

BEREGNING AV HOMOLOGIGRUPPER OG EULERTALL

BÅRD ANDREAS TORJUSSEN

ABSTRACT. I matematikk er homologi en generell måte å assosiere en sekvens av algebraiske objekter, som abelske grupper eller moduler, med andre matematiske objekter som topologiske rom. Dette gir en måte å se forskjell på topologiske rom, ved å studere disse gruppene som topologiske invarianter. En kjent slik invariant er Eulerkarakteristikken, som også kan relateres til slike algebraiske invarianter. I denne oppgaven introduseres redskaper fra mengdelære, lineær algebra, topologi og gruppeteori, som resulterer i beregninger av homologigruppene til ulike figurer K .

CONTENTS

1. Introduksjon	3
2. Innledning	3
2.1. Definisjoner	4
2.2. Topologiske rom	8
2.3. Homeomorfi og topologiske innvarianter	10
3. Homologigrupper	12
3.1. Gruppeteori	13
3.2. Endeliggenererte abelske grupper og frie abelske grupper	14
3.3. Simplekser og simplisialkomplekser	15
3.4. Homologigrupper av simplisialkomplekser	17
3.5. Homologigrupper	21
3.6. Beregninger av $H_0(K)$	23
4. Konklusjon	28
References	30

Forord

Denne oppgaven er et resultat av mitt arbeid med LMABAC, bacheleroppgave i matematikk - lektor ved universitetet i Stavanger våren 2022.

Arbeidet har vært interessant og lærerikt.

Jeg vil rette en stor takk til min veileder, Eirik Eik Svanes. Takk for særdeles god veiledning og oppfølging. Jeg setter pris på din gode hjelp og din tilgjengelighet. Du er inspirerende, både som foreleser og veileder.

Stavanger 28. mai 2022

Bård Andreas Torjussen.

1. INTRODUKSJON

Faget matematikk inneholder et bredt spekter av temaer og teorier som stadig utvikles. Et av disse temaene er geometri. Her tar man for seg størrelser, former, posisjonsvinkler og dimensjoner til objekter. En moderne gren innenfor geometri kalles topologi. Topologi kan brukes til å se og beregne forskjellen på ulike geometrier. Et sentralt spørsmål innenfor topologi kan være: "Hvorfor er ikke sfæren det samme som torusen, men torusen er "det samme" som en kaffekopp?". En mer generell måte å fremstille dette spørsmålet på er at vi ser for oss flere figurer og spør oss selv hvilke som er like og hvilke som er forskjellige. Hvis vi ikke har definert hva som menes med like eller forskjellige, kan vi si at "alle er forskjellige fra hverandre" eller "alle er like". I elementær geometri er ekvivalensen av figurer gitt ved kongruens, noe som har vist seg å være for strengt for vårt formål. I topologi definerer vi ofte to figurer som likeverdige hvis det er mulig å deformere en figur til en annen ved kontinuerlig deformasjon. Her introduserer vi en ekvivalensreaksjon hvorav geometriske objekter blir klassifisert etter evne til å deformeres til hverandre ved kontinuerlig deformasjon. Dette er hovedformålet med topologi; å klassifisere rom og grupper. Dette bringer oss tilbake til eksempelet om sfæren, torusen og kaffekoppen. Torusen kan deformeres til kaffekoppen siden begge har et hull. Sfæren har ikke et hull og er derfor ikke i samme klasse. Et generelt svar på det aktuelle spørsmålet er at vi bruker topologiske invarianter. Blandt dem finner vi Eulerkarakteristikk, som er en av de mest nyttige topologiske invariantene. I denne oppgaven vil vi gå nærmere inn på hva dette innebærer og hvorfor det er sentralt for oppgavens hovedmotivasjon, nemlig å beregne homologigrupper. Når vi beregner grupper i topologi har vi all gruppeteori tilgjengelig og oppgaven vil basere seg på Mikio Nakaharas bok "Geometry, Topology and Physics" [1].

2. INNLEDNING

I denne delen av oppgaven vil det bli introdusert elementære konsepter i teorien om avbilning, vektorrom og topologi. Mye av teorien i teksten har som formål å studere anvendelsen av teorien om mangfoldigheter til problemene i fysikk. En mangfoldighet er et rom som lokalt ser ut som \mathbb{R}^n eller \mathbb{C}^n , men ikke nødvendigvis globalt. Ved første approksamisjon kan vi modellere en liten del av mangfoldigheten ved et Euklidsk rom \mathbb{R}^n (eller \mathbb{C}^n), som er synspunktet til et vektorrom. Men i topologi studerer vi mangfoldigheten som en helhet. Vi ønsker å se på egenskapene til mangfoldighetene og klassifisere dem ved en form for "målinger". Ordet topologi kommer ofte med et adjektiv, slik som "algebraisk", "differential", "generell" osv. Adjektivene brukes for å referere til måten vi bruker til å klassifisere mangfoldighetene. I denne oppgaven fokuserer vi på algebraisk topologi. Før vi kommer til dette trenger vi å introdusere noen nyttige matematiske begreper. Mange teorem og lemma anses som elementære, hvor bevis blir utelatt. Vi trenger elementære redskaper fra mengdelære, lineær algebra, topologi og gruppeteori [2] [3] [4] [5].

2.1. Definisjoner.

Avbildning.

La X og Y være mengder. En avbildning f er en regel som vi tildler $y \in Y$ for hver $x \in X$. Dette skrives som

$$f : X \rightarrow Y.$$

Hvis f er definert ved en eksplisitt formel kan vi skrive

$$f : x \mapsto f(x)$$

En undermengde av X der elementene er avbildning av $y \in Y$ under f kalles inversbildet av y , angitt som $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Mengden X kalles for definisjonsmengden av avbildningen mens Y kalles verdimengden. Bildet (image) av avbildningen skrives som $f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ for noen } x \in X\} \subset Y$. Bildet $f(x)$ er også angitt som $im f$.

Definisjon 2.1. Hvis en avbildning tilfredstiller visse egenskaper har den et spesifikt navn.

- (a) En avbildning $f : X \rightarrow Y$ kalles injektiv hvis $x \neq x'$ innebærer $f(x) \neq f(x')$.
- (b) En avbildning $f : X \rightarrow Y$ kalles surjektiv hvis det eksisterer minst et element $x \in X$ slik at $f(x) = y$ for hver $y \in Y$.
- (c) En avbildning $f : X \rightarrow Y$ kalles bijektiv hvis den er både injektiv og surjektiv.

Eksempel 2.1. En avbildning $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definert av $f : x \mapsto \sin x$ er hverken injektiv eller surjektiv. La oss begrense definisjonsmengden og verdimengen slik at f blir bijektiv:

$$\begin{aligned} \text{Def.mengde} &= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = X, \\ \text{Verdimengde} &: [-1, 1] = Y \end{aligned}$$

$$f(x) = \sin(x) \text{ er bijektiv p\aa Def.mengde } X \text{ til Verdimengde } Y.$$

Anta at visse algebraiske strukturer (eksempelvis produkt og addisjon) er gitt med mengdene X og Y . Hvis $f : X \rightarrow Y$ bevarer disse algebraiske strukturerne er f en homomorfi. For eksempel, la X og Y være utstyrt med produkt. Hvis f er en homomorfi, bevares produktet, $f(ab) = f(a)f(b)$. Det er viktig å merke seg at ab er definert av produktregelen i X , og $f(a)f(b)$ i Y . Hvis en homomorfi f er bijektiv, kalles f for en isomorfi og X er isomorf til Y , angitt ved $X \cong Y$.

Ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser.

Ekvivalensrelasjoner og ekvivalensklasser er svært viktige konsepter i matematikken og det er derfor passende å definere dem i tidlig i oppgaven. En relasjon R definert i en mengde X er en undermengde av X^2 . Hvis et punkt $(a, b) \in X^2$ er i R , kan vi skrive aRb . For eksempel, relasjonen " $>$ " er en undermengde av \mathbb{R}^2 . Hvis

$(a, b) \in >$, er $a > b$.

Definisjon 2.2. En ekvivalensrelasjon \sim er en relasjon som tilfredstiller følgende krav:

- (i) $a \sim a$ (reflekterende)
- (ii) Hvis $a \sim b$, da er $b \sim a$ (symmetrisk)
- (iii) Hvis $a \sim b$ og $b \sim c$, da er $a \sim c$ (transitiv).

Eksempel 2.2. Hvis et heltall deles på 2 er resten enten 0 eller 1. Hvis to heltall n og m har samme rest skriver vi $m \sim n$. La oss vise at \sim er en ekvivalensrelasjon i \mathbb{Z} .

Vi har:

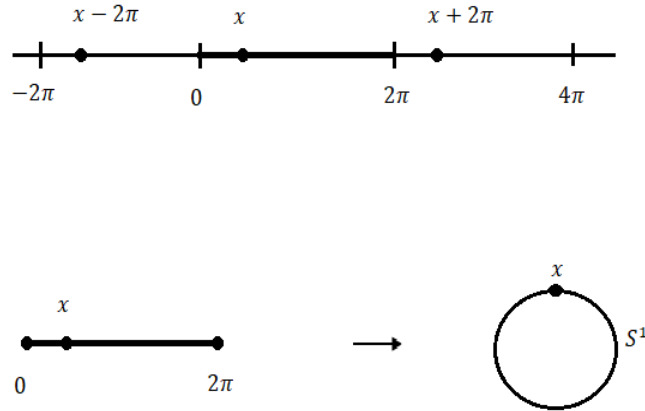
- (i) $m \sim m$ fordi $\frac{m}{2} = \frac{m}{2}$.
- (ii) $m \sim n \Rightarrow n \sim m$ fordi resten av n delt på to er den samme som resten av m delt på 2.
- (iii) $m \sim n, n \sim p \Rightarrow m \sim p$ fordi resten av m delt på 2 er det samme som resten av n delt på 2 som er det samme som resten av p delt på 2.

