Sirkelens Kvadratur: En geometrisk tilnærming

250700

Mai 2022

Sammendrag

Denne oppgaven tar for seg det klassiske problemet om sirkelens kvadratur. Sirkelens kvadratur har vært et av de vanskeligste konstruksjonsproblemene i matematikk og har fått enorm mengde oppmerksomhet i matematikkens historien. Det var ikke før på slutten av 1800 – tallet at man endelig kunne gi et definitivt svar på dette problemet. Hensikten med denne oppgaven er å vise hvorfor sirkelens kvadratur er umulig. Fokuset i oppgaven er å vise hvordan matematikere har forsøkt å løse dette problemet gjennom årene. Problemstillingen oppgaven skal orientere seg rundt er det å vise en geometrisk tilnærming til sirkelens kvadratur. I besvarelsen av problemstilling tar oppgaven for seg passer – og linjalkonstruksjon og ser på hvordan forutsetningene gitt av denne type konstruksjon umuliggjører sirkelens kvadratur.

Innholdsfortegnelse

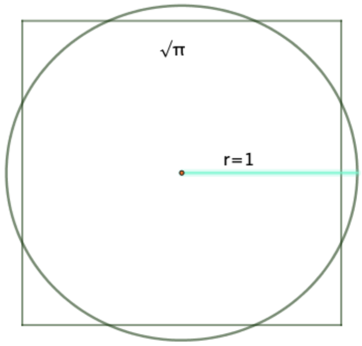
1.0 Innledning

De tre klassiske problemene, *vinkelens tredeling*, *kubens fordobling* og *sirkelens kvadratur*, har hatt betydelig innflytelse på matematikk gjennom matematikkens historie. Disse geometriske problemene har vært kjent i flere tusen år, og har fått enorm mengde oppmerksomhet opp gjennom årene. Flere matematikere har forsøkt å løse dem uten lykke. Denne oppgaven fokuserer på det sistnevnte problemet. Problemet av sirkelens kvadratur er svært kjent for sitt uløselig. Det tok matematikere to tusen år å bevise at dette problemet er uløselig. I dag er forsøket på å kvadrere sirkelen et metafor på å forsøke det umulige. I denne oppgaven skal vi se hvordan matematikere forsøkte å løse dette problemet. Vi skal også se på passer - linjalkonstruksjon av ulike type tall. Vi skal se på hvilke type tall som er konstruerbare med linjal og passer og hvilke som ikke er det. Til slutt skal vi se på hvordan vi kan besvare sirkelens kvadratur ved hjelp av moderne matematikk.

1.1 Problemstilling

Oppgavens problemstilling, som oppgavens tittel tilsier, er en geometrisk tilnærming til problemet om sirkelens kvadratur. Kort sagt skal denne oppgaven svare på spørsmålet: er det mulig å konstruere en sirkel og et kvadrat med samme areal med passer og linjal. Problemet var noe som oldtidens matematikere strevde med, og ble ansett som et uløselig matematisk problem. Problemet kan spores helt tilbake til Ahmes – Papyrusen, som var en matematikk papyrus fra oldtidens Egypt. Rullen er en av de viktigste kildene om oldtidens egyptiske matematikk.

Sirkelens kvadratur 1.1 : *Gitt en sirkel med vilkårlig radius, er det mulig å lage et kvadrat med samme areal som den gitte sirkelen ved å bruk av linjal og passer ?*



Figur 1: Illustrasjon av sirkelens kvadratur

Nå har det blitt nevnt at de klassiske problemene er uløselige. Men problemene er imidlertid bare uløselig under visse forutsetninger. Forutsetningene er at konstruksjonen skal skje med passer og linjal, og konstruksjonen skal skje med et endelig antall steg. Vi skal se nærmere på disse forutsetningene senere i oppgaven. Sirkelens kvadratur sammen med de to andre klassiske problemene blir derfor betegnet konstruksjonsproblemer.

1.3 Motivasjon for valg av problemstilling

Geometri har vært et felt som jeg har hatt stor interesse i. Interessen min skyldtes i blant annet fascinasjonen jeg hadde for konstruksjon av ulike geometriske figurer og former. Spesielt, arabisk – islamsk geometri var en del av geometrien som jeg synes var ekstra spennende. Geometri skiller seg ut fra andre matematiske grener i at det ikke bare handler om utregning og manipulering av tall og symboler, men om matematisk bevis og hvordan disse bevisene brukes og ikke minst hvor disse bevisene kommer fra. Jeg valgte denne oppgaven i håp om å utvide mitt horisont i geometri og abstrakt algebra og utfordre meg selv ettersom disse matematiske feltene ikke er mine sterkeste felt.

1.4 Oppgavens struktur

Denne oppgaven er todelt. I første del av oppgaven handler om geometrisk konstruksjon av ulike type figurer og tall. Konstruksjonen av disse figurene og tallene er gjort i Geogebra. Konstruksjonene tar utgangspunkt i konstruksjonsreglene for passer – og linjalkonstruksjon som har eksistert siden antikkens hellas. Selv om figurene ikke er konstruert manuelt av meg med passer og linjal, følger de prinsippet i konstruksjonsreglene. Første del av oppgaven tar derfor utgangspunkt i gresk matematikk, spesielt Euklidsk geometri og drøfter passer – og linjalkonstruksjon. Andre del av oppgaven handler om hvordan vi kan besvare sirkelens kvadratur ved hjelp av moderne matematikk. I kapitel 4 vil jeg presentere en av de viktigste algebraiske strukturene, nemlig kroppsteori og drøfte hvordan kroppsteori gir endelig svar på problemet om sirkelens kvadratur. Alle figurer og bilder i denne oppgaven er laget av meg i appen GeoGebra.

2.0 Gresk geometri

Siden oppgavens problemstilling hadde sin utspring i antikkens Hellas, er det rimelig å starte å starte her. I dette kapitelet skal vi se nærmere på grekernes oppfatning av ulike kategorier av tall og gresk geometri i perioden 300 f.v.t. Gresk matematikk har vært en viktig forløper for moderne matematikk. I diskusjonen og forsøket om å løse for eksempel de klassiske problemene, har greske matematikere bidratt betydelig i hvordan moderne matematikk er i dag. Siden problemstillingen tar en geometrisk tilnærming til sirkelens kvadratur, vil jeg legge mest fokus på geometrien i den greske matematikken. Geometri er tross alt, kjernen i gresk matematikk. Før vi går i gang med drøfting av gresk geometri, vil jeg i neste delkapittelet presentere noen kategori av ulike tall vi operer med i matematikken. I moderne matematikk operer vi nemlig med ulike type tall med ulike egenskaper. Vi skal se på definisjonen av disse tallene i dette delkapittelet. Egenskapene til de ulike tallene kommer vi inn på gjennom hele oppgaven.

2.1 De naturlige tallene og heltallene

De fleste av oss blir eksponert til matematikk er i form av tellbare tall. De første tallene som har vært kjent for menneskene intuitivt er de *naturlige tallene*. Disse er positive *heltall* eller *ikke – negative heltall*. Grunnen til at man antar at de naturlige tallene kommer intuitivt er fordi de naturlige tallene kan enkelt representeres med konkrete gjenstander; det vil si virkelige gjenstander. Vi kan for eksempel ha 1 eple, 2 epler, 3 epler og så videre. Mengden av naturlige tall angis med symbolet $\mathbb{N}$, og inkluderer vanligvis ikke tallet null når dette symbolet brukes. Dersom vi tar med null i mengden av naturlige tall, kan vi presisere dette ved å bruke symbolet $\mathbb{N}_0$. Null representere da at vi ikke har noen epler dersom vi følger eksempelet ovenfor. Så har vi *heltallene*. Mengden av heltallene angir vi med symbolet $\mathbb{Z}$, og dette er mengden som inkluderer de naturlige tallene, 0 og negative verdier av de naturlige tallene. De negative tallene er ikke like lett å konkretisere som de naturlige tallene, men disse er likevel ikke det vanskeligste å forstå.

2.2 De rasjonale og irrasjonale tallene

De *rasjonale tallene* er tall som kan uttrykkes som kvotienten eller brøken mellom to heltall. Heltallene kan være positive eller negative. Mengden av rasjonale tall angis med symbolet $\mathbb{Q}$ Alle heltallene er i mengden av rasjonale tall. De rasjonale tallene kan skrives som desimaltall med endelig eller uendelig desimaler. De uendelige desimalene gjentar seg vanligvis etter et visst mønster. De *irrasjonale tallene* er tall som ikke er de tallene vi har sett på ovenfor. Disse er tall som ikke kan uttrykkes som forhold mellom heltallene. Både rasjonale og irrasjonale tall kan uttrykkes som desimaltall. Det som imidlertid skiller irrasjonale tall fra rasjonale tall er at et irrasjonalt tall har ingen periodiske desimalutvikling. Det vil si det er ingen mønster i desimalfølgen. Eksempler på noen irrasjonale tall er π, e og $\sqrt{2}$. De rasjonale og irrasjonale tallene danner til sammen de reelle tallene. Mengden av disse symboliserer vi med $\mathbb{R}$.

2.3 Endelig og uendelig mengder av tall

Mengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ er uendelige, men vi sier likevel at de er tellbare. En mengde er tellbar dersom det har samme kardinalitet som en annen mengde som er tellbar. Mengden av naturlige tall $\mathbb{N}_0$ er en tellbar mengde, og siden det finnes en – til – en korrespons mellom $\mathbb{N}_0$ og $\mathbb{Z}$, er også $\mathbb{Z}$ tellbar. En – til – en korrespondens mellom mengdene, vil si at hvert element i den ene mengden kan forbindes med ett og bare ett element i den andre mengden. Dette kan vi symbolisere slik $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, og vi sier at mengden av de naturlige tallene $\mathbb{N}$ er ekvivalente med mengden av heltallene $\mathbb{Z}$ (Feferman, c1964, s. 64). Det samme gjelder for mengden av $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$. Mengden av reelle tall derimot er uendelig, men ikke tellbar. Reelle tall kan vi med andre ord si er tall som kan representere punkter på en uendelig lang tallinje. Vi kan pakke tallinjen uendelig tett med rasjonale tall, men det vil likevel fortsatt være mulig å smette inn uendelige mange irrasjonale tall inn mellom dem. Vi kan si at mengden av de reelle tallene er mer uendelig enn mengden av de naturlige tallene. Med andre ord; det finnes flere reelle tall enn naturlige tall. Dette er en grov forklaring på hvorfor de reelle tallene $\mathbb{R}$, ikke er tellbare.

2.4 De komplekse tallene

Vi har også komplekse tall som inneholder alle de tallene vi har nevnt til nå. Komplekse tall består av en reell og en imaginær del, og symboliseres med $\mathbb{C}$. Vi kan skrive de komplekse tallene på følgende form:

$$z = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}i, \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{R}$$

Sammenhengen mellom de ulike type tallene kan illustreres med et venn – diagram slik:

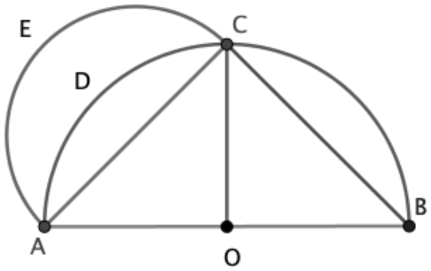
Figur 2: Ulike type tall

De komplekse tallene er nødvendige for å løse ulike type likninger som ikke har reelle løsninger. For eksempel, andregradslikningen $x^2 + a = 0$. Løsningen på denne likningen er $x^2 = -a \implies x = \sqrt{-a}$. Vi ser at a er et negativt tall. Det finnes derfor ingen reelle tall som passer i likningen. Med andre ord, det finnes ingen positive eller negative tall som vi kan multiplisere med selv og få et negativt resultat. Jeg anser definisjon av de ulike type tallene som svært relevant for besvarelsen av oppgaven, og det er av den grunn at jeg har listet dem opp slik. Senere i oppgaven skal vi se på konstruksjon av disse tallene; hvilke som er konstruerbare med linjal og passer og hvilke som ikke er det, og hvorvidt det er relevant for problemet om sirkelens kvadratur.

