Universitetet i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering: lektor realfag	Vårsemesteret, 2021 Åpen
Forfatter: Solveig Mathilde Ingebretsen Abrahamsen (239538)	Mathilde Abrahamsen (signatur forfatter)
Fagansvarlig: Alex Nielsen Veileder(e): Sigbjørn Hervik	
Tittel på masteroppgaven: «Den deriverte, tangenter og elevers forståelse av disse» Engelsk tittel: «the derivative, tangents and pupils' understanding of these»	
Studiepoeng: 30	
Emneord: matematisk analyse, dybdelæring, forståelse, matematikk.	Sidetall: 93 + vedlegg/annet: 113 Stavanger, 15.06.2021 dato/år

Den deriverte, tangenter og elevers forståelse av disse

Forord

Prosessen med å undersøke elevers forståelse for begrepene *den deriverte* og *tangenter* og deres kunnskaper innen funksjonslære, har vært krevende. På grunn av den uforutsigbare Covid-19-situasjonen, har utvalgsskolen flere ganger stengt ned og hatt hjemmeundervisning, og innsamlingsarbeidet har derfor stoppet opp flere ganger. Innsamlingen har derfor vært tidkrevende og medført stor frustrasjon. Prosessen har samtidig vært svært spennende og lærerik. Både forskningsprosessen i seg selv og de innsiktene den har gitt, er verdifull erfaring og kunnskap jeg tar med meg inn i læreryrket. Med fagfornyelsen, som har et stort fokus på dybdelæring, fremfor oss, står begrepslære og begrepsforståelse sentralt. En bedre innsikt i elevenes forståelse av begrepene *den deriverte* og *tangenter*, vil forhåpentligvis gjøre meg bedre rustet til å tilrettelegge undervisningen på en måte som fremmer en helhetlig forståelse av begrepene og dermed dybdelæring – i tråd med de nye læreplanene for matematikk. Prosjektet er gjennomført alene, og oppgaven er individuelt utformet og skrevet.

- Tusen takk til medstudenten som inspirerte valg av tema for oppgaven.
- Tusen takk til Sigbjørn Hervik for veiledning og støtte.
- Tusen takk til storesøster, Grace Buch, for korrekturlesing.
- Tusen takk til utvalgsskolen og elevene som har bidratt i forskningsarbeidet.
- Tusen takk til IT-avdelingen ved utvalgsskolen for teknisk hjelp og støtte.

Dato

Solveig Mathilde Ingebretsen Abrahamsen

Abstrakt

Fagfornyelsen innføres i disse dager i den norske skolen. Jeg har, både i student- og lærerrollen, erfart at det har vært *og er* et stort fokus på hvordan man best mulig kan forberede seg på de endringene denne fornyelsen medbringer. I de nye læreplanene står blant annet dybdelæring sentralt, og dette er derfor noe jeg har valgt å fokusere på i dette forskningsarbeidet. For å oppnå dybdelæring, er det essensielt at elevene har god matematisk forståelse, herunder begrepsforståelse. Hva slags forståelse har elever med fagene S2 og R2 av begreper som *den deriverte* og *tangenter*? Er denne forståelsen *instrumentell* eller *relasjonell*? Har elevene utviklet et godt nok begrepsapparat, slik at de kan anvende gammel kunnskap i nye situasjoner, eller er de låst til kjente oppgaver og situasjoner? Og til slutt; er det en forskjell i elevenes forståelse på tvers av fagene?

Forskningen er basert på en innsamling blant elever som tar fagene S2 og R2. Matematikk S er såkalt samfunnsfaglig matematikk, med fokus på algebra, funksjoner, sannsynlighet, lineær optimering statistikk. Matematikk R er realfaglig matematikk og er en forutsetning for å kunne ta realfaglige og teknologiske utdanninger. Den tar for seg geometri, algebra, funksjoner, kombinatorikk, sannsynlighet og differensiallikninger. Vi ser at flere av temaene, deriblant funksjoner, går igjen i begge fagene, men temaene formidles ulike i både lærebøkene og undervisningen. Derfor vil det være interessant å se på elevenes forståelse på tvers av fagene. Er det noe som kan tyde på at elevene i den ene gruppen har en ulik – og kanskje bedre – forståelse enn elevene i den andre gruppen?

Forskningen baserer seg, som nevnt, på en innsamling gjort i tredje klasse på en videregående skole. Ved hjelp av de kvalitative innsamlingsmetodene intervju og observasjon, samlet jeg inn informasjon om elevenes forståelse innen temaet funksjonslære. For å se hvordan elevene anvendte kunnskapen i praksis, ba jeg dem løse et sett med oppgaver. Noen av disse oppgavene krevde kun at elevene husket formler og var utformet i tråd med eksempler fra elevenes lærebøker. Andre oppgaver var derimot ukjente, mer komplekse og krevde derfor en relasjonell forståelse, som i større grad tilfredsstiller ønsket om dybdelæring.

Innholdsfortegnelse

1.0 Introduksjon

Fagfornyelsen innføres i disse dager i den norske skolen, og fra og med skoleåret 2020/2021 blir over 40 nye lærelæreplaner for grunnskolen og den videregående skolen innført. Flere klassetrinn og fag har allerede tatt i bruk de fornyede læreplanene, mens andre trinn og fag ikke tar dem i bruk før skoleårene 2021/2022 og 2022/2023. Jan Tore Sanner, tidligere kunnskaps- og integreringsminister, omtaler fagfornyelsen som den største endringen av skolens innhold siden Kunnskapsløftet i 2006 (Hirsti, 2018). Omveltningene er store – både for elever og lærere – og fra både utdanningen og jobben som lærer ved en ungdomsskole, har jeg erfart et stort fokus på hvordan man best mulig kan forberede seg på endringene de nye planene medfører.

De gamle læreplanene er overfylte og gir dermed lite rom for fordypning og faglig forståelse. På grunn av planenes omfang, har det dessuten vært vanskelig for lærere å prioritere hvilke deler av pensum som skal prioriteres. I tillegg er samfunnet i stadig endring, og en fornyelse av læreplanene er derfor nødvendig for å fornye skolen i lys av fremtidige kompetansebehov i samfunn- og arbeidsliv (NOU 2014:7, s. 11).

I følge TIMMS Advanced, som er en internasjonal komparativ undersøkelse av elever i det siste året på videregående som spesialiserer seg innen matematikk og fysikk, var det en klar tilbakegang i de norske elevers matematikkprestasjoner fra 1998 til 2008. Undersøkelsen fra 2008 viste at norske elever presterer lavere enn elever fra mange av de andre deltakende landene (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010, s. 11). Resultatene fra undersøkelsen i 2015 viste fremgang i prestasjoner i matematikk fra studien i 2008. Til tross for denne fremgangen, var resultatene fra 2015 fremdeles svakere enn det var i resultatene fra studien fra 1998. Ett av fagområdene TIMMS Advanced undersøker elevenes kompetanse innen, er kalkulus, hvor blant annet derivasjon og tangenter inngår (Utdanningsdirektoratet, 2016, s. 2-5). Ut fra resultatene fra undersøkelsene, virker det som at den norske skolen har en vei å gå dersom de vil oppnå prestasjoner på samme nivå som i 1998 – eller på nivå med høytpresterende land som Nederland, Russland og Libanon. En fornyelse av fagene kan – forhåpentligvis – bidra til å føre norske elever opp på et høyere kompetansenivå. Det er skolens ansvar å best mulig tilrettelegge for varig læring og progresjon i elevenes læring, men hva må gjøres for å oppnå dette?

De nye planene skal være relevante og fremtidsrettede, samtidig som de skal gi rom for både fordypning og dybdelæring (Hirsti, 2018). Denne oppgaven har fokus på elevers *forståelse* innen matematisk analyse, og siden en god begrepsforståelse er en forutsetning for dybdelæring, vil den samtidig ha et fokus på fagfornyelsen og dybdelæring. I forskningsarbeidet har jeg intervjuet og bedt elever fra fagene S2 og R2 om å løse et knippe oppgaver knyttet til den deriverte, derivasjon og tangenter under observasjon. Målet med dette var å få et bedre innblikk av elevenes forståelse av begrepene – særlig om de var låst til regler og algoritmer, eller om de hadde en mer relasjonell forståelse. Ved å intervjue to ulike elevgrupper, var det dessuten et mål å kunne avdekke et eventuelt skille mellom elevene på tvers av fagene. Dersom et slikt skille eksisterer og kommer frem, kan jeg utnytte dette i eget fremtidig yrke ved å forsøke å identifisere forskjellene i undervisningen, og dermed best mulig legge opp til dybdelæring i egen undervisning.

Problemstillingen lyder som følger; *Hva slags forståelse har elever i fagene S2 og R2 for begrepene «den deriverte» og «tangenter»?*

Inspirasjonen for denne oppgaven fikk jeg i høst, da det kom fram at en av mine medstudenter, som også har matematikk som hovedfag, ikke visste hva en tangent er. Dersom en person med (snart) 180 studiepoeng i matematikk ikke visste hva en tangent var, ville det heller ikke være unaturlig å tenke at elever på videregående ikke nødvendigvis har en fullstendig forståelse av temaet. Da jeg fortalte en venninne, som har tatt 60 studiepoeng i matematikk for å kunne undervise faget, om temaet for denne oppgaven, var beskjeden klar; «Gud, så kjedelig! Derivasjon er noe av det verste og vanskeligste jeg hadde. [Jeg] husker at jeg bare lærte meg formlene, men at jeg aldri forsto hva det skulle brukes til.» Dette utsagnet inspirerte meg ytterligere til å forsøke å gripe fatt i elevenes tankerekker, slik at jeg i fremtiden kan bli bedre rustet til å tilrettelegge undervisningen på en måte som fremmer en dypere forståelse.

I den neste delen av oppgaven gjøres det rede for teori som er relevant for oppgaven, og jeg starter med å gi en introduksjon av matematisk analyse. Her vil funksjoner, den deriverte og tangenter introduseres, og det presenteres beskrivelser og definisjoner både fra boken *Calculus* og elevenes lærebøker. Videre presenteres teori knyttet til dybdelæring og Fagfornyelsen, og hvordan forståelse, kunnskap og kompetanse kan kategoriseres basert på ulike pedagogiske teorier. Deretter redegjøres det for matematiske begreper, begrepsbilder og begrepsdefinisjoner. Etter dette, introduseres begrepet *motivasjon*. Hva menes med motivasjon, og hvordan kan man som lærer tilrettelegge for å best mulig fremme elevers indre motivasjon i matematikk? I metodedelen beskrives forskningsprosjektet, metodevalg og datainnsamlingen. Videre vil empiri presenteres og analyseres i analysedelen, før jeg diskuterer funnene. Avslutningsvis presenteres en konklusjon.

2.0 Teori

I den følgende delen av oppgaven presenteres teori knyttet til funksjonslære; det vi i matematikken kaller *matematisk analyse*. Her gjøres det rede for begrepene *funksjon, den deriverte* og *tangent*. Det gis formelle definisjoner av disse med utgangspunkt i boken *Calculus*, som ofte brukes på universitetene i fag der matematisk analyse inngår. Hva er en funksjon, og hva er sammenhengen mellom en funksjon og dens deriverte og tangenter? Jeg vil også se nærmere på de (tidvis) mer uformelle definisjonene og representasjonene som gis i elevenes lærebøker, for å gi et innblikk i hvordan stoffet har blitt presentert for elevene selv.

Nye læreplaner for den norske skolen innføres i disse tider gradvis. Videre vil jeg derfor gjøre rede for fagfornyelsesprosessen og et av de mest sentrale elementene i de nye planene, nemlig *dybdelæring*. Siden forståelse står sentralt i dybdelæring, vil jeg videre redegjøre for *begrepsforståelse;* herunder *instrumentell* og *relasjonell* forståelse. Deretter vil jeg presentere ulike måter kunnskap og kompetanse ofte kategoriseres; deriblant Webbs kunnskapsnivåer og såkalte *taksonomier*, som har vært viktige i utviklingen av de nye læreplanene.

Til slutt redegjøres det for teori knyttet til motivasjon, særlig i matematikk. Begreper som *indre* og *ytre motivasjon* introduseres og gjøres rede for. Deretter ser jeg nærmere på hvordan man best mulig kan legge til rette for at elevene skal kunne utvikle sin indre motivasjon, slik at de kan føle på glede og mestring i arbeidet og – forhåpentligvis – prestere bedre i matematikk.

2.1 Matematisk analyse

I den nye læreplanen i matematikk for 1.-10. trinn, stadfestes funksjoner som ett av seks kunnskapsområder innen matematikk. Funksjoner skal gi elevene et viktig verktøy, som gjør dem i stand til å studere og modellere endring og utvikling (Utdanningsdirektoratet, 2020, s.3). I følge kompetansemålene, skal man allerede på 6. trinn kunne bruke funksjoner i programmering, men det er først på ungdomsskolen at elevene tar et dypere dykk inn i funksjonslæren (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 9-14). På videregående, særlig i teoretisk, samfunnsfaglig og realfaglig matematikk, går elevene enda mer i dybden innen funksjoner, og begreper som endringsrate, vekstfart, grenseverdi, derivasjon og tangent introduseres. Elevene introduseres dessuten også for nye typer funksjoner (T Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 5).

2.1.1 Funksjoner

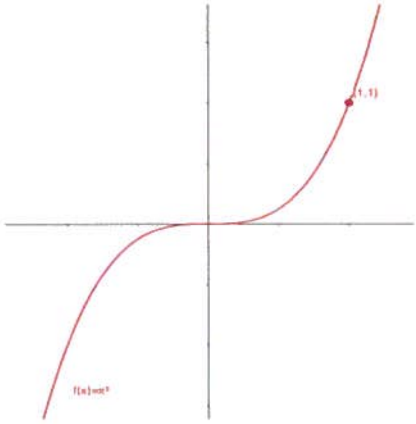
Adams og Essex (2013, s. 24) definerer en funksjon som følger; *«A* ***function*** *f on a set D into a set S is a rule that assigns a unique element f(x) in S to each element x in D.»* Her er $D = \mathfrak{D}(f)$ definisjonsmengden til funksjonen f, og ved å sette inn en x-verdi fra D i funksjonsuttrykket, får vi ut et «output», f(x), som korresponderer til den gitte x-verdien.

En funksjon kan uttrykkes på flere ulike måter rent symbolsk, men i denne oppgaven kommer jeg hovedsakelig til å anvende matematikeren Leonhard Eulers notasjon, som også er notasjonen Adams og Essex og lærebøkene forholder seg til;

$$f(x) = y$$

I denne notasjonen representeres funksjonen ved symbolet ***f***. ***x*** er den uavhengige variabelen som representerer et «input» fra definisjonsmengden, og ***y*** er den avhengige variabelen som korresponderer til «outputet» fra $f(x)$ (Adams & Essex, 2013, s. 26).

Det finnes flere ulike klasser av funksjoner, men jeg har i denne oppgaven valgt å fokusere på de funksjonene elevene som har hatt både S2 og R2 skal ha vært borti; polynomfunksjoner, potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner, rasjonale funksjoner, logaritmefunksjoner og kombinasjoner av disse. En funksjons oppførsel beskrives best ved å tegne dens graf i det kartesiske planet, der dens koordinater (x, y) er parene av input- og output-verdier for f (Adams & Essex, 2013, s. 26). I figuren under ser du hvordan en polynomfunksjon, $f(x) = x^3$, oppfører seg.



Figur 1: Grafen til polynomfunksjonen

$$f(x) = x^3.$$

2.1.1.1 Funksjoner i lærebøkene

Lærebøkene fra ungdomsskolen og videregående beskriver funksjoner enklere enn Adams og Essex, men essensen fanges opp av alle de ulike definisjonene. I *Sigma 1T* matematikk, som alle elevene i utvalget brukte da de tok faget 1T i førsteklasse på videregående, defineres funksjoner som følger: *«En funksjon f er en framgangsmåte som til hver verdi av x gir nøyaktig én funksjonsverdi f(x).»* (Øgrim, Bakken, Pettersen, Skrindo, Thorstensen & Thorstensen, 2013, s. 60). I *Sigma S1 matematikk*, som noen av elevene i utvalget brukte forrige skoleår, presenteres Dirichlets (1805-1859) definisjon; *«En funksjon er en generell regel (ikke bare matematisk) som til enhver verdi av den uavhengige variabelen x gir en bestemt verdi for den avhengige variabelen y.»* (Sandvold , Øgrim, Bakken, Pettersen, Skrindo, Dypbukt, Mustaparta, Thorstensen & Thorstensen, 2014, s. 195).

2.1.2 Den deriverte

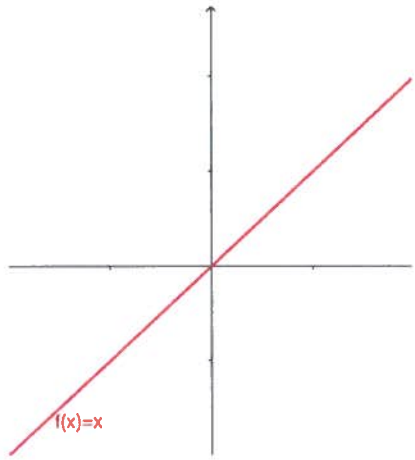
Calculus dreier seg om å beskrive hvordan kvantiteter endres og består av to grunnleggende og motsatte prosedyrer;

i) *differensiering,* for å finne en funksjons endringsrate, og

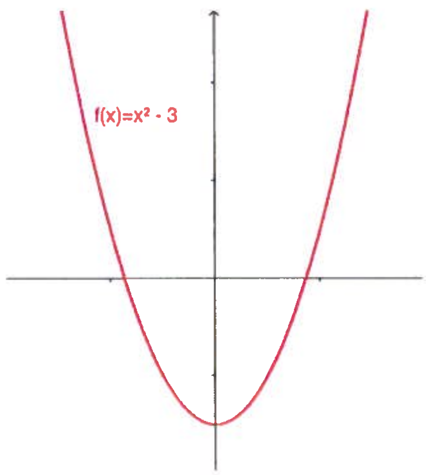
ii) *integrering,* for å finne en funksjon når man kun kjenner endringsraten.

I denne oppgaven vil jeg fokusere på en av disse, nemlig differensiering. Differensiering dreier seg om å finne ut hvor hurtig en forandring i en funksjon skjer i hvert øyeblikk (Adams & Essex, 2013, s. 95), og det er kanskje bedre kjent som derivasjon – særlig blant elever i den videregående skolen.

Rette linjer, altså lineære funksjoner på formen $f(x) = ax + b$, har den egenskapen at farten, altså endringsraten, er den samme i alle punkter langs linja. For andre typer linjer vil den derimot variere fra punkt til punkt. For slike funksjoner, $y = f(x)$, vil farten ved et punkt x også være en funksjon avhengig av x. Vi kaller farten den deriverte av f.



Figur 2: Grafen til den lineære funksjonen f(x)=x. Vi ser at grafen er en rett linje, og funksjonens deriverte (endringsrate/fart) vil dermed være konstant.



Figur 3: Grafen til polynomfunksjonen f(x)=x^2. Siden grafen ikke er en rett linje, vil funksjonens deriverte endre seg avhengig av hvor vi befinner oss på grafen.

Den deriverte av en kontinuerlig funksjon f er, ifølge Adams og Essex (2013, s. 100), en ny funksjon f' gitt ved

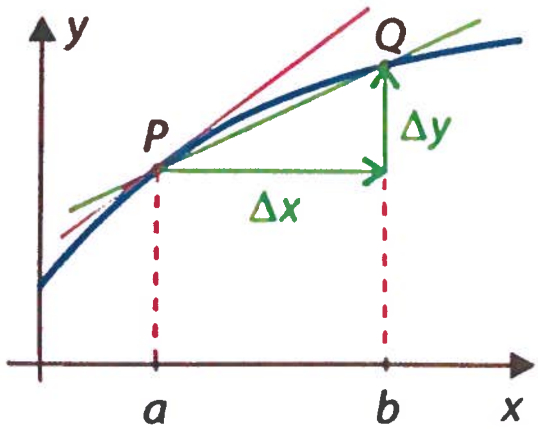
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

h betegner her en endring i x, og man finner den deriverte ved å løse høyresiden av likningen for grenseverdien, altså når $h \to 0$. Endringen i x er da tilnærmet lik null.

Det finnes flere notasjoner for den deriverte, der noen av de mest brukte er $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d}{dx}f(x)$. Disse er kjent som Leibniz notasjoner, oppkalt etter Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), som var en av grunnleggerne av calculus (Adams & Essex, 2013, s. 100-106). I denne oppgaven vil jeg derimot benytte meg av notasjonen $f'(x)$. Det er nemlig den notasjonen som oftest brukes i den videregående skolen, og det vil derfor være hensiktsmessig å benytte seg av den også her.

2.1.2.1 Den deriverte i lærebokene

I både *Sigma 1T matematikk* og *Sigma S1 matematikk* introduseres den deriverte i sammenheng med gjennomsnittlig og momentan vekst. Den deriverte til en funksjon defineres som den momentane vekstfarten til funksjonen. Den momentane vekstfarten når $x = a$, er stigningstallet til tangenten i punktet P, og den kalles den deriverte av $x = a$. Videre introduseres notasjonen til den deriverte, $f'(a)$, og hvordan den leses: «f derivert i a» (Sandvold et al., 2014, s. 201. Øgrim et al., 2013, s.280).



Figur 4: grafisk illustrasjon av den deriverte. Hentet fra *Sigma S1 matematikk* (Sandvold et al., 2014, s. 201).

Også i *Sigma S2 matematikk* brukes momentan vekstfart om den deriverte, men her introduseres en ny definisjon for den deriverte. Den deriverte defineres nå ved hjelp av grenseverdier, i tråd med Adams og Essex' definisjon over. Der Adams og Essex bruker størrelsen h, brukes derimot Δx, som ofte brukes for å betegne en endring i størrelsen x. Den deriverte av en funksjon $y = f(x)$ defineres dermed ved

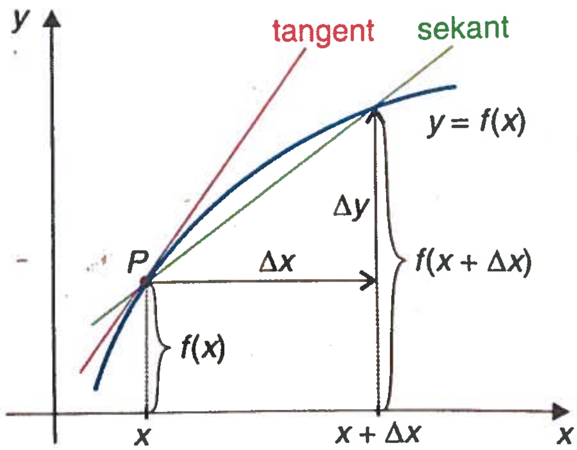
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Verdien av $f'(x)$ er stigningstallet til tangenten, som forteller hvor raskt en funksjon, $f(x)$, vokser (Sandvold, Øgrim, Bakken, Pettersen, Skrindo, Thorsrensen & Thorstensen, 2008, s. 44).

I læreboken *Sigma R1 matematikk*, som elevene fra R2 i utvalget brukte da de tok faget R1, defineres – i likhet med i *Sigma S2 matematikk* og Adams og Essex' bok– den deriverte ved hjelp av grenseverdier. Den deriverte av en funksjon $y = f(x)$ defineres også her ved

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

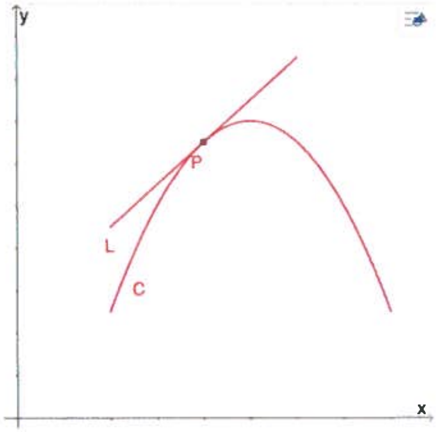
(Øgrim et al., 2012, s. 162).



Figur 5: grafisk illustrasjon av den deriverte, der $\Delta x \to 0$. Hentet fra *Sigma S2 matematikk* (Sandvold et al., 2008, s. 44) og *Sigma R1 matematikk (Øgrim,* Bakken, Pettersen, Skrindo, Dypbukt, Mustaparta, Thorstensen. & Thorstensen, *2012, s. 162).*

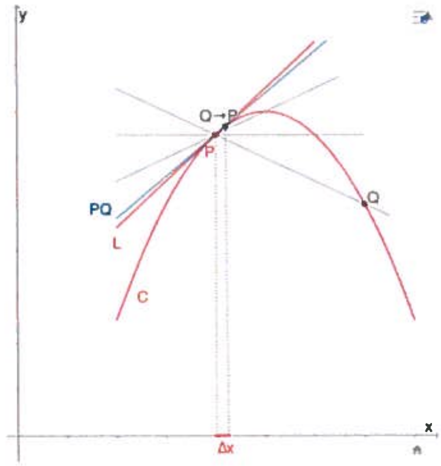
2.1.3 Tangenter

En tangent er en rett linje L som tangerer en kurve C ved et punkt P. Her er kurven C grafen til en funksjon $f(x) = y$ og P punktet (x_0, y_0) på grafen til $f(x) = y$ slik at $f(x_0) = y_0$ (Adams & Essex, 2013, s. 95-97).



Figur 6: Tangenten til kurven C i punktet P.

Hva vil det så si at en linje *tangerer* en kurve C i et punkt P? Dersom man ser for seg et punkt Q, der Q≠P, på C, kalles linjen gjennom P og Q en sekant til kurven C. Sekantlinjen vil rotere rundt P dersom Q flyttes langs kurven, som vist i figuren under. Dersom Q går mot P, altså at $\Delta x \to 0$, kan man se at linjen tangerer C i punktet P (Adams & Essex, 2013, s. 96-97).



Figur 7: Sekanten PQ, som nærmer seg tangenten L. Vi ser at desto nærmere man flytter punktet Q punktet P, slik at $\Delta x \to 0$, desto nærmere vil sekanten PQ komme tangenten L.

Tangenter og den deriverte henger nært sammen. For å finne en tangent i et punkt (x_0, y_0), må man nemlig finne den deriverte av funksjonen og løse likningen for $x = x_0$, for å finne tangentens stigning, a. Dette fordi tangentlinjen skal ha den samme retningen som kurven ved tangentpunktet. Vi finner altså tangentens stigning, a, ved å løse

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Tangenten, eller tangentlinjen, gjennom $P = \big(x_0, f(x_0)\big) = (x_0, y_0)$, har videre likningen

$y = a(x - x_0) + y_0$ (Adams & Essex, 2013, s. 97).

2.1.3.1 Tangenter i lærebøkene

I *Sigma 1T matematikk* og *Sigma S1 matematikk* presenteres tangenter som rette linjer i et punkt, der stigningstallet til tangentene er lik den momentane vekstfarten, altså den deriverte, i punktet (Sandvold et al., 2014, s. 201-206. Øgrim et al., 2013, s. 285).

I *Sigma R1 matematikk* presenteres tangenter – i likhet med den deriverte – i tråd med Adams og Essex' representasjoner. Her brukes definisjonen av den deriverte, som baserer seg på grenseverdier, for å finne stigningen, a, til tangenten i et gitt punkt, P. Dersom man lar $\Delta x \to 0$, vil sekanten svinge om punktet P og nærme seg tangenten (Øgrim et al., 2012, s. 162), som vist i figur 8 .

2.1.4 Funksjonslærens fremstilling i lærebøkene for samfunnsfaglig vs. realfaglig matematikk

Som vi har sett, gir de forskjellige lærebøkene ulike representasjoner av den deriverte og tangenter. I den realfaglige matematikken ble elevene introdusert for definisjoner som bygger på grenseverdier allerede i vg2, mens elevene som tar sosialfaglig matematikk først ble introdusert for disse i vg3, i S2-faget. Videre ser vi at funksjoner, funksjonsdrøfting og derivasjon utgjør en større del av pensum og lærestoffet for R1 enn for S1. I *Sigma R1 matematikk* er to kapitler, kapittel fem og seks, dedikert til henholdsvis «grenser og derivasjon» og «funksjonsdrøfting» (Øgrim, et al., 2012, s. 6-7), mens det i *Sigma S1 matematikk* kun er kapittel seks, «funksjoner», som dedikeres til temaet (Sandvold et al., 2014, s. 7). I *Sigma S2 matematikk* får funksjonslæren større plass, og både derivasjon og funksjonsdrøfting blir gjennomgått mer i dybden (Sandvold et al., 2008, s. 6). I R2-faget fokuseres det på trigonometriske funksjoner, som ikke er en del av pensum for den sosialfaglige matematikken, og andre områder av matematikken (Sandvold et al., 2008, s. 6-7).

Med unntak av de trigonometriske funksjonene, presenteres elevene for de samme funksjonene og introduseres for de samme derivasjonsreglene. Vektleggingen av ulike temaer og hvor dypt de dykker inn i hvert aspekt ved funksjonslæren varierer derimot. Vil dette ha betydning for elevenes forståelse av den deriverte og tangenter? Og vil det være noe som tyder på at undervisningen, som stort sett har fulgt lærebøkene, i ett av fagene har blitt lagt opp på en måte som i større grad fremmer en dypere forståelse og dermed dybdelæring?

2.2 Dybdelæring

2.2.1 Resultater fra TIMMS Advanced

I følge TIMMS Advanced, som er en internasjonal komparativ undersøkelse av elever i det siste året på videregående som spesialiserer seg innen matematikk og fysikk, var det en klar tilbakegang i de norske elevers matematikkprestasjoner fra 1998 til 2008. Undersøkelsen fra 2008 viste at norske elever presterer lavere enn elever i mange av de andre landene som bidro i undersøkelsen (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010, s. 11). Studien kartla ikke bare elevprestasjoner, men innebar også en analyse av selve matematikkundervisningen. Hovedvekten i den norske undervisningen ble lagt på individuelle fremgangsmåter, mens diskusjon og refleksjon rundt svar og løsningsstrategier ble vektlagt i mindre grad enn i de andre landene. På spørsmål om hvor ofte bestemte arbeidsmåter ble benyttet i undervisningen, var det også tydelig at norske elever i stor grad løste oppgaver som liknet på eksempler i læreboka (Grønmoet al., 2010, s. 20-21).

