Universitetet i Stavanger

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Masterprogram i utdanningsvitenskap, matematikkdidaktikk.	Vårsemesteret, 2022
Forfatter: Line Berge	
Veileder: Raymond Bjuland	
Tittel på masteroppgaven: Tenkende klasserom – bruk av dialog for tilrettelegging av elevers læring under problemløsning på vertikale tavler. Engelsk tittel: Thinking classrooms – the use of dialogue to facilitate pupils´ learning during problem solving on vertical whiteboards.	
Emneord: Tenkende klasserom (thinking classroom), problemløsning, lærerhandlinger, dialogisk perspektiv, funksjoner.	Antall ord: 36 613 Antall vedlegg/annet: 6 045 Stavanger, 3.juni 2022 dato/år

Forord

Denne masterstudien markerer slutten på et femårig masterprogram ved UiS, universitetet i Stavanger. Arbeidet med studien har vært både lærerikt og utfordrende. Det har gitt meg mulighet til å undersøke og fordype meg i matematikkdidaktiske temaer. Jeg sitter igjen med en følelse av økt kunnskap, som oppleves å kunne være til god støtte i fremtidig arbeid som lærer. Jeg er motivert for å ta med meg denne kunnskapen ut i klasserommet. Studietiden ved UiS har gitt meg flere nyttige verktøy som jeg er takknemlig for å kunne ta med meg i det kommende arbeidet som lærer.

Det gir en følelse av mestring å ha fullført en master. Jeg ønsker å gi en stor takk til min veileder, Raymond Bjuland. Takk for god veiledning, støttende samtaler og konstruktive tilbakemeldinger. Videre ønsker jeg å takke læreren og elevene som deltok i masterprosjekt. Takk til familie og venner for at dere har hatt troen på meg gjennom hele denne perioden. Tusen takk for at dere har lyttet til meg og støttet meg i prosessen med denne masteren. Jeg ønsker også å gi en ekstra takk til søskenbarnet mitt som har tatt meg med på turer når jeg har trengt en pause med frisk luft. Tusen takk for gode samtaler og gode avbrekk. Til slutt vil jeg gjerne takke min kjære samboer for ekstra hjelp og støtte det siste halvåret. Takk for at du har vært så tålmodig.

Line Berge

Stavanger, juni 2022

Sammendrag

Problemløsning i matematikkundervisningen vektlegges i ny læreplan. En måte å arbeide med problemløsning på, er gjennom det som kalles for et tenkende klasserom. Denne masterstudien posisjonerer seg innenfor et slikt klasserom. Det blir studert hvordan læreren i et tenkende klasserom, gjennom dialog, kan legge til rette for elevenes læring. Følgende forskningsspørsmål skal besvares:

> *Hvordan kan læreren i et tenkende klasserom legge til rette for elevenes læring gjennom dialog under arbeid med problemløsningsoppgaver på vertikale tavler?*

Teorien som ligger til grunn for studien, gjelder problemløsning, tenkende klasserom og dialogisk perspektiv på undervisning. Ved bruk av et analytisk rammeverk som ser på læreres handlinger under dialog med elevene, vil én lærers handlinger studeres for å se på hvordan disse legger til rette for elevenes læring. Denne studien er en kvalitativ case-studie. Det blir analysert fem undervisningsøkter, hvor to av disse studeres nærmere, samt pre- og post-intervju av læreren. Studiens resultater antyder at lærerens handlinger, i et tenkende klasserom, kan legge til rette for elevenes læring ved at læreren gir elevene kognitivt krevende oppgaver, støtter dem under problemløsningsprosessen, og får dem til å begrunne og forklare løsningene sine.

Abstract

Problem solving in mathematics teaching is emphasized in the new curriculum. A way to work with problem solving, is through what is called a thinking classroom. This study is positioned within such a classroom. The study views how the teacher in a thinking classroom can facilitate pupils´ learning through dialogue. The following research questions will be answered:

How can the teacher in a thinking classroom facilitate pupils learning through dialogue, during problem solving on vertical whiteboards?

The theoretical basis for this study is on problem solving, thinking classrooms and a dialogical perspective on teaching. Using an analytical framework that looks at teachers´ actions during dialogue with pupils, one teacher´s actions will be studied to see how these actions facilitate pupils´ learning. This study is a qualitative case study. Five teaching sessions are analyzed, where two of these are studied in more detail, as well as pre- and post-interviews by the teacher. The results of the study suggest that the teacher´s actions can facilitate pupils' learning in a thinking classroom. This is done by giving students cognitively demanding tasks, supporting them during the problem-solving process, and getting them to justify and explain their solutions.

Innholdsfortegnelse

Figurliste

Tabelliste

1 Introduksjon

I introduksjonen vil det gjøres rede for studiens bakgrunn og nyere forskning på området. Forskningsspørsmålet vil bli presentert, i tillegg til oppgavens oppbygging.

1.1 Bakgrunn

I den nye læreplanen som ble tatt i bruk høsten 2020, ble det lagt stor vekt på problemløsning og utforskning i matematikkfaget. Om matematikkfagets relevans og verdier står det at: *Matematikk skal bidra til at elevene utvikler evne til å jobbe selvstendig og samarbeide med andre gjennom utforsking og problemløsing, og kan bidra til at elevene blir mer bevisste på sin egen læring.* I tillegg til dette er utforskning og problemløsning et av kjerneelementene i faget, hvor det står at det skal legges mer vekt på elevenes fremgangsmåte og strategier enn løsninger. De skal selv få utvikle metoder for å løse problemer som de ikke kjenner fra tidligere (Kunnskapsdepartementet, 2020). Dette er noe som krever at klasseromsstrukturen og lærerens rolle endres. Lampert (1990) mener at hvis man går inn i et vanlig klasserom, så er det læreren som er autoriteten og gir elevene oppgaver. Videre hevder hun at elevene må lære at løsningsforslag fra andre elever, er noe som alltid kan diskuteres. Elever må få muligheten til å stille spørsmål med sine egne hypoteser. Det er også viktig at elevene får mulighet til å revidere egen tenkning (Lampert, 1990). Dette er tanker som stemmer overens med det som Liljedahl (2016) kaller for «thinking classrooms». Et tenkende klasserom er et klasserom som i tillegg til å bidra til tenkning, også bidrar til anledninger til å tenke. Det er et rom fullt av tenkende individer, i tillegg til individer som tenker sammen, lærer sammen, og konstruerer forståelse og kunnskap gjennom diskusjon og aktivitet. I et tenkende klasserom trenger man noe å tenke på, og det åpenbare valget i matematikk mener Liljedahl (2016) vil være å jobbe med problemløsning. Noe av det som kjennetegner et tenkende klasserom, er at elevene skal løse tenke oppgaver (thinking task), deles inn i synlig tilfeldige grupper, og arbeide på vertikale ikke-permanente overflater (eks. whiteboard) (Pruner & Liljedahl, 2021).

For at lærere skal kunne legge opp en undervisning som følger det som står i kunnskapsløftet (LK20) om utforskning og problemløsning, krever det en endring i vanlige klasserom hvor læreren er autoriteten som gir enkle oppgaver til elevene. Lester og Cai (2016) antyder at lærere ikke lar elevene streve med matematiske problemer (kap.2.2.2). De hevder at det blir ofte gitt for liten tid til elevene etter læreren har stilt spørsmål, og at lærere fjerner utfordringen med ulike matematiske problemer. De sier at det ikke er rart at elever har en oppfatning av at alle problem skal løses med ingen eller lite tenkning (Lester & Cai, 2016). Elevene må få mulighet til å forklare og rettferdiggjøre egen tenkning, og kunne utfordre andre elever og læreres forklaringer, for på denne måten engasjerer de seg i klargjøring av deres egen tenkning og blir eiere av «knowing» (kunnskap) (Lampert, 1990).

1.2 Nyere forskning

Liljedahl (2016) forteller om egne resultater av over ti års forskning på utvikling og vedlikehold av tenkende klasserom. Han forteller om hvordan flere mislykkede erfaringer med å fremme problemløsning i klasserommet, førte til forestillingen om et tenkende klasserom, og senere til et forskningsprosjekt designet for å finne måter å hjelpe lærere til å bygge et slikt klasserom (se kap2.3). Tidligere forskning fremhever at det er mer diskusjon, deltakelse og utholdenhet når elever arbeider på vertikale tavler (Liljedahl, 2016; Megowan-Romanowicz, 2016; Wells et al., 1995; Wenning, 2005 – referert i Valbekmo & Svorkmo, 2021). Jeg ønsker derfor å studere et tenkende klasserom hvor elever arbeider på vertikale tavler, og klassen jeg studerer tar i bruk plexiglass og vinduer til dette. Det vil i min studie være et fokus på hvordan læreren legger til rette for elevenes læring.

Liljedahl og Cai (2021) mener at resultatene fra deres oversiktsartikkel viser at det fortsatt gjenstår mye arbeid for å bedre kunne forstå hvordan problemløsning ser ut i ulike kontekstualiserte situasjoner, hvordan vi kan forbedre våres problemløsningskompetanse i disse kontekstene, og hvordan problemløsning kan brukes til å undervise matematikk i disse kontekstene. Et tenkende klasserom kan være en slik kontekst, og det er i en slik kontekst min studie finner sted.

I en norsk sammenheng ser Valbekmo og Svorkmo (2021) på hvordan nabo-tavler (whiteboards) støtter to elever på 7.trinn i deres problemløsning i matematikk. De finner ut at disse vertikale tavlene gir elevene mulighet til å: diskutere ulike deler av oppgaven, støtte hverandre under problemløsningsprosessen, og jobbe selvstendig for å finne kunnskap i samspill med medelever og medelevers arbeid. Birkeland og Stensvold (2020) ser i sin masteroppgave på elevers posisjoner og matematisk kreativitet, med utgangspunkt i elevenes atferd og utsagn i problemløsningssituasjoner, i et tenkende klasserom. De fant måter tenkende klasserom preget elevenes matematiske kreativitet og tilgjengeligheten av posisjoner, gjennom mulighet til samarbeid og praktiske strukturer. I en kanadisk kontekst ser Pruner og Liljedahl (2021) i sin studie på hvordan problemløsing ser ut i et tenkende klasserom når elevene samarbeider med tilgang til ressurser som går utover individet og gruppens kunnskap, og tidligere erfaringer. Resultatene deres indikerer at i slike valgrike miljøer (som et tenkende klasserom er), vil elevene oppsøke nye ressurser når det er tomt for enten deres kollektive eller individuelle ressurser. Dette vil de gjøre ved å enten se eller diskutere med andre (Pruner & Liljedahl, 2021). Det som er felles i disse tidligere studiene i en tenkende klasserom kontekst er fokuset på elevene. Videre har ikke disse studiene et fokus på læreren som tilrettelegger for elevenes læring i et tenkende klasserom. Mitt bidrag til dette feltet vil være å ha et fokus på læreren, og hvordan læreren kan legge til rette for elevenes læring gjennom dialog. Konteksten vil være i et tenkende klasserom hvor elevene arbeider med problemer på vertikale tavler.

1.3 Forskningsspørsmål

Valbekmo og Svorkmo (2021) undersøkte hvordan disse vertikale tavlene støtter elever på 7.trinn i deres problemløsning i matematikk. Birkeland og Stensvold (2020) studerte hvilke posisjoner elever på 8.trinn tar under problemløsning i et tenkende klasserom, og hva de kan si om elevenes matematiske kreativitet med utgangspunkt i elevenes bidrag i diskusjonen. Pruner og Liljedahl (2021) undersøkte når og hvordan elever på 16-18 år, som samarbeider i grupper i et tenkende klasserom, flytter oppmerksomheten deres og hvordan det er relatert til ressursene de har tilgjengelig. Min studie vil også rette søkelyset på et tenkende klasserom hvor elever på 8.trinn får anledning til å arbeide med matematiske problemer der vertikale tavler blir tatt i bruk. Et viktig mål er å observere hvordan læreren i et slikt klasserom legger til rette for, og trigger elevenes tenkning. Læreren arbeider med tenkende klasserom, hvor elevene arbeider med problemløsningsoppgaver på vertikale tavler. I en slik kontekst ønsker jeg å studere hvordan læreren gjennom dialog legger til rette for elevers læring. Mitt forskningsspørsmål blir dermed:

> *Hvordan kan læreren i et tenkende klasserom legge til rette for elevenes læring gjennom dialog under arbeid med problemløsningsoppgaver på vertikale tavler?*

1.4 Oppgavens oppbygging

I kapittel 2 presenteres teorien som er benyttet for å undersøke forskningsspørsmålet. Teorien ligger til grunn for videre analyse av datamaterialet. I kapittel 3 presenterer jeg og begrunner metodiske valg i studien. I kapittel 4 legges resultatene fra studien frem, og videre blir noen av disse funnene drøftet i kapittel 5. Konklusjonen og avslutningen på oppgaven blir lagt frem i kapittel 6.

2 Teoretisk innramming

I min studie vil det være fokus på dialogene mellom lærer og elever hvor vertikale tavler er et sentralt kulturelt redskap, og dermed vil det være naturlig å plassere studien under det sosiokulturelle perspektivet (kap.2.1). Det er fokus på tenkende klasserom i studien, hvor man trenger noe å tenke på og da mener Liljedahl (2016, 2021) at det åpenbare valget er problemløsning. I kapittel 2.2 vil jeg derfor se på forskning på problemløsning, og se på hva et problem er. Det er et fokus på læreren i min studie, og jeg ser av den grunn også på hva forskningen sier om lærer som veileder under problemløsning (kap.2.2.6). Som nevnt retter studien min søkelyset på et tenkende klasserom og det er en sentral del av oppgaven (kap.2.3). I det tenkende klasserommet som blir studert i min studie, jobbes det med problemer som omhandler emnet funksjoner. Jeg kommer til å se på hva en funksjon er, og ulike representasjoner for funksjoner (kap.2.4). Det vil som tidligere nevnt være et fokus på dialogene mellom lærer og elevene i min studie, og det vil dermed være nyttig å trekke frem det dialogiske perspektivet i teorikapittelet (kap.2.5). Jeg ønsker å løfte frem kvaliteten i dialogen mellom lærer og elevene, som viktig for å legge til rette for elevenes læring. I slutten av teorikapittelet presenterer jeg det analytiske rammeverket for oppgaven (kap.2.6). Det er tatt i bruk Drageset (2014, 2015, 2019) sitt rammeverk om lærerhandlinger. Jeg har valgt å se på både eldre og nyere forskning innenfor fagfeltet i min gjennomgang av litteraturen, for å vise at det har skjedd en utvikling.

2.1 Sosiokulturelt læringsperspektiv

Det sosiokulturelle perspektivet legger vekt på sosialt samspill og kultur. Læring forstås da som en sosial prosess, fordi læring ikke forekommer uten at individet er i samspill med de sosiale omgivelsene (Imsen, 2014). I klasserommet må man derfor se på de sosiale samhandlingene i sammenheng med dens kontekst (Dysthe, 2001). Ifølge sosiokulturell læringsteori er menneskets tenkning og forestillingsverdener vokst frem av og preget av kulturen rundt og dens intellektuelle og fysiske redskaper. Omverden håndteres ved hjelp av forskjellige intellektuelle og fysiske redskaper som danner integrerte deler av menneskers sosiale praksiser (Säljö, 2001). Dersom vi skal kunne forstå læring som en del av sosiale praksiser, hevder Säljö (2001) at «*vi må forstå hvordan tenkningen utøves av mennesker som handler i sosiale praksiser ved hjelp av artefakter*» (s.83).

Ifølge Vygotskys teori er språket byggesteiner for tenkningen. Det er språket som gjør det mulig å reflektere over seg selv og egne handlinger (Imsen, 2014). Säljö (2001) mener at de ressursene som finnes i språket, er menneskets viktigste redskap. En tilnærming om at vi skal tenke sammen, er underbygget av et pedagogisk prinsipp, som er forklart av Vygotsky. Det handler om at en viktig måte elevene lærer å tenke individuelt på, er gjennom å først resonnere med andre (Mercer et al., 2019). Ved å utvikle kommunikative ferdigheter innen et fagområde, hevder Dysthe (2001) at man kan ta i bruk språket for å enten påvirke andre eller få dem til å utføre handlinger. Det vil dermed være en sentral del av elevers læring å diskutere hva de forstår og ikke forstår, og dele ideer med hverandre (Dysthe, 2001). Mercer et al. (2019) hevder at etter hvert som forskningen har gått videre, har det teoretiske perspektivet utviklet seg til å legge vekt på redskapers rolle i å formidle dialog. De hevder at dette er basert på forestillingen om at vi tenker med artefakter og gjennom artefakter, som utgjør medierende verktøy. Det åpner for nye muligheter for elever og lærere til å offentlig dele, forklare, rettferdiggjør, kritisere og omformulere ideer – ved å bruke språk og andre symbolske representasjoner. Mye av arbeidet til Mercer et al. (2019) har basert seg på bruken av whiteboard-tavler i undervisningen. Deres funn indikerer at nye dialoger kan utvikles og sentreres rundt slike redskaper der dette uttrykkes som «*provisional knowledge objects jointly created by teachers and learners*» (Mercer et al., 2019, s.192).

For at læreren skal kunne legge til rette for elevers læring, må læreren arbeide med å styrke elevenes selvtillit slik at de tør å delta i undervisningen. For å oppnå dette er det viktig at læreren gir elevene mulighet til å uttrykke sine egne tanker og ideer, i tillegg til å justere og reflektere rundt sin egen tenkning og forståelse (Bakker et al., 2015). Et viktig poeng i Vygotskys teori er forskjellen mellom hva man mener elevene kan gjøre alene, og hva de kunne ha klart med hjelp og støtte. Forskjellen mellom disse nivåene kalles for den proksimale utviklingssonen og her ligger det en pedagogisk utfordring som er å utnytte denne utviklingssonen. Den proksimale utviklingssonen utnyttes ved å oppfordre elever til å aktivt arbeide sammen med andre, og å gi elevene hjelp og støtte på veien mot å mestre oppgaven på egenhånd. Vygotsky ser først og fremst på læring og utvikling som resultat av sosialt samspill, slik at eleven kan tilegne seg de redskapene som ligger i språket ved å bruke dem. For det andre er han også opptatt av at elevene skal få utfordringer (Imsen, 2014), hvor problemløsning i matematikkundervisningen kan være slike utfordringer. Ifølge Vygotskys syn vil det være læreren som har ansvaret for elevenes læring, og som skal gi dem den «drahjelpen» de trenger for å utnytte det læringspotensialet som ligger i den proksimale utviklingssonen (Imsen, 2014). I min studie ser jeg på en lærer som et støttende stillas for elevene under arbeid med matematiske problemer i et tenkende klasserom. Jeg har da et fokus på dialogen mellom lærer og elevene, som foregår både i lærerens introduksjon av problemene, mens elevene arbeider i grupper på vertikale tavler, og i plenumsdiskusjon. Studien min undersøker hvordan lærerens handlinger i dialog med elevene legger til rette for elevers læring i et tenkende klasserom. I et tenkende klasserom må elever ha noe å tenke på, og som nevnt tidligere mener Liljedahl (2016, 2021) at det åpenbare valget i matematikk vil være at elevene arbeider med problemløsning.

2.2 Problemløsning

Når det kommer til problemløsning i matematikken, vil det være naturlig å nevne Pólya. Han har hatt en viktig rolle innen problemløsning og dannet grunnlag for senere forskning. Han kom ut med boken *How to Solve It* i 1945, hvor han, gjennom fire trinn, legger frem hvordan man kan arbeide med problemløsning. Disse fire trinnene blir kalt Pólyas problemløsningsmodell, og består av å: (1) forstå problemet, (2) lage en plan, (3) utføre planen, og (4) se tilbake. Hvert av disse fire trinnene har flere spørsmål som skal hjelpe deg videre i problemløsningsprosessen. Det er disse spørsmålene som er kjernen i problemløsningsmodellen til Pólya. Pólya (1957) mener at matematiske fakta først blir gjettet for så å bevises. Han sier at elever må få muligheten til å jobbe med problemer hvor de først gjetter, for så å bevise på et passelig nivå.

I forbindelse med problemløsning er det relevant å fokusere på noen sentrale artikler, som gir en viktig oversikt knyttet til tidligere forskning innen problemløsningslitteraturen i et historisk perspektiv. Schoenfeld (1992) har utviklet et teoretisk rammeverk som belyser matematisk tenkemåte og hvordan elever kan utvikle matematisk tenkemåte. Han trekker frem fem aspekter som viktige for problemløsning: (1) kunnskapsbasen, (2) problemløsningsstrategier, (3) selvregulering (monitorering og kontroll over egen problemløsning), (4) oppfatninger (beliefs) og holdninger, og (5) praksiser (et fokus inn i klasserom). Så for Schoenfeld (1992) handler problemløsningsprosessen om en samhandling mellom problemløserens tidligere kunnskap, de forsøkene som gjøres, og tankene som kommer frem underveis. Han hevder at elever burde få arbeide med ekte problemløsning, altså komplekse og vanskelige problemer.

Stanic og Kilpatrick (1988) identifiserer tre ulike syn på problemløsning. Det er: (1) problemløsning som kontekst, (2) problemløsning som en ferdighet, og (3) problemløsning som kunst. I synet på problemløsning som kontekst, vil ikke problemløsning ses på som ett mål i seg selv, men som noe som legger til rette for andre mål. Problemløsning som ferdighet, vil si at man ser på problemløsning som en av flere ferdigheter som skal læres i matematikk. I sterk kontrast til disse to synene på problemløsning er «problemløsning som kunst». Dette er et syn hvor man ser på problemløsning som hjertet i matematikken, eller som selve matematikken (Schoenfeld, 1992).

Lesh og Zawojewski (2007) hevder at det trengs et nytt perspektiv på problemløsning, og de bruker et modell-og-modellerings perspektiv. De trekker da frem en definisjon på problemløsning som krever at problemløseren engasjeres i en prosess av tolkning av situasjonen, som i matematikk betyr modellering. I tillegg vil problemløsning etter deres definisjon inneholde flere sykluser av uttrykking, testing og revidering av matematiske tolkninger. De mener at elevene lærer matematikk gjennom problemløsning.

Liljedahl et al. (2016) viser til fire dimensjoner av forskning på problemløsning: (1) Heuristikkens rolle, (2) kreativ problemløsning, (3) digital teknologi og problemløsning, og (4) problemformulering. I min studie har jeg posisjonert meg innen dimensjon 2 (kreativ problemløsning). Liljedahl et al. (2016) mener at matematikkens historie inneholder flere fortellinger om hvordan matematiske problemer blir løst av et kreativt gjennombrudd som kommer plutselig, og ikke gjennom å systematisk følge noen metoder. Kreativ problemløsning utdypes videre i kap.2.2.1. Liljedahl et al. (2016) understreker at tidligere studier av problemløsning er gjort gjennom studier av elever som løser problemer ved bruk av papir og blyant (f.eks. Polya, 1945, 1957; Schoenfeld, 1992). I et tenkende klasserom tar elevene i bruk vertikale tavler under problemløsning, noe som gjør tenkningen deres mer synlig (Liljedahl, 2016, 2021). Birkeland og Stensvold (2020) så i sin masteroppgave blant annet på elevers matematiske kreativitet i et tenkende klasserom. De fant ut at elevene viste matematisk kreativitet ved å bruke flere matematiske kategorier, komme med ideer til nye løsningsmetoder, og finne flere løsninger til problemet.

I en nyere oversiktsartikkel understreker Liljedahl og Cai (2021) betydningen av at problemløsning er, og bør være, en viktig del av å undervise og lære matematikk. De hevder at tidligere forskning og nyere forskning fra de fem siste årene, har jobbet med å avdekke nyansene bak problemløsning som en kontekstuell og sosial aktivitet. Ut fra denne forskningen har det dukket opp en rekke temaer som fanger opp nåværende forskning om problemløsning. Disse temaene er: samarbeid, profesjonell utvikling, oppgavevariabler (task variables), og teknologi. Liljedahl og Cai (2021) eksemplifiserer disse temaene gjennom forskning på problemløsning.

2.2.1 Kreativ problemløsning

Som tidligere nevnt posisjonerer min studie seg innenfor kreativ problemløsning. Hadamard (1945 – referert i Liljedahl et al., 2016) mener at selv om matematisk kreativitet er markert gjennom en plutselig innsikt, så består det av fire separate stadier. Disse stadiene er initiering, inkubering, opplysning og verifisering. Initieringsstadiet er når man engasjerer seg i problemet og prøver å løse det ved hjelp av tidligere erfaringer, uten tilsynelatende fremgang. Inkuberingsstadiet er når man begynner å jobbe med problemet i underbevisstheten etter å ha arbeidet med problemet uten framgang. Etter inkuberingsstadiet kan opplysningsstadiet plutselig komme, og man får en plutselig innsikt. Det siste stadiet er verifiseringsstadiet og her sjekker man løsningen og detaljene i løsningsprosessen (Liljedahl et al., 2016).

Liljedahl et al. (2016) trekker frem problemløsning ved design, som vil si prosessen med å utlede løsningen på problemet ut fra det som allerede er kjent. Forkunnskapene som en person sitter med, vil påvirke personens forståelse av problemet og hvilke strategier som tas i bruk. Når man først angriper et problem, vil man trekke på forkunnskaper og tidligere erfaringer. Som et resultat av dette, inkluderer problemløsningsheuristikk denne ressursen av forkunnskaper og tidligere erfaringer, som første angrep på et problem (f.eks. Pólya sin problemløsningsmodell).

Ofte har matematikk blitt sett på som den mest presise av alle vitenskaper. Det som forsvinner i en slik forståelse, er at matematikk ofte har røtter i kreativitet og er født fra prosessene med plutselig innsikt og intuisjon. Det finnes problemer hvor logisk deduktivt resonnement er tilstrekkelig for å komme frem til en løsning, men dette er ikke ekte problemer. Ekte problemer trenger prosessene med kreativitet, innsikt og opplysning for å komme frem til løsninger (Liljedahl et al., 2016).

Problemløsning blir trukket frem som en viktig del av matematikken og matematikkundervisningen, og har røtter i kreativitet. Når det kommer til arbeid med problemløsning i matematikkundervisningen, er det jo naturlig at elevene arbeider med problemer. Men hva er egentlig et problem?

2.2.2.Hva er et problem?

Schoenfeld (1992) skriver at «problem» og «problemløsning» gjennom årene har hatt flere og ofte motstridende betydninger. Tradisjonelt har problem i matematikkundervisningen blitt brukt om rutineoppgaver – om alt som gjøres av elevene i matematikkundervisningen. En annen definisjon på problem beskrives slik av Webster (1979, s.1434):

> *«A question ... that is perplexing or difficult.»*

Når man snakker om problem som en rekke rutineoppgaver, så vil dette, ifølge den andre definisjonen, være alt utenom problemer. Slike rutineoppgaver er oppgaver som blir gitt for å øve på en bestemt matematisk teknikk, som ofte nettopp har blitt demonstrert for elevene. Ved å definere disse rutineoppgavene som problemer, vil elevenes matematiske forståelse og kunnskap, omfatte det settet av teknikker (løsningsmetodene) som elevene mestrer (Schoenfeld, 1992). Problemer er oppgaver som ikke kan løses med direkte innsats og vil kreve noe kreativ innsikt for å kunne løses (Liljedahl et al., 2016). Gode problemer er basert på hva som kreves å bli gjort av elevene for å løse det. Et godt problem krever at elever blir sittende fast for så å tenke, eksperimentere, prøve og feile, og bruke tidligere kunnskap for å komme seg videre. I tillegg vil gode problemer være oppgaver som krever at elever bruker et mangfold av matematisk kunnskap, og setter denne kunnskapen sammen på forskjellige måter for å løse problemet (Liljedahl, 2021).

I matematikkfaget mener Wæge og Nosrati (2018) at oppgavene og problemstillingene som elevene arbeider med, vil være sentrale. Videre lurer de på hva slags oppgaver som kan danne det beste grunnlaget for elevenes læring og metakognisjon i matematikk. De mener at kognitivt krevende oppgaver er noe som brukes for å fremme elevenes problemløsning. Liljedahl (2021) hevder at et godt problem ikke handler om hva det er, men om hva det gjør, og det det gjør er å få elever til å tenke. Kognitivt krevende oppgaver kan være slike problem som får elevene til å tenke.

2.2.3 Kognitivt krevende oppgaver

Stein et al. (2000) definerer kognitive krav slik: *«By cognitive demands we mean the kind and level of thinking required of students in order to successfully engage with and solve the task.»* (s.11). Wæge og Nosrati (2018) viser til forskning (Pantziara & Philippou, 2007, 2010; Wæge, 2007; Wæge & Pantziara, 2013) som understreker betydningen av å la elever arbeide med kognitivt krevende oppgaver for å fremme problemløsning og resonnering. Videre mener de at klasserom som lar elevene jobbe med slike oppgaver, bidrar til økt matematisk forståelse hos elevene. De hevder at en kognitivt krevende oppgave ikke skal være for vanskelig, men skal gi elevene en genuin utfordring. I løpet av undervisningsøkten er det viktig at læreren ikke omformer oppgaven til noe mindre krevende. Læreren kan gi elevene faglig støtte, samtidig som han har høye forventninger til elevene (Wæge & Nosrati, 2018).

Stein et al. (2000) foreslår fire nivåer av kognitive krav til matematiske oppgaver. Disse fire nivåene er: (1) memorering, (2) prosedyrer uten sammenhenger, (3) prosedyrer med sammenhenger, og (4) å gjøre matematikk. De to første blir kategorisert som lavt nivå av kognitive krav, og har ingen sammenheng med forståelse, mening, eller andre matematiske emner. Når oppgaver med lavt nivå av kognitive-krav blir brukt, er det typisk at elever jobber med 10 til 30 lignende problemer i en matematikktime. De to siste nivåene (nivå 3 og 4) blir kategorisert som høyt nivå av kognitive krav. Nivå 3 (prosedyrer med sammenhenger) bruker prosedyrer, men gjør dette på en måte som bygger sammenhenger med underliggende emner og meninger. Nivå 4 (å gjøre matematikk) vil medføre, å spørre elever om å utforske forholdet mellom ulike måter å representere en oppgave på, i tillegg utfordres elevene til å bruke deres forståelse om sammenhengende temaer på nye måter. I kontrast til bruk av oppgaver med lavt nivå av kognitive krav, vil bruk av oppgaver med høyt nivå av kognitive krav, ofte føre til at elevene jobber med færre problemer (så lite som gjerne ett eller to problemer i en matematikktime) (Stein et al., 2000).

Wæge og Nosrati (2018) viser eksempler på to oppgaver som stiller svært forskjellige kognitive krav til elevene. Den første oppgaven handler om at elevene skal multiplisere to brøker. Den andre oppgaven handler om at elevene skal lage en problemstilling til et multiplikasjonsstykke av to brøker for så å løse problemet de har laget (uten bruk av regelen for multiplikasjon av brøk) og forklare løsningen. Den første oppgaven krever kun instrumentell kunnskap og har bare ett riktig svar, hvor elevene kjenner til regelen og kan utføre multiplikasjonen. Den andre oppgaven har flere løsninger og stiller høye kognitive krav til elevene, og oppfordrer dem til relasjonell forståelse (Wæge & Nosrati, 2018).

2.2.4 LIST-oppgaver

LIST-oppgaver er det som gjerne kalles for rike oppgaver. Det er kognitivt krevende oppgaver som vil utfordre elever på forskjellige nivåer. LIST-oppgaver har lav inngangstersket og stor takhøyde. Det er en lav inngangsterskel til oppgavene som gjør at alle elever har mulighet til å begynne å arbeide, samtidig som oppgavene gir elevene muligheter for å arbeide ut fra egne nivåer og interesser. LIST-oppgaver gjør det mulig å arbeide med utfordrende matematikk og de skaper rom for flere løsningsstrategier. Bruk av LIST-oppgaver i klasserommet fremmer en positiv klasseromskultur hvor elevene både arbeider på sitt nivå og sammen med klassen, innenfor den samme åpne oppgaven. LIST-oppgaver kan dermed føre til at plenumsdiskusjoner blir mer meningsfulle, fordi alle kan bidra på sin måte, og bli inspirert og lære av hverandre sine resonneringer og fremgangsmåter. Slike oppgaver gir elevene muligheter til å vise frem det de kan, fremfor det de ikke behersker (Wæge & Nosrati, 2018).

I min studie ser jeg på en lærer som arbeider med tenkende klasserom og gir elever slike problemer som får dem til å tenke. Videre vil det i et tenkende klasserom være et fokus på samarbeid. I et tenkende klasserom arbeider elevene med problemer på vertikale tavler i tilfeldige grupper på tre elever (Liljedahl, 2016, 2021). Dette utdypes i kap.2.3.

2.2.5 Samarbeid

Når elever samarbeider i grupper, får de mulighet til å eie de ideene de konstruerer, og oppleve seg selv og medelever som aktive deltakere i å skape personlig matematisk innsikt. Det er viktig å gjenkjenne at ikke alle elevers konstruksjoner er like gyldige, men uferdige eller ugyldige løsninger kan danne grunnlag for klasseromsaktiviteter og diskusjoner om forskjellige tolkninger. Læreren spiller her en viktig rolle i å velge ut elevers ideer som er hensiktsmessige å spille videre på (Goos, 2004). Individer i samarbeidssituasjoner drar ikke bare fordel fra samarbeid med andre, men også fra å dele egne ideer, forklare tenkningen deres og rettferdiggjør deres løsninger (Pijls et al., 2007).

Wæge og Nosrati (2018) hevder at å plassere elever sammen i grupper, ikke er tilstrekkelig for å få til vellykket gruppearbeid. Liljedahl (2021) mener at den optimale gruppestørrelsen er på tre elever per gruppe. Grunnen til dette var at han gjennom sine studier fant ut at grupper på to elever slet mer enn grupper på tre elever, og grupper på fire elever førte ofte til at to og to snakket sammen eller tre arbeidet og en meldte seg ut (Liljedahl, 2021). Det at elever er delt inn i grupper, betyr ikke at de samarbeider eller at de samarbeider godt. Det kan fort ende opp med at én elev tar styringen og ikke slipper andre til, eller man kan ende i en situasjon hvor ingen tar ansvar. Læreren må derfor strukturere og veilede gruppearbeidet godt for å etablere bestemte regler og normer. Det må sakte og sikkert opprettes en samarbeidskultur i klassen uten at læreren tar fra elevene deres kreativitet og frihet. Dette er noe som kan gjøres på forskjellige måter. En tilnærming kan være at lærere verdsetter flere dimensjoner ved matematikk, som for eksempel å begrunne, stille gode spørsmål og argumentere. Videre vil denne tilnærmingen innebære at lærere verdsetter flere løsningsstrategier og metoder, og lar elevene arbeide med åpne oppgaver som kan løses på forskjellige måter. Denne tilnærmingen fører til at flere elever kan bidra med sine ideer som kan føre til at de blir verdsatt og merke at de lykkes i matematikkfaget (Wæge & Nosrati, 2018).

Tidlig forskning på problemløsning har hatt mye fokus på individuell problemløsning, men senere har det blitt mer fokus på problemløsning sammen i grupper (Liljedahl & Cai, 2021). Pruner og Liljedahl (2021) presenterer forskning som ser på hvordan problemløsning ser ut i klasserom under samarbeid, hvor det er tilgang til ressurser som går utover egen kunnskap og tidligere erfaringer, til enkelt individer og til gruppen som helhet. De mener at en stor del av problemløsning, som matematikere gjør, er samarbeidende *«by nature»*. Problemløsning handler ikke bare om samarbeid, men om samarbeid som er lokalisert i et større miljø fullt av ressurser – media, teknologi, andre forskere, forskningsartikler og så videre (Pruner & Liljedahl, 2021).

2.2.6 Lærer som veileder under problemløsning

I min studie er det et fokus på læreren og hvordan han legger til rette for elevenes læring. Det vil derfor være nyttig å se på hva litteraturen sier om læreren som veileder under problemløsning.

