2.3). Med sitt fokus på faktorer i diskursen, som ordbruk, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner, bidrar Sfard til at man får mer fleksible analyseenheter, og i denne studien vil det fokuseres på analyse av de visuelle mediatorene læreren bruker i sin diskurs: symboler, ikoner, konkreter og gester. For å kunne si noe mer om gesters form og funksjon i analysen, suppleres det kommognitive rammeverket med semiotisk teori om gester (2.3.2). Her er synet på at læring foregår som mediering gjennom kulturelle verktøy viktig. Visuelle mediatorer er eksempler på semiotiske læringsverktøy (2.3.1), og de virker synkront sammen i en objektiviseringsprosess, i en semiotisk node (Radford, 2003).

Både det kommognitive rammeverket og semiotisk-kulturell teori har sitt utspring i sosiokulturell læringsteori (2.1), som vil introduseres før selve rammeverkene. Læring som deltakelse er her sentralt, og utviklingen ses som å skje fra det sosiale til det individuelle. Først kan barnet utføre handlinger i samspill med andre, og deretter alene. Forskjellen mellom hva barnet kan klare alene og hva det kan klare med hjelp, *den proksimale utviklingssonen*, er et viktig prinsipp i Utviklende Opplæring i Matematikk, UOM (2.1.2), som det undervises i på skolen som observasjonen fant sted i. Teoretisk kunnskap, som å lære begreper og abstrakte uttrykk, er her i fokus, og kan stå i strid med oppfatninger som vektlegger bruk av konkreter i klasserommet.

Et av særtrekkene ved matematikkundervisningen er at det brukes mange modaliteter for å mediere faget, som matematiske symboler, ikoner som grafer, tabeller og figurer, og ikke minst gester og konkreter, i tillegg til talen. Volumdiskursen (2.4.2) har også et eget særtrekk innen matematikken, da volum i motsetning til flere andre matematiske objekter er sterkt knyttet til det fysiske rommet og til fysiske, konkrete objekter (2.4.1). I denne studien blir derfor lærerens bruk av visuelle mediatorer studert i sammenheng med hverandre og i kontekst med hvordan de inngår i volumdiskursen ellers.

2.1 Sosiokulturelt perspektiv

Utgangspunktet for et sosiokulturelt perspektiv er interessen for hvordan kunnskap og ferdigheter blir videreført til nye generasjoner, og det at læring er en sosial og kulturell prosess, ikke bare noe som skjer inni enkeltindividet. I et sosiokulturelt perspektiv på læring og utvikling, er kommunikative prosesser helt sentrale, da det er gjennom kommunikasjon at individet blir delaktig i kunnskaper og ferdigheter. Perspektivet har grunnlag i ideer som ble formulert av den russiske psykologen Lev S. Vygotsky (1896-1934) (Säljö, 2001, 2002). Vygotsky var den første til å fullt ut anerkjenne kulturens og miljøets betydning i læringsprosessen. Kunnskapen konstrueres ikke individuelt, men i de kollektive språkformene vi får fra kulturen. Han mente at tenkning har utgangspunkt i sosial aktivitet og at det som kjennetegner utviklingen vår, er samspillet mellom modning og forhold til miljøet slik at vi kan bruke språket som redskap til å mestre omgivelsene våre. Siden utviklingen skjer fra det sosiale til det individuelle, kan barnet først utføre handlinger i samspill med andre, og deretter alene. En mer kompetent annen blir slik en medierende hjelper for barnet. Forskjellen mellom hva barnet kan klare alene og hva det kan klare med denne hjelpen, kalles *den proksimale utviklingssonen* (Imsen, 2005), og er viktig i UOM (2.1.2).

2.1.1 Mediering og bruk av kulturelle redskaper

I Vygotskys sosiokulturelle perspektiv er begrepene redskap og mediering sentrale. Å mediere betyr å formidle. De kulturelle redskapene, fysiske og intellektuelle, medierer virkeligheten for oss (Säljö, 2001, 2002). Intellektuelle redskaper vil være i språklig form, for eksempel det matematiske fagspråket eller symbolsystemer, som tallsystemet. Uttrykket *rektangulært prisme* kan ses som et konkret eksempel på et intellektuelt redskap som vi bruker for å diskutere fenomenet «formen på en figur» (Säljö, 2002, s.36). De fysiske artefaktene ses på som menneskelige ideer og tanker (intellektuelle redskaper) som er gjort om til materiell form, og integrert i handlingene. Et kulturelt redskap kan fungere som et hjelpemiddel ved å gi visuell og fysisk støtte. En meterstav for eksempel, representerer avstand i standardiserte enheter som centimeter og desimeter. Intellektuelle redskaper er lagt inn i meterstaven for å representere enheter og mål. Säljö mener det i praksis er umulig å skille mellom disse kulturelle medierende redskapene, da de fysiske artefaktene er avhengig av de intellektuelle for å ha noen mening. Intellektuelle redskaper som er utviklet innen en kultur, som for eksempel centimeter, er dermed materialisert i objekter, men brukes også i kommunikative og kognitive operasjoner, og er derfor både individuelle og kollektive (Säljö, 2001, 2002).

2.1.2 Utviklende opplæring i matematikk

Utviklende opplæring i matematikk, UOM, baserer seg på Lev Vygotskys teorier om læring, utvikling og undervisning (Blank et al., 2014). Vygotsky mente at undervisning bør foregå i den proksimale utviklingssonen, slik at elevene må strekke seg litt forbi det de kan klare alene (Imsen, 2005). Leonid Zankov var Vygotsky's student og kollega. Gjennom eksperimentell forskning i russiske barneskoler, utviklet han en omfattende og systematisk undervisningsmodell, som var organisert rundt ideen om å oppnå mest mulig effektivitet i skoleelevers generelle utvikling (Zankov, 1977). Denne modellen har blitt brukt med suksess i Russland i over 50 år (Blank et al, 2014), og har de siste tiårene spredt seg til resten av verden, inkludert Norge (Gjære & Blank, 2019; Guseva & Solomonowich, 2017). UOM-prosjektet ble innført for første gang i Norge i 2009, og på nåværende tidspunkt blir modellen brukt i over 70 skoler i landet (Gjære & Blank, 2019). I UOM legges det mindre vekt på forklaring og drill, og fokus på konkrete objekt blir tonet ned til fordel for abstrakte begrep og symbol. Aktivisering av sansning, tenkning, og muntlig kommunikasjon fremheves (Moe & Moe, 2016). Modellen baserer seg på fem sammenhengende undervisningsprinsipp:

1) Undervisning på høyt nivå.

Zankov (1977) sier at prinsippet med å undervise på høyt nivå, hovedsakelig er karakterisert ved at barnets mentale styrker kommer frem, og han mener at barnets utvikling vil bli svak hvis de ikke møter på utfordringer i fagstoff og metoder. Elevene prøver å overvinne vanskeligheter i den proksimale utviklingssonen (Blank et al., 2014). Dette er et aktivitetsområde der klasseromsamarbeid kan få fram fordelaktige utviklingsmessige resultater (Gjære & Blank, 2019). En typisk time går ut på at elevene får en oppgave på tavlen der det handler om å løse et problem. Det legges opp til at lærer og medelever hjelper den enkelte, og derfor er diskusjon viktig (Moe & Moe, 2016).

2) Teoretisk kunnskap har ledende rolle.

Dette prinsippet krever at temaene som undervises blir systematisk og logisk koblet sammen, slik at elevene gradvis vil få et overblikk over faget, og får en dypere forståelse for sammenhengen mellom de ulike temaene og matematiske ideene. For å oppnå dette, bes elevene om å sammenligne, analysere, begrunne, evaluere prosedyrer og resultater, og å generalisere og forklare begreper, symboler og definisjoner (Gjære & Blank, 2019). Moe og Moe (2016) viser til Vygotsky når de sier at barns kunnskap går fra å være objektkunnskap i førskolealderen til å bli teoretisk kunnskap i skolealderen, og skolens viktigste oppgave er å hjelpe barn med denne utviklingen. Man legger vekt på å lære begreper og abstrakte uttrykk, som er viktig i matematikk. Dette kan stå i strid med oppfatninger som vektlegger bruk av «konkreter», da det kan innebære problemer med overgangen fra objektkunnskap til teoretisk kunnskap. Det er ikke det at man absolutt ikke skal bruke konkreter, men teoretisk kunnskap er i sentrum.

3) Rask gjennomgang av stoffet.

Dette prinsippet henger godt sammen med det første, da det er vanskelig å ha et høyt nivå på undervisningen hvis den er monoton og det er mye repetisjon. Prinsippet krever kontinuerlig progresjon. En kontinuerlig berikelse av elevenes sinn, med et bredt faglig fokus, gir gode forhold for at elevene skal få dypere forståelse for fagstoffet, siden det blir innlemmet i et godt utviklet system (Zankov, 1977). Oppgavene skal være varierte og utfordrende, og det jobbes med flere tema samme uke (Blank et al., 2014; Moe & Moe, 2016). Læreren kan altså gå videre, ha en kontinuerlig progresjon, selv om hun ikke er helt fornøyd med elevenes forståelse. Dette fordi det vil være muligheter til gjentatt repetisjon av tidligere begreper og matematiske innhold senere, i nye situasjoner (Gjære & Blank, 2019).

4) Bevisstgjøre barn om deres egen læringsprosess

Dette betyr at elevene er aktive deltakere i undervisningen (Blank et al., 2014; Moe & Moe, 2016). Elever drar fordeler av å reflektere over fagstoffet og egen læringsaktivitet; hva de gjør, hvordan og hvorfor (Gjære & Blank, 2019). Zankov (1977) mener også det er viktig å være bevisst elevenes holdninger til faget, da det har stor betydning for utviklingen deres.

5) Systematisk og målrettet utvikling av hvert eneste barn i klasserommet.

Alle elever har behov for å arbeide systematisk for å fremme utviklingen sin, uansett nivå, sier Zankov (1977). Studiene hans viste at slikt arbeid hadde god effekt på svake elevers utvikling. Man aksepterer at hvert barn har sin egen utviklingssone. Oppgavene bør utformes slik at de inneholder ulik vanskelighetsgrad, slik at alle barn kan mestre noe, og diskusjonen skal være inkluderende ved at lærer bevisst organiserer elevene (Moe & Moe, 2016).

2.2 Det kommognitive rammeverket – tenkning som kommunikasjon

Rammeverket som brukes i analysen er utarbeidet av Anna Sfard (2008), og det setter søkelyset på forholdet mellom **komm**unikasjon og k**ognisjon**, derav navnet, det kommognitive rammeverket. Kommognisjonsbegrepet understreker at mellommenneskelig kommunikasjon og individuell tenkning er to sider av samme sak, og fører til nye måter å se kommunikasjon, tenkning og læring på. Sfard (2008) definerer **tenkning** som en individualisert form for (mellommenneskelig) kommunikasjon. Å tenke er å kommunisere med seg selv. Tenkning er dialogisk; vi informerer oss selv, argumenterer, stiller spørsmål og venter på vårt eget svar. **Kommunikasjon** defineres i rammeverket som en kollektiv mønsterstyrt aktivitet, som involverer visse regler og stammer fra historisk etablerte skikker. Sentralt i det kommognitive rammeverket er at man ser på tenkning som en form for kommunikasjon, og læring i matematikk som å forandre og utvikle sin matematiske diskurs (Sfard, 2007, 2008). Læring blir slik sett på som en deltakelse (2.2.1) i kollektive aktiviteter, for eksempel den matematiske klasseromsdiskursen. Læring beskrives også som en objektiviseringsprosess i rammeverket (2.2.2), som øker effektiviteten i kommunikasjonen. Når disse læringsbegrepene er på plass, gås det nærmere inn på faktorer som må være til stede i en diskurs for at den kan kalles matematisk (2.2.3) og visuelle mediatorer undersøkes mer i dybden, da det er dette som er fokus for analysen i studien. Avslutningsvis under det kommognitive rammeverket, vil det gjennomgås hvordan det å fremme objektivisering, en individualisering av matematiske objekter, kan gi muligheter for læring (2.2.4).

2.2.1 Læring som deltakelse

Bak Sfards rammeverk ligger inspirasjon fra Wittgenstein og Vygotsky med fokus på et deltakerorientert læringssyn. «Participationism» beskriver Sfard (2008) som en forskningsdiskurs som er grunnlagt i metaforen om læring som å forbedre deltakelse i historisk etablerte former for aktivitet, og hun skriver at det grunnleggende prinsippet i deltakerorientert læringssyn er at «*patterned, collective forms of distinctly human forms of doing are developmentally prior to the activities of the individual*» (Sfard, 2008, s.78). Dette viser Sfard sitt fokus på at læringen skjer fra det sosiale og kollektive til det individuelle. I stedet for personlige tilegnelser i individet, ser man på utvikling og endring i hva folk gjør og hvordan de gjør det. Da kan man få mer fleksible analyseenheter, som for eksempel diskursen, og studere både individet og det kollektive. Individualisering vil gi personlige versjoner av kollektive aktiviteter, for eksempel vil det å løse matematiske problemer være en gradvis utvikling fra det å kunne ta del i kollektive utførelser av en oppgave til det å klare og utføre slike oppgaver alene (Sfard, 2007, 2008). Utvikling vil slik være et resultat av to komplementære prosesser; individualisering av det kollektive, og kommunalisering av individet (Sfard, 2008).

2.2.2 Læring gjennom objektivisering

Sfard (2008) beskriver selve læringsprosessen som en objektiveringsprosess, en «prosess der et substantiv begynner å bli brukt som om det betegner et utenomdiskursivt, selvoppholdende objekt, som er uavhengig av menneskelig styring» (Sfard, 2008, s.300). Hvis en slik objektiviseringsprosess lykkes, legger vi ikke lenger merke til objekt-metaforer, men snakker som om det er reelle objekter som er fysisk til stede. Ved å eliminere mennesket, skjules det for eksempel at tall er diskursive konstruksjoner som er menneskelaget og ikke gitt. En ulempe ved objektiviseringsprosessen kan derfor være at den skjuler at definisjoner er menneskelige avgjørelser om ordbruk: I stedet for å si «*Vi skal kalle* en tredimensjonal figur et prisme hvis og bare hvis …» sier definisjoner i lærebøker o.l. kanskje «Et prisme *er* en tredimensjonal figur som …». Sfard (2008) sier allikevel at vi objektiviserer fordi vi må; det øker effektiviteten i kommunikasjonen og diskursen blir et bedre verktøy for å skape mening fra erfaring, og for å organisere handlingene våre. Når man gradvis distanserer seg, kan man etter øving og erfaring gjenta prosessen uten å tenke over det. Videre utvikling og læring vil dermed bli mulig fordi de kommunikative forutsetningene effektiviseres, og læring kan observeres som endring i individets deltakelse i diskursen.

I denne studien knyttes objektivisering til hvilke muligheter for objektivisering av volumobjektet som elevene får mediert ved bruk av visuelle mediatorer, og kan knyttes til forskningsspørsmål 1. Tegn til objektivisering og endring i elevenes diskurs vil først og fremst knyttes til forskningsspørsmål 2 og del to av analysene av de samsvarende episodene.

2.2.3 Den matematiske diskursen

Forskjellige typer av kommunikasjon kan ses som ulike spill, som krever ulike verktøy og spilleregler. Og akkurat som i spill, så klarer man gjerne å delta i noen typer kommunikasjon, men ikke i andre. De ulike typene kommunikasjon, og dermed kommognisjon, som fører noen mennesker sammen, og ekskluderer andre, kalles *diskurser*, og disse ulike spillereglene kalles metadiskursive regler (mer om disse under deloverskriften rutiner) (Sfard, 2007, 2008). En diskurs kan sies å være det som mennesker sier, viser og skriver. Matematikk er en diskurs, en bestemt, veldefinert form for kommunikasjon. Et medlemskap i diskursfellesskapet får man gjennom deltakelse i kommunikasjonsaktivitetene i et kollektiv som praktiserer denne diskursen (Sfard, 2017). Sfard bruker ordet «matematisere» om deltakelse i matematisk diskurs, og deltakerne kalles «matematister». For en fremtidig matematist, skapes et sirkulært paradoks, der det at man er kjent med hva den matematiske diskursen handler om, er en forutsetning for å delta i diskursen, men samtidig kan man bare bli kjent med diskursen ved å delta. Hva er det som gjør en matematisk diskurs annerledes enn andre diskurser? Fire faktorer som er av betydning når man skal avgjøre om en gitt diskurs kan telle som matematisk, er: ordbruk, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner (Sfard, 2008). Jeg skal her gå mer i dybden på visuelle mediatorer da det er det som er hovedfokuset i analysen, og disse tar jeg derfor for meg sist av de fire faktorene.

Ordbruk

Alle diskurser har nøkkelord som er viktige for å kommunisere de mest sentrale idéene i diskursen, og en diskurs er matematisk hvis den **bruker matematiske ord** som for eksempel beskriver mengder eller geometriske former (som rektangulært prisme). Mange av disse ordene bruker vi gjerne også i ikke-matematiske diskurser, men i en matematisk diskurs er det en mer disiplinert bruk av ordene (Sfard, 2007, 2008). Sfard (2008) deler opp prosessen med å individualisere nye begreper i fire faser: Med **passiv bruk** menes at matematisten ikke bruker ordet selv, men kan utføre korrekte handlinger knyttet til det. **Rutinedrevet bruk** kan man kalle det hvis ordet brukes aktivt, men bare som en del av den pågående diskursen. Dersom matematisten bruker ordet naturlig i hele setninger, kalles det **frasedrevet bruk**. Til slutt lever det nye ordet sitt eget liv som et substantiv. Matematisten kan nå knytte ordet til et unikt realiseringstre (se under visuelle mediatorer), og bruken av ordet er **objektdrevet.** Det finnes få tegn til objektivisering i nybegynneres matematiske diskurs. Matematisk kommunikasjon blir kanskje mer enn andre typer kommunikasjon hemmet av betydelige forskjeller i samtalepartnernes ordbruk. Spesielt kan det være store forskjeller i objektiviseringsnivået til forskjellige matematister, som for eksempel lærer og elev (Sfard, 2008).

Narrativer

Narrativer er beskrivelser av et objekt, forholdet mellom objekter, eller prosesser med eller av objekter, som er gjenstand for vurdering som godkjent eller ikke godkjent. Godkjente narrativer er for eksempel definisjoner, teoremer eller bevis. Matematiske narrativer kan produseres her og nå, eller de kan være et resultat av tidligere matematisering og brukes på ny senere som vedtatte matematiske sannheter, for eksempel tidligere beviste formler for å finne volumet til et rektangulært prisme. Narrativer er slik et resultat av matematisk aktivitet. Man har matematiske narrativer om objekter (objekt nivå: I en meter er det hundre centimeter, eller: I et rektangulært prisme, er grunnflaten et rektangel) og narrativer om selve diskursen, hvordan man utfører matematikken (meta nivå: For å finne volumet av et rektangulært prisme, må man multiplisere grunnflaten med høyden) (Sfard, 2007, 2008).

Rutiner

Rutiner er veldefinerte gjentakende kommunikasjonsmønster, som er typiske for en gitt diskurs – hvordan vi matematiserer, som Sfard sier (2008, s.195). Det kan dreie seg om for eksempel prosedyrer eller det å komme fram til regler om matematiske objekter. Denne kategorien er delvis overlappende med de tre andre, men favner også mer, og rutiner ses i nesten alle aspekter av matematiske diskurser. Rutinene er samlinger av metadiskursive regler som definerer betingelser for når rutinene er passende å bruke og selve handlingsforløpet. Rutinenes «hvordan» blir vanligvis individualisert før rutinens «når» (Sfard, 2007, 2008).

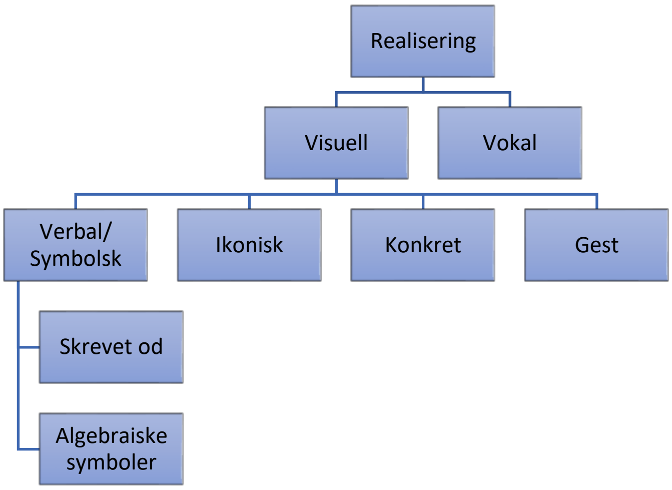
Sfard deler rutinene opp i utforskinger, gjerninger og ritualer, der ritualisering er det laveste nivået i diskursen. Den samme rutinen utført av to ulike diskursdeltakere kan klassifiseres som to ulike typer rutiner. For å skille mellom utforskende og rituelle rutiner, må en se på når rutinen benyttes, hvem som utfører den, og om den utføres på en akseptabel måte. Ritualer utføres for å være en del av fellesskapet i klasserommet, elever er fornøyde hvis de svarer riktig eller får positiv tilbakemelding. Det handler om å gjøre – prosessen, mens utforskning handler om det å kunne eller vite (diskursivt) (Lavie et al., 2019). Gjerninger er rutiner som involverer praktiske handlinger, som skaper eller forandrer objekter. Gjerningen regnes som avsluttet når det foreligger en fysisk endring i omgivelsene, for eksempel en skriftlig løsning av et regnestykke. En rutine teller som utforsking når man får et bekreftet narrativ når rutinen er ferdig. Utforskende rutiner kan deles i tre ulike typer: *konstruksjon*, som er en diskursiv prosess som resulterer i nye godkjente narrativer; *underbygging*, som hjelper matematisten å avgjøre om man skal godkjenne tidligere konstruerte narrativer; og *gjenkalling*, som er prosessen der man finner tilbake til et narrativ som er tidligere godkjent (Sfard, 2008).

Visuelle mediatorer

Selv om matematisk diskurs kjennetegnes ved at de objektene man kommuniserer om, ofte ikke er konkrete, er matematisk kommunikasjon også avhengig av det vi kan *se*. Visuelle mediatorer er synlige objekter som deltakerne i en matematisk diskurs bruker for å identifisere og fokusere objektene fra tenkningen eller kommunikasjonen sin (Sfard, 2007, 2008). Men visuell mediering er også til stede når vi ikke kan se en faktisk mediator; når vi bare kan forestille oss. Sfard (2008) skiller mellom *symbolske* mediatorer (algebraisk notasjon, matematiske formler; $V = l \cdot b \cdot h$), *ikoniske* mediatorer (grafer, diagrammer, tegninger og bilder), *konkrete* mediatorer (tredimensjonale romfigurer eller meterstav) og *gester* (håndbevegelser, peking eller nikking).

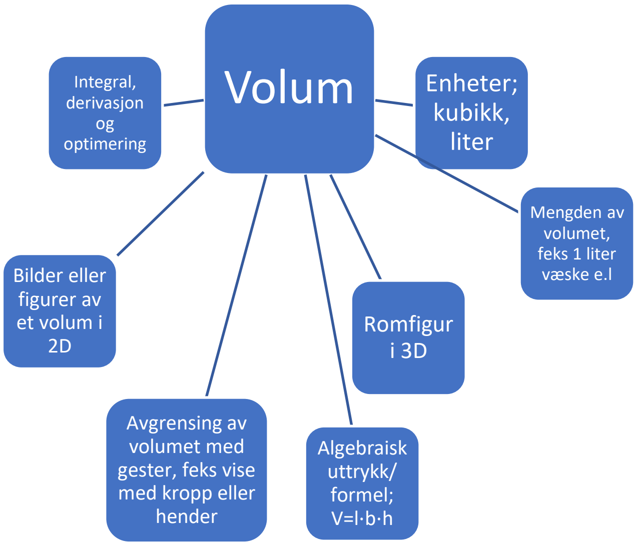
Visuelle realiseringer av matematiske betegnere

Sfard (2008) skriver at matematisk kommunikasjon involverer overganger fra «signifiers», heretter kalt betegnere, til realisering av betegnere. Betegnere er ord eller symboler som fungerer som substantiv i diskursen, mens begrepet realisering av en betegner refererer til et synlig, tilgjengelig objekt som kan brukes for å lage narrativer om betegneren. Realiseringer kan ta form av talt eller skrevet ord, algebraiske symboler, tegninger (ikoner), konkrete objekter og gester. Se figur 1:



Figur 1 Ulike former (modaliteter) av betegneres realisering i matematisk diskurs (Sfard, 2008, s.155).

For å eksemplifisere: Volum kan, som matematisk objekt, framstilles både i form av en figur, et bilde, ved gester, en mengde, et algebraisk uttrykk og for eksempel konkrete romfigurer. Hver av disse kaller Sfard (2008) en realisering av betegneren «volum». Hun skriver at *som regel kan de ulike realiseringene av den samme betegneren behandles som likeverdige*. En realisering er, i motsetning til de fleste matematiske objekt, sansbar. Vi kan se formelen $V = l \cdot b \cdot h$, og vi kan se figuren (for eksempel rektangulært prisme) av det gitte volumet. Realiseringstre er i tillegg personlige, så det kan variere hvilke bilder ulike elever vil knytte til ulike objekter. Under følger et selvlaget realiseringstre for volum, for å vise et eksempel på hvordan det kan se ut, og man kan anta at en gitt elev vil ha et annerledes tre.



Figur 2 Realiseringstre av volumobjektet.

Å «ha» et matematisk objekt, vil si å kunne realisere dette ordet ved hjelp av andre matematiske ord og mediatorer. Når man «har» et matematisk objekt, kan vi si at objektet er individualisert, og dette bør som sagt være hovedfokus for opplæringen (Sfard, 2017, s.43). Målet er at elevene skal klare å delta flytende i en matematisk diskurs, som innebærer å objektivisere nye begreper slik at de får sine egne realiseringstre, og kan forflytte seg mellom forskjellige realiseringstre for å løse nye matematiske problemer (Sfard, 2008). Realisering av en betegner vil ofte innebære en overgang fra et medium til et annet – for eksempel fra den algebraisk–symbolske betegneren til en ikonisk realisering. Siden hvert medium har sin egen diskurs med tilhørende narrativer, vil mangfoldet av visuelle realiseringer utvide mulighetene for kommunikasjon. Fordelene ved de ulike visuelle modalitetene, symbolske, ikoniske, konkrete og gestikulære, avhenger av oppgavens særtrekk. Og selv om ikoniske og konkrete realiseringer ofte vil gjøre det lettere å lage seg narrativer, anser matematikere fortsatt symbolske realiseringer som nødvendige for å godkjenne narrativene (Sfard, 2008).

Mens symboler kommer av den iboende språklige aktiviteten, krever ikoniske og konkrete prosedyrer en relativt liten mengde verbalisering. Realiseringsprosesser av ikoner og konkreter blir gjort hovedsakelig med øynene, og kanskje hendene. Dermed vil ikoner "gi et svar" bare ved å systematisk skanne bildet, og konkreter kan forandres fysisk. Som et resultat av disse konkrete manipuleringene, blir visse deler av oppgaven avslørt i stedet for å bli produsert aktivt gjennom en diskursiv prosess (Sfard, 2008).

Sfard (2009) mener at det å realisere matematiske betegnere er en aktivitet der gestikulering kan spille en stor rolle. Realiseringsprosedyrer kan bli implementert med gester enten ved at mediet som realiseringen skjer i er til stede, eller ved at mediet bare er forestilt. For eksempel kan lærere eller elever realisere et prismes form ved å bruke håndbevegelser i luften for å beskrive formen til prismet, en visuell realisering. Det å bruke gester for å gjøre diskursdeltakernes realiseringsprosedyrer synlige, er en effektiv måte å hjelpe alle deltakerne til å tolke matematiske betegnere på samme måte. Gestikulære prosedyrer blir ofte automatisert og kan sammenlignet med symboler være enkle for en nykommer å bruke da de ikke reguleres like mye av metaregler som er spesifikke for diskursen.

Symbolske realiseringer derimot, innebærer sekvensielle diskursive prosedyrer, bare delvis støttet av visuelle midler, og stiller mer krav til hukommelsen. Sammensatte symboler er snarveier for verbale uttrykk, og er derfor arbeidsbesparende. En annen fordel med symbolske realiseringer er at de er universelle bærbare "realiseringssett". Konkrete realiseringer i diskursen kan for eksempel bare utføres når passende materialer er til stede (Sfard, 2008).

2.2.4 Hvordan fremme objektivisering – Individualisering av matematiske objekter, og slik gi muligheter for læring?

I et sosiokulturelt perspektiv skjer læring gjennom samspill med andre. For Sfard (2008) er læring å utvikle sin individuelle matematiske diskurs eller å individualisere matematiske objekter. Dette skjer ved at elevene deltar i diskurser der metareglene allerede er bestemt, og kan by på det tidligere nevnte paradokset der det at man er kjent med hva den matematiske diskursen handler om, er en forutsetning for å delta i diskursen. Samtidig kan man bare bli kjent med diskursen ved å delta. For det er ikke sannsynlig at eleven skal klare å gjenskape historisk utviklede rutiner av seg selv. Å endre elevenes individuelle diskurser krever samspill med andre, og mediering fra erfarne matematister. Eleven vil først mestre å delta i kollektiv bruk av rutinen, før han klarer å gjennomføre den på egenhånd. Elever i overgangsstadiet kjenner gjerne til rutinens «hvordan», og kan ved hjelp av andre gjennomføre rutinen på en tilstrekkelig måte (Sfard, 2008).

Diskursen bør bestå av utforskning for at elever skal kunne individualisere matematiske objekter, men når man møter en ny diskurs, er de første rutinene gjerne ritualer. En gradvis overgang fra ritualisering til utforskende deltakelse er en prosess som kalles deritualisering (Lavie et al., 2019). Sfard mener det er nødvendig å imitere de erfarne diskursdeltakerne (for eksempel lærer) når man er nykommer i diskursen, og gradvis bli en fullverdig deltaker (Lavie et.al, 2019; Sfard, 2008, 2017). I Vygotskys termer vil rutinene være i form av ritualer i den proksimale utviklingssonen (Sfard, 2008). Kjernen i læringsprosessen er repetisjon, der eleven gjentar noe som den har sett bli gjort eller selv gjort tidligere i møte med en ny situasjon (Lavie et al., 2019).

Om eleven når målet i å gå fra ritualisering til utforskning i diskursen, vil være avhengig av hvilke læringsmuligheter han møter i klasserommet. Lærere kan støtte eleven i denne overgangen ved å modellere en utforskende diskurs eller ved å oppmuntre til slik diskurs gjennom pedagogiske valg (Sfard, 2017). Det bør i undervisningen legges vekt på matematiske sammenhenger og relasjoner mellom matematiske objekter og rutiner. Denne sammenhengen kan læreren blant annet mediere ved å endre på eksisterende diskurser når nye diskurser skal introduseres – diskurskontinuitet, i stedet for å bygge diskursen fra bunnen av. Læreren kan introdusere utforskninger som forbedringer av kjente gjerninger (Sfard, 2008). For eksempel kan mediert identifisering av geometriske figurer bli introdusert som en erstatning for gjerningen umiddelbar identifisering.

Kommognitive konflikter kan utløse læring på meta-nivå

Siden det å lære matematikk er en endring i diskursen, skiller Sfard mellom to typer av læring: læring på objekt-nivå og læring på meta-nivå. Læring på objekt-nivå er en utvidelse av den eksisterende diskursen gjennom økt ordforråd, ved å lage nye rutiner og produsere nye godkjente narrativer. Denne læringen resulterer i en indre utvidelse av diskursen. Læring på meta-nivå er forandringer i diskursens metadiskursive regler, og knyttes til en ytre endring av diskursen. Dette betyr at en kjent oppgave som for eksempel å identifisere geometriske figurer, nå vil bli gjort på en annerledes, ukjent måte, og at visse kjente ord vil endres i bruk. Læring på meta-nivå vil mest sannsynligvis skje i elevens møte med en ny diskurs, og siden den nye diskursen styres av metaregler som er ukjente for eleven, vil et slikt møte medføre en kommognitiv konflikt (Sfard, 2008). Slik har kommognitive konflikter potensial til å stimulere til betydelig utvikling av diskursen. En kommognitiv konflikt er møtet mellom diskursdeltakere (interpersonlig eller intrapersonlig), som bruker den samme matematiske betegneren (ord eller skrevne symboler; for eksempel volum) på forskjellige måter, eller utfører den samme matematiske oppgaven etter forskjellige metaregler (Sfard, 2007, 2008).

Individualiseringen krever som sagt deltakelse og hjelp fra diskursens erfarne matematister. Ideen om kommognitiv konflikt bygger på antakelsen om at læring, som en endring i diskurs, mest sannsynligvis er et resultat av samspill med andre. Mulighetene for læring på meta-nivå vil derfor komme fra forskjeller i diskursdeltakernes måte å kommunisere på. Uten andres eksempel, ville ikke barn hatt noen grunn til å endre diskursen sin (Sfard, 2008).

I denne studien undersøkes lærers bruk av visuelle mediatorer i undervisning av volum. Visuelle mediatorer spiller en viktig rolle i objektiviseringsprosessen (Sfard, 2008). Hvilke muligheter for objektivisering av volumobjektet er det tilrettelagt for og mediert i undervisningen? Hvordan medieres volumdiskursen gjennom ressursene som blir brukt, og hvordan fungerer disse sammen? Et multimodalt perspektiv kan hjelpe til med å belyse dette, og blir presentert i neste delkapittel.

2.3 Semiotisk-kulturelt perspektiv

For å kunne si noe om ulike gesters form og funksjon i analysen, vil det kommognitive rammeverket i dette kapittelet suppleres med semiotisk teori om gester. Semiotikk, studiet av tegn og tegnbrukende handlinger og prosesser, har de siste tiårene fått økt oppmerksomhet innen matematikkdidaktikk (Presmeg et al., 2016). Sentralt i det semiotisk-kulturelle perspektivet er at den matematiske diskursen blir studert gjennom flere modaliteter (2.3.1), som også blir viktig i denne studien, der de visuelle mediatorene studeres i sammenheng. Luis Radford (2003) har utviklet en semiotisk-kulturell læringsteori som fokuserer på kroppens, diskursens og tegnenes rolle når elever viser til matematiske objekter. Synet på at læring foregår som mediering gjennom kulturelle verktøy er viktig, og hans begreper semiotiske læringsverktøy og semiotisk node (2.3.1) kan også vise hvor viktig det multimodale perspektivet er i en matematisk diskurs. I 2.3.2 vil gester som semiotiske ressurser gjennomgås, og ulik klassifisering av gester vil presenteres, som legger grunnlag for valg av analyseverktøy i analysen av gester.

2.3.1 Semiotikk og multimodalt perspektiv på matematisk diskurs

I semiotikken kan modalitet ses på som det tegnsystemet som brukes i en tekst eller et annet kommunikativt uttrykk, for eksempel språk, bilder eller gester. Benytter man flere av disse modalitetene samtidig kalles det multimodalitet (Svennevig & Henriksen, 2017). Et av særtrekkene ved matematiske tekster, er at de er mer multimodale, sammensatte og komplekse, enn mange andre fagtekster, da disse tekstene inneholder både tall, matematiske symboler, bokstaver, figurer, tabeller, grafer, illustrasjoner og bilder i tillegg til verbalspråk (Ulland et al., 2018). I tillegg brukes gester og konkreter i undervisningen. Disse ulike ressursene eller modalitetene skal sammen skape mening for eleven.

Radford et al. (2009) mener at kroppen bør tas med når man skal forstå matematisk tenkning, og bruker derfor et multimodalt perspektiv for å undersøke bruken av kognitive, fysiske og perseptuelle ressurser når mennesker jobber med matematiske ideer. De ser på kulturelle artefakter som en del av disse tilgjengelige ressursene innen konteksten av flere semiotiske modaliteter. Det var et stort fokus på diskurs i matematikkdidaktikk på 90-tallet, som førte til en nøye granskning av hva slags ord elever og lærere brukte i det sosiale samspillet. Men da videoopptak ble tatt i bruk, innså forskere at språket bare var en liten del av kommunikasjonen. Modaliteter som gester ble dermed godtatt som viktige elementer i kommunikasjon og begrepsdannelse i matematikk (Radford et al., 2009). Disse forskerne mener gester kan bidra som en bro mellom personlige, indre forestillinger og delt, ytre tale og skrift i matematikk.

Arzarello et al. (2009, s.99) ser på tegn eller semiotiske ressurser som alt som «stands to somebody for something in some respect or capacity». Dette er en vid forståelse av begrepet tegn, og de ser på gester som viktige semiotiske resurser i direkte relasjon til de mer tradisjonelle tegnene som muntlig eller skriftlig språk, matematiske symboler osv. Semiotikkens betydning i matematikk ligger i bruken av tegn, som er til stede i all matematikk. De matematiske objektene er ideelle og generelle av natur, og for å representere dem og jobbe med dem, er det nødvendig å bruke tegnformidlere (oversettelse av «sign vehicles» fra Presmeg et al., 2016, s.2), som ikke er matematiske objekter selv, men som står for og representerer dem på et vis. Tegnformidlere som brukes i matematikkundervisning er ofte visuelle av natur. Et eksempel kan være en tegning av et rektangulært prisme (ikonisk visuell mediator hos Sfard, 2008). Barn kan ha utfordringer med å bevege seg fra de materielle tingene de bruker i matematikkundervisningen til de matematiske tingene, og det å se noe som noe annet er utfordrende. Semiotikk har derfor i flere tradisjonelle rammeverk et potensiale til å fungere som en teoretisk linse i forskning på matematikkundervisning.

I objektiviseringsteorien er aktivitet en uendelig sosial prosess der individet blir en del av matematikksamfunnet. Det er gjennom felles arbeidskraft at elever gradvis blir bevisst kulturelle og historisk konstituerte former for matematisk tenkning. Dette er objektiveringsprosesser, læring, som en situert kultur-historisk prosess. Tegn og artefakter er bærere av menneskelig intelligens og spesifikke historiske former for menneskelig produksjon som påvirker måten vi ser verden på (Presmeg et al., 2016). Alle semiotiske ressurser som elever mobiliserer for å bli klar over slike historiske former for tenkning og handlinger kalles av Radford (2003) semiotiske objektiviseringsmiddel, eller oversatt; *semiotiske læringsverktøy*. Dette kan være materielle matematiske tegn (formler, grafer o.l.), gester, skriftlig språk, tale, kroppslig holdning hos eleven og læreren, rytme osv., som mennesker bruker bevisst for å få oppmerksomhet eller tydeliggjøre intensjonene sine.

Disse semiotiske læringsverktøyene opererer ikke isolert fra hverandre. De opererer sammen i kompleks koordinasjon av forskjellige modaliteter som elever og lærere mobiliserer i en objektiveringsprosess. Dette felles arbeidet kalles en *semiotisk node* (Presmeg et al., 2016; Radford, 2003). Vi har en semiotisk node når en gest, en handling og ord brukes synkront sammen og er en del av en elevs semiotiske aktivitet for å oppnå kunnskapsobjektivisering. Fra et semiotisk-kulturelt ståsted er denne mobiliseringen av flere synkroniserte, koordinerte semiotiske ressurser veldig viktig, da det markerer et nytt øyeblikk i begrepsdannelsen som gir mening for eleven. Elever blir mer og mer bevisst den matematiske meningen ved å arbeide sammen og ved gjensidig samspill med materialer og verktøy (Arzarello et al., 2015).

I et klasserom opptrer ulike semiotiske systemer gjerne samtidig, og en analyse av en enkelt semiotisk ressurs isolert sett, som for eksempel bare gester, vil være svært begrenset. Disse ressursene bør ses i sin sosiale kontekst og i det diskursive systemet de inngår i, mener Radford (2009). I denne studien undersøkes lærers bruk av visuelle mediatorer i volumdiskursen, og det vil derfor være fokus på flere semiotiske ressurser, slik at ikke analysen blir begrenset på den måten. I det neste kapittelet vil gester bli løftet fram som en viktig visuell mediator.