Resultatene fra undersøkelsen i 2015 viser en fremgang i prestasjoner i matematikk fra studien i 2008. Til tross for denne fremgangen, var resultatene fra 2015 fremdeles svakere enn det var i resultatene fra studien fra 1998. TIMMS Advanced undersøker elevenes kompetanse innen fagområdene algebra, geometri og kalkulus, hvor blant annet derivasjon og tangenter inngår. Norske elever presterer relativt sett best i geometri og svakere i kalkulus (Utdanningsdirektoratet, 2016, s. 2-5). Ut fra resultatene fra undersøkelsene virker det som at den norske skolen har en vei å gå dersom de vil oppnå prestasjoner på samme nivå som i 1998 – eller på nivå med høytpresterende land som Nederland, Russland og Libanon. Skolen skal best mulig tilrettelegge for varig læring og progresjon i elevenes læring, men hva må gjøres for å oppnå dette?

2.2.2 Fagfornyelsen og dybdelæring

Kunnskapsløftet (LK06) ble innført i 2006 og var en viktig reform i den norske skolen. Læreplanene fra LK06 har et stort fokus på å utvikle elevenes grunnleggende ferdigheter. Kunnskapsløftet introduserte også en styringsreform, som innebar at hovedvekten på styring skulle skiftes fra styring gjennom rammebetingelser og innsatsfaktorer til styring gjennom mål og resultatinformasjon (NOU 2014:7, s. 10). De nye læreplanene i LK06 har med andre ord et større fokus på hva elevene skal *lære* fremfor hva de skal *gjøre*. Endringene førte skolen i en ny, riktig retning, men Kunnskapsløftet fra 2006 har likevel flere svakheter. Særlig problematisk er læreplanenes omfang. Undersøkelser og tilbakemeldinger indikerer nemlig at læreplanene har et for stort omgang og at det derfor blir problematisk for lærere å prioritere det viktigste fagstoffet. På grunn av den store mengden lærestoff som skal gjennomgås, får elevene dessuten lite tid til faglig forståelse og fordypning (Hirsti, 2018).

En ny reform og et nytt kunnskapsløfte var nødvendig. Fagfornyelsen betegner arbeidet med nye læreplaner for grunnopplæringen. Fag og fagområdene i den norske skolen har vært stabile over tid, men det er ikke bare tradisjonelle disipliner som bør sette premisser for skolens innhold i fremtiden. Samfunnet er tross alt i stadig endring. Fagfornyelsen skal derfor bidra til å fornye skolen i lys av fremtidige kompetansebehov i både arbeids- og samfunnsliv (NOU 2014:7, s. 11). De nye læreplanene skal være relevante og fremtidsrettede. På denne måten skal elevene kunne utvikle kunnskaper, ferdigheter, holdninger og verdier med betydning både for dem selv og samfunnet (Hirsti, 2018).

I løpet av skoleårene 2020/2021, 2021/2022 og 2022/2023, trer over 40 nye læreplaner for grunnskolen og den videregående skolen i kraft. Nye læreplaner for blant annet 1.-9. trinn og vg1 har allerede trådt i kraft dette skoleåret, men for fagene S2 og R2 har nye læreplaner fremdeles ikke trådt i kraft (Utdanningsdirektoratet, 2021, s. 1-5). Selv om disse ikke har trådt i kraft enda, ble de publisert i mars 2021. Vi ser at læreplanene for matematikk S og matematikk R, som fagene kalles i de nye læreplanene, blant annet har et større fokus på såkalt *dybdelæring* (Utdanningsdirektoratet, 2021, s. 2-3, Utdanningsdirektoratet, 2021, s. 20, s. 2-3).

Skolen skal best mulig tilrettelegge for varig læring og progresjon i elevenes læring. Lærerforskning har vist at dybdelæring, i motsetning til overflatelæring, har betydning for elevenes faglige utvikling i og på tvers av fag. Samtidig gir det et godt grunnlag for elevenes progresjon i læringsarbeidet. I utarbeidingen av de nye læreplanene har denne lærerforskningen blitt tatt hensyn til (NOU 2014:7, s. 8-11), og derfor spiller dybdelæring en sentral rolle i Fagfornyelsen generelt – ikke bare innen matematikkfagene.

Utdanningsdirektoratet har definert dybdelæring som følger:

> Det å gradvis utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder. Det innebærer at vi reflekterer over egen læring og bruker det vi har lært på ulike måter i kjente og ukjente situasjoner, alene eller sammen med andre.
> (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 1)

Dybdelæring innebærer altså at elever utvikler forståelse av begreper og sammenhenger innen et fag og mellom fagområder. Elevene vil bli i stand til å knytte nye ideer til kjente begreper og prinsipper, og de vil på denne måten kunne bruke ny forståelse til å løse både kjente og ukjente problemer. Dybdelæring er dermed mer enn faglig fordypning. Læringsarbeidet må ha en god progresjon, slik at elevene får mulighet til å arbeide med stadig mer komplekse oppgaver og å gradvis utvikle en bedre og mer nyansert forståelse. En dybdeorientert opplæring er dermed essensielt for elevenes faglig utvikling, varige læring og mestring (NOU 2014:7, s. 11). Det må samtidig påpekes at dybdelæring ikke dreier seg om å gå i dybden i hele fagets innhold, og elevene vil ofte ha ulike behov for hvordan og hva de fordyper seg i. Skolen vil derfor være ansvarlig for at elevene får tid til fordypning og utfordringer tilpasset deres behov. Læreren må åpne opp for at elevene tar i bruk varierte arbeidsformer, og elevene må være i stand til å ta en aktiv rolle i sin egen læring. Ved å tilrettelegge for læringsprosesser som fremmer forståelse, vil man blant annet bidra til å styrke elevers motivasjon og mestringsfølelse (NOU 2015:8, s. 10-11).

2.3 Kategorisering av forståelse, kunnskap og kompetanse

Læreplanens overordnede del poengterer dybdelæring og dermed utvikling av elevenes forståelse, kunnskap og kompetanse som mål for opplæringen. Læreplanene bygger på følgende definisjon av kompetanse:

> Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning.

(Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 9).
Kunnskap innebærer her å kjenne til og forstå fakta, teorier, begreper, ideer og sammenhenger.

Læring er en kompleks prosess, og det kan være vanskelig å kategorisere og definere hva som kan betegnes som god forståelse, kunnskap og kompetanse. Likevel har det blitt utviklet en rekke pedagogiske teorier som omhandler nettopp dette. Skemp taler for eksempel om relasjonell og instrumentell forståelse (Skemp, 1976, s.2), mens Webb (1999, s. 3) kategoriserer kunnskap inn i fem ulike nivåer. Samtidig betrakter Kilpatrick matematisk kompetanse som en kompleks helhet bestående av fem sammenflettede tråder (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 116). Disse teoriene vil bli presentert og gjennomgått ytterligere i de neste delkapitlene.

I arbeidet med å utvikle de nye læreplanene, har såkalt *taksonomi* vært nyttig. Taksonomi beskrives som systematisering av hvordan kunnskap eller kompetanse bygges opp innen et fagområde, og i didaktisk forskning brukes taksonomier til å angi hvilken grad av kognitiv kompleksitet man bør forvente. Mens overflatelæring sies å være på et lavt taksonomisk nivå, vil derimot dybdelæring befinne seg på et høyt/høyere taksonomisk nivå (NOU, 2015:8, s. 42). Det har blitt utviklet flere taksonomier i forsøk på å evaluere kvalitet, og videre vil to av de mest kjente taksonomiene, nemlig SOLO-taksonomien og Blooms taksonomi, presenteres.

2.3.1 Instrumentell og relasjonell forståelse

Fagfornyelsen, med sitt fokus på dybdelære, tar til sikte mot å gi elevene et godt utviklet begrepsapparat. En god begrepsforståelse innebærer at elevene kan anvende begrepene og at de vet hvorfor de kan bruke et bestemt begrep i en bestemt situasjon (Stengrundet & Valbekmo, 2018, s. 3). Skemp taler om to ulike betydninger av ordet forståelse, nemlig «relational understanding» og «instrumental understanding», altså *relasjonell* og *instrumentell forståelse* (Skemp, 1976, s. 2).

Skemp betegner instrumentell forståelse – om man velger å kalle det forståelse – som «rules without reason». Elever *og lærere* med en instrumentell forståelse kjenner til reglene og vet hvordan man bruker dem, men vil ikke kunne forsvare *hvorfor* en regel er gjeldende og kan brukes i en bestemt situasjon. De vil dermed være dårlig rustet til å løse mer komplekse og sammensatte oppgaver. Mange elever har, kanskje uten å tenke over konsekvensene av det, et mål om å oppnå instrumentell forståelse i læringen. Slike elever vil ikke bry seg om forklaringer og grunnarbeidet læreren legger ned, men venter heller på at læreren skal gi dem en formel de kan bruke i arbeidet med oppgaver. Det er ikke bare elevene selv som kan ha mål om å oppnå en instrumentell forståelse, og enkelte lærere legger også – bevisst eller ubevisst – opp undervisningen på en måte som fremmer instrumentell forståelse (Skemp, 1976, s. 3-5). Etter å ha studert de gamle lærebøkene for ungdomsskolen og videregående skole, er det dessuten tydelig at også læreverkene i en viss grad har fremmet en instrumentell forståelse. Oppgavene er ofte repeterende og homogene, og de krever stort sett ikke mer av elevene enn at de skal være i stand til å bytte ut tallene fra gitte eksempler.

Instrumentell forståelse har tydelige begrensninger og svakheter, men for å forstå hvorfor noen lærere fremdeles legger opp til instrumentell matematikk, må det også nevnes at en instrumentell tilnærming kan ha sine fordeler. Skemp peker på tre fordeler ved instrumentell matematikk: 1) at instrumentell matematikk ofte kan være enklere å forstå, 2) flere, raske korrekte svar kan gi elevene mestringsfølelse, og 3) når man holder seg til en bestemt regel eller oppskrift, kan man ofte nå svarene raskere (Skemp, 1976, s. 8).

På den ene siden står altså elever med instrumentell forståelse, som har memorert formler, algoritmer og instrukser for å komme seg fra A til B, der A er en spesifikk startposisjon (oppgave), og B er oppgavens løsning. På den andre siden står elevene med relasjonell forståelse. Dette er elever som ikke bare forstår hva de skal gjøre, men også hvorfor en bestemt fremgangsmåte vil lede dem fra A til B. De har dessuten utviklet mentale strukturer som gjør dem i stand til å løse både kjente og ukjente oppgaver på flere ulike måter (Nosrati & Wæge, 2018, s. 35-46).

Skemp peker på fire fordeler ved relasjonell matematikk: 1) den er mer tilpasningsdyktig til nye oppgaver, 2) den er enklere å huske, 3) relasjonell forståelse kan være effektivt som et mål i seg selv, og 4) relasjonelle skjemaer har «organiske» kvaliteter. Det første punktet dreier seg om å anvende kunnskap på nye, ukjente områder. Punkt to virker paradoksalt med tanke på at Skemp pekte på nettopp dette som en fordel også ved instrumentell matematikk. Relasjonell matematikk er vanskeligere å *lære* med tanke på sammenhenger og separate regler, men den kan være enklere å *huske* i den forstand at kunnskapen man tilegner seg er mer varig og at man ikke trenger å huske formler for ethvert tilfelle. I geometrien trenger man for eksempel ikke å huske formlene for arealet av hver enkelt geometrisk figur. Kjenner man formelen for arealet av et rektangel og ser sammenhengene mellom rektangler og andre geometriske figurer, vil man enkelt kunne modifisere denne formelen til å gjelde også for de andre formene. Relasjonell matematikk vil dermed være enklere å huske. Det tredje punktet dreier seg om at relasjonell forståelse ofte er svært motiverende og tilfredsstillende i seg selv. Punkt tre og fire henger nært sammen. Med «organiske» kvaliteter, viser Skemp til at relasjonelle skjemaer ofte genererer egen vekst. Den tilfredsstillelsen og motivasjonen elever får fra relasjonell forståelse, fører ofte til at de aktivt søker nye utfordringer og ønsker å utforske nye områder (Skemp, 1976, s. 8-10).

Relasjonell forståelse innebærer altså at elevene har opparbeidet begrepsmessige strukturer og dermed god begrepsforståelse. Vi har sett at dybdelæring innebærer varig læring av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder, og at elevene skal bli i stand til å anvende gammel kunnskap i nye, ukjente situasjoner. Ved å legge opp til relasjonell matematikk, legger man dermed opp til dybdelæring i tråd med Fagfornyelsen.

2.3.2 «Procedural and conceptual knowledge»

Mens Skemp skiller mellom instrumentell og relasjonell forståelse, skiller Hiebert og Lefevre mellom «procedural» og «conceptual knowledge», videre kalt prosedyremessig og konseptuell kunnskap. Konseptuell kunnskap er statisk kunnskap knyttet til konsepter, fakta, prinsipper og til relasjonene mellom biter av kunnskap innen et bestemt matematisk område; i dette tilfellet matematisk analyse. Det kan karakteriseres som et sammensatt nettverk av kunnskap, hvor relasjonene mellom kunnskaper er like betydningsfull som de distinkte kunnskapene isolert sett. Kunnskap om relasjoner gjør at elever med konseptuell forståelse vil være rustet til å forstå problemer og lage nye og tilpasse gamle strategier for å løse ukjente matematiske problemer (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1-27).

Prosedyremessig kunnskap er kunnskap memorert gjennom automatisering av regneferdigheter, altså pugging. Denne kunnskapsformen innebærer steg-for-steg-prosedyrer og innøvde teknikker for å løse matematiske problemer. Hiebert og Lefevre skiller videre mellom to former for prosedyremessig kunnskap; 1) kunnskap om symbolske representasjoner av matematiske idéer og om det formelle matematiske språket, og 2) kunnskap om regler og algoritmer (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 1-27). Som i tilfellet med relasjonell versus instrumentell forståelse, ser vi at også skillet mellom konseptuell og prosedyremessig kunnskap er knyttet til problematikken betydningsfull læring versus pugging. Med tanke på de nye læreplanene og deres fokus på dybdelæring, er det ønskelig at undervisningen tar til sikte mot å fremme utvikling av elevenes konseptuelle kunnskap – uten at det nødvendigvis er ensbetydende med utvikling av prosedyremessig kunnskap utgår. Som vi så i det forrige delkapittelet, var det fordeler knyttet til både instrumentell og relasjonell matematikk, og det samme gjelder i tilfellet med prosedyremessig og konseptuell kunnskap. Ved å automatisere visse grunnleggende ferdigheter, kan man nemlig frigjøre kognitiv kapasitet som kan brukes til å løse mer avanserte matematiske problemer (Grønmoet al., 2010, s. 21).

2.3.3 Webbs kunnskapsnivåer

En måte å kategorisere kunnskap på, er gjennom Webbs kunnskapsnivåer. Webb (1999, s. 3) bedømmer dybden av kunnskap innen matematikk og naturfag etter hvilket kunnskapsnivå elevene ligger på. Han benytter seg av fire ulike nivåer, fra lavest til høyest:

1) «recall», som innebærer at elevene er i stand til å huske fakta, informasjon og prosedyrer
2) «skill/concept». Dette nivået innebærer blant annet at elevene kan bruke informasjon, konseptuell kunnskap og prosedyrer med flere steg. Elever skal kunne sammenlikne, beskrive og forklare
3) «strategic thinking», som krever at elevene er i stand til å resonnere, argumentere og begrunne. De må dessuten kunne planlegge og utvikle sekvenser med flere steg
4) «extended thinking», som krever undersøkelse, utforsking, tid, prosessering og kapasitet til å utføre manipulasjoner på ukjente områder.

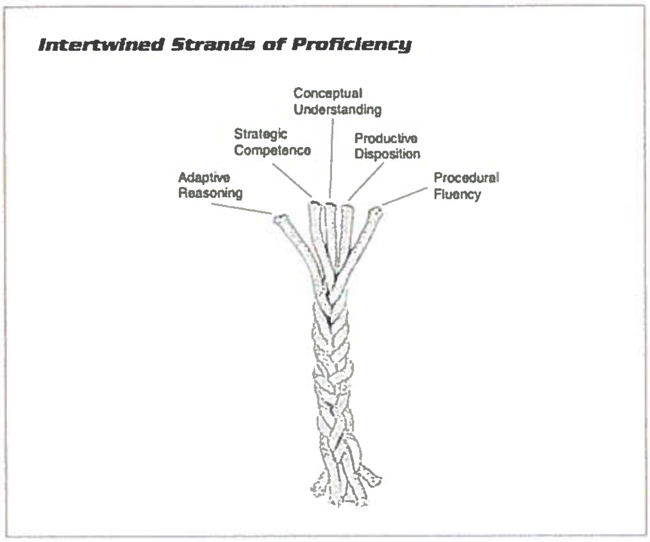
Det første nivået krever lite av elevene og dreier seg i hovedsak om reproduksjon av ferdigheter. Elever på dette nivået har en instrumentell matematisk forståelse, men etter hvert som man beveger seg oppover i nivåene, går man i retning av en mer relasjonell forståelse. Et mål med opplæringen bør derfor være at elevene skal utvikle seg og dermed komme opp på et av de høyere kunnskapsnivåene.

2.3.4 Fem tråder for matematisk kompetanse

Ingen begreper dekker alle aspekter av ekspertise, dyktighet og kunnskap innen matematikk, men Kilpatrick benytter uttrykket «mathematical proficiency», eller «matematisk kompetanse», for å fange opp det som er nødvendig for å lære matematikk på en god måte. Matematisk kompetanse består av fem ulike komponenter eller «strands», altså tråder:

- «conceptual understanding» - forståelse av matematiske konsepter, operasjoner og relasjoner. Forståelse er beskrevet i dybden i seksjon 2.2.2
- «procedural fluency» - ferdigheter til å kunne utføre prosedyrer med riktighet, fleksibilitet, nøyaktighet og effektivitet
- «strategic competence» - evne til å formulere, representere og løse matematiske problemer
- «adaptive reasoning» - kapasitet for logisk tenkning, refleksjon, forklaring og å forsvare sine refleksjoner og forklaringer
- «productive disposition» - knyttes til elevenes holdninger og innebærer at elevene er i stand til å betrakte matematikk som noe nyttig, fornuftig og meningsfylt (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 116-117).

De fem trådene er avhengige av hverandre og representerer ulike aspekter ved en kompleks helhet. For å oppnå matematisk kompetanse, som er en flerdimensjonal ferdighet, vil det dermed ikke være tilstrekkelig å fokusere utelukkende på en eller to av trådene. Man må fokusere på hver enkelt av dem. Hvordan elevene presenterer og kobler sammen ulike kunnskaper og ferdigheter, er en avgjørende faktor for om de vil oppnå en dypere forståelse av matematikk, som igjen kan brukes i problemløsing. Kunnskap skal ikke bare lagres, men må også struktureres og kobles til gammel kunnskap. De sammenvevde trådene for kompetanse reflekterer dermed behovet for holdninger, strategier og kunnskap, og behovet å kunne strukturere og koble ny kunnskap til gammel kunnskap, som forutsetning for dybdelæring (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 116-118).



Figur 8: fem tråder for kompetanse. Trådene er sammenflettet og utgjør en kompleks helhet, der man er avhengig av hver enkelt komponent for å oppnå matematisk kompetanse eller «mathematical proficiency». Hentet fra *Adding it up. Helping children learn mathematics* (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 117).

2.3.5 Taksonomier

I arbeidet med å utvikle nye læreplaner, er såkalt *taksonomi* nyttig. Taksonomi beskrives som systematisering av hvordan kunnskap eller kompetanse bygges opp innen et fagområde, og i didaktisk forskning brukes taksonomier til å angi hvilken grad av kognitiv kompleksitet man bør forvente. Overflatelæring kan sies å være på et lavt taksonomisk nivå. Dybdelæring vil derimot befinne seg på et høyt/høyere taksonomisk nivå (NOU, 2015:8, s. 42). Flere ganger har det blitt forsøkt å evaluere kvalitet, og blant de mest kjente taksonomiene finner man SOLO-taksonomien og Blooms taksonomi.

2.3.5.1 SOLO-taksonomien

SOLO-taksonomien (Structure of Observed Learing Outcome) forteller noe om kvaliteten på elevenes læring og beskriver kompleksitetsgraden av deres forståelse i fagene (NOU, 2015:8, s. 42). Ifølge Biggs og Collis (1982, s. Xi) er den det eneste tilgjengelige instrumentet for å vurdere kvalitet i retrospekt på en systematisk, objektiv måte, som også er forståelig for både elever og lærere. Taksonomien kan dermed brukes som et instrument for å evaluere, samtidig som det kan brukes instruktivt.

SOLO-taksonomien beskriver elevers kognitive utvikling ut fra deres mentale kapasitet, evne til å relatere og lage generaliseringer, hvor konsekvente de er i arbeidet, deres behov for å nå konklusjoner, og deres responsstruktur. Den modellerer utviklingen etter fem nivåer; «prestructural», «uninstructural», «multistructural», «relational» og «extended abstract». «Prestructural» regnes som det laveste nivået og omfatter elever med minimal kapasitet, altså de inkompetente uten noen form for forståelse. Det nest laveste nivået, «uninstructural», dreier seg om å kunne bruke enkle prosedyrer og formler, og elever på dette nivåer vil ofte være inkonsekvente og trekke konklusjoner før det er grunnlag for å trekke dem. Elever på det midterste nivået, «multistructural», vil være mer konsekvente, kunne utføre mer kompliserte prosedyrer og kunne forklare og definere begreper. På det nest høyeste nivået, «relational» finner man elever med evne til å relatere og generalisere innen gitte eller opplevde kontekster. De vil besitte mer relevant data, kunne sile ut irrelevant data, identifisere forskjeller, kombinere begreper og kritisere. Det høyeste nivået, «extended abstract», innebærer maksimal kapasitet, og elever på dette nivået er i stand til å prioritere data, sile ut irrelevant data og utarbeide egne hypoteser. Elevene kan generalisere i ukjente situasjoner, reflektere, er konsekvente i arbeidet, og kan trekke logiske slutninger eller komme med logiske, alternative konklusjoner (Biggs & Collis, 1982, s. 24-28).

2.3.5.2 Blooms taksonomi

Utdanningspsykologen Benjamin Bloom utviklet en taksonomi for å hjelpe lærere og undervisingsplanleggere med å klassifisere kunnskap og å utvikle læringsmål for undervisningen. Ved hjelp av seks ulike nivåer, illustrerer Blooms taksonomi (1956) hvordan kunnskap kan klassifiseres:

1) Faktakunnskap – på dette nivået kan elevene oppfordres til å gjengi spesifikk informasjon. Spørsmål utformet til dette nivået dreier seg om å vurdere i hvilken grad elever er i stand til å navngi, beskrive, gjengi, fortelle, finne og liste opp.
2) Forståelse – her skal elevene blant annet kunne vise at de kan gjengi det de har lært på en bearbeidet måte, at de husker fakta og informasjon, og at de kan tolke begreper og forstå symboler. Spørsmålene krever at elevene kan forklare, gjengi med egne ord, karakterisere, sammenfatte, relatere og skissere.
3) Anvendelse – på dette nivået oppfordres elevene til å overføre kunnskap til praksis. De bes anvende, konstruere, utvikle, løse, måle, intervjue, benytte seg av og omforme.
4) Analyse – dreier seg om at elevene skal kunne kategorisere informasjon, sammenlikne, identifisere forskjeller, analysere, granske og undersøke. Spørsmål utformet til dette nivået, kan for eksempel være «Hvilke bevis kan du finne på at?»,

«Hvilken informasjon trenger du for å ...?» og «Hvilke konklusjoner kan du trekke fra dette?».

5) Syntese – elever oppfordres på dette nivået til å utvikle nye teorier, ideer, planer og å eksperimentere. Spørsmål utformet med utgangspunkt i syntese, kan være «Hvordan vil du teste ...?» og «Dersom du gikk muligheten til ...: Hva ville du gjort?».
6) Vurdering – her utvikler elevene mulighet til å utvikle sin kritiske tankeevne ved at de må trekke logiske slutninger og bedømme pålitelighet, relevans og nøyaktighet. Spørsmål og oppgaver vil be elevene vurdere, avgjøre, begrunne, beregne, velge, anbefale, utlede (...) (Slemmen, 2010, s. 50-52, s. 112-113).

Utdanningsdirektoratets definisjon av dybdelæring (i 2.2.2) vektlegger gradvis utvikling av kunnskap, varig forståelse av begreper og metoder, refleksjon, og evne til å se sammenhenger i fag og mellom fagområder. Dybdelæring innebærer dessuten at elever skal kunne anvende gammel kunnskap på nye måter i både kjente og ukjente situasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2018). Vektleggingen av dybdelæring i de nye læreplanene gjør det dermed tydelig at et mål ved opplæringen skal være å få elevene opp på et høyt taksonomisk nivå, slik at de kan relatere, generalisere og arbeide med ukjente problemstillinger. Dersom man tar utgangspunkt i SOLO-taksonomien, vil det dermed være ønskelig å få elevene opp på det femte nivået, «extended abstract». Med utgangspunkt i Blooms taksonomi, vil det derimot være ønskelig at elevene blir i stand til å operere på ulike nivåer og løse oppgaver utformet til alle de ulike nivåene, slik at de er i stand til å både gjengi og anvende kunnskap, men også slik at de utvikler en god forståelse, kan analysere, relatere, utvikle teorier, eksperimentere, reflektere og vurdere.

2.4 Matematiske begreper

Begreper er viktige byggesteiner i matematikken. I matematikkundervisningen vil elevene møte mange matematiske begreper, og selv om enkelte begreper er viktigere enn andre, er forståelse av noen av dem helt avgjørende for god matematisk forståelse og videre læring i matematikk. Elevene må utvikle det man kaller *begrepsforståelse*, som ikke bare innebærer at elevene kan anvende et begrep, men at de i tillegg forstår hvorfor de kan bruke det aktuelle begrepet i bestemte situasjoner. I mange emner forholder man seg til en rekke regler, og mange elever kan derfor ofte være i stand til å løse enkelte oppgaver riktig, selv om de ikke har en tilstrekkelig begrepsforståelse. Dersom oppgavene derimot blir mer komplekse og krever mer enn en memorert formel, vil begrepsapparatet deres ramle sammen, og elevene vil ikke være i stand til å løse oppgavene (Stengrundet & Valbekmo, 2018, s. 2-8). Dette er tilfellet blant annet innen derivasjon, hvor enkelte elever, som venninnen nevnt i introduksjonen, kun lærer seg derivasjonsreglene uten å tenke over hva prosessen faktisk innebærer.

2.4.1 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Tall og Vinner (1981, s. 151-169) skiller mellom «concept image» og «concept definition», altså *begrepsbilde* og *begrepsdefinisjon*. Førstnevnte brukes om den kognitive strukturen elevene assosierer med et emne. Uttrykket brukes med andre ord om hvilket innhold elevene legger til et bestemt matematisk emne. Dette innebærer alle egenskaper knyttet til emnet og alle de prosessene elevene har bygget opp gjennom sine tidligere erfaringer. Ettersom elevene stadig gjør nye erfaringer og dermed utvikler sin forståelse av ulike temaer, vil deres begrepsbilder være under stadig utvikling.

Begrepsdefinisjoner vil derimot være mer stabile. En begrepsdefinisjon er de ordene og symbolene som brukes for å gi en presis definisjon av et gitt matematisk begrep. Matematiske definisjoner, som for eksempel finnes i lærebøkene, må være godkjent av et flertall med kunnskap om emnet. Et bestemt matematisk begrep kan dermed defineres på flere måter. Dette er tilfellet blant annet for den deriverte, som i *Sigma S1 matematikk* og *Sigma R2 matematikk* defineres henholdsvis som momentan endringsrate og ved en formel basert på grenseverdier. Den deriverte kan dessuten også defineres grafisk, som stigningstallet til en tangent (Tall & Vinner, 1981, s. 151-169)..

I tillegg til de formelle, anerkjente matematiske definisjonene, kan elevene ha sine egne definisjoner basert på deres kunnskaper og erfaringer. Elevenes begrepsdefinisjoner vil dermed være knyttet til deres begrepsbilder. I den teoretiske matematikken, 1T, ble elevene introdusert for følgende definisjon av begrepet funksjon: *«En funksjon f er en framgangsmåte som til hver verdi av x gir nøyaktig én funksjonsverdi f(x)»* (Øgrim et al., 2013, s. 60). Elevene vil ikke nødvendigvis huske denne definisjonen i dag, og deres definisjon av begrepet vil derfor være farget av deres nåværende begrepsbilde. I arbeidet med funksjoner benyttes ofte formler, og det kan derfor tenkes at idéen om funksjoner som formler over tid har blitt utviklet og opptar en større plass i elevenes begrepsbilde. Den matematiske definisjonen vil altså være mindre aktiv i deres kognitive struktur. At elevene utvikler slike begrepsbilder er utgangspunktet ikke et problem, men dersom disse bildene utvikles til et punkt der de ikke lenger samsvarer med teori, kan det oppstå en kognitiv konflikt. Dette skaper rom for både læring og misoppfatninger (Tall & Vinner, 1981, s. 151-169).

2.5 Motivasjon I matematikk

Elevenes *motivasjon* har betydning for blant annet trivsel, faglige prestasjoner og rekruttering til høyere utdanning (Björnsson & Olsen, 2018, s. 36). Motivasjon er det som driver oss til handling og forårsaker aktivitet, det som holder aktiviteten ved like og det som gjør aktiviteten meningsfull og gir den et mål (Imsen, 1998, s. 226). Det kan betraktes som en prosess, der en aktivitet eller handling settes i gang og opprettholdes – også når oppgaven(e) føles krevende og vanskelige. Elevenes motivasjon dreier seg altså om indre og ytre faktorer som stimulerer deres lyst og energi til å opprettholde interesse og dedikasjon i læringen (Björnsson & Olsen, 2018, s. 37-38). Den kan ikke observeres direkte, men kan gi utslag i kognisjoner, følelser og handlinger, deriblant konsentrasjon, utholdenhet og innsats. Motivasjon er avgjørende for hvilke aktiviteter elevene setter i gang med og hvor mye tid og energi de kommer til å bruke på disse aktivitetene. I matematikkfaget kan motiverte elever bli helt oppslukt i arbeidet, slik at de mister følelsen av tid, sted og seg selv. For elever med mangel på motivasjon, kan derimot selv det minste tiltak føles blytungt (Wæge & Nosrati, 2018, s. 12-13).