Polya (1957) hevder at en av de viktigste oppgavene til læreren er å hjelpe elevene. Videre mener han at elevene bør ha så mye erfaring med uavhengig arbeid som mulig. Læreren skal hjelpe elevene, men verken for mye eller for lite, slik at de får en rimelig del av arbeidet. Det beste er å klare å hjelpe elevene naturlig. Læreren må prøve å sette seg selv i elevenes posisjon, prøve å forstå hva som skjer i hodene deres, og stille spørsmål eller indikere et steg som elevene kunne kommet frem til selv. Ved å prøve å hjelpe elevene naturlig, fører det til at læreren stiller de samme spørsmålene og indikere de samme stegene om og om igjen. Man kan variere måten å formulere seg på når man stiller elevene spørsmål. Når man skal spørre om hva som er ukjent, kan man spørre elevene: hva er det som kreves? Hva ønsker du å finne? Hva er det meningen at du skal finne? (Polya, 1957).

Spørsmålene nevnt ovenfor er generelle spørsmål, som vil si at man kan stille dem når man arbeider med forskjellige type problemer. Når læreren stiller elevene spørsmål eller gir forslag, er det to mål læreren kan ha. Det første er å hjelpe elevene å løse det problemet de arbeider med. Det andre er å utvikle elevenes evne til å løse fremtidige problemer. Lærere som ønsker å utvikle elevers evner til å løse problemer må gi dem rikelig med muligheter til etterligning og praksis. Dette gjøres ved å stille og vise til slike generelle spørsmål (som nevnt ovenfor) så ofte som mulig. Når læreren løser problemer foran klassen burde han/hun dramatisere ideene ved å gi seg selv de samme spørsmålene som brukes for å hjelpe elevene. Ved slik veiledning vil elevene til slutt oppdage den riktige måten å bruke disse spørsmålene og forslagene på (Polya, 1957), som finnes i Polyas problemløsningsmodell.

Lester et al. (1989) viser til ett sett med ti undervisningshandlinger som kan veilede læreren før, under og etter problemløsningsarbeid. Før elever arbeider med problemet bør læreren lese problemet høyt for klassen og diskutere ord og fraser som elevene kanskje ikke forstår. Dette er for å illustrere viktigheten ved å lese problemet nøye og fokusere på ord som kan ha en spesiell tolkning innen matematikk. Videre kan man bruke helklassediskusjon om forståelse av problemet for å fokusere på viktig data og avklare deler av problemet (Lester et al., 1989). Dette kan minne om Liljedahl (2021) sine tanker om å gi oppgaven til elevene verbalt, og avvikle den gjennom fortelling, diskusjon, dialog og potensielt arbeide gjennom en modell av hva det blir spurt om, sammen med elevene.

Under problemløsning bør læreren observere og stille elever spørsmål for å fastslå hvor de er i problemløsningsprosessen. Dette er for å få oversikt over elevers sterke og svake sider relatert til problemløsning (Lester et al., 1989). Læreren skal også gi elever hint og utvide problemet dersom det trengs. Dette er for å hjelpe elever å komme over blokkeringer og utfordre de elevene som blir fort ferdig. Det er også viktig at man får elever som har funnet en løsning til å begrunne dette, for å få dem til å se over løsningen deres og passe på at det gir mening (Lester el al., 1989). Liljedahl (2016, 2021) skriver også om dette med hint og utvidelser, og hvordan det bør brukes når elevene arbeider med problemløsning.

For å gjøre det synlig for elevene at det er flere måter å løse et problem på, kan læreren oppmuntre elevene til å løse en oppgave på flere måter og utvikle egne løsningsstrategier. Det er læreren som har ansvaret for å danne sosiale normer for diskusjoner i klassen, og kan her jobbe med at det forventes at elevene skal begrunne og argumentere for sine løsningsstrategier. Noe som kan bidra til å få elevene til å forstå at det faktisk er flere måter å løse problemer på, kan være å stille spørsmål som: kan du forklare hvorfor det blir slik? Er det mulig å løse det på andre måter? Kan du forklare hvordan du tenker? (Wæge & Nosrati, 2018).

Liljedahl og Cai (2021) hevder at lærere trenger hjelp til å utvikle og vedlikeholde deres problemløsningspraksis. De mener at en kilde for å hjelpe lærere til å utvikle og vedlikeholde problemløsningspraksis, kommer fra profesjonell utvikling. Videre mener de at den profesjonelle utviklingen kan fremstå gjennom mentorforhold mellom lærere.

Læreren har altså en viktig rolle som støttende stillas og veileder under elevers arbeid med problemløsning. Min studie posisjonerer seg videre i et tenkende klasserom. Liljedahl (2021) skriver om flere undervisningspraksiser som kan tas i bruk av læreren for å etablere et tenkende klasserom.

2.3 Tenkende klasserom

Liljedahl (2016) har tidligere forsket på aha-opplevelsen, der elever skulle få problem som førte til at de satt fast og forhåpentligvis fikk en slik opplevelse. Dette skjedde ikke, elevene gav opp. Det viste seg at elevene enten ikke ville eller ikke kunne tenke. Liljedahl utforsket dette og fant det samme i flere klasserom. Det som manglet for lærerne og elevene, var et sentralt fokus på matematisk tenkning. Dette motiverte Liljedahl til å finne en måte å bygge, i disse klasserommene, en kultur av tenkning, både for elevene og lærerne. Han ville bygge det han kaller et tenkende klasserom - et klasserom som ikke bare bidrar til tenkning, men også til anledninger til å tenke, et rom som er fullt av tenkende individer, i tillegg til individer som tenker kollektivt, lærer sammen og konstruerer kunnskap og forståelse gjennom aktivitet og diskusjon. Videre må et tenkende klasserom ha noe og tenke på, og da sier Liljedahl (2016) at problemløsning er det åpenbare valget.

Liljedahl innså at han trengte et sett med verktøy, som kunne hjelpe ham og lærere å komme forbi eksisterende klasseromsnormer, dersom han ønsket å hjelpe lærere å bygge tenkende klasserom. Disse verktøyene måtte være enkle for lærere å adoptere og gi elevene mulighet til å engasjere seg i problemløsningsoppgaver, uavhengig av deres innøvede tendenser og tilnærminger. Liljedahl oppdaget, gjennom egne studier, at både ikke-permanente vertikale overflater (f.eks whiteboard-tavler) og det å synlig dele elevene inn i tilfeldige grupper, var effektive praksiser for å bygge aspekter av tenkende klasserom. Disse to metodene ble også godt mottatt av lærere. Når Liljedahl hadde oppdaget dette, var det enkelt å sette disse to metodene sammen (Liljedahl, 2016).

Fra Liljedahl (2016) sin studie dukket det opp et sett med ni undervisningspraksiser som enten bidrar til bygging eller vedlikehold av et tenkende klasserom. Videre mener han at ikke alle disse elementene er like virkningsfulle eller målbevisste i byggingen av tenkende klasserom. Han deler disse ni elementene inn i tre trinn, som utgjør en ideell rekkefølge av implementering av tenkende klasserom (se Figur 1).

Stage one	Stage two	Stage three
• Begin lessons with problem-solving tasks	• Oral instructions	• Levelling
• Vertical non-permanent surfaces	• De-fronting the room	• Assessment
• Visibly random groups	• Answering questions	• Managing flow

Figur 1: De ni elementene kronologisk implementert (hentet fra: Liljedahl, 2016, s.383)

Liljedal (2016) hevder at lærerne (som deltok i hans studier) sine erfaringer med undervisningsmetodene assosiert med trinn én (stage one) elementer, driver dem ganske naturlig til å engasjere seg i elementene i trinn to og tre (stage two and three) (figur 1).

Ved å konstruere et tenkende klasserom, blir ikke problemløsning bare et middel, men også et mål. Et tenkende klasserom er gjennomsyret med rike problemer. Implementering av de ni undervisningspraksisene og de tre trinnene, er avhengig av den gjennomgripende (ubiquitous) bruken av problemløsning. Det bidrar samtidig til et klasserom med samarbeidende problemløsning (Liljedahl, 2016).

Videre har Liljedahl (2021) i sin bok «Building Thinking Classrooms in mathematics» utvidet disse ni elementene fra (Liljedahl, 2016) til 14 undervisningspraksiser for å forbedre læring. De tre trinnene (se Figur 1) har Liljedahl (2021) endret til fire verktøykasser (toolkit) med de 14 praksisene. Han hevder at rekkefølgen på implementeringen av disse verktøykassene er av betydning. Den første verktøykassen bør være implementert før man begynner på den andre verktøykassen osv.

I denne studien vil jeg ha fokus på 6 av de 14 undervisningspraksisene. Grunnen til dette er at læreren jeg skal studere har en 8.klasse som ikke har arbeidet så mye med tenkende klasserom. Implementeringen av tenkende klasserom går dermed gradvis. Jeg ønsker derfor å fokusere på de undervisningspraksisene som læreren har begynt å implementere. Videre kommer jeg til å se på lærerhandlinger (Drageset, 2014, 2015, 2019) (se kap.2.6), og dermed ønsker jeg å ha med den praksisen som handler hvilke typer elevspørsmål læreren svarer på (kap.2.3.2), samt den praksisen som handler om hint og utvidelser (kap.2.3.3).

Jeg kommer til å ha fokus på hele den første verktøykassen som inneholder tre undervisningspraksiser, to undervisningspraksiser fra verktøykasse to, og én undervisningspraksis fra den tredje verktøykassen. Liljedahl (2021) mener at alle de tre praksisene i den første verktøykassen må implementeres samtidig, mens i den andre verktøykassen er det ikke noen optimal rekkefølge. I den tredje verktøykassen mener han det er best å implementere praksisene i den rekkefølgen han har presentert dem i. Jeg skal i kap.2.3.3 se på den første av de tre praksisene i den tredje verktøykassen.

2.3.1 Verktøykasse 1

De tre undervisningspraksisene i den første verktøykassen er:

1. ***«Give thinking tasks»:*** Dersom man ønsker at elevene skal tenke, må man gi dem noe å tenke på. Det må være noe som ikke bare krever tenkning, men som også oppfordrer til tenkning. Når det kommer til tenkende oppgaver, er problemløsning den beste plassen å begynne (Liljedahl 2021). Undervisningen må begynne med gode problemløsningsoppgaver. I en tidlig fase i bygging av tenkende klasserom, må disse oppgavene være høyt engasjerende, samarbeidende oppgaver som gjør at elevene ønsker å snakke med hverandre mens de prøver å løse oppgaven (Liljedahl, 2021). Eksempler på slike oppgaver kan være det som Wæge og Nosrati (2018) kaller for LIST-oppgaver (se kap.2.2.3). Under arbeid med problemer vil elever sitte fast, tenke, og komme seg løs. Når de gjør dette vil de lære om matematikk, om seg selv, og de vil lære hvordan tenke (Liljedahl, 2021). I min studie benytter læreren seg av ulike problemer knyttet til emnet funksjoner. To av disse problemene er grundig beskrevet i kap.3.7.1 og kap.3.7.2.
2. ***«Frequently form visibly random groups»:*** Det er viktig at gruppene blir delt inn foran elevene og at det er synlig for dem at det er tilfeldige grupper. Ideelt sett må dette skje i begynnelsen av hver undervisningsøkt (Liljedahl, 2016, 2021). Disse gruppene vil arbeide sammen med en gitt problemløsende oppgave og sitte sammen eller stå sammen under gruppe eller helklassediskusjoner (Liljedahl, 2016).
3. ***«Use vertical non-permanent surfaces»:*** Elevene skal arbeide på vertikale (ikke-permanente) tavler slik som f.eks. whiteboards eller vinduer. Dette vil synliggjøre arbeidet som blir gjort både for læreren og de andre elevgruppene. Videre mener Liljedahl (2016, 2021) at det kun bør være en tusj på hver gruppe, for å legge til rette for diskusjon. Når elevene arbeidet i tilfeldige grupper og på vertikale tavler, tenkte de lengre, diskuterte mer matematikk og holdt ut når oppgaven var vanskelig (Liljedahl, 2021).

Læreren i min studie har implementert alle de tre undervisningspraksisene i den første verktøykassen. Han deler elevene inn i tilfeldige grupper på tre elever i hver undervisningsøkt. Videre har han også montert opp plexiglass og tatt i bruk vinduer som vertikale (ikke-permanente) tavler. Dette beskrives grundigere i kap.3.5.

2.3.2 Verktøykasse 2

Videre vil jeg i min studie ha fokus på to av undervisningspraksisene fra verktøykasse to. En av disse er ***«Give thinking task early, standing, and verbally».*** Oppgavene bør gis tidlig i undervisningsøkten, helst i løpet av de første fem minuttene. I tillegg er det av betydning hvor oppgaven blir gitt. Oppgaven bør gis mens elevene står samlet rundt læreren. Læreren skal gi elevene oppgaven verbalt, og gjerne samle dem rundt en tavle (Liljedahl, 2021). Det at oppgaven gis verbalt er noe som gjør at gruppene fort begynner å diskutere hva som blir spurt om, heller enn å prøve å dekode instruksjoner på en side (Liljedahl, 2016). Læreren i min studie oppgavene til elevene verbalt, fra midten av klasserommet, og tidlig i øktene (se tabell 2 – kap.3.4.1).

Den andre praksisen fra verktøykasse to er ***«Answer only keep thinking questions».*** Liljedahl (2021) hevder at hans forskning på de andre 13 praksisene viste at praksiser som kunne få elevene til å tenke, ble tatt bort av lærere som svarte på alle spørsmål som ble stilt. Videre mener han at det er meningsløst å gi «tenkende oppgaver» dersom lærere fortsetter å svare på alle spørsmålene elevene stiller. Det betyr ikke at læreren ikke skal svare på elevenes spørsmål, men det handler om hvilke spørsmål lærere svarer på. Liljedahl (2016, 2021) mener elever bare stiller tre typer spørsmål: (1) nærhetsspørsmål, (2) stopp-å-tenke spørsmål og (3) fortsett-å-tenke spørsmål.

Nærhetsspørsmål er spørsmål som elever stiller når læreren er i nærheten. På overflaten er ikke disse spørsmålene annerledes fra spørsmål i de andre to kategoriene. Liljedahl (2021) hevder i sin studie at nærhetsspørsmål i de fleste tilfeller består av forespørsel om ting elevene allerede hadde funnet ut, tatt avgjørelser om, eller antagelser om. Elever stilte disse spørsmålene fordi det er en vanlig elevting å gjøre når læreren tilfeldigvis er i nærheten. Det var også elever som hadde god grunn til å stille nærhetsspørsmål. Disse elevene var ofte sjenerte og ventet til læreren var i nærheten for å stille spørsmål de lurte på, og fortsatte med resten av arbeidet mens de ventet. Mengden av slike elever bleknet derimot i sammenligning til mengden elever som stilte førstnevnte nærhetsspørsmål (Liljedahl, 2021).

Stopp-å-tenke spørsmål kan handle om et svar elevene har kommet frem til, eller om elevenes prosess på et problem. Spørsmålene forekommer oftest i formen «er dette riktig?». Tenking er vanskelig for elever, og dersom læreren kan svare på om det de har gjort er riktig, blir det mye enklere. Elever stiller stopp-å-tenke spørsmål i håp om at læreren svarer på dem, slik at de kan stoppe å tenke (Liljedahl, 2021).

Fortsett-å-tenke spørsmål blir stilt av elever slik at de kan fortsette å engasjere seg i problemet de arbeider med. Dette er ofte avklaringsspørsmål eller spørsmål om utvidelser som elever ønsker å følge. Elever som kommer med slike spørsmål, er motiverte til å fortsette å arbeide og tenke. Eksempler på fortsett-å-tenke spørsmål er: «kan vi få det neste spørsmålet?», og «når de sier tall hvor summen blir 25, må vi bare forholde oss til heltall?» (Liljedahl, 2021).

De eneste spørsmålene læreren skal svare på er fortsett-å-tenke spørsmål. De andre to type spørsmålene skal læreren enten respondere på ved å stille elevene et spørsmål, eller ved å se på eleven og smile mens de stiller spørsmålet. Liljedahl (2021) arbeidet sammen med åtte lærere og kom opp med ti spørsmål de kunne svare med. Eksempler på noen av disse ti er: «er ikke det interessant?», «kan du finne noe annet?», «kan du vise hvordan du gjorde det?», og «hvorfor tror du det er slik?». Videre fant Liljedahl (2021) ut at ved å smile og se på elevene når de stilte spørsmål, visste elevene at de hadde blitt hørt og at læreren bevisst har valgt å ikke svare. Mange elever tolket dette som at de måtte arbeide mer, og over tid begynte de å se på det som et tegn på at læreren var sikker på elevenes evne til å løse det selv. Når læreren velger å respondere på denne måten, tenker elevene mer, og læreren gjør ikke lengre tenkingen for dem (Liljedahl, 2021).

I denne studien studeres en lærer i et tenkende klasserom, hvor det er fokus på hvordan læreren legger til rette for elevenes læring gjennom dialog. Dermed vil det være nyttig fokusere på praksisen som handler om hvilke typer spørsmål læreren svarer på. Videre vil det også være nyttig å se på lærerens bruk av hint og utvidelser

2.3.3 Verktøykasse 3

Lester et al. (1989) mener som tidligere nevnt at hint og utvidelser må gis til elevene når det trengs, for å hjelpe dem over blokkeringer og utfordre de som blir fort ferdig. Den første praksisen i den tredje verktøykassen til Liljedahl (2021) handler om dette med hint og utvidelser – ***«Asynchronously use hints and extensions to maintain flow***». Liljedahl (2021) henviser til Csíkszentmihályi (1990, 1996, 1998) som mener at når det er balanse mellom utfordring og evne, skapes en tilstand som han kaller «flow». Å ha ubalanse derimot vil være dersom f.eks. utfordringen av aktiviteten overgår personens evner, noe som gjør at de sannsynlig vil oppleve en følelse av frustrasjon. Dersom personens evne overgår utfordringen, er det sannsynlig å oppleve kjedsomhet, noe som også vil være ubalanse. Liljedahl (2021) mener at «flow» er der engasjement skjer, og som en konsekvens av dette der tenkning skjer. Videre mener han at for å bygge et tenkende klasserom, må man være i stand til å få elever inn i, og holde dem i, «flow».

Når elever befinner seg i tilstanden «flow», vil evnen deres fortsette å øke, og for å holde elevene i «flow», må man som lærer fortsette å øke utfordringen ved å gi dem utvidelser (vanskeligere og vanskeligere oppgaver å løse). Timing er av betydning når man skal holde elevene i «flow». Dersom man gir elevene utvidelser før elevene har hatt sjanse til å fullt utvikle sine evner, vil man dytte dem inn i frustrasjon. Når man venter for lenge ved å øke utfordringen, vil elevene bli ført inn i kjedsomhet. Læreren må få timingen riktig for alle elevene, og det vil derfor ikke fungere å gi dem utvidelser samtidig. I et tenkende klasserom arbeider elevene på grupper og bruker vertikale tavler, noe som vil gjøre det enklere for læreren å gi elevene utvidelser på riktig tidspunkt. Det at elevene jobber på grupper, vil føre til at det er færre enheter å forholde seg til (i stedet for gjerne 20-30 elever, er det 7-10 grupper). Når elevene jobber på vertikale tavler, vil det være enklere for læreren å observere tenkningen deres, noe som gjør det enklere å gi dem utvidelser på riktig tidspunkt (Liljedahl, 2021).

Det vil oppstå enkelte grupper hvor det forekommer en ubalanse mellom elevers evne og oppgavens utfordring, og de vil begynne å bli frustrerte. Når dette skjer, må læreren gripe inn ved å gi elevene hint. Liljedahl (2021) hevder det er to typer hint – hint som reduserer utfordringen og hint som øker evnen. Hint som reduserer utfordringen, er raskest å gi elevene, og krever enten at læreren gir et delvis svar til problemet elevene arbeider med, eller retter fokuset deres mot en enklere oppgave. Hint som øker evnen, tar lengre tid og krever at læreren enten minner dem på en strategi eller gir dem en strategi. Hint som reduserer utfordringen er bare nyttige i det øyeblikket, mens hint som øker evnen fortsetter å være nyttig selv når elevene går videre til neste oppgave. Selv om hint som øker evnen er best i det lange løpet, er frustrasjon en intens negativ følelse som krever rask intervensjon, og den beste måten å gjøre dette på, vil noen ganger være å redusere utfordringen (Liljedahl, 2021).

2.4 Funksjoner

I min studie skal jeg studere en lærer som arbeider med tenkende klasserom. Emnet elevene skal arbeide med i perioden for datainnsamling, er funksjoner. Funksjoner handler om størrelser som på en entydig måte avhenger av hverandre. Overalt i naturen og på menneskeskapte områder finner vi slike avhengigheter. Det er spesielt størrelser som endrer seg over tid som vi har med å gjøre (Bjørnestad et al., 2016). En funksjon kan defineres slik:

> *«Når en størrelse, la oss kalle den y, avhenger av en annen størrelse, la oss kalle den x, på en entydig måte – til hver verdi av x svarer én og bare én verdi av y – er y en funksjon av x, og vi kan skrive*
>
> $$y=f(x)$$
>
> *dersom f er navnet vi velger for funksjonen.»* (Bjørnestad et al., 2016, s.324)

Kalchman og Koedinger (2005) hevder at selv om en slik definisjon stemmer, så signaliserer den ikke til elevene at de begynner å lære om nye problemer hvor verdien av en ting bestemmes av verdien til en annen, og regelen som forteller dem hvordan de er relatert. Funksjonsbegrepet har fått en bredere tolkning innenfor matematikkundervisningen som ikke bare refererer til den formelle definisjonen, men også til de flere måtene funksjoner kan skrives på og beskrives. Bruk av tabeller, algebraiske uttrykk, ord, grafer og problemsituasjoner, er vanlige måter å beskrive funksjoner på. Disse representasjonene beskriver alle hvordan verdien av en variabel bestemmes av verdien til en annen. Dette er ulike måter å beskrive det samme forholdet på, noe som elevene må forstå (Kalchman & Koedinger, 2005).

Kalchman og Koedinger (2005) trekker frem tre prinsipper som er viktige for elevers læring. Det første prinsippet handler om å bygge ny kunnskap på elevers allerede eksisterende forståelse og kunnskap. Elever har flere møter med funksjon-relasjoner i deres hverdagsliv, som i klasserommet kan knyttes opp mot den formelle algebraen for å støtte ny læring. Det andre prinsippet går ut på at elever trenger en sterk konseptuell forståelse. God undervisning er ikke noe som bare handler om å utvikle elevenes evne til å utføre ulike prosedyrer, men det handler også om å utvikle en konseptuell forståelse av funksjon hos elevene. Å utvikle en konseptuell forståelse hos elevene, innebærer å lære dem evnen til å representere funksjoner på ulike måter, og til å kunne bevege seg mellom flere representasjoner av funksjoner. Det tredje prinsippet handler om viktigheten av at elever engasjeres i metakognitive prosesser, og monitorerer deres egen forståelse. Elever må engasjeres i å monitorere deres problemløsning, og reflektere over strategiene og løsningene deres. Det metakognitive engasjementet hos elevene er viktig når matematikken blir mer abstrakt, slik at de kan tenke gjennom om løsningen virker logisk (Kalchman & Koedinger, 2005).

Sfard (1992) mener at elever sliter med å forstå at funksjoner er mer enn en formel (algebraisk uttrykk), og dermed har de vanskeligheter med at funksjoner fremstår i ulike former. Dette kan føre til at elever har vanskeligheter med å ta i bruk de ulike representasjonene av en funksjon. I matematikkundervisningen på skolen opptrer funksjoner i en rekke ulike former. Gjone (1997) viser til kanadieren Claude Janvier, som har identifisert fire former funksjoner opptrer i. Videre har Claude Janvier (1978) satt opp en tabell over sammenhenger mellom de ulike formene for å beskrive funksjoner i skolematematikken (referert i Gjone, 1997, s.4):

Fra \ Til	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon	--------------	måling	skisse	modellering
Tabell	avlesing	--------------	plotting	tilpassing
Graf	tolking	avlesing	--------------	kurvetilpassing
Formel	gjenkjenning	beregning	plotting	--------------

Figur 2: Sammenheng mellom representasjoner for funksjoner (hentet fra: Gjone, 1997, s.4)

Janvier (1978) beskriver ikke detaljert hvordan man går fra en form til en annen, men overlater til leseren hva dette innebærer. Han begrunner dette ved å peke på at det er utfordrende å definere deler av prosessene. Elevers forståelse og kunnskaper vil i tillegg til konteksten, påvirke hva som kreves for bevegelse mellom de ulike formene for å beskrive funksjoner (Janvier, 1978). Gjone (1997) tar med utgangspunkt i Janvier sin tabell, for seg ulike eksempler på oppgaver som forflytter seg mellom to representasjoner (former) og drøfter disse.

Læreren i min studie har valgt ut problemer elevene skal arbeide med knyttet til emnet funksjoner. Læreren har valgt problemer hvor elevene starter med representasjonen «situasjon» og skal forflytte seg til andre representasjoner for funksjoner. I planleggingsdokumentene for øktene har læreren skrevet ned hvilke representasjoner han ønsker elevene skal ende opp med. Se kap.3.7.1 og 3.7.2 for nærmere beskrivelse av dette for to av problemene læreren har brukt. Jeg ønsker derfor å videre se på overganger mellom representasjoner og vanskelighetsnivå på ulike overganger.

2.4.1 Overgang mellom representasjoner

De fleste forskere er enige om at målet med en transformasjon, som vil si å gå fra en gitt representasjon (form) til en spesifisert målrettet representasjon (eks. fra situasjon til tabell), er å bevare semantisk kongruens. Semantisk kongruens er den matematiske meningen som finnes mellom den gitte representasjonen og representasjonen man skal ende opp med (Lesh et al., 1983 – referert i Adu-Gyamfi et al., 2012).

Adu-Gyamfi et al. (2012) hevder at det meste av forskningen har beskrevet transformasjonsprosessen som en «black box» (svart boks). Det vil si at en elev har gjort riktig transformasjon, dersom eleven var i stand til å identifisere og implementere den passende handlingen og/eller algoritmen til å transformere fra den gitte representasjonen til en annen representasjon. Elevers transformeringsfeil antas dermed å ha blitt gjort på grunn av en misforståelse av de relevante matematiske begrepene knyttet til den gitte representasjonen, og/eller representasjonen man skulle ende opp med, eller at eleven begår en ubetydelig eller triviell algoritmisk feil. Adu-Gyamfi et al. (2012) henviser til flere studier (Clement et al., 1981; Kerslake, 1981; Knuth, 2000; Monk, 1992) som mener at en slik «black box» eller en enkelt algoritmisk tilnærming ikke er tilstrekkelig i transformasjonsprosessen med tanke på at de ikke tar hensyn til elevenes feil eller transformasjonssvakheter. Superfine et al. (2009) hevder at transformasjon modereres av elevers kunnskap om emnene, og egenskapene og relasjonene som er relevant for problemstillingen. De ser dermed ikke på transformasjon som en alt eller ingenting operasjon, men antar at den kan være fraværende, delvis eller fullstendig.

Vanskelighetsnivået på ulike transformasjoner kan generaliseres til elevsentrerte faktorer og representasjons-sentrerte faktorer. Elevsentrerte faktorer undersøker handlingene elevene gjør når de utfører transformasjoner. Noen av disse handlingene kan være vanskeligere enn andre, siden de er ulike for forskjellige transformasjoner. Det kan også hende at elever transformerer fra en representasjon til en overgangs-representasjon før de kommer til representasjonen de skulle ende opp med, noe som kan gjøre det vanskeligere. Klasseromsopplevelser kan også være med å påvirke vanskelighetsnivået, ved at det reduseres når elevene har opplevd transformasjonen ofte, og fremhever vanskelighetsnivået blant transformasjoner som sjeldnere brukes (Bossé et al., 2011).

Når det kommer til representasjons-sentrerte faktorer som kan påvirke vanskelighetsnivået på ulike transformasjoner, er det flere problemstillinger som kan påvirke vanskelighetsgraden. Noen representasjoner krever andre tolkningsteknikker enn andre, noe som kan føre til ulike vanskelighetsgrader. Det er også noen transformasjoner som er mer komplekse og dermed krever en mer konseptuell forståelse enn andre, i tillegg til at noen transformasjoner krever flere trinn i transformasjonsprosessen (Bossé et al., 2011). Vanskelighetsgraden til transformasjonen kan påvirkes av om den er lokal eller global, om det er unødig informasjon i start-representasjonen, og hvor mye informasjon det er i representasjonen. Et eksempel på hvordan vanskelighetsgraden påvirkes av om den er lokal eller global, kan være når en elev skal gjennomføre transformasjonen fra tabell til graf. Eleven må kjenne til hvordan koordinater gjøres om til punkter i et koordinatsystem, og trenger bare et lokalt perspektiv fordi eleven ikke trenger fokusere på sammenhengene i situasjonen. Eleven må derimot ha et globalt perspektiv dersom han/hun skal utføre en transformasjon fra graf til situasjon, fordi det krever at eleven må forsøke å tolke grafen og trekke ut relevant informasjon for å beskrive situasjonen. En slik global transformasjon vil være mer kognitivt krevende enn en lokal transformasjon. (Bossé et al., 2011).

2.5 Dialogisk perspektiv

I min studie er det et fokus på dialog mellom læreren og elevene, og det vil dermed være nyttig å trekke frem det dialogiske perspektivet i teoridelen. Det er også et fokus på hvordan læreren gjennom dialog kan legge til rette for elevenes læring, og dermed vil jeg også trekke frem hvilken betydning dialoger kan ha på elevers læring.

Lampert (1990) hevder at elever burde få mulighet til å diskutere, forklare sin resonnering, og stille spørsmål ved både andres og egen tenkning. For å gjøre dette mener hun at både lærere og elever må tenke annerledes om hva det betyr å kunne matematikk. Det vil si å tenke på matematikk som noe annet enn å pugge formler og bruke demonstrerte prosedyrer. For å kunne matematikk, vil elevers forståelse være sentralt. Matematiske diskusjoner er noe som pekes på som viktig for elevers læring og utvikling av forståelse. Carpenter et al. (2003) hevder at å kunne forklare hvorfor en påstand eller prosedyre stemmer, er en av de viktigste delene av forståelsen. Videre mener forskerne at elever utvikler en dyp forståelse dersom de lærer å begrunne og uttrykke egne matematiske ideer, gi begrunnelse for løsninger, og resonnere gjennom egne og andres forklaringer.

Stein et al. (2008) mener at lærerens rolle er i en endring fra kunnskapsformidler, til en skaper av læringsmiljøer hvor elevene får konstruere deres egen forståelse og mulighet til å jobbe med matematiske problemer. Med lærerens rolle i endring har matematiske diskusjoner blitt en viktig del i synet på effektiv matematikkundervisning. Lærerens rolle under klasseromsdiskusjoner, er å utvikle og bygge på elevers personlige forståelse og klassens felles forståelse, heller enn å godkjenne bestemte tilnærminger som riktige eller vise prosedyrer for å løse bestemte type oppgaver. Slike diskusjoner læres ved å gjøre elevers tenkning synlig, samt oppmuntre elever til å konstruere og vurdere egne og andres matematiske ideer (Stein et al., 2008).

Det er læreren som skal beholde kontrollen under matematiske diskusjoner, og han bør jobbe med å lede klassen mot et matematiske mål satt for timen. For å øke sannsynligheten for at målet nås, kan læreren velge ut bestemte elever til å dele deres løsninger. Læreren kan sirkulere rundt i rommet mens elevene diskuterer for å identifisere det matematiske læringspotensialet hos elevene, og vurdere hvilke elevsvar som er nyttig å løfte frem i en plenumsdiskusjon. Det vil da være læreren som beholder kontrollen på hvilke elever som får dele sine løsninger, og hvilket matematisk innhold diskusjonen sannsynligvis vil romme. Hvilken rekkefølge læreren velger på elevenes løsninger, vil også være av betydning. Et mål vil være å få elevenes tanker til å bygge på hverandre for å kunne utvikle matematiske ideer, heller enn å la diskusjonen bestå av separate prestasjoner. Å skape en sammenhengende diskusjon ved å koble sammen elevers tenkning, kan oppfordre til refleksjon rundt andres ideer, samt evaluering og revidering av egne ideer (Stein et al., 2008).

Matematiske diskusjoner vil som sagt kunne utvikle elevers forståelse og læring. I klasseromsdiskusjoner kan man som lærer få tak i elevenes prosedyrer, ideer, strategier, og forholdet mellom de ideene som oppstår. Dette er aspekter med matematisk tenkning og kan dermed bli diskutert, delt opp og forstått. Matematiske diskusjoner er noe som kan støtte elevers læring ved at det bygges en klasseromskultur som oppfordrer til læring (Chapin et al., 2009). Chapin et al. (2009) skriver om fem samtaletrekk som kan støtte klasseromsdiskusjoner, som Kazemi og Hintz (2014) senere har utviklet til syv samtaletrekk. Før samtaletrekk kan implementeres, må det etableres grunnleggende regler for respektfull og høflig diskusjon. For å bruke samtaletrekkene vellykket, må det etableres en klasseromskultur hvor man lytter respektfullt til hverandre. Elever vil ikke snakke fritt dersom de er redde for å bli latterliggjort, og de må derfor føle at det er trygt å uttrykke egne tanker. Det må settes opp klare regler for interaksjon som elevene må minnes på hver dag til det er en del av klasseromskulturen. Dette for å kunne ha produktive diskusjoner i klasserommet. De grunnleggende reglene må blant annet inneholde at elevene aktivt lytter til hverandre (Chapin et al, 2009).

Å lede matematiske diskusjoner som utvikler dyp forståelse for matematikk, kan være utfordrende. Det er lett å starte diskusjonen ved å spørre hva elevene tenker, men krevende å vite hva man skal gjøre med ideene som fremstår. Det er også krevende for læreren å lære elevene hvordan delta meningsfullt i diskusjoner. For å skape klasserom hvor elever deltar i diskusjoner som hjelper dem å lære matematikk, trekker Kazemi og Hintz (2014) frem fire prinsipper som ligger til grunn. Disse fire går ut på at: (1) et matematisk mål bør nås i diskusjonene, (2) elever må vite hva og hvordan dele ideer, slik at de blir hørt og er nyttige for andre, (3) lærere må orientere elever til hverandres matematiske ideer slik at alle er involvert i å nå det matematiske målet, og (4) lærere må signalisere at alle elever er meningsskapere og ideene deres blir verdsatt. Med disse prinsippene som grunnlag viser Kazemi og Hintz (2014) til syv samtaletrekk til støtte for klasseromsdiskusjoner. De syv samtaletrekkene skal være til hjelp for å gjøre elevers tenkning synligere. Disse samtaletrekkener er: (1) ***gjenta*** – gjenta det som blir sagt eller deler av det for å avklare eller fremheve en ide, (2) ***repetere*** – spør elever om gjenta det en annen elev har sagt (3) ***resonnere*** – spørre elevene om å sammenligne eget resonnement med andres, (4) ***tilføye*** – inviter elever til å delta i diskusjonen eller klargjøre egen tenkning, (5) ***vente*** – elevene må få tid til å tenke etter at læreren har stilt spørsmål, (6) ***snu og snakk*** – la elevene snakke sammen og hør etter på det de sier, for å velge hva som skal trekkes frem i plenumsdiskusjon, og (7) ***endre*** – elevene må få mulighet til å revidere egen tenkning når ny informasjon fremstår. De fem første av disse er først beskrevet av Chapin et el. (2009), og senere beskrevet av Kazemi og Hintz (2014), som også har lagt til de to siste samtaletrekkene.

Videre mener Kazemi og Hintz (2014) at måten lærere og elever snakker sammen er kritisk for elevers læring i matematikk. Elevers følelse av at de hører til og kan lykkes, er sentralt for deres læring. Diskusjoner er en måte å hjelpe elever å utvikle en følelse av fellesskap, og til å jobbe med matematiske ideer. Det kan gi elever energi dersom de lærer hvordan de skal respondere på, høre på, og engasjeres i andres ideer. Tiden lærere bruker på å hjelpe elever å lære å delta i diskusjoner, kan virkelig lønne seg (Kazemi & Hintz, 2014).