$\Rightarrow \sim$ er en ekvivalensrelasjon i \mathbb{Z} .

Gitt en mengde X og en ekvivalensrelasjon \sim , har vi en partisjon av X inn i gjensidig disjunkte delmengder kalt ekvivalensklasser. En klasse $[a]$ består av alle elementene x i X slik at $x \sim a$,

$$[a] = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

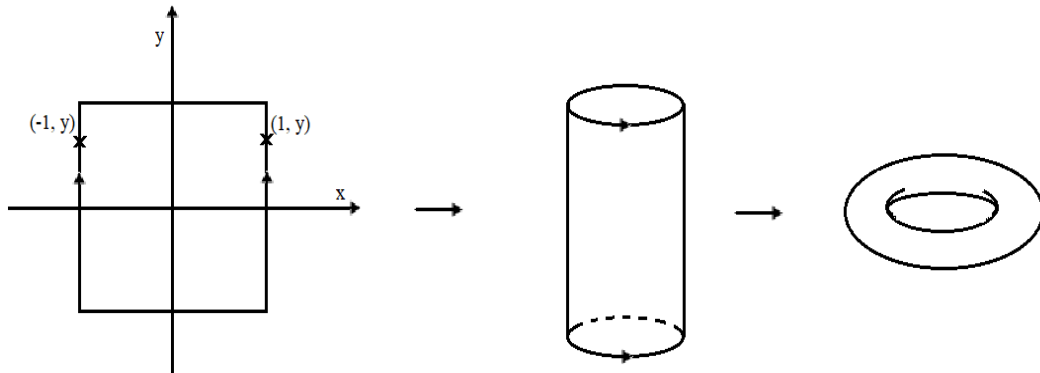
Vi har $a \sim b$. To klasser $[a]$ og $[b]$ tilfredstiller enten $[a] = [b]$ eller $[a] \cap [b] = \emptyset$ ([1] side 89). Dermed er et set X dekomponert i gjensidige disjunkte ekvivalensklasser. Mengden av alle klassene er kalt kvotientrommet, angitt ved X/\sim . Elementet a , eller et hvert element i $[a]$, kalles en representant for klassen $[a]$. I Eksempel 2.2 deler ekvivalensrelasjonen \sim heltallene inn i to klasser, partall og oddetall. Vi kan velge representanten til partallsgruppen til å være 0 og for oddetallsgruppen kan vi velge 1. Vi skriver kvotientrommet \mathbb{Z}/\sim . Dette kvotientrommet er isomorf med \mathbb{Z}_2 , den sykliske gruppen med orden 2, der algebraen er definert ved $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ og $1 + 1 = 0$. Hvis alle heltall er delt inn i ekvivalensklasser i følge resten av divisjon av n , er kvotientrommet isomorf med \mathbb{Z}_n , den sykliske gruppen med orden n .



Figur 2.1.

La oss illustrere hvordan ekvivalensrelasjoner kan brukes til å lage ikke-trivielle topologier. La x og y være to punkt i \mathbb{R} . Vi introduserer en relasjon \sim ved: $x \sim y$ hvis det eksisterer $n \in \mathbb{Z}$ slik at $y = x + 2\pi n$. Her har vi at \sim er en ekvivalensrelasjon. Klassen $[x]$ er en mengde $\{\dots, x - 2\pi, x, x + 2\pi, \dots\}$. Et nummer $x \in [0, 2\pi)$ fungerer som en representant for en ekvivalensklasse $[x]$ (se øverste figur i Figur 2.1). Merk at 0 og 2π er forskjellige punkter i \mathbb{R} , men ifølge ekvivalensrelasjonen ses de på som samme punkt i \mathbb{R}/\sim . Vi kan dermed konkludere med at kvotientrommet \mathbb{R}/\sim er sirkelen $S^1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ (se nederste figur i Figur 2.1). Merk at et punkt ε er nære til et punkt $2\pi - \varepsilon$ for et infinitesimal ε . Dette er tilfellet for S^1 , der en vinkel ε er nærme $2\pi - \varepsilon$, men ikke tilfelle for \mathbb{R} . Konseptet om nærheten av punkter er en av hovedingrediensene i topologi.

Eksempel 2.3. La X være firkantet disk $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Hvis vi identifiserer punktene på et par motstående kanter, $(-1, y) \sim (1, y)$, får vi en sylinder (se Figur 2.2). Sylinderen har definerte sider og et eksempel på en orienterbar flate. Hvis vi identifiserer sirklene på enden med samme orientering får vi torusen T^2 .



Figur 2.2.

Vektorrom.

Et vektorrom V over en kropp K er en mengde hvor to operasjoner, addisjon og multiplikasjon med et element av K (en skalar), er definert. I min oppgave, og i likhet med Nakahara [1] er vi hovedsakelig interessert i $K = \mathbb{R}$ og \mathbb{C} . Elementene av V , vektorene, tilfredstiller de følgende 8 aksiomene:

- (i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- (ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- (iii) Det eksisterer en nullvektor $\mathbf{0}$ slik at $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
- (iv) For enhver \mathbf{u} , finnes det en $-\mathbf{u}$ slik at $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- (v) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
- (vi) $(c+d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
- (vii) $(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u})$
- (viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

I dette tilfellet er $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ og $c, d \in K$ og 1 er enhetselementet for K .

Vi har en mengde k vektorer $\{\mathbf{v}_i\}$, og får ligningen:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Hvis den gitte ligningen har en ikke-triviell løsning $x_i \neq 0$ for noen i , er $\{\mathbf{v}_i\}$ lineært avhengig. Men hvis ligningen kun har en triviell løsning $x_i = 0$ for alle i , er vektorsettet lineært uavhengig. Settet vil alltid være lineært avhengig hvis minst en av vektorene er en null-vektor $\mathbf{0}$.

Lineær avbildning.

Gitt to vektorrom V og W , en avbildning $f : V \rightarrow W$ kalles en lineær avbildning hvis den tilfredstiller $f(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2)$ for enhver $a_1, a_2 \in K$ og $v_1, v_2 \in V$. En lineær avbildning er et eksempel på en homomorfi som bevarer vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon. Bildet av f er $f(V) \subset W$, angitt ved $\text{im} f$ og kjernen av f er $\{v \in V \mid f(v) = 0\}$, angitt ved $\text{ker} f$. Hvis f er en isomorfi, sier vi at V er isomorf med W , og omvendt, angitt ved $V \cong W$. Da følger det også at $\dim V = \dim W$ for endelig dimensjonale rom.

Teorem 2.1. Hvis $f : V \rightarrow W$ er en lineær avbildning og V er endelig dimensjonal, da er

$$\dim V = \dim (\text{ker}(f)) + \dim (\text{im}(f)).$$

2.2. Topologiske rom.

Definisjon 2.3. La X være hvilken som helst mengde hvor $\mathcal{T} = \{U_i \mid i \in I\}$ angir en viss samling av delmengder av X . (X, \mathcal{T}) er et topologisk rom hvis \mathcal{T} tilfredstiller følgende krav:

- (i) $\emptyset, X, \in \mathcal{T}$.
- (ii) Hvis J er en delsamling av I , vil familien $\{U_j \mid j \in J\}$ tilfredstille $\cup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}$.
- (iii) Hvis K er en endelig delsamling av I , vil familien $\{U_k \mid k \in K\}$ tilfredstille $\cap_{k \in K} U_k \in \mathcal{T}$.

X alene kalles av og til et topologisk rom. U_i kalles åpne mengder og \mathcal{T} gir en topologi til X .

Eksempel 2.4. (i) Hvis X er en mengde og \mathcal{T} er en samling av alle undermengdene av X , da er (i)-(iii) automatisk tilfredstilt. Denne topologien kalles diskret topologi.

(ii) La X være en mengde og $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Da tilfredstiller \mathcal{T} (i)-(iii). Denne topologien kalles triviell topologi.

(iii) La X være tallinjen \mathbb{R} . Alle åpne intervaller (a, b) og deres unioner definerer en topologi kalt vanlig topologi. a og b kan være $-\infty$ og ∞ hhv. På samme måte kan den vanlige topologien i n dimensjoner defineres. [Ta et produkt $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ og deres unioner...]

En metrikk $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ er en funksjon som tilfredstiller følgende forhold:

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$
- (ii) $d(x, y) \geq 0$ hvor likheten holder hvis og bare hvis $y = x$
- (iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

for enhver $x, y, z \in X$. Hvis X er utstyrt med en metrikk d , blir X om til et topologisk rom hvor de åpne mengdene er gitt ved "åpne disker",

$$U_\epsilon(X) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

og alle deres mulige unioner. Topologien \mathcal{T} som er definert på denne måten kalles metrisk topologi bestemt av d . Det topologiske rommet (X, \mathcal{T}) kalles et metrisk rom.

Eksempel 2.5. La $X = \mathbb{R}^{n+1}$ og ta n -sfæren S^n

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = 1.$$

En topologi i S^n kan gis av den relative topologien introdusert av den vanlige topologien på \mathbb{R}^{n+1} . De åpne mengdene er gitt ved snitt av åpne mangder i \mathbb{R}^{n+1} og S^n

Kompakthet.