2.5.1 Ytre motivasjon

Man skiller ofte mellom indre og ytre motivasjon. Sistnevnte dreier seg ofte om en aktivitets nytteverdi. En aktivitet kan ha relevans for elevens fremtidige mål, og det vil dermed være aktivitetens nytteverdi som virker som drivkraften for elevens aktivitet. For eksempel vil noen elever ha mål om å oppnå gode karakterer, og de vil derfor arbeide hardt for å nå dette målet – uten at aktiviteten nødvendigvis gir dem noen form for glede aller tilfredsstillelse (Björnsson & Olsen, 2018, s. 38). De ønsker altså å oppnå et resultat adskilt fra selve aktiviteten. Dette resultatet er ofte gode karakterer, men det kan også dreie seg om å unngå straff, skam, bekymring eller skyldfølelse (Wæge & Nosrati, 2018, s. 19).

2.5.2 Indre motivasjon

Indre motivasjon reflekterer elevenes interesse for en aktivitet og den gleden og tilfredsstillelsen elevene får ved å utføre en gitt aktivitet (Björnsson & Olsen, 2018, s. 38). De arbeider med matematikkoppgaver fordi de synes oppgavene er interessante og morsomme. Motivasjon er ikke konstant, og det vil derfor variere hvilke oppgaver som og i hvilken grad disse oppgavene gir slik en indre tilfredsstillelse og motivasjon. Aktiviteter og oppgaver som stimulerer elevenes indre motivasjon, karakteriseres ved at de oppleves som engasjerende, «nye» og passe utfordrende. Slike oppgaver og aktiviteter fører til læring og utvikling (Wæge & Nosrati, 2018, s. 18).

Det er flere fordeler knyttet til indre motivasjon. Wæge og Nosrati (2018, s. 20-21) trekker blant annet frem at elever med indre motivasjon er mer utholdende og har mer selvtillit og kreativitet. Dessuten benytter disse elevene seg av problemløsningsstrategier i større grad enn ytre motiverte elever i arbeidet med matematiske problemer. Videre assosieres indre motivasjon med mer glede, kognitiv fleksibilitet og aktiv involvering. De stiller spørsmål for å forstå ideer og sammenhenger og vil gjøre mer enn det som kreves av en oppgave. Når elevene er interesserte og engasjerte i læringsprosessen, lærer de mer og utvikler bedre forståelse av faget. Dermed vil elever som er indre motivert, prestere bedre enn elever som drives av en ytre motivasjon.

2.5.2.1 Å fremme elevers indre motivasjon

For å fremme forståelse av matematikk – og dermed dybdelæring – er det gunstig å fremme elevenes indre motivasjon. Selvbestemmelsesteorien er en av de mest anerkjente teoriene om indre og ytre motivasjon. Den bygger på antakelsen om at mennesker har tre grunnleggende behov: kompetanse, autonomi og tilhørighet, og disse behovene har stor betydning både for elevenes indre og ytre motivasjon. Dersom elever får tilfredsstilt disse tre behovene i klasserommet, er forutsetningene for at de vil drives av indre motivasjon gode (Wæge & Nosrati, 2018, s. 22). I de neste avsnittene vil jeg redegjøre for to av de tre behovene: kompetanse og autonomi.

Matematisk kompetanse innebærer at elevene skal oppleve faglig anerkjennelse og at de har innflytelse og autoritet i for eksempel diskusjoner eller gruppearbeid. Videre innebærer det at elevene utvikler forståelse og ferdigheter, og at de får en mestringsfølelse i arbeidet med matematikk. Mestring i matematikk dreier seg ikke bare om å mestre oppgaver og å få riktige svar, men også om å kunne stille spørsmål, resonnere, argumentere, forstå og forklare. For at elever skal oppleve mestring og kompetanse, må de utfordres på et optimalt nivå. Oppgavene må hverken være for vanskelige eller for enkle. Dersom oppgavene blir for vanskelige, risikerer man at elevene blir frustrerte og mister motivasjonen, og dersom oppgavene blir for enkle, blir arbeidet fort kjedelig. Man risikerer dermed at de mister interessen for matematikk. Elevene avgjør selv om de vil engasjere seg i en oppgave eller ei, og denne avgjørelsen baseres på deres vurdering av hvor utfordrende oppgavene er. Det er dermed viktig å gi elevene oppgaver på et passe utfordrende nivå (Wæge & Nosrati, 2018, s. 22-24).

Utfordringer er ikke bare viktig for å skape og opprettholde elevenes motivasjon – de er også en av kjerneingrediensene for effektiv læring (Hattie, 2013, s. 87). Piaget (i Imsen, 2016, s. 407) hevder at det må skje en såkalt «kognitiv ubalanse», altså at elevene lurer på noe og ønsker å løse problemet, for at læring skal finne sted. Videre snakker Vygotsky (i Imsen, 2016, s. 407) om en såkalt «proksimal sone», som viser en elevs potensial til utvikling. Begge deler synet om at elevene må møte noe nytt og utfordrende for å kunne lære noe nytt. utfordringen for læreren blir dermed å finne passe utfordrende oppgaver for hver enkelt elev, slik at alle får muligheten til å lære, utvikle seg og føle på mestring.

Behovet for autonomi er vel så viktig for elevenes motivasjon som behovet for mestring. Innenfor klasserommets rammer er det derfor viktig å gi elevene muligheter til å være autonome, altså å handle ut fra egne interesser og verdier. Elevene må få mulighet til å ta matematiske avgjørelser, som for eksempel å velge løsningsstrategi, og gjøre matematiske vurderinger i arbeidet med matematikk (Wæge & Nosrati, 2018, s. 24-25). Ved å legge opp til undersøkende og åpne oppgaver, får elevene anledning til å utvikle og vurdere ulike strategier, løsninger og forklaringer. Disse strategiene, løsningene og forklaringene bør bygge på relasjonell forståelse og sammenhenger mellom matematiske ideer, og ved å gi rom for autonomi i undervisningen, gir man dermed rom for å utvikle elevenes relasjonelle forståelse (Wæge & Nosrati, 2018, s. 104) – og dybdelæring.

3.0 Metode

I denne delen av oppgaven presenteres forskningens metodiske valg. Først gis en beskrivelse av forberedelsene til prosjektet; herunder etiske betraktninger ved forskningsarbeidet. Videre gis en beskrivelse av hvordan datainnsamlingen foregikk, og det gis begrunnelser for valg av innsamlingsmetoder. Det gis så en beskrivelse av selve utvalget og hvordan det ble valgt ut. Avslutningsvis presenteres eventuelle feilkilder i prosjekter og det gis en beskrivelse av Covid-19-situasjonens påvirkning av forskningsarbeidet og prosjektet.

3.1 Forberedelse av prosjektet

Utgangspunktet for forskningen var å utforske begrepsforståelsen av den deriverte og tangenter hos videregående elever på tvers av fagene S2 og R2. Undervisningen i fagene vektlegger ulike aspekter ved funksjonslæren ulikt, og det er derfor ikke unaturlig at elevenes forståelse av begrepene kan variere. Med nye læreplaner, som i stor grad vektlegger dybdelæring, rett foran oss, vil det være interessant å se i hvilken grad den «gamle» undervisningen i de to fagene har oppnådd denne dybden. På denne måten vil det dermed bli enklere å identifisere hva som funker og ikke funker for å oppnå en økt forståelse av begrepene, og dermed økt dybdelæring, slik at jeg selv kan legge opp undervisningen på en hensiktsmessig måte når jeg tar fatt på læreryrket.

Min erfaring er at mange elever ofte bruker innøvde formler og prosedyrer i oppgaveløsing, og både lærebøker, prøver og eksamener er ofte lagt opp slik at disse metodene leder frem. Etter å ha studert flere av de «gamle» lærebøkene fra både ungdomsskole og videregående, som ikke er i tråd med de nye læreplanene, har jeg sett at ethvert emne stort sett følger samme mal; gjennomgang av teori og ett til to eksempler, etterfulgt av en rekke oppgaver med de samme utformingene, formuleringene og fremgangsmåtene gjennomgått i teoridelen og eksemplene. Elevene får formler og fremgangsmåter servert på et sølvfat og trenger dermed ikke å tenke selvstendig. Dette gagner hverken elever som strever eller elever som trenger større utfordringer. Når elevene møter oppgaver med nye formuleringer, struktureringer og innfallsvinkler, blir mange dessuten stående fast. Med det nye rammeverket er målet derimot at elevenes relasjonelle forståelse økes, slik at elevene ikke er låst til formler og prosedyrer.

3.1.1 Forskningsdesign

Skolen inngår i det man kaller «samfunnet», som handler om mennesker og samhandling mellom mennesker. Dersom man skal forske på ting som skjer i skolen, må man derfor bruke samfunnsvitenskapelige forskningsmetoder. Disse metodene dreier seg om hvordan man best mulig skal gå frem for å innhente informasjon om den sosiale virkeligheten og videre om hvordan den innhentede informasjonen kan analyseres. Når man forsker på samfunnet, brukes *kvalitative* og/eller *kvantitative* forskningsmetoder (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 16). Prosjektet er utført for å forbedre egne undervisningsmetoder og tar utgangspunkt i kvalitative innsamlingsmetoder.

3.1.2 Etiske betraktninger

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har vedtatt en rekke retningslinjer for forskningsetikk. I følge Nedrum (1998, i Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 41) kan retningslinjene sammenfattes i tre hensyn forskere må ta stilling til: 1) *informantenes rett til autonomi og selvbestemmelse*, 2) *forskerens plikt til å respektere informantens privatliv* og 3) *forskerens ansvar for å unngå skade*. Hensynet til informantens rett til selvbestemmelse og autonomi innebærer at nåværende og tidligere deltakere i forskningsprosjekter skal kunne bestemme over egen deltakelse. Deltakelse skal være frivillig, og deltakere skal kunne trekke seg på hvilket som helst tidspunkt uten noen form for negative konsekvenser. Det andre hensynet dreier seg om forskerens taushetsplikt og gir deltakerne retten til å bestemme hvilke personopplysninger de ønsker og ikke ønsker å gi forskeren adgang til. Forskeren skal ivareta konfidensialitet, og deltakere skal ikke kunne identifiseres ut fra opplysningene som gis i det ferdige arbeidet. Det tredje og siste hensynet innebærer at deltakelse i forskningsarbeidet skal være minst mulig belastende for deltakerne (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 41f).

3.1.2.1 Søknad til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste

Siden forskning ofte innebærer at det samles inn informasjon om identifiserbare individer, må juridiske forhold avklares. Dersom prosjektet inneholder persondata, kan dette utløse meldeplikt eller konsesjonsplikt. *Personopplysninger* er opplysninger og vurderinger som kan benyttes for å identifisere enkeltpersoner. I mitt tilfelle skal alle deltakere anonymiseres ved at de gis pseudonymer, og jeg skal ikke behandle sensitiv informasjon, som fødselsdato, om individene. Likevel bindes jeg av melde- og konsesjonsplikten fordi jeg henter inn signert samtykke fra elevene og fordi det gjøres lydopptak av intervjuene og oppgaveløsingen (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 43).

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS (NSD) opprettet et personvernombud for blant annet alle landets universiteter og høyskoler, og alle meldepliktige prosjekter utført ved disse institusjoner, skal meldes til dette ombudet. De meldes på eget meldeskjema på NSDs hjemmeside (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 44).

Som nevnt, ble data hentet inn gjennom intervjuer og observasjon av oppgaveløsing. Det ble gjort lydopptak av både intervju og oppgaveløsing, og disse opptakene ble slettet etter transkribering. I det ferdige arbeidet vil det ikke fremkomme identifiserende opplysninger om elevene, og alle elever vil, som nevnt, anonymiseres.

Ett av de tre hensynene man må ta som forsker, er som nevnt, hensynet til informantens rett til selvbestemmelse og autonomi. Deltakerne skal kunne bestemme over egen deltakelse. Personopplysningsloven stiller krav om samtykke, og som en del av søknadsprosessen til NSD må man derfor utarbeide et eget samtykkeskjema (vedlegg 2). I skjemaet kommer det klart og tydelig frem at deltakeren samtykker, hvilke behandlinger samtykket omfatter og hvilke forskere samtykket gjelder for (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 45). Informantens rett til selvbestemmelse og autonomi innebærer også at deltakerne skal kunne trekke seg fra prosjektet uten begrunnelse og negative konsekvenser. Dette informeres det derfor også om i samtykkeskjemaet. I tillegg gir skjemaet elevene muligheten til å nekte at det tas lydopptak av innsamlingen.

Informasjonen om prosjektet (vedlegg 1) ble gitt til og gjennomgått for utvalgsgruppene før prosjektet startet. Elevene fikk deretter utdelt samtykkeskjemaet. Dette ble også gjennomgått muntlig, og elevene fikk dermed muligheten til å stille spørsmål til skjemaet og deres rettigheter. Siden alle informantene hadde fylt 18 år, sto de fritt til å skrive under samtykkeskjemaet.

3.2 Valg av metode

Formålet med denne oppgaven var, som nevnt, å få et bedre innblikk i elever i fagene S2 og R2s forståelse av begrepene *den deriverte* (herunder *derivasjon*) og *tangenter* og deres kunnskaper innen emnene. Er det noe som kan tyde på at den ene elevgruppen har en mer fullstendig, altså relasjonell, forståelse enn den andre? For å få et bilde av elevenes forståelse og eventuelle hull i den, valgte jeg å bruke intervju i en kombinasjon av oppgaveløsning som innsamlingsmetode. Oppgaveløsingen foregikk under observasjon, slik at jeg hadde mulighet til å stille elevene spørsmål og kommunisere med dem underveis, for å få et dypere innblikk i problemløsningsstrategiene deres.

3.2.1 Kvalitative metoder

Intervju og observasjon er eksempler på kvalitative innsamlingsmetoder, som ifølge Jacobsen og Postholm, er godt egnet dersom man ønsker å gå i bygden innen et bestemt tema. I forhold til kvantitative innsamlingsmetoder, belyser de kvalitative metodene nyansene i mye større grad (Jacobsen & Postholm, 2011, s. 41-42). Kvalitative innsamlingsmetoder er dessuten mer fleksible og tillater større grad av spontanitet og tilpasning i interaksjonen mellom forsker og deltaker. Forskeren får blant annet mulighet til å skreddersy ethvert spørsmål, mens deltakeren står fritt til å besvare ethvert spørsmål med sine egne ord. I spørreskjemaer og surveyer, som begge er eksempler på kvantitative innsamlingsmetoder, blir alle deltakere stilt identiske spørsmål og er låst til et knippe svaralternativer. Det er dermed enkelt å sammenlikne deltakernes svar, og kvantitative innsamlingsmetoder ville derfor egnet seg godt dersom målet med innsamlingen var å trekke generelle slutninger (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 17). I denne oppgaven var derimot målet å få innblikk i enkeltelevers tankemønstre og forståelse, og ved å belyse nyansene ved hjelp av kvalitative metoder, vil jeg forhåpentligvis få denne innsikten.

3.2.1.1 Intervju

Den første delen av forskningsarbeidet dreiet seg som å utforske elevenes tanker og forståelse av begrepene *den deriverte* og *tangenter*. Dersom man ønsker å finne ut hvordan elever tenker, hvordan de forstår et begrep og hva de selv vil trekke frem som forklaringer, er man nødt til å kommunisere med dem. Det er nemlig vanskelig å registrere menneskers motiver og beveggrunner gjennom direkte observasjon. Fokuset for denne delen av datainnsamlingen måtte derfor ligge på språk, altså *hva* elevene sier og *hvordan* de sier det, og ikke på handling (Jacobsen & Postholm, 2011, s. 61). Ved å bruke intervju som innsamlingsmetode, fikk jeg muligheten til å stille spørsmål og til å komme med oppfølgingsspørsmål og be om avklaringer dersom noe er uklart – en mulighet jeg ikke ville hatt dersom jeg hadde stilt de samme spørsmålene i et spørreskjema.

For å få en mest mulig oppriktig og oversiktlig innsamling, og for å unngå gruppetenkning og at enkelte elever tar styringen mens andre «gjemmer seg» i bakgrunnen, valgte jeg å gjennomføre intervjuene individuelt. Ved å gjennomføre individuelle intervju bevarer man ikke bare anonymiteten ovenfor andre deltakere, men man øker samtidig sannsynligheten for å få ærlige og åpne svar. En ulempe med å bruke intervju som innsamlingsmetode, er at den er en tidkrevende variant (Jacobsen & Postholm, 2011, s. 65). Jeg valgte å ta opp dialogen på lydopptak for å gjøre selve intervjuene mer tidseffektive, men samtalene måtte likevel skrives ned i ettertid – som i seg selv er en svært tidkrevende prosess. Dette var derfor også faktorer i beslutningen om å begrense antall informanter til åtte – en beslutning som forklares mer inngående senere.

Dersom man ser for seg et intervju, ser man nesten automatisk for seg en situasjon hvor intervjuer og informant er i samtale ansikt-til-ansikt. Det finnes derimot flere forskjellige intervjuvarianter, som telefonintervju, videointervju, intervju over e-post og sosiale medier og elevbesvarelser; både skriftlige og muntlige. Enhver variant har sine fordeler og ulemper, og dette spilte inn da jeg bestemte meg for hvilken type dialog jeg skulle velge. Et telefonintervju, for eksempel, ville kanskje kunne vært fordelaktig med tanke på tilgjengelighet, men for mange vil det være kunstig å snakke åpent med en fremmed over telefon. Dessuten mister man muligheten til observasjon. Skriftlige intervjuer via e-post og sosiale medier gir rom for gode refleksjoner, men kan samtidig være tidkrevende. De gir i likhet med telefonintervju heller ikke muligheten til observasjon. Muligheten for observasjon var derimot svært viktig for at forskningsarbeidet skulle tjene oppgavens formål, og jeg valgte derfor å gjennomføre intervjuene ansikt til ansikt. Ved å gjennomføre intervjuene på denne måten, fikk jeg mulighet til å observere ansiktsuttrykk og å komme med kommentarer, avklarende spørsmål og oppfølgingsspørsmål dersom svar og uttalelser var utydelige eller ufullstendige. Intervjuer som gjennomføres ansikt til ansikt gir dessuten en mer personlig relasjon enn intervjuer som gjennomføres via telefon eller chat, og dette kan føre til mer åpenhet fra informantenes (Jacobsen & Postholm, 2011, s. 6ff).

Utgangspunktet for intervjuene var en rekke spørsmål knyttet til elevenes forståelse av og kunnskaper om funksjonslære – med særlig vekt på den deriverte, derivasjon og tangenter. Elevenes svar var til tider svært varierte, og jeg måtte derfor variere oppfølgingsspørsmålene etter hva elevene svarte. Jeg gjennomførte med andre ord et *halvstrukturert* eller *semistrukturert* intervju (Jacobsen & Postholm, 2011, s. 75, Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 79). Spørsmålene er vedlagt i vedlegg x. For å få et bedre bilde av utvalget, herunder elevenes motivasjon, interesse matematikk og arbeidsinnsats i faget, ble det også inkludert et knippe spørsmål til dette.

3.2.1.2 Observasjon av oppgaveløsing

Den andre delen av forskningsarbeidet dreiet seg om å få innsikt i hvordan elevene anvender sine kunnskaper i oppgaveløsing. Har elevene et tilstrekkelig begrepsapparat, eller vil begrepsapparatet deres falle sammen når de bes løse oppgaver? Som nevnt, innebærer begrepsforståelse ikke bare at elevene kan anvende et begrep, men at de i tillegg forstår hvorfor de kan bruke det aktuelle begrepet i bestemte situasjoner. Ved å la elevene løse oppgaver under observasjon, fikk jeg muligheten til å kartlegge hva som faktisk finner sted. Klarer elevene å anvende kunnskapen og forståelsen når de løser oppgaver, og da særlig de mer ukjente oppgavetypene, eller er de låst til innøvde formler og regler? Observasjon av oppgaveløsing ble altså brukt som en supplerende metode for å få svar på problemstillingen.

Oppgaveløsingen foregikk individuelt. Ved å la én og én elev løse oppgaver av gangen, kunne jeg ha fullt fokus på hver enkelt elev under observasjonen. Observasjonen foregikk altså med fullstendig åpenhet, som innebærer at alle i feltet visste at de ble observert (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 68). Ved å observere oppgaveløsingen, fikk jeg muligheten til å se hva hver enkelt elev slet med, altså på hvilke områder deres begrepsapparat ikke var tilstrekkelig utviklet. Ved å være fysisk tilstede, fikk jeg i tillegg muligheten til å stille spørsmål underveis dersom elevene sto fast. Dessuten fikk også elevene mulighet til å stille meg spørsmål underveis dersom noe var uklart i oppgaveteksten eller dersom de hadde spørsmål underveis. Jeg var dermed delvis og i varierende grad involvert og deltakende i oppgaveløsingen, og innsamlingen foregikk dermed som en *deltakende observasjon* med forskeren som en *deltakende observatør* (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 68).

3.2.2 Innsamlingen

Innsamlingen foregikk altså gjennom intervju og observasjon av elevers arbeid med oppgaver. Spørsmålene (se vedlegg 3) og oppgavene (se vedlegg 4) springer ut av problemstillingen og skulle dermed belyse undersøkelsen. Alle informantene ble gitt de samme oppgavene slik at systematisering, sammenlikning og fortolkning kunne gjøres uten problemer (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 79). I seksjon 4.1 presenteres og diskuteres spørsmålene og oppgavene elevene besvarte og arbeidet med.

3.2.3 Valg av informanter

Kvalitative data betoner nyansene, det spesielle, og kvalitative innsamlingsmetoder er svært tidkrevende. Dersom antall informanter blir for høyt, kan innsamlingsmaterialet bli veldig komplekst og uoversiktlig (Jacobsen & Postholm, 2011, s. 41f). For å begrense innsamlingsmaterialet, valgte jeg derfor å begrense antall informanter til ti stykker. Alle informantene er elever i tredjeklasse ved samme videregående skole. Fem av elevene tar matematikk for samfunnsfag, S2, og fem av dem tar realfaglig matematikk, R2. Den samfunnsfaglige og den realfaglige matematikken har svært ulikt pensum, men deler av pensumet er felles for de to fagene. Hvordan de felles emnene dekkes og vektlegges i fagene er også ulikt, men dersom elevene i utvalget har tatt med seg de verktøyene de har fått utdelt og utviklet en god forståelse av derivasjon og tangenter, ville de alle vært i stand til å løse oppgavene.

Vanligvis velges utvalgsstrategien før man rekrutterer informanter (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 52), men på grunn av et lavt antall mulige informanter, altså elever i S2- og R2-klassene, valgte jeg å først ta kontakt med klassene for å se hvor mange som kunne tenke seg å bidra i prosjektet. Blant elevene i R2 ønsket alle utenom én å delta, og det ble derfor benyttet tilfeldig utvalg fra denne gruppen. Elevene i S2-klassen var derimot mer tilbakeholdne, og her var det kun fem elever som meldte seg frivillig til deltakelse. I denne klassen fikk dermed alle elevene som ønsket det være med.

3.2.3.1 Utvalget

Alle elevene i utvalget har tatt teoretisk matematikk og kan sies å befinne seg på et relativt høyt faglig nivå– til tross for variasjoner innad i gruppene og på tvers av gruppene. For å få et innblikk i elevenes holdninger til faget og emnet, motivasjon, arbeidsinnsats og interesse for matematikk, ba jeg dem blant annet om å evaluere sin egen innsats og interesse for faget, og å vurdere i hvilken grad de var enige/uenige i en rekke utsagn. På en skala fra én til fem, der en var det laveste og fem det høyeste, vurderte alle elevene i utvalget sin egen innsats enten på nivå 3 eller 4. På dette områdene var elevgruppene altså ganske homogene.

Når det gjaldt interesse for faget derimot, var forskjellene mellom de to elevgruppene tydeligere. Mens tre av elevene fra S2-klassen vurderte sin interesse for matematikkfaget til en treer og resten til en firer, vurderte fire av elevene fra R2-klassen egen interesse til en femmer. Den siste eleven fra denne gruppen vurderte egen interesse til en firer. Alle elevene fra R2-klassen trakk dessuten frem at de hadde valgt å ta realfaglig matematikk fordi de syns matematikk var interessant, gøy og/eller en god kilde til utfordringer, mens elevene som tok den sosialfaglige matematikken i større grad hadde valgt faget for å komme inn på studier og fordi det var mer «stas» å ta sosialfaglig enn praktisk matematikk. Til tross for noen variasjoner innad i elevgruppene, var det tydelig at elevene med realfaglig matematikk hadde en mer genuin interesse for faget og at de hadde større glede av å arbeide med matematikk.

Når det gjelder holdninger til matematikkfaget, var det også et tydelig skille mellom de to elevgruppene. Elevene fra R2-klassen var i større grad motivert av det utforskende aspektet ved matematikken, mestringsfølelsen faget gir og et behov for system og orden, mens elevene fra S2-klassen i større grad trakk frem karakterer og prestisje som hovedkilde for motivasjon. Både S2- og R2-elevene var – stort sett – enige i at det er gøy å arbeide med matematikk, men i vurderingen av påstanden «Matematikkfaget er nyttig», skapte svarene igjen et skille mellom de to gruppene. Mens alle elevene med realfaglig matematikk svarte at de var enige i påstanden, var det kun én av elevene fra den sosialfaglige matematikken som gjorde det samme. Én var litt enig, mens de siste var hverken enige eller uenige i påstanden.

Blant påstandene elevene skulle vurdere, var også «Det er nyttig å lære om funksjoner og funksjonsdrøfting», «Det er nyttig å lære om den deriverte og derivasjon» og «Det er nyttig å lære om tangenter». Også her var det et tydelig skille mellom de ulike elevgruppene. Blant elevene med realfaglig matematikk, var det samsvar i enigheten rundt alle påstandene utenom sistnevnte, hvor én av elevene «kun» mente at det var nokså nyttig å lære om tangenter. I den andre gruppen oppga derimot flertallet at de hverken var uenige eller uenige i de tre påstandene, mens én av elevene oppga at den var nokså uenig i dem. Elevene fra R2-klassen ser altså nytten av både faget og den matematiske analysen tydeligere enn elevene fra S2-klassen.

Ut fra elevenes vurderinger og svar når det gjelder deres interesse, motivasjon, holdninger og nytte, er det tydelig at de to elevgruppene er heterogene og at det er skiller mellom dem. Dette belyser ikke problemstillingen i seg selv, da den dreier seg om elevenes *forståelse* og ikke om deres interesse, motivasjon og holdninger. Det kunne likevel vært interessant å identifisere et slikt skille, slik at man under oppgaveløsingen kunne avdekke eventuelle sammenhenger mellom elevers prestasjon og forståelse og deres interesse, motivasjon og holdninger.

3.3 Feilkilder

Samfunnsvitenskapen tar den sosiale virkeligheten som utgangspunkt. Denne virkeligheten er svært kompleks, bestående av ulike mennesker, samhandlinger, erfaringer og fortolkninger. Derfor er det ikke mulig å gi et fullstendig bilde av alt som skjer. Spesielt vanskelig er det å gi et fullstendig bilde når forskningen innebærer å studere elevers *forståelse*, som først og fremst er noe som sitter i elevenes hode og ikke kan studeres direkte. Deres observerbare forståelse kommer kun til uttrykk gjennom deres ord og handlinger, altså dataene fra innsamlingen, og det var dermed umulig å få et fullstendig bilde av hva som foregår inni hodene deres.

I tillegg møter alle mennesker verden med kunnskaper, oppfatninger og en forståelse, som vi bruker til å tolke ting som skjer rundt oss. Hvordan data tolkes og analyseres, vil dermed avhenge av hvilke forhåndsoppfatninger og hva jeg som forsker vektlegger mest. Forskningen vil dermed være farget av mine kunnskaper, oppfatninger og forståelse, men det er likevel et mål med forskningen å forsøke å presentere data med færrest mulig feilkilder. Dataene skal være mest mulig reliable og valide (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 21-23). Hva dette innebærer, vil bli gjennomgått i de følgende seksjonene. På grunn av den pågående Covid-19-situasjonen, vil det også vies en seksjon til hvordan Covid-19 har påvirket forskningsarbeidet.

3.3.1 Reliabilitet

Reliabilitet dreier seg om hvor pålitelige data er. Det knytter seg til undersøkelsens grad av nøyaktighet; hvordan data samles inn, hvilke data som benyttes og hvordan de bearbeides (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 23). I hvilken grad er funnene i en studie uavhengige av tilfeldigheter i omstendighetene de ble produsert i? Ville andre forskere kommet frem til de samme resultatene, fortolkningene og konklusjonene (Silverman, 2006, s.282)? For å teste datas reliabilitet, trekker Christoffersen og Johannessen (2012, s. 23) frem to muligheter; 1) å gjenta undersøkelsen på samme gruppe på to ulike tidspunkter, og 2) å la flere forskere undersøke samme fenomen. For å rekke å bli ferdig med prosjektet, var ikke den første metoden et alternativ. Jeg fikk likevel muligheten til å teste relabiliteten ved å stille de samme spørsmålene som jeg stilte under intervjuet, under problemløsningen. Siden jeg var den eneste studenten som behandlet dette temaet i forbindelse med masterskrivingen, fikk jeg dessverre ikke testet reliabiliteten ytterligere ved at flere forskere forsket på det samme fenomenet.

3.3.2 Validitet

Validitet dreier seg om hvor relevant data er. Som nevnt i seksjon 3.3, er det umulig å gi et fullstendig bilde av virkeligheten rundt oss, og data gir kun en representasjon av den. Dermed er det viktig å tenke over hvor godt, eller relevant, data beskriver fenomenet det forskes på. Det skilles mellom forskjellige former for validitet. Begrepsvaliditet, for eksempel, dreier seg om relasjonen mellom de konkrete dataene og fenomenet som undersøkes. Er det samsvar mellom det generelle fenomenet som undersøkes, og målingen/operasjonaliseringen? Merk at validitet ikke er noe absolutt. Data er ikke valide eller ikke, og validitet er dermed et kvalitetskrav som kan være *tilnærmet* oppfylt (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 24).