2.3.2 Gester som semiotiske ressurser

Sfard (2009) mener at gester er viktige visuelle mediatorer, og en semiotisk ressurs som det er viktig at det forskes på innen matematikkdidaktikk, for uten at man får mer kunnskap om gester, mener hun det er lite sannsynlig at vi får en tilfredsstillende forståelse av menneskelig tenkning. Radford (2009) beskriver gester som «the very texture of thinking» og som viktige kilder til abstrakt tenkning, og Arzarello et al. (2009) mener at gester sammen med tale og inskripsjoner støtter elevers tankeprosesser på en helhetlig måte. Disse forfatterne er enige i at det er et nært forhold, symbiose, mellom gester og språk, noe som passer godt overens med tankene til vår tids ledende gestolog, David McNeill, som hevder at gester og språk er to sider av samme sak (Sfard, 2009). I prosessen ved å gå fra det konkrete til det mer avanserte og abstrakte, mener Sfard (2009) at gester og andre visuelle mediatorer utgjør materialet som abstraksjonene (for eksempel volumobjektet) er laget av.

David McNeill mener gester viser forestillinger og bilder som ikke alltid kan uttrykkes i tale, og som man kanskje selv tror er skjult. Slik mener han at gester viser våre innerste tanker, og måter å forstå verden på; «Gestures are like thoughts themselves» (McNeill, 1992, s.11-12). Roth (2000) mener gester passer til å vise fram form, rom og posisjon som ofte ikke er verbalt kodet, og dette kan ses i sammenheng med analysen i denne studien, der det er volumdiskursen som analyseres. Sfard (2009) beskriver også gester som essensielle for effektiviteten i den matematiske kommunikasjonen, da de er uvurderlige for å sørge for at alle deltakerne i diskursen snakker om det samme matematiske objektet. De hjelper elever å legge merke til abstrakte matematiske relasjoner og til å være mer fokusert på det begrepsmessige ved matematiske objekter. Gester brukes ofte for å oppnå felles oppmerksomhet i problemløsning og å forsterke meningen uttrykt av det vokale, samtidig som de kan være hukommelsesmarkører (Bjuland et al., 2008).

Da gester er sentrale visuelle mediatorer som er observert i datamaterialet, deles det i analysen inn i ulike typer gester. Under følger derfor relevante gesters former og funksjoner.

Begrepsavgrensning

Gester defineres av McNeill som spontane bevegelser som vanligvis utføres med armene eller hendene, og som er nært synkronisert med talestrømmen (McNeill, 1992, s.11). Sfard (2009) mener denne beskrivelsen kan være både for restriktiv (hvorfor bare hendene?), og for vid. Hvorfor *alle* håndbevegelser? Skal ukontrollerbare skjelvinger også regnes som gester? Hun beskriver derfor gester som kroppsbevegelser som oppfyller en kommunikasjonsmessig funksjon. Slik har også Roth (2000, s.1684) sett på gester når han skriver: «Here, the term 'gesture' is used to mean any distinct bodily action which is directly involved in the process of communication». Når gester analyseres i denne studien, vil det være som kroppsbevegelser som oppfyller en kommunikasjonsmessig funksjon i den *matematiske* diskursen.

Klassifisering av gester

McNeill (1992) utviklet et begrepsmessig rammeverk og klassifiserte gester etter fire kategorier: Ikoniske, metaforiske, deiktiske og rytmegester. Han foreslår senere at en gitt gest kan inneholde aspekter fra flere av disse kategoriene, og refererer derfor heller til *dimensjoner* av ikonisk, metaforisk, deiktisk, understrekende (temporal highlighting) og sosialt samspill, som vil si at enhver gest har en viss verdi av forskjellige dimensjoner (McNeill, 2005). For at kategoriene skal gi mening, må de analyseres sammen med språket og i den konteksten og diskursen de oppstår i.

McNeill (2005) omtaler også **emblemer**, som er faste gester for et uttrykk, som for eksempel tommel opp for OK, eller nikk med hodet som en bekreftelse/ja. Disse er kulturelt betinget. **Ikoniske gester** har et nært forhold til det semantiske innholdet i talen; man illustrerer gjerne samme handling som det refereres til i talen. Disse har ofte to eller tre dimensjoner. For eksempel det å vise formen til en konkret eske i luften. **Metaforiske gester** er som ikoniske gester i at de er billedlige, men innholdet representerer en abstrakt ide i stedet for en konkret hendelse eller et konkret objekt med fysisk form, og de er derfor veldig aktuelle i matematikkfaget. For eksempel det å vise volumet av en to-dimensjonal eller tre-dimensjonal matematisk abstrakt figur, som rektangel eller prisme med hendene (Arzarello et al., 2015). **Deiktiske gester** er pekegester som typisk utføres med pekefinger, og kan peke på både eksisterende objekter (konkret peking) og forestilte objekter (abstrakt peking) for å vise til noe og få felles oppmerksomhet mot objektet. Konkret peking kan for eksempel være å peke på en formel på tavla. Hodet, andre kroppsdeler eller objekter holdt i hånda kan også brukes til å peke med (McNeill, 2005). **Rytmegester eller understrekende gester** fremhever diskontinuiteter og kan være repeterte gester som kan ha som funksjon å understreke noe viktig eller nytt i samtalen. Eksempel kan være prikking eller gjentatt understreking på tavlen under en viktig formel. McNeill (1992) mener at man kan sette hendelser på meta-nivå rett inn i diskursen ved å bruke understrekende gester, fordi de signaliserer at det som omtales avviker fra den fortalte hendelseskjeden.

McNeill’s originale kategorisering vil brukes som et grunnleggende rammeverk når gester studeres i denne studien, og vil suppleres av inndeling av de deiktiske gestene foreslått av Bjuland et al. (2008) og forståelse av metaforiske gester fra Arzarello et al. (2015) som har studert bruk av gester i matematiske diskurser i klasserommet.

Gester i matematiske klasseromsdiskurser

De siste årene har det vært en økende interesse for hvordan gester gir mening, og for å analysere disse, både i kommunikasjon generelt og i begrepsdannelse i matematikk. Siden matematikk er et veldig abstrakt fag, har det en spesiell status når det gjelder å analysere gester. For gestologer er det interessant å undersøke hvordan abstrakte begreper blir synliggjort gjennom gestenes fysiske kvaliteter (Arzarello et al., 2015). Dette er også noe av det som er interessant å se på i denne studien, da lærer og elever bruker gester når de prøver å synliggjøre det abstrakte matematiske begrepet volum.

Siden matematiske diskurser er annerledes enn de narrative diskursene McNeill brukte da han kategoriserte gester, mener Edwards (2005) at klassifiseringen trenger en oppdatering når den skal brukes i en matematisk klasseromsdiskurs, og hun deler hans ikoniske kategori inn i undergruppene ikonisk-fysiske gester og ikonisk-symbolske gester (Edwards, 2003, 2005, 2009). De ikonisk-fysiske gestene kan sammenlignes med McNeills (1992) opprinnelige ikoniske kategori, der gester refererer til noe konkret eller fysisk. Med ikonisk-symbolsk menes gester som refererer til symbolske representasjoner av objekter og prosesser (Edwards, 2003). Med disse gestene kan deltakere for eksempel gjenta den fysiske prosessen ved å skrive en matematisk prosedyre eller referere til visuelle punkter og elementer på matematiske symboler. Edwards (2009) mener dette viser viktigheten av symboler i elevers matematiske tenkning. Hun sier også at matematikk som disiplin kanskje krever enda finere kategoriseringer av gester, siden mange konkrete objekter i matematikk har blitt skapt for å representere et mer abstrakt matematisk objekt (Edwards, 2005). I volumdiskursen i denne studien, ble det ikke identifisert noen ikonisk-symbolske gester, og derfor brukes McNeills (1992) opprinnelige klassifisering uten Edwards ekstra inndeling av ikoniske gester i analysene. Man kan allikevel anta at dette er litt typisk for volumdiskursen i dette tilfellet, og at det i for eksempel en brøkdiskurs ville sett annerledes ut.

Det ble derimot identifisert forskjellige typer deiktiske gester, og derfor brukes Bjuland et al. (2008) sin inndeling av de deiktiske gestene for å kunne gjøre forskjell på disse. Disse forskerne satte i sin studie om samspillet mellom gester og diskurs, søkelys på McNeills deiktiske dimensjon fordi den var sterkt relatert til elevenes fokus på den matematiske oppgaven de fikk. Forfatterne definerte det som **repetert peking** dersom en elev gjentatte ganger pekte på det samme objektet, og kunne knytte det til at det skulle legges ekstra vekt på det som ble pekt på. **Etterfølgende peking** definerte de dersom en elev pekte på forskjellige objekter etter hverandre, for eksempel en bevegelse mellom figur og diagram. Denne pekingen kan for eksempel bli brukt for å koble sammen to ulike semiotiske representasjoner. De definerte det som **holdepunkt** dersom en elev holdt fingeren sin på et objekt mer enn tre sekunder. Dette foreslår de kan bli brukt som en hukommelsesmarkør eller vise et ekstra fokus på det som pekes på. **Glidende peking** ble det definert som dersom en elev pekte og beveget finger eller hånd kontinuerlig innen eller mellom to semiotiske representasjoner. For eksempel kalte de det lineær glidende peking dersom glidingen var langs en rett linje. En slik glidende peking relaterte forskerne hovedsakelig til en koordineringsfunksjon. En sirkulær bevegelse med hånda, for eksempel mellom to semiotiske representasjoner, definerte de som **sirkulær glidepeking**, og denne bevegelsen ble foreslått å være forbundet med usikkerhet hos elevene i studien deres (Bjuland et al., 2008).

Arzarello et al. (2015) mener at samspillet mellom de ulike dimensjonene av gester kan være subtilt, og på grunn av matematikkfagets abstrakte natur, vil metaforiske gester ofte være fremtredende. De tar for seg eksempler der de prøver å identifisere overgangen fra ikoniske og deiktiske dimensjoner til metaforiske, og hvordan disse utvikler seg gjennom den matematiske diskursen. Som et eksempel nevner de gesten som vises i figur 3, og som i en dagligdags diskurs kan forestille en tv-skjerm eller lignende, der det fokuseres mest på dens ikoniske dimensjon. Hvis diskursens kontekst er matematisk og bruker språk om to-dimensjonale former, så er den dominante dimensjonen metaforisk og vi ser gesten som at den representerer den geometriske figuren rektangel, og det åpner opp for relatert kunnskap om denne figuren.

Figur 3 Ikonisk/metaforisk gest (Arzarello et al., 2015, s.25)

Roth (2000) mener gester kan være en for lite utnyttet ressurs i de tidlige stadiene av diskursutviklingen når elevene ennå ikke har lært seg den faglige sjargongen. Undersøkelsene hans viser til hyppig gestikulering når elever møter ukjente situasjoner, og han antar at dette kan være en indikasjon på at disse modalitetene ikke krever samme kognitive resurser. Roth (2001) sier at gestikulering lar elever lage komplekse forklaringer ved å minke den kognitive belastningen, og at gester kan fungere som et medium som kan bære diskursen. Når elever kommer inn i diskurser med materielle objekter, får de et godt grunnlag for å utføre metaforiske gester som legemliggjør enheter som er abstrakte. Han mener det er viktig at elever følger med på lærers gester i tillegg til talen, da lærere bruker betydelige gestikulære ressurser som er viktige for å forstå begreper. I en studie av hvordan barn tolket videopptak av elevers strategiforklaringer, så det ut til at barna kunne gjøre tilfredsstillende tolkninger av gestene dersom de ble studert sammen med talen, og at gester derfor kan være nyttige for den matematiske diskursen i klasserommet (Roth, 2001).

Den deiktiske dimensjonen av gester kan ha en særdeles viktig rolle i å framheve de andre visuelle mediatorene i den matematiske diskursen. Siden symboler ($V = l \cdot b \cdot h$) er visuelle representasjoner av de abstrakte objektene i diskursen, kan de bli visuelt tilgjengelige ved å bli pekt på (Sfard, 2008), og man kan også bruke deiktiske gester for å samle oppmerksomheten rundt ikoniske (bilde av et prisme) eller konkrete (en eske) visuelle mediatorer. I neste kapittel presenteres forholdet mellom de konkrete og symbolske visuelle mediatorer ytterligere, og selve volumdiskursen blir også diskutert.

2.4 Matematisk innhold

Utgangspunktet for at denne studien ble til, var som sagt en observasjon under klasseromsobservasjonen i undervisning av volum, som var uventet. Jeg er gjennom utdannelsen min lært opp i at det er essensielt å bruke konkreter i matematikkundervisningen, spesielt i arbeid med geometri, og gjerne mer jo yngre elevene er. Det ble brukt lite konkreter i undervisningen vi observerte, og UOM legger også vekt på abstrakt teori og symboler fremfor konkreter. Det er derfor hensiktsmessig å se på hva forskningen i fagfeltet sier om bruk av konkreter i matematikk (2.4.1) og spesielt i volumdiskursen (2.4.2).

2.4.1 Bruk av konkrete visuelle mediatorer i matematikk

Det er tradisjon for å bruke konkrete visuelle mediatorer mye i begynneropplæring i matematikk, og gradvis gå over til de symbolske etter hvert som elevene blir eldre (Svingen, 2018). Konkreter brukes gjerne i matematikkundervisningen for at elever skal få visuell forståelse for matematiske prinsipper; å overføre det abstrakte til noe konkret. I kjerne-elementene for matematikk 1-10 sies det om representasjon, kommunikasjon og abstraksjon at «Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske.» Elevene må gjennom matematiske samtaler få mulighet til å bruke ulike matematiske representasjoner og kunne veksle mellom disse. De skal også få mulighet til å forklare og begrunne valg av representasjonsform. «Abstraksjon i matematikk innebærer at elevene gradvis utvikler en formalisering av tanker, strategier og matematisk språk. Utviklingen går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk og formelle resonnementer» (Udir, 2020).

Bruk av konkreter kan være gunstig for læring. I konstruktivistisk læringsteori blir tretrinnsmodellen sagt å være effektiv for å lære elever å løse oppgaver på et abstrakt nivå: undervisningen starter med det konkrete, videreføres til det semi-konkrete (som bilder, figurer, diagrammer osv., det Sfard kaller ikoniske mediatorer), og til slutt utfører elevene matematikkoppgaver med abstrakte symboler. Å se et abstrakt fenomen visualisert ved bruk av fysiske representasjoner, gjør at flere sanser tas i bruk, og kan ifølge et slikt læringssyn gi bedre muligheter for læring (Imsen, 2005).

Derimot viser flere forskningsprosjekter til motstridende resultater ved bruk av konkreter i matematikk (Carbonneau et al, 2013; Halvorsen og Waaler, 2011; Laski et al, 2015). Halvorsen og Waaler (2011) finner gjennom en litteraturstudie, at forskningen er tvetydig angående effekten av bruk av konkreter i matematikk. De studerer flere forskningsprosjekt der forfatterne stiller seg kritiske til bruk av konkreter fordi det kan forstyrre innlæringsprosessen, men de finner også bidrag som stiller seg positive til bruk av konkreter. De konkluderer med at konkreter kan ha en positiv effekt på barns matematikkforståelse, men at det bør tas hensyn til hvordan konkretene ser ut og hvordan læreren bruker dem. Dersom konkretene ikke er relevante for overføring fra konkret til abstrakt forståelse, kan bruk av konkreter være hemmende for læring. Konkretene bør representere noe av det som skal læres på det abstrakte plan og ikke lærdom om selve konkretene. Bruk av konkreter med irrelevante egenskaper kan ha begrenset effekt, fordi de kan bli tolket som enheter i stedet for symbolverdi, spesielt de perseptuelt rike. Alder kan også påvirke hvordan irrelevante egenskaper ved konkreter virker inn på overføring og læring.

Carbonneau et al. (2013) undersøkte også bruk av konkreter i matematikkundervisning, der de utførte en systematisk litteraturstudie og identifiserte 55 studier som sammenlignet undervisning med konkreter mot en kontrollgruppe der det bare ble undervist ved å bruke abstrakte matematiske symboler. Utvalget inkluderte elever fra barnehagenivå til universitetsnivå. De fikk resultater som antyder at konkreter kan fremme læring, under visse betingelser. For eksempel fant de at bruk av konkreter var minst effektiv for barn mellom tre og seks år, og at det var avhengig av temaet som skulle læres og undervisningsmetoder. Det kan gjerne virke overraskende at bruk av konkreter var minst effektiv for de minste barna, men foreslåtte forklaringer fra forskerne er at disse barna gjerne strever med forestillingen om at et objekt kan representere en gjenstand og samtidig et større matematisk begrep. Tydelig veiledning fra læreren i undervisning med konkreter, ga større effekter. Når det gjaldt temaet geometri (6 av studiene), fant Carbonneau et al. (2013) at de aktuelle studiene viste bedre gjenkalling hos elevene som ble undervist med konkreter, og en av studiene viste også bedre problemløsning hos disse elevene. De fant ikke slike fordeler når det gjaldt overføring av kunnskap.

Laski et al. (2015) presenterer fire generelle prinsipper som skal sørge for at konkreter fremmer læring når de brukes i undervisning med de yngste elevene. Det første prinsippet deres er å bruke konkreter konsistent, over en lengre tidsperiode. Barn trenger tid til å knytte sammen det konkrete materialet med det abstrakte begrepet det representerer. Dette blir man bedre til ved økende alder, men det viktigste er at man får muligheter til slike sammenligninger gjentatte ganger. Det andre prinsippet går på at man bør begynne med så konkrete representasjoner som mulig, og bevege seg over til mer abstrakte representasjoner over tid. Jo større likhet det er mellom konkretene og begrepene de representerer, jo mer sannsynlig er det at barn vil forstå forholdet mellom dem. Systematisk nedgang i bruk av konkreter kan øke barnets evner til å overføre kunnskap til nye og ukjente matematiske oppgaver. Det tredje prinsippet sier at man bør unngå konkreter som ligner hverdagslige objekter eller konkreter som har forstyrrende irrelevante egenskaper. Konkretene bør være så enkle som mulig, slik at all oppmerksomheten til barnet blir rettet mot relasjonen konkretet har med det matematiske begrepet det representerer.

Det siste prinsippet til Laski et al. (2015) sier at man skal forklare forholdet mellom konkretene og det matematiske begrepet godt. Det er urimelig å forvente at de yngste elevene skal se forholdet mellom konkretene og det matematiske begrepet som det representerer, uten tydelig veiledning. Å si og vise eksplisitt hvordan et konkret materiale kan representere den matematiske fremgangsmåten eller begrepet, kan hjelpe til med å rette barnets oppmerksomhet mot de relevante egenskapene ved konkretet. Dette kan igjen fremme læring ved at eleven kan fokusere på matematikken i stedet for å prøve å abstrahere forholdet mellom konkretene og matematikkbegrepene (Laski et al., 2015). Denne veiledningen fra læreren kan være både verbal og ikke-verbal, og det har vist seg at gester kan være spesielt effektive i å lede elevens oppmerksomhet til forholdet mellom to representasjoner, for eksempel konkreter og abstrakte symboler. Laski et al (2015) sier at det er viktig at man husker på at selv om konkreter er fysiske objekter, så krever det å forstå hvordan de representerer begreper, abstrakt tenkning. Et konkret er fortsatt bare en fysisk representasjon av et begrep, ikke begrepet selv. De mener at lærere i barneskolen bør tenke nøye over hvordan konkreter brukes i matematikkundervisningen, og at de bør søke informasjon fra forskningen i fagfeltet.

2.4.2 Volumdiskursen

Geometri kommer fra gresk, og betyr jordmåling. Det er en gren innen matematikken som opprinnelig handlet om romstørrelser, som punkter, linjer, kurver, flater, legemer og deres beliggenhet, form og størrelse (Aubert, 2018). Det er hovedsakelig denne type geometri som undervises på grunnskolen, selv om den moderne geometrien omfatter teorier som har utviklet seg ut over disse rammene. Volum er i matematikken romfang eller kubikkinnhold, og regnes i kubikkenheter som for eksempel cm^3 og m^3 (Aubert, 2020). I kjerneelementene i den nye læreplanen i matematikk under Matematiske kunnskapsområder står det at «Geometri er viktig for at elevene skal utvikle en god romforståelse» (Udir, 2020).

Volumforståelse eller egenskaper ved diskursen?

Geometri og volum er i motsetning til andre matematiske objekter sterkt knyttet til det fysiske rommet og konkrete objekter. Hong og Runnalls (2020) mener volummåling i geometri er veldig viktig, siden det er så knyttet til den fysiske verden.

Vestersjø (2002) skrev i sin hovedoppgave, som var en del av KIM5 – prosjektet: Kvalitet i matematikkundervisningen, om volumforståelse hos elever på vg1. Hun mener det kan se ut til at elever har lite erfaring med å forestille seg romlige figurer siden de viser vanskeligheter med å tolke og forstå illustrasjoner, og mistenker mangel på arbeid med praktiske problemer som øver opp forståelsen av volum. Elevene var veldig formelfokuserte (symbolsk visuell mediator), og de manglet forståelse for størrelser – «hvor stort noe er». I tillegg hadde de begrensede oppfatninger av dimensjon. Vestersjø (2002) hevder at misoppfatninger barn utvikler om volum kan skyldes tidlig innlæring av formler som kan føre til en automatisering der en ikke reflekterer over hvordan en kommer fram til svaret, og uten å tenke over at det er måltall for lengde, bredde og høyde en finner produktet av. Kirfel & Brucker (2009) mener at elever kan få svak begrepsforståelse dersom det er for rask overgang til indirekte måling (beregne volum ved formler), og at elevene derfor bør få god erfaring med direkte måling (feks å fylle en romfigur) siden utvikling av formelapparatet bygger på det. Outhred og Mitchelmore (2000) mener på den andre siden at måling er endimensjonalt og fører til en additiv prosess. For å finne volumet av det samme rektangulære prismet fra formelen er tilnærmingen tredimensjonal og fører til en multiplikativ prosess. De sier det kan hende at elevene ikke klarer å relatere konkretene til det matematiske begrepet de er ment å representere.

Det er blitt gjort mye forskning på elevers volumforståelse, og også flere studier av elevers forståelse av volum av rektangulære prismer (for eksempel Battista & Clements, 1996; Hong & Runnalls, 2020; Tekin-Sitrava & Isiksal-Bostan, 2014). Hong og Runnalls (2020) utførte en studie der de ville undersøke elevers begrepsmessige forståelse av volummåling og volumformelen for et rektangulært prisme ($V = l \cdot b \cdot h$), og ga anbefalinger om hvordan oppgaver kunne modifiseres for å gi slik forståelse. I studien identifiserte de tre viktige begrepsmessige ideer for å forstå volum: å fylle et tredimensjonalt rom med enheter av lik størrelse, lagstruktur, og det å knytte lagstruktur til volumformelen. Hong og Runnalls (2020) sier at elever ofte strever med å utvikle begrepsmessig forståelse av volummåling, og at de ofte bare bruker formelen for et rektangulært prisme uten å vite hvordan eller hvorfor den virker. Det er krevende for elever å forstå lagstrukturene som er nødvendig for å forstå volum begrepsmessig, og de har problemer med å fylle tredimensjonale rom med like store enheter. Det å måle volum krever ofte at man forstår mengde, for eksempel mengden med stoff som kan inneholdes i beholdere av ulik størrelse, og også den romlige strukturen til objektene. Forfatterne mener at elever trenger å se hvordan et rom kan fylles (med væske eller andre stoffer), eller hvordan et fast stoff kan pakkes eller fylles med enheter av samme størrelse, for å forstå volumbegrepet. Uten denne grunnleggende kunnskapen om romstrukturer og det å fylle romfigurer, er det sannsynlig at elevene bruker formelen uten meningsfull forståelse.

Det er også flere studier som ser ut til å indikere en lav forståelse for volum og misoppfatninger blant elever. I studien til Tekin-Sitrava og Isiksal-Bostan (2014) ser det ut til at elevene som vet formelen, bruker den automatisk uten å vurdere andre løsningsmetoder. De mener også at undervisning av volum bør organiseres slik at elevene får erfaring gjennom konkrete materialer før de lærer formelen. Tekin-Sitrava og Isiksal-Bostan (2016, 2018) finner også resultater som tyder på at ungdomsskolelærere har svak forståelse for volum av tredimensjonale objekter. Disse studiene og tidligere forskning har fokusert hovedsakelig på elevene og deres mangel på forståelse, eller kunnskap og andre egenskaper hos læreren, og de representerer gjerne et syn på læring som *tilegnelse* av kunnskap.

I motsetning til disse studiene, har Tyskerud og Mosvold (2018) i sin studie et deltakerorientert syn på læring. De bruker det kommognitive rammeverket i en Lesson Study-kontekst der de analyserer lærer-elev samspill i arbeid med volum, med fokus på lærerens kommunikasjon. De ser spesielt på hvordan det matematiske objektet volum blir konstruert i lærerens diskurs, og hvilke diskursive *rutiner* elevene inviteres inn i. Lærerne i studien konkluderte at elevene hadde for lav forståelse da de ikke anvendte tidligere kunnskap, og de endret den matematiske oppgaven for å gjøre den lettere for elevene, i stedet for å endre på sin egen diskurs. Tyskerud og Mosvold (2018) mener at lærerne da utviser et tilegnelses-syn på læring, som om kunnskap er et reelt objekt som kan bli tilegnet og overført til bruk i andre kontekster. De foreslår en annen tolkning, ved å sette søkelyset på undervisningsarbeidet og kommunikasjonen til læreren, og ser heller elevene som deltakere i ulike matematiske diskurser. Da kan den tilsynelatende mangelen på forståelse hos elevene heller forklares som egenskaper ved lærerens diskurs. I denne diskursen var det lite fokus på å skape narrativer om matematiske objekter, og mer fokus på å invitere elevene til å utføre handlinger med matematiske symboler, som er karakteristisk ved bruk av rituelle rutiner i diskursen. Analysen deres viste også at det var et gap mellom diskursen lærerne *ville* invitere elevene inn i, og diskursen deres i praksis. De mener studien deres kan bidra til fagfeltet ved å identifisere viktige aspekter av kommunikasjonsarbeidet i undervisning av volum, og de prøver også å bidra med begrepsdanning og en påvirkning av den pågående utviklingen av en teori om læring som kommunikasjon.

I denne studien vil også volumdiskursen ses i lys av et kommognitivt rammeverk med fokus på hvordan læreren bruker de visuelle mediatorene; symboler, ikoner, konkreter og gester, for å realisere det matematiske objektet volum.

2.5 Studiens innramming oppsummert

Det sosiokulturelle perspektivet (2.1), der læring som deltakelse og mediering er sentralt, er utgangspunktet for den teoretiske innrammingen. Utviklingen skjer fra det sosiale til det individuelle, og en medierende hjelper (for eksempel lærer) kan utgjøre forskjellen for eleven i den proksimale utviklingssonen. Dette er et viktig prinsipp i utviklende matematikkopplæring (2.1.2), der det også legges vekt på undervisning på høyt nivå og teoretisk kunnskap. I Sfards (2008) kommognitive rammeverk (2.2) ses læring på som deltakelse (2.2.1) i matematiske diskurser (2.2.3), og målet er å individualisere matematiske objekter. Dette kan blant annet skje gjennom lærers visuelle mediering av symboler, ikoner, konkreter og gester. Disse mediatorene og semiotiske ressursene virker synkront sammen (semiotisk node) i en objektiviseringsprosess (2.3), og matematikkfaget karakteriseres mer enn andre fag, av bruk av flere ulike modaliteter for å mediere fagstoffet. Volumdiskursen (2.4.2) og volumobjektet er sterkt knyttet til det fysiske rommet og til fysiske, konkrete objekter (2.4.1), og derfor studeres lærerens bruk av visuelle mediatorer i sammenheng med hverandre og hvordan de inngår i volumdiskursen ellers.

Det kommognitive rammeverket (2.2) om visuelle mediatorer, med supplement fra det semiotiske (2.3) om ulike gesters form og funksjon, vil brukes i analyse og drøfting av begge forskningsspørsmålene. Karakteristikker ved UOM (2.1.2) og ved volumdiskursen (2.4), vil supplere rammeverkene i tolkninger og diskusjon, spesielt med hensyn til andre del av forskningsspørsmål 2. I metodedelen (kapittel 3) vil det gås nærmere inn på hvordan rammeverkene brukes som analyseverktøy.

3. Metode

For den kommognitive forsker, ses forskning på som en form for kommunikasjon, en spesifikk, veldefinert diskurs som produserer overbevisende narrativer som andre menneskelige praksiser kan bli mediert gjennom, endret og gradvis forbedret (Sfard, 2008). Forskning er altså en diskurs som er produsert med den intensjon at den skal skape godkjente narrativer som man kan bruke til å mediere og forbedre våre gjerninger. Ordet metode betyr opprinnelig «veien til målet» (Kvale & Brinkmann, 2015, s.140), og metode kan betegne «de regelmessige måtene vi bruker for å komme fram til visse påstander i en forskningsstudie» (Roth, 2007, s.xv). Ifølge Maxwell (2009) er metoden selve utførelsen, tilnærming og teknikk man bruker for å samle inn og analysere data, og har stor sammenheng med, og må tilpasses forskningsspørsmålet. Forskningsspørsmålet er hjertet i forskningsdesignet, som direkte påvirker og blir påvirket av de andre komponentene. Metodene man bruker må gjøre en i stand til å svare på forskningsspørsmålet. Roth skriver at «…the questions we ask drive the studies we design» (Roth, 2007, s.4), og Silverman (2011) legger også vekt på at metoden man bruker skal passe til forskningsspørsmålet, altså hva man vil finne ut.

Da vi i MERG2020 (Mathematics Education Research Group) ville studere det komplekse arbeidet med å lede matematiske samtaler, ble det derfor naturlig å bruke kvalitative metoder. Det ble også naturlig å bruke kvalitative metoder og en case-studie i denne masterstudien, da det tas utgangspunkt i et kommognitivt rammeverk for å analysere den matematiske diskursen. Dette gås mer inn på under forskningsdesign. I metodekapittelet gjøres det rede for studiens design, forskningsprosessen, utvalget, fremgangsmåte for datainnsamling og analytiske tilnærminger i forhold til Sfards kommognitive rammeverk om visuelle mediatorer og semiotisk supplement om gester. Til slutt vil studiens kvalitet drøftes, og det vil bli gjort rede for forskningsetiske vurderinger.

3.1 Forskningsdesign

Et forskningsdesign er en plan eller skisse for hvordan undersøkelsen legges opp, og beskriver retningslinjene for prosjektet. Det inneholder en beskrivelse av undersøkelsens hvem, hva, hvor og hvordan (Thagaard, 2018). Maxwell (2009) gir et forslag til en grunnleggende struktur i kvalitative forskningsdesign med en interaktiv modell, som inneholder komponentene mål, teoretisk rammeverk, forskningsspørsmål, metode og validitet. Han mener at i en kvalitativ studie bør forskningsdesign være en fleksibel, refleksiv prosess gjennom alle stadier av prosjektet, der alle komponentene pågår samtidig og påvirker hverandre gjensidig.

3.1.1 Forskningsprosjektet MERG 2020

Masteroppgaven tar utgangspunkt i datamateriale som ble innsamlet i MERG2020, som var en kvalitativ klasseromstudie gjennomført av seniorforskere og masterstudenter ved Universitetet i Stavanger våren 2020. Dette forskningsprosjektet hadde tittelen «Lede matematiske samtaler» og formålet var å studere det komplekse arbeidet med å initiere og lede matematiske samtaler. Fokuset var særlig på hvilke samtaletrekk lærere brukte og hvordan, og hvilke muligheter elevene fikk til å delta. I tillegg var det et fokus på hvilke krav dette komplekse undervisningsarbeidet stilte til læreren og et overordnet mål om å utvikle kunnskap om de utfordringene og kravene dette komplekse arbeidet stiller til lærere. Forskningsprosjektet var en del av emnet MUT 303-1: Studere Matematikkundervisning», som inngikk i en matematikkdidaktikkmaster, der fokuset var læring og undervisning av matematikk i skolen. Som studenter fikk vi i dette faget et praktisk innblikk i forskning som deltakere i et forskningsprosjekt, her MERG2020 (UiS.no, 2020).

3.1.2 Kvalitativ Case-studie

Begrepet kvalitativ blir ofte brukt om forskning som er basert på tolkning av datakilder som videoopptak eller transkriberte intervjuer. Formålet med kvalitativ forskning er å utvikle ny innsikt og forståelse gjennom å studere sosiale fenomener og prosesser i naturlige sammenhenger (Thagaard, 2018) – i denne studien er det klasserommet som er en naturlig sammenheng for elever og lærer. Et annet mål for kvalitativ forskningstilnærming er å beskrive kompleksiteten av et fenomen, og å få fram deltakerperspektivet. Da målet i denne studien er å undersøke bruk av visuelle mediatorer i den matematiske diskursen i klasserommet, kan et kvalitativt forskningsdesign være passende.

Case-studier er spesielle former for design innenfor kvalitativ forskning, der en eller flere avgrensede enheter studeres ved intensive analyser fra ulike datakilder. Hovedmålet er å få mye informasjon om de få enhetene man retter oppmerksomheten mot. Enhetene kan være for eksempel personer, grupper eller organisasjoner (Flyvbjerg, 2011; Thagaard, 2018). I case-studier går forskeren altså i dybden for å kunne forstå komplekse, sosiale fenomener, og tolkningen er basert på den konteksten de er en del av (Flyvbjerg, 2011; Yin, 2018). Yin (2018) mener at når man i problemstillingen har med spørreordet «hvordan» eller «hvorfor», når forskeren ikke har kontroll over hendelsene han studerer, men god tilgang til dem, og samtidig studerer hendelser som skjer i samtiden, så burde man velge å utføre en case-studie. Problemstilling i denne studien har spørreordet «hvordan», det var god tilgang til hendelsene i klasserommet, men ingen kontroll over dem. Det er også hendelser i samtiden som studeres, og case-studie er derfor en passende kvalitativ metode å bruke. I denne studien kan man se på lærers og elevers matematiske diskurs og interaksjoner, som casene og enhetene som studeres og analyseres. Det er avgrenset til én lærers undervisning og elevintervjuer, i et gitt tidsrom, i en spesifikk diskurs, volumdiskursen.

I en case-studie er viktige kilder observasjon, feltnotater og intervjuer (Yin 2018), og datamaterialet er utviklet fra både feltnotater, og videoopptak fra klasseromsobservasjon og intervjuer. I et slikt forskningsdesign kan problemstillingen videreutvikles gjennom prosessen, noe som gjør det mer fleksibelt (Thagaard, 2018), og problemstillingen i denne studien har blitt mer spesifisert underveis gjennom arbeid med det teoretiske rammeverket og analysen. Når fenomenet man studerer forstås som en teoretisk konstruksjon, og siktemålet for forskningen er spesifikt, brukes *disiplinert-konfigurativ tilnærming* til case-studier. Dette er fortolkende studier der forskeren bruker eksisterende teori for å forstå et spesifikt fenomen (Nevøy, 2004). I denne case-studien brukes eksisterende kommognitiv teori for å prøve å forstå og forklare hvordan bruk av visuelle mediatorer i den matematiske diskursen kan gi elever muligheter til læring. Nevøy (2004, s.13) sier videre at det blir som å finne svaret på en gåte, der utfordringen er å samle den empiriske variasjonen i fenomenet, som skal organiseres og forstås i lys av teorien. Forskningsprosessen skal være åpen og dynamisk, og studien fleksibel i utprøvingen av empiri og av teoretiske rammer som kan forklare empirien.

Styrken til studien kan da ligge i det valgte perspektivets relevans, og de siste tiårene har kommognitiv teori fått mye oppmerksomhet i matematikkdidaktisk forskning (Berger, 2013; ICMI, 2021; Gautam & Bjuland, 2021; Lavie et al., 2019; Presmeg, 2016; Sfard, 2008, 2017; Tyskerud & Mosvold, 2018). Med den kommognitive teorien, og synet på matematikk som en diskurs, har forskere innen matematikkdidaktikk fått en annen måte å forske på, og rammeverket åpner for å analysere den matematiske diskursen med operasjonaliserte begreper (Sfard, 2008). Presmeg (2016) har gjennomført en analyse av hvordan den kommognitive teorien er brukt i ulike bidrag til feltet, og mener teorien er bred nok til å være en brukbar teoretisk linse i flere ulike settinger.

3.1.3 Kommognitiv studie

«The commognitive researcher is to begin her report with showing what was done and said, rather than with her own story about it» (Sfard, 2008, s.277).

Sfard (2008) kaller forskning en form for kommunikasjon – en veldefinert diskurs som produserer overbevisende narrativer og utvikles for å mediere og forbedre vår praksis. Kommognitiv forskning er dialogisk, og det er viktig å få med seg helheten i det som skjer i det komplekse klasserommet. Det er diskursen som står i fokus og skal analyseres. Man kan se på hva som blir sagt, siden det ikke skal være noe skille mellom tenkning og kommunikasjon. Selv om vi ikke vet tankene bak de diskursive handlingene som vi observerer, kan man derfor allikevel analysere diskursen. For at man skal kunne analysere en diskurs, mener Sfard (2008) at diskursen må transkriberes ordrett, da variasjoner i ordbruk kan føre til ulik analyse. Transkripsjonen som presenteres i denne studien er normert til bokmål for å ivareta anonymitet, men det er jobbet hardt med å få transkripsjonen så ordrett som mulig, for å ivareta samme mening. Den kommognitive forskeren er interessert i ytringer, og skal akseptere dem for det de er, ord som skaper ens handlinger. Det å få oversikt over det innviklete forholdet mellom det som blir sagt og gjerninger som blir gjort, er det viktigste som forskeren skal rette oppmerksomheten sin mot. For å klare å gjøre det skikkelig, mener Sfard (2008) at forskeren må veksle på å være en observatør («outider») og en deltaker («insider») i diskursen som studeres.

3.1.4 Observasjon i klasserommet og forskerrollen

Når vi observerer, innebærer det at vi studerer sosiale situasjoner og systematisk iakttar hvilke handlinger deltakerne utfører (Thagaard, 2018) – i denne studien studeres diskursive handlinger. Observasjon er særlig godt egnet til å studere samhandling, og forskergruppen vår ville studere samhandling mellom lærer og elever i matematikk-klasserommet og i den matematiske diskursen mellom dem. Som observatører i klasserommet prøvde vi å bruke fullstendig observasjon (Thagaard, 2018). Vi prøvde å gjøre oss lite bemerket. Vi var i klasserommet der handlingen skjedde, men observerte fra sidelinjen uten å være deltakende. Vi hjalp for eksempel ikke elever når de rakk opp hånda. Thagaard (2018) skriver at når vi er godt kjent med feltet vi studerer, kan vi forstå situasjonene vi observerer, uten at vi deltar i miljøet. Jeg har jobbet som matematikklærer i 12 år, og er forhåpentligvis godt kjent med feltet og kunne forhåpentligvis også styre oppmerksomheten mot det som var relevant uten å være deltakende.

Postholm (2005) skriver at det er viktig at både forsker og de som blir forsket på er bevisst på den rollen de skal ha, og det kunne man tydelig se var tilfelle i form av at lærer forberedte elevene ved å si ting som at de skulle bare ha en helt vanlig matematikktime. Det er viktig at vi reflekterer over hvordan vi oppfattes av deltakerne i miljøet, selv om vi observerer fra sidelinjen. Vi må vurdere om de vi studerer blir påvirket av at de blir studert (Thagaard, 2018). Dersom en forsker vil være flue på veggen, bør ikke forskningsdeltakerne forstyrres (Postholm, 2005). Det er umulig å garantere at elevene ikke ble forstyrret i vår studie – noen elever var ganske opptatt av både forskningsteamet og videokameraene. Det kan også være at de oppførte seg annerledes, for eksempel snakket mer eller mindre, fordi det var flere til stede i klasserommet og at de ble filmet. Det er heller ikke utenkelig at læreren tok andre valg enn det hun pleier å gjøre, fordi hun visste at hun ble observert. Sfard (2008) skriver også at den kommognitive forskeren må huske på at personene man observerer kan tolke det forsker gjør som evaluerende eller korrigerende, selv om forsker ikke prøver å påvirke. Den kommognitive forskeren må derfor være bevisst på at hun er en deltaker av den observerte aktiviteten og ikke «bare en observatør» (Sfard, 2008, s.278).

