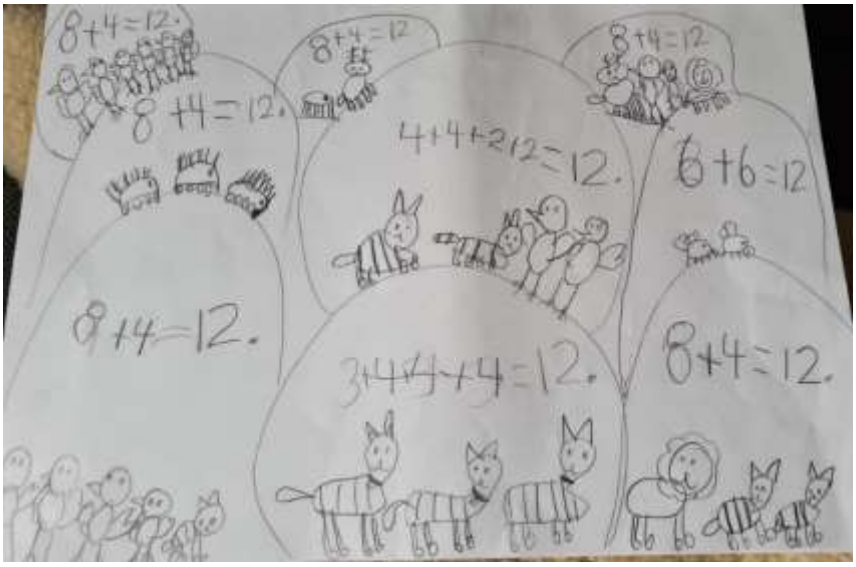
«Han kunne ha sett seks dyr med to bein»!



En kvalitativ flercase-studie som studerer undersøkende undervisning med en LIST-oppgave i begynneropplæringen.

Erfaringsbasert master for lærerspesialister

av

Laila Haugland

Universitetet i Stavanger

Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora

Nasjonalt senter for leseopplæring og leseforskning

Våren 2022

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Erfaringsbasert master i begynneropplæring	Vårsemesteret, 2022
Forfatter: Laila Haugland	
Veileder: Ingunn Valbekmo	
Tittel på masteroppgaven:	«Han kunne ha sett seks dyr med to bein!» En kvalitativ flercase-studie som studerer undersøkende undervisning med en LIST-oppgave i begynneropplæringen**.**
	Stavanger, 1. juni 2022 dato/år

Sammendrag

I denne studien granskes bruk av undersøkende undervisning i matematikk. Tidligere forskning peker på at undersøkende undervisning kan føre til motiverte elever og gi god tilpasset opplæring. I læreplanen finner vi kjerneelementene *Utforsking og problemløsing* og *Representasjon og kommunikasjon*, som legger føringer for hvordan elevene skal arbeide i matematikkfaget. Det er derfor svært relevant å undersøke hvilke representasjoner elevene velger når de får arbeide utforskende. I studien gjennomføres en kvalitativ flercase-studie, hvor fire lærere observeres mens de gjennomfører undersøkende undervisning med klasser på andre og tredje trinn. Videre gjennomføres individuelle intervju med lærerne. Problemstillingen er: **Hvordan kan undersøkende undervisning ved bruk av en LIST-oppgave legge til rette for at elever i begynneropplæringen får utvikle matematisk kompetanse?** Elevenes representasjoner analyseres for å finne kjennetegn på matematisk kompetanse. Funnene viser en sammenheng mellom undersøkende undervisning og matematisk kompetanse i dette utvalget. To av klassene har arbeidet med undersøkende undervisning tidligere. I de to klassene oppdages en fleksibel og trygg bruk av representasjoner. Klassesamtalen er en viktig del av undersøkende undervisning. Å lede en god klassesamtale er krevende for læreren. Tre av fire lærere uttrykker at de føler seg usikre på gjennomføring av klassesamtalen. Studien kan gi implikasjoner for undervisning i matematikk. Ved å bruke mer undersøkende undervisning vil vi kunne skape klasser med aktive, motiverte elever, som stiller spørsmål og er medskapende. Det vil kunne gi bedre tilpasset opplæring for alle elevene.

Forord

Endelig nærmer en lang reise seg slutten. Etter to år med pendling til Oslo for å studere til lærerspesialist i begynneropplæring, var jeg litt usikker på om jeg ville skrive en masteroppgave. Etter et års pause fra studier, kom heldigvis lysten tilbake. Jeg begynte tidlig å lese alt jeg fant av forskning om undersøkende undervisning i matematikk. Det har vært vanskelig å avgrense oppgaven, da det er så mye som er interessant å undersøke i fagfeltet. Jeg så ikke for meg hvor mye arbeid det ville bli når jeg startet på denne reisen. Likevel innrømmer jeg at det har vært utrolig lærerik. Jeg har lært mye ved å sette meg inn i nyere forskning om undervisning i matematikk, og enda mer underveis i arbeidet med denne oppgaven. Dette vil jeg ta med meg videre i utøvelsen av yrket. Håper jeg kan inspirere andre til å prøve undersøkende undervisning, slik jeg fikk gjøre ved å gjennomføre denne studien. Jeg tror ikke man blir helt utlært når man jobber som lærer. Kanskje det er nettopp derfor jeg trives så godt i yrket. Fremover skal jeg kose meg på jobb og ta fri i helgene. Etter flere år med etterutdanning skal det bli godt!

For å komme i mål har jeg hatt jevnlig kontakt med den dyktige veilederen min, Ingunn Valbekmo. Du har hjulpet meg opp når jeg har gått meg fast i bunnen av læringsgropa. Takk for utrolig nyttige tilbakemeldinger, uten deg kunne studien blitt en praksisfortelling. Jeg vil også takke familien min. Dere har sett mye mindre til meg, og det har vært færre familie-middager enn vi kunne ønsket oss. Takk for at dere alltid er positive og heier på meg. Den gode stemningen dere lager når vi møtes, og latterkramper med Silje og Mathilde er uvurderlig. Dere er mine gull! Min kjære samboer Rune, fortjener kanskje den største takken. Du har tatt hensyn til at jeg har vært inne i studiebobla både seint og tidlig. Mange helger og kvelder har gått med til at jeg har sittet time etter time med studier. Du er min klippe, og oppgaven kunne vanskelig blitt skrevet uten din støtte. Jeg vil også takke gode kollegaer. Både dere som sa ja til å delta som informanter og den fine heiagjengen med kollegaer som har større tro på meg enn jeg klarer å oppdrive selv. Det varmer, og jeg setter enormt stor pris på dere!
Helt til slutt vil jeg takk *deg*, for at du leser denne oppgaven. Håper den kan gi deg inspirasjon til å gjennomføre spennende undervisning i matematikk.

Laila Haugland

Bergen, 1. juni 2022

Innhold

1. Innledning

«Han kunne ha sett seks dyr med to bein!» er et utsagn fra en ivrig elev som ville i gang med å undersøke løsninger på en utforskende oppgave. Den gleden og iveren ønsker jeg å se mer av i matematikkundervisningen. Tema for denne studien er undersøkende undervisning i begynneropplæringen i matematikk. Bakgrunnen for at dette bør studeres nærmere, er at oppfatningen av hva som er god matematikkundervisning har endret seg mye de siste årene. I løpet av flere år med etterutdanning, har inspirerende forelesere gitt meg innblikk i nye sider ved matematikkfaget. Den matematikkundervisningen som ble utøvd på 80-tallet, var kanskje ikke den beste for å oppnå god kompetanse i matematikk. Vår generasjon kan kjenne seg igjen i at undervisningen bestod av å lære seg et visst antall regler og fremgangsmåter. Hvis oppgavetypen ikke fulgte samme mal, kunne det stoppe helt opp. Elevene utviklet ingen dypere forståelse for sammenhenger og hvorfor reglene i matematikken fungerte. Tanken om at «forståelsen kommer etter hvert» fortsatte i matematikkundervisningen langt utover 80-tallet. Formålet med denne studien er å formidle nyere kunnskap og forskning om matematikk. I kapittel 2 presenteres forskning på god undervisning i matematikk. I studien gjennomføres en casestudie med fire lærere som underviser andre og tredje trinn i matematikk. Lærerne blir observert mens de gjennomfører en LIST-oppgave (lav inngangsterskel og stor takhøyde) med sine elever. Raskt etterpå gjennomføres individuelle intervju med lærerne. Metode for innsamling av data beskrives nærmere i kapittel 3. I kapittel 4 vil funn fra studien bli presentert og analysert. Hovedfunnene drøftes i kapittel 5 og problemstillingen besvares i kapittel 6. Først vil styringsdokumentene som legger føringer for undervisningen i matematikk bli kort presentert, hentet fra Læreplanen Kunnskapsløftet 2020 (LK20), også kalt «Fagfornyelsen». Vi har undervist etter LK20 i litt mer enn ett år når denne studien gjennomføres.

1.1 Utforsking i LK20

Arbeidet med LK20 startet høsten 2017 og utdanningsdirektoratet samarbeidet med grupper av lærere, pedagoger og andre fagfolk. De kom frem til *kjerneelementer* i fagene – som er det viktigste elevene skal lære i hvert fag. Kjerneelementene forteller også noe om metode. I fagrelevans og sentrale verdier finner vi en beskrivelse av overordnede mål for faget:

> *Matematikk er eit sentralt fag for å kunne forstå mønster og samanhengar i samfunnet og naturen gjennom modellering og anvendingar. (…) Når elevane får tid til å tenkje, reflektere, resonnere matematisk, stille spørsmål og oppleve at faget er relevant, legg faget til rette for kreativitet og skapartrong. Matematikk skal bidra til at elevane utviklar evne til å jobbe*

sjølvstendig og samarbeide med andre gjennom utforsking og problemløysing, og kan bidra til at elevane blir meir bevisste på si eiga læring. Når elevane får høve til å løyse problem og meistre utfordringar på eiga hand, bidreg dette til å utvikle uthald og sjølvstende. (Utdanningsdirektoratet, 2020)

De overordnede målene for faget legger opp til undervisning som skal forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv i utvikling, ved å gi dem kompetanse i utforsking og problemløsing. Representasjon og kommunikasjon er et sentralt tema i denne studien. Legg merke til at elevene skal få tid til å *tenke, reflektere og resonnere matematisk* og oppleve at faget er *relevant*. Dette vil være sentralt når matematisk literacy og kompetanse defineres i kapittel 2. Det presiseres også at elevene skal få arbeide *selvstendig* og med *samarbeid* gjennom *utforsking* og *problemløsing* for å bli mer bevisst på egen læring. Dette vil være sentrale tema i hele denne studien.

Det er seks kjerneelementer i matematikkfaget: *Utforsking og problemløysing*, *Modellering og anvendingar*, *Resonnering og argumentasjon*, *Representasjon og kommunikasjon*, *Abstraksjon og generalisering* og *Matematiske kunnskapsområde* (Utdanningsdirektoratet, 2020). Selv om det kunne vært interessant å se på hele matematikkfaget, vil det bli for omfattende for denne oppgaven. Studien avgrenses til å gjelde kjerneelementene **Utforsking og problemløysing** og **Representasjon og kommunikasjon**. I læreplanen finner vi denne beskrivelsen av utforsking og problemløsing:

Utforsking i matematikk handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing. Elevane skal leggje meir vekt på strategiane og framgangsmåtane enn på løysingane. Problemløysing i matematikk handlar om at elevane utviklar ein metode for å løyse eit problem dei ikkje kjenner frå før. (Utdanningsdirektoratet, 2020)

Studien vil ta for seg utforsking og problemløsing i begynneropplæringen, og vil ta utgangspunkt i oppgaver der elevene må lete etter mønster, finne sammenhenger og diskutere seg frem til en felles forståelse. Ifølge læreplanen er strategier og fremgangsmåter viktigere enn resultat og løsninger. Det er derfor relevant å undersøke hvordan elevene synliggjør sine strategier når de arbeider med oppgaven. Studien vil ta for seg deler av kjerneelementet «Representasjon og kommunikasjon», da elevenes evne til å representere sine ideer vil bli undersøkt. I læreplanen blir representasjoner definert på denne måten:

Representasjonar i matematikk er måtar å uttrykkje matematiske omgrep, samanhengar og problem på. Representasjonar kan vere konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske. (Utdanningsdirektoratet, 2020).

I kapittel 2 defineres representasjonskompetanse. Det vil være et sentralt tema videre i studien og et av forskningsspørsmålene handler om hvordan elevene representerer sine løsninger. Representasjoner vil derfor være et gjennomgående tema i teori, funn og drøfting. I studien får elevene presentert en oppgave de ikke er kjent med fra før, der de i samarbeid med andre finner strategier for å løse oppgaven. Dette vil senere i oppgaven bli definert som *undersøkende undervisning*. I denne studien vil elever på andre og tredje trinn få samarbeide og kommunisere matematikk, ved å arbeide undersøkende med en LIST-oppgave fra Matematikksenteret.