Det er flere utfordringer knyttet til validitet i forskning basert på menneskelig aktivitet. Ny kunnskap skapes gjennom forskerens fortolkninger, og det er derfor viktig at det er det deltakerne sier – og faktisk mener - og gjør som fortolkes. I forsøk på å sikre mest mulig validitet, ble det derfor – blant annet – stilt en rekke oppfølgings- og oppklaringsspørsmål. Å holde motivasjonen til deltakerne oppe under innsamlingen, kan også være en utfordring (Gjøtterud, Hii, Husebø, Jensen, Steen-Olsen & Stjernstrøm (red.), 2017, s. 445-446), og det ble derfor besluttet å dele innsamlingen i to. På denne måten unngikk jeg forhåpentligvis at øktene ble for lange og at elevenes motivasjon dalte underveis i innsamlingen. Utfordringer som dette kunne medført at jeg ikke fikk belyst problemstillingen og forskningsspørsmålet på en tilfredsstillende måte, og jeg forsøkte derfor å innføre tiltak som kunne bidra til å sikre høyest mulig grad av validitet.

3.3.3 Gjennomføring av innsamling og Covid-19.

Covid-19 hadde dessverre innvirkning på forskningsarbeidet, da utvalgets skole gjentatte ganger måtte over på rødt nivå i perioden innsamlingen foregikk. Med periodevis hjemmeundervisning ble innsamlingen svært tidkrevende og langdratt, og for å komme i mål med forskningsarbeidet, besluttet jeg til slutt at det var hensiktsmessig å «kutte» to informanter fra deler av innsamlingen. Intervjudelen ble gjennomført først, og jeg rakk derfor å intervjue alle de ti elevene i utvalget. I problemløsingen fikk jeg derimot kun observert fire av elevene fra hver gruppe før skolen på nytt måtte stenge ned, og to av elevene fikk dermed ikke bidratt til innsamlingen i denne delen. Dette var ingen ønskelig avgjørelse – disse elevene kunne tross alt bidratt til å belyse problemstillingen ytterlige – men dessverre en nødvendig en.

4.0 Empiri og analyse

I denne delen av oppgaven presenteres først de teoretiske spørsmålene elevene besvarte under intervjuet. Videre presenteres oppgavene de arbeidet med under problemløsingsdelen i innsamlingen. Alle spørsmål og oppgaver er selvutviklet med unntak av oppgave 5 i problemløsingsdelen. Denne er hentet fra undersøkelsen *TIMMS Advanced* fra 2008. Underveis vil jeg analysere hver enkelt oppgave og avgjøre hva slags forståelse som forutsettes for å kunne løse oppgavene. Deretter vil jeg presentere et knippe elevsvar, som utgjør grunnlaget for diskusjonen i seksjon 5.

4.1 Presentasjon av spørsmål og oppgaver

4.1.1 Spørsmålene

Som nevnt tidligere, ble elevene stilt spørsmål knyttet til deres interesse, innsats og motivasjon i faget. Dette var for å få et bedre bilde av utvalget og å avdekke et eventuelt skille mellom elevene og/eller elevgruppene. Spørsmålene/oppgavene om funksjoner, den deriverte og tangenter er derimot direkte knyttet til problemstillingen og skal dermed – forhåpentligvis – bidra til å besvare forskningsspørsmålet. I denne delen av intervjuet ble elevene blant annet bedt om å beskrive det de kjente til om begrepene *funksjon*, *den deriverte* og *tangent*. Ved å formulere oppgavene på denne måten, fikk elevene muligheten til å få frem alt de assosierte med begrepene – for eksempel med hjelp av formelle definisjoner, grafiske beskrivelser og fremstillinger, eksempler, formler, prosesser og liknende. De var dermed ikke låst til en bestemt fremstilling, definisjon eller prosess, men fikk muligheten til å presentere større deler av sin kunnskap og forståelse. På denne måten kunne også jeg få en bedre forståelse av hva slags tanker, kunnskaper og prosesser elevene knyttet til ulike begreper – altså hva slags begrepsbilde elevene hadde – og på denne måten belyse problemstillingen.

Elevene ble også bedt om å beskrive sammenhengen mellom funksjoner, dens deriverte og tangenter. De har arbeidet mye med oppgaver der denne sammenhengen har vært sentral, men oppgavene har ofte vært svært instruerende, og det kan dermed tenkes at elevene ikke nødvendigvis har forstått *hvorfor* de bruker de bestemte operasjonene i oppgaveløsingen. Ved å be dem sette ord på dette, var målet å avdekke om elevene hadde denne grunnleggende forståelsen, eller om de var bundet og avhengige av ledende og instruerende oppgaver.

Arbeidet med matematikk foregår oftest skriftlig ved bruk av formler og prosedyrer, men god matematisk kunnskap og kompetanse innebærer også evne til å kunne formulere, forklare og formidle matematikk – også muntlig. Vi har blant annet sett at Webbs kunnskapsnivå «skill/concept» innebærer evne til å beskrive og forklare. Samtidig inngår forståelse av relasjoner, evnen til å formulere og kapasitet for å reflektere og forklare i Kilpatricks fem tråder for matematisk kompetanse. Ved å be elevene sette ord på deres forståelse av og kunnskaper om begrepene og sammenhengen mellom dem, får man ikke bare et bilde av elevenes begrepsbilder, men man tester også deres matematiske kunnskap og kompetanse.

4.1.2 Oppgavene

For å få en bedre forståelse av hva slags tanker, kunnskaper og prosesser elevene knytter til ulike begreper, ble elevene også bedt om å løse oppgaver for hånd og å forklare hvordan de tenkte underveis. Det er ikke bare nyttig å vite hvilke feil elevene gjør; for å legge til rette for at elevene skal løse oppgaver med en høyere grad av måloppnåelse, er det som lærer også essensielt å få innsikt i hva slags tanker som ligger bak elevenes svar. En slik innsikt vil gjøre oss lærere bedre rustet til å gripe fatt i og rette opp i eventuelle misoppfatninger.

4.1.2.1 Oppgave 1 og 2

Oppgave 1:

Finn $f'(x)$ når

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + x^{-2}$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \ln(x)$

Oppgave 1: tester om elevene kan huske og anvende enkle derivasjonsregler.

Oppgave 2:

Finn $f'(x)$ når

a) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

b) $f(x) = \frac{3x-2}{e^{2x}}$

c) $f(x) = (4x^3 + 2x)^2$

Oppgave 2: tester om elevene kan huske og anvende kjerneregelen og kvotientregelen.

De første oppgavene elevene ble bedt om å løse, er oppgavene over. Den første oppgaven krever at elevene er i stand til å benytte de enkleste derivasjonsreglene, mens den andre oppgaven er hakket mer krevende. Oppgave to forutsetter nemlig at elevene behersker de enkleste reglene, som i oppgave 1, i kombinasjon med kjerneregelen, kvotientregelen og eventuelt produktregelen. Selv om den andre oppgaven er mer krevende enn den første, kan man likevel si at oppgavene stiller lave krav til *forståelse av* emnet. Elever kan beherske formler og prosedyrer uten å nødvendigvis ha en dypere forståelse konseptet den deriverte og for hva derivasjon som prosess innebærer, og dersom vi bruker Skemps kategorisering av forståelse, kan man si at elever som «bare» har en instrumentell forståelse også vil være i stand til å løse disse oppgavene. De neste oppgavene vil derimot stille høyere krav til elevenes forståelse.

4.1.2.2 Oppgave 3

Oppgave 3:

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2$, finn

a) Intervallene der $f(x)$ er synkende og stigende

b) Likningen for tangenten til $f(x)$ i $x = 1$

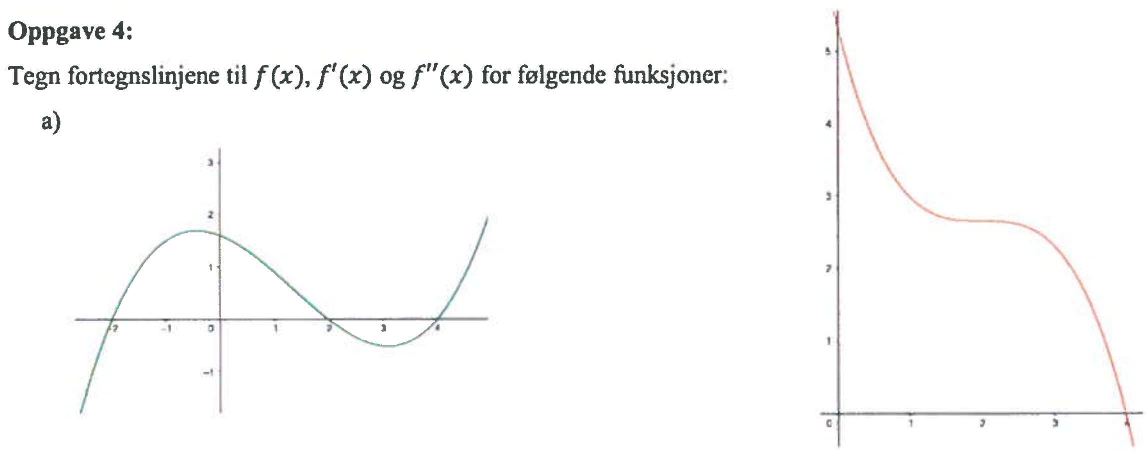
Oppgave 3: gir elevene muligheten til å vise forståelse av den deriverte og sammenhengen mellom den deriverte og tangenter.

I oppgave 3 ble elevene bedt om å blant annet avgjøre hvor grafen $f(x)$ er synkende og stigende. Dette er en oppgavetype elevene ofte møter i arbeidet med funksjoner i timene, på prøver og eksamener, men oppgavene har ofte flere ledende deloppgaver, som «Deriver funksjonen og finn topp- og bunnpunktene til $f(x)$». Ved å unngå slike ledende deloppgaver, vil man avdekke om elevene har den tilstrekkelige forståelsen av hva den deriverte innebærer, og dermed vil være i stand til å løse oppgaven uten ledetråder, eller om de er låst til hint, kjente fremgangsmåter og prosedyrer. Selv om oppgaven nå er uten de vanlige ledetrådene, stiller den riktignok ikke de høyeste kravene til elevenes matematiske kompetanse og relasjonell forståelse – nettopp fordi oppgavetypen er så vanlig.

I oppgave 3 b) ble elevene bedt om å finne likningen til tangenten til $f(x)$ i $x = 1$. Elevene har arbeidet med liknende oppgaver tidligere, men også i slike oppgaver har de ofte fått ledende deloppgaver for å hjelpe dem på vei; «Finn $f'(1)$», «Bruk ettpunktsformelen for å finne likningen til tangenten gjennom punktet $(1{,}4)$» og så videre. Ved å eliminere slike ledetråder, blir elevene nødt til å anvende deres kunnskap og forståelse fremfor å hvile på gitte, innøvde prosedyrer. Med en dypere og mer relasjonell forståelse av temaet, vil elevene være i stand til å løse oppgaven – eller å eventuelt gi en muntlig beskrivelse av hvordan den kan løses dersom de har glemt ettpunktsformelen.

4.1.2.3 Oppgave 4

b)



Oppgave 4:

Tegn fortegnslinjene til $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ for følgende funksjoner:

a)

Oppgave 4: gir elevene muligheten til å anvende kunnskaper og forståelse knyttet til funksjoner, dens deriverte og dens dobbeltderiverte.

I oppgave fire ble elevene bedt om å tegne fortegnslinjene for funksjonene over, funksjonenes deriverte og deres dobbeltderiverte. Begge grafene er tredjegrads polynomer, men de er svært ulike. Den første er en «enkel» funksjon med tydelig topp- og bunnpunkt, og oppgaven gir elevene muligheten til å vise frem en del kunnskap og forståelse knyttet til funksjoner og funksjonsdrøfting. Elevene er vant til å arbeide med denne typen funksjoner, og oppgaven stiller dermed ikke krav til at elevene skal kunne løse ukjente problem.

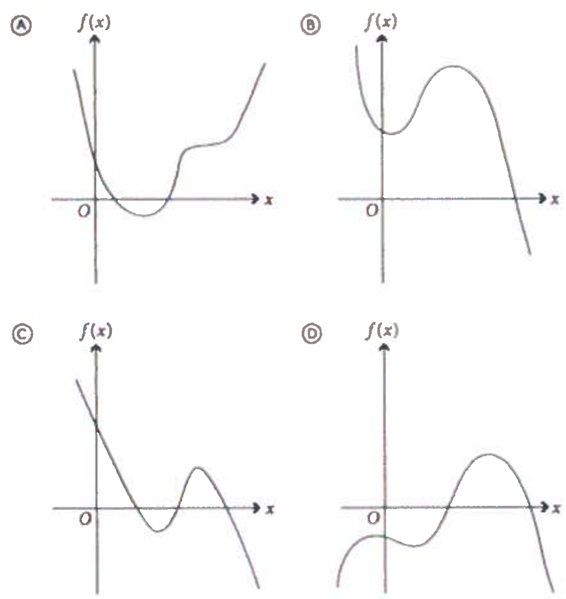
Grafen i b) vil derimot være ukjent for flere av elevene. Grafen har et vendepunkt, som også er et terrassepunkt, men ingen tydelige topp- og/eller bunnpunkt. Denne deloppgaven kan derfor bli utfordrende og forvirrende for enkelte, og den vil dermed kunne avdekke om noen av elevene har en mangelfull forståelse av den deriverte, den dobbeltderiverte og deres egenskaper. God matematisk kompetanse innebærer, som vi har sett, evne til å anvende kunnskap og forståelse av å løse ukjente oppgaver og problemer, og oppgaven kan dermed også bidra til å gi et bedre bilde av elevenes matematiske kompetanse.

4.1.2.4 Oppgave 5

Oppgave 5:

Hvilken av grafene nedenfor kan ha alle disse egenskapene?

$$f(-1) > 0,\ f(3) < 0,\ f'(5) = 0,\ f''(5) < 0$$



Oppgave 5: Kalkulusoppgave 8 (Grønmo et al., 2010, side 97).

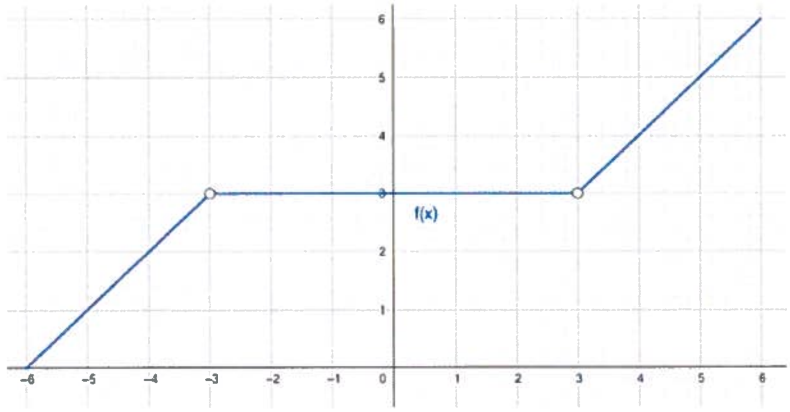
Da TIMMS Advanced ble gjennomført i 2008, var dette en av oppgavene som ble gitt. På denne oppgaven presterte de norske elevene klart svakere enn det internasjonale gjennomsnittet. Oppgavetypen er ukjent for de fleste elevene og forutsetter ingen beregninger og kjente algoritmer og prosedyrer. Oppgaven plasseres derfor i den kognitive kategorien *resonnering* (Grønmoet al., 2010, s. 98).

For å løse oppgaven, er elevene avhengig av en dyp og fullstendig forståelse av funksjoner og deres deriverte og dobbeltderiverte. Visse faktakunnskaper og trening i standard løsningsteknikker er ikke tilstrekkelig for å kunne løse oppgaven, og oppgaven blir dermed mer krevende i den forstand at den forutsetter at elevene er i stand til å analysere seg frem til mulige løsninger – og hvilke løsninger som ikke er mulige. Dersom man tar utgangspunkt i Webbs kunnskapsnivåer, må elevene dermed befinne seg på et høyt kunnskapsnivå, der de behersker både strategic og extended thinking. Ved å be elevene tenke høyt underveis, vil det forhåpentligvis være mulig å avdekke eventuelle misoppfatninger og hull i deres forståelse. Det vil også gi innsikt i elevenes problemløsingsstrategier, som i seg selv er verdifull kunnskap.

4.1.2.5 Oppgave 6

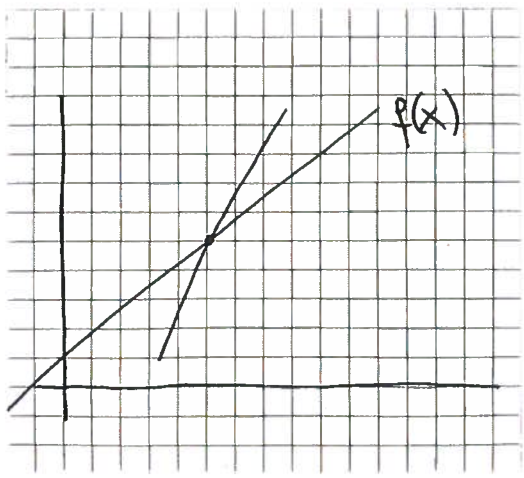
Oppgave 6:

Nedenfor ser du grafen til funksjonen $f(x)$. Velg et punkt på grafen og skisser tangenten i dette punktet. Skisser grafen til $f'(x)$.



Oppgave 6: avdekker om elevene kan se sammenhengen mellom grafer med konstant vekst (lineære funksjoner) og deres deriverte.

Dersom elevene hadde vanskeligheter med å sette ord på ting da de fortalte om funksjoner, den deriverte og tangenter under intervjudelen, fikk de mulighet til å tegne. Da to av elevene skulle tegne en tangent, tegnet de først opp et koordinatsystem og en lineær funksjon, før de tegnet en tangent som krysset den lineære funksjonen, som vist under;



Elevbesvarelse 1: tangenten til den lineære funksjonen $f(x)$ illustrert av elev E. Elev B ga også en liknende illustrasjon.

For å se om dette skyldes slurv eller manglende forståelse – og for å se om flere av elevene i utvalget kunne ha den samme mangelfulle forståelsen – utviklet jeg derfor oppgave 6. Ved å be elevene løse denne oppgaven igjen en tid etter at de skisserte disse «tangentene», fikk jeg dessuten mulighet til å kvalitetssikre relabiliteten til dataene knyttet til tangenter. For å løse oppgaven, forutsettes ikke bare forståelse av den deriverte og tangenter til funksjoner med konstant vekst, men også forståelse av kontinuitet som betingelse for derivasjon.

4.1.2.6 Oppgave 7

Oppgave 7:

Funksjonen $f(x)$ har følgende egenskaper:

- **Dens tangenter har positivt stigningstall for alle verdier av x**
- **Dersom man beveger seg bortover x-aksen i positiv retning, vil tangentenes stigningstall være avtakende for alle verdier av x**

Tegn en graf som passer til funksjonen.

Oppgave 7: gir elevene mulighet til å vise at de kan anvende kunnskap om tangenter og deres stigning for å si noe om grafen de tilhører.

I arbeidet med oppgaver er de fleste elevene vant til å arbeide med oppgaver der de blir gitt en funksjon $f(x)$ og må bruke denne funksjonen til å si noe om dens tangenter. Dersom elevene har en tilstrekkelig forståelse av tangenter, vil de også være i stand til å gå motsatt vei; fra tangenter til funksjoner. Oppgaven tester ikke bare elevenes forståelse av sammenhengen mellom tangenter og funksjoner, men også deres forståelse av grenseverdier. Det oppgis at tangentene har positivt stigningstall for alle verdier av x og at stigningstallet er *avtagende* når man beveger seg i positiv retning på x-aksen. Vil elevene forstå at stigningstall kan være både positive og avtagende, der stigningen vil gå mot grenseverdien null, eller vil de tolke avtagende som *negativ*? Og dersom de tolker det slik, vil de være i stand til å oppdage at de har tegnet en graf som ikke lenger tilfredsstiller det første kravet og dermed forstå at de må ha gjort en feil underveis?

4.2 Elevbesvarelser

I denne delen av oppgaven presenteres og analyseres noen av elevsvarene. Som nevnt, valgte jeg å redusere antallet informanter i problemløsingsdelen av innsamlingen på grunn av Covid-19. Dermed vil det i seksjon 4.2.1 inkluderes svar fra ti elever, mens det i seksjon 4.2.2 kun gis elevbesvarelser fra åtte elever. Elevene får nye navn; «Elev A», «Elev B»,..., «Elev J», der elevene fra A til og med E tilhører elevgruppen med samfunnsfaglig matematikk, mens elevene fra F til og med J har realfaglig matematikk. Elevene som «kuttes» i seksjon 4.2.2, er Elev F og Elev J.

4.2.1 Spørsmålene

Under intervjuet ønsket jeg å undersøke elevenes begrepsforståelse og hva slags bilde de hadde av begrepene *funksjon, den deriverte* og tangent. Jeg ønsket også å undersøke forståelsen av sammenhengen mellom en funksjon, dens deriverte og dens tangenter. Siden spørsmålene ble stilt og besvart muntlig, har jeg valgt å gjengi et knippe elevbesvarelser og utdrag fra elevbesvarelser i form av samtalesekvenser i de kommende seksjonene. Svarene vil komme fra begge elevgruppene.

4.2.1.1 Funksjoner

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om begrepet *funksjon*?

Elev A: Jeg tenker jo at det er liksom [....] ordet er jo noe som skal fungere, men sånn sett er det ikke så mye utenom f av x ($f(x)$), som sier noe om stigninga og hvordan noe ligger an. Det er et veldig mye brukt ord, som jeg kanskje ikke har satt meg så godt inn i.

Intervjuer: Du sier at funksjoner sier noe om hvordan noe ligger an. Hva mener du med det?

Elev A: Nei, [...] bare at det forteller om utviklingen til ting.

Samtalesekvens 1: elev A, med samfunnsfaglig matematikk, om funksjoner,

Vi ser at elev A bruker funksjonsuttrykket, $f(x)$, men sier lite om hva selve uttrykket innebærer. Den forteller at funksjoner forteller om stigningen og utviklingen til ting, men den forteller samtidig at det er et begrep den ikke har satt seg så godt inn i – til tross for mye arbeid med temaet.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om begrepet *funksjon*?

Elev B: [...] Det blir ofte brukt for å for eksempel snakke om økning av noe. [...] Vet ikke hvordan jeg skal forklare det. Det er jo et diagram eller brukes ofte i Geogebra. Det finnes flere ulike typer, for eksempel lineære. De kan egentlig se ut som hva som helst.

Samtalesekvens 2: elev B, med samfunnsfaglig matematikk, om funksjoner.

Elev B nevner bruksområder og at det finnes flere ulike typer. Den gir derimot ingen forklaring på hva en funksjon egentlig er. Samtidig sier eleven at funksjonene kan se ut som «hva som helst», som gir et upresist og feilaktig bilde av hvordan en funksjon kan se ut.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om begrepet *funksjon*?

Elev E: [.....] Hva er det egentlig? Føler meg helt lost nå. Jeg tenker bare på en graf liksom.

Samtalesekvens 3: elev E, med samfunnsfaglig matematikk, om funksjoner.

Vi ser at eleven – til tross for å ha arbeidet mye med funksjoner – sliter med å sette ord på hva en funksjon faktisk er og kan brukes til. Eleven sier at den tenker på en graf, men hadde ikke mer utfyllende informasjon å komme med i spørsmålet om å redegjøre for begrepet.

De tre samtalesekvensene over er alle fra samtaler med elever som tar samfunnsfaglig matematikk. Felles for disse elevene var at de virket nølende og slet med å sette ord på sine tanker og kunnskaper knyttet til funksjoner, og samtalene med de to siste elevene i gruppen gir det samme inntrykket. En av disse ga et delvis mer utfyllende svar i den forstand at eleven kom med et par eksempler, men eleven klarte likevel ikke å gi et tilfredsstillende, mer fullstendig bilde av hva en funksjon er.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om begrepet *funksjon*?

Elev J: [..] OK, si at du har et koordinatsystem med en x- og y-akse og et funksjonsuttrykk f av x ($f(x)$). Når x forandrer seg, vil y-verdien også forandre seg etter uttrykket $f(x)$. $f(x)$ blir jo da som en regel for hvilken y-verdi man får med en bestemt x-verdi. (...).

Samtalesekvens 4: elev J, med realfaglig matematikk, om funksjoner.

Elev J, som tar realfaglig matematikk, beskriver funksjoner, eller funksjonsuttrykket, som en regel som tilegner en bestemt y-verdi til en bestemt x-verdi. Den bruker koordinatsystemet, med x- og y-akse til å demonstrere og kommer dessuten med to enkle, relevante eksempler.

Selv om elevbesvarelsene til elevene med realfaglig matematikk varierer noe i kvalitet og innhold, er det tydelige likheter mellom dem. De viser at de forstår hva funksjoner er – regler

– og kommer med tydelige beskrivelser for hvordan funksjoner kan uttrykkes både grafisk og algebraisk. Elevene er tydelige og selvsikre i sine svar og viser nyanserte bilder av begrepet.

4.2.1.2 Den deriverte

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om *den deriverte*?

Elev A: Stigningstallet er nok noe som popper opp i hodet. At man skal finne stigninga liksom. [..] Stigninga til funksjonen. Du skal finne hvor den (funksjonen) stiger, og da finner du punkter på grafen.

Intervjuer: Kan du si noe om selve derivasjonsprosessen? Hva er det egentlig man gjør når man deriverer?

Elev A: Jeg har egentlig bare lært meg reglene, men aldri tenkt på hvorfor man gjør det og det.

Samtalesekvens 5: elev A, med S-matte, om den deriverte/derivasjon.

Samtalesekvensen over viser at elev A trekker fram stigningstallet til funksjonen i spørsmålet om å beskrive det den kjenner til om den deriverte. Den sier at man skal avgjøre hvor funksjonen stiger, men nevner ikke noe om hvordan man kan bruke den deriverte til å avgjøre dette. Eleven sier heller ikke noe om at den deriverte kan brukes til å avgjøre hvor funksjonen er synkende. På spørsmålet om hva derivasjon innebærer som prosess, kommer det tydelig frem at eleven kun har pugget derivasjonsreglene uten å tenke over hvordan de har blitt utledet.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om *den deriverte*?

Elev B: Det viser jo stigningstallet, så det er jo en måte å regne på. Du deriverer hvis du vil finne økninga, hvor mye den stiger per ting, for eksempel person, ting eller år.

Intervjuer: Hva er det egentlig man gjør når man deriverer? Kan du fortelle om derivasjon som prosess?

Elev B: Det er jo regler for det. For eksempel hvis du har x^2, flytter du ned totallet og får at f derivert er $2x$. [..] Men vet ikke hvordan man kommer frem til det (regelen).

Samtalesekvens 6: elev B, med S-matte, om den deriverte/derivasjon.

Elev B, i likhet med elev A, sier at den deriverte er stigningstallet. På spørsmålet om hva derivasjon som prosess innebærer, gir eleven et eksempel på en andregrads polynomfunksjon og deriverer den. Den sier at det er regler for det (derivasjon), men at den, også i likhet med elev A, ikke vet hvordan man kommer frem til derivasjonsreglene.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om *den deriverte*?

Elev C: Det har med stigninga å gjøre. (...) Har ikke alltid forstått hva det egentlig er. Har bare lært at jeg skal derivere og gjøre det oppgaven ber om.

Samtalesekvens 7: elev C, med S-matte, om den deriverte/derivasjon.

Vi ser at elev C innrømmer at den har en mangelfull forståelse, men at den deriverer og gjør det oppgaven ber om. Dette tyder på at eleven kan derivasjonsreglene, men at den ikke nødvendigvis har forståelse av hvordan reglene er blitt utledet og hva derivasjon som prosess innebærer. Denne manglende forståelsen er felles ikke bare for elev A, B og C, men også for de to andre elevene i utvalget med samfunnsfaglig matematikk. Alle elevene oppga at de kunne reglene og var i stand løse derivasjonsoppgaver, men at de ikke forsto hvorfor fremgangsmåtene ledet frem. Flere oppga enkle eksempler, hovedsakelig derivasjon av annengrads polynomfunksjoner.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om *den deriverte*?

Elev G: Når du deriverer, finner du stigningstallet (til grafen). [..] Du kan for eksempel, i et større perspektiv, se på gjennomsnittsendring, og gjør du det (Δx) smalere og smalere, finner du stigningstallet, eller den momentane endringsraten til funksjonen, som er lik den deriverte.

Samtalesekvens 8: elev G, med R-matte, om den deriverte/derivasjon.

Vi ser at elev G forteller at du ved å derivere finner stigningstallet til grafen ved å derivere. Eleven beskriver dessuten også hvordan selve derivasjonsprosessen foregår; hvordan man går fra gjennomsnittsendring til momentan endringsrate, altså den deriverte.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om *den deriverte*?

Elev H: Den deriverte er momentanveksten til en funksjon. Den kan uttrykkes ved hjelp av en tangent gjennom et punkt på grafen og beskriver hvor raskt den ($f(x)$) vokser i det punktet. [..] Altså, stigninga er den samme for tangenten og funksjonen i det punktet, [.] og den finner man ved å derivere funksjonen.

Intervjuer: Kan du fortelle om selve derivasjonsprosessen? Hva er det egentlig man gjør når man deriverer?

Elev H: [...] Du sier at du har en Δx, og den skal gå mot null slik at linja mellom dem $\big(\text{punktene } (x, f(x)\big)$ og $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, vist på tegning) blir en tangent, en linje som kun berører grafen i ett punkt.

Samtalesekvens 9: elev H, med R-matte, om den deriverte/derivasjon.