Definisjon 2.4. Se på en mengde X og alle mulige overdekninger (coverings) av X . Mengden X er kompakt hvis, det for enhver åpen overdekning $\{U_i \mid i \in I\}$, så eksisterer en endelig undermengde J av I slik at $\{U_j \mid j \in J\}$ også er en overdekning av X .

Generelt sett, hvis en mengde er kompakt i \mathbb{R}^n , må det være begrenset (bounded).

Teorem 2.2. *La X være en undermengde av \mathbb{R}^n . X er kompakt hvis og bare hvis det er lukket og begrenset.*

Som ofte ses på som (en konsekvens av) Bolzano-Weierstrass teoremet [6].

Eksempel 2.6.

(i) Et punkt er kompakt.

(ii) Ta et åpent intervall (a, b) i \mathbb{R} og velg en åpen overdekning $U_n = (a, b - 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Da har vi

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n = (a, b).$$

Men det er ingen endelig underfamilie av $\{U_n\}$ som overdekker (a, b) . Så, et åpent intervall (a, b) er ikke-kompakt i samsvar med teorem 2.2.

(iii) S^n i eksempel 2.3 med den relative topologien kompakt, fordi den er lukket og begrenset.

Sammenhengende Rom.**Definisjon 2.5.**

(i) Et topologisk rom X er sammenhengende (connected) hvis det ikke kan skrives som $X = X_1 \cup X_2$, der X_1 og X_2 begge er åpne og $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Hvis dette ikke er tilfellet kalles X for usammenhengende.

(ii) Et topologisk rom X kalles buevis sammenhengende hvis det for alle punkt $x, y \in X$ eksisterer en kontinuerlig avbildning $f : [0, 1] \rightarrow X$ slik at $f(0) = x$ og $f(1) = y$.

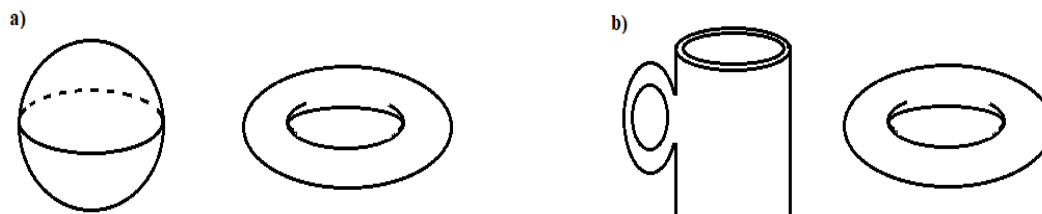
(iii) En løkke i et topologisk rom X er en kontinuerlig avbildning $f : [0, 1] \rightarrow X$ slik at $f(0) = f(1)$. Hvis en løkke i X kan kontinuerlig krympes til et punkt er X kalt for enkeltssammenhengende (simply connected).

2.3. Homeomorfi og topologiske innvarianter.

Homeomorfi.

Definisjon 2.6. La X_1 og X_2 være topologiske rom. En avbildning $f : X_1 \rightarrow X_2$ er en homeomorfi hvis den er kontinuerlig og har en invers $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ som også er kontinuerlig. Hvis det eksisterer en homeomorfi mellom X_1 og X_2 sier vi at de er homeomorfe med hverandre.

Med andre ord er X_1 homeomorf med X_2 hvis det eksisterer kontinuerlige $f : X_1 \rightarrow X_2$ og $g : X_2 \rightarrow X_1$ slik at $f \circ g = \text{id}_{x_2}$ og $g \circ f = \text{id}_{x_1}$. Herfra er det enkelt å vise at en homeomorfi er en ekvivalensrelasjon. Speiling følges av valget $f = \text{id}_x$, mens symetri følges ved at hvis $f : X_1 \rightarrow X_2$ er en homeomorfi, er det også tilfellet for $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$. Transitivitet kommer av at hvis $f : X_1 \rightarrow X_2$ og $g : X_2 \rightarrow X_3$ er homeomorfe, gjelder dette også for $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$. Deretter kan vi dele alle topologiske rom inn i ekvivalensklasser etter om det er mulig å deformere et rom til et annet ved en homeomorfi. Sett fra et intuitivt synspunkt antar vi at de topologiske rommene er laget av gummi som vi kan deformere etter vår vilje. To topologiske rom er homeomorfe til hverandre hvis vi kan deformere den ene til den andre ved hjelp av en inverterbar kontinuerlig deformasjon uten å rive dem fra hverandre eller lime dem sammen.



Figur 2.4

I figur 2.4 b) ser vi et eksempel på en homeomorfi. Det er mulig å deformere figuren til venstre (kaffekoppen) til figuren til høyre (torusen) ved kontinuerlig deformasjon. Dette er ikke tilfellet i a). For å deformere sfæren til torusen må vi lage et hull. Dette er ikke en kontinuerlig operasjon.

Topologiske invarianter.

Hvis to rom har ulike topologiske invarianter er de ikke homeomorfe med hverandre. I denne oppgaven følger vi denne påstanden og ser på topologiske invarianter som mengdene som er bevart under homeomorfi. En topologisk invariant kan være et tall slik som antallet sammenhengende komponenter av rommet eller antall "hull" hvor sfæren har null hull og torusen har et hull, en algebraisk struktur som en gruppe eller ring som er konstruert ut fra rommet, eller egenskaper som sammenhengbarhet og kompakthet.

Hvis vi visste den komplette mengden med topologiske invarianter kunne vi spesifisert ekvivalensklassen ved å oppgi invarianter. Men så langt vet vi bare en del av mengende av topologiske invarianter, som betyr at selv om alle de kjente topologiske invariantene av to topologiske rom korresponderer, er det ikke sikkert de er homoomorfe. Det lengste vi kan gå er derfor å si: hvis to topologiske rom har forskjellig topologiske invarianter, kan de ikke være homeomorfe.

Eksempel 2.7. La oss finne en homeomorfi mellom en sirkel $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ og en ellipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$.

$f : S^1 \rightarrow E$
 $f(x, y) = (ax, by)$
 $f^{-1}(x, y) = (x/a, y/b)$
 $ff^{-1} = f^{-1}f = id \Rightarrow f$ er bijektiv og f, f^{-1} kontinuerlige, dermed en f homeomorfi.

Eulerkarakteristikk.

Som nevnt i introduksjonen er Eulerkarakteristikken en av de mest nyttige topologiske invariantene. I denne oppgaven vil vi begrense oss til punkter, linjer og flater i \mathbb{R}^3 . Et polyeder er et geometrisk objekt som er omgitt av overflater. Randen til to overflater er en kant og to kanter møtes i et hjørne. Vi kaller overflatene, kantene og hjørnene til et polyeder for simplekser. De formelle definisjonene til simpleksene vil vi komme tilbake til i kapittel 3.

Definisjon 2.7. La X være en undermengde av \mathbb{R}^3 som er homeomorf med et polyeder K . Da er Eulerkarakteristikken $\chi(X)$ av X definert ved

$$(1) \quad \chi(X) = (\text{antall hjørner i } K) - (\text{antall kanter i } K) + (\text{antall overflater i } K).$$

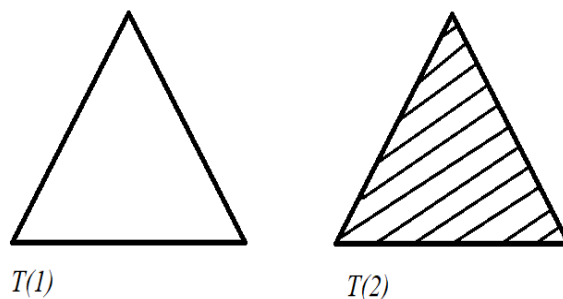
Teorem 2.3. (Poincaré-Alexander) Eulerkarakteristikken $\chi(X)$ er uavhengig av polyederet K så lenge K er homeomorf med X .

Eulerkarakteristikken til en trekantet skive er $\chi(\text{trekant}) = 3 - 3 + 1 = 1$. Et litt ikke-trivielt eksempel er Eulerkarakteristikken til S^1 . Det enkleste polyederet som er homeomorf med S^1 er laget av tre kanter av et triangel. Da er $\chi(S^1) = 3 - 3 = 0$. På samme måte er sfæren S^2 homeomorf med overflaten til et tetraeder, som vil si $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$. Her kan vi også se at S^2 er homeomorf med overflaten av en kube. Hvis vi bruker kubens til å regne ut Eulerkarakteristikken til S^2 får vi $\chi(S^2) = 8 - 12 + 6 = 2$. Historisk sett er dette konklusjonen til Eulers teorem: hvis K er et av polyedrene som er homeomorf med S^2 , med h hjørner, k kanter og o to-dimensjonale overflater, er $h - k + o = 2$.

Eksempel 2.8. La oss også regne ut Eulerkarakteristikken til torusen T^2 . Et eksempel på et polyeder som er homoeomorf med T^2 kan er et 3-dimensjonalt rektangel hull i midten. Rektangelet har 16 hjørner, 32 kanter og 16 overflater. Vi finner da $\chi(T^2) = 16 - 32 + 16 = 0$. Vi vil komme tilbake til dette eksempelet senere, der vi også skal se hvordan man beregner Eulerkarakteristikk fra homologigrupper.

3. HOMOLOGIGRUPPER

Vi er nå kommet til hoveddelen av oppgaven: Homologigrupper. Blandt de topologiske invariantene er Eulerkarakteristikken av en mengde lesbar ved ”polyederisering” av rommet (se Nakahara [1] kapittel 3). Man kan si at homologigrupper er en ”forfining” av Eulerkarakteristikken. Samtidig kan man enkelt lese av Eulerkarakteristikken fra homologigruppene. La oss se litt næremre på disse. Under kan man se to figurer, $T(1)$ og $T(2)$.