Bakker et al. (2015) hevder at dialogisk undervisning har som mål at elevene ikke bare skal lære noe læreren allerede kan, men at de skal lære seg å stille åpne spørsmål, og lære gjennom å engasjere seg i dialogisk undersøkelse (dialogic inquiry). De mener at dialogisk undervisning og diskusjoner ikke bare er et middel til å undervise, men også «*an end of teaching*» (s.1057). Målet med dialogisk undervisning vil dermed ikke bare handle om å undervise begreper, men også om matematiske diskusjoner hvor det stilles spørsmål ved og utvikles begreper. Ut fra det dialogiske perspektivet på utdanning, bør matematikkundervisning ikke bare lære elevene om hva som er gjort tidligere, selv om dette er viktig. Det bør i tillegg til dette ruste elevene til å kunne tenke kreativt, slik at de potensielt i fremtiden kan ta matematikken videre. Dialogisk undervisning har ikke bare som mål å komme frem til det riktige svaret, men også et mål om å kunne se ting fra flere perspektiver. Det handler om å bringe elever inn i genuint åpne læringsdialoger. Dette kan gjøres ved å lære elever hvordan man stiller gode spørsmål, hvordan man viser respekt for andre synspunkter, og hvordan man kan være åpen for nye perspektiver (Bakker et al., 2015).

I flere tradisjonelle klasserom mener Lim et al. (2019) at det er observert bruk av IRE-strukturen (dvs. initiativ – respons – evaluering). Denne strukturen har senere blitt endret til IRF (initiativ – respons – feedback), og videre til IRq (q-en står for questions). Et fokus på lærerens oppfølgingsspørsmål – som inkluderer produktive samtaler, lytting og gjennomtenkt spørring – har i senere tid blitt fremtredende. Lim et al. (2019) mener at oppfølgingsspørsmål, hvor læreren lytter og svarer, bidrar til elevenes deltakelse i matematiske diskusjoner. Videre hevder forskerne at bruk av deres rammeverk kan hjelpe elever til å utvikle en oppfatning av at læreren verdsetter deres tenkning. Oppfølgingsspørsmål kan åpne for at nye diskurs-strukturer dukker opp i klasserommet, som handler om å lytte, tenke på og svare på elevenes meningsskaping. En mer detaljert struktur av IRF, som I-R-L(lytte)-q(oppfølgingsspørsmål), kan tjene som et viktig rammeverk for å veilede lærere til å implementere mer autentiske og målrettede strategier for å utvide og utnytte elevenes ideer i diskusjoner. Videre mener Lim et al. (2009) at lærere kan ha stor nytte av å følge med på hvordan de lytter til elevene mens de deler matematiske ideer, tolker betydninger og utforsker forskjellige løsningsstrategier.

Matematiske diskusjoner i klasserommet kan bidra til å legge til rette for elevers læring i matematikk. Videre ønsker jeg i min studie å fokusere på lærerens handlinger under dialog med elevene, og hvordan disse handlingene bidrar til tilrettelegging av elevenes læring. Jeg har dermed valgt å bruke Drageset (2014, 2015, 2019) sitt rammeverk om lærerhandlinger, for å se nærmere på lærerens utsagn under dialog med elevene.

2.6 Analytisk rammeverk

For å analysere mine funn i denne masterstudien har jeg valgt å ta i bruk Drageset sitt rammeverk (2014, 2015, 2019) om lærerhandlinger. Drageset (2015) ser på både elevhandlinger og lærerhandlinger, og hvordan disse påvirker hverandre og former mønster i klasseromsdiskusjoner. I min studie vil målet ved bruk av Drageset (2014, 2015, 2019) sitt rammeverk, være å studere lærerens handlinger i et tenkende klasserom. Elevresponsene vil ikke bli studert, men de vil bli tatt i bruk for å støtte funnene i denne masterstudien. Det vil i denne studien være et fokus på lærerens handlinger for å se hva læreren gjør for å legge til rette for elevenes læring. Drageset (2014) hevder at rammeverket kan brukes for å beskrive hvordan lærere tar i bruk eller ikke tar i bruk elevers bidrag til å skape refleksjoner rundt, arbeide med, og lære matematikk. I denne studien vil Drageset sitt rammeverk bli brukt for å analysere lærerens handlinger, fra introduksjon av undervisningsøktens problem, til elevers arbeid med problemet på vertikale tavler, til plenumsdiskusjon. Tokheim (2021) benyttet seg av Drageset sitt rammeverk (i tillegg til Kazemi & Hintz, 2019; Lim et al., 2019) for å analysere helklassesamtaler. I min studie vil det ikke bare være et fokus på lærerens handlinger i helklassediskusjon, men jeg ønsker å bruke Drageset sitt rammeverk for å analysere lærerens handlinger gjennom hele undervisningsøkten, også når læreren introduserer problemet og når læreren samtaler med enkeltgrupper under arbeid med problemet. Det ble også vurdert å ta i bruk Kazemi og Hintz sine samtaletrekk i analysen, men disse ble ikke tatt i bruk på grunn av store deler av analysen er bygget på når læreren samtaler med enkelte elevgrupper.

2.6.1 Lærerhandlinger

Drageset (2014) har utviklet et rammeverk med 13 kategorier av handlinger læreren bruker for å orkestrere (orchestrate) klasseromsdiskurser (se Tabell 1). Hensikten er å foreslå nye konsepter som gjør det mulig å detaljert beskrive hvordan lærere bruker eller ikke bruker elevenes kommentarer for å arbeide med det matematiske innholdet. De 13 kategoriene grupperes inn i «Redirecting actions», «progressing actions» and «focusing actions». Tokheim (2021) oversetter, i sin masteroppgave, disse tre grupperingene til: omdirigering, fremdrift og fokusering. Omdirigeringshandlinger blir brukt av læreren for å endre elevers tilnærming. Fremdriftshandlinger blir brukt for å flytte prosessen fremover. Fokuseringshandlinger blir brukt av læreren for å stoppe opp for å se nærmere på detaljer eller begrunnelse for et svar eller en tilnærming (Drageset, 2014, 2015, 2019). I videre utvikling av rammeverket har Drageset lagt til en tredje fokuseringshandling (moderating) (Drageseth & Allern, 2018 – referert i Drageset, 2019, s.2), som resulterer i fire ekstra kategorier av lærerhandlinger, og dermed et rammeverk bestående av 17 lærerhandlinger (se Tabell 1). Jeg har valgt å bruke Tokheim (2021) sin oversettelse av Drageset sitt rammeverk for lærerhandlinger (se Tabell 1). Tokheim hadde ikke med den siste handlingen som Drageset (2019) kaller for «guiding participations and norms», som jeg har valgt å oversette til «veiledning av deltakelse og normer» (se Tabell 1).

Tabell 1: Lærerhandlinger (basert på Drageset 2014, 2015, 2019).

Omdirigeringshandlinger	
Legge elevforslaget til side	Læreren legger elevers kommentarer eller forslag til side uten å gi dem noe hjelp. Det kan hende svaret er feil eller at læreren ønsker å følge en annen løsning.
Foreslå en ny strategi	Læreren omdirigerer elevene ved å gi råd om en annen måte å tenke på eller en alternativ tilnærming.
Korrigere spørsmål	Læreren stiller spørsmål for å omdirigere eleven til en annen tilnærming. Spørsmålene vil dermed fungere som rettelser. Ofte vil læreren gi eleven en form for bekreftelse først, men andre ganger stiller læreren spørsmål direkte uten å kommentere elevens forslag.
Fremdriftshandlinger	
Demonstrere	Læreren viser hele løsningsprosessen eller flere trinn. «Demonstrere» kan fungere enten som et eksempel eller for å hjelpe elever som ikke klarer løse det på egenhånd. Lærerens kommentarer er ofte lange, men kan også være korte når lærer fort viser hvordan oppgaven skal løses.
Forenkle	Læreren forenkler ved å legge til eller endre informasjon, gi elevene hint eller fortelle dem hva de skal gjøre for å løse oppgaven. Læreren trekker eller leder elevene mot en løsning. Mange av disse forenklingskommentarene kan karakteriseres som hint.
Lukkede fremdriftsdetaljer	Læreren stiller spørsmål om ett steg av gangen (deler oppgaven opp i flere enkle steg) eller detaljer om prosessen videre for å komme frem til svaret. «Lukkede fremdriftsdetaljer» er ofte spørsmål knyttet til avklarende detaljer om prosessen, beregninger og svar. Spørsmålene i denne kategorien har ofte bare ett ønskelig eller riktig svar, som er lett å finne.
Initiere til åpne spørsmål	Læreren søker fremgang, men etterlater det til elevene å finne deres egen løsningsmetode. Læreren stiller ofte åpne spørsmål som har flere mulige svar, inkludert spørsmål om hvordan de tenker, hvordan de løser og hva de gjør. Spørsmålene i denne kategorien er rettet mot å flytte prosessen videre, men uten at læreren peker ut retningen.
Fokuseringshandlinger	
Etterspørre elevbidrag	
Oppklarende detaljer	Læreren ber elevene om å stoppe opp å forklare hva noe betyr eller hvordan noe skjer. Det resulterer i et fokus på detaljene. Disse forklaringene kan være nødvendige for å forstå hvordan elevene tenker, sjekke hva elevene forstår og for at andre elever skal kunne følge tankegangen.

Begrunne svaret	Læreren spør elevene hvorfor et svar eller en løsningsmetode er riktig. Læreren vil ikke være fornøyd med en prestasjon av hva som er gjort for å komme frem til svaret eller bare å si riktig svar.
Anvende	Læreren gir kommentarer for å sjekke om elevene kan bruke den kunnskapen som tidligere er demonstrert på et nytt og relatert problem.
Vurdere	Læreren overlater vurderingen til andre elever og spør gjerne om de er uenige eller uenige med det som er sagt. Dette kan være en strategi for å sjekke om elevene er oppmerksomme eller om de er i stand til å følge tankegangen som er forklart/vist.
Fremheve viktige ideer	
Poengtere	Læreren tydeliggjør viktige poeng for elevene. Læreren kan legge til ny informasjon eller endre på utsagnet for å gjøre poenget tydelig, eller minne elevene om svar fra prosessen eller informasjon som de tidligere har enes om.
Oppsummere	Læreren samler opp informasjon, peker på hva som er riktig og oppklarer ting. «Oppsummere» kan brukes som bekreftelse ved at læreren gjentar en elevs svar og avslutter dialogen. Læreren kan enkelte ganger endre eller legge til informasjon for å tydeliggjør tankegangen bak et svar eller grunnen til at svaret er riktig.
Tilrettelegging av diskusjon (Drageset, 2019)	
Elev får ordet	Velge hvem som får ordet. Læreren har tenk gjennom hvem han/hun velger å gi ordet.
Etterspørre elevspørsmål	Legger til rette for at elever kan stille hverandre spørsmål om det matematiske innholdet.
Etterspørre alternative metoder	Læreren ber om andre måter å løse problemet på.
Veiledning av deltakelse og normer.	Læreren forteller gjerne elevene hvordan man skal delta i matematiske samtaler. Lærer legger føring for ønskelige normer og hvordan elever skal delta.

Ved å bruke dette rammeverket ønsker jeg å se på hvordan læreren, gjennom sine ulike handlinger, kan legge til rette for elevers læring i arbeid med matematiske problemer i et tenkende klasserom. Dette vil bli gjort ved å se på både lærerens introduksjon til et matematisk problem, lærerens samtaler med enkelte elevgrupper under arbeid på vertikale tavler, og plenumsdiskusjon.

3 Metode

Det vil i dette kapittelet bli gjort rede for forskningsdesignet til studien, den analytiske tilnærmingen som er valgt, samt forskningsetiske og metodiske vurderinger som er gjort. Det vil også bli forklart hvilke metodiske grep jeg har foretatt i denne studien. Valgene jeg har gjort vil begrunnes for å tydeliggjøre relevansen, med tanke på denne studiens forskningsspørsmål. Forskningsspørsmålet er det som ligger til grunn for de metodiske valgene som tas, og vil påvirke alle delene av studien (Maxwell, 2008). Forskningsspørsmålet legger altså grunnlaget for de metodiske valgene som tas, og disse valgene vil bli presentert i dette kapittelet. I denne studien er det følgende forskningsspørsmål som gjelder:

> *Hvordan kan læreren i et tenkende klasserom legge til rette for elevenes læring gjennom dialog under arbeid med problemløsningsoppgaver på vertikale tavler?*

3.1 Forskningsdesign

Første fase i et forskningsprosjekt er at man jobber med en problemstilling, og at denne er utgangspunkt for planlegging av forskningsprosjektet (Thagaard, 2018). Det var klart for meg at jeg ønsket å skrive en master som omhandlet problemløsning i matematikkundervisningen. Videre var det en krevende prosess å få utformet en problemstilling som kunne fungere som et godt utgangspunkt. Jeg og to av mine medstudenter hadde kjennskap til en lærer som arbeidet med tenkende klasserom. Tenkende klasserom er noe vi hadde lest om og arbeidet med i et tidligere semester. Det fanget interessen min. Videre så jeg på tidligere forskning, samt relevant teori om tenkende klasserom og problemløsing, for å begrunne studiens hensikt. Jeg ønsket å se på hvordan man som lærer kan legge til rette for elevenes læring i et tenkende klasserom. Det ble etter hvert også formulert et forskningsspørsmål, og jeg fikk et godt utgangspunkt for forskningsprosjektet.

Forskningsdesign handler om hvordan man tenker å utføre prosjektet. Det handler om hva forskningen skal rettes mot, hvem som er aktuelle deltakere, hvor man skal utføre undersøkelsen, og hvordan man skal utføre undersøkelsen (Thagaard, 2018). Dette masterprosjektet skal rette oppmerksomheten mot hvordan en lærer kan legge til rette for elevers læring i et tenkende klasserom. Videre vil aktuelle deltakere være en lærer som praktiserer tenkende klasserom og elevene i denne lærerens klasse. Datainnsamlingen vil bli gjennomført på en skole, i et klasserom. Undersøkelsen skal utføres ved hjelp av videoopptak, lydopptak av lærer, og elev- og lærerintervju.

3.2 Forskningsmetode

Denne studiens omfang og forskningsspørsmålet legger grunnlaget for hvilken metode som blir tatt i bruk. Forskningsspørsmålet er hjertet til forskningsdesignet. Det vil ha innflytelse på alle de andre delene av studien (Maxwell, 2008). Flyvberg (2006) hevder at god samfunnsvitenskap er problemdrevet og ikke metodikkdrevet. Det vil si at man benytter seg av de metodene som for en gitt problematikk, best hjelper til å besvare forskningsspørsmålene som ligger til grunn. Forskningsspørsmålet danner grunnlaget for metoden som blir tatt i bruk, som i denne oppgaven blir kvalitativ metode. I en kvalitativ studie hevder Maxwell (2008) at forskningsspørsmålet ikke bør formuleres i detalj før målene og rammene er avklart, men det bør forbli sensitivt og tilpasses implikasjonene av andre deler av studien. Videre hevder Maxwell (2008) at man må gjøre en betydelig del av forskningen før det er klart hvilke forskningsspørsmål som er fornuftige å prøve å svare på.

Denne studiens forskningsspørsmål (nevnt innledningsvis i dette kapittelet), legger føringer for at det skal brukes en kvalitativ metode. Hensikten med studien er å oppnå en forståelse for hvordan en lærer i et tenkende klasserom kan støtte elevenes læring gjennom dialog med elevene under problemløsende arbeid på whiteboard-tavler. Å bruke kvalitativ studie gir meg muligheten til å fordype meg i, og utføre intensive analyser av de sosiale fenomenene som studeres (Thagaard, 2018). I min masterstudie handler det om hvordan denne læreren i et tenkende klasserom, kan hjelpe å fremme elevers læring under problemløsende arbeid på whiteboard-tavler. Mer spesifikt er dette en case-studie, som vil si at den er rettet mot å studere mye informasjon om få enheter, som i denne studien er én lærer og én klasse på 30 elever. Poenget med case-studien er å få mye informasjon om de enhetene som studien rettes mot (Thagaard, 2018). Ved bruk av case-studie vil det kunne utvikles en forståelse for hvordan læreren fungerer som støtte i et tenkende klasserom, gjennom problemløsningsarbeid på disse tavlene. Bruk av case-studie diskuteres videre i delkap.3.10.

3.3 Utvalg

Kvalitative case-studier kjennetegnes ofte ved at det er et begrenset antall enheter. Når utvalget er relativt lite, er det viktig med strategisk utvelging. Strategisk utvelging handler om at man velger ut personer til forskningen, som har kvalifikasjoner eller egenskaper som er strategiske med tanke på forskningsspørsmålet (Thargaard, 2018). Som tidligere nevnt ønsket jeg å skrive om tenkende klasserom, og jeg og to medstudenter hadde kjennskap til en lærer som arbeidet med dette. Vi sendte inn søknad til NSD (Norsk senter for forskningsdata) (se vedlegg 6 og 7) før vi tok kontakt med denne læreren. Læreren vi tok kontakt med, sa seg villig til å delta i masterprosjektet. Denne læreren har arbeidet med tenkende klasserom siden høsten 2019, og har 11.års erfaring som lærer. Han har 60 studiepoeng i matematikk og en lærerspesialist-utdannelse i matematikk 5.-10.trinn. Denne læreren ble introdusert for tenkende klasserom da han tok lærerspesialiststudiet. For tiden underviser han en klasse på 8.trinn, som vi skal få observere og filme. Det ble gjennomført et pre-intervju med læreren hvor han beskriver klassen sin som en aktiv og sosial gjeng som er interessert i å lære. De har ikke arbeidet med tenkende klasserom før de startet på ungdomsskolen, så det er noe som er relativt nytt for dem. Læreren forteller at når han introduserer tenkende klasserom for en ny klasse, bruker han mye tid i begynnelsen på å fortelle hvordan tavlene skal brukes og hvordan elevene skal samarbeide. Dette er noe han minner elevene på ofte. Han legger også mye fokus på hvilke oppgaver han velger ut, og legger vekt på at det skal være utforskende oppgaver i begynnelsen, som alle kan få til noe på.

Denne læreren har introdusert tenkende klasserom for personalet på skolen og det er noe som støttes opp av ledelsen. Han forteller at noen av de andre lærere har brukt det noen ganger, men er ikke helt sikker på hvor mye det blir brukt, men det er noe som blir praktisert av andre også.

3.4 Datainnsamling

Som nevnt er vi tre studenter som samler inn data sammen. Datamaterialet våres består av: videoopptak og lydopptak av fem undervisningsøkter, pre- og post-intervju av læreren og tre elevintervju. En uke før observasjon av undervisningsøktene besøkte vi skolen for å gjennomføre pre-intervju av læreren, samt bli enige om praktiske arbeidsoppgaver rundt observasjon og videoopptak av undervisningen. Det ble gjennomført observasjon av fem etterfølgende undervisningsøkter over en periode på tre uker. I løpet av disse tre ukene gjennomførte vi også et post-intervju av læreren etter tre undervisningsøkter. I tillegg til dette ble det også gjennomført tre gruppeintervju av utvalgte elever (kap.3.4.4).

3.4.1 Undervisningsøktene

Jeg har laget en tabell over de fem observerte undervisningsøktene for å få en oversikt over datamaterialet. Tabellen presenterer undervisningsøktenes struktur og tidsaspekt, på en kort og oversiktlig måte.

Tabell 2: Oversikt over undervisningsøktene.

Undervisningsøkt	Øktens/timens innhold
1.undervisningsøkt Varighet: 48 min.	***«Ballongoppgave»*** 1. Oppstart (ikke matematisk). 2. Introduksjon av ballongoppgave (uten å gi oppgaven enda). 3. Deler inn i synlig tilfeldige grupper med tre elever på hver gruppe. 4. Viser kort videoklipp (https://www.101qs.com/3933) og gir problemløsningsoppgaven i muntlig form fra midten av klasserommet. (læreren brukte 8 min. på de fire første punktene). 5. Elevene arbeider med problemet i grupper på vertikale ikke-permanente tavler – lærer går rundt og veileder og samtaler med de ulike elevgruppene (30 min.). 6. Plenumsdiskusjon om problemet elevene har arbeidet med (10 min).
2.undervisningsøkt Varighet: 45 min.	***«Tacocart-oppgave»*** 1. Deler elever inn i synlig tilfeldige grupper med tre elever på hver gruppe (3 min.). 2. Viser videoklipp (http://threeacts.mrmeyer.com/tacocart/) og introduserer så problemet muntlig fra midten av klasserommet (6 min.). 3. Elevene arbeider med problemet i grupper på vertikale tavler – læreren går rundt og veileder og samtaler med de ulike elevgruppene (33 min.). 4. Læreren avslutter økten ved å vise videoklippet med fasiten og oppsummerer kort (3 min.).
3.undervisningsøkt Varighet: 48 min.	***«Playing catch up oppgave»*** 1. Oppstart (oppmuntrer elevene til å løse oppgaven på flere måte og samarbeide godt med gruppen). (3 min.). 2. Deler elever inn i synlig tilfeldige grupper på tre. (3 min.). 3. Viser videoklipp (http://threeacts.mrmeyer.com/playingcatchup/.) og presenterer problemet til elevene muntlig fra midten av klasserommet. (4 min.). 4. Elevene arbeider med problemet i grupper på vertikale tavler – læreren går rundt og samtaler med de ulike elevgruppene (34 min.). 5. Avslutter økten mens elevene sitter ved pultene sine. Læreren spør dem om de syns oppgaven var lett eller vanskelig, og viser dem videoklippet med fasiten (4 min.).
4.undervisningsøkt Varighet: 45 min.	***«Skolevei-oppgave»*** 1. Deler elevene inn i synlig tilfeldige grupper på tre. (3 min.) 2. Gir elevene problemet muntlig fra midten av klasserommet (skolevei-oppgave, kap.3.7.2). (6 min.). 3. Elevene arbeider med problemet i grupper på vertikale tavler – læreren går rundt og samtaler med de ulike elevgruppene (28 min.). 4. Plenumsdiskusjon mens elevene står ved tavlene sine (8 min.).

5.undervisningsøkt Varighet: 45 min.	**«Gjennomsnittsfart til skolen oppgave»** 1. Deler elevene inn i synlig tilfeldige grupper på tre (3 min.). 2. Presenterer øktens problem for elevene (3 min.). Problemet går ut på at elevene skal finne ut hvor lang tid de bruker til skolen og hva gjennomsnittsfarten deres er. 3. Elevene arbeider i gruppene på vertikale tavler – læreren går rundt og veileder og samtaler med elevenegruppene (35 min.). 4. Plenumsdiskusjon om problemet elevene har arbeidet med (4 min.).

I tabellen kan man se at det er en del likheter i de fem undervisningsøktene. I alle de fem undervisningsøktene gir læreren elevene et problem de skal arbeide med. Læreren gir elevene problemene muntlig og tidlig i økten. Videre deler læreren elevene inn i synlig tilfeldige grupper på tre elever i alle de fem undervisningsøktene. Gruppestørrelsen på tre elever, som denne læreren bruker, hevder Liljedahl (2021) er den optimale gruppestørrelsen. Han hevder at grupper med to sliter mer enn grupper på tre, og at grupper på fire nesten alltid deles opp i grupper på tre og en eller to og to. Elevene arbeider på vertikale tavler i alle de fem undervisningsøktene. Felles i alle undervisningsøktene er fire av Liljedahl (2021) sine 14 praksiser. Det er de fire av de seks jeg, som tidligere nevnt (kap.2.3), skal ha fokus på i denne studien.

3.4.2 Pre-intervju

Det ble utviklet en intervjuguide (vedlegg 3) før gjennomføringen av pre-intervjuet med læreren. Intervjuguiden er delt inn i fem kategorier:

- Utdanning og erfaring
- Bruk av tenkende klasserom på skolen
- Muligheter og utfordringer med tenkende klasserom
- Elevers bruk av whiteboard-tavler
- Planer og prediksjon av øktene som skal observeres

I intervjuguiden ble det planlagt omtrent hvor lang tid som skulle brukes på hver kategori. Det ble formulert noen hovedspørsmål innenfor hver kategori, i tillegg til noen generelle oppfølgingsspørsmål (vedlegg 3). Pre-intervjuet ble gjennomført en uke før start av observasjon og videoopptak av undervisningsøktene. Det var gunstig å gjennomføre tidlig slik at vi fikk høre litt om lærerens tanker rundt tenkende klasserom, og om planene for undervisningsøktene som skulle filmes. I tillegg var det nyttig å besøke skolen før resterende datainnsamling for å bli kjent med skolen og avtale praktiske arbeidsoppgaver knyttet til datainnsamlingen. Sammen med læreren diskuterte vi plassering av kameraet og hvor vi eventuelt skulle plassere elevene som ikke ønsket å være med på videoopptak.

3.4.3 Post intervju

Etter å ha observert tre undervisningsøkter, gjennomførte vi et post-intervju av læreren, hvor disse tre øktene fungerte som utgangspunkt for intervjuet. Vi utviklet en intervjuguide (vedlegg 4). Noen av spørsmålene i intervjuguiden var spørsmål som kunne svares på litt generelt, men vi hadde i bakhodet at vi skulle spørre om eksempler fra disse tre øktene, og at det skulle handle om det vi hadde observert. I tillegg tok vi med et utdrag fra transkripsjon av den første undervisningsøkten (se tabell 11 for dette utdraget – kap.4.2.2), og spurte litt om lærerens refleksjoner rundt dette. Vi tok med dette utdraget for det er et godt eksempel på hvordan det at læreren får elevene til å fortelle hva de har gjort, fører til at elevene begynner å tenke over sin egen prosess og reviderer tenkningen.

3.4.4 Elevintervju

Det ble gjennomført tre gruppeintervju. To av elevintervjuene bestod av to elever og ett bestod av tre elever. Elevene ble tilfeldig valgt ut fra de elevene som hadde sagt seg villig til å intervjues. Læreren sa at alle var flinke til å snakke for seg i denne klassen, og at vi kunne få god data uansett hvem som ble intervjuet. Vi intervjuet grupper med elever, noe som førte til at de kunne støtte opp om hverandre. Det ble gjennomført ett elevintervju etter tredje økt, ett intervju etter fjerde økt og ett intervju etter femte økt. Elevene som ble valgt, hadde arbeidet på samme gruppe økten før intervjuet. Elevintervjuene hadde en varighet på rundt 10 minutter.

3.5 Lærerens organisering av tenkende klasserom

Pultene i klasserommet var plassert sammen to og to på rekker. Pultene var også plassert på denne måten under tenkende klasserom øktene. Det at pultene var plassert slik, førte til at flere av elevene satt på pultene eller stolene som befant seg ved deres tavle. På to av veggene i klasserommet var det skrudd fast fem plexiglass-tavler. I undervisningsøktene med tenkende klasserom ble det i tillegg til fire av plexiglass-tavlene, tatt i bruk to vinduer, og tavlen fremme i klasserommet. Læreren gav oppgaven til elevene fra midten av klasserommet i muntlig form. Oppgaven ble gitt etter elevene var delt inn i grupper. Læreren tok i bruk et dataprogram som delte elevene inn i tilfeldige grupper på tre. Inndelingen av grupper ble gjennomført i begynnelsen av undervisningsøkten, når elevene var til stede. Hver gruppe tok med seg én tusj og én visk som lå fremme i klasserommet, i tillegg til én datamaskin. Datamaskinen ble brukt som hjelpemiddel under alle de fem tenkende klasseromøktene. Øktene varte i cirka 45 minutter og det ble enten liten eller ingen tid til helklassediskusjon på slutten av økten. I post-intervjuet sa læreren at elevene ofte var veldig engasjerte i oppgaven, og han ønsket å fokusere på denne utforskningsfasen som de gjorde i gruppene. Samtidig fortalte læreren at det var ønskelig å få til mer helklassediskusjon etter hvert.

3.6 Intervju og observasjon

Ved bruk av kvalitative tilnærminger hevder Thagaard (2018) at man oppnår forståelse av sosiale fenomener. Videre understreker hun at intervju og observasjon er metoder som gir grunnlag for en forståelse av sosiale fenomener. Det er disse metodene som blir brukt i denne studien. Hvor det blir tatt i bruk lærerintervju, både pre og post, og videoopptak og lydopptak av læreren i klasserommet.

3.6.1 Intervju

Thagaard (2018) mener at formålet med intervju er å få kunnskap om hvordan andre mennesker opplever sin situasjon, og hvilke perspektiver og synspunkter de har om intervjuets tema. I min studie ønsket jeg å høre lærerens perspektiver og synspunkter om hans arbeid med tenkende klasserom. Jeg ønsket å la læreren fortelle om sine opplevelser og hans tanker rundt tenkende klasserom, før vi observerte hvordan dette foregikk i klasserommet. I etterkant av tre undervisningsøkter gjennomførte vi et post-intervju av læreren, slik at han kunne fortelle om hvordan han opplevde timene og noen refleksjoner rundt disse øktene. Intervjuene gir et godt grunnlag for innsikt i lærerens følelser, erfaringer, tanker og refleksjoner (Thagaard, 2018), om tenkende klasserom.

Intervjuene som vi gjennomførte, var delvis strukturerte. Vi hadde utviklet intervjuguide på forhånd (Vedlegg 3 og 4), men var fortsatt åpne for å utdype andre ting læreren kom med underveis, som ikke var planlagt. Intervjuet hadde en fleksibel struktur, som gjør at vi både kan tilpasse spørsmålene til de beskrivelsene intervjupersonen kommer med, og inkludere spørsmål om temaer som ikke var planlagt på forhånd. Det vil si at intervjuene er en samtale mellom intervjuperson og forsker som styres både av de temaene som intervjupersonen tar opp, og de temaene vi ønsker å få kunnskap om (Thagaard, 2018).

Dawson (2009) mener at når man utvikler intervjuguide er det viktig å begynne med generelle spørsmål som er enkle å svare på, og som vil hjelpe intervjupersonen til å føle seg komfortabel.

Han mener at man ikke skal forvente de mer dyptgående spørsmålene med en gang. Vi begynte derfor pre-intervjuet med kategorien «Utdanning og erfaring» som skulle være forholdsvis enkle spørsmål for intervjupersonen å svare på, før vi beveget oss videre inn mot tenkende klasserom (vedlegg 3).

For å gjennomføre et vellykket intervju, mener Thagaard (2018) at det er viktig å sette seg godt inn i intervjupersonens situasjon. Videre mener Thagaard at man må ha god kunnskap om intervjuets kontekst, for å kunne stille spørsmål som oppleves som relevante for intervjupersonen. Vi hadde allerede kunnskap om tenkende klasserom fra tidligere semester, som var det vi skulle intervjue læreren om. I tillegg visste vi hvilket trinn denne læreren underviste på, og at læreren hadde et par økter med tenkende klasserom i uken, hvor hver økt var på 45-60 minutter. At denne læreren har arbeidet med tenkende siden høsten 2019 med andre klasser, var også gitt informasjon. Dette var noe som var til hjelp når vi skulle utforme spørsmål til intervjuguide (vedlegg 3 og 4).

Thagaard (2018) hevder at det er viktig å stille spørsmål som oppmuntrer personen som intervjues til å gi utfyllende og konkrete svar, for å sikre at intervjuet får en god kvalitet. Videre mener Thagaard at hovedspørsmålene i intervjuet, er rettet mot at personen som intervjues presenterer synspunkter og erfaringer i de temaene prosjektet omhandler. Dette var noe vi tenkte på når vi utviklet en intervjuguide, og vi sorterte pre-intervjuet (vedlegg 3) i fem hovedkategorier, som var temaene intervjuet skulle handle om. I tillegg til hovedspørsmålene, som var fordelt i fem kategorier, utviklet vi noen generelle oppfølgingsspørsmål (vedlegg 3). Oppfølgingsspørsmål er noe som kan kompensere for at intervjupersoner kan uttrykke seg forskjellig. Noen snakker mer konkret, mens andre kan snakke i mer generelle vendinger. For å kunne få mer konkrete svar av intervjupersonen, kan vi stille oppfølgingsspørsmål for å invitere intervjupersonen til å utdype sine reaksjoner og følelser. Vi bruker også oppfølgingsspørsmål for å kunne få mer konkrete beskrivelser av erfaringer og hendelser. Slike konkrete beskrivelser bidrar til at vi får bedre inntrykk av intervjupersonens erfaringer (Thagaard, 2018).

Lydopptaker ble tatt i bruk under gjennomføring av intervjuene. Thagaard (2018) hevder at lydopptak er det som gir mest fyldig informasjon om dialogen i et intervju. Ved å ta i bruk lydopptak kan man registrere hvordan intervjupersonen engasjerer seg, nøler med å svare, eller når intervjupersonen tar pauser (Thagaard, 2018). Bruk av lydopptaker førte til at vi kunne konsentrere oss om intervjuets dynamikk og emne. Vi var godt forberedt til intervjuet og når intervjuet foregikk, lyttet vi oppmerksomt, og viste interesse og respekt for det intervjupersonen fortalte om (Kvale & Brinkmann, 2015).

3.6.2 Observasjon

Det ble tatt i bruk observasjon av hva som faktisk skjer i klasserommet, for å få et innblikk i hvordan læreren og elevene forholder seg til hverandre (Thagaard, 2018). Thagaard (2018) hevder at observasjon er godt egnet for å studere samhandling, fordi det gjør det mulig å rette oppmerksomheten mot hvordan personer i sosiale situasjoner forholder seg til hverandre. I datainnsamlingen til denne studien, ble det valgt å samle inn data ved bruk av observasjon uten deltakelse. Vi har valgt å ta videoopptak av fem undervisningsøkter, i tillegg til at læreren har fått festet en mikrofon til genseren, som tar lydopptak. *«Når vi observerer uten å delta i miljøet, studerer vi samhandling ved å iaktta hva personene gjør, og hvordan de forholder seg til hverandre.»* (Thagaard, 2018, s.63). Observasjon uten deltakelse ble valgt fordi vi mente at dersom vi hadde deltatt, kunne dette ha bidratt til at relasjonene vi skulle studere, hadde endret seg vesentlig. Det er viktig at vi prøver å gjøre oss lite bemerket, for å påvirke undersøkelsessituasjonen så lite som mulig (Thagaard, 2018). Læreren vi skulle observere, hadde informert klassen om at det kom studenter som skulle filme undervisningen. I den første undervisningsøkten vi observerte, sa læreren til elevene:

> *Da ser dere det har kommet to inn i klasserommet og det er bare de som holder på å ... Dere skal liksom tenke at de ikke er her på en måte. Det er liksom litt sånn uvanlig, men dere er jo så hyggelige, flotte elever som bryr dere, men de kan dere bare tenke er usynlig.*

Vi prøvde å gjøre oss så lite bemerket som mulig, og hadde med notatblokk, i tillegg til videoopptak og lydopptak. Vi begynte med å ta tilfeldige notater, litt for å skrive ned ting som kunne være interessant og for å se opptatt ut for elevene. Dette var for å tydeliggjøre for elevene at vi ikke var her som hjelpelærere, men som observatører. Sammen med læreren ble det fastsatt at det skulle være to studenter til stede i klasserommet hver økt. Grunnen til dette var at det ble litt mye med tre studenter i klasserommet, og da hadde vi gjort oss enda mer bemerket. Det var også grunnet litt trangt klasserom på rundt 30 elever, og dermed gunstig å bare være to observatører om gangen.

3.7 Valg av problem

I analysen ble det valgt å dykke nærmere inn i to av undervisningsøktene. Grunnen til at disse to undervisningsøktene ble valgt, var at de inneholdt en avsluttende plenumsdiskusjon på rundt ti minutter, samt fikk frem mye samtale i elevgruppene. Dette var ønskelig å få med i analysen. De tre andre undervisningsøktene fikk også frem samtaler i elevgruppene, men her ble det mye fokus på elevenes utforskningsfase, og dermed enten lite eller ingen tid til plenumsdiskusjon på slutten. I min studie ønsker jeg å se på hvordan læreren legger til rette for elevenes læring, fra introduksjon av problemet, til elevers arbeid på tavler, til en avsluttende plenumsdiskusjon. Dermed ble første og fjerde økt valgt ut til å dykke nærmere inn i. De to problemene som ble arbeidet med i disse to timene, vil derfor bli beskrevet. Jeg kommer til å presentere selve oppgaven, vise til hva læreren hadde planlagt å fokusere på, og hvilke mål han hadde for timen.

3.7.1 Problem A – «Ballongoppgaven»

Denne oppgaven ble gitt til elevene i den første undervisningsøkten:

Et kort videoklipp på syv sekunder (https://www.101qs.com/3933) viser en hund som skal sprekke hundre ballonger. Klippet viser at hunden klarer å sprekke 25 ballonger etter fem sekunder. Problemet elevene skal løse er hvor lang tid hunden kommer til å bruke på å sprekke alle de hundre ballongene.

Læreren hadde også et ark med utvidelser til problemet som ble delt ut til elevene (tabell 3).