Der elev G bruker begrepet *momentan endringsrate*, bruker elev H *momentanvekst*. Videre kobler elev H kunnskap om funksjoner og dens tangenter til den deriverte. Ved hjelp av en tegning og muntlige beskrivelser og forklaringer, viser eleven dessuten at den forstår hva selve derivasjonsprosessen innebærer.

Da elev F og J skulle redegjøre for *den deriverte* og for derivasjon som prosess, kom de med liknende beskrivelser som elev G og H. Felles for disse fire elevene, var dessuten at de i større grad fokuserte på derivasjon generelt, fremfor å fokusere på derivasjon av bestemte funksjoner. Flere av dem tegnet opp en graf og viste overgangen fra gjennomsnittlig endringsrate til momentan endringsrate. De fokuserte dermed mer på selve prosessen og i liten grad på de enkelte derivasjonsreglene.

Forståelsen av både begrepet og prosessen er tydelig til stede hos alle elevene fra elevgruppen med realfaglig matematikk, med unntak av elev I. Dette gjenspeiles i samtalesekvensen under, hvor eleven forklarer at han har pugget reglene fremfor å arbeide med forståelsen av derivasjon som prosess. Eleven viser likevel at den har en viss forståelse av *den deriverte* som begrep, fordi den oppgir at den deriverte gir stigningstallet til tangenten, som den senere forklarer at har samme stigning som funksjonen i det samme punktet.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om *den deriverte*?

Elev I: Det er stigningstallet til tangenten. Det er sånn jeg pleier å pugge det.

Intervjuer: Hvordan er det du finner stigningen? Hva er det du gjør når du deriverer?

Elev I: Hmm [...]. Jeg bare deriverer liksom. Det er noen formler for det. [..] Jeg bare pugger dem. Kunne det før, men husker ikke hvordan man kommer frem til det (formlene).

Samtalesekvens 10: elev I, med R-matte, om den deriverte/derivasjon.

4.2.1.3 Tangenter

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om tangenter?

Elev A: Det er vel det man snakker om når det er den maksimale veksten, eller hvor det på en måte [...]. Hvor noe vokser mest eller fortest.

Samtalesekvens 11: elev A, med S-matte, om tangenter.

Her ser vi at elev A beskriver tangenter som den maksimale veksten. Maksimal (og minimal) vekst er et av emnene som har blitt gjennomgått i undervisningen, og dette tyder på at eleven kan befinne seg i en situasjon hvor den husker flere av begrepene fra emnet, men ikke har utviklet den nødvendige forståelsen av hvert enkelt begrep og dermed bruker begrepene i situasjoner der de ikke er beskrivende. Elevene har dessuten lært om *vendetangenter*, altså tangenter i vendepunktene, der veksten er minimal eller maksimal. Det kan dermed også tenkes at eleven overgeneraliserer denne kunnskapen og tilegner *alle* tangenter de samme egenskapene.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om tangenter?

Elev B: [...] Det er ganske lite det. Det er vel en eller annen (rett) linje som skjærer funksjonen. Du bruker den ettpunktsformelen for å finne stigningen til tangenten.

Samtalesekvens 12: elev B, med S-matte, om tangenter.

Elev B beskriver tangenter som rette linjer, som vitner om en viss forståelse av temaet, men sier videre at disse linjene *skjærer* funksjonen. For å få et bedre inntrykk av hva eleven mener med at tangenten skjærer – eller om eleven egentlig mener at den tangerer – funksjonen, ba jeg den om å tegne en graf og en tangent for å illustrere. Eleven tegnet da opp en funksjon og tangent på samme måte som elev E gjorde, som vist i elevbesvarelse 1. Den tegnet altså opp en lineær funksjon og en tangent som krysser denne linjen, og det er dermed tydelig at eleven er i en misoppfatning knyttet til tangenter. Fra samtalesekvensen ser vi videre at eleven oppgir at man bruker ettpunktsformelen for å finne stigningen til tangenten. Dette vitner om at eleven ikke har forstått sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og deres tangenter, der essensen ligger i at funksjonen og tangenten har samme stigningstall i tangeringspunktet; noe som ikke er mulig dersom de to rette linjene skjærer hverandre.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om tangenter?

Elev C: Det er, [..] eller vet ikke om det alltid er det, men en rett strek som ofte ligger på grafen.

Samtalesekvens 13: elev C, med S-matte, om tangenter.

Samtalesekvens 13 viser at elev C har en viss forståelse av tangenter, men at eleven er usikker på om tangenter *alltid* er rette linjer. Dessuten sier eleven at tangentene *ofte* ligger på grafen. Da eleven ble bedt om å tegne en graf og en av grafens tangenter for å illustrere hva eleven mente med at tangentene ligger på grafen, tegnet eleven opp en tredjegrads polynomdivisjon og en rett linje som tangerer funksjonen; en tangent. Eleven viste dermed at den hadde en viss forståelse av tangenter, men i de muntlige beskrivelsene virket eleven altså mer usikker og nølende. Vi ser at det er ting som tyder på at eleven har en mangelfull forståelse av begrepet, hvor eleven ikke nødvendigvis oppfatter tangentenes grunnleggende egenskaper som statiske, men som dynamiske, noe som kan forandres.

Intervjuer: Kan du beskrive det du kjenner til om tangenter?

Elev F: I et punkt på grafen berører, eller tangerer, tangentlinjen grafen akkurat i det punktet. [..] Så det blir jo en rett linje, som har samme stigning som grafen har i det samme punktet. Man bruker den der ettpunktsformelen fra T-matten for å finne likninga. [.] Og stigninga finner man jo når man deriverer, selvfølgelig.

Samtalesekvens 14: elev F, med R-matte, om tangenter.

Fra samtalesekvensen ser vi at elev F bruker begrepet *tangerer* og at eleven oppgir at tangenter er rette linjer med samme stigning som grafen i det samme punktet. Videre gir den også en beskrivelse for hvordan man finner likninga for tangentlinjene. Eleven fanger dermed opp essensen i temaet, gir en tilfredsstillende beskrivelse og viser at den har god begrepsforståelse. Dessuten forklarer eleven hvordan man deriverer for å finne tangentens stigning og trekker inn ettpunktsformelen, og den viser med det at den har forståelse av prosessen ved å finne likningen for tangentene.

Tre av de andre elevene fra denne elevgruppen, altså elevene med realfaglig matematikk, og én av elevene med samfunnsfaglig matematikk, elev D, ga liknende beskrivelser som elev F, og viste dermed god forståelse av både begrep og prosess. Blant resten elevene fra den andre elevgruppen, altså de med samfunnsfaglig matematikk, så vi derimot at forståelsen var mer mangelfull og tidvis flytende. Det samme gjelder forståelsen hos én av elevene med realfaglig matematikk, nærmere bestemt elev J.

4.2.1.4 Sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og tangenter

Intervjuer: Kan du beskrive sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og funksjonens tangenter?

Elev A: Du tar nullpunktet inn i derivasjonen, og så skal den deriverte være lik tangenten. Da finner du [..] noe spesielt. Jeg tror de skal være lik hverandre eller noe for å finne ut av noe. [...] Usikker på hva.

Samtalesekvens 15: elev A, med S-matte, om sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og tangenter.

Samtalesekvensen over gir inntrykk av en ikke-eksisterende forståelse av sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og funksjonens tangenter. Elev A sier at man tar nullpunktet inn i derivasjonen; et utsagn som ikke gir mening. Videre sier eleven at den deriverte skal være lik tangenten, og at man da finner noe spesielt. Heller ikke dette gir mening, og det forklarer heller ingen sammenheng mellom begrepene. Dette tyder på at eleven hverken har tilstrekkelig begrepsforståelse og kunnskap, som vi også har sett ut fra tidligere samtalesekvenser med samme elev, eller evne til å beskrive og forklare sammenhenger mellom matematiske konsepter.

Intervjuer: Kan du beskrive sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og funksjonens tangenter?

Elev B: Du deriverer funksjonen for å finne stigningstallet (til funksjonen). [...] Nei [...], jeg aner ikke.

Samtalesekvens 16: elev B, med S-matte, om sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og tangenter.

Vi ser at elev B forstår sammenhengen mellom funksjonen og den deriverte, der du deriverer for å finne funksjonens stigning. Dette så vi også fra samtalesekvensen med eleven i seksjon 4.2.1.2, og eleven er dermed konsekvent i sine forklaringer når det gjelder den deriverte. Videre ser vi at eleven ikke er i stand til å beskrive hvordan tangenter henger sammen med funksjonen og den deriverte. Som vi så i seksjon 4.2.1.3, mente eleven at tangenter er rette linjer som skjærer funksjonen, og det vil dermed ikke være mulig at funksjonen og tangenten har samme stigningstall i skjæringspunktet. Årsaken til at eleven ikke er i stand til å beskrive denne sammenhengen, er dermed – sannsynligvis – at den er i en misoppfatning knyttet til tangenter. Uten grunnleggende forståelse av tangenter og deres egenskaper, vil man heller ikke være i stand til å forstå sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og tangenter.

Intervjuer:	Kan du beskrive sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og tangenter?
Elev G:	[..] Ja, si du har en funksjon. Da vil den deriverte gi stigningen (til funksjonen), altså endringen, i et bestemt punkt. Og tangenten er en rett linje gjennom det punktet med samme stigning som den deriverte i punktet [.], altså samme stigning som funksjonen har i det punktet.

Samtalesekvens 17: elev G, med R-matte, om sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og tangenter.

Samtalesekvensen over viser elev G, som har realfaglig matematikk, sin beskrivelse av sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og tangenter. Eleven beskriver sammenhengen på en god og tydelig måte, som viser at den har forstått både enkeltbegrepene og sammenhengen mellom dem. Eleven er tydelig og gir oppklaringer underveis, og den gir dermed uttrykk at den ikke bare har den tilstrekkelige forståelsen, men at den også har en matematisk kompetanse som gjør eleven i stand til å formidle denne forståelsen på en god måte.

Denne forståelsen og formidlingsevnen var felles for flere av elevene. Elev D, som har samfunnsfaglig matematikk, og elevene F, H og J, som har realfaglig matematikk, beskrev sammenhengen på liknende, tilfredsstillende måter. Fire av elevene med samfunnsfaglig matematikk og én av elevene med realfaglig matematikk beskrev derimot sammenhengen på en mangelfull og/eller feilaktig måte – eller ikke i det hele tatt.

4.2.2 Oppgavene

Under problemløsingsdelen av innsamlingen ønsket jeg å undersøke elevenes forståelse og matematiske kompetanse gjennom et knippe oppgaver innen funksjonsdrøfting, altså matematisk analyse. Oppgavene ble løst skriftlig og individuelt, og under presenteres noen av elevbesvarelsene. Problemløsingen foregikk, som nevnt, under observasjon, og jeg fikk dermed muligheten til å stille spørsmål underveis. Siden oppfølgings- og oppklaringsspørsmålene ble stilt og besvart muntlig, har jeg også valgt å gjengi noen av forklaringene i form av samtalesekvenser i de kommende seksjonene. Svarene kommer fra begge elevgruppene, som nå består av totalt åtte elever; fire med samfunnsfaglig og fire med realfaglig matematikk.

4.2.2.1 Oppgave 1

Løsning:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + (x)^{-2}$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4 + -2x$

$= \underline{\underline{3x^2 - 4}}$

b) $f(x) = e^x$

$f'(x) = \underline{\underline{e^x}}$

c) $f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$

Elevbesvarelse 2: løsning oppgave 1, elev A.

Elevbesvarelsen over viser elev As løsning på oppgave 1. Vi ser at eleven har løst b) og c) korrekt, men at den har løst a) feil. På spørsmål om hvordan eleven tenkte da den deriverte det siste leddet, x^{-2}, og fikk $-2x$, svarte eleven at «nei, du setter jo bare ned tallet i eksponenten og trekker fra 1». Resten av leddene har eleven derimot løst riktig, og dette kan tyde på at eleven har automatisert visse prosedyrer – som den tidvis bruker i ukjente situasjoner uten å tilpasse prosedyrene slik at de leder frem til korrekt resultat – og behersker en del av de enkleste derivasjonsreglene.

Med unntak av elev A, løste alle elevene oppgaven riktig og uten særlige problemer. Selv om eleven hadde feil på én deloppgave, viste den likevel at den behersket to av de andre reglene og at den til en viss grad behersket derivasjon av polynomfunksjoner. Etter å ha observert og stilt spørsmål underveis, er inntrykket at elevene i svært stor grad husket og behersket disse enkle reglene. Det kan dermed sies at elevene har en viss instrumentell forståelse av derivasjon. Dersom man ser på Webbs kunnskapsnivåer, ser vi videre at elevene – minst – ligger på kunnskapsnivå 1; «recall», som blant annet innebærer at elevene er i stand til å huske prosedyrer.

4.2.2.2 Oppgave 2

Løsning:

a) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

$$f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{x^2+x}}}$$

b) $f(x) = \dfrac{3x-2}{e^{2x}}$

$$f'(x) = \underline{\underline{\frac{3}{e^{2x}}}}$$

c) $f(x) = (4x^3 + 2x)^2$

$$f'(x) = 2(4x^3 + 2x)$$
$$= 8x^3 + 4x^2$$
$$= \underline{\underline{4x(2x^2+1)}}$$

Elevbesvarelse 3: løsning oppgave 2, elev A.

Intervjuer: Hvordan tenkte du da du løste a) her?

Elev A: [.] Nei, brukte jo bare den regelen for logaritmer sånn som i oppgave 1. Det som står i parentesen skal jo settes ned under brøkstreken, sånn som x i stad.

Intervjuer: Og i b) da, hvordan tenkte du der?

Elev A: Deriverer du ikke bare oppe og nede? $3x - 2$ blir jo bare 3 og e^{2x} blir vel bare e^{2x} [..] sånn som med e^x. [.] Eller?

Intervjuer: Hvordan tenkte du da du løste den siste da?

Elev A: Du setter jo ned 2-tallet som vanlig og får 1 i rest der oppe i [.] potensen, så bare ganger du med det inni parentesen.

Samtalesekvens 18: elev A om løsningen på oppgave 2.

Elevbesvarelsen over viser elev As løsning på oppgave 2, som forutsatte at elevene husker og behersker både de enkle derivasjonsreglene fra oppgave 1 og mer komplekse regler, som kvotientregelen og kjerneregelen. Vi ser at eleven har løst alle deloppgavene feil og at eleven har forankret svarene sine i de enkle, kjente formlene eleven brukte i da den løste oppgave 1. Dette viser at eleven overgeneraliserer kunnskap og ukritisk bruker formler i situasjoner hvor de ikke er gjeldende, noe som også gjenspeiles i samtalesekvens 18. Selv om eleven behersket de (fleste) enkleste formlene, som vist i 4.2.2.1, og dermed har en viss instrumentell forståelse og matematisk kompetanse innen temaet, ser vi likevel at denne forståelsen og kompetansen er mangelfull og utilstrekkelig for å kunne løse mer kompliserte derivasjonsoppgaver. Matematisk kompetanse og forståelse dreier seg dessuten om evne til å undersøke og resonnere, og dersom eleven hadde løst likningen for $f(x)$ i c) slik at funksjonen hadde vært på «vanlig» polynomform, kunne eleven enkelt ha sjekket om svaret i c) stemte ved å derivere den «nye» funksjonen på polynomform.

Løsning:

a) $f'(x) = \frac{2x+1}{x}(x^2+x)$

Elevbesvarelse 4: løsning oppgave 2 a), elev H.

Intervjuer: Hvordan har du tenkt her?

Elev H: [..] Vet ikke helt. Vi har jo ikke hatt om det siden i fjor, så husker ikke helt hvordan den regelen er. Husker bare at du må gange med kjernen $(x^2 + x)$ derivert, altså $2x + 1$, [.] men husker ikke helt hva som skjer med selve kjernen. Ganget den bare med brøken, men det er nok feil.

Intervjuer: Men x'en i nevneren da, hvor kommer den fra?

Elev H: [..] Tenkte vel kanskje på den regelen jeg brukte i den forrige oppgaven, men føler egentlig at det er feil. [.] Husker egentlig bare at du ganger med kjernen derivert, det er jeg sikker på. Men det andre er vel feil.

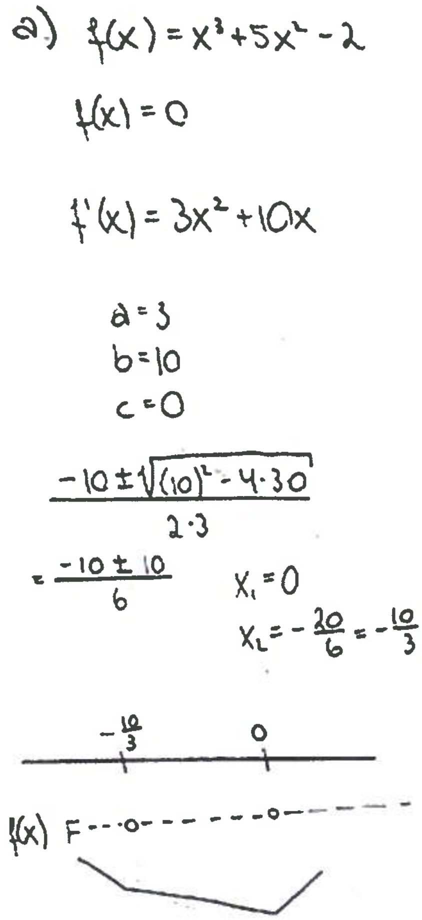
Samtalesekvens 19: elev H om løsningen på oppgave 2 a).

Vi ser at elev H taler om kjernen, som den har klart å identifisere, og at man må multiplisere brøken med kjernen derivert. Videre multipliserer eleven med kjernen igjen, før den dividerer på x. Eleven forklarer at den er usikker på hvorfor den gjør dette og at den tror egen løsning er feil. Selv om eleven har glemt kjerneregelen for logaritmefunksjonen og dermed fått feil svar, har den likevel fanget opp deler av essensen ved kjerneregelen, nemlig at man må multiplisere med kjernen derivert. Dette vitner om at eleven fremdeles har deler av kunnskapen og forståelsen integrert i minnet. Det at eleven tydeliggjør at den tror at svaret sitt er feil og at den er i stand til å identifisere *hva* som er feil i svaret, viser dessuten at eleven er i stand til å tenkte kritisk og bedømme pålitelighet, altså vurdere. Dette viser at eleven – til tross for å ha løst oppgaven feil – har kvaliteter som tilsier at den likevel kan befinne seg på et høyt taksonomisk nivå.

Elev C løste, i likhet med elev A, oppgave a) og c) ved å ta utgangspunkt i de samme formlene eleven brukte i oppgave 1. Eleven var likevel i stand til å løse b) ved hjelp av kvotientregelen. Resten av elevgruppen med samfunnsfaglig matematikk, altså elev B og D løste alle oppgavene riktig og viste dermed at de også behersket mer krevende, komplekse derivasjonsoppgaver. Det samme gjelder elevene med realfaglig matematikk, der tre av elevene løste alle oppgavene korrekt og én elev, elev H, løste a) feil, som vist over. Dette tyder på at flere av elevene har en god, instrumentell forståelse. Fordi oppgavene krever mer omfattende utregninger og konseptuell kunnskap – elevene må for eksempel være i stand til å identifisere kjerner – kan man også si at disse elevene tilfredsstiller kravene for å befinne seg – minst – på Webbs andre kunnskapsnivå; «skill/concept».

4.2.2.3 Oppgave 3

4.2.2.3.1 Oppgave 3 a)



Elevbesvarelse 5: løsning oppgave 3 a), elev A.

Intervjuer: Jeg ser at du setter f(x)=0, hvorfor gjør du det?

Elev A: Jeg tenker at jeg må finne nullpunktene til funksjonen, for da finner jeg ut av hvor den er stigende og synkende. [..] Og når jeg setter den lik null, vil jeg gjerne bruke abc-formelen for å da finne nullpunktene. [.] Men den (funksjonen) skal vel egentlig være opphøyd i andre og ikke tredje, så hvis jeg heller bruker den deriverte [...]. Da kan jeg jo bruke abc-formelen. Og da kan jeg bruke nullene til å sette inn i et sånn fortegnsskjema og se hvor den synker og stiger.

Intervjuer: Disse linjene du tegner da, hva er det de forteller?

Elev A: Denne (den stiplede) viser jo at den deriverte er negativ, på grunn av at du har $-\frac{10}{3}$. Og denne (den nederste) viser jo at funksjonen synker ganske

		fort før $-\frac{10}{3}$, litt mindre før 0, og at den stiger etter 0, for da blir den jo positiv.
Intervjuer:		Du sier at funksjonen synker litt mindre mellom $-\frac{10}{3}$ og 0. Hvordan har du kommet frem til det?
Elev A:		[..] Stigninga er jo fortsatt negativ, men ikke så negativ som før dette punktet $(-\frac{10}{3})$.

Samtalesekvens 20: elev A om løsning av oppgave 3 a).

Vi ser at eleven har derivert funksjonen, funnet nullpunktene til den deriverte – selv om den har skrevet at den finner nullpunktene til $f(x)$ – og laget en fortegnslinje. Den har derivert korrekt og funnet de korrekte nullpunktene, men som vi ser av elevbesvarelsen og samtalesekvensen, gir eleven et endelig svar som gir inntrykk av manglende forståelse av sammenhengen mellom funksjoner og dens deriverte. Fortegnslinjen viser nemlig at den deriverte er negativ overalt, med unntak av nullpunktene, mens linjen som illustrerer oppførselen til $f(x)$ viser at funksjonen stiger for $x \in (0, +\infty)$. Eleven har klart å derivere funksjonen, og viser dermed en viss forståelse av det instrumentelle aspektet ved derivasjon, men har tydelige mangler i forståelsen av den deriverte som konsept. Det at eleven også bytter fra å finne nullpunktene til funksjonen til å finne nullpunktene til den deriverte, forsterker inntrykket av at eleven mangler forståelse av den deriverte som konsept. Det tyder dessuten at eleven mangler kritisk sans og forkaste muligheter kun fordi andre ting «passer bedre» - og ikke basert på kunnskap og forståelse.

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 2$$

a) $f'(x) = 3x^2 + 10x$

$$f''(x) = 6x + 10$$

Elevbesvarelse 6: løsning oppgave 3 a), elev B.

Elev B:	Nei. Nei. Nei. [...] Husker ikke dette i det hele tatt. Jeg tenker jo på derivasjon. [..] Regner med at man må dobbelderivere.

Intervjuer: Hva er det den dobbeltderiverte viser eller forteller noe om?

Elev B: Det husker jeg ikke.

Samtalesekvens 21: høyttenkning under løsning av oppgave 3 a), elev B.

Fra samtalesekvensen over ser vi at elev B tar i bruk derivasjon og dobbeltderivasjon for å løse oppgaven. Vi ser at eleven utfører derivasjonene korrekt og dermed har en viss prosedyremessig forståelse av begrepene, men at eleven ikke er i stand til å gjøre rede for den dobbeltderiverte som konsept. Eleven mangler altså konseptuell forståelse av den dobbeltderiverte – og for den deriverte, som tross alt forteller hvor grafen er synkende og stigende. Eleven benytter seg av prosedyrer uten tilstrekkelig forståelse av hva de innebærer, som ikke bare viser at den har en mangelfull forståelse, men også at den har manglende evne til å kritisk vurdere egne løsninger og resonneringer.

$$f'(x) = 3x^2 + 10x$$

$$\frac{\cancel{x}(3x+10)}{\cancel{x}} = \frac{0}{x}$$

$$3x + 10 = 0$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{-10}{3}$$

$$x = -\frac{10}{3}$$

Elevbesvarelse 7: løsning oppgave 3 a), elev C.

Elev C: Du må jo finne ut hvor den deriverte er positiv og negativ, for da finner du jo hvor den (funksjonen) synker (når den deriverte er negativ) og stiger (når den deriverte er positiv). Så du deriverer funksjonen og får jo $3x^2 + 10x$, også må du sette den lik null. [....] Da får du at $x = -\frac{10}{3}$. [...]

Intervjuer: Du ser usikker ut. Kan du forklare hva det er du ikke forstår, eller hva som gjør at du stopper opp?

Elev C: Ja [..], nei jeg burde vel fått to x-verdier, for $f(x)$ er jo en tredjegradsfunksjon, så den skal vel ha både toppunkt og bunnpunkt. [..] Men det får den jo ikke nå, hvis den deriverte bare har ett nullpunkt. Den

(den deriverte) er jo en annengradsfunksjon, så den bør vel ha to nullpunkter. [...] Må ha gjort noe feil, men gidder ikke å løse den på nytt.

Samtalesekvens 22: høyttenkning under løsing av oppgave 3 a), elev C.

Selv om elev C ikke når frem til en endelig løsning, viser elevbesvarelsen og samtalesekvensen at eleven har en viss forståelse av funksjoner, den deriverte og sammenhengen mellom dem – til tross for at svaret eleven avga i seksjon 4.2.1.2 gir et annet inntrykk. Eleven viser med andre ord at den ikke bare har en instrumentell forståelse av funksjoner og den deriverte, men at den også har en viss relasjonell forståelse av emnene. Vi ser at eleven deriverer riktig, beskriver og forklarer underveis. Eleven viser dessuten at den er i stand til å vurdere og være kritisk til egne løsninger. Den resonnerer og begrunner hvorfor løsningen må være feil og fremviser dermed kvaliteter som karakteriserer elever på Webbs tredje kunnskapsnivå, «strategic thinking», og elever på et høyt taksonomisk nivå, dersom man tar Blooms taksonomi som utgangspunkt.

Som elevsvarene over viser, kom tre av elevene med samfunnsfaglig matematikk frem til feil svar og/eller oppga ikke et endelig svar. En av dem, elev C, ble stoppet av en feil i utregningene underveis, men viste likevel at den egentlig har den nødvendige kunnskapen for å løse oppgaven. Elev D, med samfunnsfaglig matematikk, og alle elevene fra den andre elevgruppen løste oppgaven riktig og ga tilfredsstillende forklaringer underveis i problemløsingen. De viste dermed at de ikke bare har en instrumentell forståelse av derivasjon, men at de også har en relasjonell forståelse av temaet. Elevene forklarte, beskrev og resonnerte underveis, og viste dermed at de besitter enkelte av karakteristikkene som karakteriserer elever på et høyt taksonomisk nivå og på Webbs høyere kunnskapsnivåer.

4.2.2.3.2 Oppgave 3 b)

b) $f''(x) = 2 \cdot 3x + 10$

$= \underline{\underline{6x + 10}}$

Elevbesvarelse 8: løsning oppgave 3 b), elev A.

Intervjuer: Jeg ser at du dobbeltderiverer, kan jeg spørre hvorfor?

Elev A: [..] Tangenten er vel den dobbeltderiverte. Jeg er ganske sikker på det.

Samtalesekvens 23: elev A om løsning av oppgave 3 b).

I samtalesekvens 11 så vi at elev A beskriver tangenter som den maksimale veksten. En mulig forklaring som ble trukket frem i seksjon 4.2.1.3, var at elevene har lært om *vendetangenter*, altså tangenter i vendepunktene, der veksten er minimal eller maksimal, og at eleven dermed overgeneraliserer denne kunnskapen og tilegner *alle* tangenter de samme egenskapene. For å finne denne vendetangenten, er man blant annet nødt til å dobbeltderivere funksjonen, og det virker dermed som at eleven også her tar utgangspunkt i at alle tangenter er vendepunkter med maksimal/minimal vekst. Eleven er dermed i en tydelig misoppfatning knyttet til tangenter. Elevbesvarelsen med tilhørende forklaring gir inntrykk av manglende og feilaktig forståelse og at eleven trekker ugyldige slutninger basert på denne forståelsen.

b) $y = ax + b$

$$f''(x) = 6x + 10$$

Elevbesvarelse 9: løsning oppgave 3 b), elev A.

Elev B: [...] Det er vel kanskje det (tangenten) den dobbeltderiverte er. For tangenten er jo en rett linje, så den må vel være på formen $y = ax + b$, og da passer jo det med det (løsningen oppgitt i a), $f''(x) = 6x + 10$). [..] Så tangenten må jo være $y = 6x + 10$. Det gir jo mening.

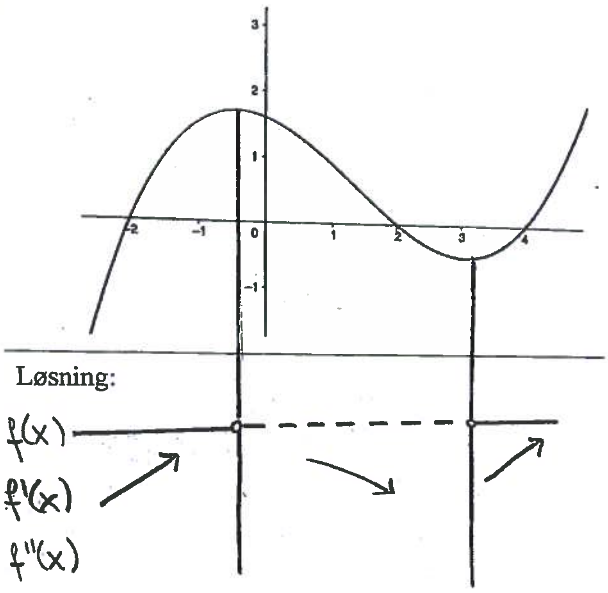
Samtalesekvens 24: høyttenking under løsning av oppgave 3 b), elev B.

I likhet med elev A, løste også elev B og C oppgave b) ved å dobbeltderivere funksjonen. Elev C forklarte at den «bare gjorde noe», mens elev B avga forklaringen gjengitt i samtalesekvens 24. Ut ifra samtalesekvensen ser vi at eleven begrunner svaret sitt med at tangenter er rette linjer og at rette linjer er på samme form som den dobbeltderiverte den fant i a). Svaret er forankret i en logisk tankegang i forhold til elev C, som «bare gjorde noe», og ved å trekke frem tangentenes form, viser elev B at den – til tross for å ha fått feil svar – har utviklet en viss forståelse av tangenter. Denne forståelsen er riktignok mangelfull, og det er tydelig at eleven ikke har utviklet en relasjonell forståelse av begrepet.