2.5 Hippokrates luner

En av oldtidens greske matematikere som arbeidet med sirkelens kvadratur, var Hippokrates. Hippokrates levde fra ca. 470 – 410 f.v.t, og kom fra Khios utenfor Lilleasia. Han var en av pytagoreerne og var en dyktig matematiker som har bidratt betydelig til senere matematikk, spesielt i geometri. Hippokrates hadde omfattende geometriske kunnskaper og arbeidet med store geometriske problemer som blant annet *kubens fordobling* og *vinkelens tredobling* og ikke minst *sirkelens kvadratur*. I forbindelse med sirkelens kvadratur, klarte han å kvadrere spesielle måner. Geometri var en sentral del av utdanningen til grekerne, og var et viktig tegn på sivilisasjonens adelighet. Grekerne så på tegn av geometri i en sivilisasjon som tegn på siviliserte mennesker. Ordet geometri stammer fra latinsk og betyr måling av jordstykker

(Latinsk ordbok: latinsk - norsk, s. 361). I arbeidet om sirkelens kvadratur oppdaget Hippokrates at visse deler av sirkelflaten kunne beregnes eller konstrueres. Disse konstruksjonene av sirkelflaten gjort av Hippokrates fikk stor oppmerksomhet. Disse ble i senere tid betegnet som Hippokrates luner. Ordet luner stammer fra det greske ordet *luna*, og betyr måned (Latinsk ordbok: latinsk - norsk, s. 486). Disse delene av en sirkelflaten ble derfor kalt luner da de har form som minner om en halvmåne. Figuren nedenfor viser en slik lune.



Figur 3: Illustrasjon av en av Hippokrates luner

Hippokrates viste at arealet av halvmånen ADCE er like stor som arealet av trekant AOC. Hippokrates resultatet er ikke noe vanskelig å utlede for oss som vet at arealet av en sirkel med diameter d er $\frac{\pi d^2}{4}$.

Teorem 2.5.1: *To sirkulære områder er i samme forhold som kvadratene på diameterne.*

Vi vet imidlertid ikke hvordan Hippokrates beviste likheten mellom disse to områdene, men vi antar at han tok utgangspunkt i gyldigheten til teoremet ovenfor (Suzuki, 2009, s. 25). I dag ville vi formulert forholdet mellom to sirkulære arealer som lik forholdet mellom diameterne opphøyd i andre potens. Det virker at Hippokrates var den første matematikeren til å kvadrere en figur med bue. Det å kvadrere luner var nesten like populært om problemet om sirkelens kvadratur. Gjennom årene har mange matematikere gitt flere løsninger og forklaringer på problemet av kvadrering av ulike luner. Hippokrates har for eksempel kvadrert flere luner mens han levde. La oss se hvordan vi kan løse eksemplet ovenfor med utgangspunkt i litt mer moderne matematikk.

Vi skal vise at arealet av lunen eller sigden ADCE er lik arealet av trekant AOC. Hippokrates løste dette problemet ved hjelp av Pytagoras læresetning i tillegg til teoremet ovenfor. Definisjon av Pytagoras læresetning går som følgende:

> **Teorem 2.5.2:** *Gitt en rett – vinklet trekant med sidene a, b og c hvor a og b er katetene og c er hypotenusen. Da er* $a^2 + b^2 = c^2$

Vi ser at trekant AOC er likebeint, det vil si sidene AO og OC er like lange. Ut fra dette får vi

$$AC^2 = 2AO^2, \qquad AC = AO\sqrt{2}$$

Videre kan vi utlede AB:

$$AB = 2AO = \frac{2AO}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}AO = \sqrt{2}AC$$

Siden arealet av en sirkel er proporsjonal med sin diameter kvadrert, vil halvsirkel ACB ha dobbel så stor areal som sigden ADCE.

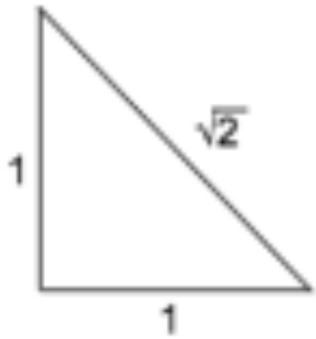
$$Areal(ACB) = 2 \cdot Areal(ADCE)$$

Vi kan og si at sigden har samme areal som kvartsirkelen AOC. ■

Hvis grekerne klarte å kvadrere deler av en sirkel slik som Hippokrates klarte, hvorfor var det problematisk for dem å gjøre det samme med hele sirkelen?

2.6 Gresk geometri og tallteori

Grekerne kjente ikke til alle de ulike type tallene vi kjenner til i dag, men de bidro likevel betydelig til utviklingen av moderne matematikk, spesielt geometri og tallteori. Noen av de fremtredende matematikerne i antikkens Hellas var blant annet Pytagoreerne. De greske matematikerne aksepterte bare de positive rasjonale tallene $\mathbb{Q}^+$ og opererte bare med disse. Den fremragende oppfatningen av tall i antikkens hellas, var at alle naturlige fenomener kunne beskrives som forhold mellom de positive heltallene. Dette var en realitet som var bredt akseptert av samtidens matematikere og filosofer. Ved å studere forholdet mellom heltallene kunne man avsløre alle undringer man måtte ha om verdenen. Selv om de fleste matematikerne hadde oppfatningen av at alle naturlige fenomener kunne beskrives med de positive rasjonale tallene, var det likevel noen matematikere som utfordret denne oppfatningen. En slik gresk matematiker var Hippasus av Metapontum. (Havil, s. 26). Hippasus var selv en av Pytagoreerne, og brukte Pytagoras kjente læresetning til å motbeviste den eksisterende ideen om at alle naturlige fenomener kunne beskrives som forhold mellom heltallene. Han viste at hypotenusen i en rett – vinklet trekant med kater lik 1, var et størrelse som ikke kunne beskrives rasjonalt. Med andre ord, en rett – vinklet trekant med kateter $a = 1$ og $b = 1$, vil ha hypotenusen $c = \sqrt{2}$. Men $\sqrt{2}$ var ikke et tall som samtidens matematikere kunne beskrive som forhold mellom to heltall og ble derfor ikke akseptert. Dermed var irrasjonale tall ikke akseptert av greske matematikere og filosofer, selv om det ble bevist at de eksisterer.



Figur 4: Bevis av irrasjonaliteten til $\sqrt{2}$.

Det sies at Hippasus ble bannlyst etter han oppdaget dette «hullet» i grekernes oppfatning av verden. I andre deler av verden derimot var irrasjonale tall akseptert; for eksempel i India og i den arabiske verdenen. Det sies at Hippasus var den første som introduserte konseptet av inkommensurabilitet i antikken Hellas. Om det faktisk var han som gjorde det, er det delte meninger om. Inkommensurabilitet blir benyttet i geometri om målbare størrelser (Havil, s. 25). Med sitt av bevis av eksistensen til $\sqrt{2}$, beviste Hippasus også at sidelengden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable. Oppdagelsen av dette konseptet er en av de mest bemerkelsesverdige oppdagelsene i gresk matematikk. I dag brukes begrepene kommersubilitet og inkommensurabilitet mindre enn før. I matematikken bruker vi i dag heller aritmetiske uttrykk for å forklare disse begrepene. Vi kan for eksempel si at dersom to størrelser er inkommensurabel er forholdet mellom disse størrelsene ikke rasjonal, men irrasjonal.

2.7 Passer – og linjalkonstruksjon

Mye av gresk matematikk er ikke overraskende nok basert i geometri. Til tross for dens utvilsomme bidrag i utviklingen av matematikk var gresk matematikk mangelfull i noen aspekter. Et eksempel på mangelheten i gresk matematikk har vi sett på allerede, nemlig det at de ikke aksepterte irrasjonale tall. Vi skal se på flere, men først skal vi se på definisjon av passer – og linjalkonstruksjon. I innledning nevnte vi at de klassiske problemene er uløselige under gitte forutsetninger. En av disse forutsetningene var at konstruksjonen skal kun gjennomføres med passer og linjal. En annen like viktig forutsetning var at konstruksjonen skal skje i endelig antall steg. Konstruksjonsreglene i moderne matematikk og i gresk matematikk er ganske like, men grekerne var nok mer strengere med sin passer – linjal konstruksjon. De viktigste konstruksjonsreglene er gitt under:

1. *En kan bare bruke passer og en vanlig linjal*
2. *Linjalen kan ikke brukes til måling av avstand.*
3. *Linjal skal ikke lengdeavmerkninger.*
4. *Linjalen er uendelig lang.*
5. *Passeren kan brukes til å slå en sirkel til å lage sirkler rundt et punkt, men det er* ikke tillat å *«bevege» passeren.*
6. *Passeren kan åpnes vilkårlig bredt*
7. *Konstruksjonen må utføres ved hjelp av endelig antall steg*

Det er usikkert hvem av de greske matematikerne som formulerte disse konstruksjonsreglene, men ifølge tradisjonen var det Platon som formulerte de. Disse reglene var utgangspunktet i alle form for geometrisk konstruksjon. Hippokrates var en av de første matematikeren til å lage en samling av geometriske elementer. Han samlet elementene i sin bok som het *The Elements*. Det sies at denne boken var en stor inspirasjonskilde for Euklid, som senere skrev det som er kjent som Euklids *Elementer*. Mye av matematikken før Euklid er det nesten ingen dokumentasjon av. Den første greske matematikerne som introduserte abstrakt tenkning i matematikk var Pytagoras. Han spiller derfor en fundamental rolle i matematikkens historie. Det sies at Pytagoras la geometrien på den stien den er på i dag. Vi kan anta at det vi i dag kaller euklidsk geometri fantes i en eller annen form før Euklid skrev *Elementer*. Grekerne anså linjene som de tegnet som en approksimasjoner av «virkelige linjer». Grekerne trodde at geometri representerte sannheten og den virkelige verdenen. Oppgaven til matematikere eller filosofer var da å oppdage denne sannheten i verdenen gjennom geometri. Svaret til spørsmål man hadde om virkeligheten eksisterte allerede der ute; man skulle bare finne konstruksjoner som ville tilsvare disse sannhetene.

2.8 Euklid Elementer

Euklid var en matematiker som levde i Alexandria i Egypt 300. f.v.t. Det er ikke mye som er kjent fra hans liv, men han blir ofte referert til som faren til moderne geometri. Hans verk *Elementer* er kanskje noe av det mest suksessfulle matematiske verket i historien. Verket var en kompleks samling og forklaring av alle kjente matematiske problemer på hans tid. Verket inkluderer verk av Pytagoras, Hippokrates og flere andre matematikere før han. Totalt inneholder verket 13 bøker med over 400 matematiske teoremer og bevis. Forklaringene og bevisene til Euklid er alle forankret i passer og linjalkonstruksjon. Geometri grenen som vi kjenner til i dag, kan grovt deles i euklidsk geometri og ikke Euklidsk geometri. Euklids geometri er, til den dagen i dag, like relevant som det var på Euklids tid. Euklids geometri var den gjeldende geometriske verket i geometri helt fram til 1800 – tallet. Etter 1800 – tallet ble det utviklet flere matematiske verk av matematikere som Jànos Bolyai, Nikolai Ivanovich Lobachevsky og Bernard Riemann, som åpnet nye dører innenfor geometrien. Disse matematikerne introduserte den såkalte hyperbolsk geometri, som vi i dag også kaller *ikke – euklidsk geometri*. (Kline, s. 861). Hyperbolsk geometri er form for geometri som ikke aksepterer Euklids femte postulat (*se figur 9*). Før det, forble *Elementer* den definitive boken ikke bare i geometri, men også i andre matematiske grener i over 2 tusen år. (Holme, s. 68). Selv om den systematiske oppbyggingen av matematikk på Euklid sin tid hadde atskillige mangler og bestod i mer eller mindre av tilfeldige setninger, har Euklid sitt verk – til tross for dets svakheter – fått stor respekt og beundring av både gamle og moderne matematikere.

Euklid utledet aksiomer som han mente var grunnlaget for all matematikk. Både postulatene og aksiomene var antagelser som Euklid mente var intuitive, men grunnleggende for å kunne bevise matematisk tenkning. I denne oppgaven skal vi fokusere mer på postulatene enn aksiomene. Selv om disse begrepene ofte betyr det samme og brukes om hverandre, er det likevel forskjell i akkurat denne sammenhengen. Postulater var ifølge Euklid sannheter eller fakta som ligger i grunn for geometri. Det vil si antagelser som bare gjelder for geometri. Aksiomer, på den andre siden, er grunnleggende antagelser eller sannheter som gjelder for andre grener av matematikk (Papatzacos, s. 206). Euklid, samt andre matematikere på hans tid, så på matematikk om en logisk vitenskap. Euklid og andre samtids matematikere visste at teoremer og bevis bygget på hverandre. Ved logisk utledning av matematiske setninger, må vi ha visse matematiske setninger som ikke krever bevis, mente Euklid. Ut fra disse grunnleggende matematiske setningene kan vi da utlede flere matematiske setninger. En slik matematisk setning som godtas uten bevis er definisjonen av et aksiom. Vi har sett på definisjoner av aksiomer og postulater. Det første Euklid starter med i *Elementer*, i bok I, er introduksjon av en rekke definisjoner. Noen av definisjonene er gitt under.