Figur 3.1.

I figur $T(2)$ er det indre (interior) inkludert, mens i figur $T(1)$ er det ikke. Spørsmålet her er hvordan vi karakteriserer forskjellen på disse figurene. Det første vi kan observere er at figur $T(2)$ har tre kanter (edges) som skaper en rand (boundary) for det indre. Dette er ikke tilfellet i figur $T(1)$ da det indre ikke er en del av figuren. Her skaper de tre kantene en lukket vei, en løkke, uten rand. Dermed kan vi si at en løkke uten rand og uten indre innebærer et hull løkken. Dette er det ledende prinsippet vårt for å klassifisere rom ved homologigrupper: Finn et område uten rand, som ikke i seg selv er en rand for et område.

3.1. Gruppeteori.

Før vi kan definere homologigrupper trenger vi litt gruppeteori. De matematiske strukturene som ligger til grunn for homologigruppene er endeliggenererte abelske grupper. Gjennom dette kapittelet er gruppeoperasjonene detonert ved + fordi alle gruppene i gruppeoperasjonene være abelske (kommutative).

En undermengde $H \subset G$ er en undergruppe hvis den er en gruppe med respekt for gruppeoperasjonen av G . For eksempel,

$$k\mathbb{Z} \equiv \{kn \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad k \in \mathbb{N}$$

er en undergruppe av \mathbb{Z} , mens $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ er ikke.

La H være en undergruppe av G . Vi sier at $x, y \in G$ er ekvivalent hvis

$$x - y \in H$$

og skriver $x \sim y$. Det er klart at \sim er en ekvivalensrelasjon. Ekvivalensklassen som x hører til er angitt som $[x]$. La G/H være kvotientrommet. Gruppeoperasjonen + i G induserer naturlig gruppeoperasjonen + i G/H ved

$$[x] + [y] = [x + y].$$

Merk at + på venstre side er en operasjon i G/H mens + på høyre side er i G . Operasjonen G/H bør være uavhengig av valget av representanter. Vi har at hvis $[x'] = [x]$, $[y'] = [y]$, er $x - x' = h$, $y - y' = g$ for noen $h, g \in H$. Vi finner da at

$$x' + y' = x + y - (h + g) \in [x + y].$$

G/H blir en gruppe med denne operasjonen, fordi H er alltid en normal undergruppe av G . Enhets-elementet av G/H er $[0] = [h]$, $h \in H$. Hvis $H = G$, $0 - x \in G$ for enhver $x \in G$ og G/G har kun et element $[0]$. Hvis $H = 0$ vil G/H være selve G fordi $x - y = 0$ hvis og bare hvis $x = y$.

Lemma 3.1. *La $f : G_1 \rightarrow G_2$ være en homomorfi. Da har vi:*

(I) *$\ker f = \{x \mid x \in G_1, f(x) = 0\}$ er en undergruppe av G_1 .*

(II) *$\operatorname{im} f = \{x \mid x \in f(G_1) \subset G_2\}$ er en undergruppe av G_2 .*

Bevis.

(I) La $x, y \in \ker f$. Da har vi $x + y \in \ker f$ fordi $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$. $\ker f$ er lukket under addisjon. Merk at $0 \in \ker f$ for $f(0) = f(0) + f(0) = 0$. Vi har $f(0) = 0$ og $f(x) = 0$. Dermed er $-x \in \ker f$ fordi $f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x) = 0$.

(II) La $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \in \operatorname{im} f$ der $x_1, x_2 \in G_1$. Fordi f er en homomorfi har vi $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in \operatorname{im} f$. Vi ser at $0 \in \operatorname{im} f$ fordi $f(0) = 0$. Hvis $y = f(x)$, $-y \in \operatorname{im} f$ fordi $0 = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ og videre

er $f(-x) = -y$.

QED.

Teorem 3.1. *Homomorfiens fundamentalteorem.*

La $f : G_1 \rightarrow G_2$ være en homomorfi. Da har vi:
 $G_1 / \ker f \cong \text{im } f$.

Bevis. I følge Lemma 3.1 er begge sider grupper. Definerer så en avbildning $\sigma : G_1 / \ker f \rightarrow \text{im } f$ ved $\sigma([x]) = f(x)$. Denne avbildningen er også derfinert for $x' \in [x]$, hvor det eksisterer en $h \in \ker f$ slik at $x' = x + h$ og $f(x') = f(x + h) = f(x) + f(h) = f(x)$. Videre må vi vise at σ er en isomorfi. Viser først av σ er en homomorfi ved:

$$\sigma([x] + [y]) = \sigma([x + y]) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \sigma([x]) + \sigma([y])$$

Videre er σ en-til-en: Hvis $\sigma([x]) = \sigma([y])$, er $f(x) = f(y)$ eller $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$. Dette viser at $x - y \in \ker f$ og $[x] = [y]$. Til slutt er σ på: Hvis $y \in \text{im } f$, og det eksisterer en $x \in G_1$ slik at $f(x) = y = \sigma([x])$.

QED.

Eksempel 3.1. La $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ være definert ved $f(2n) = 0$ og $f(2n + 1) = 1$. Her har vi at $\ker f = 2\mathbb{Z}$ og $\text{im } f = \mathbb{Z}_2$ er grupper. Dermed har vi ved fundamentalteoremet at $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$. Se også [1] Example 3.1. (s.114) hvor det blir konstantert at for en generell $k \in \mathbb{N}$ har vi $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k$.

3.2. Endeliggenererte abelske grupper og frie abelske grupper.

Definisjon 3.1. Hvis G er endeliggenerert ved r lineært uavhengige elementer, er G en fri abelsk gruppe av rang r .

Eksempel 3.2. \mathbb{Z} er en fri abelsk gruppe av rang 1 endelig generert ved 1 (eller -1). La $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ være mengden $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$. Dette er en fri abelsk gruppe av rang 2 endeliggenerert ved generatorene $(1,0)$ og $(0,1)$. Mer generelt

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_r$$

er en fri abelsk gruppe av rang r . Gruppen $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ er endeliggenerert av 1 men er ikke fri fordi 1 ikke er lineært uavhengig (merk $1+1=0$).

La oss klassifisere endeliggenererte abelske grupper. Vi trenger følgende lemma ([1] side 116).

Lemma 3.2. *La G være en fri abelsk gruppe av rang r og la $H (\neq \emptyset)$ være en undergruppe av G . Velger p generator x_1, \dots, x_p , fra r generator i G slik at $k_1 x_1, \dots, k_p x_p$ genererer H . Dermed får vi $H \cong k_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus k_p \mathbb{Z}$ og H er av rang p .*

Teorem 3.2. *Endeliggenererte abelske gruppers fundamentalteorem.*

La G være en endeliggenerert abelsk gruppe med m generatorer. Da er G isomorf med den direkte summen av sykliske grupper,

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_r \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_p}$$

der $m = r + p$. Tallet r er rangen av G .

Bevis. La G være generert av m elementer x_1, \dots, x_m og la

$$f : \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m \rightarrow G$$

være en surjektiv homomorfi,

$$f(n_1, \dots, n_m) = n_1 x_1 + \dots + n_m x_m.$$

Teorem 3.2 slår fast at

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m / \ker f \cong G.$$

Siden $\ker f$ er en undergruppe av

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m$$

sier lemma 3.2 at hvis vi velger generatorene riktig, vil vi få

$$\ker f \cong k_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus k_p \mathbb{Z}.$$

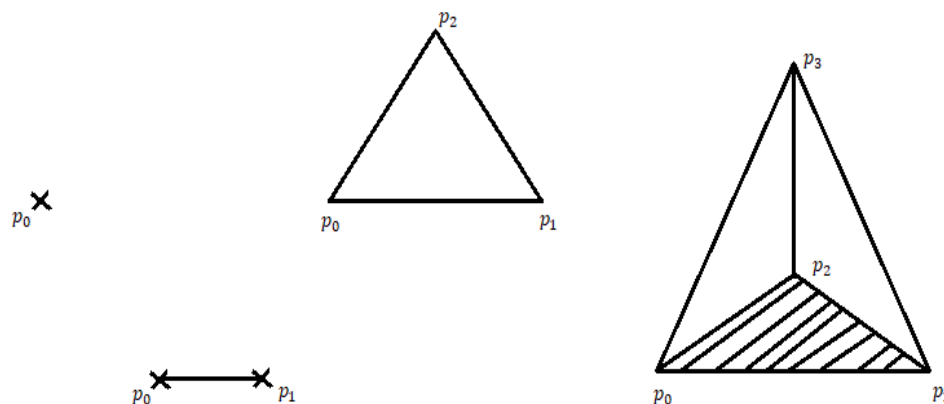
Dermed vil vi til slutt få:

$$\begin{aligned} G &\cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m / \ker f \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m / (k_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus k_p \mathbb{Z}) \\ &\cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{m-p} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_p}. \end{aligned}$$

QED.

3.3. Simplekser og simplisialkomplekser.

For å kunne beregne Eulerkarakteristikken til en overflate må vi først konstruere et polyeder som er homeomorf til den gitte overflaten. Deretter teller vi antall hjørner, kanter og overflater. Eulerkarakteristikken til polyederet, og dermed overflaten, er da gitt ved ligning (1). Vi abstraherer denne prosedyren slik at vi kan representere hver del av en figur ved et standardobjekt. Vi bruker trekantene og deres simplekser som standardobjektene. Ved denne standariseringen blir det mulig å tildele abelsk gruppestruktur til enhver figur (homologi grupper). Denne gruppen kan også brukes til å beregne Eulerkarakteristikken.