Mens elevene A, B og C, som alle tar samfunnsfaglig matematikk, løste oppgaven feil ved hjelp av dobbeltderivasjon, viste de resterende elevene at de hadde langt bedre forståelse av tangenter som konsept og for de prosedyrene som må utføres for å finne tangenters likninger. De ga gode beskrivelser og forklaringer underveis i oppgaveløsningen og viste dermed gode evner til å formidle både kunnskap og forståelse. Èn av elevene, elev H, kom riktignok ikke frem til den endelige likningen fordi den ikke husket ettpunktsformelen, men eleven ga likevel en grundig beskrivelse for hvordan denne likningen kan finnes grafisk. Til tross for at eleven ikke kom frem til den endelige likningen, kan den derfor likevel sies å ha god forståelse av temaet. Det at eleven var i stand til å lage en alternativ «rute» for å komme til målet, viser dessuten tilpasningsdyktighet, smidighet og evne til å utvikle egne strategier; evner som karakteriserer elever på høyere kunnskapsnivåer.

4.2.2.4 Oppgave 4

4.2.2.4.1 Oppgave 4 a)



Elevbesvarelse 10: løsning oppgave 4 a), elev A.

Intervjuer: Jeg ser at du skriver $f(x)$ og tegner opp noen linjer. Kan du fortelle hva du tenker her?

Elev A: Husker jo at det er noe med toppunkt og bunnpunkt å gjøre. [..] Og den har jo toppunkt her og bunnpunkt her. Også er den jo først positiv, så går den nedover, så derfor bruker jeg den stripete linja, også går den oppover til slutt. [...] $f'(x)$ [.], hvordan var det nå igjen? Er det der man bruker de pilene?

Intervjuer: Hva er det pilene forteller?

Elev A: Er ikke det hvor den stiger og synker?

Intervjuer: Hvor hva stiger og synker?

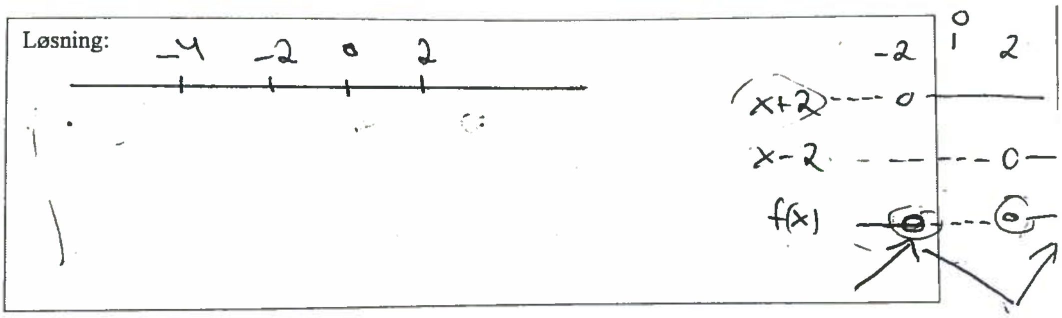
Elev A: [..] Funksjonen?

Intervjuer: Og fortegnslinja til $f''(x)$ da?

Elev A: Aner ikke.

Samtalesekvens 25: elev A om løsningen på oppgave 4 a).

Fra elevbesvarelsen over, ser vi at elev A, for det første, ikke har forståelse av hva en fortegnslinje viser. For det andre, viser den at mangelfulle evner og kompetanse innen funksjonsdrøfting, da svaret eleven avgir er feil. Eleven tegner opp en fortegnslinje og fortsetter med å tegne opp piler, som ofte brukes i oppgaver hvor man bruker den derivertes fortegnslinje for å avgjøre hvor funksjonen er stigende og synkende. Det kan dermed virke som at eleven har opparbeidet en viss forventning til hvordan fortegnsskjemaer skal se ut, og at de – uansett rekkefølge og sammenheng – skal inneholde en fortegnslinje og tilhørende piler. Eleven viser dermed at den ukritisk bruker kjente løsningsmetoder i nye sammenhenger, der de ikke er gjeldende uten modifiseringer. I samtalesekvensen forteller dessuten eleven at pilene viser hvor funksjonen stiger, selv om den i den skriftlige besvarelsen sier at det er den deriverte av funksjonen som indikeres av pilene. Eleven viser dermed at den også er inkonsekvent i forklaringene.



Elevbesvarelse 11: løsning oppgave 4 a), elev B.

Elev B: Er dette liksom $f(x)$? Også skal jeg tegne fortegnslinja? [..] Jeg klarer ikke å sette opp det.

Intervjuer: Husker du hva fortegnslinjene viser?

Elev B: Man bruker det når man for eksempel skal vise når noe stiger og synker og nullpunkter. [...] Jeg skjønner ikke helt. [...]

Intervjuer: Jeg ser at du skriver opp $x + 2$ og $x - 2$ og setter opp fortegnslinjer for dem, hvorfor gjør du det?

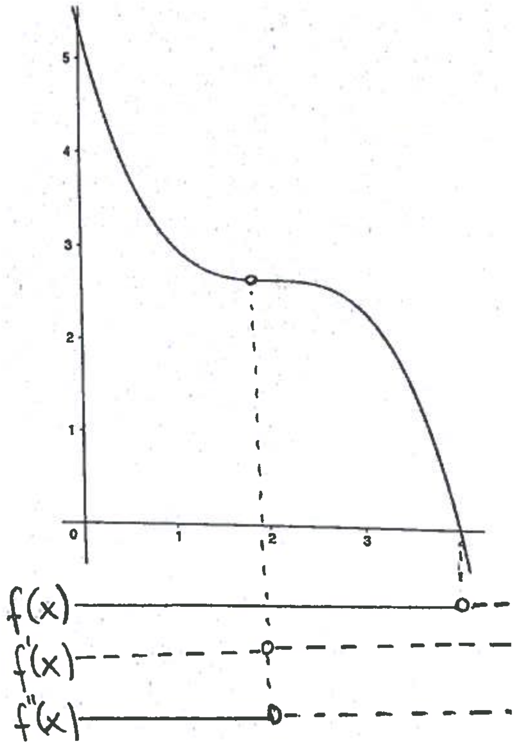
Elev B: Nei, jeg må jo ha de nullpunktene. Så da finner du jo $f(x)$. [..] Jeg skjønner ingenting. [.] Nei, jeg tror vi bare må hoppe over dette.

Samtalesekvens 26: høyttenking under løsning av oppgave 4 a), elev B.

Forklaringene gitt i samtalesekvensen og fortegnsskjemaet til høyre i elevbesvarelse 11 tyder på at elev B, i likhet med elev A, ikke har tilfredsstillende kompetanse innen funksjonsdrøfting. Som vi ser, forsøker eleven å finne et uttrykk for grafen. Med en solid, relasjonell forståelse av sammenhengen mellom funksjoner, dens deriverte og dobbeltderiverte, ville man derimot kunne løst oppgaven ved å kun studere grafen. Hverken elev A eller B fremviser her god forståelse av funksjoner og den deriverte, og begge avgir svar som tyder på at de er låst til og avhengige av kjente algoritmer og fremgangsmåter.

De resterende seks elevene løste derimot oppgaven korrekt og stort sett uten problemer. Elevene fremviste gode ferdigheter innen funksjonsdrøfting og viste at de hadde en viss forståelse av både den deriverte og den dobbeltderiverte. De brukte begreper som *krumning* og *vendepunkt* og ga gode forklaringer underveis. Samtidig er denne funksjonen ganske «enkel», med tydelige topp-, bunn- og vendepunkter, og den er en kjent oppgavetype for elevene. Funksjonstypen er en gjenganger i oppgavene elevene arbeider med, og oppgaven stiller dermed ikke krav til at elevene skal kunne løse ukjente oppgaver. Hvordan resultatene påvirkes når det stilles høyere krav til analysering, forståelse og utforskning, diskuteres i seksjonen under, der empirien fra oppgave 4 b) analyseres.

4.2.2.4.2 Oppgave 4 b)



Elevbesvarelse 12: løsning oppgave 4 b), elev D.

Elev D: [.] Oi, nei, dette går jo ikke.

Intervjuer: Hvorfor ikke?

Elev D: Den så bare så vanskelig ut, [...] men den er jo kanskje ikke det egentlig.

Intervjuer: Hvorfor så oppgaven vanskelig ut?

Elev D: [.] Den har jo ingen toppunkt og sånt, men det trenger man jo ikke. Ikke egentlig. (...)

Samtalesekvens 27: høyttenking under løsning av oppgave 4 b), elev D.

Mens både elev A og B forsøkte å løse oppgave 4 a), valgte begge å hoppe over oppgave b). De mente at dersom de ikke fikk til a), som tross alt var typisk funksjon elevene hadde studert tidligere, ville de heller ikke få til b). Elev D vurderte også å hoppe over denne oppgaven, men etter å ha studert den en stund, innså eleven at den hadde alle de nødvendige verktøyene for å løse oppgaven likevel. Etter å i utgangspunktet ha sett på oppgaven som umulig å løse, valgte eleven å bruke tid på å prosessere, analysere og utforske funksjonen, og klarte til slutt å løse oppgaven riktig – uten problemer og med gode forklaringer. Eleven fremviste dermed både relasjonell forståelse og karakteristikker som beskriver elever på høyeste kompetansenivå. Det samme gjelder også de resterende fem elevene i utvalget, som også løste oppgaven korrekt.

4.2.2.5 Oppgave 5

Som nevnt i seksjon 4.1.2.4, er ikke visse faktakunnskaper og trening i standard løsningsteknikker tilstrekkelig for å kunne løse oppgave 5. Oppgaven blir dermed mer krevende i den forstand at den forutsetter at elevene er i stand til å analysere og resonnere seg frem til mulige løsninger – og hvilke løsninger som ikke er mulige. Selv om oppgavetypen var ukjent for de fleste elevene, valgte alle den samme fremgangsmåten; eliminering. Resultatene av denne elimineringsprosessen var derimot svært varierende.

Elev D: Oi. [..] Hvis grafen skal være større enn 0 i $x = -1$, da kan det nok ikke være D. [.] Den er jo negativ og går enda mer nedover før denne (y-aksen), så regner med at den er negativ i -1 og. [...] Men nå vet jeg ikke egentlig mer, for det er jo vanskelig når du ikke vet akkurat hvor tallene er. [..] Husker heller ikke de dobbeltderivert-greiene, så er vel ikke vits.

Samtalesekvens 28: høyttenking under løsning av oppgave 5, elev D.

To av elevene, elev A og D, eliminerte kun ett av alternativene; alternativ D. Begge hadde liknende forklaringer. Samtalesekvensen over gjengir høyttenkingen til elev D under problemløsingsprosessen, og vi ser at eleven avsluttet elimineringsprosessen fordi den ikke visste de eksakte verdiene på x-aksen og fordi den ikke hadde kunnskap om den dobbeltderiverte. For å løse oppgaven – eller i det minste eliminere enda en graf – trengs ikke eksakte verdier, men en solid, relasjonell forståelse av funksjoner, deres deriverte og dobbeltderiverte. Elev D, i likhet med elev A, viser dermed at de ikke har tilstrekkelig forståelse av disse temaene. Elev I eliminerte både alternativ D og B. Eleven uttalte at den hadde glemt alt om den dobbeltderiverte og ga opp på grunn av dette. Dermed befinner også elev I seg i en situasjon hvor dens relasjonelle forståelse ikke er tilstrekkelig utviklet.

Elev B: (...) Jeg regner jo med at alle tallene her ($x = -1, x = 3, x = 5$) er med i bildet, [.] så hvis grafen skal være negativ i $x = 3$, kan det vel ikke være denne (B). [..] Og hvis den ($f'(5)$) skal være 0, da må den vel ha et toppunkt [.] (til høyre for bunnpunktene til grafene i A og C). [..] Så da kan det jo ikke være A heller.

Samtalesekvens 29: høyttenking under løsning av oppgave 5, elev B.

De resterende fem elevene valgte alle det riktige alternativet, alternativ C. Selv om alle kom frem til det korrekte alternativet, var det likevel én av dem som trakk denne slutningen på sviktende grunnlag. Som samtalesekvensen over viser, utelukker elev B alternativ A fordi grafen ikke har noe toppunkt til høyre for bunnpunktet. Eleven utelukker dermed muligheten for at $f'(5) = 0$ kan gi et såkalt terrassepunkt, selv om dette også er en mulighet. Dette tyder på at eleven kun assosierer den deriverte lik null med topp- og bunnpunkt – og ikke med at funksjonens vekst er lik null i et gitt punkt. Hadde eleven derimot hatt denne forståelsen av den deriverte, ville den ikke nødvendigvis utelukket alternativ A på det samme grunnlaget.

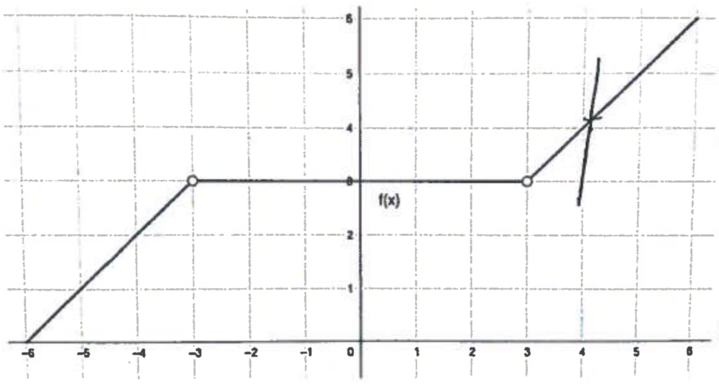
I motsetning til elev B, ga de fire andre elevene som valgte alternativ C, altså elev C, E, G og H, gode, velbegrunnede og reflekterte analyseringer og resonneringer under problemløsningen. De viste at de hadde en fullstendig, relasjonell forståelse av funksjoner, deres deriverte og den dobbeltderiverte. Dessuten viste de at de var tilpasningsdyktige og evnet å utvikle egne løsningsstrategier. Resultatene fra problemløsingen viser altså at elevene har karakteristikker som samsvarer med Webbs høyere kunnskapsnivåer; «strategic thinking» og «extended thinking».

4.2.2.6 Oppgave 6

Oppgave 6 inneholder to deloppgaver, som ikke var nummerert i oppgaveheftet. For å enklere skille mellom de to deloppgavene og de tilhørende resultatene, har jeg valgt å først presentere resultatene fra den første deloppgaven; «Velg et punkt på grafen og skisser tangenten i dette punktet». Deretter presenteres resultatene fra den siste deloppgaven; «Skisser grafen til $f'(x)$».

4.2.2.6.1 Oppgave 6, del 1

Under intervjudelen av innsamlingen fikk elevene muligheten til å bruke skisser for å supplere de muntlige forklaringene. Da to av elevene, elev B og E, skulle tegne en tangent, tegnet de først opp et koordinatsystem og en lineær funksjon, før de tegnet en tangent som krysset den lineære funksjonen, som vist i elevbesvarelse 1. Oppgave 6 tester ikke bare elevenes forståelse av tangenter (og den deriverte), men virker samtidig som et verktøy for å vurdere reliabilitet i dataene innhentet om elevenes forståelse av tangenter. Som nevnt tidligere, ble to av elevene – blant dem elev E – «kuttet» fra problemløsingsdelen av innsamlingen på grunn av Covid-19-situasjonen. Det blir derfor vanskelig å avgjøre reliabiliteten til dataene innhentet fra elev E.



Elevbesvarelse 13: løsning oppgave 6, del 1, elev B.

Elev B, på den andre siden, deltok under hele innsamlingen. Som vi ser av elevbesvarelsen over, samsvarer svaret med skissen og beskrivelsen av tangenter gitt i seksjon 4.2.1.3. Dette tyder på at dataene i en viss grad er reliable. Dermed forsterkes også inntrykket som ble gitt under intervjudelen av innsamlingen, nemlig at eleven ikke har forstått sammenhengen mellom funksjoner, den deriverte og deres tangenter. Essensen i denne sammenhengen ligger tross alt i at funksjonen og tangenten har samme stigningstall i tangeringspunktet, som ikke er mulig dersom de to rette linjene skjærer hverandre.

Elev A: [..] Det (å tegne tangenten) går jo ikke.

Intervjuer: Hvorfor går det ikke an å tegne tangenten?

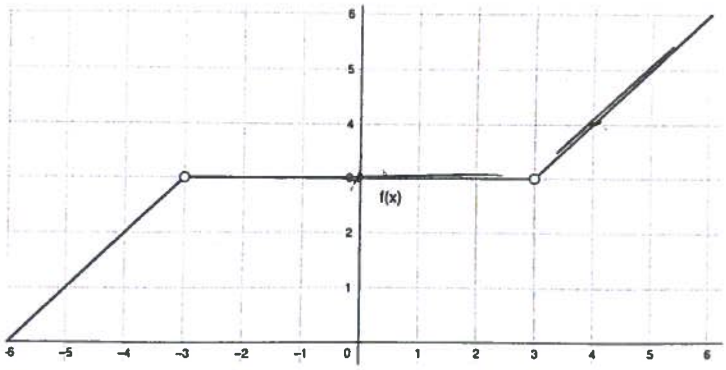
Elev A: Nei, du må en likning. [...] Her er jo bare grafen, men jeg kan jo ikke dobbeltderivere den. [..] Jeg må jo vite likninga.

Intervjuer: Hvorfor vil du dobbeltderivere funksjonen?

Elev A: For å finne den tangenten.

Samtalesekvens 30: høyttenking under løsning av oppgave 6, del 1, elev A.

Mens elev B skisserte en tangent som krysser grafen, mente elev A at det ikke var mulig å tegne en tangent. Eleven forklarte dette utsagnet som vist over, og vi ser at eleven ytterligere forsterker inntrykket av at den er i en misoppfatning knyttet til tangenter, der tangenter er den dobbeltderiverte. Svaret viser dessuten at eleven ikke har tilstrekkelig kunnskap og forståelse av lineære funksjoner. Funksjonsuttrykket for de ulike delene av grafen kan tross alt enkelt finnes ved å studere grafen, og dermed kunne eleven dobbeltderivert uttrykket. Svaret ville riktignok blitt feil uansett, men hadde eleven klart å finne uttrykkene grafisk, hadde den likevel fremvist mer forståelse av funksjoner enn den gjorde i besvarelsen sin.



Elevbesvarelse 14: løsning oppgave 6, del 1, elev G.

Elev G: Skal jeg tegne en tangent til denne?

Intervjuer: Ja.

Elev G: Men det blir jo bare en rett strek som er lik som linja selv. [.] Hvis du tegner en tangent her (etter $x = 3$), blir det ei linje sånn her, med samme stigning som grafen der (i samme punkt). Og hvis du skal ha en her (der funksjonen ikke stiger), blir det vel bare ei vannrett linje sånn som dette.

Intervjuer: Jeg ser at du tegner linjene litt over grafen, kan du fortelle hvorfor?

Elev G: Er bare ikke så god til å tegne, men de skal være på grafen egentlig.

Intervjuer: Hvordan vet du at tangenten er lik linja da?

Elev G: Fordi tangenten og funksjonen skal ha samme stigning der de tangerer, [..] og her (i intervallene) er jo stigninga konstant. Eller, her (for $x \in (-3,3)$) stiger den (grafen) jo ikke, så da stiger heller ikke tangenten her noe. Så tangentene må ligge oppå grafen. Jeg kan ikke skjønne hvordan det ikke må være sånn.

Samtalesekvens 31: elev G under løsning av oppgave 6, del 1.

Fra besvarelsen over, ser vi at elev G tegnet inn to tangenter som ligger oppå selve grafen. Vi ser at eleven forklarer dette med at tangentene har samme stigningstall som funksjonen i tangeringspunktet, og fordi de ulike intervallene på grafen har konstant stigning, blir tangentene i et bestemt intervall liggende oppå selve grafen i det samme intervallet. Også de resterende fem elevene i utvalget ga liknende skisser og forklaringer. Som flere av elevene bemerket underveis, var dette en litt «merkelig» og ny type oppgave for dem. De færreste hadde vært borti oppgaver hvor de skulle tegne inn tangenter til lineære funksjoner, og flere ble dermed nølende i arbeidet. De valgte likevel å følge fornuften og den kunnskapen de hadde om tangenter, og klarte dermed å løse oppgaven på en god måte. Elevene viste dermed både tilpasningsevne og forståelse av den deriverte og tangenter til funksjoner med konstant vekst.

4.2.2.6.2 Oppgave 6, del 2

Elev B: Ingen idé. Ikke i det hele tatt.

Intervjuer: Hva er det du synes er vanskelig med å skulle løse oppgaven?

Elev B: At $f(x)$ ikke liksom er [.] definert. Det er ingen funksjon. Hadde det stått at den (funksjonen) var sånn og sånn heller. [...] For jeg klarer ikke å lese av grafen.

Intervjuer: Kan du klare å løse oppgaven uten et bestemt uttrykk for $f(x)$?

Elev B: [....] Jeg skjønner ikke helt, for disse linjene (funksjonen i intervallene $x \in (-6,-3)$ og $x \in (3,6)$) stiger jo med 1, men den andre der [..]. Nei, jeg vet ikke.

Samtalesekvens 32: elev B om oppgave 6, del 2.

På den andre deloppgaven var det tre elever som leverte inn blankt; elev A, B og C. Elev A og B hadde svært liknende forklaringer, og begge trakk frem mangelen på et bestemt uttrykk for $f(x)$ som årsak for at de ikke kunne løse funksjonen. Dersom elevene hadde hatt tilpasningsevne og tilstrekkelig forståelse av lineære funksjoner og kompetanse innen funksjonsdrøfting, kunne de funnet uttrykk for grafene i de bestemte intervallene. Dette er derimot ikke en nødvendig prosedyre, for med en god forståelse av sammenhengen mellom lineære funksjoner, som tross alt har konstant stigning, og deres deriverte, ville elevene vært i stand til å finne den deriverte ved å studere de tre intervallene hver for seg.

Elev C: [...] Det må jeg si at jeg ikke vet hvordan jeg gjør. Jeg kan ikke huske å ha gjort det (løst liknende oppgaver). [...]

Intervjuer: Hva er det $f'(x)$ viser?

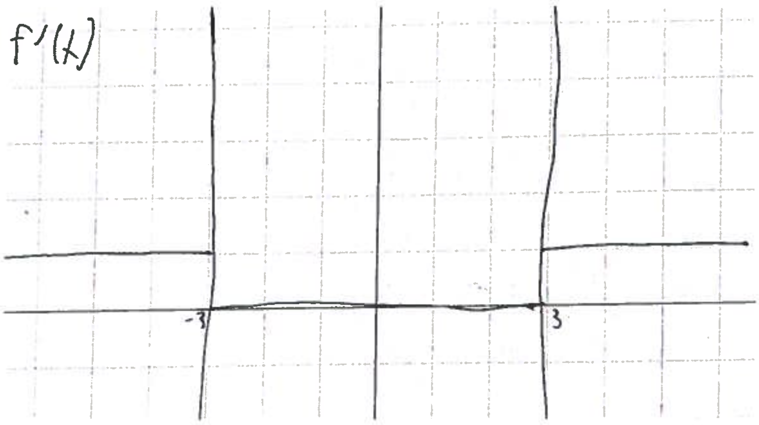
Elev C: Hvor den (funksjonen) vokser og går ned [.] og ikke vokser, altså står stille.

Intervjuer: Kan du fortelle noe om hvordan funksjonen oppfører seg?

Elev C: Den går jo iallfall ikke nedover. Den vokser jo først, også har den et terrassepunkt før den vokser igjen. Men jeg vet ikke hvordan jeg skal tegne det som en graf liksom. Hva skjer med de to punktene der grafen ikke er definert? Jeg har aldri tegnet noe sånt før, så jeg vet ikke.

Samtalesekvens 33: elev C om oppgave 6, del 2.

Som samtalesekvensen over viser, ser vi at elev C sliter med å løse oppgaven. Den husker ikke å ha løst liknende oppgaver tidligere, virker dermed å være låst til kjente algoritmer og fremgangsmåter. I håp om å få et bedre inntrykk av elevens forståelse og for å teste tidligere innhentet datas reliabilitet, valgte jeg å spørre eleven om hva den deriverte viser. Eleven gir en tilfredsstillende beskrivelse av den deriverte, men sliter fremdeles med å skissere grafen. Dette tyder på at eleven mangler en godt utviklet, relasjonell forståelse av den deriverte. Eleven spør også om hva som skjer i to punktene der grafen ikke er definert, som viser at eleven ikke har forstått at kontinuitet er en betingelse for deriverbarhet, og at $f'(x)$ derfor ikke vil være definert i de to punktene.



Elevbesvarelse 15: løsning oppgave 6, del 2, elev F.

Elev F: [..] Jeg ser jo at stigninga er den samme før og etter dette partiet (intervallet gitt av $x \in (-3,3)$), og den stiger med 1 pr. enhet. Den deriverte funksjonen blir jo da bare den rette linja i y=1 i disse områdene. [.] Her (i intervallet der $x \in (-3,3)$) er funksjonen flat, så da må jo den deriverte være lik null. Så den ligger bare på x-aksen i det området.

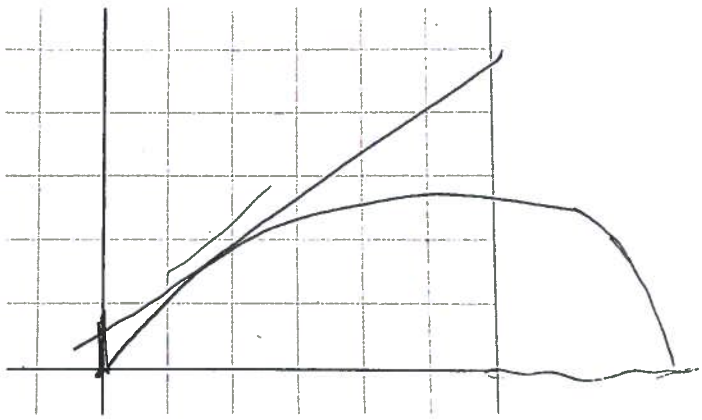
Intervjuer: Hva skjer med grafen til den deriverte i disse punktene ($x = -3, x = 3$) da?

Elev F: Siden funksjonen ikke er derivert her, er jo heller ikke den deriverte det. Det hadde den (den deriverte) vel ikke vært uansett om den (funksjonen) var det (definert), siden det er knekkpunkter. Så den deriverte gjør et hopp i de punktene.

Samtalesekvens 34: høyttenking under løsing av oppgave 6, del 2, elev F.

Samtalene med elev A, B og C ga inntrykk av at elevene manglet relasjonell forståelse av den deriverte, evne til å resonnere, analysere og å strategisk utvikle egne løsningsmetoder. Elevbesvarelsene og de tilhørende forklaringene til de resterende elevene, deriblant elev F, som vist i besvarelsene over, ga derimot uttrykk for det motsatte. Elevene ga uttrykk for en solid, relasjonell forståelse av den deriverte, der de også viste forståelse av kontinuitet som betingelse for å kunne derivere funksjoner. Disse elevene viste at de, i møtet med ukjente oppgavetyper, var i stand til å utvikle egne løsningsstrategier, undersøke, resonnere og analysere seg frem til den korrekte løsningen. De fremviste dermed karakteristikker som karakteriserer elever på Webbs høyeste kunnskapsnivå.

4.2.2.7 Oppgave 7

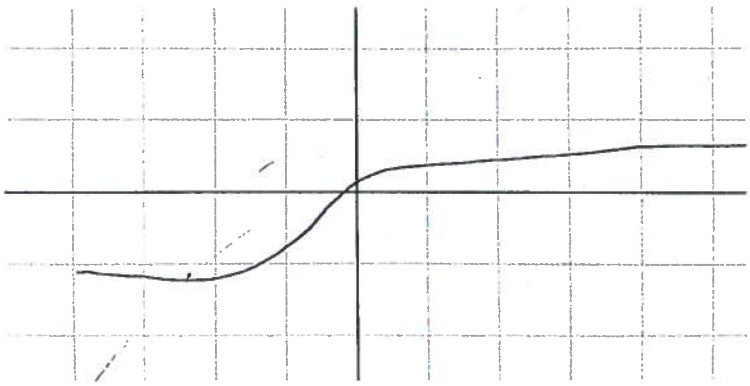


Elevbesvarelse 16: løsning oppgave 7, elev B.

Elev B: [...] Vet ikke helt. [..] Tenker kanskje at hvis du har en tangent, så må den gå oppover sånn (som vist i elevbesvarelsen over), hvis den skal være positiv. [..] Så grafen må være positiv [...], nei, gå oppover, stige. [...] Avtakende. [..] Da må den (funksjonen) vel gå nedover igjen etter hvert.

Samtalesekvens 35: høyttenking under løsning av oppgave 7, elev B.

Oppgave 7 forutsetter at elevene ikke bare har forståelse av tangenter og sammenhengen mellom tangenter og den tilhørende funksjonen, men at de dessuten har forståelse av grenseverdier. To av elevene, elev A og B, besvarte denne oppgaven på samme måte og avga liknende forklaringer. Jeg har her valgt å analysere elev Bs besvarelse, som er presentert i elevbesvarelsen og samtalesekvensen over. Besvarelsen gir inntrykk at eleven mangler forståelse av grenseverdier, som er essensielt for å kunne løse oppgaven. Vi ser at eleven tolker avtagende som negativ og dermed tegner en graf som er synkende når man beveger seg i positiv retning på x-aksen. I tillegg til mangelfull forståelse, ser vi dessuten at eleven ikke evner å analysere og vurdere eget arbeid. Oppgaveteksten konstaterer nemlig at tangentene har positivt stigningstall for *alle* verdier av x, og grafen eleven har tegnet, tilfredsstiller ikke dette kravet. Dersom eleven hadde hatt en bedre forståelse og mer solid matematisk kompetanse, ville den vært i stand til å identifisere denne selvmotsigelsen. Vi ser dessuten at eleven har tegnet inn en av funksjonens tangenter korrekt. Eleven har tidligere tegnet og forklart tangenter som rette linjer som skjærer grafen, og det blir dermed tydelig at eleven er inkonsekvent i forståelse og forklaringer.



Elevbesvarelse 17: løsning oppgave 7, elev D.