Tabell 3: Utvidelser til «Ballongoppgaven»

1.	Ut ifra den tiden dere mener hunden bruker på å sprekke 100 ballonger. Hvor mange ballonger sprekker hunden per. sekund hvis dere regner ut gjennomsnittet?
2.	Hvordan vil grafen se ut hvis den stiger med hundens gjennomsnittsfart for å sprekke ballonger helt til 100? Tegn opp grafen
3.	Lag to punkter i GeoGebra med utgangspunkt i hundens gjennomsnittsfart, som dere strekker en linje mellom i GeoGebra – se youtube filmen for tips hvis dere står fast.
4.	Klarer dere lage et funksjonsuttrykk for hundens gjennomsnittsfart for å sprekke 1 ballong til 100?
5.	Hvor lang tid vil ett menneske bruke på samme oppgave, med en tegnestift?
6.	Hvor langt forsprang i antall ballonger må menneske ha for å klare å sprekke 100 ballonger på samme tid, mener dere (ta utgangspunkt i den tiden dere mener ett menneske vil bruke?

I lærerens notater hadde han skrevet at han skulle ha fokus på å:

- Utfordre grupper underveis til å finne flere representasjoner, spesielt tabell og graf (bruk av GeoGebra) - mulig utvidelse (se tabell 3).
- Deltakelse fra tre eller fire av gruppene i fellessamtalen.
- Å få fram ulike representasjoner og begrunnelser for disse i fellessamtalen – la andre gjenta hvordan noen har tenkt.

Målene for timen var:

1. Utforske, forklare og sammenligne funksjoner knyttet til praktiske situasjoner.
2. Vise evne til å samarbeide med andre for å løse virkelige problem.
3. Representere funksjoner på ulike måter og kunne samtale om sammenhenger mellom representasjonene.

Problemet presentert her, vil videre bli diskutert i kap.4.2.1.

3.7.2 Problem B – «Skolevei-oppgaven»

Denne oppgaven ble gitt til elevene i den fjerde undervisningsøkten:

Per sykler fra huset sitt mandag morgen klokken 08:00. Lisa går fra huset sitt på samme tidspunkt. Hvem kommer først til skolen?

Videre har læreren planlagt å spørre elevene hvilken informasjon de trenger, og han har skrevet hvilken informasjon han skal gi dem i planleggingsdokumentet sitt. Han skal gi dem følgende informasjon:

- Per har avstand på 6,9 km og en gjennomsnittsfart på 20km/t.
- Lisa har en avstand på 1,4 km og en gjennomsnittsfart på 4km/t.

Læreren har skrevet i sitt planleggingsdokument at utvidelse av denne oppgaven, er å utfordre elevene til å finne svaret på fire forskjellige måter. Lærer hadde skrevet i sine notater at når elevene arbeidet med dette problemet, skulle han ha fokus på:

- Veilede elevene til å jobbe med de ulike representasjonene, og få fram styrken i graf og funksjonsuttrykk som representasjon i denne oppgaven.
- Utfordre elevene til å skissere grafene på tavlen hvor elevene sier hva som skal stå på x- og y-aksen og hvordan de kan se når de kommer til skolen.
- Oppmuntre elevene til å få fram grafen i GeoGebra.

Læreren hadde også skrevet ned i planleggingsdokumentet sitt at han i plenumsdiskusjonen ønsket å ha fokus på:

- Argumenter og begrunnelser for påstandene deres. Sammenlign ulike løsningsstrategier: Få fram tre ulike svar: Regning eller tabell, graf og funksjonsuttrykk med og uten GeoGebra.

Målene for denne økten var de tre samme som for forrige problem (kap.2.7.1), pluss et nytt mål som var:

- Kunne bruke GeoGebra på en slik måte at man klarer å gi mening til praktiske oppgaver ved hjelp av grafer og enkle funksjonsuttrykk.

«Skolevei-oppgaven» vil videre bli diskutert i kap.4.3.1.

3.8 Analytisk tilnærming til empirisk materiale

Det analytiske rammeverket som jeg har valgt å ta i bruk er presentert i kapittel 2.6. For å analysere lærerens handlinger, var det naturlig å observere flere økter (til sammen fem økter). Det er da fem undervisningsøkter hvor læreren tar i bruk tenkende klasserom. Det er et klasserom som av den grunn består av at elevene arbeider med problemer, og det er et klasserom med mye dialog. Mye av dialogen finner sted når elevene arbeider i grupper på vertikale tavler, og lærer-elev dialog finner da sted når læreren går rundt og veileder gruppene i deres problemløsningsprosess. I tillegg blir problemet gitt fra læreren i muntlig form, og det har i to av undervisningsøktene oppstått en plenumsdiskusjon de siste ti minuttene av undervisningsøkten. Det var også en plenumsdiskusjon i slutten av en annen undervisningsøkt, men denne var mye kortere (fire minutter). I de andre to undervisningsøktene ble det prioritert å arbeide mer med problemet på gruppene, og læreren hadde en kort avslutning på rundt tre minutter, hvor han gjerne oppsummerte litt raskt og viste svaret på problemet.

I resultatkapittelet (kap.4) har jeg valgt å ta ut utdrag fra transkripsjonene fra første og fjerde undervisningsøkt (se kap.3.7 for begrunnelse), som tydeliggjør de ulike lærerhandlingene som kommer frem i datamaterialet. Det er brukt fiktive navn på elevene i utdragene som er tatt ut. Fiktive navn er brukt for å anonymisere elevene, samt gjøre gjennomlesning mer naturlig for leseren. Det er hentet frem utdrag fra introduksjon av problemet, fra elever elevers arbeid på vertikale tavler, og fra plenumsdiskusjon. Disse utdragene har ulik lengde, men får frem de ønskelige lærerhandlingene. Utdragene vil fungere som utgangspunkt for diskusjon rundt hvordan læreren legger til rette for elevenes læring.

3.8.1 Lærerhandlinger

Koding av Drageset (2014, 2015, 2019) sine 17 kategorier av lærerhandlinger blir presentert i tabellen nedenfor (Tabell 3). Jeg har valgt å ta i bruk samme koder som Tokheim (2021) brukte til «omdirigeringshandlinger» og «fokuseringshandlinger» i hennes masteroppgave, men har valgt å kode «fremdriftshandlinger» (Progressing actions) til P1, P2, P3 og P4. Det finnes en mer utfyllende forklaring av hver handling i kapittel 2.6.1.

Tabell 4: Koding av Lærerhandlinger

		Kode	Eksempel
Omdirigeringshandlinger (Redirecting)	Legge elevforslaget til side	O1	Eks 1: Nei, bare bruk det, 325. Eks 2: Ikke i sanden.
	Foreslå ny strategi	O2	Eks 1: Nei vi bruker en variabel akkurat som i programmering så bytter vi ut. Eks 2: Nei, men hvis du ser på den forskjellen på der det står M og der det står H da.
	Korrigere spørsmål	O3	Ja, men er dere helt sikre på at han bruker 20 sekunder?
Fremdriftshandlinger (Progressing)	Demonstrere	P1	Nei, men da kan jeg vise deg hvis du har oppe GeoGebra. Så skal jeg vise dere. Hvis dere tenker slik som jentene her, med 5 ballonger per sekund. Det vil si at etter ett sekund så er det fem ballonger, sprukket. Da har du ett punkt. Da har du ett punkt du kan plotte inn. Hvis det er ett sekund her.
	Forenkle	P2	Slik ja. Og da har du en prikk der. Hvordan vil det være etter 10 da? Og så tenk litt på det at han blir jo litt sliten også.
	Lukkede fremdriftsdetaljer	P3	Hun gikk fire kilometer i timen. Hvor langt har hun gått etter én time?
	Initiere til åpne spørsmål	P4	Eks 1: Jeg lurer på hvem som kommer først i mål? Ja, har du ett forslag? Eks 2: Ja. Hvordan tenker dere her?

Fokuseringshandlinger (Focusing) (Etterspørre elevbidrag)	Oppklare detaljer	F1	Eks 1: Dere har ... Hvordan fant dere ut det? Hvor mange ballonger han sprekker per sekund? Eks 2: Ehh ... Per bruker. Jeg er litt spent på hvordan dere fant frem til akkurat 20,7 minutt?
	Begrunne svaret	F2	Flott, veldig bra. Ja, Dan er raskest, og hvorfor det?
	Anvende	F3	Kan vi bruke noe tilsvarende her? Som i den sandoppgaven?
(Fremheve viktige ideer)	Vurdere	F4	Er dere enig, eller uenig med dem? Er dere enig eller uenig med den gruppen der?
	Poengtere	F5	Ja flott, kjempebra. Kjempe lurt. Dere vet jo noe der. Ikke sant? Etter 5 sekunder så er det 25 ballonger.
(Tilrettelegging av diskusjon)	Oppsummere	F6	Ja husk at her har du ballonger, her har du antall ballonger som er sprukket, etter 10 sekunder. Hvis han klarer like fort, så har han jo. Så har han 50 ballonger på 10 sekunder. Og da vil han komme i mål, som dere. Ja sant. Du har skrevet opp 21,9. Legger på litt sekunder.
	Elev får ordet	F7	Dere har tegnet opp en graf der, hvis alle ser på den tavlen der. Hvis dere ser på den tavlen der. Sivert (fiktivt navn) kan du fortelle om den grafen der?
	Etterspørre elevspørsmål	F8	Nei, men da må vi jobbe med det, og spør spørsmål som man lurer på. Hva lurer dere på?
	Etterspørre alternative metoder	F9	Det blir det. Flott, dere er veldig bra på vei. Og så vil jeg utfordre dere, prøv nå til å finne løsning med graf og tabell. Det klarer der og, for nå har dere et veldig godt utgangspunkt.
	Veiledning av deltakelse og normer	F10	Eks 1: Det er å samarbeide med de som er på gruppen din. Samarbeide godt. Det er det som er læringsmålet. Også finne litt ulike måter å løse det på. Med ulike måter. Ikke bare en løsning, men flere måter å løse det på

Når læreren går rundt og samtaler med elevgruppene under arbeid på vertikale tavler, har jeg valgt å ikke ta i bruk koden F7 (Elev får ordet). Grunnen til dette er at jeg ikke sikkert kan vite om læreren har tenkt gjennom hvem han velger å gi ordet, og når han besøker grupper, virker det ofte tilfeldig hvem han gir ordet. Når det kommer til plenumsdiskusjonene, har jeg valgt å kode alle utsagnene hvor læreren gir ordet til en bestemt elev eller gruppe. Grunnen til dette er at læreren sier i post-intervjuet at han tenker gjennom hvem han velger å gi ordet under plenumsdiskusjoner.

I datamaterialet hender det ofte at læreren gir eleven en form for bekreftelse før det blir tatt i bruk en av Drageset (2014, 2015, 2019) sine lærerhandlinger. Når en bekreftelse kommer før en av Drageset sine lærerhandlinger, blir dette kodet som en av disse handlingene. Det hender også at læreren bare gir elevene en form for bekreftelse slik som for eksempel: «Ja», «Flott», «Nå er dere godt i gang», og «Det er et godt utgangspunkt», uten å ta i bruk en av Drageset sine lærerhandlinger. Slike ytringer fra læreren har jeg valgt å kode som *bekreftelse* (B).

3.9 Forskningsetiske vurderinger

Denne masteroppgaven faller inn under personopplysningsloven fra 2018, fordi den behandler personopplysninger. Dette betyr at det er plikt om å melde inn prosjektet. Dette er et masterprosjekt som gjennomføres ved universitetet og må derfor meldes inn til NSD (Thagaard, 2018). Som tidligere nevnt ble søknad til NSD sendt inn før vi kontaktet læreren (kap.3.3), og godkjent før datainnsamlingen startet (vedlegg 6). Det ble sendt ut et informasjonsskriv til deltakerne (vedlegg 1 og 2). Informasjonsskrivet inneholdt: formålet med forskningen, hvem som får tilgang til datamaterialet, hvordan vi har tenkt å bruke resultatene, og hva det innebærer for dem å delta i forskningsprosjektet. På grunnlag av dette informasjonsskrivet kunne deltakerne vurdere om de ønsket å delta på forskningsprosjektet (Thagaard, 2018). Det ble sendt ut et informasjonsskriv til læreren, og et annet til foresatte av elevene vi ønsket å ha med i forskningsprosjektet. Informasjonsskrivene inneholdt mye av det samme, men var tilpasset mottakerne. De inneholdt også et samtykkeskjema som deltakerne måtte skrive under på dersom de ønsket å delta i forskningsprosjektet. Deltakerne måtte samtykke til om de ønsket å bli filmet og/eller bli intervjuet. Noen elever ønsket verken å bli intervjuet eller filmet, og noen ønsket å bli intervjuet, men ikke filmet. De elevene som ikke ønsket å bli filmet ble plassert på to grupper bak kameraet, slik at de ikke var synlig på videoopptakene.

Vi var tre studenter som samlet inn data sammen, og transkriberte dette. Det var da viktig at vi brukte samme skriveprosedyre, slik at det ikke blir vanskelig å gjøre språklige sammenligninger av det transkriberte datamaterialet (Kvale & Brinkmann, 2015). Vi ble enige om å transkribere tilnærmet bokmål. Det å transkribere tilnærmet bokmål, er også med å anonymisere deltakerne. I transkripsjonen har vi ikke oppgitt deltakernes navn eller steder i nærmiljøet. Det er med andre ord utelatt ting som kan knyttes til deltakerne. Datamaterialet, som kan identifisere deltakerne, er lagret på en forsvarlig måte (Thagaard, 2018). Video-opptakene og lydopptakene er lagret trygt på en kryptert minnepinne. Opptakene skal også slettes når de ikke lenger er i bruk (Kvale & Brinkmann, 2015), dette vil bli gjort 31.06.2023.

3.10 Metodiske vurderinger

Som tidligere nevnt er dette en case-studie (kap.3.2). Fordelen med å bare studere én lærer og klassen hans, er at jeg virkelig kan sette meg inn i, og få mye informasjon om hvordan denne ene læreren og klassen arbeider med tenkende klasserom. Det er noe som gir meg mulighet til å virkelig gå i dybden på enkelte personers opplevelse og arbeid med tenkende klasserom. En ulempe vil være at jeg ikke får mulighet til å finne ut hvordan flere lærere og klasser arbeider med tenkende klasserom, og dermed ikke mulighet for å forstå hvor utbredt det er.

Hovedstyrken til case-studier er at man får mulighet til å gå i dybden, mens det for statistiske metoder er muligheten til å se det i bredden. Dersom man ønsker å forstå et fenomen i noen grad av grundighet, må man gjennomføre en case-studie. Videre hevder Flyvberg (2006) at en rent beskrivende fenomenologisk casestudie kan være med å støtte vitenskapelig innovasjon. Han mener at case-studier kan være med å bidra til vitenskapelig utvikling, og kan støtte opp under andre studier på feltet.

> *... it is worth repeating the insight of Kuhn (1987): that a discipline without a large number of thoroughly executed case studies is a discipline without systematic production of exemplars, and that a discipline without exemplars is an ineffective one. In social science, a greater number of good case studies could help remedy this situation*. (Flyvberg, 2006, s.242).

Denne studien baserer seg både på intervjuer, samt videoopptak og lydopptak av undervisning i klasserommet. Intervjuer med læreren gir mulighet til innblikk i lærerens opplevelse og tanker rundt tenkende klasserom, og hvordan han legger til rette for elevenes læring. Lydopptak av læreren i undervisningen gir meg mulighet til å få innblikk i hvordan læreren forholder seg til elevene, og eksempler på hvordan læreren legger til rette for elevenes læring gjennom dialog. I et tenkende klasserom viste det seg vanskelig å ta i bruk videoopptak. Videokameraet ble plassert bakerst i klasserommet i begynnelsen og så rettet det fokus mot en elevgruppe. Det var mye støy i klasserommet, og flere elevgrupper var engasjerte i problemene og snakket samtidig. På bakgrunn av dette var det vanskelig å høre hva som ble sagt og dermed ikke gunstig å transkribere videoopptakene. I min studie var det nyttig at læreren hadde en mikrofon festet til genseren for lydopptak. Ved hjelp av lydopptak fikk vi mulighet til å høre hva som ble sagt av læreren, samtidig som det var mulighet for å høre dialogene som foregikk mellom læreren og de ulike elevgruppene.

Det kan stilles spørsmål om hvor mye vår tilstedeværelse og bruk av videoopptak påvirket de personene som skulle studeres. Thagaard (2018) hevder at hensikten i studier hvor vi observerer uten å delta, er at relasjonene mellom deltakerne som studeres ikke skal påvirkes av at det er forskere til stede. Videre mener hun at det er viktig å vurdere om personene som studeres, påvirkes av at de blir studert. Når vi observerte og filmet undervisningen, merket vi i begynnelsen at flere av elevene så mye på kameraet. Det at vi filmet og var til stede i undervisningen, kan påvirke deltakerne til å bli mer bevisst over deres egen posisjonering, og gjerne viser frem sider de antar at vi ønsker å se. Deltakerne kan holde tilbake tanker og løsninger som de er usikre på, og bli distrahert av at det er et kamera til stede (Thagaard, 2018). Selv om dette er ting som kan spille inn, virket det ikke som deltakerne ble særlig påvirket av dette når de fikk komme i gang med øktens problemløsningsoppgave. Dette stemmer godt overens med det som Thagaard (2018) hevder: «*I situasjoner hvor handlingene vi observerer, krever spesielt mye oppmerksomhet fra deltakerne, er det grunn til å tro at forskerens nærvær har liten innvirkning på interaksjonen*.» (Thagaard, 2018, s.82).

Som tidligere nevnt er det benyttet delvis strukturert intervju. Selv om intervjuet hadde en fleksibel struktur, hvor vi var åpne for å inkludere temaer som ikke var planlagt på forhånd, vil det bestå av et asymmetrisk maktforhold. Intervjuet er ikke en dagligdags samtale mellom likestilte parter. Den som intervjuer har kompetanse om emnet. Intervjueren bestemmer hvilke spørsmål som stilles og hvilke svar som følges opp, og når samtalen skal avsluttes. Som forsker har jeg mulighet til å fortolke utsagnene til personen som intervjues, og rapportere hva personen virkelig mente (Kvale & Brinkmann, 2015). Selv om jeg som forsker kan fortolke det som intervjupersonen kommer med, vil bruk av lydopptak være med å sikre at det som blir sagt i intervjuet kommer med, og dermed vil det være lite feilkilder i forhold til det som blir fortalt. Som tidligere nevnt hevder Thagaard (2018) at lydopptak gir fyldig informasjon om dialogen i et intervju, og mulighet til å registrere hvordan intervjupersonen tar pauser, engasjerer seg eller nøler med å svare.

Mitt faglige perspektiv vil påvirke analysen og mine tolkninger av dataene. Analysen vil ta utgangspunkt i deltakerne sin forståelse av deres situasjon. Tolkningen og presentasjonen av resultatene vil imidlertid representere min tolkning av deltakernes forståelse (Thagaard, 2018, s.147).

4 Resultat

I dette kapittelet skal jeg trekke frem resultatene fra analysen. Jeg presenterer først en oversikt over lærerhandlingene som er funnet under analysen og ser på hvilke lærerhandlinger som forekommer oftest. For å svare på forskningsspørsmålet mitt, har jeg valgt å dukke enda dypere ned i to av undervisningsøktene (kap.3.7). Jeg har valgt å se på øktene fra lærerens introduksjon av problemet, til elevenes arbeid på vertikale tavler, til plenumsdiskusjon. Pre- og post-intervju av læreren vil også bli brukt for å kunne synliggjøre lærerens tilrettelegging av elevenes læring, og for å støtte opp under funnene fra undervisningsøktene.

4.1 Oversikt over lærerhandlinger

Jeg har valgt å analysere transkripsjonene fra alle de fem observerte undervisningsøktene for å se hvilke lærerhandlinger fra Drageset (2014, 2015, 2019) sitt rammeverk som blir tatt i bruk. Videre har jeg valgt å dele det opp i tre deler: (1) lærerens introduksjon av problemene, (2) elevers arbeid på vertikale tavler, og (3) plenumsdiskusjon. Plenumsdiskusjon fant som tidligere nevnt bare sted i tre av de fem undervisningsøktene, hvor to av disse varte i rundt ti minutter og en av dem varte i cirka fire minutter.

4.1.1 Lærerens introduksjon av problemene

Av de 17 kodene til Drageset (2014, 2015, 2019) ble kun 8 brukt når læreren introduserte elevene for de ulike problemene. Siden bare 8 av de 17 kodene oppstod, valgte jeg å kun ta med de som ble brukt i tabellen. Det vil si at resten av kodene som ikke er med i tabellen, ikke er identifisert i datamaterialet (se tabell 5).

Det som forekommer hyppigst av lærerhandlinger i de fem introduksjonene er å *initiere til åpne spørsmål* (P4), noe som gjerne er naturlig i en kontekst med tenkende klasserom hvor læreren gir elever problemer som de skal arbeide med. Elevene blir gitt problemer hvor de selv kan velge løsningsmetode. Videre er også *poengtere* (F5) noe som ofte blir bruk, og da gjerne for at læreren skal tydeliggjøre viktige poeng for elevene (Drageset, 2014, 2015, 2019) om problemet de skal løse. *Veiledning av deltakelse og normer* (F10) blir også noe brukt av læreren i introduksjon av problemene (se tabell 5).

Tabell 5: Lærerhandlinger under introduksjon av problemene

Kode	Antall – (prosent)	Kode	Antall – (prosent)
O2 (Foreslå ny strategi)	1 – (3,6%)	F5 (Poengtere)	8 – (28,6%)
P2 (Forenkle)	2 – (7,1%)	F6 (Oppsummere)	1 – (3,6%)
P3 (Lukkede fremdriftsdetaljer)	1 – (3,6%)	F8 (Etterspørre elevspørsmål)	2 – (7,1%)
P4 (Initiere til åpne spørsmål)	9 – (32,1%)	F10 (Veiledning av deltakelse og normer)	4 – (14,3%)

I pre-intervjuet forteller læreren at han bruker mye tid på å finne en oppgave (et problem) til elevene som alle kan få til litt på, samtidig som den kan være krevende slik at elevene kan få utfordringer. Dette forteller læreren når intervjuer spør om hva han legger vekt på i planlegging av tenkende klasserom øktene:

Lærer: Når jeg planlegger så er jeg veldig på jakt etter helst en oppgave, som jeg vet kan ha mange svar, som alle får til litt på, men som kan være krevende sånn at de aller beste i klassen får utfordringer. Så jeg har spesielt en elev som er veldig flink, men jeg ser at han får utfordringer i hver time på grunn av det. Så du må ha det, er det ... bruker veldig mye tid på å finne den rette oppgaven da. Så da bruker jeg all slags mulig ressurser. Både digitalt, ting fra kurs, det kan være lærebøker ifra det jeg har studert matematikk, som jeg forandrer litt på kanskje oppgaven. Det kan være lærebøker for elevene med oppgaver som jeg forandrer litt på. Det som jeg merker fungerer best, er hvis vi har en oppgave som vi bruker litt tid på. [...]

Læreren legger til rette for elevenes læring ved å bruke god tid på å finne passende oppgaver som kan gi dem utfordringer. Disse oppgavene er ulike problemer som læreren presenterer til elevene i introduksjonen. Læreren legger til rette for elevenes læring ved å bruke mye tid på å finne problemer, og finner kognitivt krevende oppgaver til elevene (se diskusjon av to av problemene kap.4.2.1 og kap.4.3.1). Liljedahl (2021) mener at når elevene jobber med problemløsning så vil de lære – om matematikk, seg selv, og hvordan tenke.

4.1.2 Elevenes arbeid på vertikale tavler

Under elevers arbeid på tavler, går læreren rundt og samtaler med de ulike elevgruppene. Tabellen nedenfor (tabell 6) viser hvor ofte læreren tok i bruk de ulike lærerhandlingene under elevers arbeid på tavlene.

Tabell 6: Lærerhandlinger under elevers arbeid på vertikale tavler

Kode	Antall – (prosent)	Kode	Antall – (prosent)
O1 (Legge elevforslaget til side)	9 – (1,4%)	F3 (Anvende)	8 – (1,2%)
O2 (Foreslå ny strategi)	19 – (2,9%)	F4 (Vurdere)	0 – (0%)
O3 (Korrigere spørsmål)	27 – (4,1%)	F5 (Poengtere)	102 – (15,6%)
P1 (Demonstrere)	8 – (1,2%)	F6 (Oppsummere)	14 – (2,1%)
P2 (Forenkle)	116 – (18%)	F7 (Elev får ordet)	-
P3 (Lukkede fremdriftsdetaljer)	196 – (30%)	F8 (Etterspørre elevspørsmål)	2 – (0,3%)
P4 (Initiere til åpne spørsmål)	47 – (7,2%)	F9 (Etterspørre alternative metoder)	0 – (0%)
F1 (Oppklare detaljer)	36 – (5,5 %)	F10 (Veiledning av deltakelse og normer)	2 – (0,3%)
F2 (Begrunne svaret)	14 – (2,1%)	B (Bekreftelse) (egen kode) (kap.3.8.1.1)	53 – (8,2%)

De lærerhandlinene som oppstår oftest når læreren går rundt og samtaler med elevgruppene i deres arbeid med problemet, er *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3), *forenkle* (P2) og *poengtere* (F5). Fremdriftshandlinger (de fire handlingene som er kodet med P) er de som forekommer oftest når elevene arbeider med problemet på de vertikale tavlene (56,4%). Videre blir også fokuseringshandlinger (de ti handlingene som er kodet med F) brukt en del ganger (27,1%), mens omdirigeringshandlinger (de tre handlingene som er kodet med O) blir sjelden brukt (8,4%).

Elevene samarbeider i grupper på tre under arbeid med problemer på vertikale tavler. Læreren sier i pre-intervjuet litt om muligheter ved å arbeide på denne måten i et tenkende klasserom:

Lærer: Det gir veldig mye muligheter til samtaler, kommunikasjon mellom elevene, men og mellom elev-lærer, men og en felles samtale. Du får det opp på veggen istedenfor ned på ei bok eller i en mac, så det blir jo mer synlig da. Så den muligheten det skaper, gjør da at du kan få til en samtale, for du ser litt hva de andre har svart, og det gir oversikt for lærer over hvor elevene er sånn kognitivt i forhold til det den oppgaven som er blitt gitt. [...] Så du kan praktisere som en samarbeidskultur blir veldig synlig, og da så det og er jo en mulighet som skapes. Hvis du ser det litt i videre syn enn bare matematikk faglig, så er det det å kunne høre på hverandres forslag, lytte, ta imot kritikk sånn som er det litt sånn overordna blikk da, så er det viktige ting å bli trent på i en digital kultur som omgir oss med, så mener jeg at det er en mulighet som skapes der for nettopp det å si at ja men her skal man ha samarbeidskultur, og det er dere som gruppe som skal finne fram til det. Som mer enn et individ da. [...]

Læreren trekker her frem dette med at arbeid med tenkende klasserom gir mye muligheter til matematiske samtaler, og praktisere en samarbeidskultur i klassen. Dette med matematiske samtaler er noe Kazemi og Hintz (2014) hevder er viktig for å hjelpe elevene til å streve med matematiske ideer og skape en følelse av fellesskap hos elevene. Det at læreren jobber med at elevene skal samarbeide godt sammen, er noe som kan legge til rette for elevenes læring. Pijls et al. (2007) hevder at individer i samarbeidssituasjoner ikke bare drar fordel fra samarbeid med andre, men også fra å dele egne ideer, forklare tenkning deres og rettferdiggjør deres løsninger.

Læreren sier i post-intervjuet at elevene må få erfare matematikk selv, sette ord på det, og reflektere seg frem til det gjennom samtaler. Han sier det slik i intervjuet:

Lærer: [...] jeg tenker at de må få erfare det selv og sette ord på det, og reflektere seg frem til det gjennom samtaler. [...]

Læreren legger her til rette for elevenes læring gjennom å legge opp til at elevene selv skal få erfare matematiske poeng, sette ord på dette, og reflektere seg frem til begrunnelser og forklaringer gjennom samtaler. Lampert (1990) hevder at for å gjøre elever eiere av «knowing» (kunnskap) må de få mulighet til å forklare og rettferdiggjør egen tenkning, samt utfordre andre elever sine forklaringer.

4.1.3 Plenumsdiskusjon

Plenumsdiskusjon oppstod ikke i to av de fem undervisningsøktene, her var det bare læreren som tok en kort oppsummering og gjerne viste svaret på problemet. I de tre andre undervisningsøktene varte to av plenumsdiskusjonene rundt 10 minutter, og den andre på rundt 4 minutter. Det er første, fjerde, og femte undervisningsøkt som inneholdt en plenumsdiskusjon og dermed er analysert og tatt med i tabellen under.

Tabell 7: Lærerhandlinger under plenumsdiskusjon

Kode	Antall – (prosent)	Kode	Antall – (prosent)
O1 (Legge elevforslaget til side)	0 – (0%)	F3 (Anvende)	0 – (0%)
O2 (Foreslå ny strategi)	1 – (1,4%)	F4 (Vurdere)	2 – (2,8%)
O3 (Korrigere spørsmål)	2 – (2,8%)	F5 (Poengtere)	17 – (23,9%)
P1 (Demonstrere)	0 – (0%)	F6 (Oppsummere)	4 – (5,7%)
P2 (Forenkle)	1 – (1,4%)	F7 (Elev får ordet)	7 – (9,9%)
P3 (Lukkede fremdriftsdetaljer)	15 – (21,1%)	F8 (Etterspørre elevspørsmål)	0 – (0%)
P4 (Initiere til åpne spørsmål)	0 – (0%)	F9 (Etterspørre alternative metoder)	0 – (0%)
F1 (Oppklare detaljer)	10 – (14,1%)	F10 (Veiledning av deltakelse og normer)	3 – (4,2%)
F2 (Begrunne svaret)	6 – (8,5%)	B (Bekreftelse) (egen kode) (kap.3.8.1.1)	3 – (4,2%)

I plenumsdiskusjonene er det fokuseringshandlinger som forekommer oftest (69%), og det er da *poengtere* (F5), *oppklare detaljer* (F1), *elev får ordet* (F7) og *begrunne svaret* (F2) som blir mest brukt innenfor denne kategorien. Videre blir også fremdriftshandlingen *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) mye brukt.

Som sagt var det ikke plenumsdiskusjon i alle de fem undervisningsøktene, og dette var dermed noe læreren ble spurt om i post-intervjuet:

Lærer: Ja. Det som har skjedd med denne klassen er ofte at vi har blitt så involvert i det som skjer i utforskningsdelen. Når de prøver ut. At jeg i liten grad har fått tid til fellessamtalen hvor de kan bygge videre og resonnere seg frem til hva som kanskje er den beste representasjonen her i dette tilfellet. Hva gir mest mening? Som er idealet. Som det jeg egentlig ønsker. Ehm så, men jeg har sett viktigheten av å ha en god utforskningsdel også, for jeg ser at det skjer så mye bra på gruppene. Og nå har de nettopp begynt å forstå et viktig poeng på gruppen. Endelig. Og da er det litt vanskelig å dra det inn i den fellessamtalen selv om du har begrenset tid. Så veldig mye av den, det har skjedd i gruppene. Men det å bygge videre på ting, er jo noe som er et veldig viktig poeng som er ønskelig å gjøre i større grad i fellessamtalen.

Læreren har et fokus på at elevene får prøve seg mye i utforskningsfasen, og denne klassen har ikke arbeidet med tenkende klasserom lenge. Han trekker frem i intervjuet at han ønsker å få til en helklassesamtale etter hvert hvor elevene får bygge videre på hverandres ideer og resonnere seg frem til hva som er den beste representasjonen i dette tilfellet. Dette er noe som er viktig for å utvikle dyp forståelse hos elevene. Carpenter et al. (2003) hevder at dersom elevene skal utvikle slik dyp forståelse, må de lære seg å begrunne og uttrykke egne matematiske ideer, gi begrunnelse for svarene og resonnere seg gjennom egne og andres matematiske forklaringer.

Når intervjueren spør læreren om han tenker gjennom hvem han plukker ut til å dele i plenumsdiskusjoner, svarer han:

Lærer: [...] Det jeg helst ønsker er at jeg går rundt å observere og så ser jeg at den tavlen vil jeg vise, den og den, og de vil jeg at de andre skal. Ideelt. Idealet er at noen andre forteller hvordan de kan ha tenkt, når de ser på tavlen. Det har jeg av og til fått til, men andre ganger så forteller de heller selv. Men tanken er at jeg har en bevissthet omkring, eh hva matematiske innhold de forskjellige tavlene har. Men ofte kan jeg bare bygge det opp rundt ett matematisk poeng, som jeg må få frem i den fellessamtalen. Jeg har en bevisst. Jeg har et ideal om å gå rundt å observere og finne helst tre tavler som skal få dele, og at det er forskjellige personer. Slik at alle skal få sagt noe i fellesskap.

For å legge til rette for elevenes læring ved bruk av dialog, vil det, slik som Stein et al. (2008) hevder, være viktig at læreren hensiktsmessig velger ut hvilke ideer som skal løftes frem for å ha kontroll over hvilket matematisk innhold som sannsynligvis vil komme frem i diskusjonen

– for å kunne nå det matematiske målet satt for timen. Læreren forteller i utdraget over at han har en bevissthet omkring det matematiske innholdet de ulike gruppene har, og ofte bygger plenumsdiskusjonen opp rundt ett matematisk poeng som han må få frem til elevene.

4.2 Arbeid med «ballongoppgaven»

Arbeid med ballongoppgaven var en introduksjon til emnet funksjoner. Det var den første undervisningsøkten av de fem observerte undervisningsøktene. Elevene hadde ikke arbeidet med dette emnet tidligere på 8.trinn. Problemet «ballongoppgaven» er grundig beskrevet i kap.3.7.1. Liljedahl (2021) mener at når elever arbeider med problemer, vil de sitte fast, tenke, og komme seg løs. Når de gjør dette, mener han at de vil lære om både matematikk, seg selv, og hvordan tenke. Andre trekker også frem dette med problemløsning som en viktig del av det å lære matematikk (Lesh & Zawojewski, 2007; Liljedahl & Cai, 2021; Liljedahl et al., 2016; Schoenfeld, 1992).

4.2.1 Lærerens introduksjon av problemet

Læreren begynner med å introdusere problemet til elevene ved å fortelle at han oppdaget en konkurranse i forrige uke som han aldri hadde sett før. Videre forteller læreren at han vet at elevene liker å konkurrere og spille spill, og at konkurransen som læreren har funnet, er en seriøs konkurranse hvor folk virkelig prøver å gjøre sitt beste. Han forteller videre hva konkurransen handler om, og læreren sier: «*Det er hundre ballonger og konkurransen er så enkel. Du slipper ut en hund og han skal prøve å puffe, altså sprekke, mest mulig ballonger på kortest tid. Og det finnes det altså seriøse konkurranser i. Og det skal vi prøve å gjøre noe matematisk utav*.» Videre forteller læreren hva elevene skal ha fokus på:

Tabell 8: Utdrag fra transkripsjon (introduksjon – demonstrere bruk av F10)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	[...] Det er å samarbeide med de som er på gruppen din. Samarbeide godt. Det er det som er læringsmålet. Også finne litt ulike måter å løse det på. Med ulike måter. Ikke bare en løsning, men flere måter å løse det på. (F10) [...]	F10 - Veiledning av deltakelse og normer	Læreren legger her føring for hvordan han ønsker at elevene skal arbeide på gruppene.

Videre forteller læreren at de snart skal se et videoklipp av verdens raskeste hund til å sprekke hundre ballonger. Før de ser videoklippet deler læreren elevene inn i synlig tilfeldige grupper på tre, og forteller dem at GeoGebra kan tas i bruk som hjelpemiddel. Når elevene har plassert seg ved tavlene sine forteller læreren at de må følge godt med, for videoklippet som han skal vise, varer bare i syv sekunder. Læreren viser videoklippet og gir så oppgaven til elevene:

Tabell 9: Utdrag fra transkripsjon (introduksjon – demonstrere bruk av F10 og P4)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	Han gjorde det veldig fort! Det som er utfordringen til dere som lag. Nå er dere lag som skal samarbeide. Jeg vil ha gode argument, begrunnelse, ulike måter å vise det på. (F10) Hvor lang tid kommer hunden til å klare det på? (P4) Hvor lang tid mener dere han kommer til å klare det på? (P4)	F10 – Veiledning av deltakelse og normer P4 – Initiere til åpne spørsmål	Læreren legger føring for hvordan han ønsker elevene skal delta. Læreren stiller et åpent spørsmål til elevene hvor de selv kan velge hvordan de ønsker å gå frem for å løse det.