Figur 3.2, eksempler på 0-, 1-, 2-, og 3- simplekser.

Simplekser er byggesteinene i et polyeder. En 0-simpleks $\langle p_0 \rangle$ er et punkt eller et hjørne, mens en 1- simpleks $\langle p_0p_1 \rangle$ er en linje eller en kant. En 2-simpleks $\langle p_0p_1p_2 \rangle$ er definert til å være en trekant der det indre er inkludert og en 3-simpleks $\langle p_0p_1p_2p_3 \rangle$ er en solid tetraeder (som vist over i figur 3.2). Videre kan vi fortsette å konstruere en hver r -simpleks $\langle p_0p_1\dots p_r \rangle$. Det er likevel viktig å merke seg at for at en r -simpleks skal representere et r -dimensjonalt objekt må hjørnene p_i være geometrisk uavhengige: Ingen $(r-1)$ -dimensjonalt hyperplan inneholder alle $r+1$ punktene. La p_0, \dots, p_r være geometrisk uavhengige punkter i \mathbb{R}^m der $m \geq r$. Da er r -simpleksen $\sigma^r = \langle p_0, \dots, p_r \rangle$ uttrykt som:

$$\sigma^r = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=0}^r c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^r c_i = 1 \right\}.$$

La q være et heltall slik at $0 \leq q \leq r$. Hvis vi velger $q+1$ punkter p_{i_0}, \dots, p_{i_q} fra p_0, \dots, p_r vil disse $q+1$ punktene definere en q -simpleks $\sigma = \langle p_{i_0}, \dots, p_{i_q} \rangle$, som kalles en q -overflate for σ_r . Vi skriver at $\sigma_q \leq \sigma_r$ hvis σ_q er en overflate av σ_r . Hvis $\sigma_q \neq \sigma_r$ sier vi at σ_r er en ekte overflate av σ_r angitt som $\sigma_q < \sigma_r$.

3-simpleksen i figur 3.2 viser en 3-overflate, fire 2-overflater, seks 1-overflater og fire 0-overflater.

Eksempel 3.3. Se på 3-simpleksen fra figur 3.2, $\sigma_3 = \langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$. La K være mengden av alle overflater av σ_3 :

$$K = \{p_0, p_1, p_2, p_3, \langle p_0 p_1 \rangle, \langle p_0 p_2 \rangle, \langle p_0 p_3 \rangle, \langle p_1 p_2 \rangle, \langle p_1 p_3 \rangle, \langle p_2 p_3 \rangle, \langle p_0 p_1 p_2 \rangle, \langle p_0 p_1 p_3 \rangle, \langle p_0 p_2 p_3 \rangle, \langle p_1 p_2 p_3 \rangle, \langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle\}.$$

I dette tilfellet er K kalt en simplisialkompleks. Det er en mengde der elementene er simplekser.

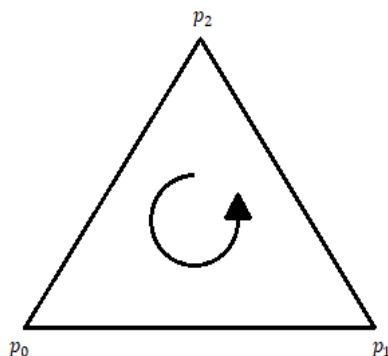
Definisjon 3.2. (i) En vilkårlig overflate av et simpleks K hører til K hvis $\sigma \in K$ og $\sigma' \leq \sigma$, så $\sigma' \in K$; og
(ii) hvis σ og σ' er to simplekser av K er snittet $\sigma \cap \sigma'$ enten tomt eller en felles overflate av σ og σ' , hvis $\sigma, \sigma' \in K$ har vi enten $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ eller $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$ og $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$

Hvis hver simpleks er betraktet som en delmengde av \mathbb{R}^m , blir unionen av alle simpleksene en delmengde av \mathbb{R}^m . Denne delmengden kalles et polyhedron $|K|$ av en simplisialkompleks K . Dimensjonen til $|K|$ som en delmengde av \mathbb{R}^m er det samme som dimensjonen til K ; $\dim |K| = \dim K$ (dimensjonen til det simplekset i K av størst dimensjon).

La X være et topologisk rom. Hvis det eksisterer et simplisialkompleks K og en homeomorfi $f : |K| \rightarrow X$, sier vi at X er triangulerbar og paret (K, f) kalles en triangulering av X .

3.4. Homologigrupper av simplisialkomplekser.

Vi kan tildele orientering til r -simplekser for $r \geq 1$. Istedet for $\langle \dots \rangle$ for en uorientert simpleks kan vi bruke (\dots) for en orientert simpleks. En orientert 2-simpleks $\sigma_2 = (p_0 p_1 p_2)$ er en triangulær region $p_0 p_1 p_2$ med en gitt orientering langs kantene.



Figur 3.3, eksempel på en orientert 2-simpleks.

Her er orienteringen $p_0p_1p_2$ den samme som $p_1p_2p_0$, men motsatt av $p_0p_2p_1$. Vi krever derfor at:

$$\begin{aligned}(p_0p_1p_2) &= (p_1p_2p_0) = (p_2p_0p_1) = \\ -(p_0p_2p_1) &= -(p_1p_0p_2) = -(p_2p_0p_1).\end{aligned}$$

Dette begrepet av orientering generaliseres enkelt til simplekser av høyere og lavere dimensjoner.

Kjedegruppe, sykkelgruppe og randgrupper.

La $K = \{\sigma_\alpha\}$ være et n -dimensjonal simplisialkompleks. Vi anser simpleksene σ_α i K som orienterte simplekser og betegner dem med samme symbol σ_α .

Definisjon 3.3. r -kjedegruppen $C_r(K)$ av et simplisialkompleks K er en fri abelsk gruppe generert av de orienterte r -simpleksene i K . $C_r(K)$ er definert til å være 0 hvis $r > \dim K$ (Nakahara, def. 3.2.) [1].

La det være I_r r -simplekser i K . Vi betegner hver av dem $\sigma_{r,i}$ ($1 \leq i \leq I_r$). Da er $c \in C_r(K)$ uttrykt som

$$c = \sum_{i=0}^r c_i \sigma_{r,i} \quad c_i \in \mathbb{Z}.$$

Hvis vi adderer to r -kjeder, c og \tilde{c} , får vi:

$$c + \tilde{c} = \sum_{i=0}^r (c_i + \tilde{c}_i) \sigma_{r,i} \quad c, \tilde{c} \in C_r(K).$$

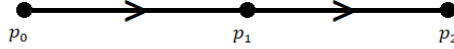
Enhets-elementet er $0 = \sum_i 0 \cdot \sigma_{r,i}$ og det inverse elementet av c er $-c = \sum_i (-c_i) \sigma_{r,i}$.

Dermed er $C_r(K)$ en fri abelsk gruppe med rang I_r ,

$$C_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{I_r}.$$

Der I_r står for antall r -simplekser i K .

Før sykkel- og randgrupper defineres må rand-operatoren introduseres. Vi betegner randen til en r -simpleks σ_r som $\partial_r \sigma_r$. ∂_r produserer randen til σ_r , og er dermed en "rand-operator". En 0-simpleks har ingen rand, og derfor $\partial_0 p_0 = 0$. For en 1-simpleks (p_0p_1) , definerer vi $\partial_1(p_0p_1) = p_1 - p_0$. Grunnen til at vi får et minustegn foran p_0 kan forklares ved å bruke figur 3.4 under. Her har vi en orientert 1-simpleks delt opp i (p_0p_1) og (p_1p_2) . Hvis $\partial_1(p_0p_2)$ ble definert til å være $p_0 + p_2$, ville vi hatt $\partial_1(p_0p_1) + \partial_1(p_1p_2) = p_0 + p_1 + p_1 + p_2$. p_1 er en fiktiv rand og dette er derfor ikke ønskelig. Vi tar istedet $\partial_1(p_0p_2) = p_2 - p_0$ og får $\partial_1(p_0p_1) + \partial_1(p_1p_2) = p_1 - p_0 + p_2 - p_1 = p_2 - p_0$.



Figur 3.4, eksempel på en orientert 1-simpleks.

For et 2-simpleks har vi $\partial_2(p_0p_1p_2) = (p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0)$ da blir randen av randen

$$\partial_1(p_0p_1) + \partial_1(p_1p_2) + \partial_1(p_2p_0) = p_0 + p_1 + p_1 + p_2 + p_2 + p_0$$

hvis vi fulgte regelen $\partial_1(p_0p_1) = p_0 + p_1$. Dette motsier intuisjonen vår, og vi bruker derfor $\partial_1(p_0p_1) = p_0 - p_1$ og får:

$$\partial_1(p_0p_1) + \partial_1(p_1p_2) + \partial_1(p_2p_0) = p_1 - p_0 + p_2 - p_1 + p_0 - p_2 = 0$$

som er ønskelig siden randen av en rand er null. Vi setter et plusstegn hvis det første hjørnet er utelatt, og et minustegn hvis det andre hjørnet er utelatt. Dette gjelder for å definere randen til en generell r-simpleks.