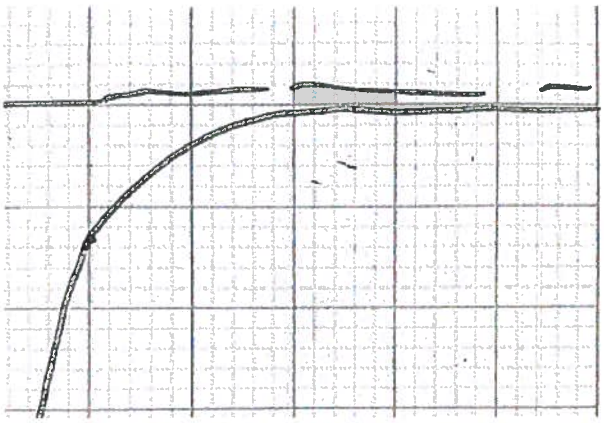
Elev D: [...] Tenker jo egentlig på en bue, litt som en annengradsfunksjon, men da synker den jo. Så det går vel ikke. [..] Men hvis jeg tegner sånn her (som vist over), vil jo stigninga være positiv, men den blir jo mindre og mindre bortover her (i positiv retning på x-aksen). Den (grafen) på en måte stabiliserer seg her på toppen.

Intervjuer: Hvordan oppfører grafen seg i området før partiet med brattere stigning?

Elev D: Oi, der skal det egentlig ikke gå nedover, men være mer stabilt sånn som på toppen.

Samtalesekvens 36: høyttenking under løsning av oppgave 7, elev D.

I likhet med elev B, ser vi at også elev D var inne på tanken om at funksjonen måtte ha form som en annengradsfunksjon. I motsetning til elev B, skjønte elev D at funksjonen i så fall ville være synkende for noen verdier av x, og eleven avfeide dermed denne muligheten. Dette viser at eleven er kritisk i arbeidet med matematikk og at den til en viss grad er i stand til å vurdere og analysere eget arbeid. Som elevbesvarelsen og samtalesekvensen over viser, ser vi at grafen stabiliserer seg mot en viss grenseverdi. Eleven har altså forstått at stigningstall kan være avtakende uten å være negative og viser dermed forståelse av både tangenter og grenseverdier. Selv om eleven viser at den besitter en del kunnskap og forståelse av temaet, er svaret den avgir feil. Elevbesvarelsen oppfyller bare delvis kriteriet om at stigningstallet skal være avtagende når man beveger seg i positiv retning på x-aksen. Vi ser at stigningen er tilnærmet lik null i området både før og etter den bratte stigningen, som vil si at stigningstallet til grafen må være økende frem til vendepunktet. Der eleven innledningsvis viste evne til å kritisk vurdere eget arbeid, viste den altså ikke den samme kompetansen avslutningsvis.



Elevbesvarelse 18: løsning oppgave 7, elev I.

Vi har sett at elev A, B og D, som alle tar samfunnsfaglig matematikk, tegnet skisser og avga forklaringer som ikke tilfredsstilte de to kravene som ble stilt til funksjonen. De resterende fem elevene løste derimot oppgaven på en måte som gjorde at grafene tilfredsstilte begge krav. Blant dem var elev I, som skisserte grafen og den tilhørende asymptoten som vist over. Elevene brukte begreper som «grenseverdi» og «horisontal asymptote» og beskrev hvordan grafen vil nærme seg denne linjen, altså y-verdien, etter hvert som x går mot uendelig, men at den aldri vil krysse linjen. To av elevene ga dessuten relevante eksempler og trakk frem at grafen kunne representere utviklingen av en dyreart, som stabiliserte seg mot bæreevnen.

I arbeidet med denne oppgaven, viste altså fem av elevene at de har en solid relasjonell forståelse av funksjoner, deres tangenter og grenseverdier. Elevene er stort sett vant til å arbeide med oppgaver der de blir gitt en funksjon $f(x)$ og må bruke denne funksjonen til å si noe om dens tangenter. I denne oppgaven kreves det derimot at de er i stand til å gå motsatt vei. Elevbesvarelsene viser dermed at disse fem elevene er tilpasningsdyktige, i stand til å utvikle egne løsningsstrategier og prosessere og analysere informasjon på en god måte. Skissene og de tilhørende forklaringen viser med andre ord at de fem elevene, elev C, F, G, H og I, har god relasjonell forståelse og karakteristikker som beskriver elever på høyere kunnskapsnivåer.

5.0 Diskusjon

Hensikten med dette prosjektet var å undersøke hva slags forståelse elever med fagene S2 og R2 har for begrepene *den deriverte* og *tangenter* og for sammenhengen mellom dem. Er denne forståelsen *instrumentell* eller *relasjonell*? Har elevene utviklet et godt nok begrepsapparat, slik at de kan anvende gammel kunnskap i nye situasjoner, eller er de låst til kjente oppgaver og situasjoner? Og til slutt; er det en forskjell i elevenes forståelse på tvers av fagene?

Forskningen er basert på en innsamling der fem/fire elever fra hvert fag har bidratt. I begge fagene har funksjoner og funksjonsdrøfting en sentral plass, men temaene formidles ulikt i både lærebøker og undervisning. Det vil derfor være interessant å se på elevenes forståelse på tvers av fagene. Ved hjelp av de kvalitative innsamlingsmetodene intervju og observasjon, forsøkte jeg å få et bedre bilde av elevenes forståelse innen temaet funksjonslære. For å se hvordan elevene anvendte kunnskapen i praksis, ba jeg dem løse et sett med oppgaver, som ble presentert og analysert i seksjon 4. Noen av disse oppgavene, som oppgave 1 og 2, krevde kun at elevene husket formler og var utformet i tråd med eksempler fra elevenes lærebøker. Andre oppgaver, som oppgave 5, 6 og 7, var derimot ukjente, mer komplekse og krevde derfor en relasjonell forståelse, som i større grad tilfredsstiller ønsket om dybdelæring.

Videre vil resultatene av denne innsamlingen diskuteres. Hva slags informasjon gir resultatene av innsamlingen om elevenes begrepsforståelse og forståelse generelt; er den instrumentell og/eller relasjonell? Hva sier de om elevenes matematiske kompetanse, kunnskapsnivå og taksonomiske nivå? Og – kanskje mest interessant av alt – er det noe som tyder på at elevene har ulik forståelse på tvers av gruppene? Avslutningsvis diskuteres eventuelle feilkilder ved forskningsarbeidet.

5.1 Forståelse

5.1.1 Begrepsforståelse

Under intervjudelen ble elevene bedt om å gjøre rede for det de kjenner til om funksjoner, den deriverte og tangenter. Hva slags begrepsbilde har elevene gjort seg opp av de ulike begrepene? Selv om jeg også under oppgaveløsingen stilte spørsmål knyttet til elevenes forståelse av begreper, er det i hovedsak svarene fra intervjudelen som ligger til grunn for diskusjonen i denne seksjonen.

Hvordan forstår elevene begrepet *funksjon,* og hva slags egenskaper tillegger de funksjoner? Som vi så i seksjon 4.2.1.1, var svarene knyttet til funksjoner svært varierende i innhold og kvalitet. På spørsmålet om å gjøre rede for begrepet, så vi at samtlige av elevene med samfunnsfaglig matematikk ga ufullstendige beskrivelser og var usikre og nølende i forklaringene. De slet med å sette ord på sine tanker og kunnskaper – til tross for funksjoner er noe av det de har arbeidet mest med de siste tre årene. Elevene med realfaglig var derimot mer utfyllende i forklaringene, mer presise i språket og virket selvsikre i sine forklaringer. Til tross noen mindre for variasjoner innad, så man dermed at elevene hadde en god begrepsforståelse når det gjelder funksjoner. Dette belyser selvsagt ikke problemstillingen direkte, men siden funksjoner er selve grunnlaget for matematisk analyse, og dermed den deriverte, derivasjon og tangenter, kan det være interessant å se på hva slags forståelse elevene har for funksjoner også. Gjenspeiles denne forståelsen for eksempel i elevenes forståelse for de andre matematiske begrepene?

Hva slags begrepsforståelse og begrepsbilde har så elevene for den deriverte? Fra seksjon 4.2.1.2 så vi at besvarelsene også her var varierende i innhold og kvalitet. Alle elevene med samfunnsfaglig matematikk og én elev med realfaglig matematikk, elev J, oppga at den deriverte var stigningstallet til en funksjon og at de hadde lært seg derivasjonsreglene. De visste dog ikke noe om hvordan disse reglene var utledet, og besvarelsene bar preg av at elevene hadde oppnådd sin forståelse gjennom pugging. Disse elevene var dessuten – også her – relativt nølende og upresise i sine forklaringer. De resterende fire elevene i elevgruppen med realfaglig matematikk, viste derimot god forståelse av dette. Med hjelp av begreper som *gjennomsnittsvekst, momentanvekst* og *momentan endringsrate*, viste de forståelse av den deriverte som begrep og prosess. Her brukte enkelte av elevene riktignok mer betenkningstid enn i spørsmålet knyttet til funksjoner, men, som samtalesekvensene viser, ble betenkningstiden utnyttet på en måte som gjorde at selve forklaringene ble gode, flytende og fremført med selvsikkerhet.

Når det gjelder tangenter, så vi at flere av elevene i den samfunnsfaglige elevgruppen virket å være i en eller annen misoppfatning knyttet til begrepet. Elev A beskrev tangenter som den maksimale veksten, mens elev B og E beskrev tangenter som linjer som *skjærer* – ikke *tangerer* – funksjonen. Elev B beskrev videre at man bruker ettpunktsformelen for å finne stigninga til tangenten, som tyder på at eleven bruker prosedyrer uten tilstrekkelig forståelse av om og hvorfor en bestemt prosedyre leder frem. Elev C beskrev tangenter som rette streker som *ofte* ligger på grafen, og den forklarte også at den var usikker på om de *alltid* var det. Eleven oppfatter altså ikke nødvendigvis tangenters grunnleggende egenskaper som noe statisk, men som noe som kan forandres. Også elev J, som har realfaglig matematikk, ga en liknende beskrivelse som elev C. De overnevnte elevene viser altså at de har en mangelfull begrepsforståelse. I spørsmålet om å redegjøre for hva de kjenner til om tangenter, viste derimot elev D og de resterende elevene fra elevgruppen med realfaglig matematikk god forståelse av tangenter som begrep. De ga presise, utfyllende forklaringer for tangenter som konsept og for hvordan man kom frem til deres likninger.

Når det gjelder begrepsforståelse, er det særlig to interessante sider ved resultatene som er slående. For det første, ser vi hvordan elevene med samfunnsfaglig matematikk – i større eller mindre grad og i varierende grad fra oppgave til oppgave – var mer nølende og usikre i sine forklaringer og beskrivelser. Med tidvise unntak av elev I og J, var elevene med realfaglig matematikk i langt større grad selvsikre i sine forklaringer. De hadde også færre og kortere betenkningspauser underveis i forklaringene. Den andre interessante siden ved resultatene, er at elevene med realfaglig matematikk jevnt over ga langt mer utfyllende og presise forklaringer enn elevene fra den andre elevgruppen – dette til tross for at elevene med realfaglig matematikk i snitt brukte mindre betenkningstid og brukte kortere tid på å beskrive begrepene. Til slutt bør det også nevnes at de elevene som viste best forståelse for funksjoner også var de som viste best forståelse for både den deriverte og tangenter.

5.1.2 Instrumentell forståelse

Vi har sett at Skemp betegner instrumentell forståelse – om man velger å kalle det forståelse – som «rules without reason». Elever *og lærere* med en instrumentell forståelse kjenner til reglene og vet hvordan man bruker dem, men vil ikke kunne forsvare *hvorfor* en regel er gjeldende og kan brukes i en bestemt situasjon. De vil dermed være dårlig rustet til å løse mer komplekse og sammensatte oppgaver (Skemp, 1976, s. 3-5). For å kunne si noe om elevenes instrumentelle forståelse, kan det særlig være hensiktsmessig å betrakte samtalesekvensene fra spørsmål 7 og 8 og elevbesvarelsene med tilhørende samtalesekvenser fra oppgave 1, 2 og 3 b).

5.1.2.1 Den deriverte og derivasjon

På spørsmål 7 fikk elevene mulighet til å vise frem sin kunnskap om og forståelse av den deriverte. Et av oppfølgingsspørsmålene som ble stilt under intervjudelen av innsamlingen, var om elevene kunne fortelle om selve derivasjonsprosessen. Hva er det egentlig derivasjon innebærer? I besvarelsene oppga flere av elevene at de kan regnereglene for derivasjon, som også gjenspeiles i elevsvarene fra oppgave 1 og 2. De kjenner til (iallfall) noen av reglene og vet hvordan man skal bruke dem, og vi så dermed at elevene påstår å ha instrumentell forståelse av den deriverte og derivasjon.

Som nevnt, gjenspeiles det at flere av elevene husket og behersket regnereglene i elevsvarene fra oppgave 1 og 2. Vi så at det særlig på oppgave 1 ble avgitt mange korrekte svar, og av i alt 24 besvarte deloppgaver, var det kun én som ble besvart feil. Hele elevgruppen oppnådde altså en score på 95,8% på denne oppgaven. Den samfunnsfaglige og den realfaglige elevgruppen scoret henholdsvis 91,7% og 100% på oppgaven. Begge scoret altså svært høyt, som tyder på at elevene har kontroll på de enkleste derivasjonsreglene og dermed en viss instrumentell forståelse av temaet.

I oppgave 2 gikk scoren noe ned, både for gruppen som helhet og hver enkelt gruppe. Total score på oppgaven var her 75%, mens den for elevene med samfunnsfaglig og realfaglig matematikk var henholdsvis 58,3% og 91,7%. Her er særlig tilbakegangen i antall korrekte svar blant de samfunnsfaglige elevene markant, og vi ser at scoren har sunket fra 91,7% til kun 58,3%. Resultatene fra oppgave 1 tydet altså på at elevene kunne ha en instrumentell forståelse av tangenter, mens resultatene fra oppgave 2 viste at denne instrumentelle forståelsen er begrenset – i det minste for enkelte av elevene, og da spesielt for elev A og C, som svarte feil på henholdsvis tre og to av de tre deloppgavene.

5.1.2.2 Tangenter

På spørsmål 8 fikk elevene mulighet til å fremvise sin kunnskap om og forståelse av tangenter. Som vi så i forrige seksjon, virket flere av elevene med samfunnsfaglig matematikk og elev J, som tar realfaglig matematikk, å være i en eller annen misoppfatning knyttet til tangenter. De kunne dermed heller ikke (korrekt) gjengi hvordan man finner likningen til en tangent, og viste dermed en manglende instrumentell forståelse av tangenter. Èn elev med samfunnsfaglig matematikk, elev D, og tre av elevene fra den realfaglige gruppen viste derimot at de husket og behersket formlene som trengtes for å løse oppgaven. Den siste eleven husket ikke ettpunktsformelen, men ga likevel en beskrivelse for hvordan man kunne løst oppgaven grafisk. Den ga dessuten en beskrivelse for alle trinn frem til ettpunktsformelen, som viser at den har en viss instrumentell forståelse av tangenter.

Inntrykket av hvem som har og ikke hadde instrumentell forståelse av tangenter, kommer også tydelig frem i elevsvarene fra oppgave 3 b). Elev A, B og C løste oppgaven feil, og viste dermed at de hverken husket eller behersket prosedyren for å finne likningen til tangenten. Elev D, F, G, I og, til dels, elev H løste derimot oppgaven korrekt. Utvalget er riktignok krympet noe inn i problemløsingsdelen av innsamlingen, men vi ser at det er de samme elevene fremviste instrumentell forståelse under intervjudelen, som også klarte å løse oppgave 3 b).

5.1.2.3 Instrumentell forståelse - oppsummering

Når det gjelder elevenes instrumentelle forståelse, kan man trekke frem ett par særlig interessante funn. For det første, så vi at elevene med samfunnsfaglig matematikk jevnt over har en langt bedre instrumentell forståelse av den deriverte enn for tangenter. Tre av disse fire elevene løste alle de tre deloppgavene på oppgave 1 korrekt, mens én elev løste én deloppgave feil. Elevene med samfunnsfaglig matematikk svarte dermed riktig på totalt elleve av femten deloppgaver, altså 91,7% av alle deloppgavene. På oppgave 2 falt denne prosenten riktignok til 58,3%, som indikerer at enkelte av elevene har en vei å gå når det gjelder instrumentell forståelse av hakket vanskeligere og mer komplekse derivasjonsoppgaver. Samtidig så vi at kun 25% av elevene med samfunnsfaglig matematikk løste oppgave 3 b) korrekt, og spranget mellom 58,3% og 25% kan sies å være markant. Disse tallene underbygger påstanden om at elevene med samfunnsfaglig matematikk jevnt over hadde en bedre instrumentell forståelse av den deriverte enn for tangenter. Dette kan forklares med at flere av disse elevene også virket å være i en misoppfatning knyttet til tangenter, mens elevene under intervjuene var tydelige på at de hadde pugget derivasjonsreglene.

For det andre, er det interessant å bemerke at elevene som løste oppgavene korrekt brukte svært lite tid på å løse disse derivasjonsoppgavene. De brukte lite betenkningstid og hadde formlene så godt implementert i minnet at både løsningen og tilhørende forklaringer ble gitt presist og selvsikkert. En tredje ting å bemerke, er hvordan elevene med realfaglig matematikk, som i hovedsak arbeidet med de gjeldende derivasjonsreglene forrige skoleår, fortsatt virker å – stort sett – ha stålkontroll på både derivasjonsformler og prosedyren for å finne tangenters likninger.

En siste ting som det er interessant å bemerke i forbindelse med elevenes instrumentelle forståelse, er de ulikhetene i holdningene til de elevene som løste derivasjonsoppgavene feil. Mens elev A og C, som ukritisk tok i bruk de enkle formlene fra oppgave 1 i arbeidet med oppgave 2, virket tilfredsstilte etter å ha levert inn svar de i utgangspunktet virket nølende på, var elev H, som har realfaglig matematikk, langt mer misfornøyd. Eleven husket at man måtte multiplisere med kjernen derivert og viste dermed at den delvis har den instrumentelle forståelsen integrert i minnet. Den kunne forklare hvilke deler av besvarelsen den var sikker og usikker på og uttrykte – i motsetning til elev A og C – stor frustrasjon over å bli stående fast og å vite at den leverte inn en besvarelse den ikke var 100% sikker på.

5.1.3 Relasjonell forståelse

Elever med instrumentell forståelse har altså memorert formler, algoritmer og instrukser for å komme seg fra A til B, der A er en spesifikk startposisjon (oppgave), og B er oppgavens løsning. Elever med relasjonell forståelse, derimot, forstår ikke bare hva de skal gjøre, men også hvorfor en bestemt fremgangsmåte vil lede dem fra A til B. De har dessuten utviklet mentale strukturer som gjør dem i stand til å løse både kjente og ukjente oppgaver på flere ulike måter (Nosrati & Wæge, 2018, s. 35-46). For å kunne si noe om elevenes relasjonelle forståelse, er det særlig hensiktsmessig å betrakte elevsvarene fra spørsmål 7, oppgave 3 a), 4, 5, 6 og 7.

Ett av oppfølgingsspørsmålene som ble stilt under intervjudelen av innsamlingen, var om elevene kunne fortelle om selve derivasjonsprosessen. Hva er det egentlig derivasjon innebærer? Fra besvarelsene fra spørsmål 7, kom det frem at over halvparten av elevene, altså elev A, B, C, D, E og I, ikke kunne fortelle mer utdypende om selve derivasjonsprosessen og hvordan reglene ble utledet. De kjente derimot til mange av reglene og visste hvordan man skulle bruke dem, og man ser dermed at disse elevene hadde en viss instrumentell forståelse av den deriverte og derivasjon. Deres relasjonelle forståelse av den deriverte som prosess var dog mangelfull.

På spørsmål 9 ble elevene bedt om å beskrive sammenhengen mellom funksjoner, deres deriverte og deres tangenter. Relasjonell forståelse innebærer at elevene har opparbeidet begrepsmessige strukturer, der de ikke bare har forståelse av de enkelte begrepene, men også for sammenhengen mellom dem. Fire av de daværende fem elevene med samfunnsfaglig matematikk og én av elevene med realfaglig matematikk evnet ikke å besvare dette spørsmålet på en fullstendig, tilfredsstillende måte, og de viste dermed at de hadde en manglende relasjonell forståelse av denne sammenhengen. Dette henger nok sammen med at elevene også hadde en mangelfull forståelse av ett eller flere av enkeltbegrepene. Uten begrepsforståelse er det tross alt heller ikke mulig å opparbeide begrepsmessige strukturer.

Denne mangelfulle relasjonelle forståelsen er særlig slående hos elev A og B, som vi så at – i tillegg til å gi mangelfulle og feilaktige beskrivelser av de ulike begrepene – enten svarte feil, unnlot å svare eller avga korrekt svar på sviktende grunnlag på alle de fem siste oppgavene. Kanskje kan man her si at en relasjonell forståelse ikke er tilstede i det hele tatt? Som vi så i seksjon 4, svarte derimot elev C og D korrekt og delvis korrekt på flere av disse oppgavene, og viste dermed at de - til tross for enkelte feil i oppgaveløsningen og for å ha gitt tidvis mangelfulle og feilaktige beskrivelser av de ulike begrepene – hadde en relasjonell forståelse av både den deriverte og tangenter.

Blant elevene med realfaglig matematikk, så vi i seksjon 4 at det kun var én elev, elev I, som ikke løste de siste fem oppgavene fullstendig. På oppgave 5 var eleven «kun» i stand til å eliminere to av grafene, og løste dermed bare oppgaven delvis. Til tross for dette, var resultatene for denne gruppen – med utgangspunkt i problemløsingsdelen av innsamlingen – tydelige; alle elevene i gruppen har en solid, relasjonell forståelse av både funksjoner, den deriverte og tangenter. De har ikke bare utviklet et godt begrepsapparat, men har dessuten utviklet solide begrepsstrukturer.

Dersom man studerer resultatene fra de siste fem spørsmålene fra problemløsingen, som vi så at forutsatte en relasjonell forståelse, er det visse ting man kan bite seg merke i. For det første, ser vi at forskjellene på tvers av gruppene er store. På den ene siden har elevene i den realfaglige gruppen har løst nitten av totalt tjue oppgaver, altså 95% av oppgavene, korrekt. På den andre siden løste elevene med samfunnsfaglig matematikk kun syv og en halv – der en av dem ble løst basert på svikende grunnlag – av de tjue oppgavene, altså 36,25% av oppgavene, på en måte som ledet til et korrekt svar.

Disse tallene kunne kanskje talt for at elevene med realfaglig matematikk har en langt mer solid, relasjonell forståelse innen matematisk analyse enn elevene med samfunnsfaglig matematikk, men dette ville blitt en noe forhastet konklusjon. Det andre punktet man gjerne biter seg merke i, er nemlig variasjonene innad i elevgruppen som tar samfunnsfaglig matematikk. På oppgave 3 til og med oppgave 8 besvarte elev A og B totalt korrekt på én oppgave, og på denne oppgaven ble det attpåtil trukket konklusjoner på sviktende grunnlag. Dermed ser vi at de resterende seks og en halv oppgavene som ble løst korrekt av denne gruppen, ble løst av elev C og D. Disse elevene svarte ikke riktig på alle oppgavene, men viste likevel at de hadde en relasjonell forståelse – spesielt for den deriverte, som vist i elevbesvarelsene på oppgave 4, for eksempel. Man ser altså et skille mellom gruppene som helhet, men indre variasjoner gjør at man ikke direkte kan si at alle elevene i gruppen har en manglende relasjonell forståelse innen matematisk analyse. Resultatene til elev A og B kan likevel tyde på at akkurat disse to elevene mangler – eller i det minste har en svært mangelfull – forståelse innen matematisk analyse.

En tredje ting jeg la merke til ved resultatene fra oppgaveløsingen, var hvordan elev C, som tidvis ga mangelfulle beskrivelser av begrepene under intervjudelen, fremviste en langt mer solid, relasjonell forståelse under oppgaveløsingen enn det den gjorde under intervjuet. Dette kan for eksempel tyde på at eleven sliter med å sette ord på sine kunnskaper, at den hadde en «dårlig dag» på intervjudagen, eller at den i løpet av tiden mellom intervjuet og problemløsingsdelen. I tillegg kan resultatene fra oppgaveløsingen tyde på at eleven har en bedre relasjonell enn instrumentell forståelse, mens de andre elevene fra samme elevgruppe derimot virker å ha en bedre instrumentell forståelse. Eleven scoret nemlig bedre på de mer ukjente, utforskende oppgavene, enn på oppgavene som kunne løses ved hjelp av kjente algoritmer.

En siste ting jeg merket meg med fra oppgaveløsingen, var antall elever som ikke forsøkte å løse oppgavene, og da særlig hvor mange som ikke engang forsøkte å løse oppgave 4. Det kreves tross alt lite for å i det minste løse oppgaven delvis, og med tanke på hvor mye tid elevene har brukt på å arbeide med funksjoner, burde enhver elev i utvalget kunnet avgjort hvor grafen er positiv og negativ. Om elevene ga opp fordi de mente de ikke kunne tegne fortegnslinjene til den deriverte og dobbeltderiverte, eller om de faktisk ikke var i stand til å avgjøre dette, er derimot vanskelig å si noe om.

5.2 Kunnskapsnivå, taksonomi og matematisk kompetanse

I seksjon 2.3.3. så vi hvordan Webb (1999, s. 3) benytter seg av fire kunnskapsnivåer, «recall», «skill/concept», «strategic thinking» og «extended thinking», for å bedømme dybden av elevenes kunnskap innen matematikk og naturfag. Elever på det laveste nivået har en instrumentell forståelse, og etter hvert som man beveger seg oppover i nivåene, går man i retning av en mer relasjonell forståelse. Med utgangspunkt i svarene fra intervjudelen resultatene på oppgave 1 og 2 – særlig på oppgave 1 – ser vi at alle elevene befinner seg på (minst) nivå én. Alle behersket noen eller flere av derivasjonsreglene og kunne huske fakta og informasjon om de ulike matematiske begrepene. Når vi beveger oss oppover i nivåene, kan det derimot virke som at enkelte elever faller av lasset. Elev A og B løste nemlig ingen av de fem siste oppgavene, som er oppgavene som krever mer enn bare reproduksjon av kunnskap, fra problemløsingsdelen korrekt – med unntak av oppgave B, som løste oppgave 5 riktig, men på sviktende grunnlag. De kunne heller ikke beskrive sammenhengen mellom funksjoner, dens deriverte og tangenter på en tilfredsstillende måte, det kan dermed virke som at disse to elevene kun befinner seg på Webbs første kunnskapsnivå. De resterende elevene ga derimot besvarelser og forklaringer som tyder på at de – i det minste tidvis og innen visse temaer – kan befinne seg på Webbs høyeste kunnskapsnivå.

Bloom (i Slemmen, 20120, s. 50-52, s. 112-113) klassifiserer kunnskap ved hjelp av seks nivåer. Selv om Bloom benytter seg av flere nivåer enn Webb, ser vi at elevene på de laveste og høyeste nivåene besitter stort sett de samme egenskapene; fra reproduksjon av fakta på det laveste nivået, til evne til å analysere, eksperimentere, utvikle ideer og strategier og undersøke på de høyere nivåene. Blooms høyeste og siste nivå, vurdering, skiller seg derimot ut. På dette nivået så vi at elevene utvikler sin kritiske tankeevne ved å blant annet bedømme pålitelighet, relevans og nøyaktighet. Under problemløsingen så vi at flere av elevene fra den samfunnsfaglige elevgruppen ukritisk og på ugyldig grunnlag benyttet seg av formler og prosedyrer der de ikke var gjeldende. Dette gjelder spesielt i oppgave 3 b), der elevene ble bedt om å finne likningen til tangenten i et gitt punkt. Her løste både elev A, B og C oppgaven ved å dobbeltderivere – enten fordi de mente at tangenten var den dobbeltderiverte, eller fordi de mente at den dobbeltderivertes likning var på riktig form og derfor måtte være en tangent.

Mens Webb og Bloom bedømmer kunnskap ut fra visse nivåer, betrakter Kilpatrick matematisk kompetanse som en kompleks helhet bestående av fem ulike tråder. Disse er avhengige av hverandre og det er dermed ikke tilstrekkelig å fokusere på utelukkende en eller to av trådene (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 116-118). Flere av trådene inngår i de ulike kunnskapsnivåene og er dermed diskutert i avsnittene og seksjonene over, som forståelse for relasjoner og operasjoner, evne til å utføre regneoperasjoner og løse matematiske problemer og så videre. En av trådene i Kilpatricks komplekse helhet har derimot ikke blitt diskutert enda, nemlig «productive disposition». Denne tråden knyttes til elevenes holdninger og innebærer at elevene er i stand til å betrakte matematikk som noe nyttig, fornuftig og meningsfylt. En god matematisk kompetanse er altså, i følge Kilpatrick, avhengig av elevenes holdninger ovenfor faget. I seksjon 3.2.3.1, så vi at elevene med realfaglig matematikk hadde en større, mer genuin interesse for faget. På spørsmålet om matematikkfagets nytte, var skillet mellom de to gruppene stort; mens alle elevene med realfaglig matematikk var enige i påstanden om at «matematikkfaget er nyttig», var det kun én elev fra den andre gruppen som svarte det samme. Én elev var litt enig, mens de tre siste elevene var hverken enige eller uenige i påstanden. Da elevene skulle bedømme nytten av å lære om henholdsvis funksjoner, den deriverte og tangenter, var skillet mellom de to gruppene enda større. Ut fra elevenes vurderinger og svar når det gjelder interesse, motivasjon holdninger og nytte, er det altså tydelig at de to elevgruppene er heterogene og at det er tydelige skiller mellom dem. Dette gjenspeiles også i resultatene fra både spørsmålene og problemløsingsdelen, hvor elevene med realfaglig matematikk jevnt over scoret langt høyere enn den andre gruppen, og det kan dermed tyde på at det, slik Kilpatrick påstår, er en sammenheng mellom holdninger og kompetanse.