1.2 Bakgrunn

Bakgrunnen for at undervisning i matematikk er relevant å undersøke, er hvordan norske elever hevder seg i internasjonale undersøkelser. Norge har deltatt som en aktiv partner i internasjonale storskalaundersøkelser de siste 20 årene. Allerede i 1995 deltok Norge i den første TIMSS-studien og har etter dette vært en aktiv deltaker i blant annet PISA, TIMSS og PIRLS (Björnsson & Olsen, 2018). Til sammen har TIMSS blitt gjennomført fem ganger og PISA seks ganger i Norge. Det er dermed et stort datagrunnlag fra disse undersøkelsene, noe som har blitt brukt til analyse av utviklingstrekk på systemnivå, samt mange vitenskapelige artikler som søker å tolke dataene for å beskrive endringer. Det er også flere doktorgrader som er helt eller delvis basert på analyser av data fra de internasjonale undersøkelsene. En utfordring med tanke på å studere data fra de norske undersøkelsene over tid, er at det på norsk initiativ ble gjort en endring av klassetrinnet undersøkelsene skulle gjennomføres på for å sikre mer jevn alder på elevene ved gjennomføring. I Norge ble derfor IEA-studiene (TIMSS, PIRLS, ICCS og ICILS) gjennomført på 5. og 9. trinn i stedet for 4. og 8. trinn. I overgangen på noen år ble undersøkelsen gjennomført på både 4. og 5. trinn, samt 8. og 9. trinn (Björnsson & Olsen, 2018).

PISA viser at de norske og danske elevene presterer omtrent likt i naturfag, mens de norske elevene presterer klart bedre enn de danske i lesing. I matematikk ser vi det motsatte bildet (Kjærnsli & Jensen, 2016). Man kan stille spørsmål ved hva som gjør at de norske elevene presterer dårligere i matematikk. For å belyse dette kan forskning på hva som kjennetegner god undervisning i matematikk benyttes. TIMSS og PISA måler fire dimensjoner av undervisningskvalitet: klasseledelse, støttende lærer, tydelige intensjoner og kognitive utfordringer. (Bergem, 2018). Det kommer tydelig frem at norske elever får mye oppgaveløsning i matematikktimene på skolen. Når det gjelder å diskutere strategier og resonnementer svarer norske elever at de i mindre grad bruker matematikktimene til dette. Nyere forskning om god undervisning i matematikk vil bli grundigere presentert i kapittel 2.

Norsk skole har gjennomgått en del endringer de siste 20 årene. Kunnskapsløftet 2006 ble etterfulgt av en rekke nasjonale satsinger rettet mot læreres arbeid og deres kunnskapsbase, eksempelvis *Vurdering for Læring* og *Ungdomstrinn i utvikling*, samt reformer i lærerutdanningen. Politiske initiativer rettet mot å styrke kunnskapsbasen til lærerne kan spores tilbake til gjennomsnittlige resultater på internasjonale undersøkelser og en bredere diskurs om at norske elever «ikke lærer nok» (Hermansen et al., 2018). Det vil være vanskelig å måle hvordan dette har påvirket resultatene på de store internasjonale undersøkelsene. Norske utdanningsmyndigheter har arbeidet med ulike tiltak for å endre både praksis og holdninger i skolen og i 2006-2007 ble stortingsmeldingen om tidlig innsats sendt ut (Det kongelige kunnskapsdepartement, 2006). Det påfølgende året (2008) kom den første kartleggingsprøven i regning rettet mot småtrinnet. Nortvedt (2018) har undersøkt hvordan lærere bruker de nasjonale kartleggingsprøvene i regning til å følge opp elever som ikke klarer å tilegne seg grunnleggende begrepsforståelse – det vil si et godt tallbegrep og strategier for å regne med tall – tidlig i opplæringsløpet. I tidsrommet 2014 til 2017 finner hun at antall elever under kritisk grense ikke ser ut til å minke som antatt, men heller øke. Dette kan ha sammenheng med at lærerne ikke vet hvordan de skal følge opp elevene for å gi dem bedre grunnleggende begrepsforståelse. Flere av elevene utvikler dermed *skoleskapte* vansker i matematikkfaget (Nortvedt, 2018). Nortvedt viser til tidligere forskning som peker på at det er en risiko for at elever under kritisk grense får tradisjonell undervisning som består av trening og drill hvor det er mest fokus på hva elevene ikke mestrer, noe som står i motsetning til hva forskning holder frem som gode strategier for å arbeide med elever som strever. Nortvedt påpeker at mange elever trenger bedre kunnskap om å telle fleksibelt. De trenger også aktiviteter som hjelper dem å danne et robust tallbegrep. For å lykkes med dette må elevene få utfordringer på sitt nivå og målet må være at de skal oppnå bedre begrepsforståelse og bedre strategier. Disse elevene bruker ofte naive og rigide «telle-alt-strategier» og må få mulighet til å lære mer fleksible strategier for å håndtere tall (Nortvedt, 2018). Dette støttes av Nortvedt og Pettersen som har analysert PISA-undersøkelsene fra 2015.

> *Mye forskning viser at den matematikkundervisningen lavtpresterende elever ofte får, kjennetegnes ved algoritmetrening som i liten grad er kognitivt stimulerende. For å utvikle en mer helhetlig matematisk kompetanse trenger lavtpresterende elever å få arbeide med et bredere spekter av oppgaver og aktiviteter* (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 132).

Det er interessant å finne ut hvordan elevene kan få bedre motivasjon i faget og oppnå bedre matematisk kompetanse. Dette vil bli nærmere belyst ved bruk av forskning i kapittel 2.

1.3 Problemstilling

Formålet med studien er å undersøke hvilken undervisning som kan bedre begynneropplæringen i matematikk i tråd med nyere forskning. I kapittel 2 kommer en teoridel hvor nyere forskning på undervisning i matematikk vil bli presentert. Undersøkende undervisning vil bli fremhevet, da det er et gjennomgående tema i denne studien. Studiens problemstilling er:

> **Hvordan kan undersøkende undervisning ved bruk av en LIST-oppgave legge til rette for at elever i begynneropplæringen får utvikle matematisk kompetanse?**

I studien avgrenses utvalget til å gjelde elever på andre og tredje trinn. Det vil bli nærmere begrunnet i kapittel 3, Metode. For å undersøke problemstillingen videre benyttes to forskningsspørsmål:

- Hvilke representasjoner velger elevene i sine løsninger?
- Hvilke refleksjoner har lærerne rundt gjennomføring av undersøkende undervisning?

For å undersøke problemstilling og forskningsspørsmål, observeres undervisning i fire klasser og det gjennomføres intervju med fire lærere. To av lærerne er kjent med undersøkende undervisning fra før, mens to av dem ikke har erfaring med å undervise på denne måten. For å undersøke det første forskningsspørsmålet studeres elevbesvarelser. Funn fra elevenes representasjoner vil bli presentert og analysert i kapittel 4. Det andre forskningsspørsmålet omhandler lærernes refleksjoner, og datagrunnlaget vil være lærerintervjuene. Funn fra lærerintervjuene vil også bli presentert og analysert i kapittel 4.

Videre presenteres aktuell forskning om matematikkundervisning, med spesielt søkelys på matematisk kompetanse, forståelse, motivasjon, representasjonskompetanse, undersøkende undervisning og klassesamtalen som er viktige begreper i denne studien.

2. Teorigrunnlag og tidligere forskning

Tema for denne studien er undersøkende undervisning, og den sosiale samhandlingen som skjer mellom elevene når de undersøker ulike løsninger på oppgaven er av stor interesse. Oppgaven blir skrevet med et *sosiokulturelt* syn på læring. Studien vil ha søkelys på hva elevene klarer når de får samhandle og får støtte fra hverandre. Et sosiokulturelt perspektiv på læring vil ifølge Dysthe (2001) innebære at vi ser på læring som grunnleggende sosialt og at språket er sentralt i alle læringsprosesser. I et sosiokulturelt perspektiv vil det ikke bare være interesse for *hva* en person lærer, men også hvordan og hvilken situasjon han lærer i. S*tøttende stillas* viser til «å utnytte den utviklingssonen der elevene er, bygge på det de alt kan gjøre, og så hjelpe dem til å gå videre, å gjøre det de ikke makter på egenhånd, å utvikle ferdigheter som ikke er modnet, men som er under modning» (Dysthe, 1995, s. 56). Støtten tilpasses og gjør barnet i stand til problemløsing og refleksjon innenfor den nærmeste utviklingssonen. Etter hvert som barnet lærer og mestrer på egenhånd kan støtten fjernes. For at elever sammen skal kunne lære mer, er det viktig at de får sette ord på sine tanker slik at de kan lære av og sammen med hverandre. Det fremheves også av Bruner som bruker begrepet *scaffolding* (Wood & Bruner, 1976). Det å prate sammen er grunnleggende for læring, og en samtale mellom elev og lærer, eller elev og elev kan brukes som stillas for elevens læring. Sosiokulturell teori baserer seg blant annet på teoriene til Vygotsky og Bakhtin. Dette er kjente navn fra pedagogikkfaget og de vil ikke bli presentert nærmere i denne sammenhengen. Videre vil kapittelet inneholde mer spesifikk teori om undervisning i matematikk, hvor også språkets utvikling sammen med forståelsen i matematikk vil være tema. I den forbindelse presenteres Vygotsky sin teori om begrepsutvikling.

Først i dette kapittelet vil noen begreper som står sentralt i studien bli definert. Et overordnet mål med undervisning i matematikk er at elevene skal oppnå god forståelse. Internasjonalt brukes begrepet «mathematical literacy», som vil bli definert sammen med matematisk kompetanse i kapittel 2.1. Det kommer en redegjørelse for forståelse i kapittel 2.2. Elevenes motivasjon henger ofte sammen med forståelse for faget. I kapittel 2.3 defineres motivasjon i matematikk og hvordan vi kan arbeide for å øke elevenes motivasjon. Det første forskningsspørsmålet i studien handler om elevenes representasjoner. I kapittel 2.4 defineres hva representasjonskompetanse kan innebære i begynneropplæringen. Kapittel 2.5 vil inneholde forskningsbaserte kjennetegn på god undervisning. Forskning fra Matematikksenteret, som har formål om å fremme en forsknings-basert forståelse av god læring og undervisning i matematikk vil være primærkilde. Videre presenteres forskning som beskriver undersøkende matematikkundervisning og IBL-inspirerte klasserom. I kapittel 2.6 beskrives den matematiske klassesamtalen, som er en viktig del av undersøkende undervisning, og som vil få en del oppmerksomhet i denne studien.

2.1 Matematisk kompetanse og literacy

I denne studien granskes sammenhengen mellom undersøkende undervisning og elever i begynneropplæring sin utvikling av *matematisk kompetanse*. Ryan og Deci definerer matematisk kompetanse som «en følelse av å være effektiv i samspillet med sine sosiale omgivelser og å oppleve at man får bruke og uttrykke kapasiteten sin» (Ryan & Deci, 2002, s. 7). En modell for matematisk kompetanse, utarbeidet av Niss og Jensen (2002) har satt tydelige spor i den nye læreplanen. Den har en bred definisjon av kompetanse som inneholder både tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse, resonnementskompetanse, representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse. I læreplanen finner vi kompetansene igjen i fagets kjerneelementer som beskriver sentrale arbeids- og tenkemåter i faget. Kjerneelementene har hovedvekt mot et prosessorientert fagsyn hvor elevenes utforsking og aktive bruk av matematikk er i sentrum. Det prosessorienterte fagsynet vektlegger matematikk som kreative og skapende prosesser. Dette fagsynet tar utgangspunkt i fagets arbeidsmåter og ser menneskelig intuisjon som den drivende kraften. I kompetansemålene er det på samme måte en tydelig bevegelse mot å vektlegge elevenes matematiske prosesser gjennom verb som utforske, sammenligne, modellere og generalisere (Evang, 2020).

Utvikling av tallforståelse fremheves som viktig for elevers læring i matematikk. Valenta (2015) påpeker at tallforståelse henger nært sammen med matematisk kompetanse. I «trådmodellen» består matematisk kompetanse av fem komponenter som er vevd tett sammen og avhengige av hverandre. «Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: begrepsmessig forståelse, beregning, anvendelse (strategisk tankegang), resonnering og engasjement» (Valenta, 2015, s. 2). For at elevene skal oppnå matematisk kompetanse må de få anledning til å arbeide med alle de fem komponentene samtidig. Det vil kunne gi elevene en mer varig tallforståelse som er fleksibel, nyttig og relevant. Videre kommer en kort redegjørelse av de fem komponentene i matematisk kompetanse.