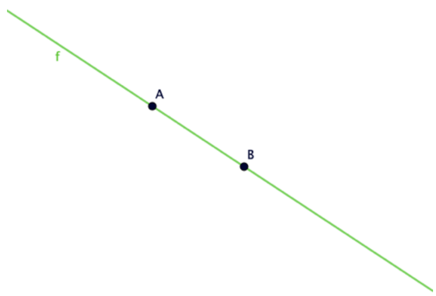
Definisjon 1 : *Et punkt er der som ikke har noen del.*
Definisjon 2 : *En linje er en lengde uten bredde.*
Definisjon 3 : *Endene av en linje er punkter*
Definisjon 4 *: En rett – linje er en som ligger jevnt med punkter på seg selv.*

Euklid skriver om 23 definisjoner i bok 1, men jeg har bare tatt med de fire ovenfor fordi det ikke er behov flere definisjoner for besvarelsen av oppgaven. Disse definisjonene, sammen med Euklids aksiomer og postulater er hentet fra Euklids *Elementer* (Euklid, ss. 153 - 156). De fem aksiomene og fem postulatene som Euklid utledet som skulle være grunnleggende for bevis av teoremer går som følgende:

Euklids aksiomer:

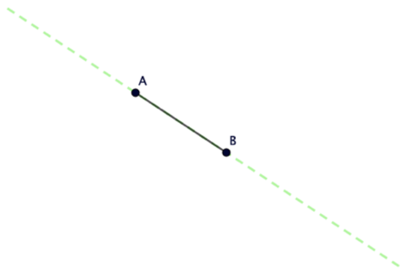
1. *Størrelser som er lik den samme størrelsen er like.*
2. *Hvis like størrelser legges til like størrelser, er de resulterende størrelsene like*
3. *Hvis like størrelser trekkes fra like størrelser, er de resulterende størrelsene like.*
4. *Sammenfallende størrelser er like.*
5. *En størrelse er større enn en av sine deler.*

Postulat 1. *Mellom to punkter kan det trekkes en linje.*



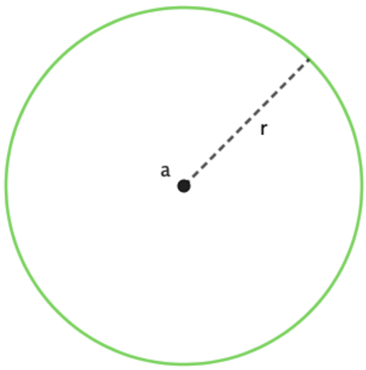
Figur 5: Postulat 1 visualisert

Postulat 2. *Et endelig linjesegment kan* forlenges til en vilkårlig lang rett – linje.



Figur 6: Postulat 2 visualisert

Postulat 3. *En sirkel med en vilkårlig radius, kan konstrueres rundt et hvilke som helst vilkårlig punkt.*

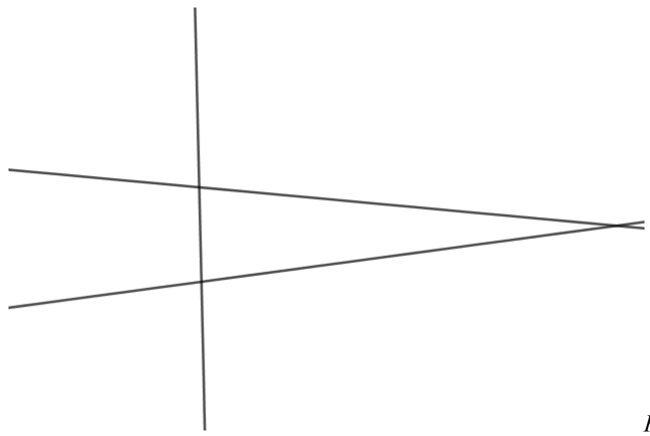


Figur 7: Postulat 3 sirkel rundt et vilkårlig punkt a med en vilkårlig radius r.

Postulat 4. *Alle rette – vinkler er like.*

Figur 8: De rette – vinklene α,β og γ = 90 °

Postulat 5. *Når en rett – linje skjærer to andre rett – linjer slik at summen av de indre vinklene på samme side er mindre enn to rette vinkler, vil de to rette linje møtes på den siden av den første rett – linjen hvor summen av de to indre vinklene var mindre enn to rette vinkler, når de rett – linjene forlenges mot det uendelige.*



Figur 9: Postulat 5

Geometrien i *Elementer* er hovedsakelig bygget på disse fem aksiomene og postulatene. Når man leser postulatenes skriftlige formulering er det tydelig at de er mangelfulle. Senere matematikere har fylt inn manglene av postulatene. Formuleringene er mangelfull i den forstand at Euklid tydeligvis mener mer enn det som er skrevet i postulatene. Før vi ser nærmere på dette, er det viktig å bemerke seg hvilke to type proposisjoner postulatene deles i. Vi kan dele postulatene i konstruksjonsoppgaver og teoremer. Konstruksjonsoppgavene er en utfordring til å konstruere en figur med gitte egenskaper, ut fra gitte premisser. Et teorem derimot er et utsagn om en gitt figur, som skal bevises. De tre postulatene er konstruksjonsoppgaver, mens de to siste er teoremer som skal bevises (Papatzacos, s. 83). I første postulat er det tydelig Euklid mener at mellom to punkter kan det trekkes *én og bare én linje*. I postulat nummer to, mener Euklid at en linje kan forlenges på bare én måte. I postulat tre er det også en del som er uskrevet. Det viser seg for eksempel at passeren som brukes i konstruksjon av en sirkel, bare må brukes på en måte. Det er gitt at vi har to eksisterende punkter, og passeren (den spisse enden) settes i et av disse eksisterende punktene, og «blyantenden» av passeren settes i det andre eksisterende punktet. Passeråpningen er den avstanden (sirkelens radius) mellom disse punktene. Siden vi ikke har tilgang til mye av matematikken fra Euklids tid, har vi heller ikke tilgang til detaljerte formuleringer. Derfor er det viktig for oss smette inn de detaljene som mangler i formuleringene. Det siste postulatet er det postulatet som har fått mest kommentarer fra matematikere gjennom historien. Dette er fordi postulatet anses som mer kontroversielt enn de andre postulatene. Postulat fem skiller seg ut fra de andre postulatene i at det ikke er et opplagt sannhet som er lett å bevise (Holme, Geometry: Our cultural Heritage, 2002, s. 71). I dag vet vi at det er umulig å bevise det femte postulatet ved hjelp de andre fire postulatene. Et annet alternativ formuleringer av det femte postulatene kan skrives slik: Gjennom et gitt punkt er det kun én parallell som kan tegnes til en gitt rett linje (Holme, Geometry: Our cultural Heritage, 2002, s. 71). I forsøket om å bevise dette postulatet har det blitt utviklet en rik oppfatning av geometri.

3.0 Passer – og linjalkonstruksjon av ulike tall

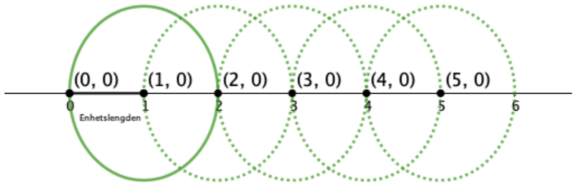
Konseptet av tall blir automatisk mer kompleks når man snakker om konstruksjonen av tall. I dette kapitelet skal vi se nærmere på hvordan vi kan konstruere ulike type tall det kartesiske planet. Det kartesiske planet er et rettvinklet koordinatsystem som var i bruk på 1600 – tallet. Planet ble først brukt av René Descartes, derav navnet. Det kartesiske planet kan man si er euklidsk rom med koordinater. Med dette planet ble geometri og algebra samlet i det vi i dag kaller analytisk geometri (Rouse, 2010, s. 223). Syntetisk geometri, i motsetningen til analytisk geometri, bruker ikke aritmetikk eller algebra, men bygger på rene geometriske utledninger. Gresk geometri er et eksempel på syntetisk geometri. Vi håper fram i tid i dette kapitelet og går vekk fra syntetisk geometri og dermed gresk geometri, og ser på passer – og linjalkonstruksjon av ulike tall ved hjelp av mer moderne matematikk. Vi tar fortsatt utgangspunkt i Euklid postulater, men konstruksjonen skjer i et kartesisk plan. Passer – og linjalkonstruksjon er konstruksjon som er laget med utgangpunkt i de tre første postulatene til Euklid (Venema, c2006, s. 265). I dag definerer vi konstruerbare tall som tall som kan være lengder av et linjestykke i det kartesiske planet. Disse tallene kan konstrueres ved å kombinere de fire aritmetiske regneoperasjonene: addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon.

> **Definisjon 3.0.1 :** *Et konstruerbart tall er et tall som kan representeres ved et endelig antall manipulering av de fire regneoperasjonene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og et endelig kvadratrøtter av heltallene.*

3.1 Konstruksjon av naturlige tall $\mathbb{N}$ og heltallene $\mathbb{Z}$

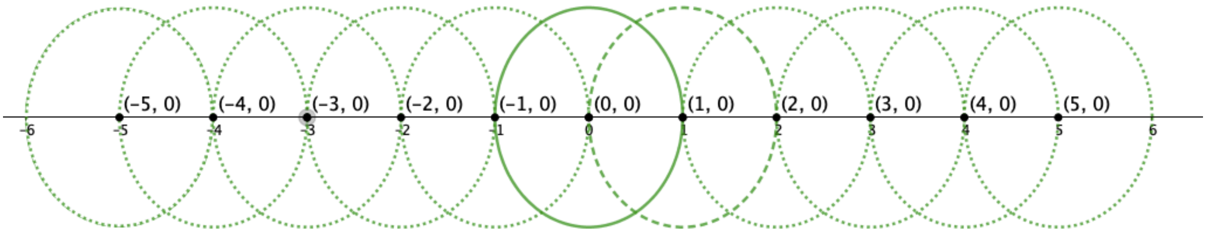
De naturlige tallene ser vi på som de enkleste tallene. Disse tallene kan oppfattes som fundamentale blokker i matematikk, men det er de jo naturligvis ikke. Matematikk bygger på mengdeteori, og naturlige tall er en mengde. Vi kommer nærmere inn på mengde teori litt senere i oppgaven. Når vi snakker om konstruksjon av tall i imidlertid er det lettest å starte med konstruksjon av de naturlige tallene og heltallene. Dette er fordi konstruksjon av disse tallene er relativt lett å visualisere. For konstruere et tall ved hjelp av linjal og passer må vi ha et utgangspunkt, et gitt linjesegment. Konstruksjon i det kartesiske planet gir mulighet til å sette verdi på linjesegmentene vi konstruerer.

Gitt to punkter 0 og 1 på en tallinje. Ved Euklids postulat 1 kan vi trekke en linje mellom de to punktene. Lengden av linjestykket mellom punktene kaller vi for enhetslengden og antar er av lengde 1. Vi forlenger linjen med utgangspunkt i postulat 2. Nå kan vi konstruere en sirkel S med sentrum i punkt 0 med radius lik 1. Vi gjentar samme konstruksjonen, men nå med sentrum i 1. Den nye sirkelen, S_1 vil snitte i punktet 0, og et nytt punkt som vi kan kalle punkt 2. Ved denne framgangsmåten kan vi konstruere de naturlige tallene, (*se figur 10*).



Figur 10:Konstruksjon av de naturlige tallene

Den opprinnelige sirkelen vi konstruerte i punkt 0 snitter linjen i et annet punkt, nemlig -1. Konstruerer vi en ny sirkel med sentrum -1 og radius 1, vil den snitte linjen i et nytt punkt -2. Fortsetter vi slik kan vi konstruere alle heltallene $\mathbb{Z}$**.**



Figur 11: Konstruksjon av heltallene

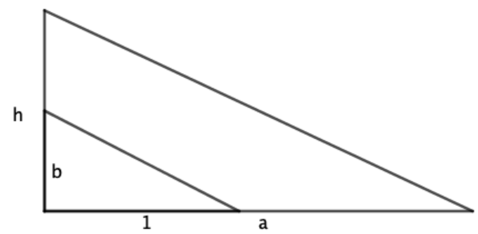
Grekerne hadde ingen forhold til negative tall. De aksepterte ikke disse tallene fordi det gikk i mot dere forestilling om virkeligheten. Den første matematikeren som noterte negative tall som punkter på en tallinje var John Wallis, og Wallis levde på 1600 – tallet. Tallinjen var delt i en positiv del (naturlige tallene) og en negative del. De positive tallene går mot høyre, men de negative tallene mot venstre fra 0. Nå har vi sett på to enkle eksempler på hvordan man kan konstruere naturlige og heltallene ved hjelp av linjal og passer. Ved bruk av algebra som verktøy blir konstruksjon av tall noe enklere. La oss nå se på hvordan vi kan kombinere de fire aritmetiske regneoperasjonene til konstruksjon av tall før vi går videre og viser konstruksjonen av litt mer spennende tall.