Bruk av video som hjelpemiddel under observasjonen, kan gi muligheter for å analysere det vi ser, og ikke bare det vi hører eller leser. Det kan gi et bedre inntrykk av samhandling i klasserommet (Thagaard, 2018). Silverman (2011) beskriver hvordan videoopptak i kombinasjon med lydopptak, kan brukes for å studere forholdet mellom den verbale og ikke-verbale kommunikasjonen, som er viktig i denne studien. Sfard (2008) mener teknologien med lyd- og videoopptak kan gi ubegrensete muligheter for å se tilbake på tidligere hendelser, og det blir da lettere å bruke en «outsiders» perspektiv. Da kan forskeren tre tilbake fra hendelser og finne tolkninger som ikke er like de som ble skapt i det øyeblikket vi var deltakere. Videoobservasjon er derfor en hensiktsmessig innsamlingsmetode i en kommognitiv diskursanalyse. I vår studie ble det gjort video- og lydopptak fra matematikkundervisningen og intervjuene. Lærer bar en lydopptaker og det var et kamera foran og bak i klasserommet. Det at vi filmet undervisningen gjorde at vi bedre kunne få et helhetsbilde av det komplekse arbeidet som det kan være å lede matematiske samtaler, og det gjorde også at det var lettere å få med seg visuelle mediatorer som ble brukt, for eksempel gester, som vi også skulle notere i transkripsjonen. Sfard (2008) sier at det er viktig å få med alle deler av diskursen, et helhetlig bilde, og det var gjennomførbart ved å bruke videokamera.

3.1.5 Intervju

I et kvalitativt forskningsintervju prøver man gjennom en særegen samtale å forstå verden fra intervjupersonenes side, og å avdekke deres opplevelser. Målet er å produsere kunnskap, som konstrueres i interaksjon mellom intervjueren og intervjupersonen. I kvalitativ intervju-forskning er det få standardregler og prosedyrer, og Kvale og Brinkmann (2015) mener at det er et håndverk og en kunstform som læres gjennom praksis. Intervjuet ses altså både som en kunnskapsproduserende aktivitet, en sosial praksis og et håndverk. Man kan ha ulik grad av struktur i et intervju, men det er vanlig å bruke semi-strukturert intervju i kvalitativ forskning, der temaene er fastsatt på forhånd og intervjuguiden er delvis strukturert. Underveis kan man endre på rekkefølgen av spørsmålene og spør om flere detaljer (Thagaard, 2018).

I MERG2020 var intervjuene *semi-strukturerte*; vi hadde en intervjuguide (se vedlegg 5) med noen spørsmål klar på forhånd, men rekkefølgen ble gjerne endret i løpet av intervjuet, og alle spørsmålene ble heller ikke stilt. Silverman (2011) mener at målet med å få en autentisk forståelse av intervjupersonens erfaringer, gjøres best med åpne spørsmål. Vi prøvde å bruke åpne spørsmål, da det kan oppmuntre til å fortelle og dele erfaringer. Vi prøvde også å følge opp med spørsmål om konkrete hendelser etter generelle spørsmål, som Thagaard (2018) mener er viktig for å forstå intervjupersonens vurderinger. Vi måtte være åpne for at elevene/lærerne kunne trekke inn andre tema i samtalen enn de vi hadde tenkt ut, og prøve å styre samtalen i en retning som var innenfor vårt fokus (Postholm, 2007). Siden vi filmet intervjuene, kunne vi rette oppmerksomheten mot det som ble sagt, være i situasjonen og stille oppfølgingsspørsmål.

I studien gjennomførte vi både elevintervjuer og lærerintervju. I elevintervjuene var det spesielt viktig at vi kunne knytte konkrete hendelser til spørsmålene; et eksempel på dette kan være at vi brukte konkrete oppgaver som elevene hadde hatt i matematikkundervisningen tidligere, og vi spurte også spørsmål som omhandlet konkrete hendelser fra undervisningen. Intervjusamtalen har et asymmetrisk maktforhold, der intervjuer er i en maktposisjon og definerer situasjonen ved å bestemme temaet og fremdriften for samtalen. Intervjueren har også monopol på å fortolke. Når intervjupersonene er barn, vil denne asymmetrien bli enda større. Intervjuer bør reflektere over den rollen makt spiller i produksjonen av intervjukunnskap (Kvale & Brinkmann, 2015). For å forbedre denne asymmetrien kan man åpent formidle positive tilbakemeldinger til det elevene forteller. Det er intervjuer som har ansvar for å utvikle tillit, lytte oppmerksomt og tilpasse situasjonen. Siden studien tok utgangspunkt i et miljø som var kjent for forskergruppen, var det ikke så stor sosial avstand mellom lærer og intervjuere. Intervjuerne var også yngre enn læreren, og kan ha bidratt til at læreren følte seg trygg (Thagaard, 2018). Disse intervjuene med elevene og læreren kan gi tilleggsinformasjon om uklarheter i observasjon, og en bedre forståelse av hendelser i klasserommet.

3.2 Studiens utvalg

Siden utvalget i kvalitative studier er relativt lite, er det viktig at utvelgingsprosessen er hensiktsmessig for problemstillingen slik at data-analysen kan gi forståelse for det som studeres. Når det gjelder for eksempel strategisk utvelging, så baseres det på at vi velger personer som har egenskaper eller kvalifikasjoner som er strategiske i forhold til problemstillingen. Et tilgjengelighetsutvalg er når vi bruker en utvelging av personer som er villige til å være med, rekrutteringen er basert på selvseleksjon (Thagaard, 2018).

Utvalget i MERG2020 var et strategisk tilgjengelighetsutvalg, der utvalget var strategisk ved at deltakerne hadde egenskaper som var relevante for problemstillingen og tilgjengelig ved at fremgangsmåten for å velge ut deltakerne var basert på at de var tilgjengelige for oss (Thagaard, 2018). Utvalget besto av strategisk valgte lærere og deres matematikk-klasser, en lærer på 1.trinn og en lærer på 4.trinn. De to lærerne ble rekruttert gjennom universitetets praksisnettverk, og det var lærerne som ble valgt strategisk fordi det var grunn til å tro at de hadde et spesielt fokus på å utvikle gode samtaler i matematikk-klasserommet, mens elevene ble utvalgt i kraft av å være i de valgte lærernes klasser.

Universitetet hadde altså et samarbeid med skolen, og lærerne og elevene i studien var frivillige deltakere. Siden utvalget ikke er basert på utvalgsseleksjon som sikrer tilfeldig utvelging, kan utvalget kanskje være skjevt eller ikke være representativt for andre skoler, elever eller lærere. Det er for eksempel en tendens til at tilgjengelighetsutvalg representerer utvalg med personer som er fortrolig med forskning og har høyere utdannelse (Thagaard, 2018). Hvilken betydning kan slike skjevheter ha? En eller få tilfeller kan være relevant og interessant i seg selv, selv om vi ikke kan generalisere til alle skoler, elever og lærere i Norge.

Som Silverman (2011) skriver, er ekthet, eller det at forskningen er autentisk, mer relevant enn utvalgsstørrelsen i kvalitativ forskning.

Undervisningstimene og intervjuene som episodene i *denne* studien er hentet fra, er fra 4.trinn, der de er omtrent 20 elever i hver av de tre klassene. Læreren deres har vært lærer på samme barneskolen i 13 år, og hun har undervist disse elevene siden de startet på 3.trinn. På denne skolen skal matematikk undervises etter prinsipper for UOM, Utviklende Opplæring i Matematikk, som læreren har fullført et fireårig opplæringsprogram i.

UOM baserer seg på Zankovs (1977) fem undervisningsprinsipper som vist i det teoretiske kapittelet. Da formålet med MERG2020 var å studere det komplekse arbeidet med å initiere og lede matematiske samtaler, passet det godt overens med de undervisningsprinsippene denne læreren underviste etter. Det prinsippet som er mest relevant for min studie av visuelle mediatorer, er 2) Teoretisk kunnskap har ledende rolle. Det legges vekt på å lære begreper og abstrakte uttrykk. Det legges mindre vekt på forklaring og drill, og fokus på konkrete objekt blir tonet ned til fordel for abstrakte begrep og symbol (Gjære & Blank, 2019; Moe & Moe, 2016; Zankov, 1977).

3.3 Datainnsamling

Forskergruppen i MERG2020 besto av tre erfarne seniorforskere og 17 mastergradsstudenter som samlet inn de kvalitative forskningsdataene i en 1.trinnsklasse og tre 4.trinnsklasser på en barneskole over to uker på senvinteren. To lærere var deltakere i MERG2020-studien, og alle deres matematikktimer over de to ukene ble studert. I denne studien er fokuset på undervisning og intervjuer av 4.trinns elever og læreren deres. Denne avgrensningen grunner i at det er temaet volum som setter føringer for episodene som er valgt. Forskningsdata ble samlet inn i form av feltnotater, lærerintervjuer, gruppeintervjuer av små elevgrupper, og klasseromsobservasjoner. Det ble som sagt gjort video- og lydopptak fra matematikkundervisningen og intervjuene. Lærer bar en lydopptaker og det var et kamera foran og bak i klasserommet. Det bakerste kameraet skulle følge lærer og hennes diskurs, og få med seg det som ble skrevet på tavla. Kameraet som sto framme i klasserommet skulle filme elevene og fange opp deres diskurs. Prosjektleder fordelte filmingsarbeidet på studentene, slik at alle deltok, og det var 2-3 masterstudenter og en seniorforsker i hver time. I tillegg til videokameraene hadde vi et vanlig kamera som vi brukte til å ta bilde av elevarbeid. I forkant av studien på skolen, ble vi studenter delt inn i grupper der vi samarbeidet om å lage intervjuguider, og alle studentene var også med på ett intervju. Da vi laget intervjuguiden fikk vi gode råd fra seniorforskerne, og forslag til intervjuguide ble også kvalitetssjekket av disse før studien startet.

3.3.1 Transkripsjon

«When carefully documented and transcribed, even the most common of everyday conversations prove to be a complex, multifaceted phenomenon, and an inexhaustible source of wonderings» (Sfard, 2008, s.xiv).

Å transkribere betyr å transformere, å skifte fra en form til en annen. Transkripsjoner er oversettelser fra talespråk til skriftspråk. Man kan si at transkripsjon er å gjøre om muntlig tale, fra for eksempel lyd- eller videoopptak, til skriftlig tekst. Det er prosedyren som trengs for å gjøre datamaterialet strukturert og tilgjengelig for analyse (Kvale & Brinkmann, 2015).

I MERG2020 ble transkripsjonsarbeidet fordelt mellom oss studenter. Vi fikk noen økter hver som vi skulle transkribere, og så skulle vi også kontrollere en annen students transkripsjon. Det at transkripsjonene blir kontrollert av en annen, og at vi sjekker om vi hører og ser det samme på tvers av ulike personer, kan øke reliabiliteten (Kvale & Brinkmann, 2015; Silverman, 2011). Jeg transkriberte for eksempel et intervju der jeg selv var intervjuer, og kan slik også ha lært litt om min egen intervjustil og sett rom for forbedringer. Når det er flere som deler på transkripsjonsarbeidet, er det viktig at de bruker samme skriveprosedyrer, slik at man kan gjøre språklige sammenligninger (Kvale & Brinkmann, 2015).

Vi fikk utdelt en felles transkripsjonsnøkkel (vedlegg 1) på forhånd av studien, og alle transkripsjoner ble normert til bokmål for å ivareta anonymiteten til deltakerne. Sfard (2008) mener, som skrevet i kapittel 3.1.3, at diskursen bør transkriberes ordrett, da variasjoner i ordbruk kan føre til ulik analyse. Så selv om transkripsjonen er normert til bokmål, er det jobbet hardt med å få transkripsjonen så ordrett som mulig, for å ivareta samme mening. Kvale og Brinkmann (2015) sier at konfidensialitetshensynet må vurderes i transkribering, samt spørsmålet om hva det vil si å gjøre en lojal skriftlig transkripsjon av intervjupersonens muntlige uttalelser. De mener at forsøk på ordrette transkripsjoner kan skape kunstige konstruksjoner som kanskje ikke er dekkende for hverken den muntlige samtalen eller den formelle skriftlige teksten, men dette må vurderes i forhold til hva transkripsjonen skal brukes til. Da transkripsjonen i denne studien skal brukes til en kommognitiv analyse og samtidig ivareta deltakernes anonymitet, er det vurdert at den måten det er gjort på er passende for formålet i studien.

Vi brukte alle samme transkripsjonsmal, strukturert som i tabelloversikten under:

Tabell 1 Transkripsjonsmal

Dato, X. Time, Ansvarlig for transkribering

Nr.	Tid	Hvem	Diskurs	Gestikulering	Kommentar
001					

Her ser vi at ytring nr. står helt til venstre, og deretter kommer tidspunktet for ytringen. Denne er regnet fra da det bakerste kameraet ble startet. I tabellen står det også hvem som sier ytringen, og hva som sies; diskursen. Vi skulle også ta med gestikuleringer og andre relevante kommentarer som for eksempel symboler som skrives på tavla. Her er det nok stor forskjell i hva den enkelte student anser som relevant, og det har derfor vært viktig å se videoene selv når det har vært relevant tema. Dette spesielt fordi det var de visuelle mediatorene som skulle analyseres; med for eksempel symboler som ble skrevet på tavla, ikoner som ble vist, og konkreter og gester som ble brukt. I studiens analyse vil i tillegg gestenes form kategoriseres etter McNeills (1992, 2005) dimensjoner av deiktiske, ikoniske, metaforiske og understrekende gester.

Silverman (2011) mener at reliabiliteten kan bli svekket dersom man utelater tilsynelatende trivielle ting som pauser, overlapp eller kroppsspråk. Men uansett hvor godt man prøver, vil en transkripsjon alltid være noe upresis, da for eksempel stemmeleie, ironi, og kroppsspråk kan være vanskelig å gjengi (Kvale & Brinkmann, 2015). Det var derfor viktig å gå tilbake til videoene i de relevante episodene som ble valgt ut, der det virket nødvendig for en helhetlig forståelse av diskursen.

3.3.2 Oversikt over datamateriale

For å få en oversikt over alt datamateriale og for å kunne velge ut relevante episoder for problemstillingen, ble all transkripsjon gjennomgått flere ganger. Underveis skrev jeg ned hva som var hovedmomentene i de ulike undervisningstimene og markerte der det var noe som var relevant for problemstillingen min. Siden temaene i 1.trinns klassen ikke var relevant for meg, har jeg valgt å ikke ta med det i oversikten over datamaterialet. Datainnsamlingen foregikk over to uker i tre klasser på 4.trinn med tolv undervisningstimer, fem gruppeintervju med elevene og ett lærerintervju med læreren som underviste de tre klassene. Undervisningstimene varte i 60 minutter. Timene og intervjuene står i reell kronologisk rekkefølge i tabellen under. Læreren hadde undervisning i de tre klassene på samme dag, og gjennomførte det samme opplegget i de tre klassene (markert ved samme farge i tabellen). Det som er markert i blått er det som kunne være relevant for problemstillingen min.

Tabell 2 Oversikt over innholdet i undervisningen på 4.trinn og intervjuer av lærer og elever i MERG2020

Undervisningstime 1 Undervisningstime 2 Undervisningstime 3	4A 4C 4B	Innholdet i timene var delt i tre. Første del gikk ut på å løse en volumoppgave i fellesskap. På tavla var det et bilde av et rett, rektangulært prisme, der sidene var oppgitt i ulike måleenheter (m, dm og cm). Oppgaven var å finne volumet, og deretter fikk de en drøftingsoppgave om volum. Det kom mange gode innspill fra elever under denne aktiviteten, og elevene virket engasjerte. Etter et avbrekk med dans, var neste oppgave en problemløsningsoppgave, som elevene skulle løse sammen med læringsvenn. Etter en stund ble den gjennomgått i fellesskap. Siste del av timen jobbet elevene individuelt på Multi-smartøving med oppgaver om måling og desimaltall. Lærer gikk samtidig rundt og sjekket leksene.
Lærerintervju	Lærer	Innleder med å spørre litt om lærers utdanning og erfaring i skolen. Hun snakker litt om hvordan det er å undervise utviklende matematikk, om læreboken, og om klassene hun underviser i, og om hvorfor hun vil jobbe på akkurat denne skolen. Hun blir også spurt om planlegging av timene, og snakker litt om viktigheten av en god relasjon med elevene. Lekser, mengdetrening og foreldresamarbeid er også et tema. Hun blir spurt om hva hun gjør for å tilrettelegge for matematiske samtaler i klasserommet, og hva hun mener kan være et hinder for henne i undervisningen. Hun snakker om at i en drømmeverden hadde hun hatt flere konkreter å jobbe med, og blir til slutt spurt om arbeid med den nye læreplanen.
Undervisningstime 4 Undervisningstime 5 Undervisningstime 6	4C 4A 4B	Øktene var også her delt i tre. Første sekvens var en dialog mellom lærer og elevene rundt en likning læreren viste på smartboard. Likning inneholdt parentes, og denne typen likning hadde ikke elevene sett før. Læreren ledet elevene gjennom oppgaven, og stilte spørsmål. Hun byttet mellom å spørre enkeltelever og å la dem snakke med læringsvenn. Til slutt prøvde de seg på nok et problem, som ble løst gjennom dialog med elevene. Her måtte elevene bruke tidligere lært kunnskap om volum. De siste 15 min. jobbet elevene i egen arbeidsbok. Læreren hjalp elevene og sjekket lekser.
Undervisningstime 7 Undervisningstime 8 Undervisningstime 9	4A 4C 4B	Lærer startet opp med en felles oppgave på tavla, der elevene skulle finne noe felles med tre rekker. Det var lite respons fra elevene. Etterpå fikk de i oppgave å fortsette på de tre rekkene, med tre nye tall. Det virket som om flere av elevene ikke helt forsto hva de skulle gjøre, men da det kom opp noen eksempler ble det lettere. Neste oppgave skulle gjøres sammen med læringsvenn. De skulle gjøre om de 2-3 benevningene på siste rekke til en benevning, for eksempel: 2 t og 30 min., til 150 min. Denne abstrakte tenkningen var vanskelig for elevene. Danseavbrekk midt i timen, før individuelt arbeid med Multi-smartøving samtidig som lærer gikk rundt og sjekket lekser.
Elevintervju 1	Elever 4C: Birger, Julius, og Marvin.	Litt innledningsvis om elevenes forhold til matematikk. Snakker litt om forrige time: å gjøre om måleenheter. Elevene arbeider med to oppgaver om likninger med parentes.

Elevintervju 2	Elever 4B: Steinar, Jesper, og Henrik.	Litt innledningsvis om elevenes forhold til matematikk. Elevene arbeider med en oppgave om likninger med parentes, og blir bedt om å sette prøve på svaret etterpå. Snakker deretter litt om hvordan en typisk matematikktime er.
Undervisningstime 10	4C	Lærer startet opp med en felles oppgave på tavla, der elevene skulle sammenligne to summer med tall og lengdeenheter. Det er samme summen, men uttrykt med ulike måleenheter. Etter felles gjennomgang, fortsetter elevene på oppgaven individuelt, mens lærer går rundt og veileder. Lærer snakker også om størrelser på lengder – om å bruke hensiktsmessig måleenhet. En elev kommer opp på tavlen og viser utregning. Etter et danseavbrekk, tar lærer opp seks multiplikasjonsstykker på tavlen. Hun ber elevene om å lage tre forskjellige grupper som de skal plassere produktene i. Lærer går rundt og veileder mens elevene jobber med dette. Deretter kommer tre elever opp på tavlen for å vise, og lærer spør hvorfor de gjorde det akkurat slik. I to av klassene jobber elevene med tanggrambrikker i slutten av timen.
Undervisningstime 11	4A	
Undervisningstime 12	4B	
Elevintervju 3	Elever (Ukjente navn)	Litt innledningsvis om elevenes forhold til matematikk. Snakker også litt om hva som var gøy i undervisningstimen dagen før, og om fordeler og ulemper ved gruppearbeid. Elevene arbeider med en oppgave der man skal sammenligne tre likninger.
Elevintervju 4	Elever 4C: Magnar, Valdemar og Andrine	Litt innledningsvis om elevenes forhold til matematikk. Elevene arbeider med en oppgave om volum av et rektangulært prisme, og det snakkes litt om størrelser og måleenheter.
Elevintervju 5	Elever 4B: Amandus, Fiona og Lisbeth	Litt innledningsvis om elevenes forhold til matematikk, og hvordan en typisk matematikktime er. Elevene arbeider med en oppgave om likninger med parentes, der oppgaven er delt inn i tre steg som skal sammenlignes. Snakker litt om hva elevene gjør når de møter utfordringer i matematikk. Elevene blir også bedt om å sette prøve på svaret. Til slutt snakker de litt om volum – hva det er, og arbeider med å finne volum av et rektangulært prisme.

Denne oversikten viser at de fleste timene er delt i tre deler, der det starter med en felles oppgave på tavla, og det kommer ofte en vanskeligere problemløsningsoppgave i del to. Læreren benytter jevnlig at elevene skal snakke med læringsvenn, og det er tydelig at diskusjon er viktig i undervisningen. Hun lar elevene komme med flere forslag og begrunnelser før hun eventuelt kommer med et forslag eller en løsning selv.

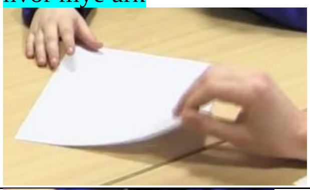
Med hensyn til fokus på bruk av visuelle mediatorer i undervisning av volum, er det undervisningstime 1-3, 4-6 og elevintervju 4 og 5 som er av særlig interesse i studiens analyse. Det vil også gis noen kommentarer på ytringer fra lærerintervju.

3.3.3 Identifisere og organisere episoder

Når episodene skulle identifiseres, var det temaet, volum, som satte føringer for første utvalgsprosess, da det var en undersøkelse om bruk av visuelle mediatorer i volumdiskursen som var utgangspunktet for problemstillingen. Wells (1999) definerer en episode som all diskurs som foregår i utførelsen av en aktivitet, eller en oppgave. I denne studien er episodene delt inn tematisk, og det kan gjerne være flere episoder i gjennomgang av en oppgave i plenum eller i et intervju. Grunnen til at det ble tema som la føringer, var at jeg under observasjon i noen undervisningstimer la merke til at lærer i undervisning av volum, ikke hadde planlagt noen bruk av konkreter. Som student i psykologi, pedagogikk og Praktisk Pedagogisk Utdanning tidlig på 2000-tallet, ble det innprentet hvor viktig det var å bruke konkreter, spesielt med barn i barneskolealder, og jeg var derfor overrasket over mangelen på dette i denne lærerens undervisning. Derfor ble det interessant å se på all bruk av lærerens visuelle mediatorer i volumundervisning, for å kunne se hvilke muligheter bruk av symboler, ikoner, konkreter og gester kan gi for læring i volum.

I neste utvalgsprosess av episoder, ble det viktig å se etter både eksempler på bruk, og mangel på bruk av visuelle mediatorer. Det var viktig å ha med både episoder med god bruk, og lite visuell mediering, for å eventuelt kunne se om det da kunne være noen forskjell i læringsmulighetene som elevene fikk. Da vi skulle utføre intervjuene med elevene, var jeg interessert i et av disse tilfellene fra undervisningstimene 1-3 om volum, der lærer ikke brukte konkreter på en måte som jeg hadde forventet. Vi brukte samme oppgave i to av intervjuene (Elevintervju 4 og 5), for å kunne høre på elevenes diskurs når de løste oppgaven, og håpet da å kunne si noe om hvordan elevenes diskurs eventuelt hadde endret seg av de læringsmulighetene de fikk av lærerens bruk av visuelle mediatorer. Disse intervjuene og undervisningstimene er det derfor valgt flere episoder fra. Det er også valgt episoder fra undervisningstime 4-6, der det brukes mer konkreter. Underveis i analysearbeidet tok jeg bilder av gester, symboler, konkreter og ikoner, for slik å kunne se hvor det var mye bruk av disse, og hvilke sekvenser som var mest relevante. For å vise til litt av arbeidet med analysen underveis, kommer et lite utdrag fra elevintervju 5, der jeg først har vært gjennom og uthevet i farger det jeg syns er viktig og skrevet eventuelle kommentarer om visuelle mediatorer, og deretter har jeg gått gjennom transkripsjonen på nytt og lagt til bilder av de visuelle mediatorene. Dette er midt i analyseprosessen og derfor en uferdig tabell.

Tabell 3 Utdrag fra analysearbeid av elevintervju 5

319		Lisbeth	[Og] liksom hvor mye		Deiktisk: Peker på pennen
320		Amandus	Ja for eksempel ett ark		Tar frem arket Konkret
321		Fiona	Hvor mye det er rundt, eller sånn		
322		Amandus	På ark, (.) på et ark så er det, så er det areal, [men hvis for eksempel, hvis det er en terning]		Konkret
323		Lisbeth	[*Og den måle du begge sidene*]		
324	13:53	Intervjuer	Men arealet, men hvis jeg sier arealet av et eller annet, hva, er det hvor mye ark du har?	arealet  hvor mye ark 	Gester på arket: Ikonisk Tar hånden på arket og tar tak i arket for å vise hvor mye.
327		Lisbeth	[Ja det er hvor mye], (.) hvor, for eksempel hvor mye du kan tegne på det arket		Gester: Sirkelbevegelser med hånden over arket
328	14:01	Intervjuer	Hvor mye du kan tegne på arket, hvor mye plass det er på		Konkret + Gester: dabber hånden opp og ned: understrekende gester?

Som sagt er episodene delt inn tematisk, og eksempler på episoder kan være «Like enheter» (Episode 1) eller «Fra hele klasserommet til ganske lite» (Episode 2). Der det er mulig vil jeg bruke samme tema for elevintervjuet som i klasserommet, for å studere samsvarende episoder.

Episodene er deretter delt inn i mindre sekvensutdrag som ikke er så lange, for å få en naturlig flyt i resultatdelen med utdrag fra episoder og analyse. Flere steder har jeg fjernet mindre viktige replikker innimellom, der for eksempel elevene spør lærer om noe helt annet enn det som er agendaen for øyeblikket (For eksempel om de kan få en ny kladdebok). Dette er gjort for at det ikke skal bli så tungt å lese lange utdrag i analysen, og for at poengene skal komme tydeligere frem. Eksempel på dette kan ses i vedlegg 6.

3.4 Analytisk tilnærming

Analysearbeidet startet som sagt med en gjennomgang av all transkripsjon fra undervisning og intervjuer med lærer og elever på 4.trinn, der fokuset var å finne episoder som omhandlet volum og derfor kunne belyse problemstillingen min. I diskursanalysen tok jeg utgangspunkt i episoder i plenumsundervisning av volum der jeg brukte Sfards (2008) kommognitive rammeverk med støtte i semiotisk-kulturell teori som analyseverktøy for å undersøke lærers bruk av visuelle mediatorer i den matematiske diskursen.

Dersom det ble brukt for eksempel algebraisk notasjon eller matematiske formler, som $V = l \cdot b \cdot h$, ble dette kodet som symboler. Ikoniske mediatorer ble det kodet som dersom det ble brukt for eksempel grafer, diagrammer, tegninger eller bilder. Når lærer eller elev brukte en konkret gjenstand som for eksempel tredimensjonale romfigurer eller meterstav, ble det kodet som en konkret mediator. Dersom lærer/elev brukte kroppsbevegelser med hodet eller armene i sin matematiske diskurs som hadde sammenheng med det matematiske innholdet, ble det kodet som gester. Det kommognitive rammeverket er supplert med et semiotisk-kulturelt rammeverk og det er tatt utgangspunkt i McNeills (1992, 2005) kategorisering av gester, for å se etter ulik bruk av gester i diskursen. Edwards (2003, 2005, 2009) ikonisk-symbolske gester er ikke med i kategoriseringen, da disse ikke ble funnet i resultatene fra volumdiskursen. McNeills metaforiske gest er videreutviklet av Arzarello et al. (2015) for bruk i matematikkdiskursen, og den deiktiske gesten deles inn etter Bjuland et al. (2008) sine kategoriseringer der de har definert repetert peking, etterfølgende peking, holdepunkt, glidende peking og sirkulær peking. Gester er kategorisert i henhold til kategoriseringen i teorikapitlet (Kapittel 2.3.2).

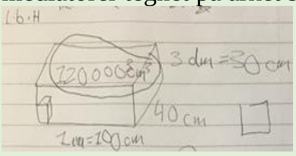
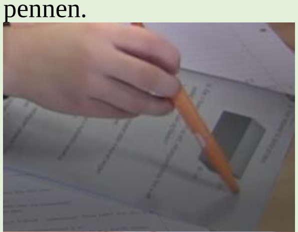
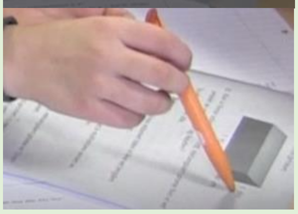
Tabell 4 Kategorisering av gester.

Type gest		**Beskrivelse**	**Eksempel**	**Referanse**
Emblem		Faste gester for et uttrykk. Kulturelt betinget.	Tommel opp for OK. Nikk med hodet som en bekreftelse/ja.	McNeill (2005)
Deiktisk: Peking med pekefinger, andre kroppsdeler eller objekter som holdes.	Repetert	Repetert peking på samme objekt.	Lærer peker på symboler eller ikoner på tavla eller drar finger/tusj under noe som står skrevet på tavla.	McNeill (1992, 2005), og inndeling av Bjuland et al. (2008).
	Etterfølgende	Etterfølgende peking av samme person på forskjellige objekter, for eksempel figur og symbol, eller lengde og bredde i et prisme.		
	Holdepunkt	Peking der finger e.l. holdes på objektet mer enn tre sekunder.		
	Glidepeking	Peking med kontinuerlig bevegelse av finger eller hånd innen eller mellom to semiotiske representasjoner, gjerne lineær langs en linje.		
	Sirkulær glidepeking	Sirkulær bevegelse med hånden, og gjerne utstrakt pekefinger.		
Ikonisk		Gester som refererer til noe konkret og fysisk.	Lærer later som hun holder en skumgummiterning mellom fingrene.	McNeill (1992, 2005)
Metaforisk		Gester utviser abstrakte matematiske begreper.	Lærer viser tredimensjonale geometriske figurer som prisme med hendene sine.	McNeill (1992, 2005) og Arzarello et al. (2015)
Understrekende		Gjentatt prikking på tavlen eller rytmiske poengterende bevegelser.	Lærer streker gjentatte ganger under et symbol på tavla.	McNeill (1992, 2005)

De visuelle mediatorene symbol, ikon og konkreter, er relativt ukompliserte å identifisere. Men det kan være utfordrende å tolke bevegelser som blir gjort med kroppen og hendene. Det kan for eksempel være vanskelig å skille mellom ikoniske og metaforiske gester, hvis man ikke vet om det personen prøver å formidle er et abstrakt eller et konkret objekt. Dette må selvsagt ses i sammenheng med hele diskursen. Det kan også være vanskelig å skille mellom glidende pekegester og understrekende gester, og det kodes derfor som glidende peking dersom pekingen glir eller understreker noe én gang, og som en understrekende gest dersom det understrekes flere ganger. Repetert peking er også vanskelig å skille fra understrekende gester, og må ses ut ifra sammenheng med diskursen ellers. Men som hovedregel kodes det som repetert peking når det er peking involvert med pekefinger eller tusj e.l., og som en understrekende gest dersom det brukes tusj til å streke under med slik at det kommer en strek/prikker eller at man bruker hele hånda eller lignende.

I resultatdelen er transkripsjonsanalysene strukturert i en tabell lignende malen vi fikk utdelt, men her er også inspirasjon fra Berger (2013) der det er tatt med en ekstra kolonne til visuelle mediatorer, og lagt til noe: Endring i diskurs? Den siste kolonnen med endring i diskurs, er relevant der elevers diskurs før og etter bruk av visuelle mediatorer i undervisning av volum kan sammenlignes. Veldig relevante deler av ytringer er uthevet, og det brukes like farger på utdragene fra samme episode. Bilder av gester er tatt med der det er mulig uten å kompromittere personvern. Se eksempel i tabell 5 under.

Tabell 5 Eksempel på strukturering av transkripsjon og analyse av visuelle mediatorer og endring i diskurs

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer	Endring i diskurs?
189	Magnar	≈Og tre desimeter det er tretti, fordi en desimeter er ti centimeter (.) så da er det tretti. Førti centimeter er helt vanlig, og den er hundre.	**Ikonisk:** Bilde av prismet i oppgaven vises på ark på bordet foran elevene.  **Ikoniske og symbolske** visuelle mediatorer tegnet på arket sitt  **Deiktisk; Repetert Sirkulær glidepeking** rundt 3 dm med pennen.   **Peker** også raskt på 40 cm og 1 m synkront med talen.	Magnar gjør nå av seg selv om fra desimeter og meter til centimeter, for å få alle lengdene i samme enhet.
190	Intervjuer1	Men hvorfor gjør du dem om?		
191	Magnar	Så det blir lettere. Og ehm		Det kan virke som at Magnar vet hvordan, men ikke hvorfor (rutiner; **ritualisering**). Han vet at det blir lettere, men det virker ikke som han vet at man *må* ha samme enheter.
192	Intervjuer1	Ja, hvorfor blir det lettere da?		

193	Magnar	Fordi da kan jeg ta uhm førti ganger hundre som er fire hundre, ganger tretti.	**Deiktiske gester: repetert peking** på 40 cm, konkret **peking** på 1m, **Sirkulær glidepeking** rundt 40 cm igjen, og deretter konkret **peking** på 3 dm.	Han gjør samme multiplikasjonsfeil som i plenumsundervisningen.

Hva er så en meningsfull analyseenhet? For mitt formål var det viktig å få med både plenumsundervisning og elevenes diskurs i elevintervjuet. Der det var mulighet for det, er samsvarende episoder fra elevintervjuer analysert for å se om det kunne være indikasjoner til hvordan lærers bruk av visuelle mediatorer i plenumsdiskusjonen, kunne gi muligheter til endringer i elevenes matematiske diskurs sett i intervjuet. Disse samsvarende episodene kan være med å gi et bredere grunnlag til å kunne si noe om bruk av visuelle mediatorer og indikasjoner på endring i diskursen, som kanskje kan øke studiens validitet og reliabilitet. Det diskuteres hvilke læringsmuligheter elevene får som deltakere i klasseromsdiskursen og om det kan være indikasjoner på endring i elevers diskurs, men det er umulig å konkludere over enkeltelevers læring. Mer om studiens kvalitet følger i neste delkapittel.

3.5 Studiens kvalitet

Et av formålene ved kvalitativ forskning er å vurdere gyldigheten av det fenomenet som studeres. Da formålet med kvalitativ forskning også er å forstå, er fortolkning sentralt. Det vil si at i tillegg til beskrivelser, er vi interessert i tolkninger av fenomenene, såkalte «tykke beskrivelser». Og siden kvalitativ forskning har en fortolkende tilnærming, kan det være utfordrende å vurdere forskningens troverdighet, som blant annet er basert på *reliabilitet* og *validitet* (Thagaard, 2018). Episodene som er brukt i studien er tatt fra *ett* tema, og det er prøvd å velge forskjellige og representative episoder som kan belyse ulike sider ved bruk av visuelle mediatorer i undervisningen. Samtidig er det store begrensninger ved den korte tiden det er observert i klasserommet, og å ta episoder i undervisningstimer ut av sin kontekst. Analysen er et forsøk på å bruke Sfards rammeverk på det begrensede materialet som er samlet, og med den begrensede forkunnskap jeg måtte ha om lærer, elever og den komplekse konteksten i deres klasserom.

3.5.1 Reliabilitet

Reliabilitet kan knyttes til spørsmålet om forskningens pålitelighet – hvordan vi redegjør for utvikling av data. Silverman (2011) argumenterer for at reliabiliteten kan styrkes ved å gjøre forskningsprosessen mer gjennomsiktig (transparent). Dette kan gjøres ved hjelp av detaljerte beskrivelser av strategier og analysemetoder slik at forskningsprosessen kan vurderes. Forskningsdesignets transparens kan også styrkes med en redegjørelse av hva som er forskerens tolkninger og hva som er primærdata, selv om dette er utfordrende når forsker har sin forforståelse (Thagaard, 2018).

Det er forsøkt å gi gode, presise beskrivelser når datamaterialet, datainnsamlingsmetoder og den analytiske tilnærmingen er presentert, slik at denne forskningsprosessen skal kunne vurderes av andre. Det skal også være tydelig i tabellene i analysen hva som er transkripsjon («Diskurs») og hva som er tolkninger («Visuelle mediatorer» og «Endring i diskurs?»). Som sagt under transkripsjonskapittelet, så ligger det gjerne allerede tolkninger i transkripsjonen, men det at vi var flere som arbeidet med transkripsjonene, med felles transkripsjonsnøkkel og kontroll av hverandre, kan øke reliabiliteten. Pauser, overlapp, kroppsspråk o.l. er også tatt med, og var en del av den felles transkripsjonsnøkkelen og -malen, slik at reliabiliteten skal bli styrket (Silverman, 2011). Tolkningene har jeg stort sett vært alene om, og reliabiliteten her kan derfor være lavere, men de er også vurdert av og diskutert med veileder, som kan øke reliabiliteten.

Det at vi brukte videoopptak i kombinasjon med lydopptaker kan også styrke reliabiliteten ved at transkripsjonen ble mer korrekt, og at vi ikke måtte rekonstruere diskursen i ettertid av observasjon (Silverman, 2011). Det at vi kan se og høre video og lydfil om igjen, kan gjøre at vi legger merke til flere faktorer, og at vi får et bedre bilde over situasjonen enn vi ville fått hvis vi ikke kunne se eller høre situasjonene flere ganger. De to kameraene og lydopptaker ble også plassert slik at vi skulle få med oss mest mulig. I denne studien er analysen basert både på transkripsjon, video-, og lydopptak. Der det for eksempel var vanskelig å høre hva som ble sagt på videoen, ble lydopptaker sjekket for å få et mest mulig korrekt bilde av diskursen. Det var noen tilfeller der video eller lydfil også ble sjekket når det sto i opprinnelig transkripsjon at det var utydelig tale, og dette ble rettet opp i. Når det gjaldt bruk av de visuelle mediatorene, var det viktig å dobbeltsjekke hvordan for eksempel gester ble utført og symboler ble skrevet. Det er også inkludert flere bilder av de visuelle mediatorene i analysen.

3.5.2 Validitet

Validitet knyttes til spørsmålet om forskningens gyldighet – undersøker studien det den skulle undersøke? Hvor gyldige er de tolkningene som forskeren gjør? Når det gjelder å styrke validiteten, kan det gjøres ved å legge vekt på teoretisk transparens, at forskeren beskriver teoretisk ståsted som er grunnlaget for tolkningene hans. Validiteten styrkes av en kritisk gjennomgang av analyseprosessen, og forskeren kan forsterke verdien av tolkningene sine ved å vise til at andre tolkninger er mindre relevante (Kvale & Brinkman, 2015; Thagaard, 2018).

Maxwell (2009) beskriver to typer validitetstrusler; *Forsker-bias* referer til hvordan datasamling eller analyse påvirkes av forskers teori, verdier eller forforståelser; og *reaktivitet* viser til effekten som forskeren har på settingen eller deltakerne. Det å eliminere denne påvirkningen, sier Maxwell er umulig, men målet bør være å forstå og bruke påvirkningen produktivt. Når det gjelder reaktivitet, prøvde vi som observatører i klasserommet å innta roller som fullstendig observatører, da vi var i klasserommet der handlingen skjedde, men observerte fra sidelinjen uten å være deltagende (Postholm, 2005). Men som Sfard (2008) skriver, så kan de vi observerte ha tolket det vi gjorde som evaluerende eller korrigerende, selv om vi ikke prøvde å påvirke. Denne påvirkningen kan tenkes å være større i intervjuene, der vi var deltakende, men vi prøvde som sagt å redusere denne betydningen ved å skape en trygg atmosfære, tillit og ved å bruke åpne spørsmål.