Begrepsmessig forståelse vil innebære å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Valenta (2015) påpeker at det er viktig å kunne tolke og benytte ulike representasjoner, og oversette og veksle mellom dem ut fra hva som kan være nyttig. Å tolke ulike representasjoner og kunne veksle mellom dem er av stor betydning for utvikling av tallforståelse. Dette vil jeg komme nærmere inn på i kapittel 2.4, Representasjonskompetanse. **Beregning** handler om å kunne utføre ulike matematiske prosedyrer nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig. Det vil innebære å kunne utvikle ulike strategier med utgangspunkt i regnefortellinger, illustrasjoner, tallinjer, konkreter eller symboler, ifølge Valenta. Hun påpeker videre at *overganger* mellom de ulike representasjonene er av stor betydning. Det vil si at en kan veksle mellom ulike representasjoner og for eksempel uttrykke et matematisk uttrykk gjennom regnefortelling og symboler. På denne måten vil en kunne generalisere fremgangsmåten. **Anvendelse** eller **strategisk tankegang** innebærer å løse abstrakte matematiske problem og problem knyttet til hverdags-, arbeids- og samfunnsliv. Det vil innebære å formulere matematiske problem, representere dem på en hensiktsmessig måte, være fleksibel i utvikling av en løsningsstrategi og vurdere om løsningen er rimelig. Et problem kjennetegnes i denne sammenhengen av at man ikke har en rutine for å løse det, ifølge Valenta (2015). Når problemet er formulert, må det representeres matematisk før en kan arbeide videre med det. Med utgangspunkt i representasjonen, utvikles en løsningsstrategi. **Resonnering** vil si å kunne tenke logisk rundt relasjoner mellom begreper og situasjoner. Det vil også innebære å reflektere, utforme hypoteser, forklare og argumentere for sammenhenger mellom ulike begreper, egenskaper og framgangsmåter. Valenta påpeker at innen tallforståelse handler resonnering om ulike sammenhenger og egenskaper ved tall og regneoperasjoner. **Engasjement** handler om å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt. Det innebærer også å ha tro på at det er mulig å bli kompetent i matematikk, og at man lærer ved å streve og ikke gi opp. De fem komponentene støtter hverandre og utvikles samtidig. «Utvikling av strategier henger tett sammen med forståelse for relasjoner mellom tall og operasjoner, ulike representasjoner, begrunnelser for strategier og verdsetting av ulike måter å tenke på» (Valenta, 2015, s. 10).

Bevissthet og metakognisjon er sentrale aspekter ved matematikklæring, også i utvikling av tallforståelse. Ved at elevene får utvikle sin kompetanse med utgangspunkt i trådmodellen, vil de utvikle både bevissthet og metakognisjon. Valenta påpeker at det er en viktig jobb for læreren å lede eksplisitte diskusjoner om utvikling av kompetansene med elevene. Elevenes engasjement vil kunne forsterkes ved at man diskuterer hva matematikk handler om og hvordan man lærer matematikk. Det vil utdypes nærmere i kapittel 2.6, klassesamtalen. Engasjement henger nært sammen med motivasjon. I kapittel 2.3 defineres kjennetegn på motivasjon. Trådmodellen for matematisk kompetanse vil bli brukt i analysen av elevenes representasjoner i kapittel 4.

Begrepet «matematisk literacy» har blitt mer brukt de siste årene når det er gjennomført studier av matematikkundervisning. Matematisk literacy er ikke et veldefinert begrep, men har i ulike kontekster blitt fremholdt og brukt knyttet til hva matematikk kan bety i samfunnet (Sikko & Grimeland, 2020). Det vil ikke bare vise til tallforståelse eller regneferdigheter, men matematikk i et større samfunnsperspektiv. Det innebærer en sterk kobling mellom matematikkfaget og livet. Det er vektlagt at elevene skal forstå at de trenger matematikk for å forstå verden rundt seg og ta gode og velreflekterte vurderinger og avgjørelser. Nortvedt og Pettersen tolker PISA sin definisjon av matematisk literacy på denne måten:

> *I rammeverket for matematikk i PISA brukes begrepet mathematical literacy for å beskrive kunnskaper og ferdigheter 15-åringer trenger for å kunne håndtere de utfordringene de møter i et moderne samfunn. Mathematical literacy beskrives her som individets evne til å formulere, bruke og vurdere matematikk i ulike sammenhenger og gjenkjenne hvilken rolle matematikk spiller i verden* (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 107).

Denne definisjonen er individ-orientert, og elevene skal forstå og bruke matematikk i en virkelighetsnær kontekst. Mange elever opplever at oppgavene i matematikk er meningsløse og plassert i dagligdagse situasjoner som er fjernt for dem selv. Matematisk literacy omfatter også et sosialt aspekt. Jablonka (2003) uttrykker tydelig at man ikke kan skrive om matematisk literacy uten å ta hensyn til at det krever en viss sosial kontekst. Hun fremhever at de ulike bakgrunnene elever møter skolen med, vil påvirke hvor star grad av matematisk literacy de vil oppnå. Matematikkfaget bør gi elevene «Mathematic literacy» og «Numeracy» (tallforståelse) uansett hvilken bakgrunn de kommer til skolen med. Hun påpeker at fiktive oppgaver som skal være virkelighetsnære for elevene, ikke treffer alle elevene like godt. Dette er i tråd med OECD sin definisjon av at elevene skal kjenne igjen situasjoner hvor de vil få bruk for sine matematiske ferdigheter i samfunnet utenfor skolen. Matematisk kompetanse og matematisk literacy har dermed noen tydelige likheter. I begge definisjonene finner vi at elevene skal forstå at matematikkfaget er nyttig for dem i samspill med omgivelsene sine. Begge begrepene har en tydelig vektlegging av den sosiale konteksten, og at elevene må kjenne igjen situasjoner utenfor skolen hvor de vil få bruk for sine matematiske ferdigheter. Nortvedt og Pettersen (2016) velger å oversette mathematical literacy til matematisk kompetanse, da begrepene har så mange felles trekk. Videre i denne studien vil det norske begrepet matematisk kompetanse bli brukt. I kapittel 2.2, Forståelse, presenteres forskning som fremhever hvordan vi kan arbeide for å øke elevenes kompetanse i matematikk.

2.2 Forståelse

Det er et overordnet mål for matematikkundervisningen at elevene skal oppnå god forståelse. Skemp (1976) skiller mellom instrumentell og relasjonell forståelse på denne måten:

> ***Instrumentell forståelse*** *innebærer å lære et økende antall regler og formler som hjelper eleven med å finne løsningen på oppgavene; eleven vet hvordan oppgaven skal løses.*
> ***Relasjonell forståelse*** *innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom begrepene. Det innebærer å vite både hvordan en oppgave skal løses og hvorfor det blir sånn* (Skemp, 1976 sitert i Nosrati & Wæge, 2015, s. 4).

Undervisningen i matematikkfaget har endret seg mye de siste tiårene. Tidligere var det ikke uvanlig at lærere vektla instrumentell forståelse i matematikk. Man kan få inntrykk av at enkelte lærere fremdeles mener at elevene skal lære seg reglene først, så vil forståelsen komme etter hvert. Dette kan føre til en instrumentell forståelse, hvor elevene kommer frem til riktig svar, men ikke vil være i stand til å tenke kritisk og løse oppgaver som ikke følger regelen. Elever som har en instrumentell forståelse vil gjerne spørre hvilken metode de skal bruke for å løse oppgavene, mens elever med relasjonell forståelse vil ha flere ulike metoder å velge mellom. Instrumentell forståelse har også blitt kalt *prosedyrekunnskap*. Elevene har kunnskap om regler og prosedyrer for å løse problemer - de har lært seg oppskriften. Denne typen kunnskap er ofte dominerende i norske matematikklasserom, særlig når det gjelder algebra (Nosrati & Wæge, 2015).

Det er spesielt to faktorer som kan fremme elevenes relasjonelle forståelse, ifølge Nosrati og Wæge. *1) Eksplisitt fokus på sammenhenger mellom matematiske ideer, fakta og prosedyrer.* Dette innebærer at elevene får utforske sammenhenger, likheter og forskjeller mellom løsningsstrategier. Læreren må også hjelpe elevene å sette det de har lært i sammenheng med det de har lært tidligere. *2) La elever få streve med viktige matematiske ideer.* Det vil ifølge Nosrati og Wæge (2015) innebære at elevene må få gjøre en innsats for å forstå matematikken og finne ut av noe de ikke umiddelbart ser løsningen på. I de senere årene har også matematiske diskusjoner og kommunikasjon blitt fremhevet som avgjørende faktorer for utvikling av begrepsmessig forståelse. Ved at elevene får fordype seg i emner og hjelp til å se sammenhenger vil vi også komme nærmere målet om dybdelæring i læreplanen.

Relasjonell forståelse beskrives som begrepsmessig kunnskap. Denne kunnskapen er rik på relasjoner - og bindende relasjoner gjennomsyrer og er like viktige som individuelle biter med fakta og informasjon. Det finnes mange indikasjoner på at norske elever altfor sjelden får mulighet til å utvikle begrepsmessig kunnskap. Nosrati og Wæge (2015) påpeker at prosedyre-kunnskap ikke er bortkastet, men bør gå hånd i hånd med begrepsmessig kunnskap for at elevene ikke skal føle at matematikkfaget består av å lære seg tilsynelatende tilfeldige fakta utenat. Også når det gjelder representasjoner, kan ensidig bruk av strategier føre til instrumentell forståelse. Det å kun bruke én representasjon for et objekt kan lede elevene til å tro at representasjonen *er* objektet. Enge og Valenta (2013) påpeker at ensidig vekt på øving av symbolsk manipulasjon i en algoritme kan lede elevene til å forbinde regning kun med denne manipulasjonen. Hvis de ikke husker algoritmen, har de ikke andre representasjoner å ta i bruk som kan hjelpe dem å regne. Det er viktig å arbeide med flere representasjoner for å oppnå begrepsforståelse. Duvall (2006) referer også til dette problemet når han beskriver elever som ikke klarer å endre representasjoner, «changing representation». Han fremhever at det er viktig at læreren varierer sin bruk av representasjoner i undervisningen, og at elevene får forståelse for hvordan ulike representasjoner kan representere matematiske objekter.

Mellin-Olsen (1990) påpeker at lærernes vektlegging av oppgaveløsning er institusjonalisert, ikke bare noe de gjør etter sin frie vilje. Elevene løser oppgaver som har en tydelig begynnelse og slutt, hvor slutten er svaret som ofte er presentert i en fasit. Når en oppgave er løst, venter den neste, med eksamen som endepunkt. Det kan se ut til at norske skoleelever ofte får tilbud om akselerasjon som tilpasset opplæring i matematikk. Nosrati og Wæge (2015) er tydelige på at dette ikke vil føre til relasjonell forståelse i matematikk:

> *Hvis målet er økt relasjonell forståelse i matematikk så er det ikke ønskelig at tiltak for høyt-presterende elever i prinsippet går ut på å la dem jobbe raskere og med mer komplekse oppgaver med fortsatt instrumentelt fokus. Dessverre er dette nesten utelukkende tilfellet i en akselererende praksis* (Nosrati & Wæge, 2015, s. 10).

De fremhever videre at nivådeling bør unngås, da dette kan gi negative konsekvenser med tanke på motivasjon for både høyt- og lavtpresterende elever. I artikkelen anbefaler forskerne heller en *berikelse* som tilpasset opplæring:

> *Ved å la elevene arbeide med mer åpne, kognitivt krevende og undersøkende aktiviteter i matematikk, kan høyt-presterende elever få mulighet til å lære på det nivået som passer dem, uten å måtte separeres fra sine klassekamerater. Deres opplevelse av matematikk kan bli beriket ved å gi dem mulighet til å utforske andre og kanskje mer detaljerte aspekter ved de samme matematiske situasjonene* (Nosrati & Wæge, 2015, s. 10).

I denne studien benyttes undersøkende undervisning for å få innblikk i elevenes matematiske kompetanse.

PISA-undersøkelsen legger vekt på at elevene er aktive problemløsere som kan bruke et bredt spekter av matematiske kompetanser i ulike sammenhenger. Nortvedt og Pettersen (2016) fremhever at elevene vil ha behov for matematisk kompetanse i en kontekst utenfor klasserommet. Det innebærer at den enkelte selv må forstå hvilken matematisk kompetanse han eller hun må ta i bruk for å kunne løse oppgaver. Det som skiller elevene på de midterste nivåene fra de høyeste nivåene i PISA-undersøkelsen, er at de ikke er like fleksible i sin problemløsing. Elevene på de midterste nivåene kan løse komplekse oppgaver med kjente situasjoner, men de makter ikke i like stor grad som de høyt-presterende elevene å analysere ukjente situasjoner med flere kilder (Nortvedt & Pettersen, 2016). Hvis vi sammenligner med Nosrati og Wæge sin definisjon av instrumentell og relasjonell forståelse, vil de høyt-presterende elevene ha en fleksibel problemløsning og en relasjonell forståelse. I dette kapitlet er begrepene instrumentell og relasjonell forståelse definert. For å oppnå relasjonell forståelse, må elevene få arbeide med kognitivt krevende oppgaver. Oppgavene bør være åpne, med flere mulige løsninger. Det er avgjørende at elevene får hjelp til å oppdage matematiske sammenhenger, gjerne ved hjelp av en lærer som leder en god klassesamtale og stiller gode spørsmål, men også ved å samarbeide og sette ord på de matematiske prinsippene. Klassesamtalen vil bli nærmere beskrevet i kapittel 2.6.