3.1.1 Regneoperasjoner for konstruerbare tall – Addisjon og subtraksjon

Ved å kopiere lengden av et linjestykke og så legge kopien etter linjestykket langs en rett linje kan vi konstruere alle naturlige tall. Ved å legge til den kopierte linjen i motsatt retning kan vi konstruere heltallene. Vi går ut i fra at vi vet hvordan man legger sammen og trekker fra hverandre tall. Positive tall den ene veien og negative tall den andre veien. De konstruerbare tallene kan summeres og subtraheres fra hverandre, og resultatet vil være nye konstruerbare tall. De konstruerbare tallene er kommutative under addisjon og er dermed en abelsk gruppe. Det vil si at det er har ingenting å si hvilke elementer vi setter først når vi adderer to konstruerbare elementer, resultatet vil være det samme. Med andre ord rekkefølgen vi adderer i spiller ingen rolle. Dette er en algebraisk egenskap som de konstruerbare tallene har. Vi kommer tilbake til de algebraiske egenskapene til konstruerbare tall litt senere i oppgaven.

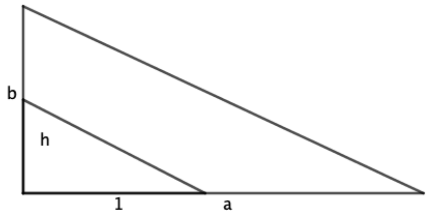
3.1.2 Regneoperasjon for konstruerbare tall – Multiplikasjon og divisjon

I geometrien er det vanlig å se på to lignende trekanter når man ser på proporsjonalitet. Dersom det er mulig å konstruere to lignende trekanter kan vi også konstruere produktet av to konstruere bare tall. Geometrisk multiplikasjon av tall *a* og *b* kan vi beskrive som følgende: Vi setter av linjestykket med lengde 1 langs x – aksen og forlenger den slik at den har lengde *a*. Vi setter linjestykket *b* langs y – aksen og forlenger denne også slik at den får lengden h. Vi trekker en linje fra enden av enhetslinja og *b.* Til slutt trekker vi linje mellom enden på linje *a* og *b*. Vi har da fått to likeformede trekanter. Vi kan nå finne forholdet mellom sidene i trekanten ved bruk av formlikhet. Vi får $\frac{h}{a} = \frac{b}{1} \to h = ab$.



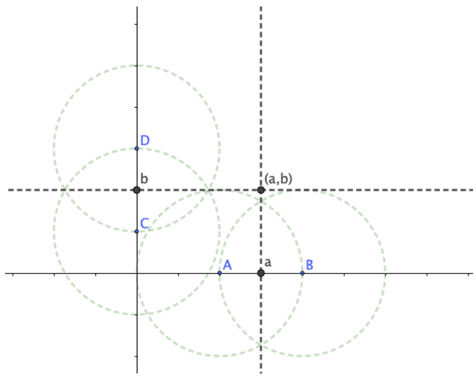
Figur 12: Geometrisk multiplikasjon av heltallene

Geometrisk divisjon foregår nesten på samme måte som multiplikasjon. La oss si at den kjente siden h i disse trekantene er den siden vi opprinnelig kalte *b*. Da blir forholde $\frac{h}{1} = \frac{b}{a} \to$ $h = \frac{b}{a}$. Vi kan da si, gitt to konstruerbare tall *a* og *b,* kan vi konstruere produktet *ab*, summen (*a* +*b)*, differansen (*a – b)* og divisjon $\left(\frac{a}{b}\right)$ $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$



Figur 13: Geometrisk divisjon av heltallene

Vi har nå sett på hvordan vi kan konstruere de naturlige tallene og heltallene ved linjal og passer i det kartesiske planet. Vi har sett at vi kan konstruere punktene (n,0) hvor n $\in \mathbb{N}$ og (m, 0) hvor m $\in \mathbb{Z}$**.** Hva med punktet $(a, b), a, b \in \mathbb{Z}$?**.** Siden a og b er heltall, vet vi at de er konstruerebare. Ved hjelp av linjal og passer kan vi konstruere et slikt punkt i det kartesiske planet som vist på figuren nedenfor.



Figur 14: Geometrisk konstruksjon av et vilkårlig punkt (a, b)

Vi velger to vilkårlige punkter på x – og y – aksen, for eksempel et punkt $(a, 0)$ på x – aksen og et punkt $(0, b)$ på y – aksen. Vi lager to linjestykker som går gjennom punkt a og punkt b, med sentrum i henholdsvis a og b. Vi konstruere deretter to sirkler i enden av linjestykket med sentrum i a. Vi markerer av skjæringspunktene mellom disse to sirklene, og trekker en linje mellom dem. Denne linjen er da midtnormalen (den svarte stiplete linjen) som går gjennom punkt a. Deretter konstruerer vi to sirkler på y – aksen, en sirkel i hver ende av linjen med sentrum b. Trekker en linje mellom skjæringspunktene mellom de to sirklene. Vi markere deretter skjæringspunktet mellom de to midtnormalene, og finner punktet (a, b).

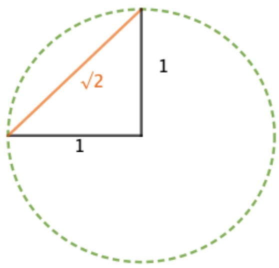
3.2 Konstruksjon av kvadratrøtter av positive heltall

Vi kan også konstruer kvadratroten av et hvilket som helst tall, gitt at det tallet er konstruert bart. Forklaring og bevis for hvordan dette er mulig kommer vi tilbake til senere i oppgaven.

Nå skal vi bare se på hvordan dette er mulig geometrisk. Hvert konstruerbart tall er et fullstendig kvadrat av et konstruerbart tall.

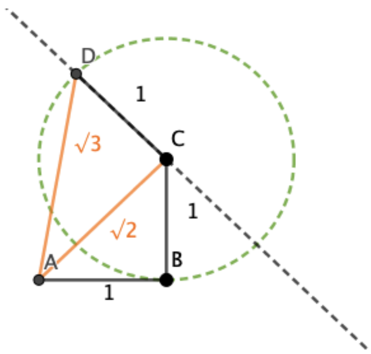
Teorem 3.2.1: *Gitt et* $k \in K$*, hvor* K *er mengden av konstruerbare tall. Da finnes det et* $r \in K$ *slik at* $r^2 = k$.

Hvordan kan vi vise dette ved geometrisk konstruksjon? La oss først se på et enkelt eksempel som har vært kjent lengde, nemlig $\sqrt{2}$. Gitt en rett – vinklet trekant hvor begge katene er av lengde 1, så vil hypotenusen være $\sqrt{2}$. Dette kan vi vise ved å konstruere en sirkel med radius 1. Deretter konstruere en normal midt på diameteren, og markerer skjæringspunktet mellom normalen og sirkelen. Til slutt trekker vi linje mellom skjæringspunktet og enden på diameteren, (Se figur 15). Ved hjelp av Pytagoras læresetning kan vi da si at lengden på den linjen vi trakk er $\sqrt{2}$.



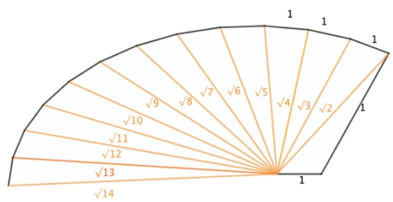
Figur 15: Geometrisk konstruksjon av $\sqrt{2}$

Videre kan vi konstruere $\sqrt{3}$. Vi vet at 3 er element i mengden av heltallene og er derfor konstruerbart. Dette kan vi vise er konstruerbar på samme måte som viste at $\sqrt{2}$ er konstruerbar. Vi tar utgangspunkt i konstruksjonen ovenfor og konstruer en trekant med hypotenus lik $\sqrt{3}$.



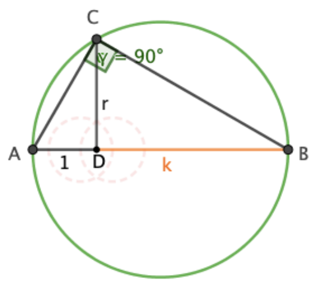
Figur 16: Geometrisk konstruksjon av √3

Vi konstruerer først en normal i punktet C gjennom linjen AC. Deretter konstruerer vi en sirkel rundt punkt C med radius 1. Vi markerer skjæringspunktet mellom sirkelen og normalen, og trekker en linje ned fra skjæringspunktet til punkt A. Vi har nå en rett – vinklet trekant med kateter √2 og 1. Bruker vi igjen Pytagoras læresetning og kan vi regne oss fram til at lengden AD = √3. Slik kan vi fortsette å konstruere kvadratrøtter av de naturlige tallene i det uendelige.



Figur 17: Geometrisk konstruksjon av $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$

Figuren ovenfor viser konstruksjon av, $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$. Vi har nå sett på hvordan kvadratrøtter av de naturlige tallene kan konstrueres. Hva med resten av de positive rasjonale tallene? Kan de også konstrueres med utgangspunkt i samme prinsipp? Dersom et tall k er konstruerbart, da er $\sqrt{k}$ også konstruerbart. Geometrisk kan vi illustrere det slik:



Figur 18: Geometrisk konstruksjon av $\sqrt{k}, k \in \mathbb{Q}^+$

Vi konstruerer en sirkel med radius $\frac{k+1}{2}$ og markerer av en lengde 1 som vist på figur 18. Deretter konstruerer vi en normal i punkt D. Vi trekker linjene AB, AC og BC og DC. Vi ser at vi har fått flere formlike trekanter. Vi kan nå sammenligne og se på forholdet mellom trekant ADC og DBC. Vi kan si at $< C$ er 90° med utgangspunkt i Tales ´teorem eller halvsirkelteoremet. Teoremet sier at når en trekant er innskrevet i en sirkel med en side som diameter, så vil trekanten være rett – vinklet. Forholdet mellom sidene i de to formlike trekantene kan beskrives slik.

$$\frac{r}{1} = \frac{k}{r} \rightarrow r^2 = k \rightarrow r = \sqrt{k}$$

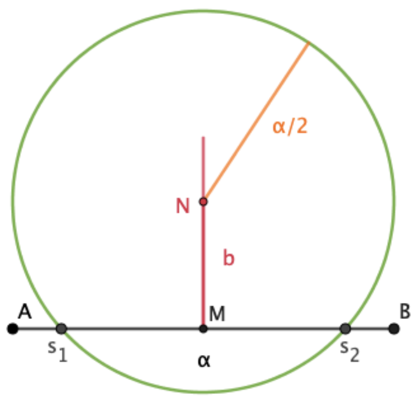
■

3.3 Geometrisk konstruksjon av røttene i en andregradslikning

I dette delkapittelet skal vi vise at vi kan konstruere røttene til et hvert andregradspolynom med rasjonale koeffisienter geometrisk. Vi bruker andregradslikningen

$$x^2 - ax + b = 0$$

der a og b er konstruerbare tall. Vi starter med sette av punktene A og B på en linje. $\parallel AB \parallel = \alpha$. Vi konstruerer midtpunktet M på AB og oppreiser en normallinje i M. Vi lar N være et punkt på normalen slik at $\parallel MN \parallel = b$. Vi slår deretter en sirkel om N med radius $\frac{\alpha}{2}$. Vi lar $S_1 og\ S_2$ være skjæringspunktene mellom AB og sirkelen. Da har vi de to løsningene $x_1 = \parallel S_1B \parallel\ og\ x_2 = \parallel S_2B \parallel$. For at vi skal ha løsninger må $\frac{\alpha}{2} - b\ \geq 0\ eller\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - b\ \geq 0$, som tilsvarer at diskriminanten $D = a^2 - 4b^2 \geq 0$.



Figur 19: Geometrisk konstruksjon av røttene i en andregradslikning

Vi kan bruke Pytagoras læresetning til å regne ut $x_1 og\ x_2$. Vi får

$$x_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - b^2\right)} = \frac{\left(\alpha \pm \sqrt{(\alpha^2 - 4b^2)}\right)}{2}$$

Resultatet ser vi stemmer godt med abc – formelen. Så langt har vi sett at alle rasjonale tall, alle mulige kvadratrøtter og røttene til et hvilket som helst andregradslikning med rasjonale koeffisienter er konstruerbare med passer og linjal. Er det mulig å konstruere enda flere tall? La oss se.