I denne introduksjonen til øktens problem, ser vi at læreren tar i bruk *veiledning av deltakelse og normer* (F10), og *initiere til åpne spørsmål* (P4). Læreren arbeider med tenkende klasserom og det kan derfor være naturlig at introduksjonen til problemet inneholder *initiere til åpne spørsmål* (P4), fordi elevene får presentert et problem som de skal løse uten at læreren forteller hvordan de skal løse det.

Det å gi «tenkende oppgaver» (problemer) tidlig, stående og verbalt er en av de 14 undervisningspraksisene til Liljedahl (2021) (se kap.2.3.2). Dette er noe Liljedahl (2016, 2021) mener er viktig å gjøre, og dette blir gjort når læreren introduserer problemet ovenfor (tabell 9). Læreren står i midten av klasserommet og elevene står i grupper rundt, ved tavlene sine.

«Ballongoppgaven» er en oppgave som stiller høye kognitive krav til elevene. Jeg vil si at det er en oppgave som er på det nivået som Stein et al., (2000) kaller for «*å gjøre matematikk*», som vil si at elevene blir spurt om å utforske forholdet mellom ulike måter å representere en oppgave på, og bruke deres forståelse om ulike temaer på nye måter (kap.2.2.2). Stein et al., (2000) mener at slike oppgaver som stiller høye kognitive krav, ofte vil føre til at elevene jobber med få problemer i løpet av en økt, noe som blir gjort i de observerte øktene av tenkende klasserom. «Ballongoppgaven» gir elevene mulighet til å løse det på sin måte ved å bruke den forståelsen og kunnskapen de har med seg fra tidligere. I tillegg har læreren fokus på å oppfordre elevene til å løse den på flere måter, og ta i bruk ulike representasjoner.

«Ballongoppgaven» er en oppgave hvor elevene skal bevege seg fra representasjonen som Janvier (1978) kaller for «situasjon» (oversatt av Gjone, 1997) (kap.2.4). Det vil si at elevene får en problemsituasjon som er representasjonen de starter med. Transformasjonsprosessen (Adu-Gyamfi et al., 2012) vil her starte med «situasjon», og ende opp i en av de andre tre representasjonene som Janvier (1978) har identifisert. Læreren har i planleggingsdokumentet sitt (se kap.3.7.1), skrevet at han ønsker å ha ekstra fokus på å få elevene til å ende opp med «graf» og «tabell». Dermed ønsker læreren at elevene skal arbeide med transformasjonene fra situasjon til graf, og fra situasjon til tabell. I tillegg til at «ballongoppgaven» er en kognitivt krevende oppgave, er den også en LIST-oppgave (Wæge & Nosrati, 2018). Den kan løses på forskjellige måter og har en lav inngangsterskel, noe som fører til at alle elevene har mulighet til å begynne på oppgaven (Wæge & Nosrati, 2018). «Ballongoppgaven» gir elevene mulighet til å arbeide med utfordrende matematikk hvor de kan finne egne løsningsstrategier. Læreren legge her til rette for elevenes læring ved at han lar elevene arbeide med kognitivt krevende oppgaver. Dette er noe Wæge og Nosrati (2018) mener kan bidra til økt matematisk forståelse hos elevene.

4.2.2 Elevenes arbeid på vertikale tavler

Ut fra min analyse er det fremdriftshandlinger som blir mest brukt når elevene arbeider i grupper på de vertikale tavlene (56,4%) (kap.4.1.2). Det er fremdriftshandlingene *forenkle* (P2) og *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) som blir brukt oftest. Fremdriftshandlingen *initiere til åpne spørsmål* (P4) blir brukt i noe mindre grad. Fokuseringshandlinger blir også brukt en del under elevers arbeid på vertikale tavler (27,1%). *Poengtere* (F5) blir brukt oftest av fokuseringshandlingene (kap.4.1.2).

4.2.2.1 «I hvert fall 30 sekunder.»

Nedenfor er det et eksempel hvor læreren tar i bruk tre av fremdriftshandlingene (P2, P3, og P4), og den mest brukte fokuseringshandlingen *poengtere* (F5). Læreren går bort til en elevgruppe og hører hvordan det går med dem. Elevene forteller de så på videoklippet at hunden sprakk tolv ballonger etter 1 sekund, og at det gikk mye senere etterpå fordi hunden ble sliten. Videre fortsetter samtalen slik:

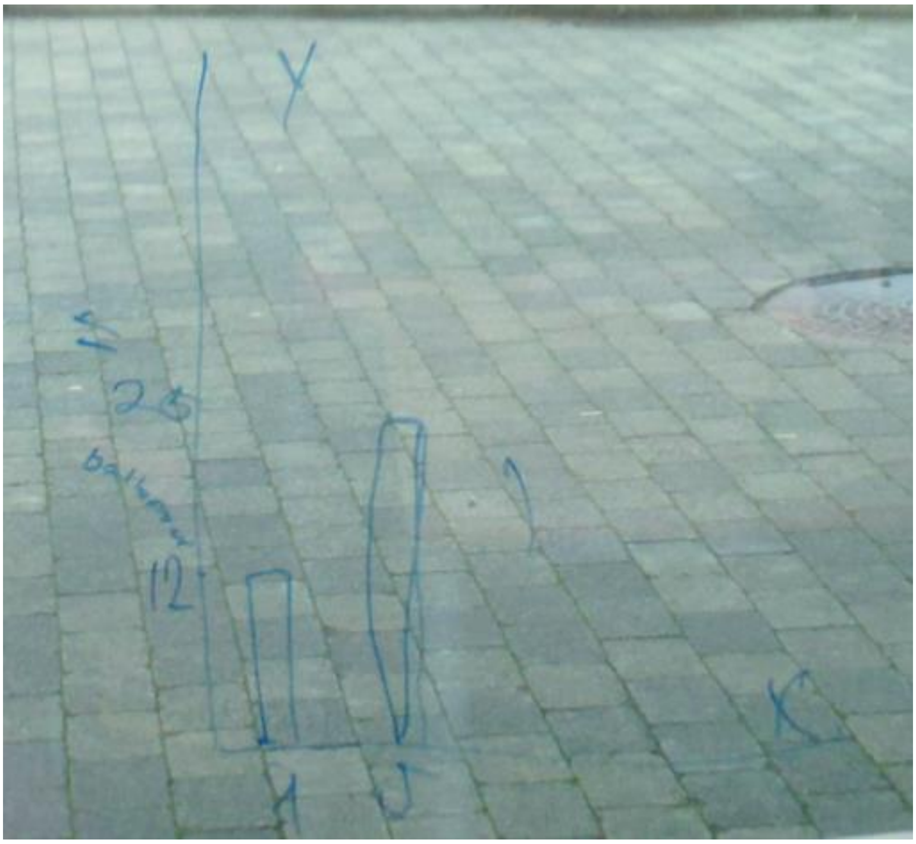
Tabell 10: Utdrag fra transkripsjon (arbeid på grupper – demonstrere bruk av P2, P3, P4, og F5)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	Han ble sliten ja. Så hvor mange sekunder tror dere det tar? (P3)	P3 – Lukkede fremdriftsdetaljer	Læreren ber om avklarende detaljer om svaret.
Elias	I hvert fall 30.		
Lærer	Ja. 30? Hvis dere begynner med det da. At liksom slik sånn dere tenker. (P2)	P2 – Forenkle	Læreren begynner å fortelle litt om hvordan elevene kan gjøre, og blir så avbrutt.
Nils	Utgangspunkt?		
Lærer	Utgangspunktet vet dere jo noe. Dere vet det. Ja 25, så det ville jeg satt opp da, ja etter 5 sekunder så må den være på 25 ballonger. (P2)	P2 – Forenkle	Læreren forteller elevene hvordan de kan begynne, og leder dem mot en løsning.
Nils	Med x og y og sånn da?		
Lærer	Etter 5 sekunder her så er den på 25 ballonger. (F5)	F5 – Poengtere	Læreren tydeliggjør viktig poeng for elevene.
Elias	Ja sånn ja.		
Nils	Da sier vi at x er ballong og y er sekunder.		
Elias	5, 10, 15.		
Lærer	Og så, hvordan ser den grafen ut hvis dere tegner den opp? (P4) Ja flott, kjempebra. Kjempe lurt. Dere vet jo noe der. Ikke sant? Etter 5 sekunder så er det 25 ballonger. (F5)	P4 – Initiere til åpne spørsmål F5 – Poengtere	Læreren spør et spørsmål uten å fortelle dem hvordan gjøre dette. Læreren tydeliggjør viktig poeng for elevene.

Eksempelet overfor viser fire av de mest brukte lærerhandlingene, under elevers arbeid på tavlene, som er *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3), *forenkle* (P2), *poengtere* (F5), og *initiere til åpne spørsmål* (P4).

I utdraget overfor (tabell 10) bruker læreren *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) for å avklare hvor lang tid gruppen mener hunden bruker på å sprekke 100 ballonger. Videre *forenkler* (P2) læreren ved å si at han ville satt opp at hunden sprekker 25 ballonger etter 5 sekunder. Læreren bruker også *poengtere* (F5) for å få frem viktig informasjon som er blitt gitt i introduksjon av problemet. Læreren stiller også et spørsmål om hvordan grafen ser ut dersom de tegner den opp, uten å fortelle elevene hvordan gjøre dette (P4).

Så hvordan legger læreren her til rette for elevenes læring med sine utsagn? Læreren viser i utdraget et punkt og hvor det skal være mellom aksene, men han forteller ikke hvordan elevene skal tegne opp hele grafen. Han forteller heller ikke elevene om 30 sekunder er riktig, men spør om hva elevene mener. Læreren reduserer kompleksiteten til oppgaven ved å legge til informasjon og gi hint. Lester et al. (1989) mener det er viktig at elevene får hint for å hjelpe dem over blokkeringer, for dersom utfordringen blir for stor, er det fare for at elevene blir frustrerte (Liljedahl, 2016). Wæge og Nosrati (2018) hevder at det er viktig at læreren ikke omformer den kognitivt krevende oppgaven (gitt til elevene) til noe mindre krevende, men gir dem faglig støtte samtidig som han har høye forventninger til dem. Det virker som læreren i utdraget ovenfor (tabell 10) fortsatt har høye forventninger til elevgruppen, men gir dem hint og legger til informasjon for å hjelpe dem videre i prosessen. Jeg vil si læreren gir den typen hint som Liljedahl (2021) kaller for «hint som øker evnen» (se kap.2.3.3), ved at læreren ikke gir elevene en løsning, men minner dem om informasjon fra oppgaven. Læreren gir elevene en strategi de kan bruke ved å vise til første punktet på grafen (som er gitt i oppgaven).



Figur 3: Elevgruppen fra tabell 10 sin vertikale tavle

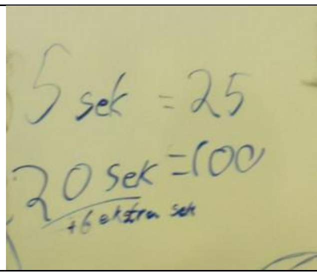
Elevene i denne gruppen hadde tegnet opp x- og y-aksen, men i utdraget ovenfor (tabell 10) hadde de ikke tegnet inn søylene som vises på bildet (Figur 3). Elevene på gruppen har fått med seg en viktig detalj om at hunden etter 1 sekund hadde sprukket 12 ballonger. Videre visste de at etter 5 sekunder hadde hunden sprukket 25 ballonger. Det virker som elevene her sliter med transformasjonen fra situasjon til graf (se kap.2.4). Superfine et al. (2009) ser ikke på transformasjon som en alt eller ingenting operasjon, men de antar at den kan være fraværende, delvis eller fullstendig. Det virker her som elevene på denne gruppen har gjort en delvis transformasjon. Transformasjonen de skal gjennomføre er fra situasjon til graf, og de har funnet noen punkter fra situasjonen som de kan bruke for å tegne en graf. Det virker som elevene her ikke er helt trygge på hvordan tegne en graf som fremstiller den gitte situasjonen, for de har begynt å tegne opp søyler istedenfor en funksjonsgraf.

4.2.2.2 «... så blir det rundt 26 sekunder.»

Ifølge min analyse blir fokuseringshandlingen *oppsummere* (F6) ikke så ofte brukt (2,1%), men fokuseringshandlingen *poengtere* (F5) blir tatt i bruk en god del (15,6%). Fremdriftshandlingen *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) er det som oftest blir brukt av læreren under elevers arbeid på tavlene (30%), og *initiere til åpne spørsmål* blir også brukt en del (7,2%). Nedenfor er et eksempel på når disse fire lærerhandlingene blir tatt i bruk av læreren. Det er midt i økten, og læreren har vært innom denne gruppen tidligere og lurer på om de har kommet videre (se tabell 11).

Læreren starter samtalen ved å spørre om elevene kan fortelle hvordan de tenker (P4). Videre oppsummerer (F6) han ved å gjenta det eleven har svart, og spør om de kan regne ut hvor mange ballonger hunden sprekker per sekund (P3), og poengterer (F5) at dette er den første utfordringen på arket som er delt ut (utvidelser til problemet se kap.3.7.1 – tabell 3). Læreren slutter samtalen ved å tydeliggjøre et viktig poeng, om at hunden bruker lengre tid, ved å endre litt på det utsagnet eleven har sagt (se tabell 11).

Tabell 11: Utdrag fra transkripsjon (arbeid på grupper – demonstrere bruk av P3, P4, F5 og F6)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	Skal vi se, kommer dere videre Leon? og ... Føler dere dere ferdig? Kan dere fortelle litt hvordan dere tenker til meg? (P4)	P4 – Initiere til åpne spørsmål	Læreren spør om elevene kan fortelle hvordan de tenker.
Leon	Ja vi tenker slik som dette. Dette er ballonger. Vi tenker ehm ... hvis han hadde fulgt samme tempo hele tiden så hadde han jo gjort det på 20 sekunder.		
Lærer	Ja stemmer. (B)	B – Bekreftelse	
Leon	Men ... hvis han må snu, og litt sånn bak, så blir det rundt 26 sekund. (Se bilde av elevenes vertikale tavle i kommentar-kolonnen →)		
Lærer	Da blir det rundt 26 sekunder, mener dere. (F6) Da lurer jeg på, hvis dere mener det tar 26 sekund? Hvor mange ballonger klarer hunden å sprekke? Hvis dere regner ut det per sekund. Altså hvor mange ballonger sprekker han per sekund? (P3).	F6 – Oppsummere P3 – Lukkede fremdriftsdetaljer	Læreren oppsummerer med å gjenta elevens svar. Læreren spør om et spørsmål med ett ønskelig svar som er enkelt å finne.
Leon	Jaa ...		
Lærer	Klarer dere det? Det er første oppgaven her. (F5)	F5 – Poengtere	Læreren poengterer at det er første oppgaven på arket de har fått med utvidelser (kap.3.7.1 – tabell 3).
Leon	100 delt på 26!		
Abel	Det kan jo hende at han springer forbi noen som han ikke klarer å ødelegge helt.		
Lærer	Ja! (B)	B – Bekreftelse	
Abel	Så han bruker kanskje litt tid på å springe.		
Lærer	Så det tar kanskje enda litt lengre tid. (F5)	F5 – Poengtere	Læreren tydeliggjør viktig poeng ved å endre litt på utsagnet.
Leon	Ja!		

Så hva er det læreren gjør i dette utdraget som kan være med å legge til rette for elevenes læring? Det første læreren gjør, er å spørre om elevene kan forklare hvordan de tenker (P4). Lampert

(1990) trekker frem dette med at for å bli eiere av «knowing» (kunnskap), må elevene engasjeres i å forklare og rettferdiggjøre egen tenkning. Læreren spør her om elevene kan forklare, men får dem ikke til å forklare eller rettferdiggjøre hvorfor de mener akkurat 26 sekunder. Dette er noe læreren nevner i post-intervjuet når han blir spurt om sine tanker rundt dette utdraget (tabell 11):

Lærer: [...] Det som jeg hadde som ønske var jo å drive de litt videre i tenkningen, men der kunne jeg godt gitt elevene litt sånn rom også på hvorfor de mente det var 26? ehh ... men først så foreslår de jo 20 da, så det kommer et elevinnspill der på at han må snu. Så det er jo veldig bra da. De korrigerer og endrer litt tenkningen. Sammen.

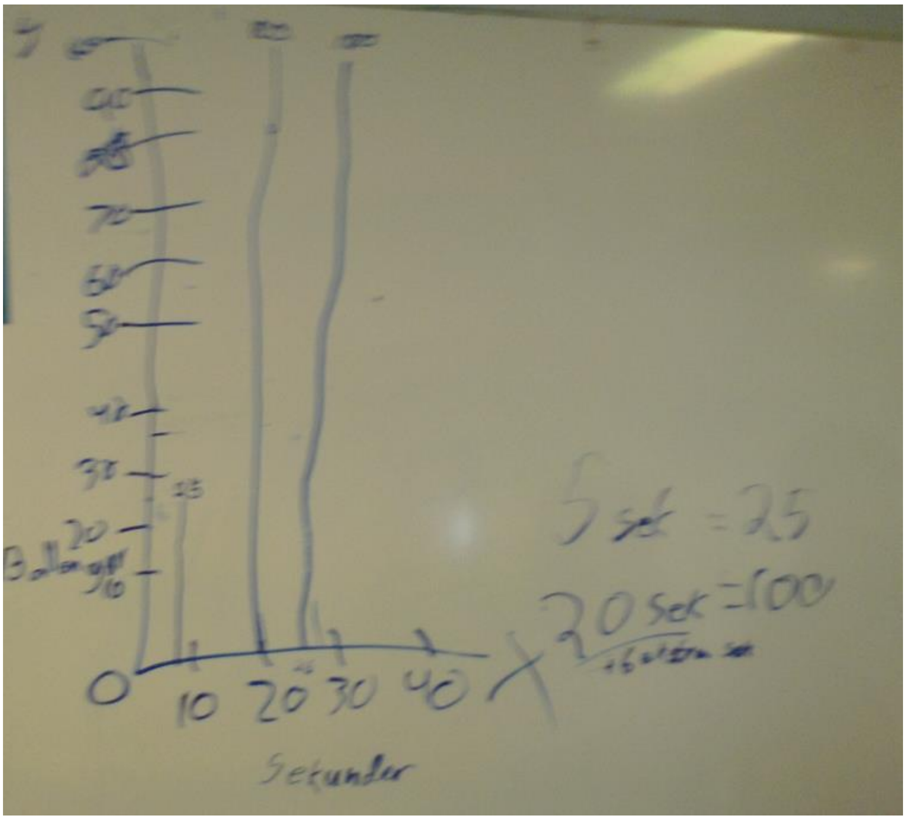
Det trekkes frem at elevene endrer tenkningen sammen. Det at elever får muligheter å revidere tenkningen sin, er noe Lampert (1990) trekker frem som viktig. Læreren sier også her at han godt kunne ha spurt elevene om hvorfor de mente det ble 26 sekunder, altså be elevene om å *begrunne svaret* (F2). For at elever skal utvikle en dyp forståelse, mener Carpenter et al. (2003) at det er viktig at de begrunner svar og uttrykker egne matematiske ideer.

Læreren viser også til utvidelser av problemet (tabell 3 – kap.3.7.1). Han gir elevene utvidelser fordi elevene har funnet et svar på hvor lang tid de mener hunden bruker. Liljedahl (2021) mener at man som lærer må øke utfordringen når elevenes evne øker for å holde dem i «flow» (se kap.2.3.3). Dette gjør man ved å gi elevene utvidelser.

Det at læreren bruker handlingen *poengtere* (F5) er også noe som kan legge til rette for elevenes læring. Drageset (2014) mener at det kan gi støtte og hjelp til elevenes i arbeid med å utvikle problemløsning- og resonneringskompetanse. Videre sier læreren følgende i post-intervjuet, når han blir spurt om taker rundt utdraget (tabell 11):

Lærer: [...] Ehm, men jeg hadde jo også et mål der om at de skulle komme med ... et anslag over en tid, og hvis det er 26, som utgangspunkt, så kunne de godt ha funnet ut hvor mange ballonger han sprekker per sekund. Slik at de ser for seg. For jeg vil ha de litt videre til å tenke på denne forskjellen mellom en lineær graf og den grafen som de egentlig ser for seg. Det var jo egentlig det som var min intensjon.

Læreren legger til rette for elevenes læring ved å ha et mål for økten og en intensjon om hva læreren ønsker å trekke frem i undervisningen. Stein et al. (2008) mener det er viktig at læreren har kontroll over hvilket matematisk innhold som sannsynligvis vil komme frem, for å nå målet som er satt for timen. Elevene må selv finne ut hvor lang tid de mener hunden kommer til å bruke på å sprekke ballongene, noe som kan være krevende. Wæge og Nosrati (2018) mener at når elever får arbeide med slike problemløsningsoppgaver, vil det bidra til økt matematisk forståelse hos elevene.



Figur 4: Elevgruppen fra tabell 11 sin vertikale tavle

Etter at elevgruppen i utdraget ovenfor (tabell 11) hadde snakket med læreren, fortsatte de med problemet og satte inn punktene til grafen. Denne gruppen hadde forrige gruppe (tabell 10) som nabotavle, og vi ser også her at elevene har valgt å tegne opp søyler. Hvilket matematisk innhold kan vi se på denne gruppens vertikale tavle? De har satt opp en x-akse med sekunder og y-akse med ballonger, så de har forstått hva som skal være på de forskjellige aksene. De har videre ikke tegnet opp en funksjonsgraf. Det virker også her som at elevene har utført det som Superfine et al. (2009) kaller for delvis transformasjon. Elevene har plottet inn et par punkter til grafen, men ikke tegnet opp den grafen som fremstiller situasjonen. De har to punkter til 100 ballonger, et punkt etter 20 sekunder og et punkt etter 26 sekunder (se figur 4). Dette er fordi elevene har skiftet mening, men fortsatt ikke visket ut den gamle x-verdien til 100 ballonger. Dette er noe som ikke vil være en funksjon fordi «*... til hver verdi av x svarer én og bare én verdi av y ...*» (Bjørnstad et al., 2016, 324).

Som tidligere nevnt er dette den første økten med tenkende klasserom hvor elever arbeider med emnet funksjoner. De har dermed sjelden brukt transformasjonen (fra situasjon til graf), og dette er noe som kan øke vanskelighetsnivået på transformasjonen (Bossé et al., 2011). Jeg vil si at transformasjonen fra situasjon til graf kan være det som Bossé et al. (2011) kaller for en global transformasjon. Grunnen til dette er at transformasjonen (situasjon – graf) krever at eleven klarer å forstå situasjonen, og hente ut relevant informasjon for å lage en skisse (graf) av situasjonen. En global transformasjon er mer kognitivt krevende enn en lokal transformasjon (Bossé et al., 2011 – se kap.2.4.1).

4.2.3 Plenumsdiskusjon

Etter elevene har arbeidet med problemet på de vertikale tavlene i cirka 30 minutter samler læreren elevene til en felles samtale. Elevgruppene står ved sine tavler under plenumsdiskusjonen.

4.2.3.1 «Hvorfor ikke det Jens?»

Ut fra min analyse er det fokuseringshandlinger som forekommer oftest i plenumsdiskusjonene (kap.4.1.3). Fremdriftshandlingen *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) er en handling som blir brukt en del i plenumsdiskusjonene (21,1%). Eksempelet nedenfor viser en samtale i begynnelsen av plenumsdiskusjonen, og det blir tatt i bruk flere fokuseringshandlinger (F2, F5, F7, F10), samt fremdriftshandlingen *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3).

Læreren starter med å fortelle elevene at de skal ha en liten prat om denne oppgaven og selvfølgelig også få se svaret. Han forteller videre at elevene har jobbet utrolig godt med oppgaven, og sier han ser at flere har skrevet på tavlen at hunden har sprukket hundre ballonger etter 20 sekunder. Enkelte elevgrupper sier at de ikke har 20 sekunder som svar, og samtalen fortsetter videre i tabell 12.

I utdraget nedenfor (tabell 12) starter læreren med å spørre om en elev kan begrunne (F2+F7) gruppens svar. Videre poengterer (F5) læreren det eleven sa for å tydeliggjøre for de andre, og ber så eleven om å begrunne (F2) videre. Det er flere elever som snakker og læreren forteller derfor hvordan de skal oppføre seg under en diskusjon (F10). Her bruker læreren først flere fokuseringshandlinger, og så på slutten bruker han *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) for å få avklart elevgruppens svar om hvor lang tid hunden brukte på å sprekke hundre ballonger.

Tabell 12: Utdrag fra transkripsjon (plenumsdiskusjon – demonstrere bruk av P3, F2, F5, F7 og F10)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	Okey da lurer jeg på hvorfor ikke det Elias? (F2) + (F7)	F2 – Begrunne svaret F7 – Elev får ordet	Handlingene overlapper hverandre. Læreren spør en elev om å begrunne gruppens svar.
Elias	Vi fant ut at etter 1 sekund så sprakk han 12 ballonger.		
Lærer	Etter 12 sekunder, det så dere på filmen (F5), og så? (F2)	F5 – Poengtere F2 – Begrunne svaret	Læreren poengterer først for å gjøre det tydeligere for de andre elevene, og spør så om de kan begrunne videre.
Elias	Men så gikk han ned.		
	(Summing i klasserommet, flere elever som snakker).		
Lærer	Ja hør hør hør, nå er det viktig at vi snakker en, og så lytter vi andre. Hvem vil snakke? (F10)	F10 – Veiledning av deltakelse og normer	Læreren forteller hvordan elevene skal oppføre seg under diskusjon.
Elias	ja. Den sprakk 12 ballonger etter ett sekund, og så etter 5 sekunder så sprakk han 25. Og hadde han hatt samme fart som han hadde når han sprakk 12 ballonger så hadde han klart hvert fall sånn 24 på 2 sekunder. Ehm ... og så hva var det du? Jojo så da går han jo ned i farten.	(Se bilde av elevenes vertikale tavle i kommentar-kolonnen → se kap.4.2.2 – figur 3 for diskusjon av denne gruppens tavle)	
Lærer	Ja. (B)	B – Bekreftelse	Læreren gir et bekreftende ja.
Elias	Eller han sank farten veldig. Så regnet vi gjennomsnittet, og det ble 3 ballonger.		
Lærer	3 ballonger per sekund, hvor lang tid bruker han da? Med det utgangspunktet? (P3)	P3 – Lukkede fremdriftsdetaljer	Læreren stiller et avklarende spørsmål om svaret.
Elias	32. (se bilde av elevenes vertikale tavle i kommentar-kolonnen → gjerne viktig å notere seg at de bruker likhetstegnet feil på tavlen, men viser at de har tenk på ulike svar og blitt enige om at de tenker hunden bruker 32 sekunder).		

Hva er det med lærerens handlinger i dette utdraget som viser til lærerens tilrettelegging av elevenes læring? Læreren velger ut gruppen til Elias til å begrunne hvorfor de mener hunden ikke bruker 20 sekunder på å sprekke 100 ballonger (F2 + F7). Det kan være ulike grunner til at læreren velger akkurat denne gruppen. Det er blant annet den eneste gruppen som har fått med seg at hunden sprakk 12 ballonger etter 1 sekund, og dermed noe læreren gjerne ønsker å trekke frem i plenumsdiskusjonen. Det er læreren som skal beholde kontrollen over det matematiske innholdet som kommer frem for å øke sannsynligheten for at øktens mål oppnås (Stein et al., 2008). En annen grunn kan være å trekke frem en elev som har hatt lav motivasjon for matematikk, for å gi eleven en følelse av at han hører til og kan lykkes. Dette er noe som er sentralt for elevers læring, og diskusjoner kan hjelpe elevene til å utvikle følelse av fellesskap og til å jobbe med matematiske ideer (Kazemi & Hintz, 2014). Dette er noe læreren også nevner i post-intervjuet, hvor han forteller om denne eleven som deler gruppens svar (32 sekunder), som var det svaret som var nærmest hundens virkelige tid. Læreren sier at denne eleven (Elias) har utpekt seg til å ha lav motivasjon i faget. Videre sier han dette om eleven:

Lærer: [...] han fikk jo til den oppgaven. Den gruppen var veldig i nærheten av svaret med den hunden og ballongene, noe som gav ham mestringsopplevelse. Noe som gjorde at han var veldig giret i neste økt igjen. [...]

Det at læreren i utdraget ovenfor (tabell 12) bruker *veiledning av deltakelse og normer* (F10), kan også legge til rette for elevenes læring. For å kunne ha produktive diskusjoner i klasserommet, mener Chapin et al. (2009) at det må etableres en klasseromskultur hvor elevene lytter respektfullt til hverandre, og føler det er trygt å uttrykke egne tanker. Det er lærerens ansvar å minne elevene på disse normene (Lampert, 1990). Drageset (2019) hevder i sin studie at lærerhandlingen *veiledning av deltakelse og normer* (F10) virker å føre til den etterspurte atferden.

4.2.3.2 «Ja, men hva er annerledes?»

Ifølge min analyse blir omdirigeringshandlinger sjelden brukt i plenumsdiskusjonene, og det er bare blitt brukt tre ganger. Nedenfor er et eksempel hvor omdirigeringshandlingen *korrigere spørsmål* (O3) blir tatt i bruk. I tillegg blir også fokuseringshandlingene (F1, F5, og F7), og fremdriftshandlingen *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) brukt.

Læreren har spurt en elevgruppe om de kan fortelle litt om grafen de har tegnet opp på tavlen sin. De forteller om grafen sin og at hunden sprekker flere ballonger de første sekundene, og så blir hunden sliten og sprekker ballongene litt senere etter hvert. Læreren ser videre at elevene har regnet ut antall ballonger som sprekkes per sekund og spør om hvordan den grafen ville sett ut. Samtalen går videre slik:

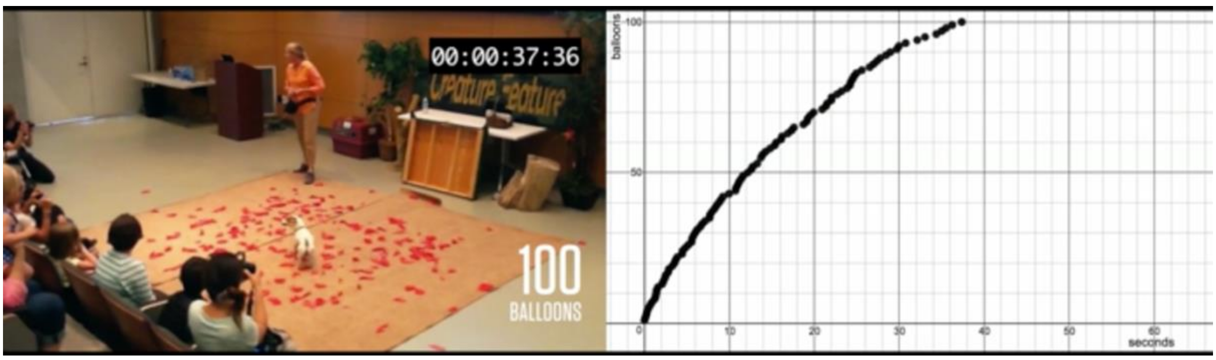
Tabell 13: Utdrag fra transkripsjon (plenumsdiskusjon – demonstrere bruk av P3, F1, F5, F7, og O3)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	[...]Er det noen som har tegnet opp det? Hvis vi sammenligner de to. Grafene. Bare tenke over det og, noen plottet det inn i GeoGebra og, hvordan var det det så ut da? Ser dere har det? Hvordan ser den linjen ut? Ser den sånn som de? Ser linjen ut slik som de har laget det på den? (F1) + (F7)	F1 – Oppklare detaljer F7 – Elev får ordet	Læreren påpeker at han ser en gruppe har tegnet en lineær funksjon, og spør denne gruppen om å sammenligne med den grafen gruppen tidligere hadde vist.
Leon	Ganske likt.		
Lærer	Ja, men hva er annerledes? (O3)	O3 – Korrigere spørsmål	Læreren stiller eleven et korrigerende spørsmål, som fungerer som en rettelse.
Abel	Den er helt rett.		
Lærer	Helt rett ja. Det er det som er annerledes. Så hvis den er helt rett, så vil den sprekke likt antall ballonger hele veien. Husker dere på YouTube-filmen så viste at det var proporsjonalitet. Jevn stigning hele veien. (F5) Og dere har skrevet ned på tavlen. Hvor mange ballonger sprekker han per sekund, tror dere? (P3)	F5 – Poengtere P3 – Lukkede fremdriftsdetaljer	Læreren tydeliggjør et viktig poeng for elevene ved å legge til ny informasjon til det elev sa. Læreren spør et spørsmål om hvilket svar elevene har kommet frem til.
Leon	26.		
Lærer	Hvor mange der oppe i hjørnet der? (O3)	O3 – Korrigere spørsmål	Læreren stiller eleven et korrigerende spørsmål, som fungerer som en rettelse.
Leon	Per sekund?		
Lærer	Ja. (B)	B – Bekreftelse	Læreren bekrefter eleven spørsmål.
Leon	Åja, 3,84.		

I eksempelet overfor blir det først tatt i bruk fokuseringshandlingene *oppklare detaljer* (F1) og *elev får ordet* (F7), for å få en bestemt elevgruppe til å fortelle om forskjellen mellom deres graf og den grafen en annen gruppe har funnet. Svaret som blir gitt av eleven fører til at læreren bruker *korrigere spørsmål* (O3), for å omdirigere eleven til en annen tilnærming. Læreren bruker så *poengtere* (F5) for å tydeliggjøre viktig poeng. Videre spør læreren om *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3), og når eleven svarer feil på dette, tar læreren igjen i bruk *korrigere spørsmål* (O3) for å omdirigere eleven til en annen tilnærming. Omdirigeringshandlingen *korrigere spørsmål* (O3) blir her brukt av læreren for å omdirigere elevene til en annen tilnærming for å gi riktig svar.

Læreren tar i utdraget ovenfor (tabell 13) i bruk lærerhandlingene *oppklare detaljer* (F1) og *elev får ordet* (F7). Hvordan kan dette være med på å legge til rette for elevenes læring? *Oppklare detaljer* (F1) brukes her for å få en bestemt elevgruppe til å sammenligne deres graf med grafen en annen gruppe har presentert. På denne måten skaper læreren en sammenhengende diskusjon ved å koble sammen elevenes tenkning. Dette kan oppfordre elevene til refleksjon rundt andres ideer, samtidig som de kan evaluere og revidere egne ideer (Stein et al., 2008). Det å orientere elevene til hverandres matematiske ideer, er et av de fire prinsippene som Kazemi og Hintz (2014) trekker frem som viktig for å skape diskusjoner som hjelper elever å lære matematikk. Det blir også tatt i bruk *korrigere spørsmål* (O3), noe læreren kan gjøre for å omdirigere elevens tilnærming uten å ta ansvaret fra elevene (Drageset, 2014). Denne måten å omdirigere eleven på, kan føre til at elevene får en følelse av at de lykkes. Kazemi og Hintz (2014) mener at dette er viktig for elevers læring i matematikk, i tillegg til følelsen av at de hører til.

Læreren legger også til rette for elevenes læring ved å få frem det matematiske målet han hadde for timen (se. Kap.3.7.1). I post intervjuet forteller læreren, som tidligere nevnt, at han hadde en intensjon om at elevene skulle tenke på forskjellen mellom en lineær graf og den grafen som de ser for seg (figur 5). Det at læreren har et tydelig matematisk mål for økten, er noe som er viktig for elevenes læring (Kazemi & Hintz, 2014; Stein et al., 2008).



Figur 5: Grafen illustrerer situasjonen av hunden som sprekker 100 ballonger

(hentet fra: https://www.101qs.com/3933)

4.3 Arbeid med «skolevei-oppgaven»

Arbeid med skolevei-oppgaven fant sted i den fjerde av de fem observerte undervisningsøktene. Klassen har tidligere hatt tre undervisningsøkter med tenkende klasserom, hvor de har arbeidet med problemer knyttet til emnet funksjoner. Problemet er grundig beskrevet i kap.3.7.1, og vil videre bli diskutert i kap.4.3.1.