La $\sigma_r(p_0 \dots p_r)$ ($r > 0$) være en orientert r-simpleks. Randen $\partial_r \sigma_r$ av σ_r er en $(r-1)$ -kjede definert ved:

$$\partial_r \sigma_r \equiv \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r)$$

der punktet p_i under $\hat{}$ er utelatt. For eksempel

$$\partial_2(p_0p_1p_2) = (p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)$$

$$\partial_3(p_0p_1p_2p_3) = (p_1p_2p_3) - (p_0p_2p_3) + (p_0p_1p_3) - (p_0p_1p_2).$$

Formelt definerer vi $\partial_0 \sigma_0 = 0$. Operatoren ∂_r virker lineært på et element $c = \sum_i c_i \sigma_{r-i}$ av $C_r(K)$,

$$\partial_r c = \sum_i c_i \partial_r \sigma_{r,i}.$$

$\sum_i c_i \partial_r \sigma_{r-i}$ er et element av $C_{r-1}(K)$ og ∂_r definerer en avbildning

$$\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K).$$

Definisjon 3.4. Hvis $c \in C_r(K)$ tilfredstiller $\partial_r c = 0$, er c en r -sykel. Mengden av r -sykler $Z_r(K)$ er en undergruppe av $C_r(K)$ og kalles r -sykelgruppen. Merk også at $Z_r(K) = \ker \partial_r$.

Definisjon 3.5. La K være et n -dimensjonal simplisialkompleks og la $c \in C_r(K)$. Hvis det eksisterer et element $d \in C_{r+1}(K)$ slik at $c = \partial_{r+1}d$, er c kalt en r -rand. Settet av r -rander $B_r(K)$ er en undergruppe av $C_r(K)$ og kalles r -randgruppen. Merk også at $B_r(K) = \text{im } \partial_{r+1}$.

Vi kan se fra lemma 3.1 at $Z_r(K)$ og $B_r(K)$ er undergrupper av $C_r(K)$. Det er samtidig viktig å bevise relasjonen mellom $Z_r(K)$ og $B_r(K)$, fordi det er avgjørende for å kunne definere homologigrupper.

Lemma 3.3. Den sammensatte avbildningen $\partial_r \circ \partial_{r+1} : C_{r+1}(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ er en null-avbildning, altså: $\partial_r(\partial_{r+1}c) = 0$ for alle $c \in C_{r+1}(K)$.

Bevis. Anta $r > 0$ og ta $\sigma = (p_0 \dots p_r p_{r+1}) \in C_{r+1}(K)$. Da har vi:

$$\begin{aligned} \partial_r(\partial_{r+1}\sigma) &= \partial_r \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \partial_r (p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j (p_0 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) \right) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (p_0 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) - \sum_{j > i} (-1)^{i+j} (p_0 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) = 0 \end{aligned}$$

QED.

Teorem 3.3. La $Z_r(K)$ og $B_r(K)$ være r -sykel- og r -randgruppen til $C_r(K)$. Da er

$$B_r(K) \subset Z_r(K) \quad (\subset C_r(K)).$$

Bevis. Dette kan bevises gjennom lemma 3.3. Et hvert element c av $B_r(K)$ skrives som $c = \partial_{r+1}d$ for en $d \in C_{r+1}(K)$. Vi finner da $\partial_r c = \partial_r(\partial_{r+1}d) = 0$ når $c \in B_r(K)$. Dette innebærer $B_r(K) \subset Z_r(K)$.

QED.

3.5. Homologigrupper.

Frem til nå har vi definert r-kjede gruppen $C_r(K)$, r-sykel gruppen $Z_r(K)$ og r-rand gruppen $B_r(K)$ forbundet med et simplisialkompleks K . Videre vil vi se på hvordan de er relatert til topologiske egenskaper i K og til det topologiske planet med triangulering K . Vi vil også gå inn på spørsmålet om det er mulig for $C_r(K)$ å uttrykke andre egenskaper som er bevart under homeomorfi.

Det er klart at trekanten K_1 og firkanten K_2 (uten indre) er homeomorfe figurer. Når det kommer til kjedegruppene har vi:

$$\begin{aligned} C_1(K_1) &= \{i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\} \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Mens for et kvadrat:

$$\begin{aligned} C_1(K_2) &= \{i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_3) + l(p_3p_0) \mid i, j, k, l \in \mathbb{Z}\} \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Her ser vi at $C_1(K_1)$ og $C_1(K_2)$ ikke er isomorfe. Det er derfor klart at $C_r(K)$ ikke er en kandidat av en topolisk invariant. Dette gjelder også for $Z_r(K)$ og $B_r(K)$. Vi må derfor definere homologigruppene som gir de ønskede topologiske invariantene.

Definisjon 3.6. La K være et n -dimensjonalt simplisialkompleks. $H_r(K)$, $0 \leq r \leq n$, forbundet med K er definert:

$$H_r(K) \equiv \frac{Z_r(K)}{B_r(K)}.$$

Gruppen $H_r(K)$ er settet ekvivalensklasser av r-sykler;

$$H_r(K) \equiv \{[z] \mid z \in Z_r(K)\}$$

der hver av ekvivalensklassene $[z]$ kalles for en homologiklasse. To r-sykler z og z' er i samme ekvivalensklasse hvis, og bare hvis, $z - z' \in B_r(K)$. Hvis dette er tilfellet sier vi at z er homolog med z' og betegnes som $z \sim z'$ eller $[z] = [z']$. Geometrisk er $z - z'$ randen til et rom, og hver rand $b \in B_r(K)$ er homolog med 0 fordi $b - 0 \in B_r(K)$. Med bakgrunn av dette blir følgende teorem akseptert uten bevis (Se Hatcher [2] theorem 2.35).

Teorem 3.4. *Homologigrupper er topologiske invarianter. La X være homeomorf med Y og la (K, f) og (L, g) være triangulariseringer av X og Y hvor $f : |K| \rightarrow X$ og $g : |L| \rightarrow Y$ er homeomorfier. Da har vi*

$$H_r(K) \cong H_r(L) \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Hvis (K, f) og (L, g) er to triangulariseringer av X har vi:

$$H_r(K) \cong H_r(L) \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Videre gir det mening å snakke om homologigrupper til et topologisk rom X som ikke nødvendigvis er et polyhedron men som er triangulerbart. For en vilkårlig triangularisering (K, f) , er $H_r(X)$ definert til å være

$$H_r(X) \equiv H_r(K) \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Teorem 3.4 forteller oss at $H_r(X)$ er uavhengig fra valget av triangulariseringen (K, f) .

La oss se på noen enkle eksempler av homologigrupper.

Eksempel 3.4. La $K = \{p_0\}$. 0-kjeden er $C_0(K) = \{ip_0 | i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Vi har at $Z_0(K) = C_0(K)$ og $B_0(K) = \{0\}$, siden $\partial_0 p_0 = 0$ og p_0 er et punkt og kan ikke være en rand. Dermed har vi

$$H_0(K) \equiv \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = C_0(K) \cong \mathbb{Z}.$$

Eksempel 3.5. La $K = \{p_0, p_1, (p_0 p_1)\}$.

Vi har

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \{ip_0 + jp_1 | i, j \in \mathbb{Z}\} \\ C_1(K) &= \{k(p_0 p_1) | k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

$(p_0 p_1)$ er en 1-simpleks og er derfor ingen rand for et simpleks i K . Dermed er $B_1 = \{0\}$ og

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = Z_1(K).$$

Hvis $z = m(p_0 p_1) \in Z_1(K)$, tilfredstiller den

$$\partial_1 z = m\partial_1(p_0 p_1) = m\{p_1 - p_0\} = mp_1 - mp_0 = 0.$$

Videre må m forsvinne samtidig som vi har $Z_1(K) = 0$. Det gir oss

$$H_1(K) = 0.$$

For $H_0(K)$ har vi $Z_0(K) = C_0(K) = \{ip_0 + jp_1\}$ og

$$B_0(K) = \text{im}\partial_1 = \{\partial_1 i(p_0 p_1) | i \in \mathbb{Z}\} = \{i(p_0 - p_1) | i \in \mathbb{Z}\}.$$

Definerer en surjektiv homeomorfi (på) $f : Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ ved

$$f(ip_0 + jp_1) = i + j.$$

Videre har vi

$$\ker f = f^{-1}(0) = B_0(K).$$

Homeomorfiens fundamentalteorem (teorem 3.1) konstanterer at

$$\frac{Z_0(K)}{\ker f} \cong \text{im } f = \mathbb{Z} \quad \text{eller} \quad H_0(K) \equiv \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} \cong \mathbb{Z}.$$

Eksempel 3.6. La $K = \{p_0, p_1, p_2, p_3, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_3), (p_3p_0)\}$ være et simplisialkompleks der polyederet er et kvadrat.

$B_1(K) = 0$, $(C_2(K) = \emptyset) \Rightarrow H_1(K) = Z_1(K)$. La $C : i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_3) + l(p_3p_0)$

$$\partial_1(i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_3) + l(p_3p_0)) = (l-i)p_0 + (i-j)p_1 + (j-k)p_2 + (k-l)p_3$$

$\partial_1 c = 0$ hvis $i = l = j = k$. Da blir $Z_1(K) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow H_1(K) \cong \mathbb{Z}$.

Videre er: $Z_0(K) = C_0(K) \quad (\partial_0 p_i = 0)$.

Definerer en surjektiv (på) homeomorfi $f : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ ved

$$f(ap_0 + bp_1 + cp_2 + dp_3) = a + b + c + d$$

For en vilkårlig rand $b_0 = \partial_1(i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_3) + l(p_3p_0))$ er

$$a = l - i$$

$$b = i - j$$

$$c = j - k$$

$$d = k - l = -(a + b + c)$$

Og får da:

$$B_0(K) = \{ap_0 + bp_1 + cp_2 + dp_3 \mid d = -(a + b + c)\} \Rightarrow B_0(K) = \ker f.$$

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{C_0(K)}{\ker f} \cong \text{im } f = \mathbb{Z}.$$

Homologigruppene er $H_1(K) = Z_1(K) \cong \mathbb{Z}$ og $H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} \cong \mathbb{Z}$, Merk at $|K|$ er homeomorf med sirkelen S^1 , så dette er også homologigruppene til S^1 .