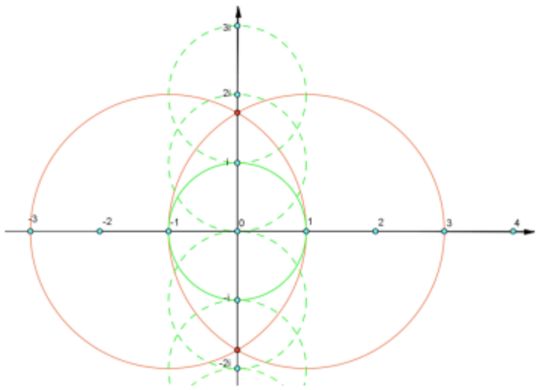
3.4 De komplekse tallene

Komplekse tall har vært et mysterium for mange matematikere i flere tusen år. Matematikere gjennom historien hadde ingen klar definisjon av hva komplekse tall var før 1800 – tallet. Dette var fordi interessen for de komplekse tallene var ikke varig før Carl Fredrik Gauss viste nytten av disse tallene. Grekerne, som vi har sett tidligere, aksepterte ikke negative tall, og de aksepterte heller ikke kvadratrøtter av negative tall. Det er ingen overraskelse at de ikke brydde seg om konstruksjon av disse tallene heller. Første gangen kvadratroten av et negativt tall ble skrevet ned var på 1500 – tallet av den italienske matematikeren, Girolamo Cardano (Gonzáles - Velasco, s. 148). Cardano er mest kjent for sin bok Ars Magna, hvor han publiserte løsninger av tredje – og fjerdegradlikninger. De komplekse tallene oppstod i forbindelse med disse likningene, spesielt tredjegradslikninger. Den klassiske algebraen, som handler i stort grad om hvordan man løser første – andre – tredje og fjerdegradslikning har eksistert i flere tusen år. Men fram til ca. 1500 – tallet aksepterte man bare positive løsninger til disse likningene. De komplekse tallene gir løsninger til algebraiske likninger med negative rot. Tidligere i oppgaven så vi på eksempelet $x^2 + 1 = 0,\ x = \sqrt{-1}$. Første teorien om de komplekse tallene ble gjort av en annen italiensk matematiker, nemlig Rafael Bombelli. Teorien bidro i å avmystifisere røtter av negative tall. Men det var ikke før Leonhard Euler det ble brukt notasjonen i for $\sqrt{-1}$ (Rouse, 2010, s. 185). Euler for var den første matematikeren som brukte $i = \sqrt{-1}$ i sine beregninger. Dette ble betegnet den imaginære enheten og har egenskapen $i^2 = -1$.

3.4.1 Geometrisk framstilling av de komplekse tallene

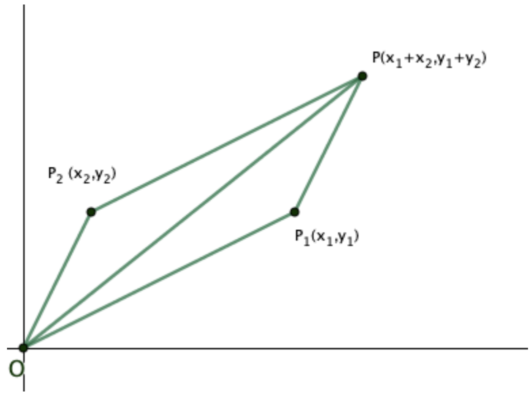
Komplekse tall kan representeres geometrisk i et kartesisk koordinatsystem som de andre tallene vi har sett på så langt. Et hvert kompleks tall $z = (a, b) = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ kan representeres geometrisk i Det komplekse planet, hvor x – aksen utgjør den reelle delen og y

– aksen utgjør den imaginære delen. Det komplekse planet blir også kalt for « det gaussisk plan» etter Carl Fredrik Gauss. Nå skal vi se hvordan vi kan konstruere noen av de komplekse tallene i et koordinatsystem. For å kunne konstruere noen av de komplekse tallene må vi ha det komplekse planet. For å ha det komplekse planet beholder vi den reelle tallinjen som inneholder de rasjonale tallene og de irrasjonale tallene. Vi konstruere en midtnormal i punktet O, altså $(0,0)$. Dette gjør vi ved å markere to punkter a og b, der $a \neq b$ og avstanden fra a til O og avstanden fra O til b er lik. Vi konstruere en sirkel i punkt a, med radius lik lengden av aO og en ny sirkel i punkt b med radius lik lengden av Ob. Vi trekker en normal gjennom punktene der sirklene skjærer hverandre. Vi har nå fått det komplekse planet med en reell og en imaginær – akse. Vi kan nå fylle den imaginære aksen med komplekse heltall på samme måte som vi konstruerte de vanlige heltallene.



Figur 20: Konstruksjon av de komplekse heltallene

Spørsmålet nå er om det er mulig å konstruere de komplekse punktene i det komplekse planet med linjal og passer? Vi har sitt at de komplekse punktene er definert ved $z = a + bi,\ \ a, b \in \mathbb{R}$. Dersom et kompleks tall α er konstruerbart, er også resultatet vi får når vi adderer, subtrahere, multipliserer eller dividerer det tallet. Summen av for eksempel to komplekse tall z_1 og z_2 kan bestemmes ved hjelp av parallellogramloven for summering av vektorer (Feferman, c1964, s. 310).



Figur 21: Geometrisk summering av to komplekse tall

Denne loven gjelder for alle verdier av x_1, y_1, x_2, y_2. Konstruksjonen av de to komplekse tallene z_1 og z_2 tar utgangspunkt i at punktene P_1 og P_2 er konstruerbare.

3.5 Mengden av de konstruerbare tallene

Definisjon 3.5.1: Alle tall som er i mengden av konstruerbare tall kan beregnes ved et endelig antall $+, -, \times, \div, \sqrt{}$ operasjoner på de rasjonale tallene.

Så langt har vi sett at vi kan konstruere av $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, og\ \mathbb{Q}$ ved hjelp av de fire regneoperasjonene $+, - , \times\ \ og\ \ \div$. Vi har også sett på at $\sqrt{n}, n\ \epsilon\ \mathbb{Q}^+$. Med utgangspunkt i eksemplene ovenfor skal vi forsøke å vise at et hvert punkt $\mathbb{Q}: (\alpha, \beta)$ kan konstrueres fra gitte punkter, med passer og linjal i samsvar med reglene i seksjon 2.2.

Teorem 3.5.1 : *Gitt punktene $P_1: (a_1, b_1), (a_2, b_2) \dots, P_n: (a_n,)$, der koordinatene er i $\mathbb{Q}$. Og der punktene $(0{,}0), (1{,}0)\ eller\ (0{,}1)$ er også gitte, kan punktet $\mathbb{Q}: (\alpha, \beta)$, konstrueres med passer og linjal med utgangspunkt i de gitte punktene og i henhold til reglene ved at $\alpha\ og\ \beta$ beregnes fra $a_1, b_1, \dots a_n, b_n$ved hjelp av endelig antall addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon, og kvadratrotoperasjoner.*

Vi vet at en rett linje er bestemt av to punkter. For eksempel punktene (a, b) og (c, d). Vi kan utlede en formel for linjen ved hjelp av topunktsformelen:

$$y - b = \frac{d - b}{c - a}(x - a)$$

Vi antar at alle $(a, b, c\ og\ d)$ er alle konstruerbare tall, som medfører at koeffisientene til linjen er konstruerbare. Vi lar så

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \qquad \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2$$

være to konstruerbare linjer, det vil si, lineare likninger med konstruerbare koeffisienter. Skjæringspunktet mellom linjene finner vi ved å løse de to likningene. Siden begge linjene er konstruerbare, vil også skjæringspunktet være konstruerbart. Dermed skjæringen mellom to konstruerbare linjer er et konstruerbart punkt. Det samme gjelder for skjæringspunkter mellom konstruerbare linjer og konstruerbare sirkler. Dette er det vi har gjort i praksis i konstruksjon av alle de ulike figurene tidligere i oppgaven. La (a, b) være et punkt med konstruerbare koordinater, og la r være en konstruerbar radius. Sirkelen med radius r og sentrum i (a, b) består av alle punkter (x, y) som oppfyller likningen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Vi antar nå at denne sirkelen skjærer med en konstruerbar linje:

$$y = px + q$$

Skjæringspunktene mellom sirkelen og linjen vil da være gitt ved løsningen av andregradslikningen:

$$(x-a)^2 + (px+q)^2 = r^2$$

Løsningen til andregradslikningen vil da være konstruerbare tall.

Eksempel: Vi vil finne skjæringspunktet mellom sirkel S med sentrum i (1,0) og linje L gitt ved:

$$S: (x-1)^2 + y^2 = 2^2, \qquad L: y = x + 1$$
$$x^2 - 3x + y^2 + y = 4$$

Skjæringspunktene er da $(-1, 0)$ og $(1, 2)$. Vi har sett at begge disse punktene er konstruebare med passer og linjal (Se figur 11 og 14). La oss nå se om skjæringspunktene mellom to konstruerbare sirkler også er konstruerbare. Dette har vet vi allerede er konstruerbart (se figur 14), men vi viser det her også for generalitetens skyld. Vi ser på sirklene

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad og \qquad x^2 + y^2 = k^2$$

Vi setter de opp som en likning og ender opp med:

$$-ax + a^2 + 2b + b^2 \ = r^2 - k^2$$

Vi ser at resultatet er det samme som resultatet av skjæring mellom sirkel og linje ovenfor. Og vi vet at disse punktene også er konstruerbare.

4.0 Polynomer og algebraiske tall

I dette kapitelet skal vi se nærmere på algebraiske tall og algebraiske likninger. Algebraiske tall har vi indirekte sett på tidligere i oppgaven – alle tallene vi har nevnt så langt er algebraiske tall. Algebraiske tall defineres som tall som kan være en løsning til en algebraisk likning eller polynom. Vi skal også se på kropper og kroppsutvidelser i dette delkapittelet.

4.1 Algebraisklikning og algebraisktall

En algebraisklikning er en matematisk likning på formen:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

der $a_0 \ og \ n$ er naturlige tall og $a_1 ... a_n$ er heltall (Hardy & Wright, 1983, s. 159)

Vi betegner mengden av *algebraiske tall* $\mathbb{A}$. Mengden av algebraiske tall har mengden av naturlige tall, mengden av heltallene, og mengden av rasjonale tall som delmengder. Dette er fordi ethvert element i disse delmengdene er en løsning av en algebraisk likning. I seksjon 2.3 nevnte vi noen tellbare tallmengder, og noen ikke – tellbare tallmengder. $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \ og \ \mathbb{Q}$ er tellbare mengder, og alle disse er delmengder i mengden av algebraiske tall $\mathbb{A}$. $\mathbb{A}$ er en tellbar mengde, dette ble bevist av matematikeren Georg Cantor 1873 (Ewald, 2005, s. 840). Det vil si at kardinaliteten eller størrelsen på mengden er endelig. Mengden av algebraiske tall inneholder alle røttene til alle algebraiske tall. Noen eksempler på algebraiske likninger og algebraiske tall er gitt nedenfor:

$$4 \quad (x - 4 = 0),$$
$$2/5 \quad (5x - 2 = 0),$$
$$\sqrt{2} \quad (x^2 - 2 = 0),$$
$$7^{\frac{1}{3}} \quad (x^3 - 7 = 0).$$

Mengden av algebraiske tall inneholder alle røttene til alle algebraiske likninger av typen:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

Vi ser at $\mathbb{Q}$ er en delmengde av $\mathbb{A}$ ettersom $\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$ er en løsning til for eksempel en algebraisklikning på formen:

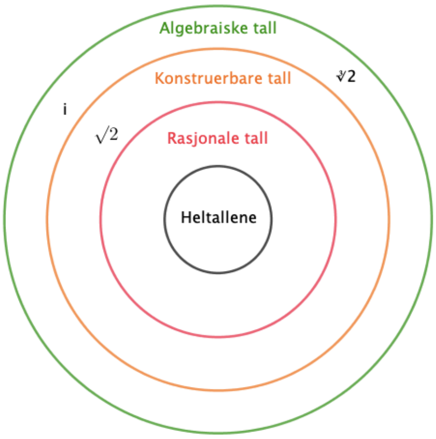
$$qx - p = 0, q \neq 0.$$

Det å bevise at et tall er algebraiske eller at algebraiske tall eksisterer er relativt lett. Vi har jo sett på eksempler ovenfor. $\mathbb{A}$ inneholder mer enn bare de rasjonale tallene. Vi ser i eksemplene ovenfor at det irrasjonale tallet $\sqrt{2}$, er en løsning til den algebraisklikningen:

$$x^2 - 2 = 0.$$

Alle de rasjonale tallene og dermed alle heltallene er algebraisk tall. Noen irrasjonale tall er også algebraiske tall, men de fleste er ikke det. Vi kan si at kvadratroten av ethvert primtall er irrasjonalt og algebraisk. For eksempel $x^2 - p = 0 \ \rightarrow x = \sqrt{p}\,, p \ \in P$, hvor P er mengden av alle primtall. Dette gir mening fordi $P \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{A}$.

Så langt har vi bare sett på algebraiske likninger med reelle løsninger. Med andre ord har vi sett på reelle algebraiske tall. Da er det naturlig å lure på om algebraiske likninger kan ha ikke reelle løsninger. Finnes det ikke – reelle algebraiske tall? Svaret på det er ja. Tidligere i oppgaven så vi på likningen $x^2 + a = 0.$ Løsningen på denne likningen er det imaginære tallet i, og som vi har sett tidligere tilhører i til de komplekse tallene. Vi kan si at noen algebraiske tall er konstruerbare, mens andre ikke er det. Mengden av de konstruerbare tallene er en delmengde i mengden $\mathbb{A}$. Vi kan framstille mengden av algebraisk tall og dens delmengder slik:



Figur 22: Mengden av algebraiske tall

Vi nevnte at algebraiske tall er ikke alle konstruerbare tall. Her er noen eksempler på ikke – konstruerbare algebraiske tall.