Når det gjelder forsker-bias møter forskeren forskningen med sin teoretiske bakgrunn og sine arbeidshypoteser. Det kan slik være utfordringer knyttet til forskerens *forforståelse*. Forskeren møter et gitt fenomen med sine egne forforståelser, bakgrunnskunnskap, teoretiske briller og fordommer. Dette er bestemt blant annet av språk, trosoppfatninger, forestillinger, holdninger og erfaringer. Forforståelse er nødvendig for forståelse, for vi møter verden med visse forutsetninger. Når vi skal tolke meningsfulle fenomener, må vi ha en idé om hvor vi skal starte (Gilje & Grimen, 1995). Men forskeren bør være oppmerksom på sin egen forforståelse, slik at fortolkningsmulighetene ikke begrenses.

Fortolkningene i denne studien baserer seg på eksisterende kommognitiv teori og kommognitivt rammeverk, noe som ifølge Maxwell (2009) kan øke validiteten. Men, vi hadde også på forhånd av studien blitt undervist i ulike rammeverk, der hovedtyngden lå på det kommognitive rammeverket og det å lede matematiske samtaler. Teori og arbeidshypoteser kan dermed bli som briller eller forstørrelsesglass som forskningen ble opplevd gjennom. Slik kan observasjonene ha blitt påvirket av forforståelsen jeg møtte feltet med (Postholm, 2005). Hva vi finner avhenger altså av hva vi leter etter. Thagaard (2018) mener også det er viktig at forskeren beskriver sin tilknytning til miljøet, slik at den kritiske leser har mulighet til å vurdere tolkningene i lys av forskers bakgrunn. Jeg har undervist matematikk i videregående skole i tolv år, og tidligere erfaring kan kanskje ha påvirket forskerdiskursen min.

Det å bruke flere innsamlingsmetoder, triangulering, kan også øke validiteten til en studie (Maxwell, 2009). I studien vår brukte vi både observasjon, feltnotater, bildekamera, videokamera og lydopptaker for å samle informasjon i intervjuer og i klasseromsobservasjon.

Som skrevet i innledningen av validitetskapittelet, kan man øke validiteten ved en kritisk gjennomgang av analyseprosessen og forsterke verdien av tolkningene sine ved å vise til at andre tolkninger er mindre relevante (Thagaard, 2018). Dette er et spørsmål om studiens *indre validitet*, og det er forskers oppgave å gjøre rede for ulike tolkningsmuligheter (Kleven & Hjardemaal, 2018). Det er umulig å si helt sikkert om mine tolkninger er de mest relevante. Jeg prøver i analysen å være kritisk og å vurdere flere mulige tolkninger, og jeg har også drøftet for eksempel tolkning av gester med veileder gjennom analyseprosessen, og vist hvordan de ulike gestene tolkes i analytisk tilnærming (3.4). Andre tolkninger og forståelser kan være bedre i en annen sammenheng, men jeg har vurdert at disse tolkningene er best ut ifra mitt datamateriale.

I analysen er det også med diskurs fra både klasserom og intervju, i det som kalles samsvarende episoder, da elevene blir presentert for en av de samme oppgavene i intervjuet som i klasserommet. Det pekes på konkrete faktorer ved den matematiske diskursen, som er tydelig definert av Sfards rammeverk (2008) og derfor relativt lett å peke på, unntatt gester (se 3.4). Det å analysere muligheter for læring, ved utvikling og endring i elevenes matematiske diskurs, krever mer tolkning, men kan begrunnes teoretisk ved hjelp av operasjonaliserte begreper fra rammeverket. Om det er bruken av visuelle mediatorer i lærerens diskurs som har ført til eventuelle endringer i elevenes diskurs, er umulig å vite. Her er det mange faktorer som kan spille inn, for eksempel de andre faktorene i diskursen, elevens oppmerksomhet i timen, muligheter for hjelp hjemme osv., men ved å se på ulike tilfeller av endring i elevenes diskurs kan man sannsynliggjøre at bruken av de visuelle mediatorene kan ha hatt en effekt.

Validitet kan knyttes til gyldigheten av forskerens tolkninger ut fra datamaterialet. Det gjøres tolkninger allerede i transkripsjonen, da det er vanskelig å være objektiv i oversettelse fra muntlig til skriftlig form (Kvale & Brinkmann, 2015). Som sagt i kapittel 3.3.1 om transkripsjon, er det jobbet hardt med å få en ordrett oversettelse da diskursen skal analyseres i detalj. Men det er også gjort valg på hva som skal tas med og hva som skal utelukkes med tanke på relevans for problemstillingen.

Indre validitet er et lokalt fenomen for den aktuelle studien, og det gir dermed ingen garanti for at resultat og tolkninger vil være gyldige i en annen kontekst enn i det tilfellet som er studert. Hvilken kontekst, altså for hvilke personer og i hvilke situasjoner, resultatene er gyldige i, dreier seg om *ytre validitet* (Kleven & Hjardemaal, 2018). Studien min foregår i en klart avgrenset kontekst med få deltakere; det er klasseromforskning i bestemte skoleklasser på 4.trinn med én lærer, på én skole, som i tillegg driver med utviklende matematikkopplæring. I utgangspunktet vil resultatene bare være gyldige i denne konteksten. Det kan altså være vanskelig å generalisere, eller å *overføre* resultatenes gyldighet til andre kontekster (Kleven & Hjardemaal, 2018). Kvale og Brinkmann (2015) mener at generalisering i slike studier kan handle om å spørre om den skapte kunnskapen fra studien kan overføres til lignende situasjoner, i stedet for å tenke at resultatene skal være gyldige i alle klasserom. Denne studien kan være aktuell for lærere som skal undervise i volum, for å bli bevisst hele sin matematiske diskurs, og kan kanskje bidra konstruktivt til forbedring av undervisningspraksis i temaet volum i matematikkfaget. For at det i det hele tatt skal være mulig å trekke valide konklusjoner om overførbarhet, er det viktig med fyldige beskrivelser og grundige analyser av konteksten som studeres. Av hensynet til ytre validitet er det også viktig at klasserommet oppleves så naturlig som mulig (Kleven & Hjardemaal, 2018), noe vi prøvde på ved å observere fra sidelinjen.

3.6 Forskningsetiske vurderinger

I forskning er det viktig at man er bevisst på de etiske retningslinjene for forskningsvirksomhet. Forskningsetiske retningslinjer er konkretiseringer av forskersamfunnets grunnleggende normer og verdier, og er utarbeidet av Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, NESH, som er et faglig uavhengig og rådgivende organ (NESH, 2016). I denne studien er det spesielt *hensynet til personer* som har vært viktig. Når studier innebærer elektronisk behandling av personopplysninger, er de meldepliktige, og MERG2020 ble meldt inn til NSD (Norsk senter for forskningsdata), som vurderte at behandlingen av personopplysninger i prosjektet var i samsvar med personvernregelverket (vedlegg 2).

3.6.1 Fritt og informert samtykke

I NESH (2016, s.12) står det at «Forskeren skal arbeide ut fra en grunnleggende respekt for menneskeverdet». Det vil blant annet si at forskeren må verne om deltakernes personlige integritet, sikre selvbestemmelse og beskytte deltakerne mot urimelige belastninger. Når forskning omhandler personopplysninger, skal det foreligge et fritt, informert og uttrykkelig samtykke. Dette gjelder *informasjon* om prosjektets formål, metode, risiko, mulig ubehag og andre konsekvenser. Det skal komme klart fram at det er frivillig å delta, og at man når som helst kan trekke seg. *Fritt* samtykke betyr at man ikke blir presset til å delta, og at det er *uttrykkelig* vil si at man gir uttrykk for å forstå hva deltakelsen innebærer (NESH, 2016). Foresatte og lærere som deltok i MERG2020, skrev under og leverte samtykkeerklæringer på vegne av barnet sitt eller seg selv dersom de var villige til å delta (vedlegg 3 og 4 for foresatte og lærer). Dette informerte samtykkeskjemaet inneholdt informasjon om formålet med forskningen, gjennomføring, bruk av resultatene og rettigheter. Her var det informasjon om at det var helt frivillig å delta, og at det ikke skulle være noen negative konsekvenser dersom man ville trekke samtykket sitt ved en senere anledning.

Barn som deltar i forskning har særlige krav på beskyttelse (NESH, 2016). Kan vi være sikre på at barn fullt ut forstår hva det innebærer å delta i forskning? At de forstår konsekvensene og mulige ulemper deltakelsen kan ha, selv om det blir forklart? Dette vil avhenge av alder og modningsnivå til barnet, og forskers evne til å tilpasse informasjon og forskningsopplegg etter barnets utviklingsnivå. I forskergruppen vår var det flere pedagoger med mye erfaring i forskning på skolebarn og lærere. Forskeren har et etisk ansvar for å prøve å unngå at forskningen får negative konsekvenser, og å tenke gjennom hvordan deltakerne kan beskyttes mot dette, særlig sårbare barn. I retningslinjene står det at dersom barnet er under 15 år, må forsker innhente samtykke fra foresatte. Barneloven skal sikre at barn behandles som selvstendige individer og har økende medbestemmelse med økende alder, selv om foreldre har avgitt samtykke (NESH, 2016).

Bruk av fritt samtykke kan være problematisk når det gjelder barn, siden barn gjerne er mer villige til å adlyde autoriteter, og kan synes det er vanskelig å protestere (NESH, 2016), både mot for eksempel foreldre, lærer eller forsker. Når man utfører forskning i institusjoner, eksempelvis en skole, kan det innebære at det legges større press på de underordnede, lærere og spesielt elever, om å delta (Kvale & Brinkman, 2015). Elever vil gjerne ikke lage problemer med å si at de ikke vil, eller de er redd for at læreren ikke vil like dem like godt dersom de ikke deltar. Det asymmetriske maktforholdet mellom forsker og elev kan også påvirke eleven til å kjenne seg presset til å delta og heller ikke trekke seg fra undersøkelsen underveis. For å håndtere dette bør forskeren reflektere over den rollen makt spiller, og være forsiktig med å utføre makt med overlegg. Det kan trygge barnet hvis forskningen foregår i naturlige omgivelser (Kvale & Brinkman, 2015), slik det gjorde i vår studie.

3.6.2 Konfidensialitet

Forskeren skal behandle informasjon om personlige forhold konfidensielt og fortrolig. Deltakere skal ikke kunne bli identifisert. Opplysninger om identifiserbare enkeltpersoner skal også lagres forsvarlig, og ikke lenger enn det som er nødvendig for å gjennomføre formålet med forskningen. Kravet om *konfidensialitet* gjelder spesielt når barn deltar i forskning (NESH, 2016). Datamaterialet som ble samlet inn i prosjektet er kun tilgjengelig for analyser i forskergruppen. Dette ble oppbevart forsvarlig på en ekstern harddisk og vil bli slettet ved utgangen av 2021. Det ble ikke samlet inn direkte personidentifiserende opplysninger, og alle observasjoner og kommentarer fra lærere og elever ble behandlet konfidensielt. Elever, lærere og skole har fått fiktive navn. Nøkkel for navn og transkripsjon ble gitt på forhånd, og alle skriftlige transkripsjoner ble normert til bokmål for å ivareta anonymitet.

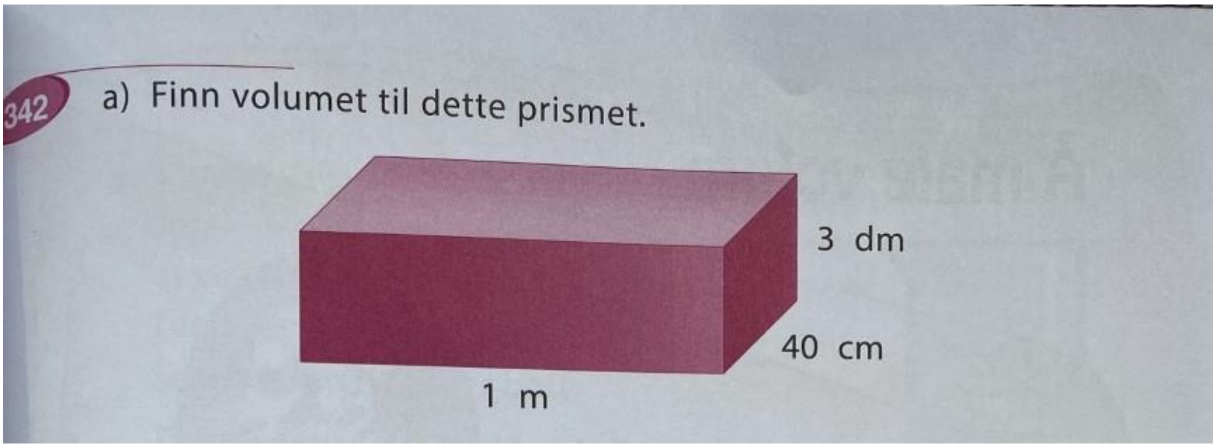
4. Resultater

I dette kapittelet presenteres en multimodal diskursanalyse av videoopptak og transkripsjon fra et utvalg av de observerte undervisningsøktene og intervjuene. I analysen brukes det kommognitive rammeverket til Sfard (2008) med en supplering fra semiotisk-kulturell teori på gester for å undersøke lærers bruk av visuelle mediatorer i volumdiskursen og eventuelle indikasjoner til endringer i elevenes påfølgende volumdiskurs. Jeg har som sagt hentet inspirasjon fra Berger (2013) i hvordan hun har satt opp analysen av de fire faktorene ordbruk, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner, som er av betydning for en matematisk diskurs. I min analyse vil jeg fokusere mest på visuelle mediatorer, og det er disse som blir vist i tabellene mine. De andre faktorene vil tidvis også kommenteres i tolkningene for å få et helhetlig kommognitivt inntrykk av den matematiske diskursen.

De tematiske episodene blir presentert med kommentarer om «visuelle mediatorer» og «endring i diskurs?» i tabellene. Mellom utdrag fra episodene vil det komme flere kommentarer i lys av det teoretiske rammeverket, og det stilles noen kritiske spørsmål underveis som vil videreføres til diskusjonskapittelet. Første del av hver episode er knyttet til forskningsspørsmål 1, om hvordan lærer bruker de visuelle mediatorene i den matematiske volumdiskursen. Andre del av de to første episodene (4.1 og 4.2) er knyttet til mulige observerbare indikasjoner til endringer i elevenes volumdiskurs (forskningsspørsmål 2). Episodene i 4.3 blir brukt for å vise gode eksempler på visuell mediering av volumdiskursen, der det brukes mer konkreter og tydeligere gester. I episode 4.4 presenteres også noen utdrag som viser litt av elevenes behov for visuell mediering i volumdiskursen. Resultatdelen vil slik gjennom samsvarende episoder i undervisning og elevintervju identifisere lærers bruk av visuelle mediatorer og se etter indikasjoner på utvikling av elevenes matematiske diskurs. Til slutt (4.5) gis en kort oppsummering av resultater fra diskursanalysen.

4.1 «Like enheter»

I dette delkapittelet analyseres den tematiske episoden «Like enheter». Oppgaven det tas utgangspunkt i, er en oppgave der man skal finne volumet av et rett, rektangulært prisme. Lærer brukte prosjektor der hun viste oppgavene for hele klassen fremst i klasserommet på whiteboard. Oppgaven (342a) som ble presentert for elevene var fra boken «Matematikk 4: Grunnbok 4B», som er et læreverk som brukes i Utviklende Opplæring i Matematikk i Norge. Læreverket bygger på Vygotskys læringssyn og Zankovs undervisningsmodell (2.1.2). Som vi kan se av figur 4, var målene på lengden, bredden og høyden oppgitt i forskjellige enheter.



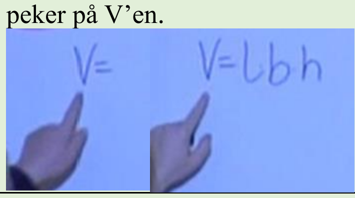
Figur 4 Volumoppgave 342a fra plenumsdiskusjon i klassen (Arginskaya et al., 2017, s.35).

Disse forskjellige enhetene er utgangspunktet for den tematiske episoden. I to av tre klasser er det utydelig i lærers diskurs at man må gjøre om på enhetene før man finner volumet av prismet. Det vil derfor vises utdrag fra innledende plenumsdiskusjon fra to klasserom der ordbruken er noe forskjellig (4.1.1 og 4.1.2) og deres samsvarende episoder fra elevintervjuene (4.1.3 og 4.1.4). I denne sammenheng er det interessant å se på hvordan de visuelle mediatorene brukes i kombinasjon med ordbruk for å se hvordan de kan påvirke mediering av det matematiske innholdet.

4.1.1 Innledende plenumsdiskusjon fra klasserommet til 4C

Denne tematiske episoden (35-49) om «Like enheter», startet omtrent fem minutter inn i timen, og var en del av plenumsdiskusjonen i klassen. Før episoden snakket lærer om at de hadde jobbet litt med volum og måleenheter i det siste.

Tabell 6 Tematisk episode «Like enheter» fra klasserommet til 4C (35-38)

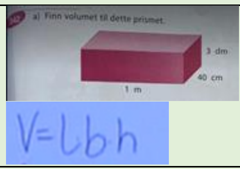
Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
35	Lærer	… Men først og fremst, volum. Fordi, her ber de oss om å finne volumet til dette prismet*. (2s) Noen ideer om hvordan vi kan gjøre det? (4s) Hvordan kan vi finne (2s) volumet til dette prismet? Og hvis du synes det er vanskelig kanskje du vil si noe om det og. (3s) Det er lov det og. (4s) To hender oppe. Skal gi dere litt tid til å tenke. Tre hender. Hvordan kan jeg finne? Fire hender. (2s) Er det mulig å finne volumet på dette prismet? (2s) Kan vi gjøre det, Sandra?	**Ikonisk:** *Lærer viser bilde av oppgaven med prosjektor på tavla.  **Deiktisk gest:** nikker forsiktig mot oppgaven på tavla.
36	Sandra	Eh: e, lengde ganger bredde ganger høyde.	**Deiktisk gest:** Lærer peker på Sandra når hun sier formelen og hun nikker også bekreftende – **Emblem.**
37	Lærer	Aha: Det er veldig bra. Det du sa nå det er vel det som vi kaller formelen eller regelen på hvordan vi skal finne, eh: et volum. V, alltid med V'en sant? Volum er lik, det skal være det samme på begge sider av likhetstegnet. Volum er lik lengde ganger bredde ganger høyde. Var det det dere andre ville si også?	**Symbolsk:** Lærer skriver $V = l \cdot b \cdot h$ på tavlen, samtidig som hun snakker og peker. **Deiktisk gest; holdepunkt:** peker på V'en. 
38	Elever	Ja	

Lærer viser et bilde, en **ikonisk** visuell mediator, av oppgaven på tavla, og vil ha elevene til å finne ut volumet av prismet (35-38). Hun nikker mot oppgaven på tavla, og denne nikkingen kan tolkes som en **deiktisk gest** foretatt med hodet for å vise elevene at de må holde oppmerksomheten mot oppgaven på tavla. Sandra husker formelen for volumet av et rett, rektangulært prisme, og lærer gjentar denne, samtidig som hun bruker **holdepunkt** og skriver ned formelen, en **symbolsk** mediator, på tavla. Lærer bruker også **emblem** som nikking, mest sannsynligvis for å bekrefte det Sandra sier, uten å avbryte henne. Så allerede etter kort tid inn i diskursen om volumoppgaven er det bruk av flere visuelle mediatorer. Disse mediatorene kan hjelpe diskursdeltakerne å opprettholde felles fokus og forståelse (Sfard, 2008).

De visuelle mediatorene brukes samtidig med språket, og flere brukes også synkront, som i en semiotisk node (Radford, 2003). For eksempel brukes deiktiske gester samtidig med symbolske mediatorer i tillegg til matematisk ordbruk. Den matematiske ordbruken er for det meste presis og objektdrevet; for eksempel ved bruk av ord som volum, prisme og formel som substantiver som kommer naturlig fram i diskursen. Både lærer og eleven Sandra bruker et godkjent narrativ om volum av et rett, rektangulært prisme (36, 37). Det er Sandra som først gir narrativet (36), som kan ses som en mulighet til å lære. Lærer gir også muligheter for både ritualisering og utforskning her, alt etter hvor langt elevene er kommet i disse rutinene. For Sandra sin del kan det se ut som at dette er en gjenkallende utforskende rutine, da utforskning handler om det å kunne eller vite, og gjenkalling er prosessen der man finner tilbake til et narrativ som er tidligere godkjent (Lavie et al., 2019; Sfard, 2008). Lærer inviterer alle elevene inn i diskursen ved å stille flere åpne spørsmål, om noen har ideer (35). Hun presiserer at elevene skal få tid til å tenke, og gir alle mulighet til å komme inn i diskursen.

Videre i episoden skal de bruke formelen de har, og som vist i figur 4 var målene på lengdene i oppgaven oppgitt i forskjellige enheter. Bildet av oppgaven (ikonisk) og den skrevne formelen (symbolsk), vises fortsatt på tavla.

Tabell 7 Tematisk episode «Like enheter» fra klasserommet til 4C (39-41)

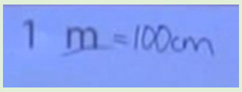
Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
39	Lærer	Ja. Akkurat det samme som Sandra sa. Men eh: så da kan jeg bare putte inn disse verdiene da? (2s) Tenker det går bra? (2s) Tora?	
40	Tora	Du kan gjøre enen om til hundre centimeter og tre desimeter til tretti centimeter.	**Gester; Emblem:** lærer nikker til Tora når hun snakker.
41	Lærer	Så du la merke til at det var oppgitt i ulike (2s) benevnelser her. Ulike måleenheter. (2s) Var det noen andre som så det? (3s) En, to, tre, fire, fem, seks, syv, åtte ni (2s) ti, elleve har sett det. Veldig bra. For det er nemlig som Tora sier, at hvis vi skal gange meter med centimeter med desimeter, så blir det litt sånn (2s) eh: ikke så veldig enkelt. Rett og slett. Magnar, hva du ville si?	**Understrekende gest:** Setter strek under de tre ulike måleenhetene på tavla.

Lærer stiller et ledende spørsmål for å få elevene til å tenke på omgjøring av enheter (39). Når Tora tar hintet om å fokusere på enhetene (40), bruker lærer **gesten og emblemet** nikking for å bekrefte Toras tanker uten å avbryte henne. Det er viktig å lytte som lærer, og gester kan brukes som bekreftelse på at vi virkelig lytter til eleven. Etterpå (41) gjentar lærer på en mer tydelig måte hva Tora har oppdaget, og spør «Var det var noen andre som så det?» for å invitere de andre elevene inn i diskursen. Hun bruker **understrekende gester** ved å streke under måleenhetene på lengden, bredden og høyden i prismet, for å få en felles oppmerksomhet rundt disse. Denne handlingen kan styre oppmerksomheten til elevene der som lærer vil ha den. Det kan kanskje også oppfattes som en **deiktisk gest, en etterfølgende**

peking, siden lærer pekte på forskjellige enheter etter hverandre, og kan bli brukt for å koble sammen disse tre lengdene.

Ordbruken til slutt i ytring 41, er mindre presis. Hun sier at det ikke er så veldig enkelt å gange meter med centimeter og desimeter, i stedet for å si at man ikke kan gjøre det. Dette kan gjerne gjøre elevene usikre. Kan man gjøre det, bare at det er vanskelig? Den **understrekende gesten** og streken under enhetene tydeliggjør i alle fall at de oppgitte enhetene er ulike, og at det er ønskelig at disse skal være like. I fortsettelsen av den matematiske diskursen rundt enhetene, ser det allikevel ut til at Magnar ikke er helt med på at man MÅ gjøre om enhetene for å kunne regne ut volumet av prismet.

Tabell 8 Tematisk episode «Like enheter» fra klasserommet til 4C (42-49)

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
42	Magnar	Vi kan jo ta tre desimeter ganger førti centimeter, så kan vi ta det ganger en meter.	
43	Lærer	Ja, du tenker det går greit å gange meter med centimeter og desimeter. Hm? Hvis vi da hadde hatt denne linjalen, og jeg skulle først ha ganget en meter. Denne er en meter, sant? Så jeg ganger en meter med førti centimeter, hva tenker du det kan bli?	**Konkret**: lærer tar frem meterstav, og viser en meter.  Deretter peker hun på 40cm på linjalen: **Deiktisk holdepunkt gest.** 
44	Magnar	[Ja]. Fire hundre	
45	Julius	Hundre og førti	
47	Lærer	Ja, hundre og førti centimeter. For da gjør du Julius, det som Tora foreslo. Nemlig å gjøre om en (2s) mm: [meter] til≈	
48	Julius	[Meter til centimeter]	
49	Lærer	Det er det du foreslo, sant? Er du med på det Magnar? At det kan være lurt å gjøre om (2s) så vi får samme måleenhet. (2s) Så hvis jeg da sier at en meter er det samme som hundre centimeter her. (2s) Har du et forslag, Tora, hva vi kan gjøre med desimeteren der og?	**Symbolsk:** Skriver opp = 100*cm bak* 1*m*.  **Deiktisk gest:** Peker kort mot 3dm på tavla.

Det kan være indikasjoner på at Magnar opplever en kommognitiv konflikt (42), der han ser ut til å mene at man kan utføre den samme oppgaven ved å bruke forskjellige regler – her at man må eller ikke må ha like enheter når man skal bruke formelen. Lærer gjentar og utfordrer Magnar til å tenke på om det går greit å gange meter med centimeter og desimeter (43), ved å bruke en **konkret** visuell mediator, en meterstav, som finnes i alle klasserom. Hun bruker også hendene sine, med **deiktiske holdepunkt gester**, for å vise lengdene 1 m og 40 cm.

Holdepunkt på meterstaven kan her fungere som en hukommelsesmarkør for å holde alle elevene i diskursen. Hvorfor velger lærer å bruke meterstav her? Kanskje hun vil få fram at 1m er det samme som 100 cm (som hun sier i ytring 49), ved å vise dette konkret på meterstaven? Det kan også være at lærer prøver å holde igjen, at hun vil invitere elevene til å oppdage problemet med de forskjellige enhetene selv.

Det kan allikevel være noen utfordringer i lærers diskurs, som virker forvirrende for observatør, og kanskje også for elevene som matematister i diskursen. Når lærer stiller spørsmålet «Så jeg ganger en meter med førti centimeter, hva tenker du det kan bli?» (43), som er et viktig spørsmål, hva er hun ute etter? Hvis hun tenker at man skal multiplisere tallene 1 og 40, skal man få 40, men da blir problemet hva måleenheten skal være, siden den ene er meter og den andre centimeter. Det er jo nærliggende å tenke at det er det hun vil at Magnar skal finne ut. Hvis han gjør om 1 m til 100 cm vil han få svaret 4000 cm^2. Magnar sier hverken 40 eller 4000, han sier 400 uten måleenhet bak (44). Hva han har tenkt for å komme fram til dette svaret, er vanskelig å vite uten at lærer spør mer om dette, men det kan tenkes at han har multiplisert 40 med 100, og regnet feil med en null (han gjør det i intervjuet, da han fjerner nullen i 40 og glemmer å legge den på igjen).

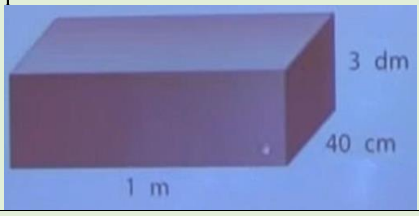
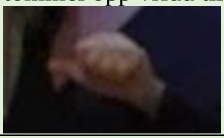
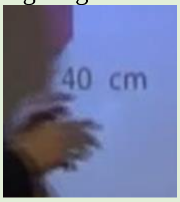
Julius kommer med forslaget 140 uten måleenhet bak (45), og da sier lærer ja til dette: 140 cm (47). For at 100 cm og 40 cm skal bli 140 cm, må man addere størrelsene, og det var jo ikke det lærer spurte om, hun spurte om multiplikasjon. Dette kan kanskje virke mer forvirrende for Magnar enn det er oppklarende. Spørsmål man kan stille seg som observatør er: Hvorfor bruker lærer meterstaven som **konkret** visuell mediator her, og hva ønsker hun å oppnå med å bruke den i dette tilfellet? Hun bruker meterstaven som har *én* dimensjon, men spør etter et svar med *to* dimensjoner, og oppgaven går ut på å finne et svar i *tre* dimensjoner. Er meterstaven den mest hensiktsmessige visuelle mediatoren å bruke i dette tilfellet?

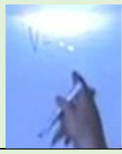
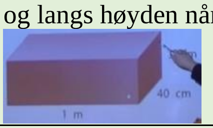
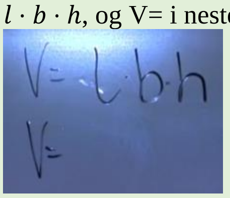
I ytring 49 sier lærer fortsatt bare at det kan være *lurt* å gjøre om måleenhetene, men ikke at man *må* det. I samsvarende episode fra undervisningen i klasserommet til 4A, er det også utydelig om man må gjøre om eller ei. Her stiller lærer først spørsmålet om det er lurt å gange lengden, bredden og høyden sammen når de har ulike måleenheter. Deretter spør hun en elev om det går an, og når eleven sier nei, sier hun også nei. For deretter å si at det gjerne er «greiest hvis alt er likt». Dette kan fremstå litt utydelig, og illustrerer godt hvor krevende og komplekst undervisningsarbeidet kan være. Ordbruken er mer tydelig i klasserommet til 4B.

4.1.2 Innledende plenumsdiskusjon fra klasserommet til 4B

Følgende sekvensutdrag av «like enheter» er fra samsvarende tematiske episode i klasserommet til 4B, der det kommer tydeligere fram at man må gjøre om på enhetene før man kan utføre rutinen å finne volumet til prismet.

Tabell 9 Tematisk episode «Like enheter» fra klasserommet til 4B (64-79)

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
64	Lærer	Noen som har gode ideer på hvordan vi kan gripe fatt det? (3s) Hvis vi skal finne volumet? En, to tre, fire hender i alle fall. (.) Det er veldig bra. (4s) Fem hender. (3s) Hvordan er det mulig? Seks hender. Så bra. Plopper det opp vet du. Hvordan kan vi finne volumet på dette, Trude?	**Ikonisk** visuell mediator: oppgaven vises på tavla 
65	Trude	Eh: En ganger førti ganger tre?	
66	Lærer	En ganger førti ganger tre, sier hun. Enig eller uenig?	
67	Morten	Uenig. Litt uenig.	
68	Lærer	Litt uenig? Hvorfor er du litt uenig, Morten?	**Gest; emblem:** Lærer holder hånd med tommel opp vridd til siden. 
69	Morten	Ehm, fordi det er jo ikke samme, det er jo desimeter, centimeter og meter. Hvis det heller hadde vært hundre ganger førti, og så (ukjent tekst) det ganger tretti (ukjent tekst) husker ikke.	**Gest; emblem:** Lærer nikker.
…			
74	Lærer	Er du med på det, Trude? Jeg tror, hva var det du mente da du sa en ganger førti ganger tre? Tenkte. Hva tenkte du på da?	**Deiktisk gest**: Hun **glidepeker** langs lengden når hun sier en:  Og langs bredden når hun sier førti:  **Symbolsk**: Lærer skriver V= på tavlen mens hun sier: hva tenkte du på da.
75	Trude	Jeg tenkte egentlig bare at, for jeg så ikke helt at det var meter og desimeter og centimeter.	**Deiktisk gest:** Lærer **glidepeker** langs lengden når Trude snakker. 

76	Lærer	Nemlig! Så hvis vi tenkte på formelen (.) for volum. For jeg tror det var den du tenkte. Var det ikke det? At du tenkte på (.)	**Gest; emblem**: Lærer nikker når hun sier nemlig. **Deiktisk gest:** Peker igjen på lengden og deretter på symbolet V= når hun sier formelen. 
77	Steinar, Trude og noen andre elever.	Lengde(.) ganger bredde (.) ganger høyde.	**Deiktisk gester; etterfølgende glidepeking**: Lærer fører pennen sin langs lengden når de sier lengden,  langs bredden når de sier bredden  og langs høyden når de sier høyden 
78	Lærer	Ok, lengde ganger bredde ganger høyde. (3s) Og så sier Morten og Steinar og sikkert noen andre som er enige i at her må vi gjøre om så vi får samme måleenheten. Høres ikke det fornuftig ut?	**Symbol:** Fortsetter på V= og skriver nå $l \cdot b \cdot h$, og V= i neste linje.  Skriver l når hun sier lengde, b når hun sier bredde, og h når hun sier høyde.
79	Elever i kor	Mmm	

Det kan se ut til at lærer oppfordrer til en utforskende rutine (64), og hun går rundt i klasserommet og venter på at flere elever skal ta del i diskursen. Både gester, ikon og symboler brukes i tillegg til og synkront med talen for å mediere volumdiskursen. Det brukes en del **deiktiske gester** for å få ekstra oppmerksomhet rettet mot den **ikoniske** visuelle mediatoren og **symbolene**. Lærer bruker **glidepeking** langs lengden og bredden når hun sier «en ganger førti» (74), slik at alle skal ha oppmerksomheten mot lengden og bredden til prismet. Når hun i samme ytring skriver opp V= mens hun spør Trude hva hun mente, er det tydelig at hun er ute etter at elevene skal huske formelen for volum av et rektangulært prisme, kanskje både narrativet og rutinen. I ytring 75 bruker lærer igjen **glidepeking** mens Trude snakker, for å føre oppmerksomheten mot lengden og kanskje mot en omgjøring av denne. Hun bruker også pekegester på symbolet V= når hun sier formelen (76), for å føre oppmerksomheten mot denne. Når elevene bruker klassekor til å si formelen høyt (77), bruker lærer **etterfølgende glidepeking** for å vise hva som er lengden, bredden og høyden i prismet.

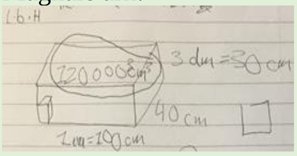
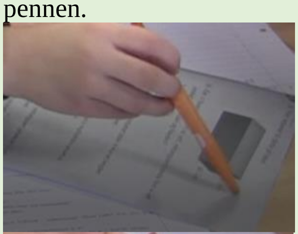
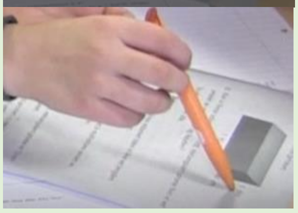
Lærer bruker visuelle mediatorer i form av **symboler** når hun skriver opp narrativet $V = l \cdot b \cdot h$ samtidig som hun ytrer det (78), og elevene får slik inn narrativet både visuelt og auditivt. I denne ytringen (78) sier hun også «… som er enige i at her må vi gjøre om så vi får samme måleenheten». I denne klassen kommer det tydelig fram av diskursen at man må gjøre om til like måleenheter før man kan finne volumet.

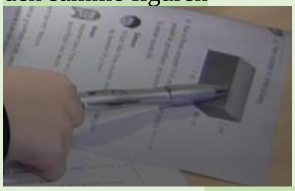
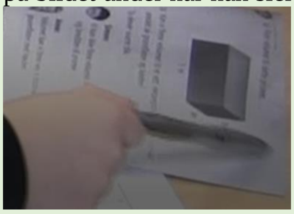
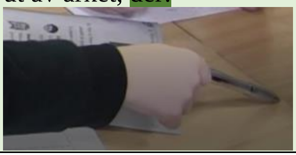
I det følgende presenteres samsvarende episoder i elevintervju 4 og 5 der jeg vil prøve å se etter indikasjoner på om elevenes diskurs har endret seg. Læring blir av Sfard (2008) sett på som varig endring i diskurs. Hva kan karakteriseres som en endring i diskurs? En utvikling i den matematiske diskursen kan studeres ved å se etter forandring i bruk av matematiske ord, visuelle mediatorer, narrativ eller rutiner (Sfard, 2007). Jeg kan ikke med sikkerhet si at det har skjedd endringer eller ikke i elevenes diskurs, siden den observerte undervisningen bare strekker seg over to uker. Men jeg kan se etter indikasjoner på at diskursen har endret seg, med den begrensete forkunnskap jeg har om elevene fra den observerte undervisningen.

4.1.3 «Like enheter» - Intervju av elever fra klasse 4C

Intervjusekvensen i elevintervju 4, relatert til volumoppgaven med fokus på like enheter, startet 13 minutter ut i intervjuet. Intervjuet ble foretatt av meg selv (intervjuer1) og en annen masterstudent, og de som ble intervjuet var Andrine, Valdemar og Magnar (fiktive navn) fra 4C. Vi ga dem samme oppgave som de fikk i plenumsundervisningen (**Ikonisk** visuell mediator), og spurte om de kunne fortelle litt mens de jobbet. De fikk utdelt et kladdeark hver. Valdemar nevnte raskt fremgangsmåten «lengde ganger bredde ganger høyde» for å finne volum av et rett, rektangulært prisme (gjenkallende utforskende rutine), og elevene gikk raskt i gang med å tegne av figuren, og lage sine egne **ikoner**. Når Valdemar sa formelen, pekte han synkront på lengden, bredden og høyden, som kan ses som en **etterfølgende deiktisk gest**. Magnar virket ivrig etter å sette i gang, og han satte mål på lengden, bredden og høyden, **symboler**. Han skrev på arket sitt i nesten ett minutt uten å si noe, før han sa «Ja! Jeg gjorde sånn der at jeg gjorde tre desimeter til tretti, en meter til hundre centimeter». Når han sa dette, brukte han den **deiktiske gesten repetert peking** på **symbolet** 3 dm og 1 m i oppgaven. Jeg (intervjuer1) spurte hvorfor han gjorde dem om, og han sa «Ehm, ehm en meter er lik hundre centimeter.» Andrine sa «fordi da er det enklere». Under følger resten av diskursen med indikasjoner på endring i elevenes volumdiskurs.

Tabell 10 Utdrag fra elevintervju 4 (189-208): «Like enheter»

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer	Endring i diskurs?
189	Magnar	≈Og tre desimeter det er tretti, fordi en desimeter er ti centimeter (.) så da er det tretti. Førti centimeter er helt vanlig, og den er hundre.	**Ikonisk:** Bilde av prismet i oppgaven vises på ark på bordet foran elevene.  **Ikoner og symboler** tegnet på Magnars ark:  **Deiktisk: Repetert Sirkulær glidepeking** rundt 3 dm med pennen.   **Peker** også raskt på 40 cm og 1 m synkront med talen.	Magnar gjør nå av seg selv om fra desimeter og meter til centimeter, for å få alle lengdene i samme enhet.
190	Intervjuer1	Men <u>hvorfor</u> gjør du dem om?		
191	Magnar	Så det blir lettere. Og ehm		Det kan virke som at Magnar vet hvordan, men ikke hvorfor (rutiner; **ritualisering**). Han vet at det blir lettere, men det virker ikke som han vet at man *må* ha samme enheter.
192	Intervjuer1	Ja, hvorfor blir det lettere da?		
193	Magnar	Fordi da kan jeg ta uhm førti ganger hundre som er fire hundre, ganger tretti.	**Deiktiske gester: repetert peking** på 40 cm, konkret **peking** på 1m, **Sirkulær glidepeking** rundt 40 cm igjen, og deretter konkret **peking** på 3 dm.	Han gjør samme multiplikasjonsfeil som i plenumsundervisningen.
		…		
206	Intervjuer1	Hvorfor gjør dere dem ikke om til meter?		
207	Magnar	Nei fordi da tar vi oppover, liksom mer, og vi trenger ikke mer, for da finner vi	**Ikonisk gest:** Magnar viser oppover med pennen sin.	

		ikke ut svaret. Vi må jo bare ha de helt vanlig.		
208	Valdemar	[Men, Magnar, Magnar], se hvis vi tar dem oppover så finner vi ikke det riktige svaret siden, hvis vi tar dem oppover så er jo ikke det den samme figuren, da hadde jo den vært helt der og den hadde vært helt der sikkert.	**Deiktisk holdepunktgest:** Valdemar peker midt på prismet når han sier «så er jo ikke det den samme figuren»  Videre bruker han **glidepeking** når han peker ut av figuren fra starten av bredden og som vist på bildet under når han sier der:  Og høyden glidepeker han langt ut av arket, der: 	Vanskelig å vite hvordan elevenes diskurs var om dette på forhånd, men de har ikke endret diskursen i forhold til det som lærer ytret i timen om at de ikke skulle gjøre om til meter fordi da fikk de desimaltall, som enda var et litt ukjent tema. De tror at figuren vil bli annerledes hvis de gjør om til meter.