4.3.1 Lærerens introduksjon av problemet

Læreren starter timen med navneopprop og gruppeinndeling. Han deler elevene inn i synlig tilfeldige grupper på tre, og fordeler de ulike gruppene på enten ikke-permanente vertikale plexiglass eller vinduer. Læreren gir også elevene «tenkende oppgaver» (problemer). Dette er de tre prinsippene i den første verktøykassen til Liljedahl (2021) (se kap.2.3.1). Videre gir læreren oppgaven til elevene fra midten av klasserommet i muntlig form (prinsipp i verktøykasse 2 – se kap.2.3.2). Han bruker cirka fem minutter på å presentere problemet til elevene. Læreren sier at alle elevene har gode muligheter for å klare denne oppgaven og at det er en oppgave han har designet spesielt til dem. Han forteller at oppgaven handler om to av elevene i klassen og at han vet at den ene sykler og den andre går. Videre sier han:

Tabell 14: Utdrag fra transkripsjon (introduksjon – demonstrere bruk av P4, F5 og F8)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	[...] Lisa går klokken 8 fra sitt hus og samtidig så sykler Per i fra sitt hus. Han sykler også akkurat klokken 8. Og da lurer jeg på, hvem kommer først til skolen? (P4)	P4 – Initiere til åpne spørsmål	Læreren presenterer oppgaven og gir elevene et åpent spørsmål uten å peke ut noen retning til hvordan løse det.
Alice	Ja, men hvor langt bort bor de?		
Lærer	Nettopp! Veldig bra spørsmål. Hvor langt borte bor de? Det er første spørsmål. Det gikk jeg inn på Gule sider og sjekket, for jeg vet jo adressen deres. Det er 1,4 km for Lisa, og Per du har 6,9 km. (F5) Så er spørsmålet? (F8)	F5 – Poengtere F8 – Etterspørre elevspørsmål	Poengterer viktig poeng for elevene ved å si at det var bra spørsmål og gjenta det, for videre å legge til ny informasjon. Læreren legger til rette for at elevene kan stille spørsmål.
Oskar	Per! Hvor rask sykler du?		
Lærer	Veldig bra spørsmål! Godt spørsmål. Hvor raskt sykler Per? (F5) [...]	F5 – Poengtere	Læreren tydeliggjør et viktig poeng for elevene, ved å si at det var et godt spørsmål og gjenta spørsmålet som eleven stilte.

Videre forteller læreren at Per sykler rask, og trekker frem begrepet gjennomsnitt. Læreren forteller litt om egen erfaring med sykling, og om elevens skolevei med nedoverbakker og oppoverbakker. Læreren sier at han skal gi dem gjennomsnittsfarten til Per og at den er på 20km/t. Læreren forteller så:

Tabell 15: Utdrag fra transkripsjon (introduksjon – demonstrere bruk av P4 og F5)

Lærer	[...]Og så sa jeg at Lisa hun går. Hvor fort går Lisa? Da sier jeg greit, hun går 4km i timen. 4km i timen. (F5) Hvem er det som kommer først til skolen? (P4) Og rekker de skolen? (P4) Skolen begynner fem på halv 9. Det er oppgaven. Bruk regning! Bruk tabell! Bruk graf! Bruk funksjonsuttrykk! (F5) Lykke til!	F5 – Poengtere P4 – Initiere til åpne spørsmål F5 – Poengtere	Læreren minner elevene på at Lisa går, for så å legge til hvor fort Lisa går i gjennomsnitt. Her presenterer læreren hva som er selve oppgaven. Læreren spør om to åpne spørsmål, uten å peke ut noen retning på hvordan elevene skal løse det. Læreren minner elevene på når skolen begynner, i tillegg til å minne dem på å løse problemet på flere måter.

I denne introduksjonen til øktens problem tar læreren mest i bruk *poengtere* (F5), *initiere til åpne spørsmål* (P4), og *etterspør elevspørsmål* (F8). Lærerens introduksjon til dette problemet, i likhet med introduksjon til ballongoppgaven (kap. 4.2.1), inneholder også bruk av å *initiere til åpne spørsmål* (P4). Dette viser igjen i introduksjonen av problem i alle undervisningsøktene. Læreren gir en oppgave til elevene i form av et eller flere åpne spørsmål, uten at læreren peker ut retningen for hvordan de skal løse det (Drageset, 2014, 2015, 2019).

Læreren tar i bruk *poengtere* (F5) og *initiere til åpne spørsmål* (P4). Hvordan kan disse handlingene være med å legge til rette for elevenes læring? Det at læreren her bruker *poengtere* (F5) kan hjelpe elevene til å se hva som er viktig og nyttig å vite om problemet som skal løses. Videre kan det også gi viktig støtte og bidrag til elevers arbeid med å utvikle problemløsning- og resonneringskompetanse (Drageset, 2014). Hvilken type oppgave læreren gir, vil også kunne være med å bidra til tilrettelegging av elevenes læring. Det at læreren her gir elevene en kognitivt krevende oppgave, kan bidra til at elevene får økt matematisk forståelse (Wæge & Nosrati, 2018).

«Skolevei-oppgaven» er i likhet med «ballongoppgaven» (kap.4.2.1) også en oppgave som stiller høye kognitive krav til elevene. Jeg mener at dette også er en oppgave på det kognitive nivået som Stein et al., (2000) kaller for «*å gjøre matematikk*», fordi elevene skal argumentere og begrunne for løsninger og sammenligne ulike løsninger og representasjoner. Elevene skal arbeide slik som Stein et al. (2000) mener det arbeides på nivået «å gjøre matematikk», som er å spørre elevene om å utforske forholdet mellom ulike representasjoner av problemet, og ta i bruk deres forståelse om sammenhengende temaer på nye måter. I likhet med «ballongoppgaven» starter også «skoleveioppgaven» med representasjonen «situasjon» (Janvier, 1978). Dette er det fjerde problemet knyttet til funksjoner som elevene arbeider med. I planleggingsdokumentet (kap.3.7.2) har læreren dermed et fokus på at han ønsker at elevenes transformasjoner skal bevege seg fra situasjon til ikke bare to (som i ballongoppgaven), men til alle de andre tre representasjonene som Janvier (1978) har identifisert (tabell, graf og formel) (kap.2.4). Læreren ønsker å trekke frem de ulike representasjonene i en plenumsdiskusjon og sammenligne disse. Jeg mener at «skolevei-oppgaven» er det Wæge og Nosrati (2018) kaller en LIST-oppgave, fordi det er en oppgave som har lav inngangsterskel. Det er en oppgave alle elevene kan få til noe på, og det er en oppgave som kan løses på flere måter ved bruk av ulike representasjoner.

4.3.2 Elevenes arbeid på vertikale tavler

Når elevene arbeidet med problemet i gruppene på vertikale tavler, fant jeg ut fra min analyse at det var lærerhandlingene *forenkle* (P2), *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) og *poengtere* (F5), som ble mest brukt (kap.4.1.2).

4.3.2.1 «Jeg forstår ikke helt …»

I tabellene nedenfor (tabell 16 og 17) er det et eksempel på bruk av de mest brukte lærerhandlingene. Læreren går forbi en elevgruppe og en elev på gruppen tar kontakt med læreren (se tabell 16 og 17).

I utdraget (tabell 16 og 17) *forenkler* (P2) læreren problemet ved å gi elevene informasjon om hvordan bruke tabell for å løse problemet. Læreren bruker *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) for å aktivisere elevene, istedenfor å fortelle dem svarene. Læreren begynner å avslutte samtalen ved å *poengtere* (F5) det de har enes om, og gir dem hint om hvor svaret befinner seg (P2).

Tabell 16: Utdrag fra transkripsjon (arbeid på grupper – demonstrere bruk av P2 og P3)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Dina	Jeg forstår ikke helt hvordan jeg skal regne dette.		
Lærer	Nei. Det er mange forskjellige innganger til dette problemet. Du kan enten for eksempel sette opp en tabell. Da vet du, hva er det du vet om Lisa? Jo du vet at hun etter én time har gått fire kilometer. Men det er jo ikke så veldig langt til skolen. Det er 1,4 kilometer. Men det du kan sette opp på Lisa er at etter én time så har hun gått fire kilometer. (P2) Etter en halvtime, hvor langt har hun gått da? (P3)	P2 – Forenkle P3 – Lukkede fremdriftsdetaljer	Læreren forteller først at det er mange forskjellige innganger til problemet, og forenkler så oppgaven ved å fortelle at elevene kan bruke tabell, og gir hint til hvordan gjøre dette. Stiller spørsmål for å flytte prosessen videre, med bare ett riktig svar som er enkelt å finne.
Dina	2km.		
Lærer	Ja. Etter 0,25 timer? (P3)	P3 – Lukkede fremdriftsdetaljer	Stiller et enkelt spørsmål med ett riktig svar.

Læreren blir avbrutt av en elev i gruppen som lurer på om Lisa går til skolen, og læreren forteller at ja det fant de ut i samfunnsfagstimen. Så går samtalen videre:

Tabell 17: Utdrag fra transkripsjon (arbeid på grupper – demonstrere bruk av P2 og F5)

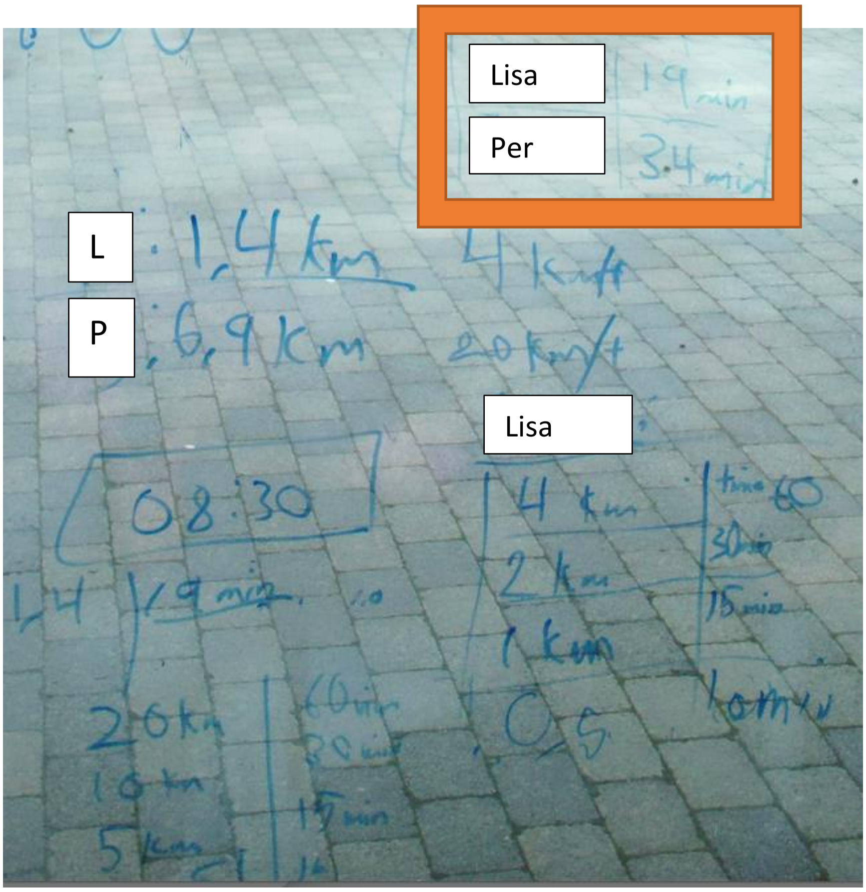
Lærer	[...]. Så begynn med det du vet. Du vet at etter én time. Så hvis du tenker slik at x, det som står nederst på den. (F5) Den ... Hva sa du? (F1)	F5 – Poengtere F1 – Oppklare detaljer	Læreren begynner med å samle opp informasjon, og blir sa avbrutt av elev. Lærer blir avbrutt og stiller da spørsmål om hva eleven sa, for å forstå hvordan eleven tenker.
Iben	Liksom etter en time, og så etter en halvtime så er det 2km. Etter 15 minutt.		
Lærer	Ja så etter 15 minutter, så er den nede på. Du sa en halvtime. Etter en halvtime så har hun gått 2km. Men ett kvarter då så har hun gått 1 km. (F5) Sant, men hun skal gå 1,4. Så hun må gå mellom der en plass. (P2)	F5 – Poengtere P2 – Forenkle	Læreren minner elevene om svar som de har blitt enige om tidligere i prosessen. Forenkler oppgaven ved å gi elevene hint om at svaret finnes en plass mellom 30min og 15min.
Iben	Jaa ...		

Hva er det som kommer frem i dette utdraget som viser måter læreren legger til rette for elevenes læring? Hvilken type elevspørsmål er det læreren svarer på her? Liljedahl (2016, 2021) mener det kun finnes tre type elevspørsmål (se kap.2.3.2). I utdraget ovenfor (tabell 16) stiller eleven et spørsmål når læreren er i nærheten, eller eleven forteller at hun ikke vet hva de skal gjøre. Dette kaller Liljedahl (2016, 2021) for nærhetsspørsmål, og han mener at slike spørsmål ikke skal besvares. Det kan hende at denne eleven var sjenert og hadde ventet til læreren var i nærheten før hun stilte spørsmål, noe Liljedahl (2021) mener vil være en god grunn.

Læreren fremhever (i tabell 16) at det er flere innganger til problemet. Å lære elevene evnen til å representere funksjoner på ulike måter, er noe som kan bidra til å utvikle konseptuell forståelse (Kalchman & Koedinger, 2005), og dermed noe som kan gjøres for å legge til rette for elevenes læring. Ved å bruke *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) tar læreren kontroll og reduserer sannsynlig kompleksiteten fordi elevene ikke trenger se helheten (Drageset, 2015). Her virker det som læreren ved å bruke *forenkle* (P2) og *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) omformer oppgaven for denne gruppen til noe mindre krevende. Wæge og Nosrati (2018) mener at det er viktig at læreren ikke gjør dette, men at læreren støtter elevene samtidig som han har høye forventninger til dem. Det at læreren peker på at svaret er en plass mellom 1 km og 2 km er noe som forenkler (P2) oppgaven enda mer, og noe han kanskje kunne latt elevene finne utav selv. Samtidig sier læreren i post intervjuet:

Lærer:	[...] For jeg har ikke så lang tid med hver gruppe. Så da må jeg bruke den godt, og av og til så pusher jeg på litt for å få frem det som jeg tenker kanskje. Må finne den balansen, for denne metoden skal jo være slik at de skal eie oppgaven litt selv. Elevene. Samtidig som man må ha litt fremdrift.

Han trekker her frem at elevene skal eie oppgaven selv, men samtidig må ha litt fremdrift, noe som gjerne er grunnen til at læreren forenkler slik som i utdragene ovenfor (tabell 16 og 17). Det kan virke som læreren først gir elevene den typen hint som Liljedahl (2021) kaller for «*hint som øker evnen*» ved at læreren gir elevene en strategi, som de kan bruke videre i oppgaven (tabell 16). Videre virker det som læreren helt i slutten gir elevene «*hint som reduserer utfordringen*» (tabell 17), fordi læreren gir et delvis svar til elevene (se kap.2.3.3). Liljedahl (2021) hevder at frustrasjon er en intens negativ følelse som krever rask intervensjon og noen ganger kan det å redusere utfordringen, være den beste måten å gjøre dette på.



Figur 6: Elevgruppen fra tabell 16 og 17 sin vertikale tavle

(For å anonymisere er fiktive navn skrevet over)

Hvilket matematisk innhold kommer frem på denne elevgruppens vertikale tavle? Hva har elevene forstått, og er det noe de har misforstått? Ved god hjelp fra læreren, som forenkler (P2) problemet og bruker *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) for å dele oppgaven i enkle steg for å komme frem til svaret, lager elevene en tabell. Det at læreren har gitt elevene hint om en strategi (tabell16 og 17), har ført til at elevene har brukt samme strategi for å finne ut hvor lang tid Per bruker til skolen. Elevene har dermed gjennomført transformasjonen situasjon til tabell. De har hentet ut informasjon fra situasjonen og plottet inn noen verdier i en tabell. Videre vet de, på grunn av læreren, at svaret på hvor lang tid Lisa bruker, vil ligge mellom 30 og 15 minutter. Vi ser på den vertikale tavlen (vinduet) at elevene mener Lisa bruker 19 minutter og at Per bruker 34 minutter. Det virker som elevene har valgt tilfeldige tall mellom 15 og 30 på begge personene, siden de ikke viser noen utregning på tavlen, og fordi det ikke er riktig svar. Her vil det være viktig at læreren ber elevene begrunne løsningen, for å få dem til å se over løsningen deres og passe på at det gir mening (Lester el al., 1989).

4.3.2.2 «Hvor har dere lyst å begynne?»

Ifølge min analyse blir omdirigeringshandlinger minst brukt under elever arbeid på vertikale tavler (8,4%). Fokuseringshandlingen *anvende* (F3) blir også sjeldent brukt av læreren. Ifølge min analyse er seks av de åtte gangene læreren tar i bruk *anvende* (F3), i denne økten med «skolevei-problemet». Videre er fremdriftshandlingen *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3), som tidligere nevnt, den handlingen som oftest blir brukt under elevenes arbeid på vertikale tavler. Nedenfor viser jeg et eksempel hvor læreren tar i bruk omdirigeringshandlinger (O1 og O3), fokuseringshandlingen *anvende* (F3) og den mest brukte handlingen *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3). Elevene har akkurat begynt å arbeide med problemet i grupper, og denne gruppen er den første læreren besøker under elevers arbeid på vertikale tavler (se tabell 18).

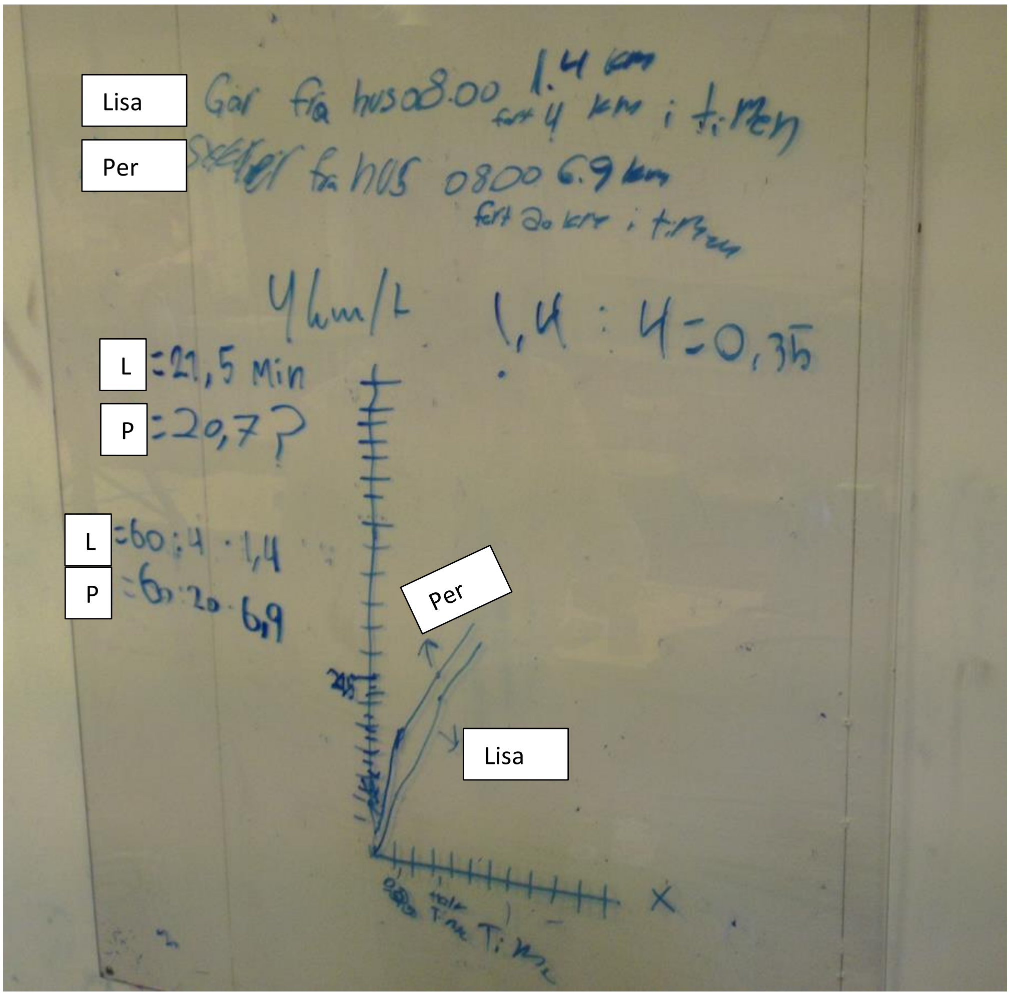
I utdraget (tabell 18) starter læreren med å spørre elevene hvor de har lyst til å begynne (P4), for så å prøve å få dem til å bruke det de har lært fra et tidligere problem (F3). Videre bruker læreren omdirigeringshandlingen *legge elevforlag til side* (O1) og *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3), for å hjelpe elevene å huske det de har lært i tidligere problem, og minne dem på detaljer fra problemet de jobber med nå. Videre spør læreren igjen om elevene kan bruke noe tilsvarende i oppgaven de arbeider med, som i en tidligere oppgave (F3). Læreren slutter med omdirigeringshandlingen *korrigere spørsmål (*O3), hvor han ønsker å få elevene til å sette opp funksjonsuttrykk og tegne opp en graf.

Hvordan legger læreren til rette for elevenes læring i utdraget fra tabell 18? I dette utdraget nevner læreren ulike representasjoner elevene kan bruke, slik som også ble gjort i forrige utdrag (tabell 16 og 17). Det å lære elevene å representere funksjoner på ulike måter, er noe som kan bidra til å utvikle konseptuell forståelse hos elevene (Kalchman & Koedinger, 2005). På denne måten kan læreren legge til rette for elevenes læring. Læreren prøver også å få elevene til å bruke tidligere kunnskap, fra problemet de arbeidet med i den andre undervisningsøkten (av de fem observerte øktene). Tidligere erfaringer er noe elevene kan bruke som første angrep på et problem (Liljedahl et al., 2016), og for å komme seg videre når man sitter fast (Liljedahl, 2021). Ved bruk av lærerhandlingen *anvende* (F3) stiller læreren generelle spørsmål til elevene, noe som kan hjelpe dem med problemet de arbeider med, samtidig som det kan utvikle deres evne til å løse fremtidige problemer (Polya, 1957). Jeg vil si at læreren her bruker det Liljedahl (2021) kaller for «hint som øker evnen» ved at læreren minner elevene på en strategi som de kan bruke. Liljedahl (2021) mener at slike hint kan fortsette å være nyttige i møte med nye problemer.

Tabell 18: Utdrag fra transkripsjon (arbeid på grupper – demonstrere bruk av P3, P4, F3, O1, og O3)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	Se, hvor har dere lyst å begynne? Med regning? Tabell? Med funksjonsuttrykk? Eller tabell? (P4) Husker dere vi jobbet med funksjonsuttrykk sist time med grafen? (F3)	P4 – Initiere til åpne spørsmål F3 – Anvende	Læreren spør elevene om hvor de ønsker å begynne. Han nevner ulike representasjoner elevene kan bruke. Læreren spør om de kan bruke kunnskap fra tidligere problem.
Peder	Men hva er det beste?		
Lærer	Huske du va jeg sa med denne her med feet? Han som gikk i sanden. Hvor fort gikk han i sanden? (O1) + (P3)	O1 – Legge elevforslag til side P3 – Lukkede fremdriftsdetaljer	Læreren legger elevens forslag til side (O1), og spør om lukkede fremdriftsdetaljer (P3)
Peder	Åja i sanden. Han gikk fem feet.		
Lærer	Ikke i sanden. (O1)	O1 – Legge elevforslag til side	Læreren legger elevens forslag til side uten å gi noe hjelp.
Peder	Nei 2!		
Lærer	2 feet ja. Hva går hun? (P3)	P3 – Lukkede fremdriftsdetaljer	Spør om detaljer knyttet til prosessen.
Peder	4km i timen.		
Lærer	Hva går han? (P3)	P3 – Lukkede fremdriftsdetaljer	Spør om detaljer knyttet til prosessen.
Peder	20km.		
Lærer	Kan vi bruke noe tilsvarende her? Som i den sandoppgaven? (F3)	F3 – Anvende	Læreren spør om elevene kan bruke kunnskap fra tidligere problem.
Kai	Men skal vi liksom dele 4 på 1,4?		
Lærer	Ja ... Hva slags funksjonsuttrykk må dere eventuelt sette opp for å få opp en graf? Hvordan ser grafene ut? Hva vil du ha på x-aksen og hva vil du ha på y-aksen? (O3)	O3 – korrigere spørsmål	Læreren stiller spørsmål for å omdirigere elevene til en annen tilnærming.
Kai	km på y-aksen og tid på x-aksen.		
Lærer	Flott veldig bra! Nå er dere i gang. (B)	B – Bekreftelse	Læreren gir elevene bekreftelse.

Omdirigeringshandlingen *legge elevforslag til side* (O1) kan begrunnes ved at læreren ønsker å legge elevforlag til sides uten for mye diskusjon, for å holde gruppen konsentrert og ikke miste tankegangen (Drageset, 2014). Lærerens bruk av å *korrigere spørsmål* (O3) kan her fungere godt som en måte å omdirigere elevens tilnærming under problemløsning, uten at ansvaret tas fra elevene (Drageset, 2014).



Figur 7: Elevgruppen fra tabell 18 sin vertikale tavle

(for å anonymisere er fiktive navn skrevet over)

Hvilket matematisk innhold kan vi se på denne tavlen (figur 7)? Hva er det elevene har forstått? Elevene har på denne tavlen gjennomført transformasjonen: situasjon til graf. Jeg mener dette vil være det som Superfine et al. (2009) kaller en delvis transformasjon. Elevene har funnet punktene som de mener er svaret, men det er ikke en nøyaktig graf de har tegnet opp. Dersom vi ser nærmer på x-aksen har elevene klart å plassere tre ulike verdier (0,25 timer, en halvtime og 1 time). Det er ikke like klart hvilke verdier som brukes på y-aksen da den eneste verdien på y-aksen er 21,5. Om elevene har tegnet opp tilfeldig eller satt inn noen punkter til grafene (utenom svarene), er vanskelig å si. Videre ser vi på tavlen at elevene har klart å regne seg frem til hvor lang tid Per og Lisa bruker til skolen (venstre på tavlen). Selv om de har vist riktig utregning, er de usikre på om per bruker 20,7 minutter, da de skriver et spørsmålstegn bak dette. De har også skrevet 21,5 minutter på Lisa, men ifølge utregningen de har skrevet opp burde dette bli 21 minutter. En grunn til dette kan være at elevene har gjort en slurvefeil når de regnet ut. Selv om det virker som elevene ikke er helt i mål med transformasjonen (situasjon – graf), kan vi se at de har kommet mye lengre enn fra første økt med ballongoppgaven hvor de tegnet opp søyler (kap.4.2.2). Vanskelighetsnivået på transformasjonen kan dermed ha blitt redusert, fordi elevene har opplevd denne typen transformasjon oftere nå i den fjerde økten, enn de hadde i den første økten (Bossé et al., 2011).

4.3.3 Plenumsdiskusjon

Etter elevene har arbeidet med problemet i cirka 30 minutter, samler læreren elevene til en felles diskusjon på slutten. Elevene står med sine grupper og ved sine tavler under diskusjonen. Læreren forteller at han er spent på å høre hva elevene har kommet frem til, og at han ser mange forskjellige forslag. Han skryter av elevene og sier de har arbeidet bra. Videre sier læreren: [...] «*Nå skal vi øve oss på en ting, og det er å dele denne informasjonen som vi nå har funnet ut, sammen. Og tenke litt over hva som gir mest mening.*» [...].

4.3.3.1 «Kan dere si noe om det?»

Ut fra min analyse er *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) noe som ofte blir brukt av læreren i de tre observerte plenumsdiskusjonene. Det å få elever til å *begrunne svaret* (F2) blir også brukt av læreren, men i noe mindre grad (kap.4.1.3). I tabellen under er det et eksempel på et utdrag fra plenumsdiskusjonen hvor disse to lærerhandlingene blir brukt. Det er i begynnelsen av plenumsdiskusjonen, og læreren har valgt seg ut en elevgruppe han ønsker skal begynne å dele funn med resten av klassen. Læreren spør elevgruppen om grafen de har illustrert på tavlen, og spør om de kan fortelle litt om den. En av elevene på gruppen forteller at det er Per sin graf de har tegnet, og at han sykler 20km/t. Videre fortsetter dialogen i tabell 19.

Læreren starter ved å spørre elevgruppen om å begrunne (F2) et punkt de har tegnet på grafen. Videre spør læreren om avklarende detaljer (P3) om svaret til elevene. Læreren starter med å spørre elevene om begrunnelse (F2), for så å bruke *lukket fremdriftsdetaljer* (P3) for å tydeliggjøre hvilke svar elevgruppen har kommet frem til.

Tabell 19: Utdrag fra transkripsjon (plenumsdiskusjon – demonstrere bruk av P3, F2 og F5)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	[...] Hvorfor har dere tegnet et punkt der? Kan dere si noe om det? (F2)	F2 – Begrunne svaret	Læreren ber elevene om begrunnelse.
Adrian	Det er da han er fremme.		
Lærer	Og det er nøyaktig etter? Hvor lang tid? (P3)	P3 – Lukket fremdriftsdetaljer	Læreren spør et avklarende spørsmål om gruppens svar.
Adrian	ehm. 20 minutter.		
Lærer	20 minutter har dere plassert den på og det er 6,9km? (P3)	P3 – Lukket fremdriftsdetaljer	Læreren stiller et avklarende spørsmål om svaret.
Adrian	mhm.		
Lærer	Hva er forskjellen på de to grafene? Hvorfor har dere tegnet den andre slik som dere har gjort? (F2)	F2 – Begrunne svaret	Læreren spør om elevene kan begrunne hvorfor de har gjort slik.
Ada	Fordi hun har ...		
Lea	Hun går bare 1,4. Nei 4 km/t.		
Lærer	Hun går 4 km/t ja. Så da vil den være litt slakere. Flott. (F5) Hvor lang tid bruker hun? Har dere sagt noe om det? (P3)	F5 – Poengtere P3 – Lukket fremdriftsdetaljer	Læreren legger til litt ny informasjon til elevsvaret, for å gjøre poenget tydeligere. Læreren spør elevene om hvilket svar de har kommet frem til.
Adrian	ca. 21 minutter.		

Læreren legger til rette for elevene i utdraget ovenfor (tabell 19) ved å bruke lærerhandlingen *begrunne svaret* (F2). Det å begrunne og uttrykke egne matematiske ideer og gi begrunnelser for løsninger, er noe Carpenter et al. (2003) trekker frem som viktig for at elevene skal utvikle en dyp forståelse i matematikk. Drageset (2014) mener at det er sannsynlig at lærere som ofte bruker handlingen *begrunne svaret* (F2) vil støtte elevenes resonneringskompetanse. Lærerens bruk av denne handlingen gjør at han legger til rette for at elevene kan gi begrunnelse for egne matematiske ideer og for svarene sine, noe som Lampert (1990) trekker frem som viktig for elevenes matematiske forståelse. Læreren bruker også *poengtere* (F5), noe som kan gi støtte til elevenes utvikling av resonnering- og problemløsningskompetanse (Drageset, 2014), og kan dermed legge til rette for elevenes læring.

4.3.3.2 «Har dere en nøyaktig graf?»

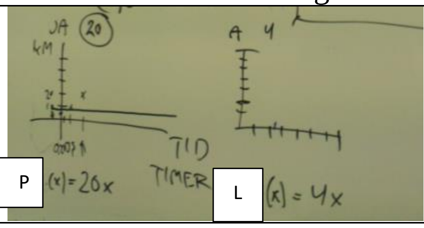
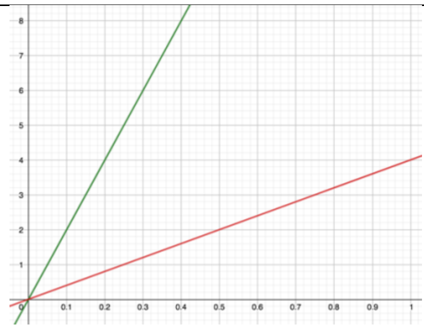
Ut fra min analyse er fokuseringshandlinger oftest brukt av læreren under plenumsdiskusjoner, hvor *poengtere* (F5) er den mest brukte (23,9%). *Oppklare detaljer* (F1), *begrunne svaret* (F2), og *elev får ordet* (F7) ble også mye brukt. Læreren tok i bruk *vurdere* (F4) bare to ganger (kap. 4.1.3). Under er det et eksempel hvor læreren tar i bruk flere fokuseringshandlinger, også den sjeldent brukte fokuseringshandlingen *vurdere* (F4). Det er et eksempel mot slutten av plenumsdiskusjonen hvor læreren henviser til en gruppe han vet har arbeidet litt med GeoGebra i deres løsningsprosess (se tabell 20).

Utdraget i tabellen nedenfor (tabell 20) viser hvordan læreren tar i bruk *poengtere* (F5) etter at han har spurt elever om å *oppklare detaljer* (F1). Læreren minner elevene om hva de tre gruppene som har delt sine løsninger med klassen har fått til svar, og overlater så vurderingen (F4) til de andre gruppene ved å spørre om de er uenig eller enig.

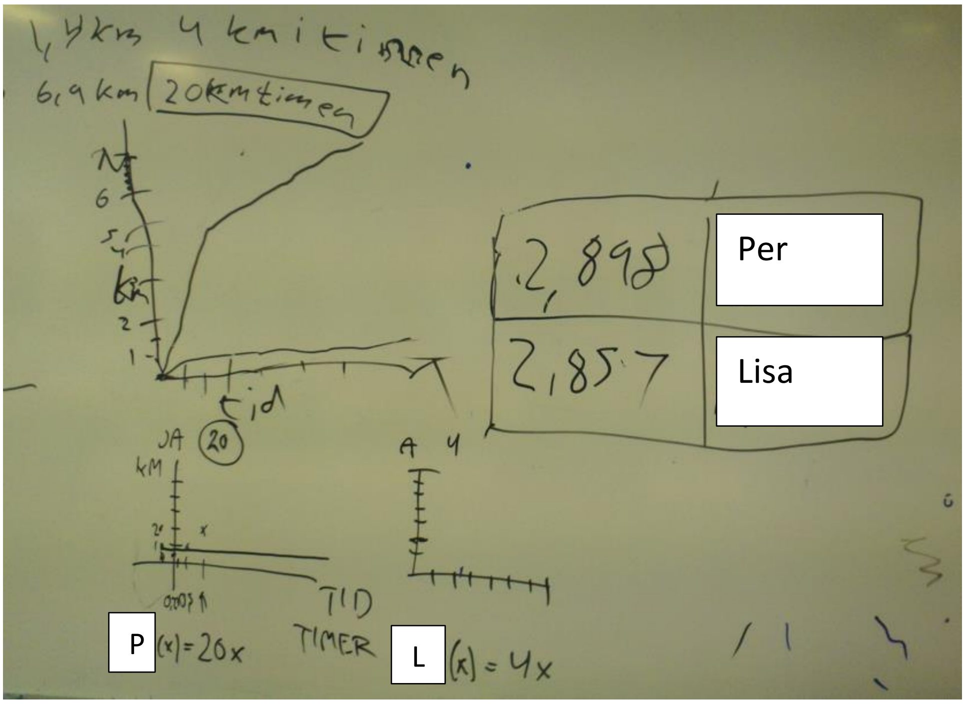
I utdraget (tabell 20) velger læreren en bestemt gruppe til å dele deres løsning (F7). En grunn til at han velger akkurat denne gruppen, kan være at han ønsker å løfte frem deres bruk av GeoGebra for å fremstille grafene. Ved å velge ut bestemte elever til å dele deres løsninger, holder læreren kontrollen på hva som deles og dermed hvilket matematisk innhold som kommer frem i diskusjonen (Stein et al., 2008). Det å ha et matematisk mål for diskusjonene, er noe som er viktig for elevenes læring (Kazemi & Hintz, 2014; Stein et al., 2008). Videre ber læreren elevene om å *oppklare detaljer* (F1). Ofte bruk av denne handlingen er noe Drageset (2014) mener kan støtte utvikling av elevenes problemløsningskompetanser, fordi elevene blir bedt om å forklare tankeprosessen bak løsningen. Det er viktig for elevenes matematiske forståelse at de får muligheten til å forklare egen tenkning (Lampert, 1990).