- $i \in \mathbb{C}$

i er et algebraisk tall fordi det er en rot i likningen $x^2 + 1 = 0$, men det er ikke et tall vi kan konstruere med passer og linjal.

- $\sqrt[3]{2}$

Det samme gjelder for $\sqrt[3]{2}$.t. $\sqrt[3]{2}$ er et algebraisk tall fordi det er en rot i likningen:

$$x^3 - 2 = 0$$

Men det er ikke et konstruerbart tall. Ikke – konstruerbarheten til dette tallet ble oppdaget i forbindelse med en av de andre klassiske problemene som vi har nevnt tidligere, nemlig *kubens fordobling*. Fordoblingen av en enhetskube med sidelengde lik $x = 1$, og volum lik $x^3 = 1^3$, krever konstruksjon av et linjesegment med lengde x, der $x^3 = 2$. Dette ble bevist umulig ved passer – og linjalkonstruksjon av matematikeren Pierre Wantzel i 1837 (Pierre Laurent Wantzel, 1918, s. 347)

4.2 Polynomer

Algebraiske likninger kan ha koeffisienter som er rasjonale, heltallige eller komplekse. Vi kan addere, subtrahere, multiplisere og dividere algebraiske likninger. Dette er ikke så overraskende ettersom koeffisientene til likninger også kan manipuleres med de fire regneoperasjoner. I dette delkapittelet skal vi se på likninger med rasjonale koeffisienter. Istedenfor algebraisklikninger bruker jeg navnet polynomer for likningene framover i oppgaven. Det er derfor viktig å bemerke seg at jeg mener det samme når jeg sier algebraisklikninger og polynomer.

Definisjon 4.2.1: Et polynom *f(x)* av grad *n* i variablene *x* er et uttrykk på formen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

der $a_0, \ldots, a_n$, kalles koeffisientene.

Polynomer har ulike grad, og graden til f er definert som tall n i uttrykket ovenfor. Et polynom av grad null er en konstant forskjell fra null. Rasjonale polynomer er polynomer hvor alle koeffisientene er lik null (Holme, 1996, s. 106). Vi kan addere og subtrahere et polynom med et annet polynom og et nytt polynom. Det samme for multiplikasjon og divisjon.

Eksempel 1: $2x^2 + 5x$ eller $3x^3 - x^2$

Eksempel 2: $2x^2 \cdot x^3 = 2x^5$

Eksempel 3: $\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x-2} = x^2 - 3x - 4$

Vi er ofte kjent med addering, subtrahering og multiplisere av polynomer. Polynomdivisjon derimot er ikke noe alle er vandt med. Når vi dividerer vilkårlig polynom $p(x)$ vil resultatet være en fullstendig eller ufullstendig med en kvotient $q(x)$ og en rest $r(x)$. I eksempel 3 ovenfor, går divisjonen opp og vi får et fullstendig polynom. Før vi kan si noe om polynomer generelt, skal vi se på polynomer med rasjonale koeffisienter. Summen og produktet av rasjonale polynomer er rasjonale polynomer. Et rasjonalt polynom av grad større enn 1 sies å være redusibelt hvis det kan skrives som et produkt av to rasjonale polynomer, der begge er av grad større enn null. Ellers er det irredusibelt. Polynomer med rasjonale koeffisienter kalles *polynomer over* $\mathbb{Q}$. De rasjonale tallene danner noe vi kaller kropper. Det samme gjelder for de reelle tallene $\mathbb{R}$ og komplekse tallene $\mathbb{C}$. Rasjonale polynomer er polynomer *over kroppen av de rasjonale tallene*. En kropp kan defineres som en spesiell type *ring*. Mengden av algebraiske tall danner også en kropp. Vi skal se nærmere på dette snart.

4.3 Tallkropper

En kropp er en spesiell type ring, men hva er en ring? En ring er en algebraiske strukturer med to binære operasjoner. Dette er en av de vanligste algebraiske strukturene som finnes.

Definisjon 4.3.1 : *En ring* $(R, +, \times)$ *er mengden R sammen med to binære operasjoner,* $+$ *og* $\times$*, som vi betegner addisjon og multiplikasjon, definert på R slik at følgende aksiomer er oppfylt:*

- $(\mathrm{R}, +)$ er en abelsk gruppe. Additativ identiteten noteres 0, og kalles nullelementet i ringen.
- *Multiplikasjon er assosiativt*
- *For hver* $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ *gjelder følgende venstre og høyre distrubusjonslov:* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *og* $(a \cdot b) + (b \cdot c)$ ■

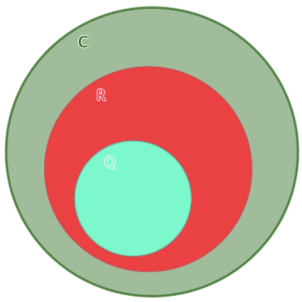
Noen ringer har multiplikativ identitet, mens andre ringer ikke har det. En ring med multiplikativ identitet kalles ringen en ring med identitet. Eksempler på slike ringer med multiplikativ identitet er ringene $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ og\ \mathbb{R}$. Disse har alle et multiplikativ identitet element 1. Videre kan vi definere et *kommutativt ring R*. En ring der multiplikasjon er kommutativ er også selv en kommutativ ring.

Definisjon 4.3.2 : La K være en ring med identitet $1 \in R. u \in R$ kalles en *enhet* i R hvis u har en multiplikativ invers $u^{-1}\ \in R$, slik at:

$$u \cdot u^{-1} = 1$$

Dersom alle $u \in R, u \neq 0$, er enheter i R, kalles R en *divisjonsring*. Med andre ord, alle ikke – null elementer i R har en multiplikativ invers. En kropp er en kommutativ divisjonsring. Vi nevnte $\mathbb{Q}, \mathbb{R}\ og\ \mathbb{C}$ som eksempler på noen tallmengder som danner en kropp. Ut i fra definisjonen av kropper kan vi se hvorfor disse mengdene danner kropper. Alle elementer $x \neq 0$ i $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, har multiplikativ invers. Dette vil da si at $x \neq 0$ i $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ er enhet og $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ er alle tallkropper. Dersom vi lar F stå for $\mathbb{Q}, \mathbb{R}\ eller\ \mathbb{C}$, kan vi si at alle polynomer med koeffisienter i F utgjør en ring. Dette noterer vi med $\mathrm{F[x]}$ og vi sier *polynomringen* over F. De rasjonale polynomene, det vil si polynomer med rasjonale røtter utgjør da polynomringen $\mathbb{Q}[\mathrm{x}]$ over $\mathbb{Q}$. Vi skriver da:

$$\mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$$



Figur 23: Venn - diagram av $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$

Her er et lite eksempel på at de rasjonale tallene oppfyller kroppsaksiomene. Vi kan redusere aksiomene til 6 fundamentale kroppsaksiomer. For at de rasjonale tallene skal utgjøre en kropp må følgende være oppfylt:

1. **Lukket under både addisjon og multiplikasjon**

   Addisjon: $hvis\ a, b \in \mathbb{Q}, må\ også\ a + b \in \mathbb{Q}$

Multiplikasjon: $hvis\ a, b \in \mathbb{Q}, da\ er\ ab \in \ \mathbb{Q}$

Eksempel: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \in \ \mathbb{Q}, \frac{4}{2} = \frac{2}{1} \in \ \mathbb{Q}\ , \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \in \ \mathbb{Q}, \frac{3}{4} \in \ \mathbb{Q}$

2. **Kommutativ under addisjon og multiplikasjon**
   Addisjon: $a + b = b + a$
   Multiplikasjon: $ab = ba$

3. **Assosiativ under addisjon og multiplikasjon**
   Addisjon: $a + (b + c) = (a + b) + a$
   Multiplikasjon: $a(bc) = (ab)c$

4. **Distribusjon av multiplikasjon over** addisjon

$$a(+b) = ab + ac$$

5. **Identitet**
   Addisjon: $a + 0 = 0 + a = a$
   Multiplikasjon: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

6. **Invers**
   Addisjon: $\forall\ a \in \mathbb{Q}, \exists - a \in \mathbb{Q}$, slik at $a + (-a) = 0$
   Multiplikasjon: $\forall\ a \in \mathbb{Q}, \exists\ a^{-1} \in \mathbb{Q}$, slik at $aa^{1} = 1$

Det samme gjelder for kropper av andre type tall. De må alle oppfylle disse kroppsaksiomene. Vi så på kroppen av de rasjonale tallene i dette tilfellet fordi denne kroppen er en underkropp av de viktigste tallkroppene. For å kunne løse de klassiske problemene som mange matematikere har strevet med gjennom historien trenger vi å se på hva kropper forteller oss. Kropper er fundamentale konsepter i matematikk. Vi se noen konkrete kropper som består av konstruerbare tall. Vi har vært innom kropper av reelle tall, rasjonale tall og komplekse tall. De kroppene som oppstår i forbindelse med konstruksjoner med passer og linjal er underkropper av de reelle tallene.

4.4 Kroppsutvidelser

Som navnet tilsier er en kropp en utvidelse av en annen kropp.

Definisjon 4.4.1 : Gitt kroppene $L, K \ \in \mathbb{R}$, der $L \subseteq K$. Da kalles K en utvidelse av L, notert $L \leq K$.

De reelle tallene ($\mathbb{R}$) er en kroppsutvidelse av de rasjonale tallene ($\mathbb{Q}$), og de komplekse tallene ($\mathbb{C}$) er en kroppsutvidelse av de reelle tallene. Før vi fortsetter med kroppsutvidelser må vi se litt igjen på polynomer. Polynomer er nemlig blant de viktigste hjelpemidlene vi trenger for å behandle kropper. Vi nevnte tidligere at polynomer kan være redusible eller irredusible. Når vi faktoriserer et polynom er vi ute etter å finne nullpunktene i polynomet. Vi lar K og L være kropper, hvor K er en utvidelse av L. Vi tenker oss et polynom $f(x) \in L$, slik at $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, for $g(x), h(x) \in$ L[x]. Vi lar $\alpha \in K$, og $f(\alpha) = 0$ hvis og bare hvis $(g(\alpha)\ eller\ h(\alpha) = 0$. Dette betyr da at $x - \alpha$ er en faktor i polynomet $f(x)$. Dersom $f(x) \in$ L[x] har en rot i *L,* er polynomet redusibelt. L[x], i dette eksempelet kan L[x] være $\mathbb{Q}$[x], $\mathbb{R}$[x] osv. Et irredusibelt polynom derimot, kan defineres som følgende: $f(x) \in$ F[x] er irredusibelt over *F*, dersom $f(x)$ ikke kan skrives som et produkt av $g(x) \cdot h(x)$ av to polynom $g(x)$ og $h(x)$ i F[x], hvor begge er av grad lavere enn *f(x)*. Dersom et polynom er av grad *2* eller *3* ikke har noe nullpunkter er polynomet irredusibelt. Vi lar $f(x) \in F(x)$ være et polynom av grad *2* eller *3*. Hvis *f(x)* ikke har nullpunkter i *F*, sier vi at *f(x)* er irredusibelt over *F*. Dette kan vi forklare ut fra det vi diskuterte nettopp om redusible polynomer. Hvis *f(x)* er redusibelt over *F*, og har grad *2* eller *3*, må en av faktorene ha grad 1, som betyr at *f(x)* har en rot i *F*. For eksempel er polynomer av formen $x^n - p$, der p er et primtall, er irredusible over $\mathbb{Q}$ ved Eisensteins kriterium. (Fraleigh, 2013, s. 296)

Eksempel 1: $x^2 - 2$ irredusibelt i $\mathbb{Q}$[x], fordi $x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$. Men vi ser at polynomet er redusibelt over $\mathbb{R}$[x].

Eksempel 2: $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ er irredusibelt i både $\mathbb{Q}$[x] og $\mathbb{R}$[x], men redusibelt over $\mathbb{C}$[x].