Magnar vil nå gjøre om alle enhetene til centimeter (189). Dette ville han ikke gjøre i plenumsundervisningen, så det kan det tyde på at det har skjedd en endring i narrativene og rutinene i diskursen hans. Han klarer lett å gjøre om mellom de ulike måleenhetene for lengde, og det er heller ikke grunn til å tro at han ikke hadde dette i sin diskurs allerede i plenumsundervisningen. Jeg legger trykk på *hvorfor* (190), og han forklarer at det blir lettere da (191). Når Magnar multipliserer førti og hundre, får han igjen fire hundre (193), som forklart under plenumsundervisningen. Det er ingen endring i denne diskursen, og det er kanskje ikke uventet, da dette ikke ble dratt inn i diskursen i timen, og ble sett på som feil forståelse, i stedet for feil i utregning. Det kan virke som at Magnar vet hvordan han skal gjøre om, men ikke hvorfor, og at han må gjøre det. Det kan kanskje stemme overens med at lærer sa i timen at «det kan være lurt» (49 i 4C under 4.1.1). Rutinen virker å være ritualisert, og Magnar er fornøyd hvis han svarer riktig.

Ikoniske og symbolske visuelle mediatorer bidrar i oppgaveløsningen til å vise elevene visuelt hvordan prismet kan se ut, og kan fungere som en hukommelsesmarkør. For eksempel kan det å skrive opp $3dm = 30cm$, gjøre at elevene slipper å holde det i minnet.

De **deiktiske gestene** som Magnar bruker (189 og 193) er med på å holde alles fokus på oppgaven og å forsterke ordbruken, og forklaringen som han gir. Her virker det ikke som om den **sirkulære glidepekingen** brukes på grunn av usikkerhet (som foreslått av Bjuland et al., 2008), men heller at han ville ha et ekstra fokus på dette symbolet ved å gjøre det ekstra synlig over tid, som et holdepunkt mens han snakket om det. Det kan tyde på at Magnar vil føre ekstra oppmerksomhet mot 40 cm, da han både bruker **repetert pekegest** og **sirkulær glidepeking** på den (193).

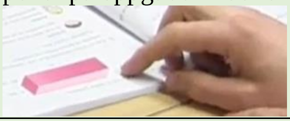
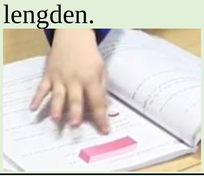
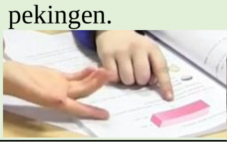
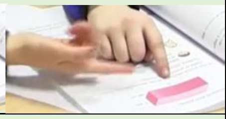
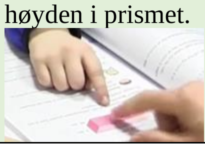
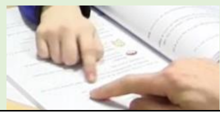
Gestene skjer igjen synkront med talestrømmen, som for å legge ekstra vekt på noe av det som blir sagt. Vi kan se at Magnar bruker **ikonisk gest** for å vise oppover, som synkroniserer akkurat med når han sier «oppover» (207). Ordbruken virker rutinedrevet, elevene bruker noen av de matematiske ordene aktivt, som en del av den pågående diskursen. Narrativet «volum er lik lengde multiplisert med bredde multiplisert med høyde» er individualisert i en utforskende rutine.

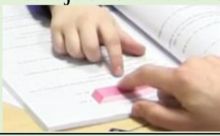
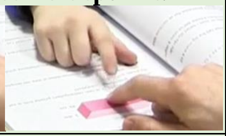
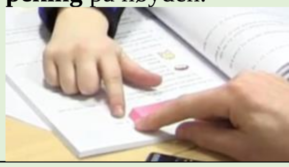
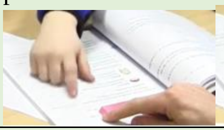
Når jeg spør elevene om hvorfor de ikke gjorde om til meter (206), sier de at de ikke vil finne ut svaret «helt vanlig» da (207), og at det ikke ville vært samme figur (208). Det er også tydelig av Valdemars **deiktiske glidepeking** ut av figuren (208), at elevene tror figuren ville sett annerledes ut ved at målene var oppgitt i meter. Diskursen fra timen om at de ikke skulle gjøre om til meter fordi de da fikk desimaltall, er ikke individualisert hos noen av elevene, og de kommer heller ikke fram til det kollektivt. De vet at de ikke kunne bruke meter, men de vet ikke hvorfor – ritual. På tidspunktet som intervjuet er, så har de hatt noe mer om desimaltall, og kunne sikkert ha gjort om dersom de visste det gikk an. Men her virker det som elevene tror at størrelsen blir endret når man gjør om til en annen enhet, som kan ha noe med diskursen i klasserommet å gjøre, der det er utydelig fra lærers side om størrelser etter omgjøring. Dette kommer jeg tilbake til i delkapittel 4.2 «Fra hele rommet til ganske lite».

4.1.4 «Like enheter» - Intervju av elever fra klasse 4B

I elevintervju 5, deltar elever fra 4B; Amandus, Fiona og Lisbeth. Som vi så i sekvensutdraget fra klasseromsdiskursen til 4B, kom det der tydeligere fram at man må gjøre om på enhetene før man kan utføre rutinen å finne volumet til prismet. Elevene i elevintervju 5 virker også mye tryggere i volumdiskursen, som om de har individualisert mer av denne, men det kan selvfølgelig også være tilfeldig. I ytringene før dette utdraget har elevene sagt at volum er hvor mye plass en figur tar i et rom og at bildet i boken viser et rektangulært prisme. De har også ytret narrativet at volum er lik lengde ganger bredde ganger høyde. Her kommer det fram med en gang, at de gjorde om alle lengdenes enheter til centimeter, i undervisningen.

Tabell 11 Utdrag fra elevintervju 5 (351-372): «Like enheter»

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer	Endring i diskurs?
351	Intervjuer	… Hvordan, når dere skulle, hvis dere skulle prøvd og løst, finne volumet av denne her.	**Ikonisk:** Intervjuer viser oppgaven og bildet av prismet i boken. **Deiktisk gest; holdepunkt**: Intervjuer peker på oppgaven i boken. 	
352	Amandus	Ehm, (.) sånn som vi gjorde det i timen var at vi gjorde alt til centimeter	**Deiktisk gest: Glidepeking** langs lengden. 	Amandus husker at de gjorde om alle enhetene til centimeter i timen, **gjenkallende rutine** (utforskning)
353	Intervjuer	Ja, hvorfor må vi gjøre det? Kan vi ikke bare, dere sa jo, dere sa jo nettopp at det var lengde ganger bredde ganger hø, kan vi ikke bare gange de sammen da?		
354	Amandus	Nei på grunn av, [på grunn av at de er jo forskjellige]	**Deiktisk gest:** Amandus peker på enheten på lengden av prismet. 	Amandus sier at «de» er forskjellige, og ved å bruke pekegester kan han vise hva han mener. Han bruker ikke ord som enheter, måleenheter, benevning e.l.
357	Lisbeth	[Det er førti] centimeter og det er [en meter]	**Deiktisk gest:** Lisbeth peker litt uspesifikt mot oppgaven. **Deiktisk gest; holdepunkt**; Amandus peker på lengden og holder denne pekingen. 	Lisbeth påpeker at størrelsene er oppgitt i centimeter og meter. Hun bruker heller ikke ord som enheter, måleenheter, benevning e.l.
358	Intervjuer	[Hva er det], hva er det som er forskjellig her?	**Deiktisk gest; holdepunkt**: Amandus holder pekefingeren på lengden, mens intervjuer **peker etterfølgende** på enhetene på lengden, bredden og høyden i prismet. 	

364	Amandus	Den, det er [egentlig hundre]	**Deiktisk gest; repetert peking** der han prikker pekefingeren flere ganger ned på lengden på prismet. **Deiktisk gest;** intervjuer bruker enda **holdepunkt.**  	Amandus gjør om en meter til hundre centimeter.
366	Amandus	Hundre centimeter, (.) og det er, det er tretti centimeter	**Deiktisk gest**: Intervjuer bruker **holdepunkt** og peker på høyden til prismet. Amandus bruker også **holdepunkt** og deretter **repetert peking** på høyden. 	Amandus gjør om tre desimeter til tretti centimeter. Omgjøring mellom disse enhetene er individualisert.
367	Intervjuer	*Mhm*		
368	Amandus	Så vi delte det opp i:: centimeter istedenfor	**Deiktisk gest**: Intervjuer bruker **holdepunkt** og peker på høyden til prismet. **Metaforisk gest:** Amandus  	Amandus bruker fingrene til å vise at han deler opp i centimeter.
371	Intervjuer	[Så dere endret] benevning?	**Deiktisk gest**: Intervjuer bruker **holdepunkt** og peker på høyden. 	
372	Amandus	Ja, så (.) regnet vi det ut	**Deiktisk gest**: Intervjuer bruker **holdepunkt** og peker på høyden. **Deiktisk gest**: Amandus peker på oppgaven når han sier «så». 	Amandus gjenkaller at de regnet ut etter at de hadde gjort om til like enheter.

Amandus gjør en utforskende rutine når han gjenkaller at de gjorde om alle enhetene til centimeter i undervisningen (352). Når elevene skal forklare hvorfor de ikke bare kan multiplisere tallene slik de står (354, 357, 364, 366 og 368) viser de til at *de* er forskjellige, med **deiktiske gester**, men bruker ikke ord som enheter, måleenheter, benevning e.l. Ordbruken er derfor enda passiv i enhetsdiskursen i at matematistene ikke bruker ordet selv, men kan utføre korrekte handlinger knyttet til det. De vet hvordan de gjør om enhetene, men det er vanskelig for dem å forklare med ord hvorfor de må gjøre om.

I dette utdraget kan man særlig se hvor viktige de **deiktiske gestene** er, for å skape en felles oppmerksomhet mot det som ytres, og for å poengtere at noe av det man sier er ekstra viktig. For eksempel brukes det en del **holdepunkt** (351, 357-372), som hukommelsesmarkør eller for å vise et ekstra fokus på det som pekes på (Bjuland et al, 2008). Intervjuer bruker **etterfølgende peking** når han spør hva som er forskjellig (358), han koordinerer lengden, bredden og høyden i prismet, og vil ha oppmerksomhet mot enhetene. Amandus bruker også **repetert peking** for å få ekstra oppmerksomheten mot lengden i prismet (364), og deretter høyden (366). Her kan gestene gjøre opp for manglene i ordbruken, slik at alle vet at det er enhetene på lengden og høyden i prismet han snakker om, selv om han ikke sier det direkte.

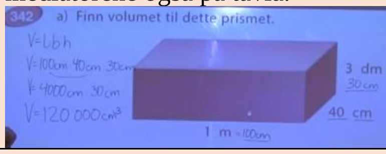
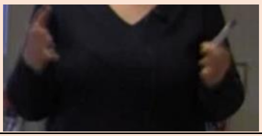
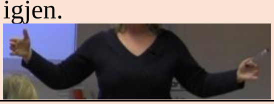
4.2 «Fra hele rommet til ganske lite»

I den tematiske episoden «Fra hele rommet til ganske lite», analyseres den videre plenumsdiskusjonen av samme oppgave, der lærer i alle tre klassene ytret at svaret de kom fram til i kubikkcentimeter var et veldig stort tall, og ville at de skulle gjøre om enhetene til desimeter slik at de kunne få «et mindre og mer forståelig tall». Plenumsdiskusjonen som analyseres er fra klasse 4C, men den er representativ for det som skjer i klasserommet til 4A og 4B også. Lærer bruker mye av de samme ordene, gestene og symbolene. Som vi så i teorikapittelet om volumdiskursen (2.4.2), kan det være utfordrende for elever å forstå størrelser, hvor stort noe er, og i den følgende diskursen kan det virke som om størrelsen endres når man endrer benevning. Etter plenumsdiskusjonen fra klasserommet analyseres de samsvarende episodene fra elevintervjuet, der vi intervjuere blant annet er interessert i om elevene vet hvor stor en kubikkcentimeter er i fysisk størrelse.

4.2.1 Videre plenumsdiskusjon fra klasserommet til 4C - Hvor mye er 120 000 cm^3?

I forkant av denne episoden «Fra hele rommet til ganske lite» fra klasserommet til 4C, har klassen sammen med lærer utført gjerningen å regne ut volumet av prismet. De har kommet fram til at svaret på oppgaven er 120 000 kubikkcentimeter. Episoden starter med at lærer sier at det er et veldig stort tall, og lurer på hvor mye det egentlig er.

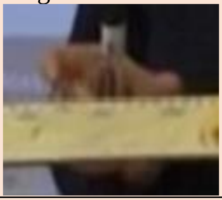
Tabell 12 Tematisk episode «Fra hele rommet til ganske lite» fra klasserommet til 4C (2-119 – 2-128).

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
2-119	Lærer	Så det blir hundre og tjue tusen, istedenfor, (2s) og det er ganske stort tall. (2s) Ganske så stort tall blir det. (3s) Så hvor mye er ett hundre og tjue tusen kubikkcentimeter da?	Den **ikoniske** visuelle mediatoren, bildet av oppgaven, er fortsatt på tavla. I tillegg er formelen og utregningen, de **symbolske** visuelle mediatorene også på tavla. 
2-120	Julius	Så mye som hele dette rommet.	
2-121	Lærer	Så mye som hele dette rommet, sier Julius. Vet du hva, jeg forstår veldig godt hva du tenker, for det høres sykt mye ut.	**Ikonisk gest:** slår ut med armene samtidig med talestrøm for å vise at noe er stort som det konkrete rommet de står i, holder håndflatene ut mot rommet, og holder denne gesten en god stund. 
2-122	Julius	Men det er jo bare centimeter.	
2-123	Lærer	Ja det er jo centimeter, men likevel så er tallet så ≈	**Metaforisk gest:** Tar hendene nærmere hverandre når hun sier centimeter (ca. 40 cm), og ut igjen når hun sier stort. 
2-124	Elever	≈Stort	
2-125	Lærer	Stort	**Metaforisk gest:** slår ut armene igjen. 
2-126	Julius	Men da er det jo noen og fire, fem meter (2s) eller?	
2-127	Lærer	Ja. (2s) Det kan være litt vanskelig å forholde seg til et så stort tall. (2s) For det sier, hvert fall for meg så sier det ikke meg så veldig mye det høres bare sykt mye ut, men så er det det vi må tenke at vi snakker om centimeter her, sant? (2s) Kunne vi gjort dette på en annen måte? (1s) Så tallet kanskje hadde blitt litt mindre og litt mer forståelig for oss her?	
2-128	Elever	Mm	

Julius foreslår at 120 000 kubikkcentimeter er så mye som hele klasserommet (2-120). Her kan det virke som han vet at 120 000 kubikkcentimeter er en romstørrelse. Lærer sier hun forstår hva han tenker (2-121), men når han sier at det bare er centimeter, så sier hun allikevel at tallet er så stort (2-125). Lærer bruker **ikoniske og metaforiske gester** i bare én dimensjon for å vise at noe er stort. Julius prøver igjen å spørre, denne gang i én dimensjon, om det er fire, fem meter da? (2-126), og da sier lærer ja (2-127). Spørsmål som kan være rimelig å stille seg her er; Hvorfor svarer lærer ja til dette? Kan det begrense elevenes muligheter til læring om hvor stort noe er i fysisk størrelse når man skal gå fra tall med enheter, til fysisk størrelse i rommet? I akkurat dette tilfellet, kan det virke som både gester og ordbruk virker mot sin hensikt, for her viser ikke gestene at volum måles i tre dimensjoner. Blir tallet mer forståelig av at det inneholder færre siffer? Selve størrelsen er jo lik selv om man bytter enhet, og hvis man ikke vet hvor stort det ene er, vet man heller ikke hvor stort det andre er. Det blir også snakket om «tallet» her, istedenfor volumet; rominnholdet eller romfanget.

Diskursen dreier seg deretter om at de kan gjøre om til meter, men de finner ut at det ikke er så lurt, siden de ikke har hatt så mye om desimaltall. De gjør heller om til desimeter.

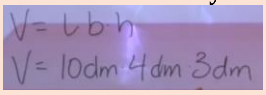
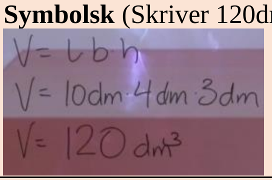
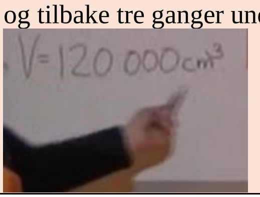
Tabell 13 Tematisk episode «Fra hele rommet til ganske lite» fra klasserommet til 4C (2-162 – 2-167).

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
2-162	Lærer	Hvor mange desimeter var det nå igjen i en meter?	**Konkret**: tar frem meterstaven
2-163	Elever	Ti!	
2-164	Magnar	Nei, ja, tusen!	
2-165	Julius	Vent, ti desimeter!	
2-166	Lærer	Ti desimeter. Sant? For hver desimeter, en, to, tre, fire, fem, seks, syv, åtte, ni≈	**Deiktiske gester** på linjalen: Peker på 1 og 2 dm  og deretter lager hun et gap med fingrene på en desimeter og setter den først mellom 1 og 2, deretter 2 og 3 osv. helt til 10 – **ikonisk/understrekende gest** 
2-167	Elever	≈Ti	Flere i kor

Lærer bruker en **konkret** visuell mediator, meterstaven, der hun bruker **deiktisk gest** for å peke på 1 dm og 2 dm (2-166). Deretter viser hun 10 dm på meterstaven ved å telle hver desimeter; hun lager et gap på én desimeter og holder dette mens hun flytter hånda rytmisk bortover meterstaven mens hun teller til ti. Dette kan tolkes som en **ikonisk gest** der hun viser med gester på konkretet det som hun ytrer i diskursen. Hun illustrerer med gester samme handling som det refereres til i talen, og kan slik mediere at dette er et viktig narrativ å kunne. Dette narrativet er på objekt-nivå: det er ti desimeter i en meter. Det kan også tolkes som en **understrekende gest,** med rytmiske poengterende bevegelser bortover meterstaven, og på denne måten forsterke og understreke at dette er viktig å kunne. Hun viser også helt opp til 10 dm, kanskje for at dette skal medieres skikkelig og det ikke skal være noen misforståelser.

Lærer bruker deretter en **symbolsk** visuell mediator når hun skriver opp $V = l \cdot b \cdot h$ på nytt på tavla, og i neste linje $V = 10dm \cdot 4dm \cdot 3dm$. **Ikonet** av prismet i oppgaven vises fortsatt.

Tabell 14 Tematisk episode «Fra hele rommet til ganske lite» fra klasserommet til 4C (2-185 – 2-208).

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
2-185	Lærer	Tar du den, Benjamin?	På tavla står disse **symbolene:**  **Gest - emblem** (nikker mot Benjamin) Kan mest sannsynligvis forstås som en **deiktisk gest** her.
2-186	Benjamin	Et hundre og tjue desimeter.	
2-187	Magnar	*Ja, et hundre og tjue desimeter*	
2-202	Lærer	Ett hundre og tjue, et hundre og tjue gram da?	
2-203	Elever	Nei, kubikkcentimeter.	
2-204	Lærer	Ja. (2s) Så bra. Var det litt mer forståelig?	**Symbolsk** (Skriver $120dm^3$) 
2-205	Elever	Ja	
2-206	Lærer	Sant?	**Gest - emblem** (nikker)
2-207	Julius	Da er det jo egentlig ganske lite	
2-208	Lærer	Da er det jo egentlig ganske lite. Der gikk det fra å være hele klasserommet til å være noe ganske lite. Eh: fordi at når vi, det handler om å bruke litt sånn hensiktsmessige måleenheter, og derfor så kan det være en fordel å kunne gjøre om, sant. Så vi slipper forholde oss til så store tall som dette, som gjerne ikke sier oss så mye når det blir så, ja hvert fall i denne sammenhengen. Hvis det var penger, (2s) da: (ler i slutten her).	**Ikoniske/metaforiske gester**: slår ut med hendene og viser en full favn for å vise noe stort, og trekker de sammen for å vise noe lite – i én dimensjon.  **Ikoniske gester**: Hun viser en åpen favn som hun vugger fra side til side når hun sier gjøre om. **Understrekende gester** der hun lar pennen gli fram og tilbake tre ganger under 120 000 som et stort tall 

Man kan anta at lærer har hørt at elevene brukte enheten desimeter i stedet for kubikkdesimeter (2-202), men at hun vil utfordre hele klassen til å tenke over hva som kan være riktig enhet, ved å komme med et annet rart forslag, slik at elevene reagerer og tenker over hva enheten skal være. De sier feil (2-203), men det hører hun kanskje ikke, og sier ja (2-204). Hun spør også om det var litt mer forståelig, og elevene sier ja (2-205). Lærer bruker

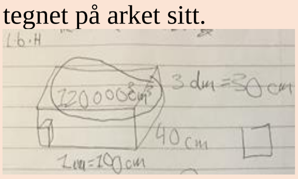
understrekende gester når hun sier at tallet 120 000 cm^3 er stort (2-208), ved å la pennen gli fram og tilbake tre ganger under tallet, og poengterer og understreker derfor at dette tallet er stort. Det er vanskelig å vite hva lærer tenker på i ytring 2-208 når hun viser den åpne favnen, så den kan tolkes som både **ikonisk- og metaforisk gest**, avhengig av om lærer tenker på noe konkret som klasserommet eller noe abstrakt som kubikkdesimeter eller volum av et prisme her. Det er størrelsen på tallet hun snakker om, og et tall er en abstrakt matematisk enhet som beskriver en størrelse, så da kan det ses som en metaforisk gest. De **ikoniske gestene** som hun viser når hun sier «gjør om» i samme ytring, er med på å understøtte omgjøringen av enhetene. Lærer bruker både **ikoner, symboler** og ulike **gester** i tillegg til talen for å mediere volumdiskursen, men allikevel ser det ut til at selve størrelsen til prismet forblir et mysterium.

Et kritisk spørsmål å stille seg her kan være: Er 120 kubikkdesimeter mer forståelig enn 120 000 kubikkcentimeter, hvis elevene fortsatt ikke vet hvor stort det egentlig er? Eleven som tidligere foreslo klasserommet og fire, fem meter, sier nå at det egentlig er ganske lite (2-207), og da gjentar lærer dette: at det gikk fra å være hele klasserommet til å være noe ganske lite (2-208). Er det mindre nå? Her kan både ordbruken og gestene hemme muligheter for utvikling av volumdiskursen, da det kan virke som om størrelsen endrer seg når man bytter enhet. Lærer viser fra stort til lite med håndbevegelser i én dimensjon. Kunne det skapt større muligheter for læring om lærer ikonisk, konkret eller med gester hadde vist hvor stor en kubikkcentimeter, kubikkdesimeter eller kubikkmeter er? At hun hadde brukt hensiktsmessige visuelle mediatorer? Hun kunne for eksempel vist til prismets opprinnelige lengder og vist hvor langt dette blir i hver retning, og dermed totalt i romfang. Kan det være begrensende at lærer bare viser lengde i én dimensjon på meterstav når elevene skal endre sin volumdiskurs? Hun sier også at dette gjerne ikke sier oss så mye, men for at elevenes volumdiskurs skal utvikle seg på dette området, må de få mediert hvor stort dette egentlig er, kanskje helst visuelt. Selv om elevene enda ikke har lært at en kubikkdesimeter er det samme som en liter, kunne dette vært et fint tidspunkt å nevne det på, for elevene har mest sannsynligvis en mer utviklet diskurs når det gjelder størrelsen og romfanget av en liter, enn av en kubikkdesimeter. De fleste niåringer vet nok iallfall hvordan en liter melkekartong ser ut, og kan forholde seg til det. Da kunne de visualisert at 120 slike ikke ville tatt opp hele klasserommet, og heller ikke være så lite som lærer viser (2-208).

4.2.2 «Fra hele rommet til ganske lite» - Intervju av elever fra klasse 4C

Denne episoden i elevintervju 4 starter 24 minutter ut i intervjuet, og det er elevene Magnar, Andrine og Valdemar som deltar. I dette utdraget av elevintervjuet, er vi intervjuere spesielt interessert i om elevene vet hvor mye en kubikkcentimeter er i fysisk størrelse.

Tabell 15 Utdrag fra elevintervju 4 (382-396): «Fra hele rommet til ganske lite»

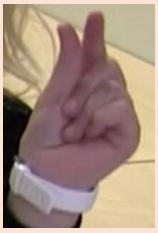
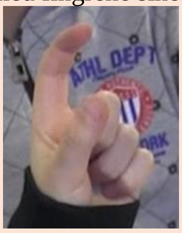
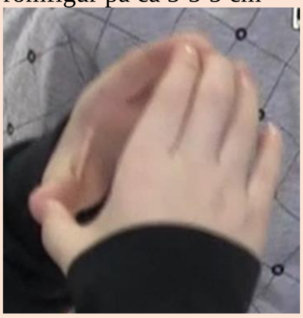
Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer*	Endring i diskurs?
382	Magnar	Ja, hvor stort, men volum, det er hvor mye det har plass i seg.	**Ikonisk:** elevene har fortsatt bildet av oppgaven, og det de har tegnet selv på kladdearket.	Magnar vet at romfigurer har plass inni seg.
386	Magnar	Og hvis det var, ok hvis det var sånn her, der inne kunne man tatt sånn her, mm, nei det husker jeg ikke, men da kunne vi ha funnet ut hvor mange kuber det var plass til der inne.	**Ikonisk:** Magnar tegner inn en kube inni det rektangulære prismet han tegnet på arket sitt. 	Han kan også tegne en figur av en kube, så når han tegner, vet han at en kube både har lengde, bredde og høyde, tre dimensjoner. Han vet også at vi kan få plass til flere inni én, altså at et prisme kan romme mindre enheter. Ordbruken er frasedrevet.
391	Intervjuer1	Hvor mye er en kubikkcentimeter? (3s) Kan dere vise det med hendene for eksempel hvor mye en kubikkcentimeter er?		
392	Magnar	(Tror det var) tre.		Magnar er usikker på hva en kubikkcentimeter er, han sier et tall, og viser ikke en fysisk størrelse.
394	Intervjuer1	Men kan dere gjøre sånn eller sånn eller sånn eller. Hvor mye er en kubikkcentimeter?	**Metaforiske gester:** viser flere forskjellige størrelser med hendene sine i tre dimensjoner.	
395	Andrine	Ehm, det kan være ganske langt og det kan være kort.	**Metaforisk gest:** Magnar viser ved å strekke ut armene slik at de viser hele rekkevidden hans, ca 130 cm.	Andrine snakker om kubikkcentimeter som lengde. Magnar viser også kubikk i én dimensjon, lengde.
396	Magnar	Liksom sånn som dette, lenger enn dette.	**Metaforisk gest:** Minker armslaget til ca 1 m.	Magnar viser fortsatt kubikk i én dimensjon, lengde.

*I dette utdraget var det ikke mulig å ta bilde av gestene og samtidig overholde personvern.

Magnar vet når han tegner (**ikonisk**) at en kube har tre dimensjoner, men det ser ut til at det er vanskelig å overføre til enheten kubikkcentimeter (382-396). Denne vises med **metaforiske gester** i en usikker størrelse, og i kun én dimensjon (395, 396). Sånn sett har han jo imitert læreren, og det fører dessverre ikke til riktig utvikling av diskursen her. I ytring 391 er vi interessert i å se om elevene vet hvor mye en kubikkcentimeter er i fysisk størrelse, siden det i timen ikke kom tydelig fram at det var i tre dimensjoner. Det blir sagt *for eksempel*, slik at de kan tegne det også hvis de vil. Magnar sier et tall, tre (392). Det er nok ikke tilfeldig at tallet er tre, siden kubikkcentimeter skrives som cm^3, men dette blir spekulasjoner.

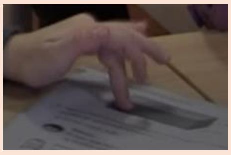
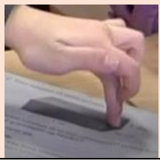
Siden elevene ikke klarer å vise eller forklare hvor stor en kubikkcentimeter er, er vi i fortsettelsen interessert i å vite om elevene vet hvor stor en centimeter er, for å se om de kanskje klarer å resonnere seg til hva en kubikkcentimeter må være etterpå. Valdemar og Magnar vet at en centimeter er ti millimeter (narrativ på objekt-nivå), mens Andrine er først til å vise fysisk hvor stor en centimeter er med fingrene sine (**metaforisk gest**). Da **peker** Magnar på Andrines hånd etter hvert, så det er usikkert om Magnar visste dette selv, men det viser hvor viktig læring som deltakelse er. Valdemar viser etter hvert også åpning mellom tommel og pekefinger på en centimeter, en **metaforisk gest**. Elevene blir igjen spurt om hvor stor en kubikkcentimeter er, og vi ser i fortsettelsen av den tematiske episoden «Fra hele rommet til ganske lite» (405-410) at elevene gjetter på lengder i stedet for å snakke om enhetene i tre dimensjoner.

Tabell 16 Utdrag fra elevintervju 4 (405-410): «Fra hele rommet til ganske lite»

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer	Endring i diskurs?
405	Andrine	Det er hundre sånne. På grunn av (ukjent tekst).	**Metaforisk gest**: Andrine viser en centimeter med fingrene sine.   Samtidig øker Valdemar åpningen sin mellom fingrene til ca 3-5 cm – **metaforisk gest**	Andrine tror at en kubikkcentimeter er hundre centimeter. Valdemar tror at en kubikkcentimeter er ca. 3 cm.
406	Magnar	Kubikkcentimeter, det må være tre hundre millimeter, det gjetter jeg!	**Understrekende gest:** Magnar slår håndflaten noen ganger i bordet. **Metaforisk gest:** Valdemar viser noe som kan ligne på en romfigur på ca $5{\cdot}5{\cdot}5\ cm^3$ 	Magnar er fortsatt usikker på hva en kubikkcentimeter er, han gjetter, og fortsatt går det i tall, han tror det er tre hundre millimeter; tretti centimeter. Det ser ut til at Valdemar nå foreslår at en kubikkcentimeter er en romstørrelse, men det er vanskelig å vite, da han hele tiden ser spørrende på de andre, og endrer på gestene.
407	Andrine	Sånn her sikkert. (2s) jeg tror det.	**Metaforisk gest:** Andrine viser rekkevidden sin med armene. 	Andrine gjetter på størrelsen, i én dimensjon, over en meter.
408	Valdemar	(ukjent tekst) kanskje sånn.	**Metaforisk gest:** Valdemar ser på Andrine og øker lengden mellom hendene til ca. skulderbredde. 	Valdemar er usikker, og prøver forskjellige lengder mens han ser på reaksjoner fra de andre.
409	Magnar	En kubikkcentimeter er hundre centimeter.		Magnar har landet på et svar, et tall, likt det Andrine viste.
410	Intervjuer2	Mhm, så en centimeter var så liten, men en kubikkcentimeter blir større? Blir centimeteren større når du får kubikken? …	**Metaforisk gest:** viser en centimeter med fingrene sine	

Det kan virke som at elevene er veldig usikre på hvor stor en kubikkcentimeter er. De gjetter og foreslår flere forskjellige lengder i én dimensjon ved å vise **metaforiske gester**, for å se om de kan få godkjennelse på det de foreslår. Dette er utvikling av ritualiserte rutiner, der det er viktig å være en del av fellesskapet, og elevene er fornøyde hvis de svarer riktig eller får positiv tilbakemelding. Intervjuers siste spørsmål (410) klarer ikke elevene svare på, og de mister litt fokus. Vi prøver derfor å hente dem inn igjen ved å spørre om hva de gjorde i klasserommet når de fikk det store tallet. Det går deretter et halvt minutt der elevene snakker om at de husker det eller ikke, til Magnar sier at det går an å gjøre om alt til desimeter (448).

Tabell 17 Utdrag fra elevintervju 4 (448-465): «Fra hele rommet til ganske lite»

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer	Endring i diskurs?
448	Intervjuer1	Men husker dere at siden dere fikk så stort tall, så gjorde dere i timen, så regnet dere det i kubikkdesimeter i stedet for.		
462	Magnar	Se, vi kan jo gjøre eh alt det her til desimeter.	**Deiktisk gest:** Peker på oppgaven.	Magnar gjenkaller etter hvert at de gjorde om alle enhetene til desimeter i timen, at det var slik de fikk kubikkdesimeter.
463	Intervjuer1	Mm.		
465	Magnar	Hundre desimeter, førti desimeter. Da kan vi også finne det ut. Da blir det hundre og tjue.	**Deiktiske gester: Etterfølgende peking** på enhetene i oppgaven, først på lengden når han sier hundre desimeter:  Deretter på bredden når han sier førti desimeter: 	Om Magnar regner her, gjør om eller om han bare husker tallet fra timen, er uvisst, men det kan virke som han bare husker det, siden han sier det uten at han har sagt høyden, og uten å si at han multipliserer tallene.

Magnar bruker **deiktiske gester** for å få oppmerksomheten rettet mot oppgaven og det han vil si (462 og 465). Han har tidligere vist at han kan gjøre om på enhetene, så det er usikkert om han bare *sier* feil når han sier at lengden er hundre *desimeter* og bredden førti *desimeter*, eller om han gjør om feil mellom enhetene. Det første er mest sannsynlig, da han allerede har skrevet på arket sitt at $1m = 100cm$. Magnar gjenkaller at de gjorde om til desimeter i timen. I fortsettelsen spør intervjuer om 120 kubikkdesimeter er et bedre tall enn 120 000 kubikkcentimeter, og Magnar sier at det ikke er det. Han sier også at det er like mye når intervjuer spør om 120 kubikkdesimeter er mindre enn 120 000 kubikkcentimeter. Dette virker han veldig trygg på (til tross for at jeg i analysen av «Fra hele klasserommet til ganske lite» fra klasserommet til 4C (4.2.1) indikerte at lærer kan ha forvirret elevene her).

Resultater fra elevintervju 4 kan tyde på at elevenes diskurs av **symbolske** og **ikoniske** visuelle mediatorer er mer utviklet enn de **konkrete** mediatorene og **gestene.** Kan dette ha noe å gjøre med lærers bruk av konkreter og gester og mulighetene hun sådan gir elevene til læring i plenumsundervisningen? Dette ser jeg nærmere på i diskusjonen. I fortsettelsen vises et lite utdrag fra elevintervju 5, der det er en mer utviklet diskurs i forhold til gester om kubikkcentimeter.

4.2.3 «Fra hele rommet til ganske lite» - Intervju av elev fra klasse 4B

Denne episoden i elevintervju 5 starter omtrent 18 minutter ut i intervjuet. Intervjuerne er også her interessert i om elevene vet hvor mye en kubikkcentimeter er i fysisk størrelse, og vi ser at diskursen er mer utviklet på dette området.

Tabell 18 Utdrag fra elevintervju 5 (441-442): «Fra hele rommet til ganske lite»

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer*	Endring i diskurs?
441	Intervjuer	Hvordan ser, hvis jeg skulle laget en kubikkcen centimeter, hvordan hadde den, (.) hvor stor?	**Metaforisk gest:** 	
442	Amandus	Det hadde vært en (.) terning på en centimeter på (.) bredden, høyden og lengden, da er det en kubikkcentimeter	**Ikonisk/Metaforisk gest:** 	Amandus er presis og frasedrevet i ordbruken, og også i de metaforiske gestene.

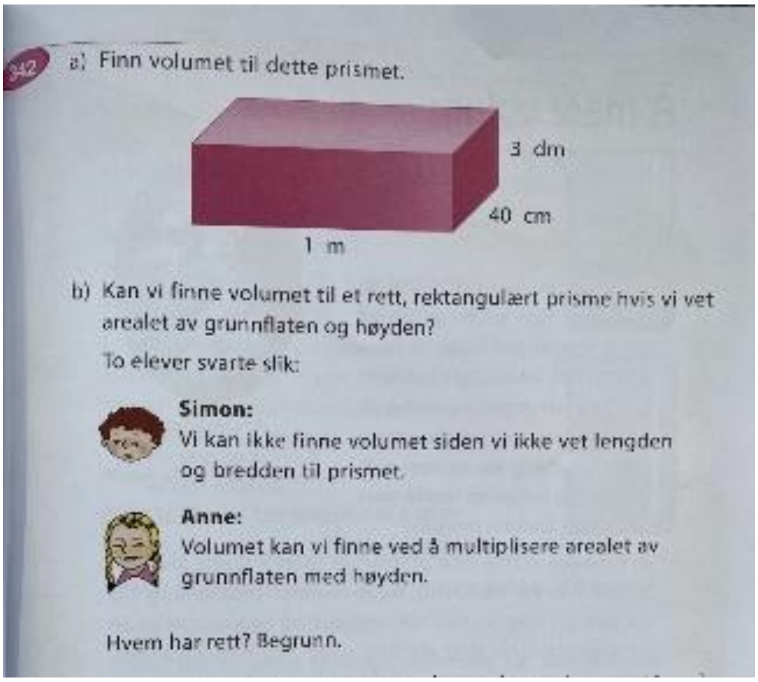
Amandus er sikker og presis i ordbruken sin (frasedrevet ordbruk), han sier at det hadde vært en terning med både lengde, bredde og høyde på en centimeter hver, og han er også ganske presis når han viser gestene sine (442). Dersom Amandus tenker på en konkret terning på en kubikkcentimeter, er denne gesten **ikonisk**, men det er mer sannsynlig at han bruker ordet terning her i abstrakt betydning, og kanskje ser for seg et ikon e.l. av en terning med sider på 1 cm, og gesten kan derfor karakteriseres som **metaforisk** for den abstrakte størrelsen kubikkcentimeter. Han viser litt forskjellige størrelser med hendene sine, oppimot fem centimeter i lengde, bredde og høyde, men allikevel bruker han fingrene til å vise omtrent en centimeter, så dette er nok bare litt unøyaktighet. Vi kan for øvrig se i ytring 441 at intervjuer viser slike gester også, så det er vanskelig å vite om Amandus utviklet diskursen sin i akkurat det øyeblikket, men da det kommer så kontant og presist, er det sannsynlig at diskursen hans allerede var velutviklet på dette området før intervjuet. Denne rutinen kan derfor karakteriseres som utforskende, der det handler om å kunne og å vite.

4.3 «Hvem har rett?»

Den tematiske episoden «Hvem har rett?» tar utgangspunkt i to ulike diskusjonsoppgaver der elevene i tillegg til oppgaven får presentert noen elevsvar. De skal diskutere sammen med læringsvenn og begrunne hvem av elevene i oppgaven som har rett. I delkapittel 4.3.1 skal elevene diskutere om man kan finne volumet til et rett, rektangulært prisme dersom man vet arealet av grunnflaten i tillegg til høyden. Delkapittel 4.3.2 tar for seg en diskusjon rundt Arkimedes prinsipp, der elevene skal finne ut hvor mye vannet vil stige i en beholder dersom det legges en terning oppi. Arkimedes prinsipp sier at «en gjenstand som er helt eller delvis nedsenket i en væske eller gass får en oppdrift lik tyngden av den væskemengden som gjenstanden fortrenger» (Pedersen, 2020). I disse episodene er det mer bruk av konkreter, og gestene er også tydeligere, så de blir brukt som gode eksempler på visuell mediering av volumobjektet.

4.3.1 Å finne volum av en eske når man har oppgitt grunnflaten og høyden

I fortsettelsen av oppgave 342 fra de tidligere episodene, presenterer lærer oppgave b) (se figur 5) for elevene, der de skal diskutere om man kan finne volumet til et rektangulært prisme dersom man vet arealet av grunnflaten og lengden til høyden.


342 a) Finn volumet til dette prismet.

3 dm

40 cm

1 m

b) Kan vi finne volumet til et rett, rektangulært prisme hvis vi vet arealet av grunnflaten og høyden?

To elever svarte slik:

Simon:
Vi kan ikke finne volumet siden vi ikke vet lengden og bredden til prismet.