3.6. Beregninger av $H_0(K)$.

Teorem 3.5. La K være et sammenhengende simplisialkompleks. Da har vi

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}.$$

Bevis. Siden K er sammenhengende, for alle par av 0-simplekser p_i og p_j , eksisterer det en sekvens av 1-simplekser $(p_i p_k), (p_k p_l), \dots, (p_m p_j)$ slik at $\partial_1((p_i p_k) + (p_k p_l) + \dots + (p_m p_j)) = p_j - p_i$. Deretter følger det at p_i er homolog til p_j , nemlig $[p_i] = [p_j]$. Følgelig er et hvert 0-simpleks i K homolog til p_1 . Anta

$$z = \sum_{i=1}^{I_0} n_i p_i \in Z_0(K)$$

der I_0 er antall 0-simplekser i K . Da er homologiklassen $[z]$ generert av et enkelt punkt,

$$[z] = \left[\sum_i n_i p_i \right] = \sum_i n_i [p_i] = \sum_i n_i [p_1].$$

Videre har vi $[z] = 0$, det vil si $z \in B_0(K)$, hvis $\sum n_i = 0$. La oss se dette:

La $\sigma_j = (p_{j,1} p_{j,2})$ ($1 \leq j \leq I_1$) være 1-simplekser i K , der I_1 er antall 1-simplekser i K . Da har vi

$$\begin{aligned} B_0(K) &= \text{im } \partial_1 \\ &= \{ \partial_1(n_1 \sigma_1 + \dots + n_{I_1} \sigma_{I_1}) \mid n_1, \dots, n_{I_1} \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ n_1(p_{1,2} - p_{1,1}) + \dots + n_{I_1}(p_{I_1,2} - p_{I_1,1}) \mid n_1, \dots, n_{I_1} \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Det er også viktig å merke seg at n_j ($1 \leq j \leq I_1$) alltid fremstår som et par $+n_j$ og $-n_j$ i et element av $B_0(K)$. Så hvis

$$z = \sum_j n_j p_j \in B_0(K) \quad \text{da er} \quad \sum_j n_j = 0$$

Vi har nå bevist for et sammenhengende kompleks K at $z = \sum n_i p_i \in B_0(K)$ hvis, og bare hvis, $\sum n_i = 0$.

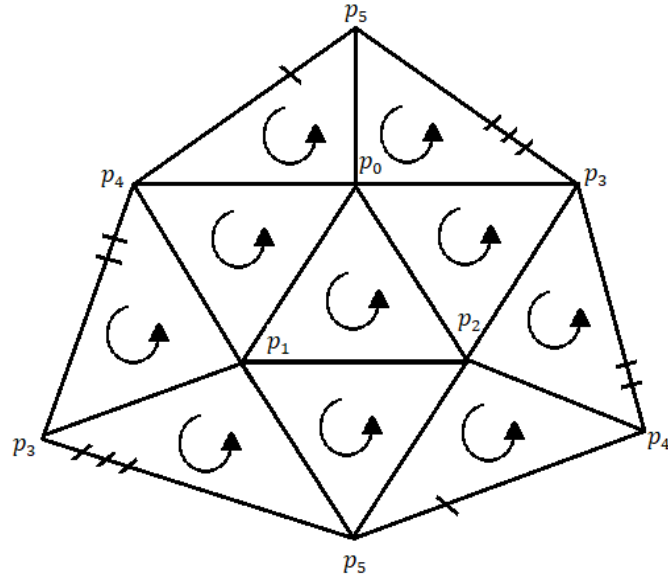
Definer en surjektiv homeomorfi (på) $f : Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ ved

$$f(n_1 p_1 + \dots + n_{I_0} p_{I_0}) = \sum_{i=1}^{I_0} n_i.$$

Vi har da $\ker f = f^{-1}(0) = B_0(K)$. Fra homeomorfiens fundamentalteorem (teorem 3.1) følger det at

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{Z_0(K)}{\ker f} \cong \text{im } f = \mathbb{Z}.$$

QED.



Figur 3.5. Triangulering av det projektive planet.

Eksempel 3.7. Det projektive planet $\mathbb{R}P^2$ er definert som sfæren S^2 der de antipodale punktene er definert. Vi kan tenke på det som den nordlige halvkule hvor antipodale punkt på ekvator er identifisert. Figur 3.5 er en triangulering av det projektive planet. Her har vi at $B_2(K) = \{0\}$. Vi tar en sykel $z \in Z_2(K)$,

$$\begin{aligned}
 z &= m_1(p_0p_1p_2) + m_2(p_0p_4p_1) \\
 &+ m_3(p_0p_5p_4) + m_4(p_0p_3p_5) \\
 &+ m_5(p_0p_2p_3) + m_6(p_2p_4p_3) \\
 &+ m_7(p_2p_5p_4) + m_8(p_2p_1p_5) \\
 &+ m_9(p_1p_3p_5) + m_{10}(p_1p_4p_3).
 \end{aligned}$$

Randen til z er

$$\begin{aligned}
 \partial_2 z &= m_1\{(p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)\} \\
 &+ m_2\{(p_4p_1) - (p_0p_1) + (p_0p_4)\} \\
 &+ m_3\{(p_5p_4) - (p_0p_4) + (p_0p_5)\} \\
 &+ m_4\{(p_3p_5) - (p_0p_5) + (p_0p_3)\} \\
 &+ m_5\{(p_2p_3) - (p_0p_3) + (p_0p_2)\} \\
 &+ m_6\{(p_4p_3) - (p_2p_3) + (p_2p_4)\} \\
 &+ m_7\{(p_5p_4) - (p_2p_4) + (p_2p_5)\} \\
 &+ m_8\{(p_1p_5) - (p_2p_5) + (p_2p_1)\} \\
 &+ m_9\{(p_3p_5) - (p_1p_5) + (p_1p_3)\} \\
 &+ m_{10}\{(p_4p_3) - (p_1p_3) + (p_1p_4)\} = 0.
 \end{aligned}$$

Videre ser vi på koeffisienten for hver 1-simpleks. Vi har for eksempel $(m_1 m_2)(p_0 p_1)$, ergo $m_1 - m_2 = 0$. Videre,

$$\begin{aligned} -m_1 + m_5 = 0, \quad m_4 - m_5 = 0, \quad m_2 - m_3 = 0, \quad m_1 - m_8 = 0, \\ m_9 - m_{10} = 0, \quad -m_2 + m_{10} = 0, \quad m_5 - m_6 = 0, \quad m_6 - m_7 = 0, \\ m_6 + m_{10} = 0. \end{aligned}$$

Disse 10 vilkårene er tilfredstilt hvis, og bare hvis, $m_i = 0$, $1 \leq i \leq 10$. Dette betyr at sykelgruppen $Z_2(K)$ er triviell og vi at

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) \cong \{0\}$$

Før vi regner ut $H_1(K)$ ser vi på $H_2(K)$ fra et annet synspunkt. Vi legger til alle 2-simpleksene i K med samme koeffisient,

$$z = \sum_{i=1}^{10} m \sigma_{2,i} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Her kan vi se at hvert 1-simpleks av K er felles overflate av nøyaktig to 2-simplekser. Som en konsekvens av dette er randen til z

$$(2) \quad \partial_2 z = 2m(p_3 p_5) + 2m(p_5 p_4) + 2m(p_4 p_3).$$

Denne observasjonen gjør utregningen av $H_1(K)$ mindre komplisert. Merk at hver 1-sykel er homolog til et multiplum av den ikke-trivielle sykelen

$$z = (p_3 p_5) + (p_5 p_4) + (p_4 p_3)$$

Vi ser et eksempel på det under. Samtidig viser ligning (2) at et partall ganger z er randen til en 2-kjede. Så z er en sykel og $z + z$ er homolog til 0. Dermed finner vi at

$$H_1(K) = \{[z] \mid [z] + [z] \sim [0]\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Dette eksempelet viser at en homologigruppe ikke nødvendigvis er fri abelsk, men kan ha den fulle strukturen til en endeliggenerert abelsk gruppe. Fordi K er sammenhengende har vi $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

[Her kan det også være verdt å nevne spinorer (Ψ), som relaterer til fysikkdelen av teksten. Vi har $\Psi(x)$, der $x = (x^0, x^1, x^2, \dots)$ er tidrom.