La oss nå gå tilbake til kroppsutvidelser. Vi så på noen kroppsutvidelser av $\mathbb{Q}$[x], hvor de rasjonale tallene ble utvidet til de reelle tallene. Vi skal nå se på noen enkle utvidelser av $\mathbb{Q}$[x]. Det er nemlig slik at de rasjonale tallene kan utvides til uendelig mange kropper av de rasjonale tallene. La oss se på kroppsutvidelsen av de rasjonale tallene med $\sqrt{2}$. Vi vet at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall og derfor ikke element i mengden av rasjonale tall. Vi noter kroppsutvidelsen av $\mathbb{Q}$ som $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$,og sier at $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ er en kroppsutvidelse av $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ inneholder alle elementer som kan uttrykkes ved hjelp av addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon av de rasjonale tallene med $\sqrt{2}$. Et hvert element i $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kan uttrykkes på formen:

$$\alpha + \beta\sqrt{2}, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$$

Det meste av kroppsteorien bygger på kroppsutvidelser og hvordan man kan finne forskjellige røtter i polynomer ved å utvide kropper. De rasjonale tallene kan for eksempel utvides med røttene i hvilke som helst polynom og få en kroppsutvidelse. Dette kalles splittekropper og er den simpleste formen for kroppsutvidelse. For eksempel er $\mathbb{Q}[i]$ er en splittekropp, hvor i er en rot i polynomet $x^2 + 1 = 0$.

Definisjon 4.4.2 : La α være en rot i polynomet: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, der\ a_i \in \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}(\alpha)$ er da en kroppsutvidelse.

Slike utvidelser av de rasjonale tallene kalles algebraisk utvidelser. (Fraleigh, 2013, s. 267). Alle konstruebare tall er algebraiske, men alle algebraiske tall er imidlertidig ikke konstruerbare. Et tall $k \epsilon \mathbb{C}$ er konstruerbar hvis og bare hvis det eksisterer et irredusibelt polynom $p \in \mathbb{Q}(t)$ og et heltall $i \geq 0$ slik at graden til p er et potens av 2, hvor eksponenten er heltallet $i \geq 0$ og $p(k) = 0$. Med andre ord kan vi si, for at et tallet $k \epsilon \mathbb{C}$ skal være konstruerbart må det være rot i et polynom med grad $2^n, n \in \mathbb{N}$, og polynomet må være irredusibelt.

> **Teorem 4.4.1:** *Dersom punkt* $P = (x, y)$ *er et konstruerbart punkt, vil kroppsutvidelsen* $\mathbb{Q}(x, y): \mathbb{Q} = 2^n, n \geq 0$.

Kroppen av de konstruerbare tallene er en endelig kropp og alle endelige kropp er algebraiske (Borevic & Safarevic, 1973, s. 397). Vi kan si noe om størrelsen på en kroppsutvidelse. Da ser vi på dimensjonen til kroppsutvidelsen (Garling, 1986, s. 41). Kroppsutvidelsen $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]: \mathbb{Q}$ er enkel og endelig, mens kroppsutvidelsen $\mathbb{R}: \mathbb{C}$ verken er enkel eller endelig

4.5 Algebraiskutvidelse og algebraiskuavhengighet

En algebraisk kroppsutvidelse kan vi definere som følgende:

Definisjon 4.5.1 : *Gitt kroppene E og F hvor E er en kroppsutvidelse av E. Et element* $\alpha \in E$ *er algebraisk over F dersom* $f(\alpha) = 0$ *for et vilkårlig ikke – null polynom* $f(x) \in F[x]$.

Dersom α ikke er algebraisk over *F*, er algebraisk uavhengig og dermed er α *transcendental* over *F*.

Eksempel: $\alpha = \sqrt[4]{3}$ er algebraisk med grad 4 fordi $x^4 - 3 = 0$

Siden $\sqrt{2}$ er en rot i $x^2 - 2$, ser vi at $\sqrt{2}$ er et algebraisk element over $\mathbb{Q}$. Det imaginære tallet, i, er også et algebraisk element over $\mathbb{Q}$ fordi det er en rot i polynomet $x^2 + 1 = 0$. Vi kan ut fra dette definere algebraiske tall. Et element i de komplekse tallene $\mathbb{C}$ som er algebraisk over $\mathbb{Q}$ er et algebraisk tall (Fraleigh, 2013, s. 268). Transcendentale elementer er algebraisk uavhengige. Det vil si at et element β som ikke er algebraisk over $\mathbb{Q}$, er uavhengig av kroppen $\mathbb{Q}$. β er da transcendentalt, og ikke rot i noen ikke – null polynomer med rasjonale koeffisienter. Vi skal se litt nærmere på transcendentale tall i neste kapittel. Ofte blir det brukt Lindemann – Weierstrass teorem for å bevise at noen tall er algebraisk uavhengige over kroppen av de rasjonale tallene. Teoremet kommer vi tilbake til i kapittel 5, men det sier at når noen algebraiske tall er lineært uavhengige over kroppen av de rasjonale tallene, er det også algebraisk uavhengig over de rasjonale tallene.

Vi har sett at noen polynomer ikke har noe løsning i kroppen av de rasjonale tallene. Dersom vi kan finne røtter i et polynom med rasjonale røtter ved å kun bruke de fire regneoperasjonene sier vi at polynomet er løselig. Om et polynom med rasjonale koeffisienter er løselig eller ikke løselig er viktig. Matematikere har i flere tusen år forsøkt å løse ulike type polynomer. Ved hjelp av Galoisteorien kunne matematikere endelig vise hvilke polynomer som var løselige og hvilke som ikke var det. Galoisteorien forteller at det er en – til – en korrespondanse mellom underkropper og rotkroppen til et polynom. Alle polynomer som er løsbare ved rottegn, har en løsbar Galoisgruppe. Alle polynomer opp til fjerde grad er løselige ved rottegn, men Galoisteorien visse at femtegradspolynomer og polynomer av enda høyere grad er uløselige ved rottegn. Av disse polynomene vet vi at det er bare polynomer av grad 2^n som er konstruerbare, resten er algebraiske men ikke konstruerbare.

5.0 Transcendentale tall

Kort definert er transendentale tall alle tall som ikke er algebraiske. Det vil si tall som ikke kan være løsning i noen algebraiske likninger der koeffisientene er rasjonale. Vi har allerede nevnt $\pi\ og$ e som de mest kjente transendentale tallene. Ordet transcendent ble først bruk av Euler til å betegne et irrasjonalt tall som ikke er algebraisk. Matematikere gjennom historien hadde oppfatninger om eksistensen transcendentale tall, men beviset for at slike tall faktisk fantes kom ikke før 1844. Det første beviset for transcendentale tall ble utledet av matematikeren Joseph Liouville. Han viste at

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + \cdots + 10^{-n} + \cdots$$

er transcendentale (Baker, 1975, s. 2). Liouvilles konstant er antageligvis det simpleste transcendentale tallet som har blitt bevist. Tallet 10 her kan erstattes med et hvilke som helst annet heltall og resultatet vil være et transcendentalt tall (Hardy & Wright, 1983, s. 162). I 1873 ble e vist som transcendent av en annen fransk matematiker, Charles Hermite, og i 1882 ble π vist som et transcendental tall av den tyske matematikeren Ferdinand von Lindemann. I løpet av kort tid ble det vist at mengden av algebraiske tall er endelig og tellbar, mens mengden av transcendentale tall er uendelig og ikke tellbar. Noe som betyr at det er mer transcendentale tall enn det er algebraiske tall (Fine, 2017, s. 229). I løpet av 1800 – tallet ble det faktisk vist at nesten alle irrasjonale tall er transcendentale og ikke algebraiske (Ewald, 2005, s. 841).

5.1 Irrasjonaliteten og transcendensen til *e*

Beviset for at *e* faktisk er et irrasjonelt tall ble gjort av den franske matematikeren Joseph Fourier. Bevismetoden er bevis ved selvmotsigelse. La oss se kjapt gjennom kjernen i beviset.

Teorem 5.1.1: *e* er irrasjonalt.

Bevis: Vi starter med å anta at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \frac{a}{b},\ \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Vi stopper den uendelige serien for *e* på $n = b$

$$\sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!} = \frac{a}{b}$$

Vi gjør om på formelen :

$$\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}$$

Vi multipliserer begge sidene med *b!* Siden *b!* Er den minste felles multiplum. Vi får et positivt heltall som vi kaller for *N*.

$$N = b!\left(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)$$

$$= \ b!\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)$$

$$= b!\ \left(\frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \frac{1}{(b+3)!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{1+b} + \frac{1}{(b+2)(b+1)} + \frac{1}{(b+3)(b+2)(b+1)} + \cdots$$

$$N = \frac{1}{1+b} + \frac{1}{(b+2)(b+1)} + \frac{1}{(b+3)(b+2)(b+1)} + \cdots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$$

Vi ender opp med en motsigelse. Det finnes ingen heltall mellom 0 og 1. Vi konkluderer da med at *e* er irrasjonelt (Shidlovskii & Koblitz, 1989, s. 44).

■

Bevis for transcendensen *e* er mye mer vrient. Beviset til Charles Hermite for transcendensen til *e* langt og komplisert. Senere ble bevisene for både transcendensen av $e\ og\ \pi$ simplifisert av andre matematikere som for eksempel Karl Weierstrass og David Hilbert. Vi skal se på noen av de simplifiserte formene av bevisene for transcendensen til både $e\ og\ \pi$. Vi bruker bevis ved selvmotsigelse og starter anta at *e* er algebraisk.

Antagelse: Anta at *e* er et algebraisk tall av grad n

Et algebraisk tall av grad *n* kan skrives som følgende:

$$\sum_{x=0}^{n} a_x e^x = 0\ , n \geq 1.$$

Likning 1: hvis e er et algebraisk tall og grad n, vil det oppfylle denne likningen hvor første og siste a - koeffisient er ikke null (Jacobson, 1985, s. 284).

Samtidig som vi nå forsøker å bevise transcendensen av *e* skal vi også approksimere e^x på ulike x – verdier for å ende opp med en selvmotsigelse som vi gjorde i beviset av irrasjonaliteten til *e*. La oss først starte med denne approksimasjonen for e^x. Vi definerer

$$e^x = \frac{M_x + \eta_x}{M}, \qquad x = 1, 2, \dots, n$$

Likning 2: Rasjonal approksimasjon til e^x

hvor

$$M, M_n, \dots, M_2, M_1 \in \mathbb{Z}$$

$e^x = \frac{M_x}{M} + \frac{\eta_x}{M}$, hvor $\frac{M_x}{M} \in \mathbb{Q}$, og $\frac{\eta_x}{M}$ er uendelig lite og representerer error i approksimasjonen.

Vi ser nå at for et uendelig lite tall α_x antyder likningen ovenfor at e^x er tilnærmet et rasjonelt tall. Vi substituere nå denne likningen med likningen for algebraisk tall av grad *n*:

$$[\sum_{x=1}^{n} a_x M_x + a_0 M\ ] + \sum_{x=1}^{n} a_x \eta_x = 0$$

Likning 3: Resultatet av substituering av likning 2 i likning 1.

Siste leddet i denne likningen har egenskapen:

$$|\sum_{x=1}^{n} a_x \eta_x\,| < 1$$

Hele beviset går på å vise at denne likningen kan ikke være riktig. Med andre ord denne likningen fører til selvmotsigelse. Denne selvmotsigelsen oppstår fordi et ikke – null heltall med absoluttverdien mindre enn 1 forsvinner ikke. Det vil si vi kan ikke bare ta vekk η_x fordi det er uendelige lite. Hermite starter beviset med å definere M og η
Som følgende:

$$M = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\dots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx$$

Likning 4: Integral som definerer M

Hvor p er et primtall som kan være så stor som vi ønsker. M, derimot er et heltall for hvilket som helst verdi av p. Vider er $M_x\ og\ \epsilon_x$ definert slik:

$$M_x = e^x \int_x^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\dots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx$$

$$\eta_x = e^x \int_0^x \frac{x^{p-1}[(x-1)\ldots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!} dx$$

Likning 5: integraler som definerer M_x og ϵ_x satt i likning 3.

For integralet M multipliserer ut binomialen i nevneren og opphøyer resultatet i p. Vi får

$$[(x-1)\ldots(x-n)]^p = x^{pn} + \cdots + (n!)^p$$

Likning 6: resultatet etter multipliseringen av binomialen i nevner av likning 9.

Hvor *p* er større enn *n*. Vi substituere dette inn i M:

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} dx = m!$$

Likning 7: Integral uttrykk for m faktor.

Vi ender opp med:

$$M = \pm(n!)^p + \sum_{i=1}^{np} \frac{(p-1+i)}{(p-1)!} \in \mathbb{Z}$$

Likning 8: Likning 8, hvor p må være større en n.