Tabell 20: Utdrag fra transkripsjon (plenumsdiskusjon – demonstrere bruk av F1, F4, F5 og F7)

	Dialog	Lærerhandlinger	Kommentar
Lærer	[...] Hva var det dere Oline, Birk og Endre kom frem til, når dere så på GeoGebra? (F7) Hva var det dere plottet inn? Kan dere si noe om det? (F1)	F7 – Elev får ordet F1 – Oppklare detaljer	Læreren ber elevgruppen forklare hva de har gjort, slik at de andre elevene og læreren kan se hvordan de har tenkt.

Endre	P(x) og L(x) for begge navnene. Og så er lik 20x på Per, og 4x på Lisa.		
Lærer	Det som står på tavlen der, sant? (F5)	F5 – Poengtere	Læreren viser til at det eleven svarte står på tavlen deres, slik at elevene kan merke seg dette.
Endre	Ja. (Se bilde av elevenes vertikale tavle i kommentar-kolonnen →)		
Lærer	Der nederst som dere ser. (F5)	F5 – Poengtere	Tydeliggjør hvor de andre elevene kan se funksjonsuttrykkene som gruppen viser til.
Endre	Så har vi funnet ut at Per bruker litt kortere tid enn Lisa.		
Lærer	Har dere en nøyaktig graf? (F1)	F1 – Oppklare detaljer	Læreren spør elevene om de kan vise til grafen de har plottet inn i GeoGebra.
Endre	Ja vi har en graf her (viser på macen). Lisa ligger på den linjen der, og så Per litt til venstre der. (elevene plottet inn de to grafene i GeoGebra ved bruk av funksjonsuttrykkene, se kommentar-kolonnen →)		
Lærer	Okey. Så dere mener at Per bruker litt kortere tid. Og det mener dere også, og det mener dere (3 grupper som mener dette, som har delt høyt med klassen). (F5) Er det noen som mener at de bruker like lang tid? Eller er uenige i det? Eller er dere enige i den påstanden? (F4)	F5 – Poengtere F4 – Vurdere	Læreren samler opp informasjonen og viser til at de tre gruppene, har kommet frem til at Per kommer først frem til skolen. Læreren henviser seg til de andre elevgruppene og lurer på om det er noen som mener noe annet.
	(stille blant elevene)		
Lærer	Det tyder jeg som at det er ingen som har en annen mening enn den. Det som er greit med GeoGebra er at vi kan plotte det nøyaktig inn slik som dere har gjort nå. (F5) [...]	F5 – Poengtere	Læreren tolker stillheten som at de andre elevene er enige i at Per kommer først til skolen.

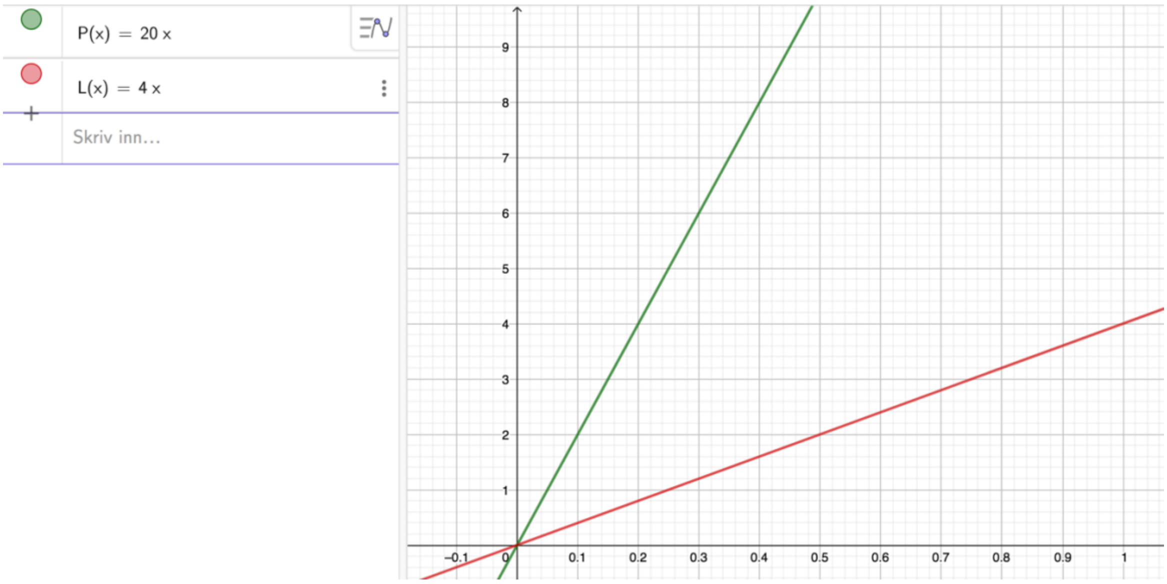
Læreren bruker også *poengtere* (F5) i utdraget ovenfor (tabell 20) som kan være til hjelp for elevene ved at læreren tydeliggjør viktige poeng, noe som kan gi støtte til elevenes problemløsningskompetanse (Drageset, 2014). Den sjeldent brukte lærerhandlingen *vurdere* (F4) (2,8%) blir også tatt i bruk, som ifølge Drageset (2015) kan involvere medelever til å argumentere for om de er enige eller uenige. Bruk av *vurdere* (F4) gir elevene mulighet til å resonnere gjennom egne og andres forklaringer, og utfordre andre elevers forklaringer. Dette er elementer som kan utvikle elevers forståelse i matematikk (Carpenter et al., 2003; Lampert, 1990). Denne muligheten blir dermed ikke benyttet av elevene, da ingen av dem kommer til ordet.



Figur 8: Elevgruppen fra tabell 20 sin vertikale tavle

(for å anonymisere er fiktive navn skrevet over)

Figur 8 viser den vertikale tavlen til gruppen som hadde plottet inn funksjonsuttrykk i GeoGebra og fått opp grafene der (tabell 20). Elevene på denne gruppen har klart å gjennomføre transformasjonen fra situasjon til funksjonsuttrykk. Jeg vil si at dette er det Superfine et al. (2009) mener med en fullstendig transformasjon. Videre har de brukt funksjonsuttrykkene til å få grafene til Lisa og Per opp i GeoGebra (se figur 9). For å gjennomføre transformasjonen fra situasjon til graf, har denne gruppen også brukt funksjonsuttrykk (formel) som en overgangs-representasjon (Bossé et al., 2011). Ut fra denne gruppens vertikale tavle (figur 8), ser det ut som elevene sliter med å utføre transformasjonen (situasjon – graf) uten bruk av GeoGebra. Det virker som de ikke vet hvilke punkter de skal plotte inn for å kunne tegne grafen for hånd. Selv om de klarte å gjennomføre transformasjonen (situasjon – graf) ved hjelp av GeoGebra virker det som de ikke har klart å bevare det Adu-Gyamfi et al. (2012) kaller for semantisk kongruens. Som tidligere nevnt (kap.2.4.1) er semantisk kongruens den matematiske meningen som finnes mellom representasjonen man starter med, og den representasjonen man skal ende opp med.



Figur 9: Illustrerer hvordan elevgruppe plottet grafene inn i GeoGebra

4.4 Oppsummering av resultater

Oppsummert indikerer funnene mine at læreren benytter seg av ulike handlinger for å legge til rette for elevenes læring. I introduksjonen av problemene bruker læreren *initiere til åpne spørsmål* (P4) ved å gi elevene kognitivt krevende oppgaver, som Wæge og Nosrati (2018) mener kan bidra til økt matematisk forståelse hos elevene. Videre blir også *veiledning av deltakelse og normer (*F10) brukt for å tydeliggjøre at elevene skal samarbeide, løse oppgaven på flere måter og komme med gode argumenter og begrunnelser, noe som er med å legge til rette for elevenes læring. *Poengtere* (F5) blir også mye brukt i både introduksjon av problemene, under elevers arbeid på tavlene, og i plenumsdiskusjonen. Denne handlingen kan være med å legge til rette for elevenes læring ved at det kan gi viktig støtte og bidrag til elevenes utvikling av problemløsning- og resonneringskompetanse (Drageset, 2014). Under elevers arbeid på vertikale tavler la læreren til rette for elevenes læring ved å gi elevene faglig støtte, samtidig som han hadde høye forventninger til dem (Wæge & Nosrati, 2018). Læreren brukte ofte *lukkede fremdriftsdetaljer (*P3), og en grunn til dette kan være å sørge for fremgang hos elevene. Det er læreren sitt ansvar å lede elevene mot et matematisk mål satt for timen (Stein et al., 2008). Læreren brukte også *forenkle* (P2) ved å gi elevene hint, noe som er viktig under problemløsning for å hjelpe elevene over blokkeringer (Lester et al., 1989). I plenumsdiskusjonene indikerer mine funn at læreren la til rette for elevenes læring ved bruk av fokuseringshandlinger (69%). Dette er handlinger som ifølge Drageset (2014) har potensialet til å lede elevene mot en mer nøyaktig og effektiv matematisk tenkning. Hvordan lærerens handlinger legger til rette for elevers læring i et tenkende klasserom, vil videre diskuteres i neste kapittel (kap.5).

5 Diskusjon

Formålet med denne studien er å besvare forskningsspørsmålet:

> *Hvordan kan læreren i et tenkende klasserom legge til rette for elevenes læring gjennom dialog under arbeid med problemløsningsoppgaver på vertikale tavler?*

Datamaterialet er blitt analysert, og enkelte utdrag er trukket frem i resultatdelen (kap.4). Ved å ta i bruk Drageset (2014, 2015, 2019) sitt rammeverk om lærerhandlinger under analysen, blir lærerhandlingene detaljert beskrevet. Læreren kan benytte handlinger som leder elevene i riktig retning (Drageset, 2015), eller mot det læreren har satt som matematisk mål for timen. Læreren kan gjennom klasseromsdiskusjoner, hvor han tar i bruk ulike handlinger, få tak i elevenes ideer, strategier, prosedyrer, og forholdet mellom ideene som kommer frem (Chapin et al., 2009). Chapin et al. (2009) mener at det å ha gode matematiske diskusjoner, kan utvikle elevenes læring i faget. Læreren kan dermed legge til rette for elevenes læring gjennom gode klasseromsdiskusjoner.

Selv om utdragene som er hentet frem i resultatkapittelet (kap.4) er fra to av undervisningsøktene (se kap.3.7 for begrunnelse), er transkripsjonene fra alle de fem observerte undervisningsøktene analysert. Dermed er det mulighet for å se på hvilke lærerhandlinger læreren oftest tar i bruk i den gitte perioden (fem økter over tre uker). I denne studien ble det valgt å dykke dypere ned i øktene som inneholdt en avsluttende plenumsdiskusjon på rundt 10 minutter. De resterende tre øktene var med i analysen over lærerhandlinger som ble brukt, men det ble ikke hentet frem utdrag fra disse undervisningsøktene. Det kunne vært interessant å trekke frem utdrag og funn fra disse undervisningsøktene, og gjerne se hva som førte til at det enten ble liten eller ingen tid til plenumsdiskusjon. Var det noe med disse undervisningsøktene som førte til at elevene trengte ekstra tid i utforskningsfasen? Hva var det som gjorde at læreren i disse øktene bestemte seg for å la elevene arbeide lengre i gruppene? Var elevene ekstra engasjert i problemene? Tok det lang tid før elevene kom i gang med problemet, sammenlignet med de øktene hvor det oppstod plenumsdiskusjon? Strevde elevene mer med problemene i disse øktene, slik at det tok lengre tid før de kom frem til løsninger? Dette er noe som kunne vært interessant å se på, men for å begrense studien, samt fokusere på å besvare forskningsspørsmålet, ble det valgt å dykke dypere ned i to av undervisningsøktene.

Hva kan analysen av lærerhandlinger fra datamaterialet (de fem transkriberte undervisningsøktene), fortelle oss om lærerens tilrettelegging av elevenes læring? Hva kommer frem i de to utvalgte øktene (første og fjerde), som viser hvordan lærerens handlinger legger til rette for elevenes læring? Jeg skal videre i denne delen av masteren diskutere funnene mine knyttet opp til forskningsspørsmålet. Jeg har valgt å dele diskusjonen inn i de tre delene av undervisningen som også er brukt i forrige kapittel (kap.4).

5.1 Introduksjon av problemene

Ifølge mine resultater er det lærerhandlingene *initiere til åpne spørsmål* (P4), *poengtere* (F5) og *veiledning av deltakelse og normer* (F10) som blir oftest tatt i bruk når læreren introduserer et problem til elevene (kap.4.1.1). Hvordan kan bruk av disse lærerhandlingene i introduksjonen av problemene legge til rette for elevenes læring?

Initiere til åpne spørsmål (P4) er den handlingen som oftest blir brukt i introduksjonen av problemene (kap.4.1.1). Læreren søker fremgang, men etterlater det til elevene å finne deres egen metode (Drageset, 2014, 2015). Hvordan kan lærerens bruk av denne handlingen legge til rette for elevenes læring? Liljedahl (2021) mener at dersom man ønsker at elevene skal tenke, så må læreren gi dem noe å tenke på, noe som ikke barer krever at de tenker, men som oppfordrer dem til å tenke. Det åpenbare valget i matematikk er at elevene arbeider med problemløsning (Liljedahl, 2016, 2021). Læreren i min studie bruker lærerhandlingen *initiere til åpne spørsmål* (P4) når han gir problemet til elevene, for han gir dem problemet muntlig og etterlater det til elevene å finne deres egne løsningsmetoder. Et problem er ifølge Webster (1979) et spørsmål som er «*perplexing*» eller vanskelig. En slik forståelse av et problem, fører til at oppgaver hvor læreren nettopp har demonstrert for elevene hvordan de skal løses, ikke vil være et problem (Schoenfeld, 1992). I et tenkende klasserom hvor læreren gir elevene problemer muntlig og tidlig i økten (Liljedahl, 2016, 2021), kan det komme naturlig at lærerhandlingen *initiere til åpne spørsmål* (P4) blir brukt i introduksjonen. Læreren i min studie sier i pre-intervjuet at han bruker mye tid på å finne problemer, og har som nevnt brukt problemer som kan defineres som kognitivt krevende oppgaver (diskuteres i kap.4.2.1 og kap.4.3.1). Wæge og Nosrati (2018) mener at klasserom som lar elever arbeide med slike oppgaver, bidrar til økt forståelse hos elevene, og dermed noe læreren gjør for å tilrettelegge for elevenes læring.

Poengtere (F5) er som tidligere nevnt også en lærerhandling som ofte blir brukt under introduksjon av problemene. I utdraget fra tabell 14 (kap.4.3.1) ser vi et eksempel hvor læreren tar i bruk denne handlingen. Hva kan dette eksempelet si om lærerens tilrettelegging av elevenes læring? Læreren tar i bruk *poengtere* (F5) for å tydeliggjøre viktige innspill eller spørsmål fra elevene, for resten av klassen. Han bruker også handlingen for å minne elevene på å bruke flere representasjoner, noe Kalchman og Koedinger (2005) mener er viktig for at elevene skal utvikle en konseptuell forståelse, og dermed viktig for tilrettelegging av elevenes læring. Lærerhandlingen *poengtere* (F5) kan brukes for å hjelpe elevene til å se hva som er viktig og nyttig i det spesifikke problemet de skal løse (Drageset, 2014). Drageset (2014) mener det er mulig at handlinger hvor læreren beholder den intellektuelle autoriteten, slik som for eksempel *poengtere* (F5), kan gi viktig støtte og bidrag til elevenes slit med å utvikle resonnering- eller problemløsningskompetanse. På denne måten kan *poengtere* (F5) brukes av læreren for å legge til rette for elevenes læring. I Drageset (2015) sin studie var *poengtere* (F5) den mest brukte fokuseringshandlingen hos lærerne, hvor de enten delte ideer med elevene eller pekte ut noe som var riktig eller viktig å huske. *Poengtere* (F5) er noe som også ble brukt ofte av læreren i Tokheim (2021) sin masterstudie med fokus på helklassesamtaler.

Veiledning av deltakelse og normer (F10) er en handling som blir brukt en del i min studie når læreren introduserer problemene (14,3%). Det er lærerens ansvar å minne elevene på normer (Lampert, 1990), og hvordan de skal delta i undervisningen. Drageset (2019) hevder i sin studie at lærerhandlingen *veiledning av deltakelse og normer* (F10) så ut til å føre til den etterspurte atferden. Generelt sett er slike interaksjoner eksempler på hvordan læreren bevisst kan arbeide for å etablere normer for hvordan elevene skal reagere, og hva som forventes av et svar (Drageset, 2019). I utdraget i tabell 8 (kap.4.2.1) bruker læreren *veiledning av deltakelse og normer* (F10) for å fortelle elevene at de må samarbeide godt og finne flere løsninger. Hvordan kan dette være med å legge til rette for elevenes læring? Wæge og Nosrati (2018) mener at læreren må veilede gruppearbeidet godt for å etablere bestemte normer, og sakte, men sikkert opprette en samarbeidskultur uten å ta fra elevene deres kreativitet og frihet. Dysthe (2001) mener en sentral del av elevenes læring er at de deler ideer med hverandre, og diskuterer hva de forstår og ikke forstår.

Læreren i min studie brukte også *veiledning av deltakelse og normer* (F10) i utdraget i tabell 8 for å oppfordre elevene til å finne flere løsninger. Hvordan kan fokus på å finne flere løsninger være med å legge til rette for elevenes læring? Kalchman og Koedinger (2005) mener at for å utvikle en konseptuell forståelse, må elevene læres evnen til å representere funksjoner på ulike måter og kunne bevege seg mellom flere representasjoner. Dette er noe læreren også legger vekt på i planlegging av undervisningen (se kap.3.7.1 og kap.3.7.2). Wæge og Nosrati (2018) mener dette kan bidra til at flere elever deler deres ideer og dermed kan føle seg verdsatt og merke at de lykkes i matematikkfaget. Læreren legger her til rette for elevenes læring ved å gi elevene mulighet til å uttrykke sine egne tanker og ideer (Bakker et al., 2015). I tabell 9 (kap.4.2.1) bruker læreren også handlingen – *veiledning av deltakelse og normer* (F10) – for å si at han ønsker gode argumenter og begrunnelser fra elevene. Det å kunne begrunne hvorfor en påstand eller prosedyre stemmer, mener Carpenter et al. (2003) er en av de viktigeste delene av forståelsen. Ved å ha fokus på dette, kan læreren legge til rette for elevenes læring i matematikk.

5.2 Elevers arbeid på vertikale tavler

Mine resultater viser at lærerhandlingene *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3), *forenkle* (P2), og *poengtere* (F5) oftest blir tatt i bruk av læreren når han besøker elevgruppene under arbeid på vertikale tavler (kap.4.1.2). Dette er handlinger som søker fremgang hos elevene, og som stopper opp for å tydeliggjøre viktige poeng for elevene (Drageset, 2014, 2015, 2019). Hvordan kan lærerens bruk av disse handlingene – under elevers arbeid på vertikale tavler – være med å tilrettelegge for elevenes læring?

Under elevers arbeid på tavler er det fremdriftshandlinger som blir brukt oftest (56,4%), hvor *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) er den mest brukte (30%). I Drageset (2015) sin studie er *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) også den lærerhandlingen som brukes oftest av alle de fem lærerne i hans studie. Dette fremstår også i Tokheim (2021) sin studie. Videre mener Tokheim (2021) at en mulig grunn kan være at det gjør det enklere for flere elever å resonnere matematisk, dersom man tar steg for steg. En annen hensikt ved å ta i bruk *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) kan være å sikre at hver elev er i stand til å følge tankegangen ved å lede dem gjennom hvert viktige trinn (Drageset, 2015). Drageset (2015) mener at det dermed er læreren som tar kontroll over prosessen, og mest sannsynlig reduserer han kompleksiteten for elevene, siden de ikke trenger å se helheten. På en annen side vil det noen ganger være nødvendig å flytte prosessen fremover for å nå et bestemt mål innenfor en gitt tidsramme. Det kan dermed være nyttig med kunnskap om fremdriftshandlinger som kan få en «stoppet» prosess videre (Dragest, 2014). Dette er noe læreren trekker frem i post-intervjuet hvor han sier: «*... Må finne den balansen, for denne metoden skal jo være slik at de skal eie oppgaven litt selv. Elevene. Samtidig som man må ha litt fremdrift.*». En grunn til lærerens bruk av *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) kan dermed være å sørge for fremgang hos elevene. Videre viser mine resultater (eks. tabell 16 og 18 – kap.4.3.2) at læreren tar i bruk denne handlingen sammen med å *forenkle* (P2) eller *anvende* (F3) for å aktivisere elevene, heller enn at læreren forteller dem svaret eller deler av løsningen. Læreren bruker *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) (tabell 18) som en måte å hjelpe elevene å huske det de har lært fra tidligere problem og minne dem om detaljer fra problemet de arbeider med.

Forenkle (P2) er i tillegg til *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) også en lærerhandling som kan redusere kompleksiteten for elevene, ved at læreren typisk legger til informasjon og gir hint. Ifølge mine resultater er *forenkle* (P2) den nest mest brukte lærerhandlingen under elevers arbeid på tavler (18%) (kap.4.1.2). I Tokheim (2021) sin studie blir derimot *forenkle* (P2) mye sjeldnere brukt av læreren (4,3%). En grunn til denne forskjellen kan være ulike klasseromskontekster. Tokheim (2021) sin studie befinner seg i en kontekst hvor det arbeides med utviklende matematikk. Min studie derimot er i en kontekst hvor det arbeides med et tenkende klasserom. I dette tenkende klasserommet arbeider elevene med problemer, og i arbeid med problemer, er det viktig at elevene får hint for å hjelpe dem over blokkeringer (Lester et al., 1989). I utdraget i tabell 16 (kap.4.3.2.1) vises det hvordan læreren bruker *forenkle* (P2) til å gi elevene hint om en strategi de kan bruke videre i oppgaven. Dette kaller Liljedahl (2021) for «*hint som øker evnen*» (se kap.2.3.3). Videre helt i slutten av utdraget (tabell 17) bruker læreren *forenkle* (P2) til å gi elevene et delvis svar, noe som Liljedahl (2021) kaller for «*hint som reduserer utfordringen*». Noen ganger kan slike hint være den beste måten å håndtere elevers frustrasjon, fordi det er en intens følelse som krever rask intervensjon (Liljedahl, 2021). En grunn til lærerens ofte bruk av å *forenkle* (P2) under elevenes arbeid på vertikale tavler, kan handle om konteksten de befinner seg i (problemløsning i et tenkende klasserom). Læreren legger til rette for elevenes læring ved å arbeide med tenkende klasserom som lar elevene bruke medierende verktøy (vertikale tavler). Vi tenker med og gjennom medierende verktøy, og Mercer et al. (2019) mener at bruk av dette skaper muligheter for elever og lærere til offentlig dele, forklare, rettferdiggjør og omformulere ideer. Dette er noe som pekes på som viktig for elevers læring og utvikling av forståelse, og er ifølge Carpenter et al. (2003) elementer som fører til at elevene utvikler en dyp forståelse for matematikk.

Fokuseringshandlingen *poengtere* (F5) blir ofte brukt under elevers arbeid på tavler i min studie. *Poengtere* (F5) brukes også ofte av læreren i Tokheim (2021) sin masterstudie under helklassesamtaler, i tillegg til *elev får ordet (*F7). I min studie har jeg som tidligere nevnt ikke tatt i bruk handlingen *elev får ordet* (F7) under elevers arbeid på vertikale tavler (se kap.3.8.1). I Drageset (2015) sin studie ble *poengtere* (F5) også ofte brukt av lærerne, i tillegg til å *oppklare detaljer* (F1). Disse to fokuseringshandlingene (F5 + F1) blir brukt av lærere for å utforske elevers resonnement (Drageset, 2015). En grunn til lærernes bruk av å *poengtere* (F5), kan være at lærerne har en felles interesse om å tydeliggjøre viktige poeng for elevene. Drageset (2015) mener at det ser ut som hensikten er å hjelpe elevene ved å peke på viktige elementer som de enten kan bruke i løsningsprosessen, eller aspekter som kan være nyttige å bruke i fremtidige matematikkøkter. Ved å ta i bruk fokuseringshandlingen *poengtere* (F5) kan læreren legge til rette for elevers læring, ved at det gis hjelp og støtte til elevenes utvikling av resonnerings- og problemløsningskompetanse (Drageset, 2014). Et eksempel på slik støtte kan være lærerens bruk av å *poengtere* (F5) (tabell 17 – kap.4.3.2) til å minne elevene som svar de har enes om tidligere i løsningsprosessen.

Ifølge mine resultater ble omdirigeringshandlinger minst brukt av læreren. Det samme gjør seg gjeldene i Drageset (2015) sin studie og i Tokheim (2021) sin masterstudie. I alle disse studiene blir omdirigeringshandlinger brukt mye sjeldnere enn fremdriftshandlinger og fokuseringshandlinger. Drageset (2014) mener at fokuseringshandlinger har potensialet til å lede elevene mot en mer kraftfull, effektiv og nøyaktig matematisk tenkning. Bruk av fokuseringshandlinger kan på denne måten være med å legge til rette for elevenes læring. På en annen side er det også mulig at ofte bruk av fokuseringshandlinger fører til at elevene mister oversikt over retningen eller målet for aktiviteten. Læreren kan også peke på for mange viktige elementer, slik informasjonsmengden blir for stor eller forvirrende for elevene. Kombinert bruk av omdirigeringshandlinger og fremdriftshandlinger kan derimot føre til at læreren dominerer prosessen og hindrer elevenes refleksjon og forståelse (Drageset, 2014).

Av omdirigeringshandlingene var det i min studie *korrigerende spørsmål* (O3) som oftest ble brukt under elevers arbeid på vertikale tavler. I Drageset (2015) sin studie er det også denne omdirigeringshandlingen som forekommer oftest, og dette gjelder også i Tokheim (2021) sin masterstudie. I mine resultater er det hentet frem et utdrag (tabell 18 – kap.4.3.2.2) hvor læreren tar i bruk den mest brukte omdirigeringshandlingen *korrigere spørsmål* (O3), og den minst brukte – *legge elevforlag til side* (O1). Bruk av omdirigeringshandlinger trenger ikke hindre refleksjon og forståelse hos elevene. Læreren kan *legge elevforslag til side* (O1) uten for mye diskusjon for at klassen skal oppholde konsentrasjon og ikke miste tankegangen. Lærerens bruk av å *korrigere spørsmål* (O3) (tabell 18), kan være en god måte å omdirigere elevenes tilnærming uten å ta ansvaret fra elevene under problemløsning (Drageset, 2014). På denne måten kan lærerens bruk av omdirigeringshandlinger legge til rette for elevenes læring. Imsen (2014) mener det er læreren som har ansvaret for elevenes læring og skal være den drahjelpen de trenger. Samtidig som det er viktig å ikke hjelpe verken for lite eller for mye, slik at elevene får en rimelig del av arbeidet (Polya, 1957). Læreren kan gi elevene faglig støtte, men skal samtidig ha høye forventninger til dem (Wæge & Nosrati, 2018).

5.3 Plenumsdiskusjon

Ut fra mine resultater er det fokuseringshandlinger som blir oftest brukt under plenumsdiskusjon (69%). De mest brukte fokuseringshandlingene er: *poengtere* (F5), *oppklare detaljer* (F1), *elev får ordet* (F7), og *begrunne svaret* (F2). Fremdriftshandlingen *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) blir også mye brukt under plenumsdiskusjon (kap.4.1.3). Hvordan kan bruk av disse fokuseringshandlingene i tillegg til *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) være med å legge til rette for elevenes læring?

Drageset (2014) hevder at fokuseringshandlinger har potensialet til å lede elevene mot en mer effektiv, nøyaktig og kraftfull matematisk tenkning. Videre mener han at kunnskap om disse handlingene kan være viktige for å komme seg videre fra matematiske diskusjoner som «*vis og fortell*». Læreren i min studie beholder kontrollen under matematiske diskusjoner, ved å ha planlagt på forhånd hva han ønsker å trekke frem i undervisningen (se kap.3.7.1 og kap.3.7.2), og leder dermed klassen mot et matematisk mål satt for timen (Stein et al., 2008). Videre velger læreren ut elevers ideer som er hensiktsmessige å spille videre på (Goos, 2004; Stein et al., 2008). Læreren forsøker å koble elevers tenkning sammen (eks. se tabell 13), noe som kan oppfordre elevene til evaluering og revidering av egne ideer, samtidig som det vil oppfordre til refleksjon rundt andres ideer (Stein et al., 2008). Dette er noe som er viktig for utvikling av elevenes forståelse (Carpenter et al., 2003; Lampert 1990), og dermed for elevenes læring.

I Plenumsdiskusjonene (kap.4.2.3 og kap.4.3.3) ser vi ut fra mine resultat at læreren bruker *poengtere* (F5) etter at han har spurt elevene om enten *oppklare detaljer* (F1) eller *begrunne svaret* (F2). En grunn til at læreren gjør dette i plenumsdiskusjonen kan være at han ønsker å gjøre forklaringene eller begrunnelsene til elevene tydeligere. En hensikt ved å *poengtere* (F5) ser ut til å være å peke på viktige aspekter som kan være nyttige å bruke senere (Drageset, 2015). Lærerens bruk av denne handlingen i plenumsdiskusjonene, kan se ut til å være for å peke på viktige aspekter som elevene kan ta med seg videre til senere problemløsningsøkter. I min studie er *poengtere* (F5) den handlingen som forekommer oftest under plenumsdiskusjon (23,9%). I Tokheim (2021) sin masterstudie er dette en av de mest brukte fokuseringshandlingen, men blir brukt i mindre grad (9,3%) sammenlignet med min studie. En grunn til dette kan være at det i min studie arbeides med problemløsning i et tenkende klasserom, hvor bruk av å *poengtere* (F5) som tidligere nevnt, kan støtte elever i utvikling av deres problemløsningskompetanse. På denne måten kan læreren i min studie være med å legge til rette for elevenes læring.

I stedet for å akseptere et forslag eller svar og fortsette, bruker læreren handlingene *oppklare detaljer* (F1) og *begrunne svaret* (F2). Handlingene brukes for å be elevene om å stoppe opp å forklare hvordan et svar ble funnet og hva som ble gjort (F1), eller hvorfor en metode eller et svar et riktig (F2) (Drageset, 2014, 2015). Drageset (2014) mener at disse fokuseringshandlingene (F1, F2) viser hvordan læreren bruker elevenes ideer til å gå dypere inn i detaljene i problemet. Hvordan kan lærerens bruk av disse handlingene være med å legge til rette for elevenes læring? Drageset (2014) mener at det virker sannsynlig at en lærer som ofte bruker *begrunne svaret* (F2) vil støtte resonneringskompetanse hos elevene, og ofte bruk av å *oppklare detaljer* (F1) vil kunne støtte utvikling av elevers problemløsningskompetanser, fordi læreren ber elevene om å forklare tankeprosessen bak løsningen. På en annen side er det også mulig å be om for mange begrunnelser, slik at elevene mister oversikt over målet eller retningen for aktiviteten (Drageset, 2014). Ut fra mine resultater virker det ikke som læreren i min studie ber elevene om for mange begrunnelser, men bruker det på en god måte under plenumsdiskusjonene (se kap.4.2.3 og kap.4.3.3). Ved å be elevene begrunne og forklare egne løsninger og svar, legger læreren til rette for elevenes læring. Det å gi elevene mulighet til å forklare og rettferdiggjør egen tenkning, er noe Lampert (1990) mener kan føre til at elevene blir eiere av «knowing» (kunnskap). Videre mener Carpenter et al. (2003) at det å begrunne og uttrykke matematiske ideer og gi begrunnelser for løsninger, er viktig for at elevene skal utvikle dyp forståelse i matematikk.

I min masterstudie blir *elev får ordet* (F7) brukt ofte under plenumsdiskusjon (9,9%). I Tokheim (2021) sin studie er dette den fokuseringshandlingen som brukes oftest (17%). I likhet med Tokheim (2021) sin studie peker også læreren i min studie på at det gjøres opp tanker om hvilke elever som velges. I post-intervjuet (kap.4.1.3) sier læreren at han har en bevissthet rundt hvilket matematisk innhold de ulike tavlene inneholder. Videre sier han at han bevisst velger ulike grupper til å dele i plenum. På denne måten får forskjellige elever mulighet til å dele i fellesskap. Læreren legger til rette for elevers læring ved at han inviterer flere elever inn i plenumsdiskusjonen slik at flere får delta (Chapin et al., 2009; Kazemi & Hintz, 2014; Stein et al., 2008).

Læreren i min studie forbereder seg godt til undervisningen ved å finne kognitivt krevende oppgaver og ha tydelige mål for øktene (se kap.3.7). Dette er noe som ifølge Stein et al. (2008) vil kunne legge til rette for elevenes læring ved at læreren er godt forberedt. Videre mener de at det å lede elevene mot et matematisk mål for økten, vil være viktig for å øke kvaliteten på den matematiske diskusjonen, og dermed for tilrettelegging av elevenes læring. Læreren nevner i post-intervjuet at han hadde en intensjon med den første økten, som var at elevene skulle se forskjellen mellom en lineær graf og grafen fra den virkelige situasjonen (kap.4.2.2.2). Dette viser igjen i tabell 13 (kap.4.3.2) hvor læreren i plenumsdiskusjonen ønsker å få frem forskjellen på disse to grafene. På denne måten får læreren også elevenes ideer til å bygge på hverandre. Det å skape en sammenhengende diskusjon, er noe Stein et al. (2008) mener kan oppfordre elever til refleksjon rundt andres ideer, samtidig som de evaluerer og reviderer egne ideer. Dette er noe som kan legge til rette for elevenes læring, ved at de engasjeres i klargjøring av egen tenkning (Lampert, 1990). Videre vil også det å resonnere gjennom egne og andres forklaringer være viktig for utvikling av dyp matematisk forståelse (Carpenter et al., 2003). En annen måte læreren kan legge til rette for elevers læring, kommer frem i tabell 12 (kap.4.2.3). I dette utdraget velger læreren ut en elev med lav motivasjon for faget, til å dele denne gruppens løsning. Ved å la denne eleven dele gruppens løsning, sier læreren i post-intervjuet at eleven opplevde mestring og var «giret» til neste økt. Det vil være sentralt for elevenes læring at de får en følelse av at de kan lykkes og hører til (Kazemi & Hintz, 2014).

I plenumsdiskusjonene blir *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) ofte brukt (21,1%), men i noe mindre grad enn under elevers arbeid på vertikale tavler (30%). En grunn til dette kan være ulikt fokus i de to fasene av undervisningen. Under elevers arbeid på vertikale tavler kan det være at læreren i større grad enn i plenumsdiskusjonen, ønsker å flytte prosessen fremover. En hensikt her vil være å hjelpe elevene med løsningsprosessen under arbeid på de vertikale tavlene. Det er derimot mest fokus i plenumsdiskusjonen på forklaringer og begrunnelser som har fremstått under elevenes arbeid på vertikale tavlene. Som tidligere nevnt (kap.5.2) brukes *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) også ofte i både Tokheim (2021) sin studie, og Drageset (2015) sin studie. I plenumsdiskusjonen bruker læreren i min studie *lukkede fremdriftsdetaljer* (P3) for å avklare og tydeliggjøre detaljer i elevenes forklaringer, eller begrunnelser av svaret (eks. tabell 19 – kap.4.3.3). I tabell 12 og tabell 13 ser vi eksempler på hvordan læreren bruker denne handlingen under plenumsdiskusjon, for å få avklart svar som gruppen har kommet frem til. Læreren deler dermed ikke problemet opp i flere trinn, men bruker handlingen til å få avklart elevenes svar.