5.3 Feilkilder

Den sosiale virkeligheten jeg har forsket på i dette prosjektet er kompleks, og det er umulig å gi et fullstendig bilde av alt som forgikk under innsamlingen – hverken av handling, ord eller elevenes tankegang og forståelse. Hvordan data har blitt tolket og analysert, avhenger av mine kunnskaper, oppfatninger og forståelse, men jeg har likevel forsøkt å presentere data med færrest mulig feilkilder. Jeg har forsøkt å presentere mest mulig reliable og valide data, men å sikre 100% reliabilitet og validitet, har neppe vært mulig.

Vi så at reliabilitet dreier seg om hvor pålitelige dataene er. I hvilken grad er funnene i en studie uavhengige av tilfeldigheter i omstendighetene de ble produsert i? En av metodene som kan brukes for å teste datas reliabilitet, er å gjenta den samme undersøkelsen på samme gruppe på to ulike tidspunkter. Dette ble ikke gjort direkte, men jeg fikk muligheten til å stille en del av de samme spørsmålene, som jeg stilte under intervjuet, på nytt under problemløsingsdelen. Elevene ga – i svært stor grad – liknende svar som under intervjuet, og dette kan tyde på at dataene innhentet under intervjuet stort sett er reliable. I tillegg til å stille spørsmål på nytt under problemløsingen, utviklet jeg dessuten en egen oppgave, oppgave 6, for å blant annet vurdere reliabiliteten til elevbesvarelsene til to elever, elev B og E. Som nevnt tidligere, ble to av elevene – blant dem elev E – «kuttet» fra problemløsingsdelen av innsamlingen på grunn av Covid-19-situasjonen. Det blir derfor vanskelig å avgjøre reliabiliteten til dataene innhentet fra elev E, men resultatet på oppgave 6 tyder på at dataene fra elev B var reliable. Det er selvsagt umulig å sikre 100% reliabilitet, men basert at elevene gjentatte ganger har avgitt liknende svar og at valg av fremgangsmåte stort sett har blitt gjenspeilt av elevenes forståelse av begrepene – korrekt eller ukorrekt – vil jeg påstå at dataene kan sies å til en viss grad være reliable.

Validitet dreier seg om hvor relevant data er. Vi har sett at det er flere utfordringer knyttet til validitet i forskning på menneskelig aktivitet. En av dem er å sikre at det er det deltakerne sier – og faktisk mener – og gjør som fortolkes. I forsøk på å sikre mest mulig aktivitet, ble det derfor stilt en rekke oppfølgings- og oppklaringsspørsmål. Da elev H, for eksempel, løste oppgave 2, klarte den ikke å komme frem til den endelige løsningen, til tross for at den hadde en solid forståelse for hva som måtte til for å nå målet. Dersom jeg ikke hadde observert oppgaveløsingen, hadde jeg ikke fått muligheten til å stille spørsmål og få muntlige beskrivelser underveis, og jeg kunne dermed avfeid elevens forståelse basert på noen manglende tegn på et papir.

En annen utfordring knyttet til validitet er å holde deltakernes motivasjon oppe. Som nevnt, besluttet jeg derfor å dele innsamlingsprosessen i to. Det kan likevel tenkes at dette ikke var et tilstrekkelig tiltak, da flere av elevene med samfunnsfaglig matematikk valgte å hoppe over enkelte oppgaver uten å engang forsøke å løse dem. Om dette skyldes manglende motivasjon eller manglende forståelse og kunnskap, er derimot vanskelig å avgjøre, men begge alternativene er mulige. Som vi så i seksjon 2.5.2.1, som dreier seg om hvordan man best mulig kan fremme elevers indre motivasjon, avgjør elever ofte om de vil engasjere seg i en oppgave eller ei basert på deres vurdering av hvor utfordrende en oppgave er. Elevene kan altså ha hoppet over oppgaver fordi de var for utfordrende, men også fordi øktene kan ha blitt for lange og krevende. I så fall kan det være at enkelte av elevene egentlig kunne løst flere oppgaver korrekt og dermed endret det helhetlige inntrykket resultatene har gitt.

Dersom man stiller gruppene opp mot hverandre og fokuserer på total score og kvaliteten på beskrivelsene av de matematiske begrepene og sammenhengen mellom dem, kan det være fristende å trekke en konklusjon om at elevene med realfaglig matematikk har bedre og mer relasjonell forståelse enn elevene med samfunnsfaglig matematikk. Deres muntlige beskrivelser var jevnt over av høyere kvalitet og elevene scoret langt høyre på problemløsingsdelen. Er det så riktig å overføre denne antakelsen til å gjelde for elever med samfunnsfaglig versus realfaglig matematikk generelt? Antakeligvis ikke. Disse enorme ulikhetene kan tross alt ha mange forklaringer. De kan blant annet skyldes ulikheter i tidligere opplæring, ulikheter i nåværende opplæring, tilfeldigheter eller størrelse på utvalget. Det kan dessuten tenkes at elevene som ble kuttet fra innsamlingen kunne ha bidratt til å male et annerledes bilde av sine respektive grupper. Videre kan det også tenkes at det, til tross for tilfeldig trekning av deltakere fra den realfaglige gruppen, ble trukket ut flere av de såkalte «stjernene», mens det fra den samfunnsfaglige gruppen var et mer variert nivå. Dette kan i så fall ha bidratt til å skape et så polarisert bilde.

6.0 Konklusjon

Formålet med dette forskningsprosjektet var å finne ut av hva slags forståelse elever med fagene S2 og R2 av begreper som *den deriverte* og *tangenter*? Er denne forståelsen *instrumentell* eller *relasjonell*? Har elevene utviklet et godt nok begrepsapparat, slik at de kan anvende gammel kunnskap i nye situasjoner, eller er de låst til kjente oppgaver og situasjoner? Og til slutt; er det en forskjell i elevenes forståelse på tvers av fagene? Ved hjelp av de kvalitative innsamlingsmetodene intervju og observasjon, forsøkte jeg å få et bedre innblikk i denne forståelsen.

Dersom man stiller elevgruppene opp mot hverandre, tyder besvarelsene og resultatene fra innsamlingen på at elevene med realfaglig matematikk har en langt bedre forståelse for temaene. Begge gruppene viste at de har en instrumentell forståelse, særlig for derivasjon, mens den realfaglige elevgruppen fremviste en langt mer solid, relasjonell forståelse. Likevel må man ta høyde for variasjoner innad i elevgruppen med samfunnsfaglig matematikk – som tross alt var markante. To av elevene i gruppen viste nemlig at de hadde en god forståelse innen matematisk analyse, spesielt for den deriverte. De viste evne til å resonnere, analysere og prosessere og viste dessuten at de var i stand til å løse både kjente og ukjente oppgavetyper – i tråd med dybdelæringen, som det i følge de nye læreplanene skal tilstrebes for å oppnå. På grunn av heterogeniteten innad i denne elevgruppen, blir det dermed feil å trekke konklusjoner om den samfunnsfaglige gruppen som helhet. Det kan dessuten hende at polariseringen skyldes andre feilkilder, som tilfeldigheter eller størrelsen på utvalget.

Selv om det blir feil å si at alle elever med samfunnsfaglig matematikk har en dårligere, mer mangelfull og mindre relasjonell forståelse innen matematisk analyse, kan det se ut til at det generelt kunne vært fordelaktig å arbeide med temaet slik som det gjøres i den realfaglige matematikken. Her introduseres definisjonen ved hjelp av grenseverdier tidlig, og det fokuseres mer på derivasjon som prosess og konsept, fremfor hver enkelt derivasjonsregel. Elevene med R2 ble introdusert for og arbeidet hovedsakelig med temaet – eller i det minste med de samme funksjonene som de arbeidet med i innsamlingen – forrige skoleår, mens elevene med samfunnsfaglig matematikk har arbeidet med temaet over to år. Det at elevene med realfaglig matematikk jevnt over presterte svært høyt og høyere enn den andre elevgruppen, forsterker dermed inntrykket av at de har arbeidet med stoffet på en bedre måte, som i større grad har fremmet forståelse – og dermed dybdelæring. Denne innsikten kan bli verdifull når jeg nå trer inn i læreryrket og skal forsøke å best mulig fremme læring i dybden.

Litteratur

Biggs, J. B. & Collins, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO taxonomy.* New York: Academic Press

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag

Gjøtterud, S., Hiim, H., Husebø, D., Jensen, L. H., Steen-Olsen, T. H. & Stjernestrøm, E. (2017). *Aksjonsforskning i Norge: Teoretisk og empirisk mangfold.* Cappelen Damm Akademisk

Grønmo, L. S. (2010). Prestasjoner på oppgaver i kalkulus. I L. S. Grønmo, T. Onstad & I. F. Pedersen (Red.), *Matematikk i motvind, TIMSS Advanced 2008 i videregående skole.* Oslo: Unipub

Hirsti, K. (2019, 18 mars). Forslag til ny læreplan: - Den største endringen siden 2006. *NRK.* Hentet fra https://www.nrk.no/norge/forslag-til-ny-laereplan_-_-den-storste-endringen-siden-2006-1.14478245

Imsen, G. (1998). *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi* (3. utg.). Oslo: Tano Aschehoug

Imsen, G. (2016). *Lærerens verden. Innføring i generell didaktikk* (5. utg.). Oslo: Universitetsforlaget

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press

Nosrati, N., & Wæge, K. (u.d.). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk.* Matematikksenteret

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser..* Oslo: Departementenes sikkerhets- og serviceorganisasjon https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/sec1?q=2015

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2016). *Læreren med forskerblikk : Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Oslo: Cappelen Damm

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., Mustaparta, S., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2014). *Sigma S1 matematikk* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorsrensen, A., & Thorstensen, R. (2008). *Sigma S2 matematikk* (1. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Silverman, D. (2006). *Interpreting qualitative data: Methods for analyzing talk, text and interaction.* Los Angeles: Sage.

Skemp, R. R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding.* Department of Education. University of Warwick. Hentet fra http://www.davidtall.com/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf

Slemmen, T. (2010). *Vurdering for læring i klasserommet* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Stengrundet, S. & Valbekmo, I. (2018). *Begrepslæring i matematikk.* Hentet fra http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-11/T3.P1.M2A%20Begrepslæring%20i%20matematikk_nybu.pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity.* Educational studies in mathematics

Utdanningsdirektoratet. (2016, 29. november). *Hovedfunn fra TIMMS Advanced 2015* [artikkel]. Hentet fra https://www.udir.no/contentassets/99fff22a6501489cadf9fbf46efdc118/timss_advanced_2015_hovedresultater.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2018, 29. oktober). *Dybdelæring* [videoklipp]. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stottemateriell-til-overordnet-del/film-dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2019, 13. mars). *Dybdelæring* [artikkel]. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05).* Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag Vg1 teoretisk (MAT09-01)* https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT09-01.pdf?lang=nno

Utdanningsdirektoratet. (2021, 8. april). *Innføring av nye læreplaner* [artikkel]. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/innforing-av-nye-lareplaner/

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R) (MAT03-02).* Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT03-02.pdf?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Læreplan i matematikk for samfunnsfag (matematikk S) (MAT04-02).* Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT04-02.pdf?lang=nob

Webb, N. L. (1997). *Criteria for Alignment of Expectations and Assessments in Mathematics and Science Education.* Research Monograph No. 6. National Institute for Science Education: Wisconsin-Madison

Webb, N. L. (1999). *Alignment of Science and Mathematics Standards and Assessments in Four States.* Research Monograph No. 18. National Institute for Science Education: Wisconsin-Madison

Wæge, K., Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk* (1. utg.) Oslo: Universitetsforlaget

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2013). *Sigma 1T matematikk* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K, Dypbukt, W., Mustaparta, S., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2012). *Sigma R1 matematikk.* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv til elever.

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Den deriverte, tangenter og elevers forståelse av disse?"

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å avdekke hva slags forståelse elever har innen temaene derivasjon og tangenter. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette prosjektet er å se på hva slags forståelse elever i fagene S2 og R2 har for temaene derivasjon og tangenter. Det skal avdekke om elevene har en instrumentell eller relasjonell forståelse av begrepene. I de nye læreplanene legges det stor vekt på dybdelæring, som blant annet innebærer begrepsforståelse, og ved å studere elevenes forståelse av disse begrepene, kan man forhåpentligvis identifisere problemene dersom elevenes begreper kommer til kort i oppgave-/problemløsning.
Du vil bli bedt om å løse ulike oppgaver knyttet til derivasjon og tangenter og samtidig samtale med meg om disse temaene.
Forskningen er en del av min masteroppgave og utgjør grunnlaget for analysen.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Utvalget er trukket av faglærer, som har blitt instruert om å trekke ut et tilfeldig. Kriteriet for at du blir spurt om å delta i prosjektet, er at du har ett av fagene S2 eller R2. 3-5 personer fra hvert fag vil bli trukket ut til å delta i prosjektet.

Hva innebærer det for deg å delta?

Dersom du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du deltar i et intervju og at du under observasjon løser noen oppgaver knyttet til derivasjon og tangenter. Hvor lang tid dette vil ta, vil variere, men jeg anslår at det vil ta deg i underkant av en time. Eventuelt kan intervju og oppgaveløsning foregå separat. For å effektivt registrere informasjonen fra intervju/oppgaveløsning, vil jeg bruke notater, lydopptak og videoopptak (kan sløyfes dersom du ønsker det). Disse opptakene vil ikke bli delt med andre og vil bli slettet etter at informasjonen er behandlet. Ingen av dine personlige opplysninger vil publiseres i arbeidet, og i det endelige prosjektet vil du anonymiseres.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Det vil ikke påvirke ditt forhold til skolen/lærer dersom du velger å delta.

Prosjektet gjennomføres ikke i forbindelse med undervisningen, og dine resultater/svar vil ikke påvirke karakter i faget.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det vil kun være meg og min veileder i oppgaven, Sigbjørn Hervik, professor ved UiS, som har tilgang til dine opplysninger.
- For å sikre at ingen uvedkommende får tilgang til personopplysningene, vil jeg gi alle deltakere pseudonymer i behandlingen av stoffet og oppbevare alle opptak og informasjon kryptert.

Deltakere vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjon, og den eneste opplysningen som gis om dere, er alder.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 15.06.2020. I oppgaven vil du da være anonymisert og alle data/opptak makuleres eller slettes.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Stavanger har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- *Universitetet i Stavanger* ved Sigbjørn Hervik (sigbjorn.hervik@uis.no).
- Vårt personvernombud på personvernombud@uis.no
-

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Sigbjørn Hervik
(Forsker/veileder)

Solveig Mathilde Ingebretsen Abrahamsen

Vedlegg 2: samtykkeerklæring

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Den deriverte, tangenter og elevers forståelse av disse* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i intervju
- ☐ å delta i oppgaveløsning
- ☐ at det kan gjøres opptak av innsamlingen

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3: intervjuguide

Navn: ....

Den deriverte, tangenter og elevers forståelse av disse

Intervjuguide

1) Faglig bakgrunn:
    - 1P
    - 1T
    - S2
    - R2
2) Hva er din motivasjon for å ta faget (S2/R2)?
3) Hva vil du si er din motivasjon i arbeidet med matematikk?
4) På en skala fra 1-5, der 1 er det laveste og 5 det høyeste, hvordan vil du rangere din ...
    i. Arbeidsinnsats i faget
    ii. Interesse for faget
5) I hvilken grad er du enig i følgende utsagn:

	Enig	Nokså enig	Hverken enig eller uenig	Nokså uenig	Uenig
Jeg synes det er gøy å jobbe med matematikk.	o	o	o	o	o
Jeg føler mestring i arbeidet med faget.	o	o	o	o	o
Matematikkfaget er nyttig.	o	o	o	o	o
Det er nyttig å lære om funksjoner og funksjonsdrøfting.	o	o	o	o	o
Det er nyttig å lære om den deriverte og derivasjon.	o	o	o	o	o
Det er nyttig å lære om tangenter.	o	o	o	o	o

6) Beskriv det du kjenner til om begrepet *funksjon*.
7) Beskriv det du kjenner til om begrepet *den deriv*erte.
8) Beskriv det du kjenner til om tangenter.
9) Beskriv sammenhengen mellom funksjoner, dens deriverte og tangenter.

Vedlegg 4: oppgaveark

Oppgave 1:

Finn $f'(x)$ når

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + x^{-2}$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \ln(x)$

Løsning:

Oppgave 2:

Finn $f'(x)$ når

a) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

b) $f(x) = \frac{3x-2}{e^{2x}}$

c) $f(x) = (4x^3 + 2x)^2$

Løsning:

Oppgave 3:

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2$, finn

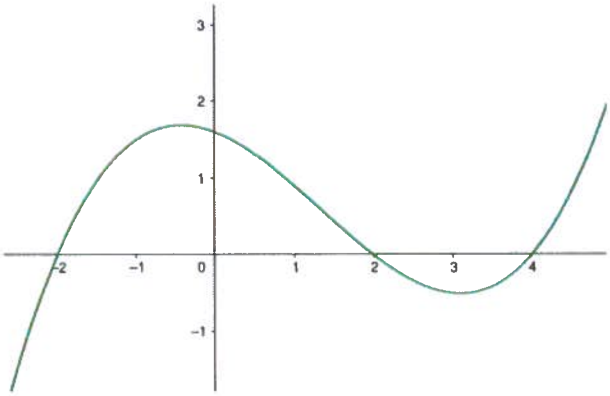
a) Intervallene der $f(x)$ er synkende og stigende

b) Likningen for tangenten til $f(x)$ i $x = 1$

Oppgave 4:

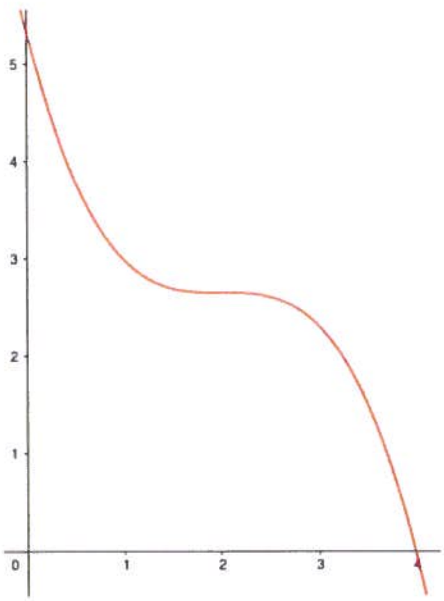
Tegn fortegnslinjene til $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ for følgende funksjoner:

a)



Løsning:

b)

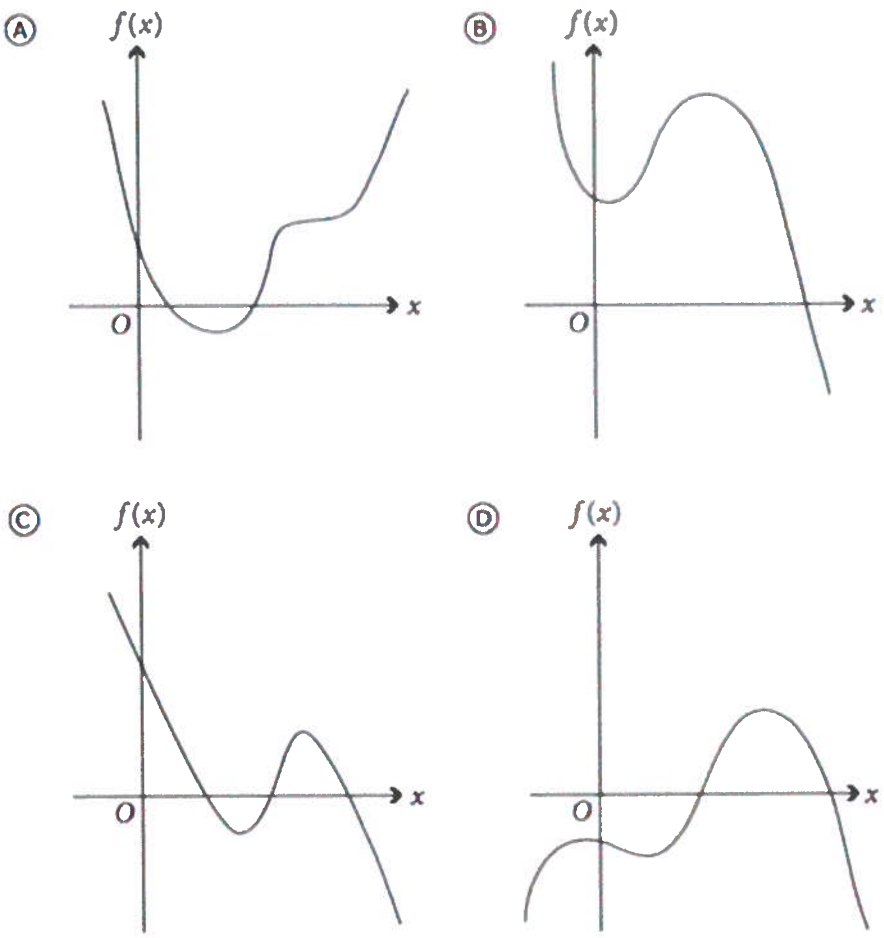


Løsning:

Oppgave 5:

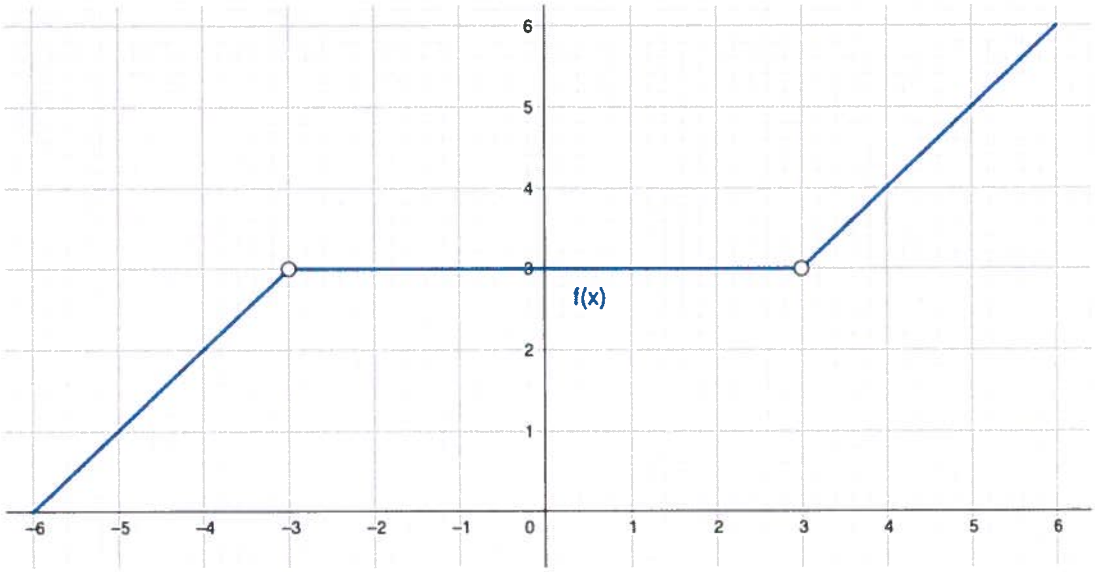
Hvilken av grafene nedenfor kan ha alle disse egenskapene?

$$f(-1) > 0,\ f(3) < 0,\ f'(5) = 0,\ f''(5) < 0$$

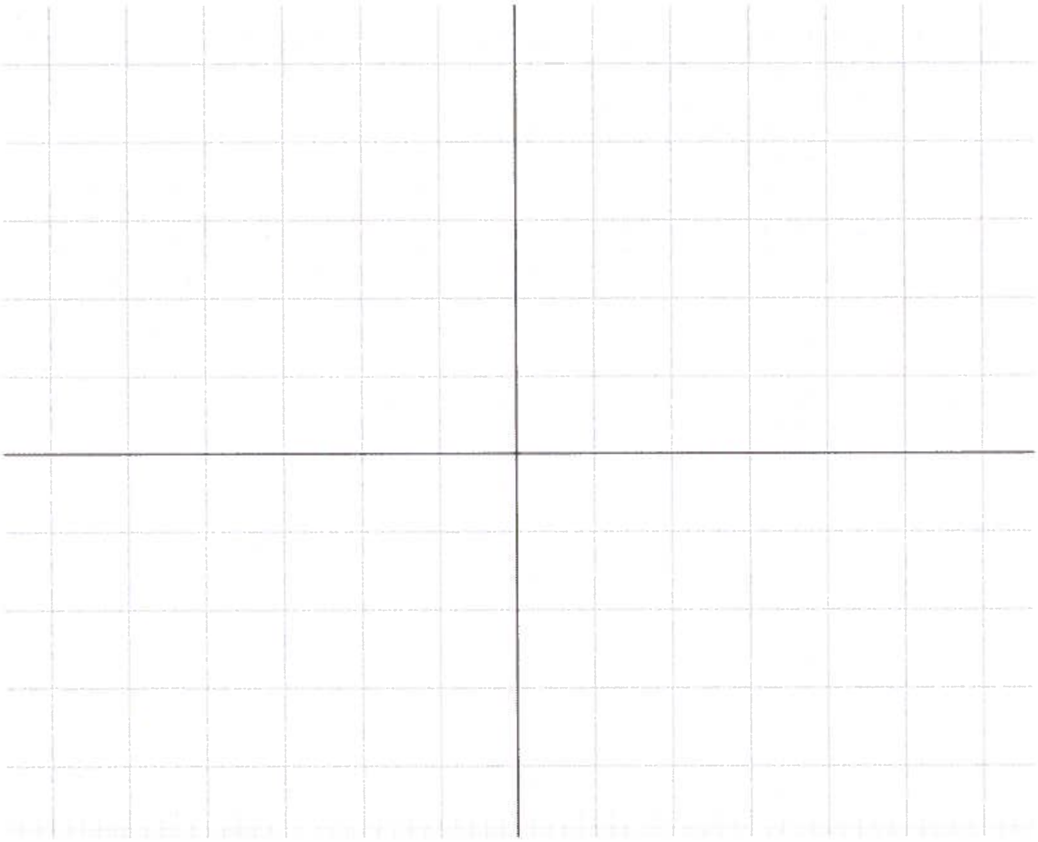


Oppgave 6:

Nedenfor ser du grafen til funksjonen $f(x)$. Velg et punkt på grafen og skisser tangenten i dette punktet. Skisser grafen til $f'(x)$.



Løsning:



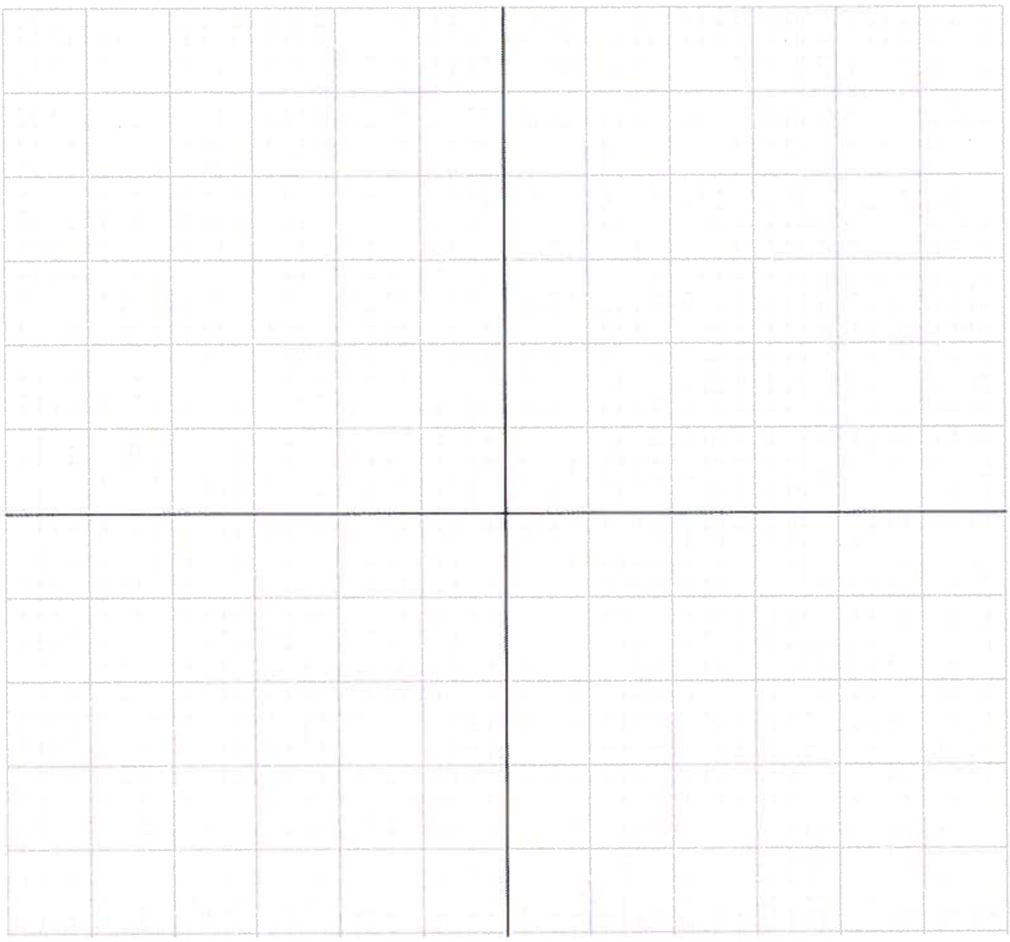
Oppgave 7:

Funksjonen $f(x)$ har følgende egenskaper:

- Dens tangenter har positivt stigningstall for alle verdier av x
- Dersom man beveger seg bortover x-aksen i positiv retning, vil tangentenes stigningstall være avtakende for alle verdier av x

Tegn en graf som passer til funksjonen.

Løsning:



Vedlegg 5: figuroversikt

Vedlegg 6: oversikt elevbesvarelser

Vedlegg 7: transkripsjonsnøkkel

[...] = pause. Antall prikker indikerer lengde på pausen.

(setning) = oppklaringer dersom elevenes opprinnelige forklaringer var utydelige. Funnet gjennom oppfølgingsspørsmål og ved at elevene har pekt på skriftlig besvarelse.

(...) = indikerer at eleven har fortalt mer enn det som gjengis i samtalesekvensen, og at det dermed kun er deler av dialogen som gjengis.

«setning» = et utsagn fra informant som på grunn av flyt i oppgaven er satt direkte inn i teksten.