2.3 Motivasjon

Motivasjon kan ikke observeres direkte, men den kan gi seg utslag i kognisjoner, følelser og handlinger. Motivasjonen er ikke konstant, men kan påvirkes av verdier, erfaringer, forventninger og behov. I arbeid med matematikk vil derfor læreren og klasseromskulturen ha stor påvirkning på elevenes motivasjon (Wæge & Nosrati, 2018). Det er forsket mye på sammenhengen mellom motivasjon og matematikkfaget, noe som er godt dokumentert. På småskoletrinnet er det ikke uvanlig at elevene rangerer matematikkfaget høyt når de blir spurt om hvilke fag de liker *aller best* på skolen. Denne populariteten har dessverre en tendens til å synke i løpet av barneskolen. Mellin-Olsen (1990) påpeker at lærerne holder et visst tempo for å komme gjennom pensum på gitt tid, noe som gir lite rom for å stoppe opp og gå i dybden med prosjekter som elevene er *motivert* for å finne ut av. Dette står i kontrast til definisjonen av dybdelæring som i LK20 er et overordnet prinsipp. Der beskrives dybdelæring som å lære noe så godt at en forstår sammenhenger og kan bruke det man har lært i nye situasjoner. Det å *reflektere over egen læring* sees på som sentralt for å oppnå dybdelæring

(Utdanningsdirektoratet, 2020). Denne bevisstheten vil senere i oppgaven defineres som metakognisjon og vil bli beskrevet nærmere i kapittel 2.5 om undersøkende undervisning.

Nosrati og Wæge (2015) beskriver to motivasjonsteorier: *selvbestemmelsesteori* og *målorientering*. Selvbestemmelsesteori skiller mellom indre og ytre motivasjon. Når en elev arbeider med en oppgave fordi han synes den er interessant og morsom, er han indre motivert. Hvis han derimot arbeider for å oppnå et resultat som ikke har direkte tilknytning til oppgaven, er han ytre motivert. Nosrati og Wæge påpeker at elevene med indre motivasjon ser ut til å ha mer glede av matematikkoppgavene. Matematikklæreren og klasseromskulturen kan i stor grad påvirke elevenes motivasjon. I artikkelen «Oppgavediskursen» viser Mellin-Olsen (1990) til klasserom hvor prestasjonene måles i hvor mange oppgaver som løses innen tidsfristen. Det kan tolkes som ytre motivasjon, eller målorientering. For å oppnå indre motivasjon, viser Nosrati og Wæge viser til 6 aspekter som kan påvirke elevenes motivasjon på en positiv måte:

> *1) Oppgaver og aktiviteter, som problemløsingsoppgaver, praktiske oppgaver, oppgaver fra dagliglivet og åpne oppgaver.*
> *2) Samarbeid.*
> *3) Elevene blir oppmuntret til å utvikle egne løsningsstrategier (autonomi).*
> *4) Et positivt affektivt klasseromsmiljø (læreren behandler eleven med respekt, lytter til ideene deres og verdsetter deres faglige bidrag).*
> *5) Fokus på læringsprosessen og utvikling av forståelse i matematikk.*
> *6) Læreren gir konkrete og konstruktive tilbakemeldinger, utfordrer elevene og bruker feil og misoppfatninger som en del av læringsprosessen.*

De 6 aspektene er utarbeidet med utgangspunkt i studier av matematikklæreren og klasseromskulturen og samsvarer med generell forskning på motivasjon og målorientering (Nosrati & Wæge, 2015, s. 8).

Det er forsket mye på sammenhengen mellom motivasjon og elevers myndiggjøring i matematikkfaget. Evang (2020) påpeker at gode akademiske resultater øker selvtilliten, og at opplevelse av kontroll forbedrer faglige resultater. Engasjement er en tydelig positiv faktor for elever som er fornøyd med det akademiske skolearbeidet, mens problemer i matematikk er en tydelig negativ faktor for elevers skolefaglige tilfredshet. Evang fremhever at det er en spennende utfordring for skolen hvordan vi kan undervise i faget på en slik måte at matematikk blir til positive helse- og livsmestringsressurser for den enkelte elev (Evang, 2020). Han påpeker videre at man ikke kan se på mestring i matematikkfaget uten kontekst. Alle elever har ulike sosiale roller i ulike sosiale grupper, og Evang fremhever koblingen mellom å lykkes i matematikkfaget og generell livsmestring. Dette finner vi hos flere andre forskere (Björnsson & Olsen, 2018; Fuglestad, 2010; Jablonka, 2003; Valenta, 2015) som påpeker at hvis elevene skjønner hva de trenger matematikk til, vil motivasjonen også øke. Relevante, virkelighetsnære problemløsingsoppgaver ser ut til å være det som gir best motivasjon hos elevene.

Følelsen av å mestre, henger nært sammen med motivasjon i matematikk. Teorien om mestringsforventning er utviklet av Bandura som hevder at elevenes mestringsforventninger har stor innvirkning på handlingene deres (sitert i Wæge & Nosrati, 2018). Elever med lave mestringsforventninger, gir ofte opp, eller legger liten innsats ned i å løse oppgaver. De forventer ikke å lykkes. Elever med høye mestringsforventninger går lettere løs på oppgaven og viser større innsats og utholdenhet. I definisjonen av matematisk kompetanse ble det fremhevet at elevene skal forstå hva de trenger matematikk til i livet. Motivasjon i matematikk har mange fellestrekk med kjennetegn på matematisk kompetanse. Elever med indre motivasjon, ser ut til å glede seg mer over matematikkfaget. De seks aspektene som fremheves for å øke elevenes indre motivasjon vil vi finne igjen i beskrivelsen av undersøkende undervisning (kap. 2.5). I kapittel 4 presenteres funn som peker på hvordan lærerne vurderer elevenes motivasjon i arbeidet med denne oppgaven. Videre vil representasjonskompetanse få en grundig redegjørelse. Elevenes representasjoner er et gjennomgående tema i denne studien og vil også bli presentert og analysert i kapittel 4.

2.4 Representasjonskompetanse

Innenfor matematikkdidaktikk brukes representasjon som uttrykk for et objekt eller en idé, en måte å uttrykke objektet eller ideen på. Enge og Valenta (2013) viser til representasjons-kategoriene symboler, tegninger, regnefortellinger, konkreter, diagrammer eller tabeller. I denne studien vil elevarbeider bli analysert for å finne ut hvilke representasjoner elevene bruker i sine løsninger. Representasjonene kan fortelle noe om elevenes forståelse og begrepet **representasjonskompetanse** defineres av Niss og Jensen «som å kunne håndtere forskjellige representasjoner av matematiske saksforhold» (2002, s. 133). Representasjonskompetanse vil innebære å kunne forstå og benytte seg av forskjellige representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemer eller situasjoner. Det innebærer også å kunne forstå de innbyrdes forbindelsene mellom forskjellige representasjonsformer og kunne velge blant og oversette mellom ulike representasjonsformer (Niss & Jensen, 2002). Enge og Valenta (2013) påpeker at det å arbeide med flere representasjoner av et matematisk objekt er en viktig del av det å utvikle begrepsforståelse.

Overganger mellom representasjoner er generelt et kritisk moment i matematikklæring og er noe en lærer må være oppmerksom på. Enge og Valenta (2013) fremhever at det for mange elever kan være vanskelig å se sammenhengen mellom ulike representasjoner av det samme matematiske objektet. Elevene må få erfaring med flere representasjoner.

> *Det å velge passende representasjoner, enten det er konkreter, regnefortellinger eller tegninger, er krevende. Men det som er enda viktigere, er å være oppmerksom på hvordan elevene bruker dem, og hvordan de ulike representasjonene brukes til å drøfte ulike aspekter ved begrepet, sammenligne ulike representasjoner og drøfte fordeler og ulemper i ulike matematiske problemer.*
>
> (Enge & Valenta, 2013, s. 12)

Symbolske representasjoner er spesielt betydningsfulle, og i begynneropplæringen er det særlig aktuelt med tallsymboler og symboler for regneoperasjonene, som likhetstegnet. Det inngår også i kompetansen å ha blikk for forskjellen mellom standardrepresentasjoner, som tallsymboler, og representasjoner som en finner på der og da for å lette tenking eller kommunikasjon. Enge og Valenta (2013) påpeker at det er et viktig aspekt for matematikk-læring at elevene får undersøke likheter og forskjeller mellom metodene, hva som er fordeler og ulemper, og hvordan representasjonene henger sammen.

Representasjonskompetanse vil innebære både å *oppfatte* representasjoner og å *bruke* dem i eget arbeid. Uten representasjoner kan vi ikke forklare ideene våre til andre, vi må kunne visualisere ideene våre. Representasjonene blir et verktøy for tanken og et hjelpemiddel for å synliggjøre strategier (Knudtzon, 2019). I kapittel 4 analyseres funn for å se hvilke representasjoner elevene i studien benytter. Med utgangspunkt i kategoriene **symboler**, **tegninger**, **regnefortellinger**, **konkreter**, **diagrammer** og **tabeller,** vil elevenes representasjoner bli analysert. Høines (2011) definerer språk i vid forstand, alt som uttrykker tanken, inkludert kroppsspråk og tegn. Representasjoner vil dermed være et språklig uttrykk. Videre kommer en kort beskrivelse av språkets utvikling i takt med begrepsutviklingen hos barn. Noen sentrale begreper innenfor kategorien språk og tenking, som har relevans for denne studien og elevenes representasjoner, vil bli definert.

Vygotskys teori om språk og læring, inneholder de sentrale begrepene *språk av første og andre orden,* samt *oversettelsesledd* som vil få en nærmere redegjørelse her. Vygotsky (1971) hevder at språk og tanke utvikler seg dialektisk. Gjennom språkbruken utvikles og utvides språket. Språket inneholder både begrepsinnhold og begrepsuttrykk og det vil være vanskelig, eller umulig å utvikle begrepsinnhold uten å utvikle språk for dette (Vygotsky, 1971). *Begrepsinnhold* vil si tanker og meninger om omgivelsene, om ting og individ og forhold mellom dem. *Begrepsuttrykk* vil si språk som uttrykker tankene og meningene. Høines (2011) påpeker at begrepsuttrykk ikke bare vil innebære muntlig språk, men alle språkformer, inkludert tegn og kroppsspråk. Representasjoner kan dermed defineres som et begrepsuttrykk – et uttrykk for tanken. Det vil derfor være relevant å studere elevenes representasjoner for å få innblikk i forståelsen for oppgaven.

Språk av første orden står i direkte kontakt med begrepsinnholdet (forståelsen) og vi trenger ikke foreta noen oversettelse. Vi kan si at vi uttrykker oss og tolker spontant. Tegning som skriftspråk fungerer som språk av første orden for de fleste barn ifølge Høines (2011). Språket er en nøkkel for oss og våre assosiasjonsvalg vil påvirkes gjennom våre språkvalg. «Læreren bestemmer i stor grad hvilke språklige rammer elevene arbeider innenfor» (Høines, 2011, s. 79). Det vil si at lærere må være bevisst hvilket språk de bruker i undervisningen. I matematikk trenger elevene et rikt utvalg av representasjoner for å utvikle en grundig tallforståelse. Språk av førsteorden vil innebære et språk som barnet har gjort til sitt eget og er helt trygg på å bruke.

Språk av andre orden fungerer som et fremmedspråk, et språk som krever oversettelse for at det skal komme i kontakt med større deler av barnets assosiasjonsverden. Det skaper få assosiasjoner og reflekterer til en liten del av barnets erfaringsverden. Språk av andre orden står ikke i direkte kontakt med begrepsinnholdet, men må oversettes. Oversettelsen forutsetter språk av første orden som oversettelsesledd. Høines (2011) fremhever at oversettelsesleddet må være et bindeledd mellom det nye språket og barnets begrepsverden. Elever i begynneropplæringen vil ha ulik begrepsforståelse og ulike behov for oversettelsesledd. Dette vil i stor grad gjelde den symbolske representasjonen. Det er viktig at elevene utvikler det matematiske symbolspråket til et språk av førsteorden, slik at de kan bruke det som et redskap for tanken. Definisjonen av oversettelsesledd kan sammenfalle med Valenta (2015) sin beskrivelse av *overganger*. Hun påpeker at overganger mellom ulike representasjoner er av stor betydning, og at læreren må kjenne til at dette kan være problematisk for enkelte elever.

For noen elever er matematikk vanskelig, og de kan utvikle skoleskapte vansker. Høines (2011) påpeker at vi ser et gap mellom kunnskapene de har og ferdighetene som viser seg i skolematematikken. Det matematiske symbolspråket kan representere et problem for elever i begynneropplæringen og de nasjonale prøvene i regning er utviklet for å avdekke denne type problemer. Elever som utvikler skoleskapte vansker i matematikkfaget, trenger ikke drill hvor de øver mest på det de ikke mestrer. Nortvedt (2018) påpeker at mange elever trenger bedre kunnskap om å telle fleksibelt og danne et robust tallbegrep. De må få utfordringer på sitt nivå, og målet må være at de skal oppnå bedre begrepsforståelse og bedre strategier. Dette finner vi også hos Duvall (2006) som har forsket på hvordan barn som ikke kan veksle mellom flere representasjoner vil få problemer med forståelsen i matematikkfaget.