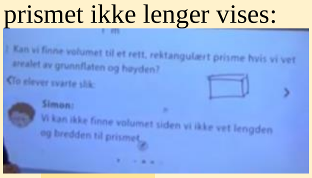
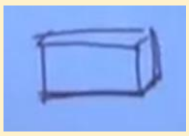
Anne:
Volumet kan vi finne ved å multiplisere arealet av grunnflaten med høyden.

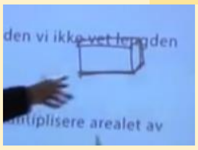
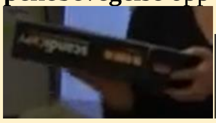
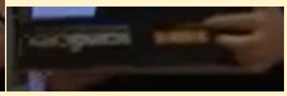
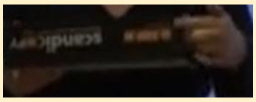
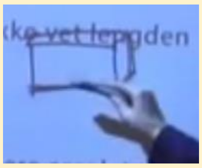
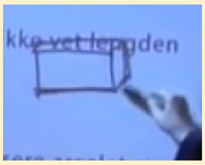
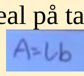
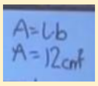
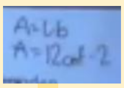
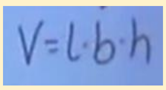
Hvem har rett? Begrunn.

Figur 5 Oppgave 342 a) og b) (Arginskaya et al., 2017, s.35).

Under følger et utdrag fra plenumsdiskusjonen i klasserommet til 4A, som også er representativt for diskursen i klasserommet til 4B og 4C.

Tabell 19 Å finne volum av en eske når man har oppgitt grunnflaten og høyden, fra klasserommet til 4A

Ytring	**Matematist**	**Diskurs**	**Visuelle mediatorer**
105	Lærer	Kan vi finne volumet til et rett, rektangulært prisme hvis vi vet arealet av grunnflaten og høyden? (4s) Altså, går det an til å finne volumet til et rett rektangulært prisme. (.) For eksempel (2s) hvis jeg bare veldig kjapt tegner (4s) et prisme her, kan jeg finne volumet hvis jeg har arealet av grunnflaten? (.). Arealet av grunnflaten (.) pluss høyden? (2s) Et lite øyeblikk (.) så skal vi se på hva Simon sier. Nei, vi kan ikke finne volumet side vi ikke vet lengden og bredden til dette prismet. (.) Anne hun sier volumet kan vi finne ved å multiplisere arealet av grunnflaten med høyden. (3s) Hvem tror dere har rett? (2s)	**Ikonisk:** oppgaven vises.  Etterpå zoomer lærer inn på oppgaven slik at prismet ikke lenger vises:  Da tegner hun et nytt prisme:    **Gester**: Lærer tydeliggjør bunnen av det tegnede prismet for å vise at dette er grunnflaten (lengden og bredden ved **repetert etterfølgende understreking** med tusjen, først lengden tre ganger, og deretter bredden tre ganger). Etterpå markeres også høyden i prismet med tusjen.

106	Lærer	Altså skal gjenta, spørsmålet var, går det an å finne volumet av denne esken (.) dersom jeg har arealet av grunnflaten, dere vet hva grunnflaten er? (2s) Sant, dette er grunnflaten. (2s) Ja, også har jeg høyden. (2s) Hvis jeg vet høyden og jeg vet arealet av grunnflaten, kan jeg da finne volumet av denne esken? (3s) Og det er der Simon sier nei, det kan vi ikke fordi vi vet ikke lengden og bredden. (3s) Sant, vi vet kun høyden (.) og arealet. (.) Mens hun Anne sier eh:: ja (.) det kan vi fordi at vi kan multiplisere, altså gange, arealet av grunnflaten, det, denne, med høyden. (2s) Noen som tør å si noe om hvem som har rett? (.) Fordi de er jo ikke helt enige her. (3s) Hvem har rett her? (5s) Hvem har rett? Varg?	**Deiktisk gest**: Peker konkret på det tegnede prismet når hun sier «esken» første gang.  **Konkret:** Lærer tar fram en fysisk eske når hun sier sant, dette er grunnflaten. **Gester:** Beveger den ene hånda i en **glidende understrekende** bevegelse fram og tilbake med håndflaten opp under esken for å vise hvor grunnflaten er. **Understrekende glidende pekebevegelse** opp og ned langs høyden også.   Deretter gjør hun samme **understrekende** bevegelse under grunnflaten igjen når hun snakker om denne og gjør **glidende pekebevegelser** på høyden igjen når hun snakker om høyden.   Legger esken fra seg.
107-117: Noen elever kommer med forslag om at det er Anne som har rett, og Målfrid sier at «når du vet arealet av noe så ganger man de to sidene». Lærer forsikrer seg deretter om at det var det de andre elevene også mente.			
118	Lærer	≈Du ville og si det samme. (.) Hørte Hi du Hilde hva hun forklarte nå? (2s) Nei du for du snakket gjerne litt lavt, men jeg skal prøve å repetere så må du si om det stemmer med slik som du tenker, (.) Målfrid. At du sier hvis vi har, hvis vi skal finne arealet av en grunnflate, (2s) A så tar vi lengde ganger bredde. (2s) Sier Målfrid, var det ikke slik du mente? (.) Og hvis vi da har et areal (.) fordi at vi har ganget lengde ganger bredde (.) si at det ble tolv for eksempel, tolv kvadratcentimeter. (.) Så hvis vi hadde arealet av den grunnflaten og fikk oppgitt en høyde (5s) for eksempel to. Skal vi si høyden var to? (2s) Så kunne vi finne (2s) volumet av esken. (2s) Fordi at da har vi allerede (.) eh:: (.) arealet som er lengde ganger bredde (.) og pluss høyden da (3s) som vil det bli det samme. (3s) Enig Linda? (.) Vibeke og? (2s) Tenker dere og alle at Anne har rett?	**Deiktiske og understrekende gester:** Peker på det tegnede prismet. **Glidende pekebevegelser** langs lengden og bredden når hun snakker om grunnflaten, disse pekegestene er også **etterfølgende** og hun gjør det to ganger, derfor karakteriseres det som **understrekende gest**.   **Symbol:** skriver formelen for areal på tavlen over prismet hun har tegnet. $A = l \cdot b$  **Deiktisk gest: Peker** på lengden før hun skriver l. **Symbol:** Lærer fyller også inn formelen med tallene hun foreslår: 12 cm^2.  **Deiktiske og understrekende gester:** Glidende pekebevegelser igjen langs lengden og bredden mens hun sier arealet. Hun gjør dette tre ganger, derfor **understrekende gester. Hun peker** også på høyden.    **Symbol:** skriver $\cdot$ 2 i formelen, og deretter $V = l \cdot b \cdot h$.
119	Elever	[Ja].	**Emblem**: Flere av elevene nikker.

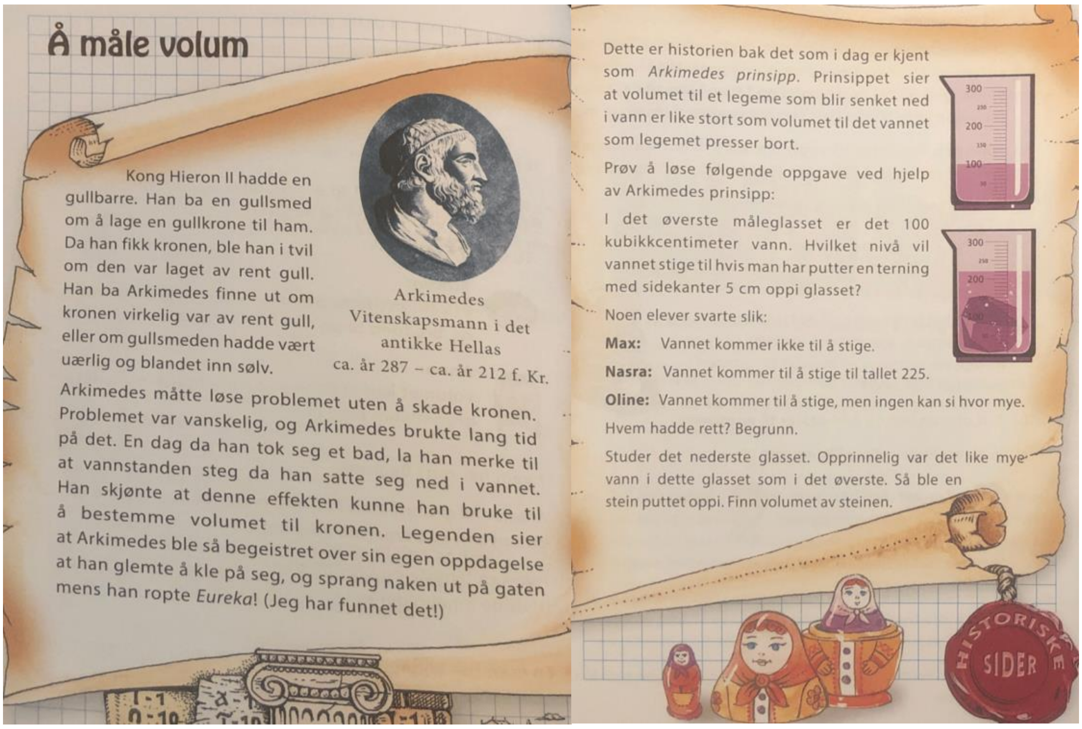
Lærer viser først et bilde (**ikonisk**) av hele oppgaven, men når hun zoomer inn på b)-oppgaven, er ikke prismet synlig lenger. Derfor tegner hun opp et nytt prisme (**ikonisk**), og bruker i tillegg **understrekende gester** for å tydeliggjøre grunnflaten (105). Det kan være vanskelig å tolke disse gestene som bare en type, da det både er peking, siden det brukes en forlenging av hånden, og samtidig understrekende gester. Det er repeterende pekegester på lengden og bredden, samtidig som det er etterfølgende pekegester fordi man først streker under lengden, deretter bredden. Utfra kategoriseringen kodes det allikevel som understrekende, men i tråd med McNeill (2005) kan gestene tolkes på flere dimensjoner.

Lærer peker konkret (**deiktisk gest**) på prismet når hun spør om det «går an å finne volumet til denne esken» (106). Ved å bruke ordet eske her, i tillegg til prisme som ble brukt tidligere, gjør hun muligens oppgaven mindre abstrakt og lettere å forestille seg. Deretter tar hun frem en **konkret** eske, en slik man har A4-papir i, og utfører gester på denne. Hun beveger den ene hånda i en **glidende understrekende** bevegelse fram og tilbake med håndflaten opp under esken, og dette gjør det veldig synlig for elevene hva som er grunnflaten. I tillegg bruker lærer **understrekende glidende pekebevegelse** opp og ned langs høyden. Begge disse gestene gjentas, sammen med talen, og lærer får virkelig poengtert og gjort synlig grunnflaten og høyden i prismet. Som i ytring 105 tolkes disse gestene som **understrekende**, men kan samtidig tolkes på flere dimensjoner. Etter at elevene har kommet fram til at det var eleven Anne i oppgaven som hadde rett, forklarer lærer igjen, og igjen bruker hun **understrekende gester** på det tegnede prismet (**ikonisk**) i tillegg til **symbolske** visuelle mediatorer (118). Lærer skriver inn ·2 i arealformelen, og det kan være litt misvisende, at høyden plutselig kommer inn der, men hun bruker symboler til å skrive ned volumformelen etterpå også.

Som Radford (2003) fremmer med den semiotiske noden, kan vi se at de visuelle mediatorene brukes synkront med talen. I disse få ytringene er det veldig mye bruk av visuelle mediatorer, alle de fire typene, slik at det som lærer ytrer blir ekstra synlig. Men, selv om det var en variert bruk av visuelle mediatorer her, var ikke bruk av den konkrete esken planlagt, denne ble brukt fordi den tilfeldigvis var tilgjengelig i klasserommet. I de samsvarende episodene i de andre klasserommene er gestene ganske like, men i 4C bruker lærer i tillegg en del **holdepunkt** som **deiktiske gester**, der hun holder på lengden og bredden av den konkrete esken mens hun snakker om dem, som kan poengtere godt at grunnflaten består av lengden og bredden i prismet.

4.3.2 Hvor mye stiger vannet?

Dette delkapittelet tar for seg en diskusjon rundt Arkimedes prinsipp, der elevene skal finne ut hvor mye vannet vil stige i et målebeger dersom det legges en terning med sidekanter på 5 cm oppi vannet (se figur 6).


Å måle volum

Kong Hieron II hadde en gullbarre. Han ba en gullsmed om å lage en gullkrone til ham. Da han fikk kronen, ble han i tvil om den var laget av rent gull. Han ba Arkimedes finne ut om kronen virkelig var av rent gull, eller om gullsmeden hadde vært uærlig og blandet inn sølv.

Arkimedes
Vitenskapsmann i det antikke Hellas
ca. år 287 – ca. år 212 f. Kr.

Arkimedes måtte løse problemet uten å skade kronen. Problemet var vanskelig, og Arkimedes brukte lang tid på det. En dag da han tok seg et bad, la han merke til at vannstanden steg da han satte seg ned i vannet. Han skjønte at denne effekten kunne han bruke til å bestemme volumet til kronen. Legenden sier at Arkimedes ble så begeistret over sin egen oppdagelse at han glemte å kle på seg, og sprang naken ut på gaten mens han ropte *Eureka*! (Jeg har funnet det!)

Dette er historien bak det som i dag er kjent som *Arkimedes prinsipp*. Prinsippet sier at volumet til et legeme som blir senket ned i vann er like stort som volumet til det vannet som legemet presser bort.

Prøv å løse følgende oppgave ved hjelp av Arkimedes prinsipp:

I det øverste måleglasset er det 100 kubikkcentimeter vann. Hvilket nivå vil vannet stige til hvis man har putter en terning med sidekanter 5 cm oppi glasset?

Noen elever svarte slik:

Max: Vannet kommer ikke til å stige.

Nasra: Vannet kommer til å stige til tallet 225.

Oline: Vannet kommer til å stige, men ingen kan si hvor mye.

Hvem hadde rett? Begrunn.

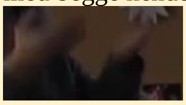
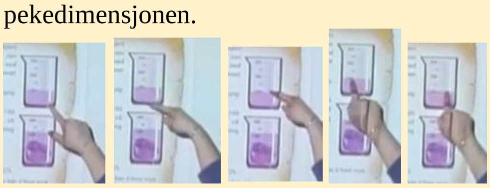
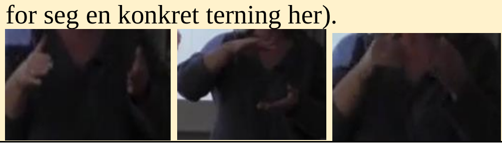
Studer det nederste glasset. Opprinnelig var det like mye vann i dette glasset som i det øverste. Så ble en stein puttet oppi. Finn volumet av steinen.

HISTORISKE SIDER

Figur 6 Oppgaven om Arkimedes prinsipp (Arginskaya et al., 2017, s.36-37).

Klasse 4C blir presentert for noen elevsvar, og de skal diskutere med læringsvenn, hvem av elevene i oppgaven som har rett. Diskursen er representativ for samsvarende episode i klasserommet til 4A og 4B også, men det blir kommentert på noen ulikheter i etterkant av utdragene. Lærer bruker **ikonisk** visuell mediator når hun viser bildet av oppgaven, og hun starter med å fortelle litt om historikken rundt Arkimedes prinsipp; om Kong Hieron den andre som hadde en gullbarre og fikk gullsmeden til å lage en krone av den. Etterpå lurte Kong Hieron på om gullsmeden hadde vært uærlig og blandet inn sølv i krona, og han ba Arkimedes om hjelp til å finne det ut. En dag da Arkimedes tok seg et bad, merket han at vannstanden i badekaret steg når han satte seg oppi, og lærer spør elevene om de kjenner seg igjen i det, noe de svarer ja til. Under følger videre diskurs fra klasserommet til 4C.

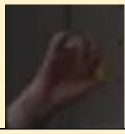
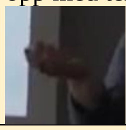
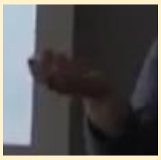
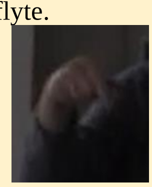
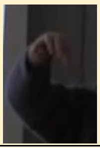
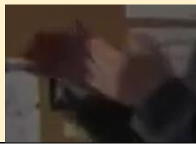
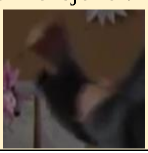
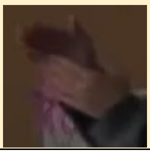
Tabell 20 Hvor mye stiger vannet, fra klasserommet til 4C (171-173)

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
171	Lærer	Ja, at vannet stiger når du går nedi enten det er et basseng eller noe, det må være et plaskebasseng du merker det ikke i et stort. Eh (.) han skjønte at denne effekten kunne han bruke til å bestemme volumet til denne kronen. Legenden sier at Arkimedes ble så begeistret over sin egen oppdagelse at han glemte å kle på seg. Ja han sprang naken ut på gaten mens han ropte Eureka! Som betyr, jeg har funnet det. (.) Veldig fornøyd med seg selv (.), hm? Og dette er historien bak det vi kaller i dag for Arkimedes prinsipp, prinsippet sier at volumet til et legeme som senkes i vann, er like stort som volumet til det vannet som legemet presses, eh:, presser vekk. Så står det, prøv å løs følgende oppgave med hjelp av Arkimedes sitt prinsipp da. I det øverste vannglasset er det målt hundre kubikkcentimeter med vann, ser dere det at den går til hundre her?	**Ikonisk gest**: Viser stigende gester samtidig med begge hendene, med håndflatene oppover.  **Ikonisk gest:** Viser et lite område med hendene sine når hun sier plaskebasseng.  **Understrekende og deiktiske gester:** **Glidepeker** på høyden i det øverste målebegeret, både langs yttersiden av målebegeret vertikalt, og ved høyden til vannet horisontalt. Opp og ned noen ganger og fram og tilbake flere ganger, derfor **understrekende**, men også på pekedimensjonen. 
172	Elever	Ja	
173	Lærer	Og hvilket nivå vil vannet stige til hvis du putter oppi en terning som har sidekantene fem centimeter? (3s) Snu deg mot læringsvennen din og snakk, hvor mye tror du? …	**Metaforisk gest**: Viser en kubeform med hendene, tre dimensjoner. Størrelse: ca 20 cm. (Kan også være ikonisk gest dersom lærer ser for seg en konkret terning her). 

Som beskrevet av McNeill (1992) kan vi se at lærer bruker **ikoniske gester** når hun forteller historien om Arkimedes (semantisk innhold), der hun vil gjøre synlig det at vannet stiger, og et lite basseng (171). Hun bruker også **understrekende og deiktiske** gester ved å glidepeke langs vannstandens høyde i målebegeret både vertikalt og horisontalt. I tråd med Arzarello et al (2015), kan vi se at det brukes **metaforiske gester** i tre dimensjoner for å vise en kubeform når lærer snakker om terningen som skal puttes oppi vannet (173). Lengden, bredden og høyden vises som en god del større enn fem centimeter.

I fortsettelsen diskuterer elevene seg imellom, og lærer spør en elev om det er forskjell på hvilken terning det er. Eleven sier at det spørs hvor tung den er, og Julius sier at de har noen myke terninger i klasserommet som nesten ikke veier noe, og vil suge opp vann. Han peker på en koffert med skumgummiterninger som lærer tar fram. Under følger videre diskurs.

Tabell 21 Hvor mye stiger vannet, fra klasserommet til 4C (183-192)

Ytring		**Matematist**	**Diskurs**	**Visuelle mediatorer**
183		Lærer	De veier nesten ingenting nei? Disse tenker du?	**Konkret:** Holder opp skumgummiterning 
184		Julius	Ja, de veier nesten ingenting	
185		Lærer	Nei, så kanskje de bare rett og slett vil≈	**Ikonisk gest og konkret:** Holder håndflaten opp med terningen oppi. 
186		Elever	≈flyte	
187		Lærer	Flyte ja, og ikke synke nedi	**Ikonisk gest og konkret:** Holder håndflaten opp med terningen oppi. Rister litt forsiktig på den for å vise flyte.   **Deiktisk (og ikonisk) gest:** Når hun sier «synke nedi» tar hun terningen inni hånda og peker pekefinger nedover.
188		Elev	Du må bruke steinterning	
189		Elev	De går jo bittelitt nedi?	
190		Lærer	Bittelitt nedi ja? Ja, men hvis, hvis, hvis man har vanlig terning, som består av sånn litt plastikk vi er vant til å trille med, hvis du da slipper den nedi≈	**Ikonisk gest:** Lager trillebevegelse med hånd, som om plastikkterningen er oppi **Deiktisk gest:** Peker nedover. 
191		Elev	≈Den synker≈	
192	a	Lærer	≈et beger, Valdemar, hva tror du skjer da?	
	b	Valdemar	At vannet vil stige oppover?	
	c	Lærer	Hvor mye vil den stige hvis terningen er hard med sidekanter fem centimeter?	**Metaforisk/ikonisk gest**: Viser en kubeform med hendene, tre dimensjoner.   

Igjen kan vi se at lærer bruker **ikoniske gester** synkront med talen for å synliggjøre det hun snakker om, for eksempel flyte, synke og trille med terningen (187 og 190). Hun bruker også **metaforiske gester** ved å synligjøre terningen i tre dimensjoner (192c). I elevintervju 4 så vi at Andrine, Valdemar og Magnar fra 4C viste kubikkenheter i bare én dimensjon, selv om lærer da har vist metaforiske gester i tre dimensjoner i klasserommet. Dette kan kanskje ha med konteksten å gjøre, ved at det ikke blir snakket om kubikkenheter i disse utdragene, men der diskursen handler om kubikkenheter blir det brukt mer utydelige gester i én og to dimensjoner. Også i dette utdraget bruker lærer en **konkret** visuell mediator, en skumgummiterning, men som tidligere er heller ikke denne bruken planlagt, og lærer vet ikke om kofferten med terningene som ligger i klasserommet. Det medieres iallfall med både bruk av konkreter og gester i denne volumdiskursen.

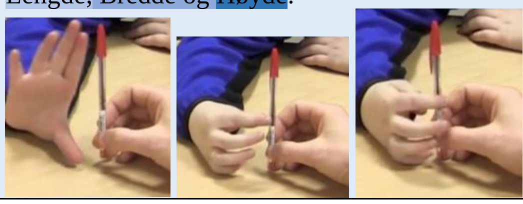
I fortsettelsen av dette utdraget, foreslår Valdemar formelen for volum av et prisme, og at «fem ganger fem ganger fem» blir hundre og tjuefem. Derfor tror han svaret på oppgaven blir tohundre og tjuefem. Dette er en gjenkallende og kanskje også underbyggende utforskende rutine. Når lærer spør om de andre er enig, kommer de inn på skumgummiterningene igjen, og at det kommer an på hvilken terning man bruker, hva tyngden er. Dette kan tolkes som at elever og lærer i fellesskap har *konstruert* et nytt narrativ (utforskende rutine) om at tyngden av et legeme har noe å si for hvor mye væske som fortrenges – jamfør Arkimedes prinsipp.

I diskursen i klasserommet til 4A er det litt forskjeller i gestene som brukes, ved at lærer bruker flere **ikoniske gester** underveis enn det hun gjør i 4C, men hun viser gester i bare to dimensjoner i stedet for i tre dimensjoner. Hun bruker også skumgummiterningene bevisst som eksempel i de to andre klassene, mens hun i 4C ikke visste at de hadde slike terninger tilgjengelig før hun ble gjort oppmerksom på det. I 4A bruker hun skumgummiterningen konkret, mens i 4B bruker hun ikoniske gester sammen med talen, som om hun har en skumgummiterning mellom tommel og pekefinger. I tillegg til lærers bruk av visuelle mediatorer, kom det også i elevintervjuene fram at elevene selv har et behov for å bruke mediatorer som gjør det de snakker om synlig. Dette presenteres i neste delkapittel.

4.4 «Du ser på en måte»

I den tematiske episoden «Du ser på en måte», vil elevenes behov for å bruke visuelle mediatorer bli mer synlig, da det presenteres gode eksempler på elevenes bruk av disse. Det ble veldig tydelig i elevintervjuene at elevene ville ha noe **konkret** å vise til i volumdiskursen. De var også veldig opptatt av å få tegnet ned **ikoner og symboler** selv om de hadde oppgaven rett foran seg. **Gestene** ble ofte brukt i tillegg til konkreter, for å forklare, eller for å samle oppmerksomheten mot symboler eller ikoner (Jamfør Radfords (2003) semiotiske node). Under følger utdrag av diskursen fra elevintervju 5, med elevene Amandus, Lisbeth og Fiona fra 4B. De to første utdragene er fra diskursen som foregår i forkant av episoden «Like enheter» (4.1.4), og det tredje utdraget skjer i etterkant av denne episoden.

Tabell 22 Utdrag fra elevintervju 5 med gode eksempel på bruk av visuelle mediatorer (295-304)

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
295	Intervjuer	Husker dere hva det [volum] var for noe?	
296	Amandus	[Ja det er hvor mye plass]	
297	Fiona	[Det var liksom volumet] til fi:gurer [eller hvor mye]	
298	Amandus	[Det er hvor mye] plass en figur tar i en boks (ukjent tekst) [eller i et rom]	
299	Intervjuer	[Ja hvor mye plass] det tar opp ja, (1s) men	
300	Lisbeth	For eksempel volumet til denne	**Konkret**: Ser en penn på bordet og holder den opp. 
301	Intervjuer	Volumet til denne, hvordan kan en finne volumet til, eller (.) trenger ikke regne på det, [men hva vil]	**Konkret**: Intervjuer viser også fram pennen. 
302	Lisbeth	[Det er litt] vanskelig	
303	Intervjuer	Ja, (.) hva vil	
304	Amandus	L:::engde ganger [bredde, ganger høyde]	**Konkret** + viser **metaforiske gester** på konkretet; Lengde, Bredde og Høyde: 

Det er volumets romfang som kommer tydeligst fram i elevenes diskurs (296-298), som kan tyde på at dette narrativet av volumobjektet er nærmere en individualisering enn det at volum også er kubikkinnhold. Det ligger en penn på bordet, og den blir fort oppdaget av Lisbeth som holder opp pennen (**konkret**) når hun skal gi eksempel på noe som har volum (300). Når hun sier (302) at det er litt vanskelig, er det fordi hun vet at pennen ikke er et rett, rektangulært prisme som er det de har lært å finne volumet av. Hun presiserer i en senere ytring at pennen er rund. Når intervjuer allikevel vil vite noe om hvordan man kan finne volum, bruker Amandus pennen (**konkret**) til å vise **metaforiske gester** for lengden, bredden og høyden (304). Det blir litt vanskelig å se forskjell på bredde og høyde, men det er også fordi pennen ikke er et prisme, bare et provisorisk konkret som blir brukt som støtte for elevenes forklaring her. Disse **metaforiske gestene** som Amandus viser på den **konkrete** pennen (304), gjentas et par ytringer senere, når han sier «lengde ganger bredde ganger høyde» igjen. Det kan virke som Amandus har en objektdrevet ordbruk når han forklarer hva volum er i ytring 298; at ordet volum lever sitt eget liv som et substantiv, og at han kan knytte ordet til et unikt realiseringstre. Ordbruken er iallfall frasedrevet, ved at han kan bruke ordet naturlig i setningen. De snakker i fortsettelsen om hva volum er.

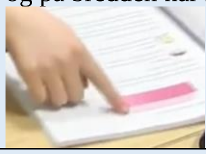
Tabell 23 Utdrag fra elevintervju 5 med gode eksempel på bruk av visuelle mediatorer (330-338)

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
330	Intervjuer	… men volum det var mer, da snakket dere om hvor mye du kunne	
333	Amandus	[Da kan vi for eksempel] bruke den for	**Konkret:** Tar opp lydopptakeren 
334	Intervjuer	Ja	
335	Amandus	For hvis den hadde vært hul	
336	Intervjuer	Ja (1s) så	 Intervjuer tar lydopptaker fra Amandus
337	Amandus	Vi kan ta, (.) vi kan regne ut volumet til den boksen	**Deiktisk gest:** Peker på noe utenfor videobilde og rekkevidde for seg selv.
338	Intervjuer	Ja jeg hadde faktisk et bilde jeg, (.) så kan dere se	**Ikonisk:** Tar frem boken og viser bildet av prismet. **Deiktisk gest; holdepunkt**: peker på prismet. 

Igjen ser vi at Amandus vil ha noe **konkret** når han skal forklare volumobjektet. Han tar opp lydopptakeren (333), som kan minne om et rektangulært prisme, og sier at «for hvis den hadde vært hul» (335). Denne ytringen kan også vitne om at kubikkinnhold er mindre kjent for elevene i volumdiskursen enn romfang. Her kunne kanskje intervjuer spurt om den måtte være hul. Når intervjuer tar lydopptakeren fra Amandus, leter han etter noe annet **konkret** han kan bruke i diskursen sin, og **peker** på en boks som står utenfor hans rekkevidde når han sier at de kan regne ut volumet til den boksen (337). Intervjuer tar da fram boken (338) med bildet av prismet (**ikonisk**) og da begynner de **deiktiske gestene** som støtte for forklaringene og for å skape et felles fokus, som vist i episoden om «Like enheter» fra elevintervju 5 (4.1.4).

I neste utdrag følger en diskusjon om det å lage hjelpetegning, og det er tydelig at elevene gjør dette da oppgaven blir mer overkommelig når den gjøres visuell. Elevene har blitt spurt om de kan finne volumet til prismet i oppgave 342a) og har fått penn og papir. Amandus skal skrive, og Lisbeth forklarer til Amandus hva han skal skrive (382).

Tabell 24 Utdrag fra elevintervju 5 med gode eksempel på bruk av visuelle mediatorer (382-394)

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
382	Lisbeth	… Men du må først skrive hundre:: centimeter, og tretti centimeter og førti. (1s) (ukjent tekst) centimeter. (4s) Skulle hatt linjal	**Deiktiske gester: Peker** på lengden når hun sier hundre centimeter:  **Peker** på høyden når hun sier tretti centimeter, og på bredden når hun sier førti: 
383	Intervjuer	Hehe	
384	Amandus	Vi skulle virkelig, virkelig hatt linjal her	**Ikonisk**: Tegner en hjelpetegning av prismet. 
385	Intervjuer	Er dere vant med at dere skal tegne det opp først?	**Deiktisk gest:** peker på tegningen til Amandus. 
386	Amandus	*Ja*	
387	Intervjuer	Sier hun det?	
388	Fiona	Ja, eller vi pleier liksom å tegne det	
389	Intervjuer	Ja	
390	Lisbeth	Også elsker jeg å tegne i 3D	
391	Intervjuer	Ja, (.) men hvorfor tror dere at vi tegner det opp først?	
392	Lisbeth	Da er det litt enklere å regne de ofte	!
393	Intervjuer	Ja	
394	Fiona	Du s:er på en måte	!

Elevene etterspør en linjal (**konkret**) (382 og 384) som de vil bruke til hjelpetegningen sin (**ikonisk**). De sier også at det er lettere å regne hvis man har en hjelpetegning, fordi man da *ser* det man skal regne (392 og 394). I tillegg så bruker Lisbeth (382) **deiktiske gester** når hun skal forklare hva Amandus skal skrive, og Amandus bruker **symbolske** visuelle mediatorer da han skriver ned 100 cm, 40 cm og 30 cm på tegningen sin. Det er derfor tydelig at elevene trenger noe visuelt for å få mediert og selv mediere volumdiskursen.

4.5 Oppsummering av resultater fra diskursanalysen

Som vist i oversikt over datamateriale (3.3.2), er de fleste undervisningsøktene delt i tre deler, der de starter med en felles oppgave på tavla og en mer utfordrende problemløsningsoppgave i del to. Begge disse delene er representert i datamaterialet. Det er i tråd med UOM undervisning på høyt nivå, der diskusjon er viktig, og teoretisk kunnskap har en ledende rolle. Elevene er selv aktive deltakere i undervisningen, og de presenterer forslag og begrunnelser for sine forslag, både i undervisningen og i elevintervjuene. Det blir brukt flere visuelle mediatorer i tillegg til talen i volumdiskursen, både av lærer og elever, og en oppsummering av denne bruken blir presentert i følgende delkapittel.

4.5.1 Hvordan brukes de visuelle mediatorene i den matematiske diskursen for å realisere volumobjektet?

Det generelle inntrykket fra observasjonen er at lærer har en veloverveid og utbredt bruk av de visuelle mediatorene symboler og ikoner. Bruken er for det meste også presis og lett å følge, og lærer tegner for eksempel opp ikonet på ny hvis det ikke vises på skjermen lenger, og hun skriver ned symboler synkront med når hun ytrer narrativene og går gjennom rutinene. Gester og konkreter er brukt mindre bevisst og mer tilfeldig enn ikoner og symboler. Det sier seg kanskje selv at man ikke akkurat står og øver på gester man skal bruke i undervisning, men de brukes synkront med talen og har mye å si for budskapet som kommer frem, ved å støtte eller motsi talen. Spesielt er de metaforiske og ikoniske gestene litt upresise for å få fram volumobjektet, da det flere ganger vises i én eller to dimensjoner når ytringene tilsier tre dimensjoner. Derimot brukes det mye deiktiske gester som hukommelsesmarkører og for å vise et ekstra fokus på visse deler av symboler, ikoner og gester. Bruk av konkreter virker å være lite planlagt, lærer bruker tilfeldig det som er tilgjengelig i klasserommet (for eksempel kopiark-eske), eller som elevene selv viser til i undervisningen (skumgummiterning).

I lærerintervjuet ytrer lærer et ønske om at de hadde hatt mer konkret materiale (286 og 306), som vist fra utdrag av lærerintervjuet i vedlegg 7. I tillegg får vi opplysninger om at de har en fjerde matematikktime i uken som de ofte bruker til spill (297), og denne er det en annen lærer som har. Dette kan derfor ha noe å si for resultatene angående det at lærer ikke visste om konkreter som var tilgjengelig i klasserommet, som elevene gjorde henne oppmerksom på (4.3.2 ytring 183). Lærer sier også at hun tidligere har laget konkreter selv (304: for eksempel tanggrambrikker og baller av papir).

Vi kunne i 4.4 se indikasjoner på at elevene hadde behov for å bruke visuelle mediatorer i sin egen framstilling av volumobjektet. De brukte både tilgjengelige konkrete romfigurer, tegnet hjelpefigurer, skrev ned symboler og brukte gester for å samle oppmerksomheten mot sin egen diskurs. Slik kan vi se at visuelle mediatorer er viktige i volumdiskursen i tillegg til talen, og at disse brukes synkront som i en semiotisk node (Radford, 2003).

4.5.2 Hvilke indikasjoner til endringer kan observeres i elevenes volumdiskurs?

Først er det på sin plass å nevne at utvalget består av elever på fjerde trinn på barneskolen, og at flere av elevene har realisert mye av volumobjektet allerede. Undervisningen ligger på et høyt matematisk nivå, og i tråd med UOM har fokus på konkrete objekt blir tonet ned til fordel for abstrakte begrep og symbol. I resultatene fra elevintervjuene har vi sett at elevene har individualisert narrativer om volumdiskursen som for eksempel at volum for et rektangulært prisme er lik lengde multiplisert med bredde multiplisert med høyde. Rutinene som følger med dette narrativet er for de fleste blitt utforskende, de kan det, og vet hvordan de de skal utføre rutinen. Ordbruken er for det meste passiv eller rutinedrevet, men tidvis for noen elever også frasedrevet eller objektdrevet (for eksempel når Amandus forklarer volum i 4.4, ytring 298). Når det gjelder bruk av visuelle mediatorer er elevene for det meste presise i bruk av symboler og ikoner, men når det gjelder de metaforiske og ikoniske gestene som omhandler kubikkdesimeter, utvises disse hos de fleste elevene i én og to dimensjoner, som i lærers diskurs. Unntaket er Amandus sin ytring 442 i kapittel 4.2.3. Det er tydelig at elevene vil bruke konkreter når de forklarer seg og snakker om volum (4.4). Det kan også se ut til at elevene har individualisert mer av volumdiskursen som dreier seg om romfang og mindre av det som dreier seg om kubikkinnhold, og hvor stort noe er i tredimensjonal størrelse.

5. Diskusjon

Gjennom samsvarende episoder i undervisning og elevintervju har jeg prøvd å analysere lærers bruk av visuelle mediatorer i den matematiske diskursen for å realisere volumobjektet (forskningsspørsmål 1), og å se etter indikasjoner på utvikling av elevenes volumdiskurs (forskningsspørsmål 2). I dette kapittelet skal det diskuteres hvilken sammenheng denne utviklingen kan ha med lærers bruk av visuelle mediatorer i plenumsundervisningen (forskningsspørsmål 2 del to) og mulighetene hun sådan gir elevene til realisering av volumobjektet. Resultatene fra diskursanalysen i kapittel 4 drøftes i lys av forskningsspørsmålene og den teoretiske bakgrunnen (kapittel 2). Disse mulighetene for læring vil tolkes i lys av litteratur om den matematiske diskursen i en kommognitiv og semiotisk ramme (5.2), og teori om volum (5.3). Utviklende Opplæring i Matematikk trekkes inn i tolkningene for å kunne drøfte undervisningen etter den konteksten den realiseres i (5.1).

5.1 Utviklende matematikkopplæring og læreplan som undervisningskontekst

Som vi så i teorikapittelet, mente Vygotsky at utvikling skjer raskere dersom opplæringen ligger foran elevens utvikling, at opplæringen gjennomføres i den proksimale utviklingssonen, formulert i Zankovs (1977) første didaktiske prinsipp, om undervisning på et høyt nivå. I UOM skal også den teoretiske kunnskapen ha en ledende rolle, jamfør Zankovs (1977) andre prinsipp. I de analyserte episodene jobbet elevene på 4. trinn med forholdsvis krevende volumoppgaver på et høyt nivå. De skulle finne volumet av et rektangulært prisme der lengdene var oppgitt i forskjellige enheter (4.1 og 4.2), de skulle utforske om man kan finne volum av et prisme når man har oppgitt grunnflaten og høyden (4.3.1), og de skulle utforske Arkimedes prinsipp (4.3.2). Oppgavene stilte store krav til teoretisk kunnskap; til å lære begreper, abstrakte uttrykk og særegne symboler for volumdiskursen. Elevene kom med forslag og begrunnelser, og det var diskusjon rundt alle de nevnte oppgavene, der elevene selv var med på å komme fram til teoretisk kunnskap om gyldighet av narrativer og rutiner. Selv om det var undervisning på høyt nivå, kunne vi se i analysen at flere elever allerede hadde individualisert deler av et realiseringstre for volum.

I lys av det som var gjeldende læreplan under observasjonen i denne studien (Udir, 2006), er det tydelig at undervisningen lå på et høyt nivå for 4.trinn, og at flere elever matematiserte på en måte som overskrider krav og forventninger i læreplanen. Mål for opplæringen på 4.trinn i geometri er at eleven skal kunne kjenne igjen, beskrive egenskaper ved og sortere ulike geometriske figurer. De skal kunne tegne, bygge, utforske og beskrive geometriske figurer og modeller i praktiske sammenhenger. Når det gjelder måling skal eleven kunne gjøre overslag over og måle lengde, areal, volum og vinkler, samtale om resultatene og vurdere om de er rimelige. De skal også kunne bruke ikke-standardiserte måleenheter og forklare formålet med å standardisere måleenheter og gjøre om mellom vanlige måleenheter. Etter 4.trinn skal elevene kunne sammenligne størrelser ved hjelp av hensiktsmessige måleredskaper og enkel beregning, presentere resultatene og vurdere om de er rimelige (Udir, 2006).

Å kunne sammenligne størrelser er utfordrende når elevene enda ikke har individualisert hvor store de ulike kubikkenhetene er. Det å bruke hensiktsmessige måleredskaper, går for eksempel ut på at man diskuterer når man bør bruke hvilket måleredskap, og hvilke måleenheter som er hensiktsmessige å bruke. Lærer brukte meterstaven i noen av de analyserte episodene, men bruken av denne ble ikke alltid tolket som hensiktsmessig (se for eksempel 4.2.1). I episoden «fra hele rommet til ganske lite» (4.2.1) gjorde klassen også om til desimeter fordi svaret i kubikkcentimeter ble så stort. Når de fikk svaret i kubikkdesimeter ytrer lærer at dette tallet er mye mer forståelig og hensiktsmessig å bruke, men det medieres ikke hvorfor, utover at tallet er mindre. Skal elevene være redde for høye tall? Hvorfor er det mer hensiktsmessig, og hvor stort er det egentlig?