Det som gjør spinorer relevant for denne oppgaven er at vi kan se på $\Psi(x)$ som et element i $H_1(\mathbb{R}P^2)$ [7]:

$$\Psi(x) \in H_1(\mathbb{R}P^2) = \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2.$$

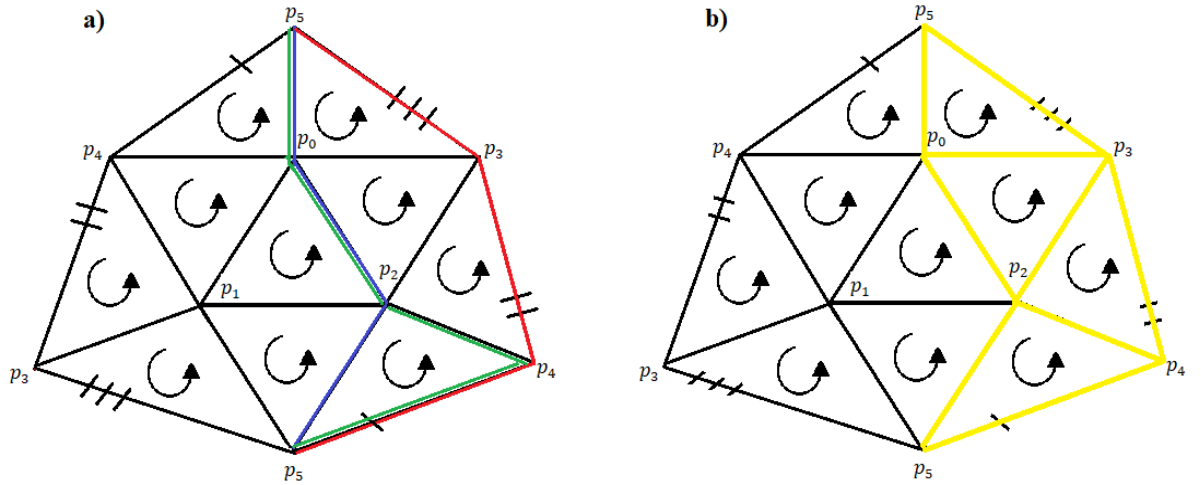
Hvis vi har to spinorer i samme tilstand: $\Psi(x) = 0$ eller $\Psi(x) = 1$ får vi

$$\Psi(x) + \Psi(x) = 0 + 0 = 0$$

eller

$$\Psi(x) + \Psi(x) = 1 + 1 = 2 \bmod 2 = 0$$

Eksempler på spinorfelt kan være elektroner, kvarker og protoner. Det ligningen over fortelles oss er at to spinorer ikke kan okkupere samme tilstand. Dette stammer fra "Paulis eksklusjonsprinsipp" som sier at elektronene i et atom ikke kan okkupere samme energinivå. Dette gir opphav til mye ikke-triviell kjemi.]



Figur 3.6.

I figur 3.6 a) har vi en triangularisering av det projektive planet med 2 1-syklar, Blå og Rød. Vi har $z \in Z_1(K)$, $\partial z = 0$,

$$B : (p_5p_2) + (p_2p_0) + (p_0p_5)$$

$$R : (p_5p_4) + (p_4p_3) + (p_3p_5)$$

Homologiklassen:

$$\begin{aligned} [(p_5p_2) + (p_2p_0) + (p_0p_5)] &= [(p_5p_2) + (p_2p_0) + (p_0p_5) + \partial(p_5p_4p_2)] \\ &= [(p_5p_2) + (p_2p_0) + (p_0p_5) + (p_5p_4) + (p_4p_2) + (p_2p_5)] \\ &= [(p_2p_0) + (p_0p_5) + (p_5p_4) + (p_4p_2)] \end{aligned}$$

Og med det har vi fått en ny løkke i det projektive planet, (Grønn). Ved hjelp av å legge til en triviell homologiklasse kan man endre syklen og vi har muligheten til å få $B : [(p_5p_2) + (p_2p_0) + (p_0p_5)] = R : [(p_3p_5) + (p_5p_4) + (p_4p_3)]$. I Figur b) har vi

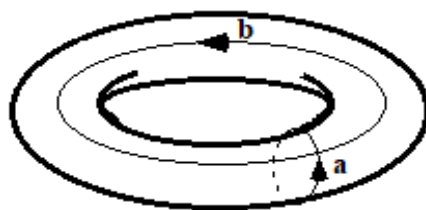
$$\partial[(p_5p_4p_2) + (p_4p_3p_2) + (p_2p_3p_0) + (p_0p_3p_5)],$$

som er randen vi må legge til for å få $B \rightarrow R$. På samme måte kan vi deformere en hvilken som helst sykel ved et multiplum av en rand. Vi kan dermed si at i figur 3.6 er enhver sykel $z \in Z_1(K)$ homolog til et multiplum av $R : ((p_3p_5) + (p_5p_4) + (p_4p_3))$.

4. KONKLUSJON

I Eksempel 2.8 beregnet vi Eulerkarakteristikken til torusen T^2 . La oss nå se hvordan denne ”enklere” invarianten kan beregnes fra de ”finere” homologigrupper invariantene. Vi bruker torusen T^2 som eksempel.

Eksempel 4.1. I denne delen av oppgaven er det passende å huske den intuitive betydningen av homologigruppene. Den r -te homologigruppen er generert av de randløse r -kjedene som ikke i seg selv er randen til en $(r + 1)$ -kjede. For eksempel, flaten til torusen har ingen rand men er ikke randen til en 3-kjede. Derfor er $H_2(T^2)$ fritt generert av en generator, nemlig selve flaten, $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$. Når vi skal se på $H_1(T^2)$ kan vi også se på figuren under (Figur 3.7). Her er det klart at løkkene a og b ikke har noen render men er heller ikke render for en 2-kjede. Hvis vi har en ny løkke, a' , som er lik a , men på et annet sted på torusen, vil a' være homolog med a fordi $a' - a$ skaper et bundet område mellom dem. Dermed er $H_1(T^2)$ fritt generert av a og b og $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Siden T^2 er sammenhengende har vi $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$.



Figur 3.7

Teorem 4.1. *Euler-Poincaré teoremet.* La K være et n -dimensjonalt simplisialkompleks og la I_r være antall r -simplekser i K . Da har vi:

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^n (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^n (-1)^r b_r(K),$$

hvor den første likheten definerer Eulerkarakteristikken for et generelt polyeder $|K|$. Dette er generaliseringen av Eulerkarakteristikken som vi definerte i del 2.

Definisjon 4.1. Bettitall. La K være et simplisialkompleks. Det r -te Bettitallet $b_r(K)$ er definert som

$$b_r(K) \equiv \dim H_r(K; \mathbb{R}).$$

Med andre ord er $b_r(K)$ rangen av den frie abelske delen av $H_r(K; \mathbb{Z})$, siden koeffisienter i \mathbb{R} dreper den endelige "torsjon"-delen av $H_r(K; \mathbb{Z})$.

Eksempel 4.2. Bettitalle til torusen T^2 er (Se eksempel 4.1)

$$b_0(K) = 1, \quad b_1(K) = 2, \quad b_2(K) = 1.$$

Vi har da at Eulertallet til torusen T^2 er

$$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$$

Vi får akkurat samme svar som i vår beregning av $\chi(T^2)$ i Eksempel 2.8 ved formel (1) for polyeder.

Bevis, Theorem 4.1. Se på randhomomorfien,

$$\partial_r : C_r(K; \mathbb{R}) \rightarrow C_{r-1}(K; \mathbb{R})$$

der $C_{-1}(K; \mathbb{R})$ er definert til å være $\{0\}$. Siden både $C_{r-1}(K; \mathbb{R})$ og $C_r(K; \mathbb{R})$ er vektorrom kan teorem 2.1 brukes til å få:

$$\begin{aligned} I_r &= \dim C_r(K; \mathbb{R}) = \dim(\ker \partial_r) + \dim(\operatorname{im} \partial_r) \\ &= \dim Z_r(K; \mathbb{R}) + \dim B_{r-1}(K; \mathbb{R}) \end{aligned}$$

der $B_{-1}(K)$ er definert som tiviell. Vi har også

$$\begin{aligned} b_r(K) &= \dim H_r(K; \mathbb{R}) = \dim(Z_r(K; \mathbb{R})/B_r(K; \mathbb{R})) \\ &= \dim Z_r(K; \mathbb{R}) - \dim B_r(K; \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Fra disse relasjonene, oppnår vi

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{r=0}^n (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^n (-1)^r (\dim Z_r(K; \mathbb{R}) + \dim B_{r-1}(K; \mathbb{R})) \\ &= \sum_{r=0}^n \{(-1)^r \dim Z_r(K; \mathbb{R}) - (-1)^r \dim B_r(K; \mathbb{R})\} \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r b_r(K). \end{aligned}$$

QED.

I løpet av oppgaven har vi sett på hvordan vi karakteriserer forskjellen på ulike figurer og polyedre, og utviklet den nødvendige kunnskapen vi må ha for å gjennomføre dette. Det ble tidlig nevnt at Eulerkarakteristikken er viktig når det kommer til disse beregningene, og at den kan forstås gjennom homologigruppene. Eulerkarakteristikken, eller Eulertall, har en enkel formel som kan læres bort til ”alle”, også de uten bakgrunnskunnskaper i topologi. Vi har sett at homologigruppene gir en forfining fra Eulerkarakteristikken. Denne spiller også en viktig rolle i for eksempel strengteori, der den brukes for å beregne spektrum av partikler [8]. Selv om Eulerkarakteristikken ”lett” kan læres bort, kan den også relateres til mer avansert matematikk. Algebraisk topologi er videre et stort fagfelt innenfor matematikk, med et stort og levende forskningsfelt.

REFERENCES

- [1] M. Nakahara, “Geometry, topology and physics”, 2018.
- [2] A. Hatcher, “Algebraic Topology”, 2005.
- [3] G. Strang, “Linear Algebra and its Applications”, 2006.
- [4] J.R. Munkres, “Elements of algebraic topology”, 2018.
- [5] J.B. Fraleigh, “A first course in abstract algebra”, 1989.
- [6] Wikipedia: The Bolzano Weierstrass Theorem, <https://en.wikipedia.org/wiki/Bolzano>.
- [7] J. Leinaas. M.; Myrheim, J, “On the theory of identical particles”, 1977.
- [8] M.B. Green. M.; J.H. Schwarz, E. Witten, “Superstring theory: volume 2, loop amplitudes, anomalies and phenomenology”, 2012.