"Changing representation register is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of the curriculum" (Duval, 2006, s. 128). Det vil innebære at elever som ikke behersker flere representasjoner vil streve med å forstå innholdet i matematikken. Duval fremhever viktigheten av at man kan bruke ulike representasjoner for matematisk innhold, hvor symbolsk representasjon bare er en av dem. Han påpeker at lærere ofte er opptatt av at elevene skal bruke en spesiell type representasjon, eller den representasjonen læreren synes er mest hensiktsmessig. Dette vil ifølge Duval føre til en overflateforståelse. Videre fremhever han at mange elever opplever en oppdelt kunnskap i matematikk-faget, hvor de lærer deler av faget, uten evne til å sette sammen delene til en meningsfull enhet (Duval, 2006).

Representasjonskompetanse vil være et gjennomgående tema i funn, analyse og drøfting i denne studien. Representasjoner er definert som uttrykk for tanken, og Enge og Valenta (2013) bruker kategoriene symboler, konkreter, tegninger, regnefortellinger og diagrammer og tabeller. Flere forskere fremhever viktigheten av at elevene får erfaring med flere representasjonskategorier, og at de kan veksle mellom dem. Videre i dette kapitlet presenteres forskningsbaserte undervisningsmetoder som kan føre til utvikling av elevenes matematiske kompetanse.

2.5 Undersøkende matematikkundervisning og IBL (Inquiry Based Learning)

I artikkelen «Sentrale kjennetegn for god læring og undervisning i matematikk» av Nosrati og Wæge (2015) fremheves forskning om god læring og undervisning i matematikk. Det rettes søkelys på fem temaer som har stått sentralt i matematikkdidaktisk forskning over lengre tid, og som forskerne mener bør få mer oppmerksomhet: *Undersøkende matematikkundervisning*, *Forståelse*, *Selvinnsikt og bevissthet*, *Motivasjon* og *Tilpasset opplæring* (Nosrati & Wæge, 2015). Videre i kapitlet kommer en nærmere beskrivelse av *undersøkende undervisning*, som står sentralt i denne studien. Forskning som støtter eller står i kontrast til denne oppfatningen vil også bli presentert.

Undersøkende undervisning baserer seg på de samme prinsippene som IBL-inspirerte klasserom. IBL står for *Inquiry Based Learning* og er ikke en metode, men beskriver en klasseroms-kultur. I et IBL-klasserom er læringsmiljøet preget av oppgaver som oppleves som relevante og åpne, med flere mulige løsninger (Sikko & Grimeland, 2020). Nosrati og Wæge (2015) beskriver undersøkende undervisning som "Inquiry-based-learning and teaching". Kulturen i IBL-klasserom bør være dialogisk og åpen, hvor feil eller misforståelser bør fremheves som grunnlag for læring. Målet med denne undervisningen er at elevene skal bli tenkende, kreative og kritiske, og selv finne fremgangsmåter for å løse oppgaver. Sikko og Grimeland bruker begrepet IBL-inspirerte klasserom for å beskrive undervisning som er utforskende og undersøkende. Dette vil kunne føre til økt motivasjon og forståelse for realfagene. Den tradisjonelle undervisningen har gjerne vært ganske abstrakt, og prinsippet om at forståelsen kommer etter hvert har stått sterkt i realfagsundervisningen (jfr. instrumentell forståelse fra kapittel 2.2). Ved å ha en IBL-tilnærming med rike og virkelighetsnære oppgaver har det vist seg at elever som vanligvis presterer svakt, utvikler bedre forståelse i realfagene. Prinsippene for IBL er at elevene skal utvikle et spørrende sinn og en vitenskapelig holdning ifølge Sikko og Grimeland (2020). I IBL-basert undervisning, står I for *inquiry*. Fuglestad (2010) bruker også begrepet inquiry. I prosjektet «Bedre matematikk-undervisning» fremhever hun at å forstå og kunne matematikk er mer enn å lære regler og prosedyrer. Hun bruker begrepet inquiry, som kan sees på som en holdning til matematikkfaget. «Inquiry er et vidt begrep som omfatter å stille spørsmål, å undre seg, å undersøke, å eksperimentere, å utforske og å søke etter kunnskap» (Fuglestad, 2010, s. 9).

Fuglestad fremhever to viktige områder for å bedre matematikkundervisningen. Hun påpeker at det bør arbeides med *oppgaver* som stimulerer inquiry og å arbeide med å stille *gode spørsmål* som stimulerer til videre undring, spørsmål og undersøkelser i matematikk. For å oppnå matematisk kompetanse, må elevene få arbeide med kontekster som er knyttet til virkeligheten og benytte matematisk kunnskap i dette arbeidet. Sikko og Grimeland (2020) påpeker at denne kunnskapen ikke bare handler om begreper og ferdigheter, men også om problemløsings-strategier og evne til å gjøre fornuftige overslag.

Nosrati og Wæge (2015) beskriver hvordan undersøkende matematikkundervisning skiller seg fra tradisjonell undervisning hvor læreren gjerne starter med å vise en ny metode og elevene jobber med oppgaver der de øver på metoden. Undersøkende undervisning følger i stor grad en tredelt struktur. Timen starter med at læreren presenterer en kognitivt krevende oppgave eller aktivitet. Elevene får så god tid til å jobbe med aktiviteten. Underveis observerer læreren arbeidet og oppmuntrer elevene til å sette ord på hvordan de tenker og å finne nye løsninger. Timen avsluttes med at hele klassen diskuterer aktiviteten og de forskjellige løsningene. Målet er at elevene skal utvikle en forståelse for prosedyre og kunne bruke prosedyrene effektivt, nøyaktig og fleksibelt. Nosrati & Wæge (2015) fremhever at undersøkende matematikk-undervisning ofte tar utgangspunkt i et konkret objekt som kan manipuleres og som kan representere en rekke abstrakte matematiske ideer. Den undersøkende undervisningen i denne studien tar utgangspunkt i en problemløsningsoppgave. Nosrati (2019) definerer problemløsingsoppgaver som oppgaver hvor elevene ikke har noen kjent algoritme, og de vil kunne komme frem til ulike, men samtidig riktige svar. Oppgaven inviterer til å lete etter systemer og elevene kan velge ulike representasjoner. I kapittel 3, Metode, vil oppgaven elevene har arbeidet med i denne studien bli nærmere analysert.

Mellin-Olsen (1990) beskriver lærere som ser på undervisning i matematikk som et transportmiddel som skal komme seg fra A til Å. Det er et visst antall oppgaver som skal løses, der noen elever holder høy fart og trenger ekstra oppgaver, og andre elever detter av eller forsinker transporten. Lærerne viser til hvor vanskelig det er å undervise heterogene grupper når målet er å løse et gitt antall oppgaver for at elevene skal være godt nok forberedt til eksamen. Denne måten å tenke matematikkundervisning på står i kontrast til undersøkende matematikkundervisning. Det kan se ut til at Mellin-Olsens artikkel «Oppgavediskursen» fra 1990, fremdeles representerer enkelte læreres syn på matematikkfaget. Bergem (2018) påpeker at matematikk er et fag der læreverket i stor grad styrer undervisningen. Flere internasjonale studier indikerer at fra 70% til 90% av undervisningen i sentrale fag er lærebokstyrt. Læreboka erstatter læreplanen ettersom forfatterne av verket allerede har tolket mål og retningslinjer, og læreren ikke tar stilling til fagplanene i det daglige undervisningsarbeidet. Ifølge Bergem kan dette kan føre til at lærere følger boka i stedet for læreplanen og at elevene undervises fra perm til perm.

Gode oppgaver er ikke nødvendigvis dem man finner i læreboka. Mange elever blir sittende å regne mange oppgaver med ett riktig svar. Fuglestad viser til grep man kan ta for å gjøre oppgavene rikere ved å fjerne noe av informasjonen i oppgaven. Man kan også fjerne regnestykket og bare la svaret stå igjen, på denne måten vil det kunne være flere riktige svar. I Nortvedt og Pettersens (2016) analyse av norske resultater fra PISA-undersøkelsen, fremheves viktigheten av at elvene får bryne seg på vanskelige oppgaver som de ikke umiddelbart ser løsningen på. «Tidligere forskning viser at kognitivt krevende oppgaver fremmer høyere prestasjoner for *alle* elever, ikke bare de høyt-presterende» (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 123). Dette kan tolkes som et argument for at elevene bør bli utfordret utover de oppgavene som finnes i lærebøkene og hvor svaret kan kontrolleres i fasiten bak i boka. Kognitivt krevende oppgaver er oppgaver som elevene trenger tid for å løse, i tråd med hvordan Nosrati og Wæge beskriver undersøkende undervisning.

PISA-rammeverket inneholder en operasjonalisering av matematisk kompetanse der det å løse oppgaver knyttes til en modellerings- og problemløsingssyklus. Nortvedt og Pettersen (2016) viser til tre problemløsingsprosesser i syklusen som en forenklet fremstilling av de prosessene man må gjennom for å løse et problem:

1. *Gjenkjenne og formulere* - som handler om å identifisere de matematiske aspektene som finnes i en konkret situasjon. Dette vil innebære å skille mellom relevant og irrelevant informasjon og omformulere problemet til et matematisk problem med nødvendige forenklinger og egnede variabler, symboler og modeller.
2. *Bearbeide og bruke* - vil innebære at matematiske begreper, fakta, prosedyrer og resonnering tas i bruk for å løse problemet. Elevene må finne frem til en strategi som gjør at de kan løse det matematiske problemet.
3. *Tolke og vurdere* - handler om at den matematiske løsningen tolkes og vurderes opp mot den opprinnelige situasjonen. Det innebærer å oversette fra et matematisk språk til et hverdagsspråk, vurdere hvor relevant løsningen er, og identifisere begrensninger i den modellen som ligger til grunn for resultatene.

Matematikkoppgavene i PISA krever at elevene arbeider seg gjennom én eller flere av disse problemløsingsprosessene for å løse oppgaven (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 109). Det vil si at elevene må forstå et problem, før de kan finne en strategi for å løse det. Det innebærer også å vurdere om løsningen passer til det matematiske problemet. Elevene må dermed kunne oversette mellom hverdagsspråk og matematisk språk (symboler). I kapittel 4, Funn og analyse, vil denne forskningen være relevant for å analysere elevenes representasjoner og matematiske kompetanse.

Metakognisjon handler om å bli bevisst på hvordan vi tenker. I matematikkfaget kan dette handle om å sette ord på strategier. Forskning viser at hvis elever venner seg til å tenke over sin egen tankegang i matematiske sammenhenger, så vil det ha en positiv effekt på det matematiske prestasjonsnivået. Nosrati og Wæge (2015) påpeker at bevissthet er definert som et mål i seg selv - noe som matematisk aktivitet kan lede til. Elevene må bli bevisst på sine egne tankeprosesser slik at de kan håndtere hindringene de støter på. Denne bevisstheten vil ikke komme hvis de bare anvender prosedyrekunnskap og repetisjon. Bruk av undersøkende oppgaver i små grupper vil kunne legge til rette for denne utviklingen ifølge Nosrati og Wæge. Elever som er vant med å sette ord på matematikk, vil også bli mer bevisst på hvordan de tenker. Flere forskere fremhever at det kan være nyttig å bruke gruppesamtaler og helklassesamtaler for å få frem ulike løsningsstrategier for å utvikle elevene sin forståelse (Kazemi & Hintz, 2014; Valenta, 2015; Wæge, 2019). Elevene vil kunne bli mer bevisst eget tankesett (metakognisjon) og aktivt lytte og prøve å forstå en medelev som setter ord på sine strategier.

«Hvordan tenkte du nå?» bør være et mye brukt spørsmål i matematikkundervisningen ifølge Kulild (2020). Ved å la elevene få sette ord på strategiene sine, vil andre elever kunne få hjelp til å utvide sitt utvalg av strategier. Wæge (2019) påpeker at det i klassesamtaler vil være en stor fordel om elevene er vant med å sette ord på strategier. Dette kan tidlig øves inn ved å etablere et trygt læringsmiljø hvor elevene er vant til å snakke matematikk. IBL-klasserom kjennetegnes ved at det er lærerikt å diskutere *hvorfor* man eventuelt har kommet frem til ulike svar. Kulild (2020) påpeker viktigheten av å få tak i hvordan elevene tenker når de løser oppgaver. Hun hevder at man kan få mye informasjon om elevenes forståelse og strategibruk ved å bruke mer dynamiske kartleggingsprøver (Kulild, 2020). Gjennom samarbeid i grupper og ved godt ledete klassesamtaler kan elevene få trening i å sette ord på sine strategier og løsninger. Det vil kunne føre til bedre metakognitiv bevissthet og gi læreren innblikk i elevenes forståelse (Nosrati & Wæge, 2015).

I dette delkapitlet er det gjort rede for undersøkende undervisning, IBL-inspirerte klasserom, utforskende oppgaver og inquiry, som i denne sammenhengen betyr å spørre, eller undersøke. Det er et bredt utvalg forskning som fremhever at det er gunstig å legge opp matematikkundervisning på denne måten (Bergem, 2018; Nortvedt & Pettersen, 2016; Nosrati, 2019; Nosrati & Wæge, 2015; Sikko & Grimeland, 2020). Det er dermed et solid forskningsgrunnlag som peker i retning av at elevene bør få undersøke, spørre og være nysgjerrige. Dette vil danne bakteppet når undersøkende undervisning blir beskrevet videre i denne studien. Ved å arbeide undersøkende og diskutere i matematikktimene, kan elevene bli mer bevisste på egne strategier og egne hindringer, noe som kan gi bedre metakognitiv bevissthet. Det er avgjørende at læreren kan stille gode spørsmål, noe som vil bli nærmere redegjort for i beskrivelsen av klassesamtalen.