6. Konklusjon

Gjennom denne studien har jeg funnet flere interessante funn om hvordan læreren i et tenkende klasserom legger til rette for elevenes læring under problemløsning på vertikale tavler. Det har vært fokus på hvordan læreren gjør dette ved hjelp av dialog med elevene, og dermed er lærerhandlinger i introduksjon av problemene, under elevers arbeid på tavler, og i plenumsdiskusjon diskutert. På denne måten har jeg hatt mulighet til å se på hvordan lærerens handlinger kan tilrettelegge for elevenes læring i et tenkende klasserom. Ved at læreren jobber med et tenkende klasserom, åpnes det flere muligheter for elevenes læring. Et tenkende klasserom er som tidligere nevnt et rom fullt av tenkende individer som tenker sammen, lærer sammen og konstruerer forståelse og kunnskap gjennom diskusjon og aktivitet (Liljedahl, 2016). Matematiske diskusjoner er noe som er viktig for utvikling av elevenes forståelse og læring, og lærere har en kritisk rolle for kvaliteten på disse diskusjonen (eks. Carpenter et al. (2003); Kazemi & Hintz, 2014; Stein et al., 2008). Det at det arbeides med problemløsning hvor læreren gir elevene kognitivt krevende oppgaver, er noe som kan legge til rette for elevenes læring. Det er her viktig at læreren gir elevene faglig støtte, men samtidig har høye forventninger til dem (Wæge & Nosrati, 2018). Læreren spiller altså en viktig rolle for å legge til rette for elevenes læring under matematiske diskusjoner og under elevers arbeid med problemløsning. Jeg vil i dette kapittelet trekke noen konkluderende slutninger. Først vil forskningsspørsmålet belyses, deretter vil funnene kritisk diskuteres, og til slutt kommer forslag til videreføring av studien.

6.1 Forskningsspørsmål

Det har i min studie vært et fokus på tenkende klasserom, problemløsning, og matematiske diskusjoner. Jeg har analysert fem undervisningsøkter (hvor to av de ble nærmere studert), i tillegg til pre- og post-intervju av læreren. Forskningsspørsmålet som jeg vil besvare er:

> *Hvordan kan læreren i et tenkende klasserom legge til rette for elevenes læring gjennom dialog under arbeid med problemløsningsoppgaver på vertikale tavler?*

Konteksten for denne studien befinner seg innenfor et tenkende klasserom som er med å skape muligheter for lærerens tilrettelegging av elevenes læring. Elevene arbeider med problemløsning på vertikale tavler. Læreren i min studie legger til rette for elevene ved å gi elevene kognitivt krevende oppgaver (se kap.4.2.1 og kap.4.3.1). Samarbeid vil være en viktig del i et tenkende klasserom, hvor elevene arbeider i grupper på tre. En viktig måte elevene lærer å tenke individuelt på, er først gjennom å resonnere med andre (Mercer et al., 2019). Vi tenker med og gjennom artefakter (Säljö, 2001), som f.eks. vertikale tavler. Bruk av vertikale tavler i undervisningen er noe som legger til rette for elevers læring ved at det, som Mercer et al. (2019) hevder, åpner nye muligheter for lærere og elever å offentlig dele, forklare, rettferdiggjør, kritisere og omformulere ideer. De vertikale tavlene blir brukt for å skape diskusjon i gruppene, og i plenumsdiskusjonene. Ifølge mine resultater (kap.4) bruker læreren tavlene, i tillegg til å gå rundt å snakke med elevene, til å velge hvem som skal dele ut deres ideer. Læreren prøver også å koble sammen elevenes ideer i plenumsdiskusjonen, som er viktig for å legge til rette for deres læring da dette er noe som kan oppfordre til refleksjon rundt andres ideer, samt evaluering og revidering av egne ideer (Stein et al., 2008).

Mine analyser, resultatene (kap.4) og diskusjonen (kap.5), har tydeliggjort at læreren benytter seg av flere lærerhandlinger som bidrar til å invitere elevene inn i diskusjonen. Det kom tydelig frem i analysen at læreren benyttet seg av enkelte handlinger oftere enn andre, men felles er at læreren styrte den matematiske diskusjonen. Dette er noe som trekkes frem som viktig i litteraturen, hvor læreren har en viktig rolle i tilrettelegging for diskusjon og problemløsning. For å skape klasserom hvor elever deltar i diskusjoner som bidrar til å lære dem matematikk, er det blant annet viktig at læreren jobber mot å nå et matematisk mål for økten, og orienterer elever til hverandres ideer (Kazemi & Hintz, 2014; Stein et al., 2008). Mine analyser viser at læreren tar i bruk ulike handlinger under elevers arbeid på vertikale tavler for å støtte dem i deres problemløsningsprosess. Læreren legger til rette for elevenes læring ved å gi dem drahjelpen de trenger (Imsen, 2014), samtidig som elevene får en rimelig del av arbeidet (Plya, 1957). Dette gjør læreren blant annet ved bruk av hint (se kap.2.3.3). Læreren trekker frem dette i post-intervjuet: «*... Må finne den balansen, for denne metoden skal jo være slik at de skal eie oppgaven litt selv. Elevene. Samtidig som man må ha litt fremdrift*.» Som tidligere nevnt er det viktig å gi elevene faglig støtte, men fortsatt ha høye forventninger til dem (Wæge & Nosrati, 2018), samtidig som læreren må lede elevene mot et matematisk mål for timen (Kazemi & Hintz, 2014; Stein et al., 2008).

Ut fra mine analyser (kap.4 og kap.5) er det tydelig at læreren gjennom ulike lærerhandlinger legger til rette for elevers læring. Da ved å få elevene til å bruke ulike representasjoner for funksjoner, og løse problemene på flere måter. Dette er noe Kalchman og Koedinger (2005) trekker frem som viktig for at elevene skal utvikle en konseptuell forståelse. Læreren legger også til rette for elevenes læring ved å bruke lærerhandlinger som gir elevene muligheter til å forklare og begrunne egen tenkning, og resonnere gjennom egne og andres forklaringer. Dette er noe som trekkes frem som viktig for elevers utvikling av forståelse for matematikk (Carpenter et al., 2003; Lampert, 1990), og dermed for elevenes læring.

Denne studien kan være et bidrag til allerede eksisterende litteratur på feltet. Den kan være et bidrag ved at det er en case-studie, som ifølge Flyvberg (2006) kan bidra til vitenskapelig utvikling, og støtte opp andre studier på feltet. Ved å ta i bruk utvalgt analytisk rammeverk (kap.2.6 og kap.3.8) har mine analyser av fem undervisningsøkter (med hovedvekt på to av disse) vist at lærerens handlinger – i introduksjon av problem, under elever arbeid på vertikale tavler, og under plenumsdiskusjon – kan være med å legge til rette for elevers læring i et tenkende klasserom.

Som student har jeg gjennom arbeidet med denne masterstudien fått innblikk i hvordan læreren i et tenkende klasserom kan legge til rette for elevenes læring gjennom dialog. Jeg har også lært mer om tenkende klasserom og bruk av problemløsning. Denne masterstudien har gitt meg flere verktøy som jeg kan ta i bruk som nyutdannet lærer, da analysene har vist hvordan lærerens handlinger i en kontekst med tenkende klasserom, kan legge til rette for elevers læring.

6.2 Drøfting av funn

I denne studien har jeg studert én lærer og hans klasse på 8.trinn over tre uker. Dette er noe som gav mulighet til å gå i dybden på noen få personers opplevelse. Videre vil det på denne studiens premisser ikke være mulighet for å generalisere funnene til hvordan flere lærere legger til rette for elevenes læring (gjennom dialog) i et tenkende klasserom. Funnene i denne studien kan derimot gi et bidrag til videre forskning på feltet, og andre kan bruke det til å støtte opp under deres studie.

Noen av lærerhandlingene ble kun brukt noen få ganger, og enkelte ble ikke brukt i de ulike delene av undervisningsøkten (introduksjon – elevers arbeid – plenumsdiskusjon). Mulige årsaker til dette kan være at det kun ble observert ett matematisk tema over en kort periode (tre uker), konteksten undervisningsøktene befant seg i (tenkende klasserom – kap.2.3), eller lærerens måte å undervise på. Dette er elementer som kan påvirke studiens funn og kan bidra til et ufullstendig bilde av lærerens handlinger.

6.3 Eventuell videreføring

Det kunne vært interessant i en eventuell videreføring av denne studien å se på hvordan lærere gjennom dialog legger til rette for elevers læring under problemløsning i ulike kontekster (hvor tenkende klasserom er en kontekst). I tillegg kunne det også vært interessant å ha samme forskningsspørsmål som i min studie, men hatt fokus på flere lærere for å kunne sammenligne. I min studie var det et fokus på lærerens handlinger, men i en videreføring kunne det vært interessant å se på elevenes intervensjoner i tillegg til lærerens handlinger, og hvordan disse påvirker hverandre.

Referanseliste

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V. & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School science and Mathematics, 112* (3), 159–170. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00129.x

Bakker, A., Smit, J. & Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: Introduction and review. *ZDM Mathematics Education*, *47*(7), 1047–1065. http://doi.org/10.1007/s11858-015-0738-8

Birkeland, M. & Stensvold, M. (2020). *Elevposisjoner og matematisk kreativitet i problemløsning: En kvalitativ casestudie av elevers posisjonering og matematisk kreativitet i et Thinking Classroom* [Masteroppgave]. UiT Norges arktiske universitet.

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2016). *Alfa: Matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1-7 og 5-10* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *6*(3), 113–133. https://doi.org/10.29333/iejme/264

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School*. Heinemann.

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions: using math talk to help students learn* (2nd ed.). Math Solutions.

Clement, J., Lockhead, J. & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *88*(4), 286–290. https://doi.org/10.1080/00029890.1981.11995253

Csíkszentmihályi, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience*. Harper and Row.

Csíkszentmihályi, M. (1996). *Creativity: Flow and the psychology of discovery and invention.* Harper Perennial.

Csíkszentmihályi, M. (1998). *Finding flow: The psychology of engagement with everyday life.* Basic Books.

Dawson, C. (2009). *Introduction to Research Methods: A Practical Guide for Anyone Undertaking a Research Project* (4th ed.). Little, Brown Book Group.

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions – a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in* Mathematics, *85*(2), 281–304. http://doi.org/10.1007/s10649-013-9515-1

Drageset, O. G. (2015). Student and teacher interventions: a framework for analysing mathematical discourse in the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(3), 253–272. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9280-9

Drageset, O. G. (2019). How teachers use interactions to craft different types of student participation during whole-class mathematical work. In U. F. Jankvist, M. Heuvel Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh congress of the european society for research in mathematics education* (No. 11). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Drageset, O. G. & Allern, T. H. (2018). Curious classrooms. Changing classroom discourse in mathematics using roles. Submitted for review.

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring.* Abstrakt forlag AS.

Flyvbjerg, B. (2006). Five Misunderstandings About Case-Study Research. *Qualitative Inquiry, 12*(2), 219–245. https://doi.org/10.1177/1077800405284363

Flyvberg, B. (2011). Case Study. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (4th ed., p. 301–316). Sage.

Goos, M. (2004). Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 258–291. https://doi.org/10.2307/30034810

Gjone, G. (1997). *Veiledning til Funksjoner*. Nasjonalt læremiddelsenter.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Dover Publications.

Imsen, G. (2014). *Elevens verden: Innføring i pedagogisk psykologi* (5. utg.). Universitetsforlaget.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments* [Doktorgradsavhandling]. University of Nottingham.

Kalchman, M. & Koedinger, K. R. (2005). Teaching and learning functions. In National Research Council. *How students learn: mathematics in the classroom* (p. 351–393). The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/11101

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk: How to structure and lead productive mathematical discussions*. Stenhouse Publishers.

Kerslake, D. (1981). Graphs. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (11–16, p. 120–136). John Murray.

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 500–507. https://doi.org/10.2307/749655

Kuhn, T. S. (1987). What are scientific revolutions? In L. Kruger, L. J. Daston & M. Heidelberger (Eds.), *The probabilistic revolution, Vol. 1: Ideas in history*, 7–22. MIT Press.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju*. Gyldendal Akademisk.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29–63. https://doi.org/10.3102/00028312027001029

Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (p. 263–343). Academic Press.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (p. 763–804). Information Age.

Lester Jr, F. K. & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (p. 117–135). Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Lester, F. K., Garofalo, J. & Kroll, D. L. (1989). *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two Grade 7 classes* (Final report to the National Science Foundation, NSF Project No. MDR 85-50346). Bloomington: Indiana University, Mathematics Education Development Center.

Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. In P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives* (p. 361-386). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_21

Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin.

Liljedahl, P. & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(4), 723–735. http://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. & Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. In G. Kaiser (Ed), *Problem Solving in Mathematics Education. ICME-13 Topical Surveys* (p. 1–39). Springer Open. http://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2

Lim, W., Lee, J., Tyson, K., Kim, H. & Kim, J. (2019). An integral part of facilitating mathematical discussions: follow-up questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(2), 377–398. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10763-019-09966-3

Maxwell, J. A. (2008). Designing a Qualitative Study. In L. Bickman & D. J. Rog (Eds.), *The SAGE handbook of applied social research methods* (2nd ed., p. 214–253). Sage.

Megowan-Romanowicz, C. (2016). Whiteboarding: A tool for moving classroom discourse from answer-making to sense-making. *The Physics Teacher*, *54*(2), 83–86. https://doi.org/10.1119/1.4940170

Mercer, N., Hennessy, S. & Warwick, P. (2019). Dialogue, thinking together and digital technology in the classroom: Some educational implications of a continuing line of inquiry. *International Journal of Educational Research*, 97, 187–199. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2017.08.007

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 175–194.

Pantziara, M. & Philippou, G. (2007). Students´Motivation and Achievement and Teachers´Practices in the Classroom. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds.). *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education* (bind 4, p. 57–64). Seoul: PME.

Pantziara, M. & Philippou, G. (2010). Endorsing motivation: Identification of instructional practices. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in mathematics Education, January 28th-February 1st 2009.* Lyon : INRP.

Personopplysningsloven. (2018). Lov om behandling av personopplysninger (LOV-2018-06-15-38). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2018-06-15-38/*

Pijls, M., Dekker, R. & Van Hout-Wolters, B. (2007). Reconstruction of a collaborative mathematical learning process. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(3), 309–329. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9051-3

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). Princeton University Press.

Pruner, M. & Liljedahl, P. (2021). Collaborative problem solving in a choice-affluent environment. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(4), 753–770. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01232-7

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning*, (p. 334–370). New York: MacMillian. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification—The case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 59–84.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (p. 1–22). National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stein, M. K., Smith, M. K., Henningsen, M. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A case book for professional development*. Teachers College Press.

Superfine, A. C., Canty, R. S. & Marshall, A. M. (2009). Translation between external representation systems in mathematics: all-or-none or skill conglomerate? *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(4), 217–236. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.10.002

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: et sosiokulturelt perspektiv* (S. Moen, Overs.). Cappelen akademisk forlag.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode.* (5. utg.). Fagbokforlaget.

Tokheim, A.V. (2021). *«Hvordan kan lærerens handlingsmønster i matematikk bidra til muligheter for læring for elevene?»* [Masteroppgave]. Universitetet i Stavanger.

Utdanningsdirektoratet (2020). Læreplan i matematikk 1-10 (MAT01-05): Kjerneelement. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk* 1-10 (MAT01-05): Relevans og verdier. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier.

Valbekmo, I. & Svorkmo, A.-G. (2021). Whiteboards as a problem-solving tool. In G. A. Nortvedt, N. F. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Hähkioniemi, B. E. Jesse, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Naalsund, H. K. Nilsen, P. Portaankorva-Koivisto, G. Pálsdóttir, J. Radisic & A. Werneberg (Eds.), *Bringing Nordic mathematics education into the future. Papers from NORMA 20. Preceedings of the Ninth Nordic Conference on Mathematics Education*, 281–288. Swedish Society for Research in Mathematics Education.

Webster, D. (1979) *New Universal Unabridged Dictionary.* (2nd ed.). Simon & Schuster.

Wells, M., Hestenes, D. & Swackhamer, G. (1995). A modeling method for high school physics instruction. *American Journal of Physics*, *63*(7), 606–619. https://doi.org/10.1119/1.17849

Wenning, C. J. (2005). Whiteboarding and Socratic dialogues: Questions and answers. *Journal of Physics Teacher Education Online, 3*(1), 3–10.

Wæge, K. (2007). *Elevers motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning* [Doktorgradsavhandling]. Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskaplige universitet.

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Universitetsforlaget.

Wæge, K. & Pantziara, M. (2013). Students´ motivation and teachers´ practices in the mathematics classroom. *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in mathematics Education* (CERME 8), 6-10 February. Antalya, Tyrkia.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv lærer

Vil du delta i forskningsprosjektet

Problemløsningsarbeid i et tenkende klasserom?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å studere lærere og elever under problemløsning på whiteboards, i et tenkende klasserom. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Den nye læreplanen har et fokus på problemløsning, hvor det står både om problemløsning og utforskning i fagets relevans og verdier, men også som et kjerneelement (Utdanningsdirektoratet,2020). I denne studien ønsker vi å se nærmere på problemløsning, og da i en kontekst hvor det blir gjort i det som kalles et tenkende klasserom. I et tenkende klasserom er det individer som tenker og lærer sammen, og forståelse og kunnskap blir konstruert gjennom aktivitet og diskusjon. Det vil da være naturlig å jobbe med problemløsning, siden man i et tenkende klasserom trenger noe å tenke på. Vertikale whiteboard-tavler er noe som blir brukt som verktøy i denne settingen, hvor elevene kan skrive ned tanker og ideer, som gjøres synlig for alle. Vi skal i denne studien se på lærer-elev dialog og elev-elev dialog under problemløsning på whiteboard-tavler. I tillegg skal vi se på hvordan elevene bruker disse tavlene, og hvordan de tar i bruk andre elevers tavler. Denne studien skal brukes til å skrive tre individuelle masteroppgaver.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta fordi du underviser i matematikk med en undervisning basert på problemløsning i et Thinking Classroom. Vi inviterer en lærer til å delta i prosjektet - samt utvalgte elever i lærerens klasse. Kontaktopplysninger fått fra veileder i masteroppgavene.

Hva innebærer det for deg å delta?

Deltakelse i prosjektet innebærer å være med på et intervju (varighet maksimalt en time) og at vi får observere seks undervisningstimer over tre uker som du har ansvar for. I undervisningstimene vil det bli tatt videoopptak og lydopptak. I tillegg ønsker vi at du kan hjelpe oss å finne to grupper med elever (3 elever i hver gruppe) fra en av klassene du underviser i matematikk til å stille opp i elevintervju (ca. 15–20 minutter). Elevintervjuene vil gjennomføres som gruppeintervjuer med 3 elever i hver gruppe, det er ønskelig at gruppene med elever er de samme som er i gruppe under tenkende klasserom gjennomgangen.

Vi vil sende ut informasjonsskriv med samtykkeskjema til foreldrene i forkant, og foreldre kan også få se spørreskjema og intervjuguide (for de som har barn som har sagt seg villige til å delta i intervju) på forhånd. Dette kan ordnes ved å ta kontakt med prosjektleder: Raymond Bjuland.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Forskningen vil gjennomføres i forbindelse med undervisning, og det vil bli tatt video- og lydopptak. Alle elevene som ikke ønsker å delta bør derfor få et alternativt opplegg. Dersom det ikke er mulig å ha de som ikke vil

delta utenfor klasserommet, så vil vi flytte elevene slik at de ikke blir filmet. Vi vil også unngå å ta frem det elevene som ikke vil delta sier.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Lydopptak fra intervjuene og videoopptak fra undervisning vil kun være tilgjengelig for forskerne i prosjektet - samt veileder - så lenge prosjektet varer.
- Lydopptakene og videoopptak vil lagres på krypterte minnepinner, og opptakene vil transkriberes og anonymiseres. Alle navn vil erstattes med fiktive navn, og vi vil sørge for at kontaktopplysninger lagres sikkert adskilt fra øvrige data

  I publikasjoner fra forskningsprosjektet vil alle opplysninger anonymiseres, og vi vil sørge for at det ikke blir gitt opplysninger som gjør at deltakerne kan gjenkjennes.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 31. juli 2023. Da vil alle lydopptak og video-opptak slettes, og vi vil kunne oppbevare anonymiserte transkripsjoner fra intervjuene og videoopptakene.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Universitetet i Stavanger* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

  Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- *Universitetet i Stavanger* ved *Raymond Bjuland* (tlf: 91 83 71 86, e-post: raymond.bjuland@uis.no), eller Line Berge (tfl: 91 75 69 19, e-post: line.berge@hotmail.com), eller Maren Nygaard Nes (tlf: 45 25 27 40, e-post: marennygaardnes@gmail.com), eller Teodor Skjæveland (tlf: 94 26 43 95, e-post: teodor@skjaeveland.eu).
- Vårt personvernombud: Rolf Jegervatn (e-post: personvernombud@uis.no).

  Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

● NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på e-post (personverntjenester@nsd.no) eller på

telefon: 53 21 15 00. Med vennlig hilsen

Raymond Bjuland Maren Nygaard Nes, Line Berge, Teodor Skjæveland

(veileder) (student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *[Problemløsningsarbeid i et tenkende klasserom]*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i intervju
- ☐ å delta i videoopptak

  Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2: Informasjonsskriv foreldre

Vil du delta i forskningsprosjektet

Problemløsningsarbeid i et tenkende klasserom?

Dette er et spørsmål om deltakelse i et forskningsprosjekt hvor formålet er å studere lærere og elever under problemløsning på whiteboards, i et tenkende klasserom. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål

Den nye læreplanen har et fokus på problemløsning, hvor det står både om problemløsning og utforskning i fagets relevans og verdier, men også som et kjerneelement (Utdanningsdirektoratet,2020). I denne studien ønsker vi å se nærmere på problemløsning, og da i en kontekst hvor det blir gjort i det som kalles et tenkende klasserom. I et tenkende klasserom er det individer som tenker og lærer sammen, og forståelse og kunnskap blir konstruert gjennom aktivitet og diskusjon. Det vil da være naturlig å jobbe med problemløsning, siden man i et tenkende klasserom trenger noe å tenke på. Vertikale whiteboard-tavler er noe som blir brukt som verktøy i denne settingen, hvor elevene kan skrive ned tanker og ideer, som gjøres synlig for alle. Vi skal i denne studien se på lærer-elev dialog og elev-elev dialog under problemløsning på whiteboard-tavler. I tillegg skal vi se på hvordan elevene bruker disse tavlene, og hvordan de tar i bruk andre elevers tavler. Denne studien skal brukes til å skrive tre individuelle masteroppgaver.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta fordi du er forelder/foresatt til en elev ved en skole med en undervisning basert på problemløsning i et Thinking Classroom. Vi inviterer en lærer til å delta i prosjektet - samt utvalgte elever i lærerens klasse. Kontaktopplysninger fått fra veileder i masteroppgavene.

Hva innebærer det å delta?

Deltakelse i prosjektet innebærer å være med på seks undervisningstimer (på 45-60 minutter), hvor det vil bli tatt video- og lydopptak av undervisningen.

Deltakelse i prosjektet innebærer å være med på et gruppeintervju (ca. 15-20 minutter) sammen med 2 andre elever fra klassen.

Foreldre/foresatte kan få se intervjuguide (for de barn som har sagt seg villige til å delta i intervju) på forhånd. Dette kan ordnes ved å ta kontakt med prosjektleder: Raymond Bjuland.

I elevintervjuet vil elevene bli bedt om å svare på/diskutere valgene de tok i undervisningsøkten. Og da knyttet til det de skrev på whiteboard-tavlen (elevsvarene vil da anonymiseres).

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger om ditt barn vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller ditt barn hvis de ikke vil delta eller senere velger å trekke seg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Lydopptak fra intervjuene og videoopptak fra undervisning vil kun være tilgjengelig for forskerne i prosjektet - samt veileder - så lenge prosjektet varer.
- Lydopptakene og videoopptak vil lagres på krypterte minnepinner, og opptakene vil transkriberes og anonymiseres. Alle navn vil erstattes med fiktive navn, og vi vil sørge for at kontaktopplysninger lagres sikkert adskilt fra øvrige data

  I publikasjoner fra forskningsprosjektet vil alle opplysninger anonymiseres, og vi vil sørge for at det ikke blir gitt opplysninger som gjør at deltakerne kan gjenkjennes.

  Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

  Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 31. juli 2023. Da vil alle lydopptak og video-opptak slettes, og vi vil kunne oppbevare anonymiserte transkripsjoner fra intervjuene og videoopptakene.

  Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?

  Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

  På oppdrag fra *Universitetet i Stavanger* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

  Dine rettigheter

  Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger som er registrert om ditt barn, og å få utlevert en kopi av

  opplysningene

- å få rettet opplysninger om ditt barn
- å få slettet personopplysninger om ditt barn, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av ditt barns personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- *Universitetet i Stavanger* ved *Raymond Bjuland* (tlf: 91 83 71 86, e-post: raymond.bjuland@uis.no), eller Line Berge (tfl: 91 75 69 19, e-post: line.berge@hotmail.com), eller Maren Nygaard Nes (tlf: 45 25 27 40, e-post: marennygaardnes@gmail.com), eller Teodor Skjæveland (tlf: 94 26 43 95, e-post: teodor@skjaeveland.eu).
- Vårt personvernombud: Rolf Jegervatn (e-post: personvernombud@uis.no).

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

● NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på e-post (personverntjenester@nsd.no) eller på

telefon: 53 21 15 00. Med vennlig hilsen

Raymond Bjuland Maren Nygaard Nes, Line Berge, Teodor Skjæveland

(veileder) (student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *[Problemløsningsarbeid i et tenkende klasserom]*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ at mitt barn kan delta i intervju
- ☐ at mitt barn kan delta i videoopptak

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3: Intervjuguide – pre-intervju (lærer)

Lærerintervju: Pre-intervju (60-75 minutter)

Utdanning og erfaring (10 min)
Kan du si litt om din utdanning og erfaring som lærer? (hvor mange år og utdanning, trinn)

- Kan du si noe om skolen du jobber på? (størrelse)
- Hvordan du vil beskrive klassen du underviser? (ingen diagnoser, takk)
- Kan du si noe om samarbeid/frihet/utviklingsmuligheter på skolen?
- Er det noe annet du ønsker å tilføye?

Bruk av tenkende klasserom på skolen(15min)
Kan du si litt om hvordan tenkende klasserom blir brukt på skolen? (andre lærere? samarbeid med kollegaer? støtte fra administrasjon/kollegaer?)
Hva gjorde at du startet med å arbeide med tenkende klasserom?
Hvordan introduserer du et slikt tenkende klasserom for en ny klasse?

- Hvordan legger du opp til dette?
- Hva legger du vekt på?

Hva legger du vekt på i planleggingen? (gjerne bruk eksempel fra en økt)
Hvor mye tid bruker du på å predikere undervisningen under planleggingen?

Muligheter og utfordringer med tenkende klasserom (10 min)
Hvilke muligheter og utfordringer ser du ved å arbeide på denne måten?
Hva ser du som spesielt utfordrende?
Kan du gi et eksempel på en problemløsningsoppgave du har brukt i tenkende klasserom, og hva var spesielt med den?

Elevers bruk av whiteboardtavler (15 min)
Hvilke erfaringer har du med elevene og bruk av hverandres whiteboardtavler? (hvordan bruker de andres tavler?)
Hvordan organiserer du en slik time? (elevene gå fritt? Noen grep?)

- Hvordan innfører du dette for en ny klasse?

Hvordan blir kunnskapen tilgjengelig for fellesskapet i klassen ved å arbeide i tenkende klasserom med whiteboardtavler?
Hvilke strategier har du sett at elever bruker når de tar i bruk hverandres tavler?

- Noen spesielle oppgaver du ønsker å trekke frem, som får frem dette, noen spesielle strategier?

Planer og prediksjon av øktene som skal observeres (20 min)
Hva er dine planer for de videre øktene (som vi skal observere)? (litt overordnet om de fem)
Hvilke problem har du tenkt å bruke i denne gitte perioden?
Kan du gå litt mer inn i én av disse øktene?

- Hvordan innfører du denne økten?

- Hvilken oppgave skal du bruke?
- Hva tenker du med bruken av denne oppgaven i økten?
- Prediksjon, hvilke elevsvar tenker du å få frem i denne økten?

Generelle oppfølgingsspørsmål:

- Kan du utdype litt?
- Kan du gi et eksempel?
- Kan du si litt mer om det?
- På hvilken måte …?
- Hvis jeg forsto deg rett, så sa du at …
- Hva legger du i…?
- Jeg hører du sier dette, men ... kan du?

Vedlegg 4: Intervjuguide – post-intervju (lærer)

Post-intervju (lærer)

Hva tenker du etter disse tre øktene vi har observert i forhold til problemløsning, og dette med tenkende klasserom? (ballong oppgave, taco oppgave, sprint oppgave).

Har undervisningsøktene truffet dine forventninger eller prediksjoner?

Tror du elevene har fått læringsutbytte av å arbeide på denne måten?

- Hvem synes du får mest utbytte av å arbeide på denne måten? (tenkende klasserom, problemløsning)?
- Har du sett noe utvikling i elevenes motivasjon i forhold til dette med tenkende klasserom (gjennom de observerte øktene, men også siden dere startet)?

Er det noe som har overrasket deg? (både en positiv og negativ hendelse).

Hva tenker du på i forhold til oppfølging av elever når du planlegger øktene? (planlegger du hvor de kan «sitte fast» (hva som er vanskelig), hvilke løsninger som kan dukke opp?)

Hva tenker du om tilrettelegging av elevenes læring i et slikt tenkende klasserom?

- Hvordan bruker du dialog med elevene for å støtte dem i deres arbeid? (med problemløsning på disse whiteboard-tavlene – grupper, helklasse, bygge på hverandre).
- Går du rundt og ser hvilke løsninger du ønsker skal komme frem, hvem du ønsker skal dele med klassen? (får du elevene til å bygge på hverandres ideer, kommentere hverandres ideer?)

Utgangspunkt i lydopptak:

- Hva tenker du om dette utdraget?
- Hva tenker du om hvordan du hjelper elevene her?
- Hvordan legger du til rette for elevenes læring?

Vedlegg 5: Intervjuguide – elevintervju

Elevintervju-guide

1. Hva synes dere om matematikk?
2. Hva synes dere om arbeid med tenkende klasserom?
    a. Tilfeldige grupper
    b. Tavler
    c. Problemer
3. Hvordan samarbeider dere i løsning av problem?
    a. Har dere en plan for hvordan dere skal løse problemet når det er fått
4. Hvordan starter dere med et problem når dere får det utgitt?
5. Hva tenker dere om arbeid med tavler i matematikkundervisningen?
6. Hva gjør dere om dere ikke kan svare på problemet?
7. Får dere mye hjelp fra lærer i arbeidet med løsning av oppgaver?
8. Svarer lærer dersom dere spør om noe er rett?
9. Hender det at dere tar i bruk andre sine tavler?
    a. Låne/bruke ideer som dere ser andre har gjort?
    b. Sammenligne deres løsningsmåte med de andre
    c. Diskutere løsning med andre grupper
    d. Går dere bort til andre grupper for tips eller hjelp?
10. Er det greit i klassen deres å gå å se hva andre har gjort og gjøre noe av det samme?
11. Hva synes dere når andre ser på deres tavler?

Vedlegg 6: NSD – Godkjennelse

Melding fra NSD

14.12.2021 11:19

Behandlingen av personopplysninger er vurdert av NSD. Vurderingen er:

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 14.12.2021 med vedlegg. Behandlingen kan starte.

TAUSHETSPLIKT

Deltagerne i prosjektet er lærere og har taushetsplikt. Intervjuene må gjennomføres uten at det fremkommer opplysninger som kan identifisere elever. Vi anbefaler at forsker er spesielt oppmerksom på at ikke bare navn, men også identifiserende bakgrunnsopplysninger må utelates, som for eksempel alder, kjønn, navn på skole, diagnoser og eventuelle spesielle hendelser. Vi forutsetter også at en er forsiktig ved å bruke eksempler under intervjuene.

Forsker og læreren har et felles ansvar for det ikke kommer frem taushetsbelagte opplysninger under intervjuet. Vi anbefaler at forsker minner læreren om taushetsplikten før intervjuet starter.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.07.2023.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 1

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 2

Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål – dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. Art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGNING AV PROSJEKTET

NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Markus Celiussen Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 7: NSD – Meldeskjema

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Meldeskjema

Referansenummer

375378

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

- Navn (også ved signatur/samtykke)
- E-postadresse, IP-adresse eller annen nettidentifikator
- Bilder eller videoopptak av personer
- Lydopptak av personer

Prosjektinformasjon

Prosjekttittel

Problemløsningsarbeid i Thinking Classrooms

Prosjektbeskrivelse

Problemløsning er et kjerneelement i den nye læreplanen. En måte å arbeide med problemløsning er gjennom Thinking Classroom. I et thinking classroom bryter man opp klasseromsstrukturen og elevene arbeider i mindre grupper på vertikale whiteboards. Denne studien skal utforske problemløsning gjennom thinking classroom. Vi skal se på dialog mellom elev-elev, lærer-elev og bruken av disse vertikale whiteboards.

Begrunn behovet for å behandle personopplysningene

I prosjektet vil vi gjennomføre intervjuer med utvalgte lærere og elever og videoopptak av undervisning. Vi er nødt til å behandle e-postadresser (for læreren) og navn for å kunne opprette kontakt og avtale gjennomføring av intervjuene. For å sikre at vi får dokumentert det deltakerne formidler i intervjuet mest mulig nøyaktig, vil vi gjøre lydopptak av intervjuene.

Ekstern finansiering

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Maren Nygaard Nes, marennygaardnes@gmail.com, tlf: 45252740

Behandlingsansvar

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Stavanger / Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora / Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Raymond Bjuland, raymond.bjuland@uis.no, tlf: 91837186

Skal behandlingsansvaret deles med andre institusjoner (felles behandlingsansvarlige)?

Nei

Utvalg 1

Beskriv utvalget

Utvalgt lærer på grunnskolen

Rekruttering eller trekking av utvalget

Lærer tok kontakt med vår veileder og viste interesse for forskning.

Alder

25 - 45

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 1

- Navn (også ved signatur/samtykke)
- E-postadresse, IP-adresse eller annen nettidentifikator
- Bilder eller videoopptak av personer
- Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 1?

Personlig intervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Ikke-deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Informasjon for utvalg 1

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?

Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Utvalg 2

Beskriv utvalget

Elever i klassen til utvalgt lærer

Rekruttering eller trekking av utvalget

Vi planlegger å velge ut elever i klassen til den valgte lærern basert på frivillighet.

Alder

11 - 15

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 2

- Navn (også ved signatur/samtykke)
- Bilder eller videoopptak av personer

- Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 2?

Gruppeintervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Ikke-deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Informasjon for utvalg 2

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?

Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Tredjepersoner

Skal du behandle personopplysninger om tredjepersoner?

Nei

Dokumentasjon

Hvordan dokumenteres samtykkene?

- Manuelt (papir)
- Elektronisk (e-post, e-skjema, digital signatur)

Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?

Ved å ta kontakt med prosjektleder, Raymond Bjuland.

Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet opplysninger om seg selv?

Ved å ta kontakt med prosjektleder, Raymond Bjuland.

Totalt antall registrerte i prosjektet

1-99

Tillatelser

Skal du innhente følgende godkjenninger eller tillatelser for prosjektet?

Behandling

Hvor behandles opplysningene?

- Maskinvare tilhørende behandlingsansvarlig institusjon
- Mobile enheter tilhørende behandlingsansvarlig institusjon

Hvem behandler/har tilgang til opplysningene?

- Prosjektansvarlig
- Student (studentprosjekt)
- Interne medarbeidere

Tilgjengeliggjøres opplysningene utenfor EU/EØS til en tredjestat eller internasjonal organisasjon?

Nei

Sikkerhet

Oppbevares personopplysningene atskilt fra øvrige data (koblingsnøkkel)?

Ja

Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?

- Opplysningene anonymiseres fortløpende
- Opplysningene krypteres under lagring
- Adgangsbegrensning

Varighet

Prosjektperiode

08.10.2021 - 31.07.2023

Skal data med personopplysninger oppbevares utover prosjektperioden?

Nei, data vil bli oppbevart uten personopplysninger (anonymisering)

Hvilke anonymiseringstiltak vil bli foretatt?

- Koblingsnøkkelen slettes
- Personidentifiserbare opplysninger fjernes, omskrives eller grovkategoriseres
- Lyd- eller bildeopptak slettes

Vil de registrerte kunne identifiseres (direkte eller indirekte) i oppgave/avhandling/øvrige publikasjoner fra prosjektet?

Nei

Tilleggsopplysninger