Vi ser at første del av denne likningen er ikke delelig med p, mens den andre delen er det. Vi konkluderer da med at siden M ikke er delelig med p, er ikke første del av likning 3 heller delelig med p. La oss se litt nærmere på dette. Vi ser igjen på integralet av M_x i likning 5 og bytter x – variabelen ut med en y variabel:

$$y = x - k$$

og får integralet:

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(y+k)^{p-1}[(y+k-1)\ldots y \ldots (y+k-n)]^p e^{-y}}{(p-1)!} dx$$

Etter noen komputering ender vi opp med

$$M_k = \sum_{i=1}^{np} \frac{(p-1+i)!}{(p-1)!}$$

Vi ser at hver M_k er et helt tall som er delelig med p. Vi konkluderer igjen med at første del av likning 3 ikke er delelig med. Det eneste som er igjen nå av beviset er å vise at likning 4 stemmer gitt at vi velger en stor nok verdi for p. Vi bruker likning 5 og ser at etter noen steg ender vi opp med:

$$|\eta_x| \leq e^n \frac{e^n n^{p-1}}{!\,p-1)!} \int_0^n [(x-1) \ldots (x-n)]^p$$

Dersom absoluttverdien av dette produktet har en øvre grense B for $x \in [0, n]$ får vi:

$$|\eta_x| \leq e^n \frac{(nB)^p}{(p-1)!}$$

Og siden høyre side av likningen går mot 0 når p går mot ∞ og konkluderer beviset. Vi ender opp med en selvmotsigelse. (Dette beviset er hentet fra fire ulike kilder. Se fotnoten for kildene)[1].

■

De fleste bevis for transcendentale tall bygger på Hermites bevis. Det er enten simplifisert eller en annen form for dette beviset. Beviset for π bygger også på dette. Når vi nå skal se på beviset for π skal vi se på en mer moderne bevis.

5.2 Historien om π

π er en matematisk konstant som har fascinert matematiker i tusenvis av år. Selv om de fleste har hørt om π, er det likevel manglende kunnskap om definisjonen. En av definisjonen av π er gitt nedenfor:

Definisjon 5.2.1: *π er forholdet mellom omkretsen til en sirkel og dens diameter.*

Definisjonen forutsetter at en har bevist at gitt en sirkel med diameter D eller radius R tegnet på en flate uten krumninger, vil omkretsen O være proporsjonal med diameteren, der proposjonalitetskonstanten er den samme for alle sirkler. Det er denne konstanten som er π og den er definert ved hjelp av likningen:

$$O = 2\pi R = \pi D$$

[1] (Baker, 1975, s. 4), (Mahler, 1976, ss. 213 - 215), (Jacobson, 1985, ss. 282-286) og (Shidlovskii & Koblitz, 1989, s. 45)

Det har alltid vært en slags form for verdi for π gjennom historien. Ofte bruker vi 3.14 eller brøken $\frac{22}{7}$ som en verdi for π i utregninger i dag. I babylonske skrifter og i Bibelen har man for eksempel funnet verdien 3 for π. En verdi for π som har overlevd lenge er den verdien som var utledet av Arkimedes (290 – 211 f.Kr). Han beregnet π til å være $3\frac{1}{7}$, og denne verdien ble brukt til sent i middelalderen (Papatzacos, 2017, s. 273). Ulike, men lignende verdier for π ble også brukt av andre sivilisasjoner. Desimaldelen til π, den uendelig lange og ikke – sykliske tallfølgen, er det som har fascinert interessert matematikere i alle disse årene. I dag beregnes π med mer enn 10^{12} desimaler. Det er delte meninger om vi faktisk har behov for all den nøyaktigheten av π. Men π blir fortsatt beregnet med en ufattelig høy presisjon, og det ser ikke ut som denne trangen for presiseringen av π forsvinner i matematikken.

5.2 Transcendensen til π

Vi skal se nærmere på hva som gjør π til et transcendent tall. Det er vanskelig å bevise at et tall er transcendentalt. Det er imidlertid ikke like vanskelig å bevise at transcendentale tall finnes. Dette ble tross alt gjort av flere matematikere på 1800 – tallet som vi har sett. Beviset for at π faktisk var transcendent ble gjort Ferdinand Lindemann i 1882. Det ble brukt bevis ved selvmotsigelse i dette beviset også. Prinsippet bak en slik bevismetode er at man gjør en nøyaktig antakelse, og ser hva antakelsen fører til. Man ender opp med en selvmotsigelse som ikke kan forklares på en annen måte enn å forkaste den opprinnelige antakelsen som feil. Man kan da konkludere med siden antakelsen er feil, må det motsatte av antakelsen være riktig.
For å bevise at π er transcendent, antar vi først at det ikke er det. Vi antar at π er et algebraisk tall. Vi skal bruke Lindeman – Weierstrass teoremet i dette beviset, og teoremet går som følgende:

Lindemann – Weierstrass teorem 5.2.1: *Dersom $a_1, a_2 \dots, a_n$ er algebraiske tall som er lineart uavhengig over $\mathbb{Q}$. Da er $e^{a_1} \dots e^{a_n}$ er algebraisk uavhengig over $\mathbb{Q}$.*

Lindemanns metode for beviset av transcendensen til π var en generalisering av Hermite metode for bevis av transcendensen til *e* (Jacobson, 1985, s. 277). Ved å at anta at π var et algebraisk tall, antok han også at π var en løsning i en algebraisk likning. Lindemann relaterte π til *e* ved hjelp av *Euler likning*. Likningen er formulert slik:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

Lindemann viste at dersom det er to mengder *n* ulike distinkte algebraiske tall i form av $\alpha_{1,}$ ...,$\alpha_1, \dots, a_n$ og $\beta_1, \dots, \beta_n$, der alle er ulik null, gjelder likningen

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \dots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$$

Han sier videre at hvis elementene i disse mengdene er distinkte algebraisk tall, da er de komplekse eksponentene algebraisk uavhengig over kroppen av algebraiske tall.

Teorem 5.2.2: La $u \neq 0$, være et algebraisk tall. Da er e^u transcendentalt (Jacobson, 1985, s. 278).

Bevis: Vi antar at π ikke er transcendentalt, med andre ord at det er algebraisk. Vi vet at det imaginære tallet *i,* er algebraisk. Vi kan si dersom π er algebraisk, må også $i\pi$ være algebraisk. Dette er fordi produktet av to algebraisk tall er algebraisk. Med utgangspunkt i teoremet ovenfor kan vi bevise at e er transcendent i samme slengen. Vi setter $u = 1$ og får $e^1 = e$, og det er transcendent.

■

Vi kan vise at π er transcendent ved å bruke samme teorem. Dette er en mye mer simplisert form av Hermites bevis. Vi begynner med å anta at π er algebraisk. Vi bruker $2i$ som er et algebraisk tall. Vi kan nå anta at produktet av 2i og π er algebraisk. Vi kan gjøre denne antagelsen fordi produktet av to algebraiske tall er et algebraisk tall. Men om $2\pi i$ algebraisk må $e^{2\pi i}$ være transcendentalt i følge teorem 5.2. Dette vet vi ikke stemmer. La oss se nå på hvorfor dette ikke stemmer. Ifølge Eulers likning : $e^{i\pi} = \cos(\pi) + isin(\pi) = -1$, er $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + isin(2\pi) = 1$. Vi vet at 1 er ikke transcendent. Vi ender opp med en selvmotsigelse og konkluderer med at verken $2\pi i\ eller\ \pi$ er algebraiske, men må være transendentale.

■

6.0 Endelig svar på sirkelens kvadratur

Gitt en sirkel med radius r = 1. Arealet av sirkelen er π. For å kvadrere denne sirkelen må vi ha et kvadrat hvor sidene er av lengden $\sqrt{\pi}$. Men siden π og $\sqrt{\pi}$ er transcendental over $\mathbb{Q}$, er konstruksjonen av en slik kvadrat umulig. I mange av de konstruksjonsproblemene vi har sett på er man begrenset. Dette er fordi man har bare to punkter, eller et linjesegment, å ta utgangspunkt i. Vi har sett at mengdene av de konstruerbare tallene danner en kropp er en underkropp av mengden av algebraiske tall. Alle tall som er mulige å konstruere med linjal og passer er tall som er løsninger i en algebraisk likning. Mer spesifikt, er konstruerbare tall alle tall som kan være løsninger i enhver andregradslikning. Konstruerbare tall inkluderer alle rasjonale tall og kvadratrøtter av disse. Det at konstruerbare tall former en kropp innebærer også at alle kombinasjoner av konstruerbare tall med addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon er alle konstruerbare. Med andre ord, vi kan for eksempel addere eller subtrahere konstruerbare tall og ende opp med et nytt tall som også er konstruerbar. Det som gjør problemet om sirkelens kvadratur uløselig er de forutsetningene som er gitt. En passer og linjalkonstruksjon er per definisjon en konstruksjon gjort ved endelig steg antall. For å kunne konstruere en sirkel og et kvadrat med samme areal må π være et tall vi kan konstruere med passer og linjal. Men et tall som er konstruerbart er en rot i kroppsutvidelsen av $\mathbb{Q}$ grad 2^n, alle tall som ikke er i denne kroppsutvidelsen er ikke konstruerbart. Siden π ikke er element i denne kroppsutvidelsen er det ikke konstruerbart. Det er ikke mulig å konstruere en sirkel og et kvadrat med samme areal fordi π er et transcendentalt tall, og kan ikke konstrueres med passer og uavmerket linjal. Vi konkluderer da oppgaven med at sirkelens kvadratur ikke er et løselig problem ved passer og linjalkonstruksjon.

6.1 Problemet om sirkelens kvadratur i undervisning

Avslutningsvis vil jeg nevne noen fordeler med å inkludere sirkelens kvadratur i matematikk undervisninger i skolen. De klassiske konstruksjonsproblemene er lett å visualisere, spesielt ved hjelp av de ulike digitale hjelpemidlene vi har i norske skoler. Jeg vil nevne noen digitale verktøy som kan brukes i skolen til å visualisere og eksperimentere med ulike geometriske problemer. I forsøket om å kvadrere sirkelen i disse digitale verktøyene kan elever eksperimentere med lage en approksimasjon for, for eksempel π. Noen eksempel på slike digitale verktøy er GeoGebra som vi har nevnt tidligere i oppgaven, og Microsoft Excel.

Disse verktøyene gir muligheten til flytte geometriske problemer fra 2D til 3D. Når vi går vekk fra de forutsetningene som er satt av passer – og linjalkonstruksjon kan disse verktøyene bidra betydelig i visuelt og numerisk utforsking av de klassiske problemene. Visualisering av sirkelens kvadratur for eksempel kan bidra til å øke interesse hos elevene. Forsøket på å løse de klassiske problemene, spesielt sirkelens kvadratur har tross inspirert og skapt flere generasjoner av kreative matematikere.

Bibliografi

Baker, A. (1975). *Transcendental Number Theory.* Cambridge: Cambridge University .

Borevic, Z., & Safarevic, I. (1973). *Number Theory.* New York: Academic Press.

Cajori, F. (1918). Pierre Laurent Wantzel. I F. Cajori, *Bulletin of the American Mathematical Society* (ss. 339 - 347). American Mathematical society .

Euklid. (1925). Book 1. I S. T. Heath, *Euclid The Thirteen Books of The Elements* (ss. 153 - 156). Toronto: Genereal Publishing Co.

Ewald, W. B. (2005). *From Kant to Hilbert : a source book in the foundation of mathematics volume II.* Oxford: Clarendon Press; Oxford University Press.

Feferman, S. (c1964). *The Number Systems : Foundations of Algebra and Analysis.* London: Addison - Wesley Publishing Company, INC.

Fine, B. (2017). *Algebra and number theory: a selection of highlights.* Berlin: De Gruyter.

Fraleigh, J. B. (2013). *A First Course in Abstract Algebra.* Pearson Education Limited.

Garling, D. (1986). *A course in Galois Theory.* Cambrigde : Cambridge University Press.

Gonzáles - Velasco, E. A. (2011). *Journey through Mathematics: Creative Episodes in Its History.* New York: NY: Springer Science + Business Media .

Hardy, G., & Wright, E. (1983). *An Introduction To The Theory Of Numbers.* Oxford: Clarentdon Press.

Havil, J. (2012). *The irrationals* . Princeton University Press.

Holme, A. (1996). *Innføring i geometri fra Euklid til Mandelbrot.* Bergen: Alma Mater .

Holme, A. (2002). *Geometry: Our cultural Heritage.* Bergen: Universitetet i Bergen.

Jacobson, N. (1985). *Basic Algebra I: 2nd Edition.* London: Yale University Press.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern.* New York: Oxford University Press.

Mahler, K. (1976). *Lecture notes on Transcendental Numbers* . Berlin: Springer - Verlag Berlin .

Merino, O. (2006). *A short History of Complex Numbers.* University of Rhode Island.

Papatzacos, P. (2017). Notater om matematikkens historie. Stavanger: Universitetet i Stavanger.

Roggen, V., Kraggerud, E., & Tosterud, B. (cop.2015). *Latinsk ordbok: latinsk - norsk.* Oslo: Cappelen Damm.

Rouse, W. W. (2010). *A Short Account of the History of Mathematics.* Cambridge: Project Gutenberg.

Shidlovskii, A., & Koblitz, N. (1989). *Transcendental numbers.* Bergen: W. de Gruyter.

Suzuki, J. (2009). *Mathematics in Historical Context.* Washington DC: The Mathematical Association of America.

Venema, G. A. (c2006). *The foundations of geometry.* Upper Saddøe River, N.J: Pearson / Prentice Hall.