2.6 Klassesamtalen

Klassesamtalen er en viktig del av den tredelte strukturen i undersøkende undervisning. Wæge (2019) påpeker at læreren bør hjelpe elevene å se sammenhenger mellom de ulike fremgangsmåtene og matematiske ideer som er mål for timen, når hun leder en helklassesamtale i matematikk. «Å delta i matematiske samtaler og diskusjoner har stor betydning for elevers læring og forståelse i matematikk» (Wæge, 2019, s. 19). Dette blir også fremhevet av Kazemi og Hintz (2014) som kommer med gode strategiske trekk for hvordan lærere kan lede matematiske klassesamtaler. Elevenes representasjoner bør også diskuteres i klassesamtalen. Enge og Valenta (2013) fremhever at det er viktig å undersøke fordeler og ulemper ved de ulike representasjonene og hvilke som er mest hensiktsmessige for å få oversikt over oppgaven. Wæge (2019) påpeker at det er svært krevende for læreren å lede gode klassesamtaler. I tillegg til at hun skal lede elevene mot målene for timen, må hun forutse hvilke strategier elevene vil bruke og hvordan hun kan bruke elevenes bidrag til å nå målene.

TIMMS-undersøkelsen fra 2008 gir innblikk i mer enn elevers prestasjoner. Studien ser også på hvilke *aktiviteter* som dominerer matematikktimene. Norge skårer høyt på oppgaveløsning og det er tydelig at mange elever bruker mye tid på å arbeide individuelt med oppgaver i matematikktimene. Når det gjelder å diskutere strategier for problemløsing og å diskutere resonnementer skårer Norge lavt. I følge TIMMS-undersøkelsen har diskusjon og samtale rundt problemløsing og matematiske resonnement et vekstpotensial i norske klasserom (Bergem, 2018). Funnene til Bergem er aktuelle, selv om de siste læreplanene har lagt vekt på at elevene skal arbeide utforskende i matematikk. Bergem påpeker at læreboka ser ut til å styre tempoet og fremdriften i matematikkundervisningen. Han finner også tegn på at undervisningen bærer preg av forelesning fra læreren og individuell oppgaveløsning for elevene. Dette står i kontrast til forskning presentert i denne studien, som fremhever fordelene med undersøkende undervisning.

Å stille spørsmål, undre seg og stimulere til kommunikasjon er en sentral del av arbeid med inquiry som tilnærming i undervisningen, ifølge Fuglestad (2010). I undervisningen kan spørsmål brukes til å følge opp elevenes undring og til å stimulere til diskusjoner. Spørsmål kan også stilles for å gi nye utfordringer. En må da prøve å unngå en typisk IRF-struktur i klassesamtalen, hvor læreren spør, eleven svarer og læreren bekrefter svaret til eleven. Ved at læreren øver seg på å stille spørsmål som stimulerer til diskusjoner, vil elevene etter hvert selv kunne stille de gode spørsmålene. Fuglestad fremhever at det er et stort læringspotensial i å stille gode spørsmål i klassesamtalene. Ved at lærerne stiller genuine eller autentiske spørsmål om noe som de undrer seg over og ønsker å undersøke nærmere, vil elevene bli mer engasjert i klassesamtalene. Hun påpeker at elevene ofte opplever spørsmålene som kontrollerende eller styrende, heller enn inquiry-inspirerte. For å bli mer bevisste, kan det være nyttig at læreren tenker gjennom hva slags spørsmål hun bruker. Spørsmål som peker på og øker oppmerksomheten på spesifikke problemstillinger eller detaljer i tema vil stimulere inquiry-aktiviteter (Fuglestad, 2010). Det vil kunne føre til at elevene opplever at undring er en viktig del av matematikkfaget. Det vil også kunne føre til en mer spørrende holdning til faget og gi elevene hjelp til selv å stille utforskende spørsmål til matematiske sammenhenger.

Å lede matematiske samtaler er et interaktivt arbeid som krever at læreren tar avgjørelser og responderer på elevenes arbeid der og da, påpeker Wæge (2019). Dette kan føre til en viss grad av improvisasjon, men Wæge fremhever betydningen av at læreren planlegger den matematiske samtalen på forhånd. Smith & Stein (2011) har identifisert fem praksiser som kan hjelpe læreren å lede matematiske samtaler. Læreren bør **forvente** hvilke strategier elevene vil velge, **observere** elevenes respons på oppgaven, **velge** hvilke elever som skal presentere løsningene sine, **bestemme rekkefølge** på strategiene som skal deles og hjelpe elevene til å **se sammenhenger** mellom elevstrategier og sentrale matematiske ideer. Dette kan hjelpe læreren til å bruke elevenes tenking og strategier og gi læreren større kontroll over den matematiske samtalen. Dette kan ifølge Wæge føre til mindre grad av improvisasjon. De fem strategiene vil bli brukt som analyseverktøy i kapittel 4, Funn og analyse.
I dette kapitlet er sentrale begreper i studien definert. Det er presentert forskning om undersøkende undervisning og hvordan denne undervisningen kan fremme elevers forståelse og motivasjon i matematikk. Samtaletrekk og strategier som kan være til hjelp for læreren

som leder klassesamtaler er også presentert. Internasjonale undersøkelser peker på at det foregår mye individuell oppgaveløsning i norske klasserom, kanskje på bekostning av gode diskusjoner om strategier og matematiske resonnementer. I denne studien er det søkelys på undersøkende undervisning, hvor klassesamtalen er en viktig del av den tredelte strukturen. I neste kapittel kommer en beskrivelse av hvordan dataene til denne studien ble samlet inn.

3. Metode

I denne studien brukes en kvalitativ casestudie, hvor observasjon av undervisning, studier av elevbesvarelser og intervju med lærere danner datagrunnlaget. Elevenes evne til å arbeide undersøkende med en utforskende oppgave blir undersøkt og analysert. Intervjuene gir et innblikk i hvordan lærerne opplevde å gjennomføre undersøkende undervisning. Studien er basert på observasjon av fire klasser og intervju med fire lærere. Formålet er å utvikle og forbedre praksisfeltet, og å inspirere og legge til rette for drøfting og diskusjon blant kollegaer. Som forsker finner man kunnskaper underveis. «Forskning er alltid rettet inn mot å bringe frem ny kunnskap» (Postholm & Jacobsen, 2021, s. 15). I denne studien vil undersøkende matematikkundervisning i begynneropplæringen bli belyst ved å observere undervisning og intervjue lærere. Formålet med studien er å se om det finnes noen fellestrekk og mønstre på tvers av klassene og informantene.

3.1 Kvalitativ flercasestudie

Kvalitative metoder framstår som fleksible og lite formaliserte, og er formålstjenlige for å studere både personlige trekk og sosiale kontekster. Kvalitative data bygger i første rekke på intervju og observasjon (Befring, 2020). Et fortrinn med kvalitative forskningsmetoder er at de er særlig egnet til å forstå informanters meninger, deres intensjoner og deres involvering og engasjement. Det er typisk for en casestudie at studien bare omfatter noen få forsøksenheter. Ifølge Befring vil casestudier ofte være innsiktet på analyse av enkelttilfeller med et idiografisk formål, hvor kunnskap om spesielle egenskaper eller fenomener står i fokus. I denne studien brukes observasjonsnotater i undervisningen og lydopptaker i intervjuene, samt elevbesvarelser for å samle inn data. Kvalitative analyser er tid- og ressurskrevende og antall deltakere bør ikke være større enn at det er mulig å gjennomføre omfattende analyser, og det setter derfor begrensninger for utvalget (Kvale & Brinkmann, 2015). Utvalget i studien er klasser og informanter fra egen skole. Klassene i studien har ulike resultater på kartleggingsprøver i regning og lærerne foretrekker ulike metoder i undervisningen. Det kan derfor være et representativt utvalg for denne studien. Mer om validitet og reliabilitet litt senere i kapitlet.

3.2 Observasjon

I denne studien gjennomføres en deltakende observasjon fra undervisningen i klasserommene. Gold (1958) beskriver denne rollen som «deltaker-som-observatør», som vil innebære at forskeren tar en tydeligere observatørrolle enn læreren. Det er viktig å være bevisst på at observatørens tilstedeværelse kan ha påvirket både lærer og elever i observasjonssituasjonen (Befring, 2020). Det kunne vært ønskelig å bruke videokamera i undervisningen, men i og med at barn i begynneropplæringen ble observert, stilles det høye krav til deres sikkerhet i prosjektet. Det ble søkt NSD om å bruke lydopptaker i lærerintervjuene og kamera til å ta bilder av elevenes løsninger, samt bruk av observasjonsnotater. Til NSD ble det presisert at det ikke ville bli tatt bilder hvor barna kan identifiseres. I starten og slutten av timen, ble notatblokk og pc brukt for å skrive fortløpende notater. Når elevene startet å undersøke løsninger på oppgaven, ble notatblokk og kamera brukt for å dokumentere observasjonene. Det ble notert mange observasjonsnotater underveis, fordi det var viktig å få tak i det elevene fortalte om strategiene sine. Like etter undervisningen ble observasjonsnotatene komplementert med notater som det ikke ble tid til å notere underveis.

3.3 Intervju

For å støtte observasjonene, ble dataene triangulert med semistrukturerte individuelle intervju. Kvale & Brinkmann (2015) påpeker at semistrukturerte intervju muliggjør en forberedt samtale som er fleksibel med rom for nye spørsmål og uten fast rekkefølge på spørsmålene. Forskningsintervjuets åpne struktur er både en fordel og en ulempe ved intervjuundersøkelser ifølge Kvale og Brinkmann. I denne studien ble det utarbeidet en intervjuguide (vedlegg 3) som ble brukt som utgangspunkt for intervjuet. Hvis en informant kom med nye innspill, ble det stilt oppfølgingsspørsmål for å få utfyllende informasjon. På den måten ble det noen avvik fra spørsmålene i intervjuguiden. I forkant var det viktig å avklare hva som var formålet med studien, ved å prøve å få oversikt over eksisterende forskning. Søkemotorene Google Scholar og Oria ble brukt for å finne relevant forskning, samt mange bøker og metodebøker. Det gav oversikt og bedre forståelse for formålet med studien. Metode betyr opprinnelig «veien til målet». Kvale og Brinkmann (2015) påpeker at hvis man skal finne eller vise andre veier til målet, må man vite hva målet er.

3.4 Kontekst

Studien ble gjennomført på en stor barneskole med cirka 500 elever på Vestlandet. Skolen har 3-4 paralleller på hvert trinn med 17-24 elever per klasse. Skolen har i utviklingsarbeidet arbeidet med overordnet del av læreplanen og utviklingsgruppen ved skolen har laget et styringsdokument for dette arbeidet. I den forbindelse har skolen vektlagt samarbeidslæring. Dette bygger på et sosiokulturelt læringssyn hvor elever lærer best *sammen*, med og av hverandre, og det er viktig at alle barna i klassen er inkludert. Dette har utfordret en del lærere sitt syn på tilpasset opplæring og spesialundervisning. Skolens ledelse har vært tydelig på at elevene skal være mest mulig sammen med klassen, og spesialundervisning utenfor klassen skal bare skje i små drypp. Det kan forklare hvorfor flere lærere takket ja til å delta i denne studien – de ønsket tips til hvordan de kan undervise på en mer inkluderende måte som gjør elevene aktive og deltakende. Studien tar for seg arbeid med undersøkende undervisning på andre og tredje trinn. Klassene som deltar i studien har mellom 17 og 21 elever.

3.5 Utvalg

Observasjonene ble gjennomført på høsten, det ble derfor valgt elever på andre og tredje trinn. Hvis gjennomføringen skulle gjøres på våren, ville første og andre trinn blitt prioritert. I oppstarten av førsteklasse er det mye som skal øves på og elevene skal lære hva det vil si å gå på skolen. Det er også noen elever som lærer å telle og hvordan tallene skrives. Siden gjennomføringen var på høsten, ble derfor ikke første trinn inkludert i denne studien. Fire lærere og to klassetrinn ble ansett som en passende størrelse på utvalget for å kunne besvare problemstillingen. Utvalget ble gjort som en følge av tid og ressurser tilgjengelig. Dette kan kategoriseres som et «bekvemmelighetsutvalg». To lærere på andre trinn og to lærere på tredje trinn var positive til å delta i studien. Lærerne har fra fire til ti års erfaring. To av dem har videreutdanning/fordypning i matematikk, 60 studiepoeng eller mer. Lærerne har fått fiktive navn i studien: Lærer A, Lærer B, Lærer C og Lærer D. Lærer B har overtatt klassen i år, mens lærer A, C og D har vært kontaktlærer for klassene siden de startet i første klasse.

I forkant ble det gjennomført en pilotering av oppgaven med egen klasse på andre trinn, for å få en forforståelse av hvordan elevene ville arbeide med oppgaven og hva som eventuelt ble utfordrende med gjennomføringen. Dette anbefales av Skogen (2018) som en forberedelse til hovedstudien. Gjennomføring av undervisning med pilot-klassen ble gjort av femte-års lærerstudenter som var i praksis. Som praksislærer tok jeg rollen som deltakende observatør i piloteringen også.