Læreplanen sier altså noe om enkle beregninger, og beregningene fra analysen går på lengde multiplisert med bredde multiplisert med høyde, som nok kan ses som en relativt enkel beregning, men disse elevene går bare på 4.trinn. Det at enhetene er ulike, vil tilføye et ekstra utfordrende moment i oppgaven, der både enkle beregninger og omgjøring mellom vanlige måleenheter skal gjøres i riktig rekkefølge. Dette stiller derfor flere krav til både å gjenkalle narrativer og gjennomføre rutiner i riktig rekkefølge.

Høsten 2020 startet en gradvis implementering av ny læreplan (fagfornyelsen), og ifølge denne skal elevene etter 4.trinn kunne utforske, beskrive og sammenligne egenskaper ved to- og tredimensjonale figurer ved å bruke vinkler, kanter og hjørner. De skal også kunne bruke ikke-standardiserte måleenheter for areal og volum i praktiske situasjoner og begrunne valget av måleenhet (Udir, 2020). Det er derfor også tydelig at undervisningen i forhold til denne læreplanen hadde et høyt faglig nivå og at elevenes matematisering overgikk disse kravene.

I UOM skal fokus på konkrete objekt bli tonet ned til fordel for abstrakte begrep og symbol (Moe & Moe, 2016), og lærer følger fint denne oppskriften i den observerte undervisningen, selv om lærer selv ytrer et ønske om å bruke flere konkreter (4.5.1). Vi observerte ikke bygging og måling av volumobjektet (bruk av konkreter), men som vist til i kapittel 4.5.1, hadde elevene en fjerde matematikktime i uka med en annen lærer, og der kan de ha gjort mer av de praktiske målene rundt realiseringen av volum. I UOM er det også slik at progresjonen er rask og temaene er tilbakevendende i løpet av opplæringen, med muligheter for repetisjon av tidligere matematisk innhold (Gjære & Blank, 2019; Zankov, 1977). Derfor kan undervisningen ha handlet om dette etter vår korte observasjonsperiode var avsluttet. Denne bruken av konkreter i tillegg til bruk av ord og de andre visuelle mediatorene, kunne kanskje likevel ha vært et godt multimodalt tilskudd i de analyserte episodene for å mediere volumobjektet.

5.2 Muligheter for individualisering i en kommognitiv ramme

I dette delkapittelet gås det nærmere inn på hvordan det kommognitive rammeverket setter lys på sammenhengen mellom lærers bruk av visuelle mediatorer og endringer i elevenes volumdiskurs.

5.2.1 Hvilke spørsmål skal rammeverket kunne svare på?

Ifølge Sfard (2007) bør et rammeverk kunne svare på spørsmål om både læringsmål, læringsprosessen og resultater, som: Hvilken forandring skulle skje på grunn av læring? Hvordan jobbet lærer og elever mot denne forandringen? Har forventet forandring skjedd? Ut ifra oppgavene som ble gitt og de spørsmål som lærer stilte i løpet av den matematiske diskursen om volumobjektet, ser det ut som det var målet at elevene skulle individualisere rutinen å finne volumet av et rektangulært prisme og individualisere det godkjente narrativet volum er lik lengde multiplisert med bredde multiplisert med høyde. Elevene skulle kunne bruke symbolsk notasjon for formelen, $V = l \cdot b \cdot h$, sette inn tall og enheter i formelen, gjøre om mellom lengdeenheter, kunne si noe om fysiske størrelser ut ifra kubikkenhetene og operere med forestillinger, bilder og tegninger i flere dimensjoner, for å nevne noe.

For å oppnå forandringen la lærer opp til plenumsdiskusjoner som var preget av dialog, og elevene ble invitert til å delta og til å foreslå og begrunne narrativer og rutiner. Elevene diskuterte også med læringsvenn, og bidragene ble deretter drøftet i plenum. Lærer brukte matematiske ord, narrativer og visuelle mediatorer i diskursen, og hun oppfordret til forskjellig bruk av rutiner etter elevenes ståsted.

Flere av elevene realiserte det matematiske objektet volum ved hjelp av andre matematiske ord og mediatorer. De individualiserte volumobjektet på flere vis, for eksempel ved å bruke ord som «innhold», tegne prismer eller skrive symboler. Men det vil nok være kontinuerlig påfyll av objektivisering av nye begreper slik at elevene får sine egne realiseringstre og kan forflytte seg mellom forskjellige realiseringstre for å løse nye volumproblemer (Sfard, 2008). Slik kan elevene oppnå målet om å delta flytende i volumdiskursen, og UOM med sin karakteristiske undervisningsmåte å vende tilbake til tidligere temaer på, kan kanskje bidra til dette. Mye av den forventede forandringen i elevenes volumdiskurs har altså skjedd, men i analysen ble det også pekt på utfordringer ved lærers volumdiskurs når det gjaldt både ordbruk og bruk av visuelle mediatorer. For når det kom til det å kunne si noe om fysiske størrelser ut ifra kubikkenhetene og det å forholde seg til flere dimensjoner enn lengde, kunne lærers mediering kanskje virke hemmende på muligheter for læring. Her var både matematisk ordbruk og bruk av visuelle mediatorer mindre presis, og kunne kanskje virke forvirrende. Dette sammen med god og hensiktsmessig bruk av de visuelle mediatorene diskuteres videre i de neste delkapitlene.

5.2.2 Den matematiske diskursen generelt

I denne studien var fokuset på de visuelle mediatorene, men bruken av disse må allikevel ses i sammenheng med den matematiske ordbruken, narrativene og rutinene for å få et mer sammensatt bilde av den matematiske diskursen.

Ifølge Sfard (2017) og Lavie et al. (2019) er målet for opplæringen at eleven bør gå fra ritualisering til utforskende rutiner i diskursen, men dette vil som sagt være avhengig av hvilke læringsmuligheter eleven får, og læring av et nytt matematisk objekt vil ikke skje hvis eleven ikke blir eksponert for og invitert til å delta i en eksperts utforskende diskurs. Læreren modellerte i utgangspunktet en diskurs som inviterte alle inn, og stilte åpne spørsmål slik at elevene kunne strekkes litt lenger enn der de var – læring i proksimal utviklingssone. Hun brukte for det meste presise begrep som for eksempel rektangulært prisme, men noen ganger også hverdagsord som eske, i samme gjennomgang, slik at disse ordene kunne knyttes sammen. Helhetsinntrykket er at volumobjektet totalt sett ble godt realisert gjennom matematisk ordbruk. Når det gjelder elevenes endring i ordbruk, så vi eksempler på alt fra passiv til objektdrevet ordbruk av volumobjektet og tilhørende måleenheter. I analysene var det flere tilfeller av at elevene kjente til rutinenes hvordan, men ikke hvorfor, og de befinner seg derfor i et overgangsstadium før de klarer å gjennomføre rutinen alene. Da har de god nytte av læring som deltakelse og samspill med andre, samt mediering fra lærer. Elevene fikk muligheter til både ritualisering, gjerninger (for eksempel å regne ut volumet til prismet i figur 4) og utforskninger, ved å gjenkalle (4.1.1), underbygge eller konstruere narrativer (4.3.2). Hvilken rutine som ble brukt, er avhengig av hvor den enkelte elev var i utvikling av sin diskurs (Lavie et al., 2019).

Utforskende diskurs har til formål å lage godkjente narrativer om abstrakte matematiske objekter (her volum) (Sfard, 2017), og noen av disse, som for eksempel «volum av et rett, rektangulært prisme er lengden multiplisert med bredden multiplisert med høyden» virket som var delvis kjent fra før, men hvis det ikke var det, så hadde elevene mulighet til å lære det, gjennom ordbruk, mediering av narrativer og rutiner, ikoner og symboler. Narrativene i de analyserte episodene forekom også på både objekt-nivå og meta-nivå. I «Hvem har rett» i 4.3, kommer narrativene tydeligere frem både ved bruk av gester og konkreter, som vil diskuteres mer under neste delkapittel. I 4.3.1 for eksempel, konstrueres narrativet «vi kan finne volum av et prisme ved å multiplisere arealet av grunnflaten med høyden» (meta-nivå) og samtidig også «arealet av grunnflaten i et prisme er lengden multiplisert med bredden» (objekt-nivå) i fellesskap.

Når det gjelder narrativet «man må ha like enheter på lengde, bredde og høyde før man regner ut volum ved hjelp av formler», så var ikke narrativproduksjonen og ordbruken like presis. Her kunne det se ut som at det bare var noe man burde gjøre, at begge deler var godkjent. Det er allikevel indikasjoner på at elevene er på vei til å individualisere denne prosessen, å kunne gjøre den alene. Et eksempel er Magnar i «Like enheter» som ikke ville gjøre om på enhetene i undervisningen, men gikk rett på og gjøre om enhetene i intervjuet etterpå, i ytring 189. Her kan også en opplevd kommognitiv konflikt hatt potensial til å stimulere til denne utviklingen av diskursen. Kanskje kombinasjonen av ordbruk, ikoner og symboler har gjort at narrativet ble mediert, selv om det lå begrensninger i en av faktorene? Dette vil jo også være styrken i å bruke forskjellige visuelle mediatorer i tillegg til talen i undervisningen.

Det som hele tiden går igjen i resultatdelen, er at de ulike visuelle mediatorene brukes – både av lærer og elever – synkront med ord, og om hverandre, slik som Radford (2003) fremmer med den semiotiske noden. De ulike semiotiske ressursene, læringsverktøyene, virker sammen i kompleks koordinasjon og kan slik skape bedre mening og begrepsdannelse hos eleven i objektiveringsprosessen (Arzarello et al., 2015; Radford, 2003). Dette viser hvor viktig det multimodale perspektivet er når det skal forskes på den matematiske diskursen, spesielt siden matematikkundervisningen gjerne er mer multimodal enn annen undervisning.

5.2.3 De visuelle mediatorene

Visuelle mediatorer er viktige for at kommunikasjonen i klasserommet skal være effektiv. De er generelt synlige og kan derfor hjelpe diskursdeltakerne å holde et felles fokus og å huske det som har blitt diskutert (Sfard, 2008). De er spesielt viktige fordi matematistene slik får visuelle bilder av abstrakte objekter. Bilder og forestillinger (**ikoner**) hjelper diskursdeltakerne å opprettholde en felles forståelse, og bidrar til å koordinere kommunikasjonen fordi ytringene kan referere til noe visuelt. Det kan være at læreren og elevene ikke hadde klart å kommunisere effektivt hvis de ikke kunne se, eller se for seg, det konkrete objektet; et rektangulært prisme. Matematikere flest bruker visuelle bilder eller forestillinger selv i de mest avanserte og abstrakte diskursene. Disse bildene er noen ganger tegnet og noen ganger bare forestilt. Det kan se ut som skriblerier, og selv om disse tegningene ikke gir mye mening for andre, kan de hjelpe diskursdeltakeren med å holde diskursen fokusert og sammenhengende (Sfard, 2008). Vi så for eksempel at Magnar tegnet en kube inni prismet sitt for å vise at vi kan finne ut hvor mange kuber det er plass til (4.2.2). Lærer brukte ikoner på en forventet og god måte, der hun enten viste bilder eller tegnet underveis for å gjøre volumobjektet mer synlig.

Sfard (2008) skriver at selv om ikoniske og konkrete realiseringer ofte vil gjøre det lettere å lage seg narrativer, anser matematikere fortsatt **symbolske** realiseringer som nødvendige for å godkjenne narrativene. Symbolske realiseringer er snarveier for verbale uttrykk, og derfor arbeidsbesparende, men de er bare delvis støttet av visuelle midler, slik som ikoner og konkreter, og stiller mer krav til hukommelsen. Lærer medierte symboler presist; hun modellerte bruk av symbolsk notasjon for formelen, innsetting av tall og enheter i formelen, og omgjøring mellom lengdeenhetene, alt med innspill fra elevene og synkront med talen eller før/etter bruk av gester på ikoner.

Gester

Sammenlignet med symboler, kan **gester** være lettere for en nykommer å bruke, de realiserer ord og de blir ofte automatisert. Sfard (2009) mener at gester og ord er i et symbiotisk forhold, og kan fungere som «backup» for hverandre. Hun mener også at gestikulering kan spille en stor rolle i det å realisere matematiske betegnere som volum. Også Roth (2000) hevder at gester passer til å vise fram form og rom. I denne studien viser de fleste resultatene noe upresise gester for form og rominnhold. Lærer og elever prøvde å visuelt realisere prismers eller kubikkenheters form ved å bruke ikoniske eller metaforiske gester. De lyktes sjelden med å bruke gester i tre dimensjoner når det var snakk om romstørrelser – disse ble ofte bare vist i én eller to dimensjoner, først mediert i lærers diskurs, og deretter i elevenes. Dette kan være uheldig da det er nødvendig for en nykommer å imitere en erfaren diskursdeltaker som lærer er, for å bli en fullverdig deltaker i diskursen (Sfard, 2008). Gestene brukes jo også synkront med talen og kan motsi denne hvis gestene medierer et annet budskap enn ordene eller de andre mediatorene. Selv om Sfard (2009) mener at gester er viktig for matematisk kommunikasjon, mener hun også at de kan ha sine fallgruver. Hun stiller seg spørsmålet om hva slags bruk av gester som kan gi uønskede utfall i matematikklæring. Kanskje et av svarene på det er når gestene medierer feil informasjon i forhold til ordbruk eller andre visuelle mediatorer?

Dette kan relateres til Goldin-Meadows (2003, s.68) begrep «gesture-speech mismatch», der gestene medierer en annen informasjon enn talen. Hun fant ut at det var mindre sannsynlig at elever brukte samme problemløsningsstrategi som lærer hvis lærer brukte gester som ikke passet til talen, enn hvis lærer ikke brukte gester i det hele tatt. Hun fant også ut at elever i nesten 80% av tilfeller gjentok lærers gester i et «gesture-speech mismatch»-tilfelle (Goldin-Meadows, 2003). Her var det ikke snakk om at gestene ble mediert feil, men at de ga annen informasjon enn talen. Men det at man oppfatter gest-delen av mismatchen, kan være uheldig i de tilfeller der gestene medierer feilinformasjon og talen gir riktig informasjon.

Goldin-Meadows (2010) mener gestene som lages i en mismatch kan gi innsikt om elevens implisitte kunnskap, og da kan man kanskje si at gestene ubevisst viser at flere elever i studien ikke helt «har» volumobjektet, selv om det kan virke sånn når de bruker ord og symboler. Også McNeill (1992) mente at gestene viser våre innerste tanker og måter å forstå verden på. Betyr det at lærer ikke forstår volum tredimensjonalt når hun viser i en eller to dimensjoner? Selvsagt ikke, men det kan være hun er lite bevisst hvordan akkurat denne medieringen kan oppfattes. For elevenes del vil det kanskje være annerledes. Man kan si at elevene deltar i diskursen som nykommere, der de enda ikke har individualisert volumobjektet, men klarer å delta og imitere noe av ordbruken til lærer og har individualisert store deler av den symbolske medieringen. De metaforiske gestene er enda ikke individualisert, og elevene kan enda ikke delta fullverdig i denne diskursen. Dette viser også det sirkulære paradokset nevnt tidligere, at man må bli kjent med diskursen ved å delta, men at det er en forutsetning at man kjenner til diskursen for å kunne delta. Da er det viktig at lærer medierer korrekt matematisk diskurs, slik at elevene kan imitere, og bli kjent med diskursen. Dette vil også ha implikasjoner for hvordan lærere kan observere elevers gester for å «oppdage» mangel på individualisering av et matematisk objekt, og slik gi flere muligheter for læring.

Når realiseringsprosedyrene blir synlige ved hjelp av gester, kan det hjelpe deltakerne i diskursen til å tolke volumobjektet på samme måte (Sfard, 2009). Når lærer i det ene tilfellet i 4.3.2 viser en kubeform med hendene i tre dimensjoner, medieres volumet også visuelt med metaforiske gester, og vil gi bedre læringsmuligheter, siden mangfold av visuelle realiseringer utvider kommunikasjonsmulighetene. Det abstrakte begrepet volum blir synliggjort gjennom gestenes fysiske kvaliteter (Arzarello et al., 2015). Bjuland et al. (2008) mener også at gester kan hjelpe elever å legge merke til abstrakte matematiske relasjoner. Det å legge merke til abstrakte matematiske relasjoner, i studien for eksempel relasjoner mellom volum av prisme og kubikkenheter, er noe som er et viktig punkt under Zankovs (1977) andre prinsipp om at teori skal ha ledende rolle i undervisningen. Volumdiskursen ble for øvrig mediert mer gjennom ikoniske gester av lærer, enn det som var forventet, med hensyn til at volum er et abstrakt objekt, men denne bruken av ikoniske gester kan kanskje være med å «veie opp for» mindre bruk av konkreter. Elevene brukte derimot en god del metaforiske gester.

Bjuland (2012) viste til den viktige rollen både lærers og elevers deiktiske gester har i samspill med tale, figur og diagram i arbeid med å koordinere to dimensjoner i et diagram. Nylig viste også Gautam og Bjuland (2021) at samspillet mellom deiktiske gester og tale spilte en viktig rolle i å støtte elevers ulike realiseringer av et multiplikasjonsstykke. Lærer kan altså hjelpe elevene å realisere matematiske betegnere blant annet ved å bruke visuelle mediatorer som pekegester. Lærer i studien brukte veldig mye deiktiske gester i undervisningen av volum, som regel synkront med talen, og elevene brukte også selv disse gestene mye i matematiseringen sin. De deiktiske gestene ble brukt for å vise aktiv lytting fra lærers side, de ble brukt som hukommelsesmarkør, for å rette oppmerksomhet mot det som ble diskutert, og for å understreke noe som var ekstra viktig i ordbruk, ved symboler, ikoner eller konkreter.

Novack og Goldin-Meadow (2015) mener at deiktiske gester kan knytte det abstrakte språket i matematikkundervisningen til det konkrete fysiske miljøet, noe som vil være veldig fordelaktig i volumdiskursen. Men det å se gester kan også støtte læring i fravær av fysiske objekter, så det at lærer bruker mye deiktiske gester kan kanskje også veie opp for lite bruk av konkreter. De mener at en av de største fordelene til gester kan være at de skjer synkront med talen, og det så vi mange gode eksempel på i analysene. Roth (2000) mener at man bør utnytte gester mer i de tidlige stadiene av diskursutviklingen, når elevene ennå ikke har lært seg den faglige sjargongen, og vi kunne i analysen av «Like enheter» (4.1.4) se hvordan elevene brukte de deiktiske gestene for å gjøre opp for manglende ordbruk om enheter. Gester kan også bli brukt av elever i stedet for fysiske konkrete objekter, og vi kunne se i 4.4 at elevene hadde store behov, både for å bruke konkreter og å bruke gester på disse. I motsetning til konkreter, har man jo alltid hendene sine med seg, og Novack og Goldin-Meadow (2015) konkluderer at gester er bærbare, fleksible og ideelle for å forbedre læringskonteksten.

Sfard (2009) stiller seg spørsmålet om det er noe unikt i den matematiske diskursen til de som hovedsakelig lærer matematikkfaget gjennom digital undervisning, der gester er utilgjengelige for matematistene. Nå når vi står midt oppi en global pandemi, og digital undervisning er mer utbredt enn noen gang, oppleves dette som ekstra viktig å forske på. Noen tanker jeg gjør meg, er at de deiktiske og understrekende gestene til en viss grad kan realiseres gjennom peker, penn og andre funksjoner innlagt i de fleste videokonferanse-programmer, men at de ikoniske og metaforiske ikke vil oppleves tredimensjonalt på samme måte, da de vil bli erstattet av tegninger, bilder og figurer. Hva vil dette ha å si for medieringen av matematikkfaget og spesielt temaer som er mer knyttet til det fysiske rom, som volum?

5.3 Videre diskusjon av konkreter i lys av volumdiskursen

Som nevnt i 4.5.2 kan det se ut til at elevene har individualisert mer av volumdiskursen som dreier seg om romfang og mindre av det som dreier seg om kubikkinnhold, og hvor stort noe er i tredimensjonal størrelse. Kan dette ha noe med den visuelle medieringen av konkreter og gester å gjøre? Vestersjø (2002) fant tendenser til at elevene var veldig formel-fokuserte, manglet forståelse for størrelser – «hvor stort noe er», og hadde begrensede oppfatninger av dimensjon. Dette er også tendenser i min analyse, men det er kanskje mer «forventet» på 4.trinn når man er ny i diskursen enn på vg1. Men hvis diskursen i klasserommet ikke gir muligheter for slike oppdagelser, vil ikke trenden bli brutt. I de første episodene (4.1 og 4.2) var det begrenset og upresis bruk av konkreter. Spørsmålet er om man i dette tilfellet gir elevene gode nok muligheter for å realisere kubikkenhetene og sammenhengene med de fysiske størrelsene i rommet? Dette ble i plenumsundervisningen presentert som at en og samme romstørrelse gikk fra å være hele klasserommet til ganske lite, i én dimensjon (4.2.1).

Bruk av for eksempel meterstav, synkront med deiktiske eller metaforiske gester i tre dimensjoner, kan tenkes fordelaktig for å vise fram et kubikkinnhold på. Det har også vist seg at det å gjøre oppgaver der man skal fylle romfigurer med lag-struktur kan hjelpe på forståelsen av enhetskuber som rom-fyllende lag. Hong og Runnalls (2020) mener også at elever trenger å se hvordan et rom kan fylles for å forstå volumbegrepet. Da vi bare observerte i to uker, kan det være at dette ble visuelt mediert både før og etter at vi var til stede. Det hadde uansett ikke skadet å ta det opp igjen i dette tilfellet, for å knytte sammen kubikkenhetene og de fysiske størrelsene, når lærer ser at elevene ikke vet hvor stort dette prismet er i konkret størrelse (Jamfør sammenheng mellom egenskaper ved ulike fenomener i det didaktiske prinsippet om teoretisk kunnskap i UOM). Også Sfard mener det bør legges vekt på matematiske sammenhenger og relasjoner, som kan medieres ved å endre på eksisterende diskurser (fylle romfigurer med lag-struktur) når nye diskurser skal introduseres (finne volum ved hjelp av symboler) (Sfard, 2008).

Sfard (2008) mener at de ulike visuelle realiseringene kan være likeverdige, og at mangfoldet av visuelle realiseringer utvider mulighetene for kommunikasjon, men at de må tilpasses særtrekkene ved oppgaven. I disse oppgavene kan det derfor tenkes at oppgavenes natur med hensyn til volumforståelse, kan kreve mer bruk av relevante konkreter.

I episodene i 4.3 brukte lærer flere konkreter, som en kopiark-eske og en liten skumgummi-terning, og det var også en veldig god bruk av deiktiske og understrekende gester på konkretene for å få fram viktige sider ved konkretene som elevene skulle rette et ekstra fokus mot. Et eksempel på dette er når lærer i 4.3.1 bruker deiktiske og understrekende gester på en eske for å mediere at lengden og bredden i et prisme er det samme som grunnflaten. Her er det også tydelig veiledning fra læreren, som Carbonneau et al. (2013) mener gir større effekt ved bruk av konkreter. Også Laski et al. (2015) mener at dette kan fremme læring ved at eleven fokuserer på matematikken i stedet for å prøve å abstrahere forholdet mellom konkretene og matematikkbegrepene. Disse konkretene har heller ikke irrelevante egenskaper og det er stor likhet mellom esken og ikonet av esken som ble vist, noe som skal forbedre medieringen av det som skal læres på det abstrakte plan (Halvorsen & Waaler, 2011; Laski et al., 2015). Her virker ord, gester, konkreter og symboler sammen for å mediere narrativer til elevene.

Det første prinsippet til Laski et al. (2015) som skal sørge for at konkreter fremmer læring, ved å bruke konkreter konsistent over en lengre tidsperiode, er kanskje mer utfordrende å kombinere med UOM. Det vil kanskje være nok muligheter til å ta fram konkretene gjentatte ganger, men kanskje ikke sammenhengende over en lengre tidsperiode, da undervisningen legger opp til lite repetisjon og rask progresjon.

Bruken av disse konkretene var i utgangspunktet ikke planlagt, det var noe lærer fant tilfeldig i klasserommet og brukte spontant fordi hun så at det var behov for det. Det kan være flere årsaker til at hun gjorde dette, men det kan være nærliggende å tenke at det er fordi hun hadde behov for å gestikulere på konkreter for å mediere volumobjektet godt nok, eller at hun tenkte at elevene hadde behov for det. Når hun først hadde brukt konkretene i første økt, brukte hun de også i de to neste øktene, noe som kanskje viser at hun mente de gjorde medieringen av volumobjektet bedre. Som observatør tolkes det dithen at medieringen hadde gitt færre muligheter for realisering av volumobjektet uten bruk av disse konkretene og tilhørende gestikulering. Derfor er noe av formålet med denne masteroppgaven å få frem viktigheten av å bruke veloverveide konkreter bevisst i matematikkundervisningen.

Det overordnede målet ved å bruke konkreter må være at de har en læringseffekt (utvider elevens diskurs). Bruken av konkrete gjenstander bør også ses i sammenheng med hvor i utviklingen barna er. Er det optimistisk å tenke at elevene på 4.trinn (ni- og tiåringer) skal få et forhold til hvor stort noe er, uten å få det vist fysisk ved hjelp av gester eller konkreter? Konkreter har en tredimensjonal form, og volum er et matematisk objekt som er sterkt knyttet til det fysiske rom. Samtidig bør det tas hensyn til hvordan konkretene ser ut og hvordan lærer bruker dem, for bruk av konkreter som ikke er relevante for overføring fra den konkrete til den abstrakte forståelsen, kan hemme mulighetene for læring (Halvorsen & Waaler, 2011).

Med sitt deltakerorienterte læringssyn har Tyskerud og Mosvold (2018) i sin studie av hvordan volumobjektet blir konstruert i lærerens diskurs, vist at det kan være hensiktsmessig å sette søkelyset på undervisningsarbeidet og kommunikasjonen til læreren, i stedet for elevenes volumforståelse. Elevene ses som deltakere i matematiske diskurser, og tilsynelatende mangel på forståelse hos elevene kan heller forklares som egenskaper ved lærerens diskurs. Det er det jeg har forsøkt å gjøre i denne studien, der jeg har analysert og vist til bruk av visuelle mediatorer som både kan hemme og fremme elevers individualisering av volumobjektet. I denne studien har vi sett at det både var fokus på å invitere elevene til å utføre handlinger med matematiske symboler, som er karakteristisk ved bruk av rituelle rutiner i diskursen (som ble identifisert i Tyskerud og Mosvolds studie), og å skape narrativer om matematiske objekter, som er selveste målet med matematikkundervisningen. Som disse forfatterne ønsker også jeg at denne studien kan bidra til fagfeltet ved å identifisere viktige aspekter av kommunikasjonsarbeidet i undervisning av volum, som de visuelle mediatorene.

6. Konklusjon

I denne studien har det vært et søkelys på den matematiske diskursen i klasserommet. Undersøkelsen har vært rettet mot visuell mediering av volumobjektet på 4.trinn, i en kontekst med Utviklende Opplæring i Matematikk. Det er gjort noen interessante funn som kan vise lærers og elevers behov for visuell mediering av volumdiskursen i tillegg til ordbruk, og også hvordan denne medieringen kan fremme objektivisering; individualisering av volumobjektet. I dette avsluttende kapittelet vil studiens hovedfunn sammenfattes og drøftes i forhold til forskningsspørsmålene, og studiens implikasjoner for praksis og forskning vil redegjøres.

6.1 Svar på studiens problemstilling

Det ble forsøkt å svare på studiens problemstilling *Hvordan kan en lærers bruk av visuelle mediatorer i den matematiske diskursen, fremme og hemme elevers muligheter til læring av volum?* ved å svare på forskningsspørsmålene:

Forskningsspørsmål 1: Hvordan bruker lærer visuelle mediatorer i den matematiske diskursen for å realisere det matematiske objektet volum?

Forskningsspørsmål 2: Hvilke indikasjoner til endringer i elevenes volumdiskurs kan observeres, og hvilken sammenheng kan dette ha med lærers bruk av visuelle mediatorer i plenumsundervisningen?

For å besvare det første forskningsspørsmålet ble lærers bruk av visuelle mediatorer i plenumsundervisningen analysert i et kommognitivt rammeverk (Sfard, 2008). Ved å bruke dette rammeverket var det mulig å gjennomføre en diskursanalyse med operasjonaliserte begreper der det kunne fokuseres på de observerbare visuelle mediatorene (ikoner, symboler, konkreter og gester) i den matematiske diskursen. Det kommognitive rammeverket ble supplert med semiotisk teori om gester, for å kunne gå mer inn i gesters form og funksjon i analysen. En slik kombinasjon kan være hensiktsmessig da det semiotiske perspektivet tilføyde en helhetlig tilnærming til kommunikasjonsarbeidet i klasserommet. Det fikk frem nyanser i bruk av gester i den matematiske diskursen. Edwards (2009) ekstra inndeling av den ikoniske gesten var det ikke behov for i denne studien av volumdiskursen, men Arzarello et al. (2009) sin tolkning av den ikoniske og metaforiske gesten til McNeill (1992, 2005) har kommet godt til nytte, samt at det var veldig nyttig med en kategorisering av de deiktiske gestene for å se nærmere på deres funksjon (Bjuland et al., 2008).

Et av hovedfunnene var at lærer brukte få konkreter i forhold til det som var forventet i volumdiskursen på 4.trinn. Spesielt når kubikkenheter og fysiske størrelser skulle medieres, kan det tenkes at elevenes læringsmuligheter kunne økt ved bedre konkret visuell mediering eller gestikulering. Etter å ha sett nærmere på UOM ble det klart at denne undervisningsmodellen legger vekt på læring av abstrakte begreper og symboluttrykk. Det er ikke sånn at konkreter ikke skal brukes, men fokus på disse blir tonet ned, som kan ha noe å si for lærers bruk av disse i undervisningen. Når lærer brukte konkreter, var det lite planlagt, og det undres om hvor utbredt planlagt bruk av konkreter er i volumundervisning hos lærere generelt, og hva det har å si for elevers muligheter til læring. Konkretene som lærer brukte, var ifølge fagfeltet gode, da de ikke inneholdt irrelevante egenskaper og lignet på ikoner av det prismet som de skulle forestille, noe som skal forbedre medieringen av det som skal læres på det abstrakte plan (Carbonneau et al., 2013; Laski et al., 2015). Når læreren i tillegg til å bruke konkretene ga tydelig veiledning ved bruk av gester på konkretet, ble medieringen spesielt god. Denne veiledningen med gester og felles diskusjonen gjør at elevene kan fokusere på matematikken i stedet for å prøve å abstrahere forholdet mellom konkretene og matematikkbegrepene (Carbonneau et al., 2013; Laski et al., 2015), og UOM vil derfor være en god kontekst for slik mediering.

Dette fører oss videre til et av de andre hovedfunnene, som var at de deiktiske gestene som ble brukt på konkretene var spesielt godt egnet for å få fram viktige sider ved konkretene som elevene skulle rette et ekstra fokus mot. De deiktiske gestene fungerte også veldig godt som hukommelsesmarkører og for å få en felles oppmerksomhet mot ikoner og symboler som ble visuelt mediert i volumdiskursen, både hos lærer og elever. Andre resultater viste noe upresis bruk av metaforiske og ikoniske gester for form og rominnhold. Det var overaskende at lærer ikke brukte mer metaforiske gester i tre dimensjoner, siden volum er et abstrakt objekt (jamfør Arzarello et al., 2015), men her kan bruk av ikoniske gester kanskje ha fungert som en erstatning for konkreter. For å bli en fullverdig deltaker i volumdiskursen, må elevene imitere læreren (Sfard, 2008), og da er det viktig at gestene medieres korrekt; at de ikke er i mismatch med ordbruken (Goldin-Meadows, 2003, 2010), og at vi lærere er mer bevisste på hvordan disse kan gi muligheter for individualisering av volumobjektet.

Resultatene viser også hvordan talen og de visuelle mediatorene fungerer sammen i en semiotisk node (Jamfør Radford, 2003) for å mediere volumdiskursen, og at de kan fungere som erstatning for hverandre. For eksempel kan deiktiske gester mediere visuelt hva man snakker om, når ordbruken er utilstrekkelig. Dette er en veldig god grunn til å studere disse visuelle mediatorene i sammenheng med hverandre og med ordbruken, og ikke begrense analyser til en enkelt modalitet.

For å besvare det andre forskningsspørsmålet ble det med den samme kommognitive linsen satt et søkelys på elevenes matematiske diskurs i og etter undervisning av volumobjektet. En utvikling i den matematiske diskursen kan studeres ved å se etter forandring i bruk av matematiske ord, visuelle mediatorer, narrativ eller rutiner (Sfard, 2007). Disse elevene på 4.trinn hadde allerede individualisert store deler av et realiseringstre for volumobjektet, selv om undervisningen i tråd med UOM lå på et høyt matematisk nivå og den teoretiske kunnskapen hadde en ledende rolle. De var i plenumsundervisningen med å skape nye narrativer ved å bli inkludert i utforskende rutiner, og de brukte matematiske ord på alle de fire nivåene, fra passiv til objektdrevet bruk. Når det gjaldt de visuelle mediatorene, bruker elevene ikoner for å visualisere volum, og de har individualisert mye av de abstrakte symbolene som tilhører volumobjektet. Det kan se ut til at elevene har individualisert mer av volumdiskursen som dreier seg om romfang og mindre av det som dreier seg om kubikkinnhold, og hvor stort noe er i tredimensjonal størrelse. Når det gjaldt kubikkenheter, var ordbruken passiv, og elevene brukte rituelle rutiner når de visuelt medierte de fysiske størrelsene på enhetene. De kunne symbolmessig gjøre om på enhetene, men visste ikke hvor store de fysisk var.

Kan dette ha noe å gjøre med lærers visuelle mediering i plenumsundervisning? Det er sannsynlig at bruk av de visuelle mediatorene i kombinasjon med ordbruk kan ha påvirket mulighetene elevene fikk til å realisere volumobjektet. Elevene viste mindre individualisering på området som gjaldt romstørrelser og kubikkenheter, og både ordbruk og visuell mediering gjennom gester og konkreter var i undervisningen mer upresis på dette området («Like enheter» og «Fra hele rommet til ganske lite»). Her kunne nok bruk av hensiktsmessige konkreter og deiktiske gester sammen ha skapt flere muligheter for elevene til å individualisere volumobjektet (slik som de gode eksemplene fra «Hvem har rett» pekte på). Del to av forskningsspørsmål 2 ble også besvart ved å se resultatene fra diskursanalysen i lys av teorier og funn fra tidligere studier av volumdiskursen. Disse pekte blant annet på betydningen av tydelig veiledning fra lærer i bruk av konkreter.

Et annet viktig funn i studien er det *behovet* som det viste seg at lærer og elever hadde for å bruke konkreter og gester i tillegg til ordbruk, ikoner og symboler når de skulle mediere volumobjektet. Lærer brukte tilfeldige konkreter, som for eksempel en eske, som hun fant i klasserommet, for å visuelt mediere det hun sa med ord, skrev med symboler og viste som ikon, kanskje fordi hun mente det var et behov for det. I elevenes matematiske diskurs viste de også store behov for å bruke ikoner, konkreter og gester for å visuelt mediere volumdiskursen i tillegg til symbolbruken. Det var viktig for dem å «se» volumobjektet («Du ser på en måte»), så de tegnet og brukte konkreter for å vise hva de mente. De tok tak i det de kunne finne av tilfeldige konkreter og gestikulerte på dem. De deiktiske gestene fungerte godt som en erstatning for manglende ordbruk når elevene ville samle oppmerksomheten mot noe, og de brukte metaforiske gester på konkretene for å realisere volumobjektet. Dette behovet for å bruke konkreter og gester for å synliggjøre volumdiskursen bør nok ikke undervurderes selv om konteksten og den gjeldende undervisningsmodellen skal legge vekt på abstrakte begreper og symbolbruk.

6.2 Implikasjoner av studien

Hvilke implikasjoner har studien for undervisning og visuell mediering av volumdiskursen? Med grunnlag i studiens resultater, og med et kritisk blikk på disse, pekes det på noen av disse implikasjonene for praksis og videre forskning.

6.2.1 Kritisk refleksjon av studiens funn

I denne case-studien er én lærers undervisning, på en skole der det undervises i utviklende matematikk, i tre parallelle klasser på 4.trinn, observert og analysert. Analysen baserer seg på korte utdrag fra volumdiskursen i plenumsundervisning og elevintervjuer over en to-ukers periode, og ble studert gjennom en kommognitiv linse. Resultatene i studien kan ikke uten videre overføres til andre kontekster enn denne, og det er begrensninger i den korte tiden det er observert i disse klasserommene. Undervisning er et komplekst arbeid, og studiens funn er sett i lys av en kontekst med utviklende matematikkopplæring, som er en krevende undervisningsform der lærer skal være veileder og legge opp til gode plenumsdiskusjoner. Det er forsøkt å gi grundige beskrivelser av denne konteksten som undervisningen skjer i.

For å sikre god kvalitet i studien (se mer inngående om studiens kvalitet i 3.5) er det analysert både plenumsundervisning og elevintervjuer, og også tatt med noe av det som var relevant fra lærerintervju. Det er prøvd å velge forskjellige, representative og samsvarende episoder som kan belyse ulike sider ved bruk av visuelle mediatorer i undervisningen. Selv om det er en svakhet med studien at observasjonen bare går over to uker, gir studien et dypdykk inn i volumundervisningen i denne perioden. En av fordelene med case-studier, er at man kan gå i dybden for å prøve å forstå komplekse, sosiale fenomener (Flyvbjerg, 2011; Thagaard, 2018).

Reliabiliteten i studien er forsøkt ivaretatt ved å gjøre forskningsprosessen så transparent som mulig ved å gi detaljerte beskrivelser og bilder, og redegjøre for hva som er tolkninger. Samtidig er noen av tolkningene drøftet med veileder. I tillegg til transkripsjon og ordbruk, er det i denne studien sett på de visuelle mediatorene, slik at større deler av kommunikasjonsarbeidet i klasserommet er dekket, som for eksempel gester. Tolkning av gester kan være utfordrende, og Arzarello et al. (2015) mener at samspillet mellom de ulike dimensjonene av gester kan være subtilt. Derfor kan det være at resultatene ville sett annerledes ut dersom det var noen andre som tolket gestene. Det er allikevel forsøkt å være konsistent i forhold til kategoriseringen i metodekapittelet.

Validiteten i studien er forsøkt ivaretatt ved å gi alternative tolkninger i analysene, og legge vekt på teoretisk transparens ved å beskrive det kommognitive rammeverket som har vært utgangspunktet for tolkningene. Det å analysere med dette rammeverket med supplement i det semiotiske vil gi noen muligheter, som for eksempel det å studere endringer i elevenes matematiske diskurs, ved å se på endringer i bruk av matematiske ord, visuelle mediatorer, narrativer og rutiner. Men det vil samtidig gi en forforståelse og være linsen som diskursen tolkes gjennom, og andre relevante aspekter av diskursen og klasseromsarbeidet vil derfor ikke løftes fram. Det er selvsagt flere faktorer enn lærers visuelle mediering som kan påvirke elevens diskursendring, men det er pekt på ulike sider ved denne medieringen som kan gi muligheter for at en slik endring kan skje.

6.2.2 Implikasjoner for videre praksis og forskning

Formålet med matematikkdidaktisk forskning, og derfor også det overordnede målet med denne studien, er å bidra konstruktivt til forbedring av undervisningspraksis i matematikkfaget. Selv om studiens resultater ikke er direkte overførbare til andre kontekster, kan studien være aktuell for lærere som skal undervise i volum, for å bli bevisst *hele* sin matematiske diskurs og potensialet som ligger i det å bruke relevante konkreter og gester. Den kan kanskje slik bidra konstruktivt til forbedring av undervisningspraksis og bidra til fagfeltet ved å identifisere hvordan de visuelle mediatorene kan ha en viktig rolle i den matematiske diskursen i undervisning av volum. For eksempel kan den deiktiske dimensjonen av gester ha en særdeles viktig rolle i å framheve de andre visuelle mediatorene i den matematiske diskursen, og da er det viktig at vi lærere er bevisst denne medieringen.