Skolens ledelse har uttrykt et tydelig ønske om en mer felles praksis for planlegging og gjennomføring av undervisning. De har stilt spørsmål ved at klasser på samme trinn har svært ulike resultater på kartleggingsprøver som blir gjennomført. Det har ført til en prosess hvor det er etablert tettere samarbeid om planlegging og evaluering av gjennomført undervisning. Det er derfor ikke nytt for deltakerne i studien å samarbeide på denne måten. Det er interessant å undersøke nærmere hva som gjør at elevene i de ulike klassene presterer så ulikt.

3.6 Gjennomføring

Prosjektskisse ble lagt ved søknaden om gjennomføring av studien til NSD. Samtykkeskjema, intervjuguide og informasjonsskriv til foreldrene ble også lagt ved søknaden. Etter godkjenning fra NSD, ble aktuelle informanter kontaktet. Informantene i denne studien er lærerne som deltok i undervisning og intervju. De signerte samtykkeskjema (vedlegg 1) og sendte ut informasjonsskriv til foresatte (vedlegg 2). De fikk mulighet til å stille spørsmål i et forberedende møte og underveis i prosjektet. Videre brukes begrepet informant og lærer litt om hverandre.

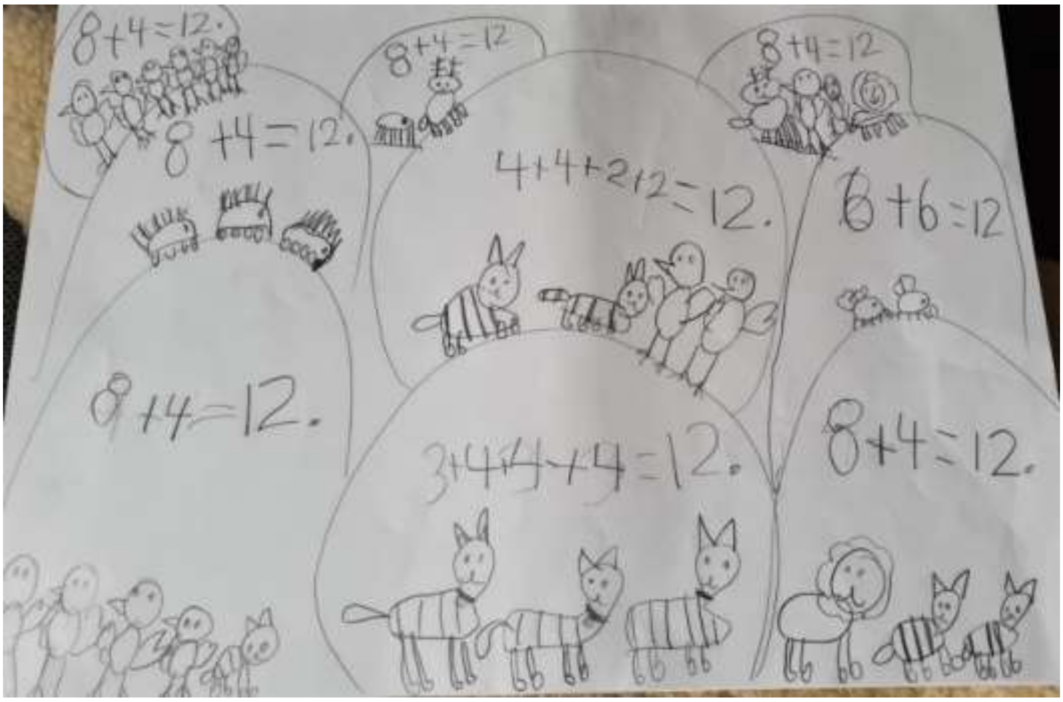
For å finne en utforskende oppgave ble Matematikksenteret sine sider **Mattelist** brukt. Der finnes oppgaven om Noas ark, som blir brukt i denne studien. Oppgaven kjennetegnes ved lav inngangsterskel og stor takhøyde. Det vil si at den skal kunne passe for både lavt-presterende og høyt-presterende elever og gi god tilpasset opplæring. Undersøkende matematikk-undervisning tar ofte utgangspunkt i et konkret objekt som kan manipuleres og som kan representere en rekke abstrakte matematiske ideer. I denne oppgaven tar elevene utgangspunkt i tallet 12, for så å undersøke ulike regnestykker som kan gi denne summen. Undervisningen følger den tredelte strukturen som Nosrati og Wæge (2015) beskriver at undersøkende undervisning bør følge. Læreren introduserer oppgaven, elevene får god tid til å undersøke løsninger og timen avsluttes med en helklassesamtale. Arbeidet med oppgaven Noas ark vil dermed kunne defineres som undersøkende matematikkundervisning. Oppgaven kan også karakteriseres som en problemløsingsoppgave. Nosrati (2019) definerer problemløsingsoppgaver som oppgaver hvor elevene ikke har noen kjent algoritme, og de vil kunne komme frem til ulike, men samtidig riktige svar. Oppgaven inviterer til å lete etter systemer og elevene kan velge ulike representasjoner. Denne oppgaven legger til rette for at elevene kan komme frem til mange ulike, men riktige løsninger. Oppgaven er også åpen for at elevene kan bruke ulike representasjoner og arbeide systematisk med å finne løsninger. Oppgaven gir stort rom for utforsking.

Elevene arbeider undersøkende med følgende oppgave:

Noah så 12 ben som gikk ombord i arken.

- Hvor mange dyr kan han ha sett?
- Hvor mange forskjellige svar kan du finne?
- Kan du forklare hvordan du kom fram til de forskjellige svarene?

(Matematikksenteret, 2021)



Figur 1: Representasjon fra pilotgjennomføring på 2. trinn.

I pilotgjennomføringen kom elevene frem til at Noa kunne ha sett **to dyr**, **tre dyr**, **fire dyr**, **fem dyr**, eller **seks dyr**. Etter introduksjonen, jobbet elevene konsentrert med å undersøke løsninger på oppgaven i rundt 30 minutter. I denne løsningen (figur 1) kombinerer elevene symboler med tegning av dyr. Tegningene er beskrivende, men det er ikke så lett å se sammenhengen mellom tegningene og regnestykkene (symbolene). Ved tegningen av seks fugler står regnestykket 8+4=12. I undervisningen ble elevene spurt om tallene 8 og 4, og da viser det seg at de har regnet litt i hodet og notert litt av regnestykket. Elevene forklarte at fire fugler har åtte bein og to fugler har fire bein, derfor noterte de 8 + 4 til tegningen hvor andre kanskje ville tenkt 2+2+2+2+2+2. Her kunne det vært vanskelig å forstå sammenhengen bare ved å se på arbeidstegningene, det var derfor nyttig å analysere elevarbeider sammen med observasjonsnotater. Pilotgjennomføringen gav en forforståelse for hvordan elevene i studien kunne gripe an oppgaven. Den gav også et innblikk i hvor viktig gode observasjonsnotater er.

I forkant av undervisningen ble det gjennomført et planleggingsmøte, hvor oppgaven ble presentert for lærerne. Planleggingsmøtet var ikke organisert som et intervju, men en forberedende samtale. I møtet kunne lærerne stille spørsmål i forbindelse med forberedelsene til undervisningen. List-oppgaver ble presentert og hva som menes med lav inngangsterskel og stor takhøyde (Matematikksenteret, 2021). Videre ble oppgaven Noas ark presentert. Matematikksenteret har laget en film med gjennomføring av denne oppgaven som ble vist på planleggingsmøtet (Utdanningsdirektoratet, 2020). Eksempler på hvordan pilotklassen hadde arbeidet med oppgaven ble også presentert i den forberedende samtalen med lærerne. I tråd med hvordan Wæge (2019) anbefaler at vi leder målrettede matematiske diskusjoner, ble lærerne spurt om forventninger til hvordan elvene ville gripe an oppgaven.

Undervisningen ble gjennomført i alle klassene i løpet av tre uker. Undervisningsøktene varte i 60 minutter. For at rammene skulle være kjente for elevene, gjennomførte læreren undervisningen. Underveis kommuniserte vi mye med elevene, for å få et innblikk i hvordan de tenkte og strategiene de brukte. Undervisningen i alle fire klassene fulgte den tredelte strukturen som Nosrati og Wæge (2015) anbefaler for undersøkende undervisning. Timen startet med en introduksjon, hvor læreren presenterte oppgaven med illustrasjoner og sikret seg at alle hadde forstått oppgaven. Lærerne brukte en PowerPoint med oppgaveteksten og bilder av ulike dyr med ulikt antall bein. Lærer A og lærer C hadde i tillegg tatt med seg plastdyr til klasserommet. Lærer C la plastdyrene fremme i klasserommet, mens lærer A hadde en boks med plastdyr på hvert gruppebord. Elevene kunne bruke dyrene og telle hvor mange bein de hadde. Elevene fikk god tid til å arbeide med å undersøke løsninger. I klasse B, C og D samarbeidet to til tre elever om oppgaven og noterte på ark i A3-format. I klasse A satt elevene ved gruppebord, men de arbeidet individuelt med oppgaven og alle elevene hadde egne ark. Elevene pratet sammen, men ikke om løsninger på oppgaven. Det ble arbeidet med å undersøke løsninger på oppgaven i rundt 30 minutter. Timen ble avsluttet med en lærerstyrt klassesamtale på cirka 10-15 minutter. I klassesamtalen fikk elevene presenterte sine løsninger. Etter undervisningen ble alle elevbesvarelsene samlet inn for videre analyse.

Lærerintervjuene ble gjennomført etter undervisning, med en og en informant. Intervjuene ble gjennomført så nært etter undervisningen som mulig, slik at inntrykkene var ferske i hukommelsen. Kvale og Brinkmann (2015) påpeker at det er en viktig rolle å lytte i intervjuet, og vektlegger at det å lytte til det som sies, er like viktig som beherskelse av spørreteknikker. Det ble prioritert å gi informantene tid til å tenke seg om og tid til å svare utfyllende. Lydopptaker ble brukt i intervjuene, noe som var et nyttig redskap, som også gjorde det lettere å lytte aktivt. Intervjuguiden inneholder få, mer åpne spørsmål slik at intervjuet kan kategoriseres som semistrukturert (vedlegg 3).

3.7 Bearbeiding av data

Lydopptakene fra intervjuene ble transkribert i sin helhet. De ble transkribert på bokmål, slik at informantene ikke skulle kunne identifiseres på dialektkjennetegn. Lydopptakene fra de fire intervjuene var på til sammen 130 minutter. På grunn av manglende erfaring med transkribering, ble det laget et system for hvordan pauser, latter og andre ikke-verbale utsagn i teksten ble markert (vedlegg 4). Intervjuene ble transkribert i Word og hvert intervju ble på 8-10 sider. Etterpå ble Word-filene lastet opp i programmet NVivo, slik at de ulike utsagnene kunne kodes etter kategoriene som var lagt inn. Kategoriene i NVivo ble etablert med utgangspunkt i studiens forskningsspørsmål. Videre ble observasjonsnotater, elevarbeider og transkriberte intervju analysert for søke svar på studiens forskningsspørsmål. Det ble laget ulike kategorier og materialet ble sortert i flere omganger. Det mest omfattende materialet var de transkriberte intervjuene. Lærerrollen er en viktig faktor for elvenes læring, så det var ønskelig å få tak i hvordan lærerne i studien opplevde å undervise på denne måten. Funn fra lærerintervjuene ble triangulert med funn fra observasjonsnotater og funn fra elevbesvarelsene. Transkripsjonene og observasjonsnotatene ble lest og kodet flere ganger i jakten på mønster og avvik. Kvale & Brinkmann (2015) påpeker at meningskonsentrering kan være nyttig ved at viktige uttalelser som kan belyse problemstillingen blir trukket ut.

3.8 Reliabilitet og validitet

I forbindelse med forskning kan det være utfordrende å sikre reliabilitet og validitet. Kvale og Brinkmann (2015) bruker de tradisjonelle begrepene pålitelighet og gyldighet som også er vanlige ord i det norske språket. For å vurdere studiens pålitelighet, gis det en så transparent oversikt over metoden som mulig. Tilgangen til datamaterialet er beskrevet steg for steg og hvordan dette er videre bearbeidet. Pålitelighet bør også si noe om troverdighet. Vil andre forskere kunne komme frem til samme resultat ved bruk av samme metode? I denne studien forskes det på lærere og elever på egen skole. Det kan påvirke studiens pålitelighet, blant annet fordi både lærere og elever kjenner til forskeren fra før. For å sikre at elevene skulle få så kjente rammer som mulig, ble undervisningen gjennomført av lærerne. Dette vil kunne gi studien større grad av pålitelighet. Det kan likevel ikke utelukkes at elever eller lærere endret atferd, noe som kan ha påvirket resultatene.