Studien min viser som flere tidligere studier at elever kan ha utfordringer med å individualisere deler av volumdiskursen som går på det å forstå romstørrelse, hvor stort noe fysisk er i tre dimensjoner og sammenhengen med kubikkenhetene. Det kan derfor være en fordel at lærerstudenter og lærere øves på dette området, til å bli bevisst hele sin matematiske diskurs og inkludere bruk av relevante konkreter og gestikulering, i tillegg til ikoner, symboler og ordbruk i sin undervisning. Det viktigste er at mangfoldet av visuelle realiseringer brukes bevisst for å utvide mulighetene for god og effektiv kommunikasjon i klasserommet (Mildenhall, 2013; Sfard, 2008). Da kan lærere i neste omgang modellere slik mediering i klasserommet ved å løfte fram bruk av hensiktsmessige konkreter og gestikulering, og aktivt ta de i bruk, sånn at elevene kan imitere og bli fullverdige deltakere i diskursen. Elevene vil da få flere muligheter til å utvikle diskursen sin, og slik kan kanskje bruken av de visuelle mediatorene bidra til elevenes objektivisering av volum. For lærere kan videreutdanning og forskning på sin egen undervisning, for eksempel i en Lesson study kontekst, gi verdifull informasjon om egne forbedringspotensialer. I en Lesson Study avgjør en lærergruppe i fellesskap hva de ønsker å lære mer om, slik at det tas utgangspunkt i lærernes behov, og gir muligheter til å utforske egen virksomhet for å lære mer om elevers læring (Munthe et al., 2015). Det kunne vært interessant å forske på om mulighetene for elevers realisering av volumobjektet ville ha vært annerledes før og etter en slik bevisstgjørelse av for eksempel gestikulering i lærers matematiske diskurs.

Det har vært mye tidligere forskning på hvilke konkreter som er hensiktsmessige og når de er hensiktsmessige å bruke (Carbonneau et al., 2013; Laski et al., 2015), men hvordan og hvor mye brukes de egentlig av lærere, og hvor bevisst er vi på denne bruken? Det kunne vært interessant å finne ut av hvor bevisste lærere er på slik bruk, da det er tydelig at det har en del å si for visuell mediering av faget og kanskje mer på noen områder enn andre, som for eksempel geometri og volumdiskursen. Som Laski et al. (2015) sier, bør lærere tenke nøye over hvordan konkreter brukes i matematikkundervisningen, og de bør søke informasjon fra forskningen i fagfeltet. Noe av formålet med denne masteroppgaven er derfor å få frem viktigheten av å bruke veloverveide konkreter bevisst i matematikkundervisningen.

Det at elever gis muligheter for læring er en forutsetning for at det skal skje læring, men det er ikke en «lovnad» om læring – det er altså ikke det samme som å bli lært, og at elevens diskurs nødvendigvis utvikler seg. På den annen side så sier Sfard (2017) det så fint når hun sier at du får tilbake av elevene det du har gitt dem i muligheter å lære. Blir det oversett hvor viktig visuell mediering er i klasserommet? I geometri og volum er det nok spesielt viktig at det blir brukt presise og relevante konkreter og gester i tillegg til ikoner og symboler, og lærere bør kanskje legge enda mer vekt på å planlegge visuell mediering av volumdiskursen med et fokus på mangfoldet av de ulike ressursene. Det å bruke hensiktsmessige og presise visuelle mediatorer, i tillegg til ordbruk, narrativer og rutiner, kan være en god måte å invitere elever inn i diskursen på og slik gi dem muligheter for læring.

Litteraturliste

Arginskaya, I., Ivanovskaya, E., Kormishina, S., Blank, N., Melhus, K., & Tveit, C. (2017). *Matematikk 4: Grunnbok 4B.* Barentsforlag.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 97–109. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z.

Arzarello, F., Robutti, O. & Thomas, M. (2015). *Educational Studies in Mathematics*, *90*, 19–37. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-015-9611-5.

Aubert, K. E. (2018). *Geometri* i *Store norske leksikon* på snl.no. Hentet 9. mars 2021 fra https://snl.no/geometri

Aubert, K. E. (2020) *Volum* i *Store norske leksikon* på snl.no. Hentet 9. mars 2021 fra https://snl.no/volum

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 258–292.

Berger, Margot (2013). Examining mathematical discourse to understand in-service teachers' mathematical activities. *Pythagoras*, *34*(1), 10 sider. DOI: https://doi.org/10.4102/pythagoras.v34i1.197

Bjuland, R. (2012). The mediating role of a teacher's use of semiotic resources in pupils' early algebraic reasoning. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 665–675. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-012-0421-2

Bjuland, R., Cestari, M. L. & Borgersen, H. E. (2008). The Interplay Between Gesture and Discourse as Mediating Devices in Collaborative Mathematical Reasoning: A Multimodal Approach. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(3), 271–292. DOI: https://doi-org.ezproxy.uis.no/10.1080/10986060802216169

Blank, N., Melhus, K., Tveit, C. & Moe, G. I. (2014) Utviklende opplæring i matematikk. *Utdanning*, *13*, 50–53.

Carbonneau, K. L., Marley, S. C. & Selig, J. P. (2013). *Journal of Educational Psychology*, *105*(2), 380–400. DOI: https://doi.org/10.1037/a0031084

Edwards, L. (2003). A natural history of mathematical gesture. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association Annual Meeting, Chicago, April.

Edwards, L. (2005). The role of gestures in mathematical discourse: Remembering and problem solving. I H. L. Chick & J. L. Vincent (Red.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, s. 135–138). Hentet fra https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29ResearchForums/PME29RFArzarelloEdwards.pdf

Edwards, L. (2009). Gestures and conceptual integration in mathematical talk. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 127–141. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-008-9124-6

Flyvbjerg, B. (2011). Case Study. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (4.utg, 17, s. 301–316). Sage.

Gautam, R. & Bjuland, R. (2021). Realization of the mathematical signifier 25 × 12. I G. A. Nortvedt, N. F. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Hähkiöniemi, B. E. Jessen, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Naalsund, H. K. Nilsen, G. Pálsdóttir, P. Portaankorva-Koivisto, J. Radišić & A. Wernberg (Red.), *Bringing Nordic mathematics education into the future: Preceedings of Norma 20. The ninth Nordic Conference on Mathematics Education* (14, s. 97–104). Swedish Society for Research in Mathematics Education.

Gilje, N. & Grimen, H. (1995). *Samfunnsvitenskapenes forutsetninger. Innføring i samfunnsvitenskapenes vitenskapsfilosofi*. (2.utg.). Universitetsforlaget.

Gjære, Å. L. & Blank N. (2019). Teaching mathematics developmentally: Experiences from Norway. *For the Learning of Mathematics. FLM. An International Journal of Mathematics Education*, *39*(3), 30–35.

Goldin-Meadow S. (2003). *Hearing gesture: How our hands help us think.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Goldin-Meadow S. (2010). When gesture does and does not promote learning. *Language and cognition*, *2*(1), 1–19. DOI: https://doi.org/10.1515/LANGCOG.2010.001

Guseva, L. G. & Solomonowich, M. (2017). Implementing the zone of proximal development: from the pedagogical experiment to the developmental education system of Leonid Zankov. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *9*(4), 775–786.

Halvorsen, N. & Waaler, V. (2011). *Konkreter i matematikkundervisningen. En litteraturstudie.* (Masteroppgave), Universitetet i Oslo. Hentet fra https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/31441/Brukxavxkonkreter.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (1, kapittel 9, s. 371–404). Information Age.

Hong, D. S. & Runnalls, C. (2020). Understanding length × width × height with modified tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(4), 614–625. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1583383

Håkull, J. (2020). *En undersøkelse av lærers bruk av visuelle mediatorer*. (Paper i emnet MUT303). Universitetet i Stavanger.

ICMI, International Commission on Mathematical Instruction (2021, 22. februar). The 2007 Hans Freudenthal Award. Hentet fra https://www.mathunion.org/icmi/2007-hans-freudenthal-award

Imsen, Gunn (2005). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi*. (4. utg.). Universitetsforlaget. Kap 11.

Kirfel, C. & Brucker, H. J. (2009). 3.2 Målinger. I B. K. Selvik (Red.), *Matematiske sammenhenger: Geometri* (Kapittel 3.2, s. 49–52). Caspar Forlag AS.

Kleven, T. A. & Hjardemaal, F. R. (2018). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode. En hjelp til kritisk tolkning og vurdering* (3.utg). Fagbokforlaget.

Kvale, S. og Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal Norsk Forlag AS.

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C. & Murray, A. K. (2015). What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science and Montessori Education. *SAGE Open*, *5*(2), 1–8. DOI: https://doi.org/10.1177/2158244015589588

Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*, 153–176. Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Maxwell, J.A. (2009). Designing a Qualitative Study. I L. Bickmann & D. J. Rog (Red.), *The SAGE Handbook of Applied Social Research Methods* (2. utg., kapittel 7, s. 214–250). SAGE.

McNeill, D. (1992). *Hand and Mind: What gestures reveal about thought*. University of Chicago Press.

McNeill, D. (2005). *Gesture and Thought.* University of Chicago Press.

Mildenhall, P. M. (2013). Using semiotic resources when building images of the part-whole model of fractions. I V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Red.), *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow (Proceedings of the 36th annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 506-512). MERGA. Hentet fra https://ro.ecu.edu.au/ecuworks2013/336/

Moe, G. I. & Moe, S. (2016). Utviklende opplæring i matematikk – utfordringer for læreren. *Bedre Skole*, *4*, 72–75.

Munthe, E., Helgevold, N. & Bjuland, R. (2015). *Lesson Study i utdanning og praksis*. Cappelen Damm AS.

NESH (2016). Forskingsetiske retningslinjer for samfunnskunnskap, humaniora, jus og teologi. Oslo: De nasjonale forskningsetiske komiteene.

Nevøy, Anne (2004). *Case studier og kvalitative forskningsdesign*. Upublisert arbeidsnotat presentert ved faget Forskningsmetode og vitenskapsteori på UIS H2020.

Novack, M. & Goldin-Meadow, S. (2015). Learning from Gesture: How Our Hands Change Our Minds. *Educational Psychology Review*, *27*(3), 405–412. DOI: https://doi.org/10.1007/s10648-015-9325-3

Outhred, L. N. & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(2), 144–167. DOI: https://doi.org/10.2307/749749

Pedersen, B. (2020) *Arkimedesloven* i *Store norske leksikon* på snl.no. Hentet 11. april 2021 fra https://snl.no/arkimedesloven

Postholm, M. B. (2004). Kvalitativ forskning på praksis. Fra opprinnelse til forskerfokus. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *88*(1), s.3–18.

Postholm, M. B. (2005). Observasjon som redskap i kvalitativ forskning på praksis. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *89*(2), 146–159.

Postholm, M. B. (2007). Læreren som forsker eller lærer. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *91*(3), 232–244.

Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational Studies in Mathematics*, *91*, 423–430 (2016). DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-015-9676-1.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W-M., & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in Mathematics Education*. Springer Open. DOI https://doi.org/10.1007/978-3-319-31370-2.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70. Lawrence Erlbaum Associates, Inc. DOI: https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 111–126. DOI: 10.1007/s10649-008-9127-3

Radford, L. Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 91–95. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y.

Roth, W – M. (2000). From gesture to scientific language. *Journal of Pragmatics*, *32*, 1683–1714. Elsevier Science B.V. DOI: https://doi.org/10.1016/S0378-2166(99)00115-0

Roth, W – M. (2001). Gestures: Their role in teaching and learning. *Review of Educational Research*, *71*(3), 365–392. DOI: 10.3102/00346543071003365

Roth, W– M. (2007). *Doing Teacher – Research. A handbook for perplexed practitioners*. Sense Publishers.

Sfard, A. (2007). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 565–613. DOI: https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge University press.

Sfard, A. (2009). What's all the fuss about gestures? A commentary. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 97–109. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-008-9161-1

Sfard, Anna (2017). Ritual for ritual, Exploration for exploration: Or, what learners are offered is what you get from them in return. I J. Adler & A. Sfard (Red.), *Research for educational change: transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (Kapittel 3, s. 41–63). Routledge.

Silverman, D. (2011). *Interpreting qualitative data. A guide to the principles of qualitative research* (4. utg.). Los Angeles: Sage.

Svennevig, J. & Henriksen, A. H. (2017). Modalitet: Semiotikk. Hentet 25.02.2021 fra https://snl.no/modalitet.

Svingen, O. E. L. (2018). Representasjoner i matematikk. Matematikksenteret. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P4_M1Representasjoner-i-matematikk_fagtekst.pdf

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis. Et sosiokulturelt perspektiv*. Cappelen Akademisk forlag.

Säljö, R. (2002). Læring, kunnskap og sosiokulturell utvikling. Mennesket og dets redskaper. I I. Bråten (Red.), *Læring. I sosialt, kognitivt og sosial-kognitivt perspektiv* (Kapittel 2, s. 31–57). Cappelen Akademisk forlag.

Tekin-Sitrava, R. & Işıksal-Bostan, M. (2014). An Investigation into the performance, solution strategies and difficulties in middle school students' calculation of the volume of a rectangular prism. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*. Hentet fra http://www.cimt.org.uk/journal/tekin2.pdf

Tekin-Sitrava, R. & Işıksal-Bostan, M. (2016). The nature of middle school mathematics teachers' subject matter knowledge: the case of volume of prisms. *International Journal of Educational Sciences*, *12*(1), 29–37. DOI: https://doi.org/10.1080/09751122.2016.11890409

Tekin-Sitrava, R. & Işıksal-Bostan, M. (2018). The nature of middle school mathematics teachers' subject matter knowledge: the case of volume of prisms. This paper explores student's misconceptions and difficulties with calculating the volume of a prism. *Australian mathematics teacher*, *74*(1), 22–30.

Thagaard, T. (2018). Systematikk og innlevelse – En innføring i kvalitative metoder (5.utg.). Fagbokforlaget.

Tyskerud, A. & Mosvold, R. (2018). Scrutinizing teacher-learner interactions on volume. *Nordisk matematikkdidaktikk*, *23*(2), 49–67.

UiS.no (2020). Studere matematikkundervisning. Hentet fra https://student.uis.no/subject/?code=MUT303_1&parentcat=17134 (Lesedato: 09.04.20). PS: Faget tilbys ikke lenger, så de nåværende nettsidene inneholder ikke info om dette faget, derfor er denne tidlige lesedato med.

Ulland G., Røskeland M. & Herheim, R. (2018). Språk teller! Om hvordan elever løser, tenker rundt og skriver om et regnestykke. *Nordic Journal of Literacy Research*, *4*(1), 121–141. DOI: http://dx.doi.org/10.23865/njlr.v4.1256.

Udir (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-4.-arssteget

Udir (2020). *Læreplan i Matematikk* (MAT01-05). *Kjerneelementer*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Vestersjø, Eli (2002). Volumforståelse hos elever på grunnkurs i videregående skole (Hovedoppgave som del av «Kvalitet i matematikkundervisningen», KIM - prosjektet). Universitetet i Oslo. Hentet fra https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/32353/vestersjo.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry: Towards a Socio-cultural Practice and Theory of Education*, Cambridge University Press. *ProQuest Ebook Central*. Hentet fra http://ebookcentral.proquest.com/lib/uisbib/detail.action?docID=201556.

Yin, Robert K. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods*. SAGE Publications, Inc.

Zankov, L.V. (1977) *Teaching and Development: A Soviet Investigation.* ME Sharpe.

Vedlegg

Vedlegg 1 Transkripsjonsnøkkel

Transkripsjon

Vi forholder oss til følgende transkripsjonsnøkkel:

(I tillegg vil tall skrives som ord og ikke med tallsymboler). Det er ikke nødvendig å skrive tidspunkt for hver uttalelse, men vurder hvor ofte i forhold til hva som er gunstig for å lete seg tilbake i videoen.

Funksjon	**Tegn**	**Beskrivelse**
Overlapp	[tekst] [tekst]	Blir brukt når to personer sier noe samtidig
Overtakelse	tekst≈ ≈tekst	Indikerer når en person overtar og fortsetter å snakke uten at det er pause imellom
Pause (≥ 1 s)	(ns) der n = antall sekunder Eks. (6s)	Pauser i antall sekunder
Kort pause (≤ 1 s)	(.)	Pauser på under et sekund
Konklusjon	.	Som punktum
Spørsmål	?	Indikerer et spørsmål
Forlengelse	: eller :: for lengre	Indikerer at ordet forlenges. F.eks. "Det er så::: bra at dere..."
Lav prat	*tekst*	Indikerer at det blir snakket lavt
Ukjent tekst	(ukjent tekst)	Indikerer når det som blir sagt er helt ugjenkjennelig og blir ikke transkribert
Forsterkning	<u>tekst</u>	Indikerer at ord eller setninger blir forsterket

Filnavn: 2019-02-DD_Xtime/elevintx/lærerint

utsagn nummerering - Første time mandag begynner på 1-001 osv, andre time mandag 2-001 osv

Tid - den tiden som står i videoen/lydopptaket
Navn - vi gir lærer fiktive navn. Elevnavnene må anonymiseres, lage felles nøkkel.

Alternativ 1: til transkripsjon av undervisningstimer

Eksempel på transkripsjon etter denne nøkkelen:

Nr.	Tid	Hvem	Diskurs	Gestikulering	Kommentar
30	02:53	Lær	Både Pål å han Jan har rett i at vi ska jobb me geometri, å vi ska jobb me omkrets fordi at (1s) omkrets e en del a geometri. (3s) E d nån som veit ka omkrets e? Ka betyr egentli omkrets? Per veit du ka omkrets betyr?		
31	03:13	Per	°Mm huska at vi har hatt om d før°	Går bort til Per	
32	03:16	Lær	Ja d har dåkker heilt sekkert hatt om før, eh Pia veit du ka omkrets e før nåkka?		
33	03:23	Pia	Mm (2s) eh: nei		
34	03:29	Lær	Pål veit du ka omkrets e?		
35	03:30	Pål	Ja de e (1s) eh omkretsn de e størrelsen på en måte		Snakker langsomt

Alternativ 2: til transkripsjon av intervju

Forenklet variant hvor en ikke bruker tabellform:

KL = Kvinnelig lærer
ML = Mannlig lærer

54. KL: Javel. Ja.
55. ML: For det ligger i det engelske språket.
56. KL: Det ligger (.) ja.
57. ML: Og sånn at det er (2s) det er litt sånn engelsk.
58. KL: Det er vel det som er grunnen til at vi <u>ikke</u> bruker det i Norge. Akkurat som i Danmark og har du jo≈
59. ML: ≈Ja, i Danmark har du mer, men i norsk språk så gjør du det ikke.
60. (snakker litt i munnen på hverandre)
61. KL: Vi snakker jo aldri om det.

Vedlegg 2 Meldeskjema til NSD

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Meldeskjema 502242

Sist oppdatert

14.01.2019

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

Navn (også ved signatur/samtykke)
Bilder eller videoopptak av personer
Lydopptak av personer

Type opplysninger

Skal du behandle særlige eller strafferettslige personopplysninger?

Nei

Prosjektinformasjon

Prosjekttittel

Lede matematiske samtaler

Prosjektbeskrivelse

En sentral del av matematikkundervisningen er å initiere og lede matematiske samtaler. Dette er et krevende arbeid hvor læreren må ta både faglige og relasjonelle hensyn. I dette prosjektet studerer vi det komplekse arbeidet med å initiere og lede matematiske samtaler. Fokuset er særlig på hvilke samtaletrekk lærere bruker og hvordan, og hvilke muligheter elevene gis til å delta og til å fremstå i et positivt lys. I tillegg er det et fokus på hvilke krav dette komplekse undervisningsarbeidet stiller til læreren. Det overordnede målet med prosjektet er å bidra til konseptualisering av det matematiske undervisningsarbeidet, og til å utvikle kunnskap om de utfordringene og kravene dette komplekse arbeidet stiller til lærere.

Prosjektet vil foregå i perioden 2019-2021. I denne perioden vil det samles inn kvalitative forskningsdata i utvalgte klasser. Datainnsamlingen i hver klasse vil foregå over 2-3 uker, og vi vil i løpet av prosjektet samle inn data i flere valgte klasser. Det vil også være mulig å samle inn data i samme klasse eller hos samme lærer i flere perioder, men dette vil da avtales på nytt for hver gang. Forskningsdata vil bli samlet inn i form av feltnotater, intervjuer, oppgaveanalyse og klasseromsobservasjoner. Det vil bli gjort video- og lydopptak fra matematikkundervisningen og intervjuene. Det vil ikke bli samlet inn direkte personidentifiserende opplysninger i prosjektet. Alle observasjoner og kommentarer fra lærer og elever vil bli behandlet konfidensielt, og både elever, lærere og skole vil bli gitt fiktive navn. Ved prosjektets slutt vil alle lyd- og video-opptak bli slettet, og kun anonymiserte transkripsjoner og feltnotater vil bli oppbevart.

Fagfelt

Matematikk og naturvitenskap

Dersom opplysningene skal behandles til andre formål enn behandlingen for dette prosjektet, beskriv hvilke

Det vil i forbindelse med prosjektet ikke bli samlet inn personopplysninger. Datamaterialet som samles inn i prosjektet vil kun være tilgjengelig for analyser i en forskergruppe bestående av 2-3 seniorforskere og ca. 20 masterstudenter. Datamaterialet vil brukes til analyser som vil ende opp som forskningsrapporter, og resultater fra prosjektet vil også kunne publiseres i tidsskriftartikler, konferansepaper og/eller bok-kapitler.

Begrunn behovet for å behandle personopplysningene

Prosjektet har fokus på matematikkundervisning og ikke på enkeltlærere eller elever. Det er et mål i prosjektet å utvikle teori heller enn å generalisere til en større populasjon av elever eller lærere. Derfor anser vi det som unødvendig å samle inn personopplysninger i prosjektet. Det vil naturligvis være nødvendig å forholde seg til en viss form for personopplysninger i form av kontaktinformasjon med lærer og skole, men det vil ikke bli lagret personopplysninger som del av forskningsdata i prosjektet.

Ekstern finansiering

Andre

Annen finansieringskilde

Prosjektet finansieres av forskernes egne FoU-tid, og masterstudentenes bidrag er knyttet til

deltakelse i masterutdanningen.

Type prosjekt

Forskerprosjekt

Behandlingsansvar

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Stavanger / Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora / Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Reidar Mosvold, reidar.mosvold@uis.no, tlf: 51832342

Skal behandlingsansvaret deles med andre institusjoner (felles behandlingsansvarlige)?

Nei

Utvalg 1

Beskriv utvalget

Utvalget vil bestå av strategisk valgte lærere og deres matematikk-klasser. Utvalg 1 er

definert som lærerne. **Rekruttering eller trekking av utvalget**

Utvalget vil rekrutteres gjennom universitetets praksisnettverk. Prosjektleder vil ta kontakt

med lærer og skoleledelse. **Alder**

21 - 67

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 1

Navn (også ved signatur/samtykke)
Bilder eller videoopptak av personer
Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 1

Personlig intervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Ikke-deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Informasjon for utvalg 1

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?

Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Utvalg 2

Beskriv utvalget

Utvalg 2 defineres som elevene i de strategisk valgte matematikk-klassene. Studien fokuserer

på grunnskolen. **Rekruttering eller trekking av utvalget**

Det er lærerne som trekkes, og elevene blir dermed utvalgt i kraft av å være i de valgte lærernes klasser. Førstegangskontakt vil skje mellom prosjektleder og lærer/skoleledelse.

Alder

6 - 15

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 2

Navn (også ved signatur/samtykke)
Bilder eller videoopptak av personer
Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 2

Gruppeintervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Ikke-deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Informasjon for utvalg 2

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?

Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Tredjepersoner

Skal du behandle personopplysninger om tredjepersoner?

Nei

Dokumentasjon

Hvordan dokumenteres samtykkene?

Manuelt (papir)

Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?

Samtykke kan trekkes tilbake ved å ta kontakt med prosjektansvarlig. Dette er opplyst om i informasjonsskriv. **Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet opplysninger om seg selv?**

Det vil ikke bli samlet inn noen personopplysninger, og det vil derfor ikke være behov for å få rettet opplysninger. Deltakerne i studien kan når som helst få innsyn i datamateriale ved å ta kontakt med prosjektleder.

Totalt antall registrerte i prosjektet

1-99

Tillatelser

Skal du innhente følgende godkjenninger eller tillatelser for prosjektet?

Behandling

Hvor behandles opplysningene?

Mobile enheter tilhørende behandlingsansvarlig institusjon
Fysisk isolert maskinvare tilhørende behandlingsansvarlig institusjon

Hvem behandler/har tilgang til opplysningene?

Prosjektansvarlig
Student (studentprosjekt)
Interne medarbeidere

Tilgjengeliggjøres opplysningene utenfor EU/EØS til en tredjestat eller internasjonal

organisasjon? Nei

Sikkerhet

Oppbevares personopplysningene atskilt fra øvrige data (kodenøkkel)? Ja

Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?

Opplysningene anonymiseres
Adgangsbegrensning

Varighet

Prosjektperiode

01.01.2019 - 31.12.2021

Skal data med personopplysninger oppbevares utover prosjektperioden?

Nei, data vil bli oppbevart uten personopplysninger
Vil de registrerte kunne identifiseres (direkte eller indirekte) i oppgave/avhandling/øvrige publikasjoner fra prosjektet?

Nei

Vedlegg 3 Samtykkeskjema foresatt

Vil du delta i forskningsprosjektet «Lede matematiske samtaler»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan lærere leder matematiske samtaler i klasserommet og hvilke muligheter det gir elevene til å fremstå som flinke i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Prosjektet vil foregå i perioden 2019-2021, og målet er å utforske viktige sider ved undervisningsarbeidet i matematikk. Prosjektet har et særlig fokus på det å lede matematiske samtaler i klasserommet, og vi undersøker her hvordan lærere gjennomfører denne delen av undervisningen, hvilke krav dette arbeidet kan stille til læreren og hvilke muligheter elevene gjennom samtalene får til å fremstå som flinke i matematikk. Det overordnede målet med prosjektet er å bidra til større forståelse for den komplekse matematikkundervisningen. Dette er et forskningsprosjekt som ledes av erfarne forskere ved Universitetet i Stavanger, og masterstudenter deltar i innsamling og analyse av forskningsdata. Resultatene av studien vil kunne formidles i forskningsrapporter, tidsskriftartikler, bok-kapitler og konferansepaper.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet, og prosjektet ledes av professor Reidar Mosvold ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Vi har spurt lærere/klasser i universitetets praksisnettverk om å delta i prosjektet, og lærer/klasse er valgt strategisk fordi vi har grunn til å tro at dette er lærere/klasser som har et spesielt fokus på å utvikle gode samtaler i matematikk-klasserommet.

Hva innebærer det for deg å delta?

I løpet av de 2-3 ukene prosjektet foregår i klassen vil grupper av forskere og masterstudenter observere matematikkundervisningen og gjøre lyd- og videoopptak av denne. Forskerne vil også skrive feltnotater under observasjonene. Intervju med lærer vil gjøres etter avtale, og i løpet av perioden vil vi også gjennomføre intervju med to elevgrupper. Disse elevgruppene vil velges ut i samsvar med lærer, og dette vil bli avklart med foreldre. Det vil også bli gjort lyd- og video-opptak under intervjuene. Lærer vil få intervjuguide på forhånd, og foreldre kan få se intervjuguiden på forhånd ved å ta kontakt med lærer.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Dette kan gjøres ved å ta kontakt med prosjektansvarlig. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Opplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet vil kun være tilgjengelig for de ansvarlige forskerne i prosjektgruppen, og for de masterstudentene som deltar. Opptakene vil under prosjektperioden lagres på ekstern harddisk som blir forsvarlig lagret og innelåst. I alle skriftliggjøringer av datamaterialet vil både elever, lærere og skoler bli gitt fiktive navn. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjoner.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 31. desember 2021. Alle lyd- og video-opptak blir da forsvarlig slettet, og kun anonymiserte tekster vil bli tatt vare på.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Stavanger har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved professor Reidar Mosvold (tlf. 51 83 23 42).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Reidar Mosvold
Prosjektansvarlig
(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring
Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Lede matematiske samtaler», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- at ____ (navn på barnet) kan delta i undervisning som observeres
- at ____ (navn på barnet) kan delta i elevintervju (i gruppe med 2-5 elever)

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 31. desember 2021.

(Signert av foreldre/foresatte, dato)

Vedlegg 4 Samtykkeskjema lærer

Vil du delta i forskningsprosjektet «Lede matematiske samtaler»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan lærere leder matematiske samtaler i klasserommet og hvilke muligheter det gir elevene til å fremstå som flinke i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Prosjektet vil foregå i perioden 2019-2021, og målet er å utforske viktige sider ved undervisningsarbeidet i matematikk. Prosjektet har et særlig fokus på det å lede matematiske samtaler i klasserommet, og vi undersøker her hvordan lærere gjennomfører denne delen av undervisningen, hvilke krav dette arbeidet kan stille til læreren og hvilke muligheter elevene gjennom samtalene får til å fremstå som flinke i matematikk. Det overordnede målet med prosjektet er å bidra til større forståelse for den komplekse matematikkundervisningen. Dette er et forskningsprosjekt som ledes av erfarne forskere ved Universitetet i Stavanger, og masterstudenter deltar i innsamling og analyse av forskningsdata. Resultatene av studien vil kunne formidles i forskningsrapporter, tidsskriftartikler, bok-kapitler og konferansepaper.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet, og prosjektet ledes av professor Reidar Mosvold ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Vi har spurt lærere/klasser i universitetets praksisnettverk om å delta i prosjektet, og lærer/klasse er valgt strategisk fordi vi har grunn til å tro at dette er lærere/klasser som har et spesielt fokus på å utvikle gode samtaler i matematikk-klasserommet.

Hva innebærer det for deg å delta?

I løpet av de 2-3 ukene prosjektet foregår i klassen vil grupper av forskere og masterstudenter observere matematikkundervisningen og gjøre lyd- og videoopptak av denne. Forskerne vil også skrive feltnotater under observasjonene. Intervju med lærer vil gjøres etter avtale, og i løpet av perioden vil vi også gjennomføre intervju med to elevgrupper. Disse elevgruppene vil velges ut i samsvar med lærer, og dette vil bli avklart med foreldre. Det vil også bli gjort lyd- og video-opptak under intervjuene. Lærer vil få intervjuguide på forhånd, og foreldre kan få se intervjuguiden på forhånd ved å ta kontakt med lærer.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Dette kan gjøres ved å ta kontakt med prosjektansvarlig. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Opplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet vil kun være tilgjengelig for de ansvarlige forskerne i prosjektgruppen, og for de masterstudentene som deltar. Opptakene vil under prosjektperioden lagres på ekstern harddisk som blir forsvarlig lagret og innelåst. I alle skriftliggjøringer av datamaterialet vil både elever, lærere og skoler bli gitt fiktive navn. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjoner.
Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 31. desember 2021. Alle lyd- og video-opptak blir da forsvarlig slettet, og kun anonymiserte tekster vil bli tatt vare på.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Stavanger har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved professor Reidar Mosvold (tlf. 51 83 23 42).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Reidar Mosvold
Prosjektansvarlig
(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Lede matematiske samtaler», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- å delta i undervisning som observeres
- å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 31. desember 2021.

(Signert av lærer, dato)

Vedlegg 5 Intervjuguide elevintervju 4 trinn

Innledende spørsmål:

1. Er matematikk et fag dere liker eller ikke liker?
    a. Kan dere si litt mer?
    b. Hva er det dere (ikke) liker ved matematikk?
    c. Har det alltid vært sånn?
2. Hva er det dere synes er kjekkest i mattetimene? Minst kjekt? Kan dere gi et eksempel?
3. Hvordan ville deres drømme-matematikktime se ut?
4. Vi skal snart bli matematikklærere, hva er deres tips for at vi skal bli verdens beste mattelærere?

Konkret time:

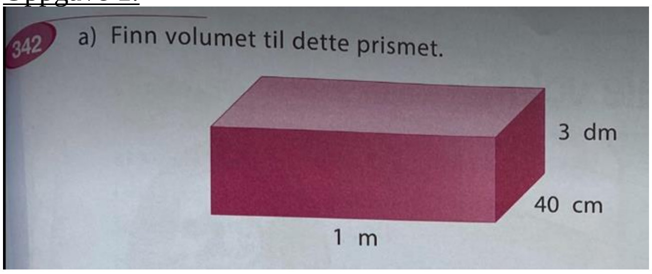
I undervisningstimen der dere fant volumet av et prisme.

5. Hva likte du best med denne undervisningstimen? Hva syns du at du fikk godt til?

Oppgaver:

Vi har funnet fram til noen oppgaver (342) som vi har lyst til å se på sammen. Når vi ser på disse oppgavene vil vi gjerne at dere forsøker å forklare oss hvordan dere tenker og ikke bare sier svarene.

Oppgave 1:



Spørsmål knyttet til oppgave 342

6. Jeg så at dere jobbet med oppgaven om volum av prisme. Kan du vise hvordan dere løste denne oppgaven? (Vis oppgaven)
7. Hvorfor gjorde du slik?
8. Har du løst lignende oppgaver før?
9. Dere snakket om at svaret i kubikkcentimeter ble et veldig høyt tall, så gjorde dere om til kubikkdesimeter. Tenker dere at dette ble en bedre måleenhet?
    a. Kan dere vise hvor stor en kubikkcentimeter er?
    b. Hvor mye er 120 kubikkdesimeter?
    c. Hvor mye er 120 000 kubikkcentimeter?

Oppgave 2: (20/2/20): Problemløsning.

TIPS:

- Varighet: ca. 15-25 min.
- Husk å be om konkrete eksempler
    - Kan du si noe mer om det? Kan du gi et eksempel på det?
- Bruk matematiske begrep.
- Bla gjennom boka - hvilke ord har de egentlig lært og jobbet med så langt?
- Ikke undervurder dem!
- Ikke nødvendigvis lurt å bruke begrepet “vanskelig” - heller spør om de kan forklare hvordan de tenkte under en oppgave → dette kan være en pekepinn for oss om det var vanskelig eller ikke.

Vedlegg 6 Eksempel på original og bearbeidet transkripsjon

Under følger eksempel på hvordan jeg har fjernet mindre relevant informasjon fra original transkripsjon og bearbeidet denne.

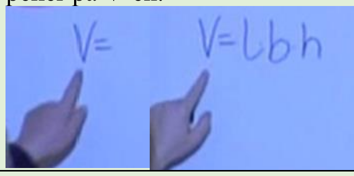
Tabell 25 Original transkripsjon

Nr.	Tid	Hvem	Diskurs	Gestikulering	Kommentar
2-035	06:36	Lærer	Og i dag, så:eh:: nei, det blir (1s) fra og med neste uke så skal vi inn på et nytt kapittel i boka, som handler om måleenheter, derfor har vi såvidt begynt å kikke litt på det. Og senere i dag når du skal få jobbe med multi smartøving (2s) så (1s) har jeg åpnet det kapitlet som har om akkurat det med måling og gjør. Eh: (1s) vi skal komme litt tilbake igjen til det etterpå. Men først og fremst, (1s) volum. Fordi, (1s) her ber de oss om å finne volumet til dette prismet. (2s) Noen ideer om hvordan vi kan gjøre det? (4s) Hvordan kan vi finne (2s) volumet til (1s) dette prismet? (1s) Og hvis du synes det er vanskelig kanskje du vil si noe om det og. (3s) Det er lov det og. (4s) To hender oppe. (1s) Skal gi dere litt tid til å tenke. Tre hender. Hvordan kan jeg finne.. Fire hender. (2s) Er det mulig å finne volumet på dette prismet? (2s) Kan vi gjøre det, Sandra?		Julius rekker tidlig opp hånda.
2-036	08:01	Sandra	Eh: e, lengde ganger bredde ganger høyde.		
2-037	08:05	Lærer	Aha: Det er veldig bra. Det du sa nå det er vel det som vi kaller formelen eller regelen på hvordan vi skal finne, eh: et volum. (1s) V alltid med Ven sant? Volum er lik, det skal være det samme på begge sider av likhetstegnet. Volum er lik lengde ganger bredde ganger høyde. Var det det dere andre ville si også?	Skriver V = l x b x h på tavlen samtidig som hun snakker.	
2-038		Elever	Ja		To elever svarer dette

I den «bearbeidet» transkripsjonen er det som er uthevet i grå fjernet og erstattet med «…»,

Tabell 26 Bearbeidet transkripsjon

Ytring	Matematist	Diskurs	Visuelle mediatorer
35	Lærer	… Men først og fremst, volum. Fordi, her ber de oss om å finne volumet til dette prismet*. (2s) Noen ideer om hvordan vi kan gjøre det? (4s) Hvordan kan vi finne (2s) volumet til dette prismet? Og hvis du synes det er vanskelig kanskje du vil si noe om det og. (3s) Det er lov	**Ikonisk:** *Lærer viser bilde av oppgaven med prosjektor på tavla. 

		det og. (4s) To hender oppe. Skal gi dere litt tid til å tenke. Tre hender. Hvordan kan jeg finne? Fire hender. (2s) Er det mulig å finne volumet på dette prismet? (2s) Kan vi gjøre det, Sandra?	**Deiktisk gest:** nikker forsiktig mot oppgaven på tavla.
36	Sandra	Eh: e, lengde ganger bredde ganger høyde.	**Deiktisk gest:** Lærer peker på Sandra når hun sier formelen og hun nikker også bekreftende – **Emblem.**
37	Lærer	Aha: Det er veldig bra. Det du sa nå det er vel det som vi kaller formelen eller regelen på hvordan vi skal finne, eh: et volum. V, alltid med Ven sant? Volum er lik, det skal være det samme på begge sider av likhetstegnet. Volum er lik lengde ganger bredde ganger høyde. Var det det dere andre ville si også?	**Symbolsk:** Lærer skriver $V = l * b * h$ på tavlen, samtidig som hun snakker og peker. **Deiktisk gest; holdepunkt:** peker på V'en. 
38	Elever	Ja	

Vedlegg 7 Utdrag fra lærerintervju om konkreter

Tabell 27 Utdrag fra lærerintervju om konkreter

286	Lærer	Så, (3s) ja, nei, åss, ja nei jeg tenker helst det i en drømmeverden så hadde vi nok hatt mer slik eh: eh, ting å ta på og. Ja.
287	Intervjuer	Ja, konkreter?
288	Lærer	Ja.
289	Lærer	Eh, men vi må jo være glad til at vi har lærebøker.
…		
292	Intervjuer	Ja. Føler du at det blir nok tid til lek og aktivitet?
293	Lærer	Nei. Jeg kunne tenkt meg at det var mer tid til spill for eksempel.
294	Intervjuer	Ja.
295	Lærer	Eh: (1s) Noe som jeg ikke syns dette læreverket legger opp til egentlig i det hele tatt. For egentlig i en drømmeverden så gjør du alltid en rød oppgave, to blå, du har et fysisk avbrekk og de skal jobbe 15 minutter individuelt.
296	Intervjuer	Ja. (2s) Da er det ikke tid til så mye mer nei.
297	Lærer	Så ja, det, men slik vi har løst det dette året da, så har de egentlig fire mattetimer i uken, ... Og så den fjerde mattetimen da, da har de stasjoner og da bruker de ofte spill.
…		
304	Lærer	Mm, så eh, så. Men jeg prøver gjør det de gangene som, vi har laget vår egen, egne tangram som vi jobber med, henter frem igjen. Det skal vi ha neste uke tror jeg, igjen. Hvis vi har med sannsynlighet og kombinatorikk så har jeg gjerne laget baller av papir og sant, hvis du trekker..
305	Intervjuer	Mhm, ja.
306	Lærer	Hvor stor er da sannsynligheten for å få tre gule, eller ja. Så prøver, ja. Men skulle nok ønske at vi hadde mer konkret materiale.