Validitet, eller gyldighet, forteller om metoden er egnet til å undersøke det den skal undersøke ifølge Kvale og Brinkmann (2015). Det kan også stilles spørsmål ved overføringsverdi. I denne studien undersøkes hvordan elever i begynneropplæringen kan arbeide undersøkende med en List-oppgave for å utvikle sin matematiske kompetanse. Det er en kvalitativ studie hvor utvalget er fire klasser på andre og tredje trinn. Det kan ikke konkluderes med at studien har gyldighet til å gjelde de fleste andre- og tredjeklasser. Likevel peker studien på noen viktige funn som kan ha relevans for hvordan matematikkundervisningen i begynneropplæringen kan gjennomføres i tråd med nyere forskning.

Innhenting av data ved bruk av observasjon vil også bli preget av hvor trent observatøren er i denne rollen. Lærere er mest trent i å lede undervisning og mindre trent i å observere. Det kan derfor antas at det foregikk mye i klasserommene som ikke ble fanget opp. Det ville vært vanskelig å basere denne studien på observasjon alene. I intervjuene ble det brukt lydopptaker, noe som sikret mer gyldige data til den videre bearbeidingen. Ved å ta i bruk observasjon, elevarbeider og intervju vil det gi et mer sammensatt bilde av prosessen. En kombinasjon av lydopptak og observasjon er med på å styrke påliteligheten i prosjektet. Selv om lydopptak ble kombinert med observasjon, kan det være ting som ble misforstått eller kommunikasjon som ikke ble observert, noe som svekker påliteligheten i prosjektet. Filmopptak kunne styrket både pålitelighet og gyldighet. Da det likevel ikke ble søkt om å filme elevene i undervisningen, handler det om at flere foreldre ikke tillater fotografering av barna. Det var ønskelig at klassen skulle ha så vanlige rammer som mulig – og ved bare å bruke observasjonsnotater kunne det unngås at mange reserverte seg fra å delta. Dette viste seg å stemme. Det var fulle klasser under gjennomføring av undervisningen. Det vil være en styrke for validiteten, fordi klassene vanligvis er av denne størrelsen og observasjonene ble gjennomført i en virkelighetsnær kontekst. Hvis læreren hadde hatt halvparten så mange elever som det vanligvis er i klassen, ville ikke forskningen blitt like gyldig.

Denne undervisningen kunne også ha blitt gjennomført i mindre grupper, for å komme tettere på elevene og fått bedre oversikt over løsningene deres. Studien ble gjennomført med hele klasser, for å få en så virkelighetsnær kontekst som mulig. Det er ikke vanlig at en lærer kan vie all sin oppmerksomhet til en liten gruppe, og formålet med studien er å undersøke hvordan forskningsbaserte metoder kan fungere i praksis. Det kan være en svakhet med studien at alle gruppene ikke ble observert like tett når de arbeidet med løsningene sine, samtidig vil det være en styrke at lærerens matematiske klassesamtale på slutten av timen ble en del av observasjonen.

4. Funn og analyse

I dette kapitlet presenteres og analyseres funn fra studien. Det er funn fra observasjoner, elevbesvarelser og intervju med lærerne. For å analysere funnene brukes en kombinasjon av induktiv og deduktiv tilnærming, som kan kalles en abduktiv tilnærming. Induktiv tilnærming vil i korte trekk si at en undersøker empirien først, for så å tolke funnene ved hjelp av teori. Deduktiv tilnærming, er det motsatte, at man finner teori om emnet først, for så å undersøke om empirien stemmer med hypoteser fra teorien. «Abduksjon er en kontinuerlig vekselvirkning mellom teori og empiri, der ingen av de to kan sies å ha forrang» (Postholm & Jacobsen, 2021, s. 103) Ved å bruke en kombinasjon av de to tilnærmingene, ble det gjennomført mange analyser underveis i studien. Mye forskning ble lest i forkant, men etter hvert som nye interessante funn ble tydelige i empirien, måtte ny forskning studeres for å kaste lys over funnene. Når funnene er presentert og analysert, kommer det i kapittel 5 en drøfting av de viktigste funnene.

I dette kapitlet systematiseres funnene etter forskningsspørsmålene:

- Hvilke representasjoner velger elevene i sine løsninger?
- Hvordan reflekterer lærerne rundt gjennomføringen av undersøkende undervisning?

I del **4.1 Representasjoner** presenteres funn og analyse av de ulike representasjonene elevene har valgt. Primærkilden til kapitlet er elevbesvarelser og observasjonsnotater. I kapittel **4.2** presenteres funn og analyser av **lærernes refleksjoner** rundt å gjennomføre undersøkende undervisning. Primærkilden til kapitlet er de transkriberte intervjuene og observasjons-notater.

4.1 Representasjoner

Ved å studere hvilke representasjoner elevene bruker, vil vi kunne få et innblikk i elevenes matematiske kompetanse. Elevbesvarelsene analyseres og trianguleres med bilder og data fra observasjonsnotater for å få et mer utfyllende bilde. Elevene ble raskt oppmerksomme på at det ikke bare var ett riktig svar på oppgaven. I begynnelsen var det noen som gjettet, men så snart elevene skjønte at det var lurt å representere løsningene sine, arbeidet de utholdende for å finne flere løsninger. Arbeidsarkene gjorde det lettere å studere prosessen etterpå, selv om alle gruppene ikke ble observert like tett. Med utgangspunkt kategoriene Enge og Valenta (2013) bruker for representasjoner, vil elevenes representasjoner bli analysert. Av kategoriene symboler, tegninger, regnefortellinger, konkreter, diagrammer og tabeller, finner vi fire representasjonskategorier i denne studien: **konkreter**, **tegninger**, **symboler** og **regnefortellinger**. Videre presenteres funn fra hver kategori, samt noen kombinasjoner av representasjoner. Ved å analysere elevbesvarelser ble det også funnet noen representasjoner som bar preg av å ha ufullstendig bruk av symboler. De vil kort bli presentert i slutten av dette delkapittelet. Representasjonene elevene bruker, kan gi oss innblikk i deres matematiske kompetanse. Valenta (2015) bruker trådmodellen med de fem komponentene *begrepsmessig forståelse, beregning, anvendelse (strategisk tankegang), resonnering og engasjement*. I analysen av elevbesvarelsene vil kjennetegn på de ulike komponentene fra trådmodellen kort bli kommentert.

4.1.1 Konkreter

I klasse A hadde alle gruppene en eske med plastdyr på bordet. Plastdyrene gav en konkret mulighet til å telle bein på dyrene. Flere elever brukte dyrene til å telle antall bein først, før de skrev løsningen sin med symboler på arbeidsarket etterpå. Det var ingen elever som *bare* brukte konkreter i sine løsninger. Alle brukte arbeidsarket sitt til å vise ulike løsninger ved bruk av tegning, symboler eller lister. Det vil bli nærmere presentert i de neste underkapitlene. Valenta (2015) fremhever at elevene bør kunne bruke flere representasjoner for løsningene sine. Ved at elevene brukte konkreter og tegnet løsninger eller skrev regnestykker (symboler) viste de evne til å oversette mellom to representasjoner for løsningene sine. For elever som hadde behov for å bruke konkreter, så det ut til å være nyttig å ha ulike dyr å undersøke for å komme frem til løsninger på oppgaven. Lærer A og lærer C hadde plastdyr med seg til klasserommet. Lærer A delte ut en eske med plastdyr til hvert bord, mens lærer C satte en eske med plastdyr som elevene kunne hente fremme i klasserommet.

Figur 2 Representasjon ved bruk av konkreter (klasse A)

I klasse C var det bare en gruppe som hentet plastdyr når de arbeidet med løsninger. Ifølge Nosrati (2019) kjennetegnes Listoppgaver ved lav inngangsterskel og stor takhøyde. Ved å bruke plastdyr gjorde lærerne inngangsterskelen til denne oppgaven lavere. Elevene kunne bruke konkrete dyr og telle hvor mange bein de hadde. Det kan ha gjort det lettere å komme i gang med å undersøke løsninger på oppgaven.

4.1.2 Tegninger

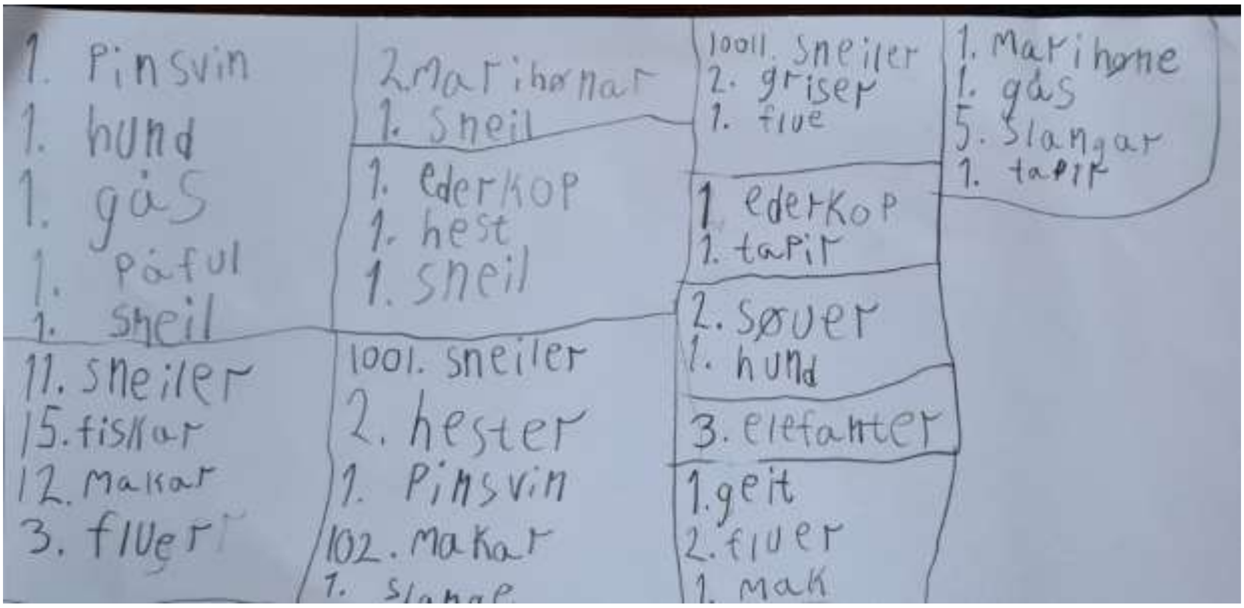
Figur 3: Representasjon ved bruk av tegning (klasse D)

En gruppe elever fra klasse D har brukt tegninger og funnet løsninger med **seks dyr**, **fire dyr**, **tre dyr** og **to dyr** (figur 3). Tegningene er tydelige, med riktig antall bein og elevene viser hvor mange bein det blir til sammen i hver løsning. De har ringet inn hver løsning, for å vise hvilke tegninger som hører sammen. I denne representasjonen finnes ingen tall eller tegn (symboler), men elevene har et tydelig uttrykk for tanken. Enge og Valenta (2013) påpeker at symbolske representasjoner er spesielt betydningsfulle i begynneropplæringen. Det er viktig å ha blikk for forskjellen mellom standard-representasjoner, som tallsymboler, og representasjoner som en finner på der og da for å lette tenking eller kommunikasjon. Ifølge Høiness (2011) er tegning et språk av førsteorden for de aller fleste barn. Denne representasjonen tyder på at elevene har forstått oppgaven. Tegningene er tydelige representasjoner for løsninger som passer til denne oppgaven. Elevene hadde tegnet tre løsninger (2 dyr, 3 dyr og 6 dyr) når de ble spurt om de trodde det fantes en løsning med fire dyr også. De resonnerte seg frem til løsningen med to hester og to mennesker. I de første løsningene hadde de flere like dyr (to marihøner, seks høner og tre sauer). De måtte tenke litt utenfor det mønsteret for å finne løsningen hvor ikke alle dyrene hadde like mange bein. I løsningen med fire dyr tegnet de to hester og to mennesker.

I trådmodellen for matematisk kompetanse vil *anvendelse* eller *strategisk tankegang* innebære å løse abstrakte matematiske problem og problem knyttet til hverdags-, arbeids- og samfunnsliv. I følge Valenta (2015) vil det innebære å formulere matematiske problem, representere dem på en hensiktsmessig måte, være fleksibel i utvikling av en løsningsstrategi og vurdere om løsningen er rimelig. Et problem kjennetegnes i denne sammenhengen av at man ikke har en rutine for å løse det. Elevene har i denne løsningen representert det matematiske problemet på en hensiktsmessig måte. Det er tydelig at de har skjønt problemet, og løsningen er rimelig. Valenta påpeker at det er viktig at elevene kan bruke flere representasjoner for å vise løsningene sine. I kapittel 5 vil betydningen av at elevene kan bruke flere representasjoner bli drøftet.

4.1.3 Regnefortellinger

I klasse B var det et overraskende funn at *ingen* av elevene skrev regnestykker (symboler) når de var kommet til tredje trinn. Noen elever tegnet, men de fleste elevene laget lister med dyr, noe som kan kategoriseres som en enkel regnefortelling. Elevene har skrevet lister med hvor mange av hvert dyr som går om bord i arken. Elevene skriver ikke flere ord enn hvilke dyr det gjelder, så det er kanskje en vid tolkning å bruke kategorien regnefortellinger. Løsningen i figur 4 kan også kategoriseres som en symbolsk representasjon med bruk av tall og bokstaver ifølge kategoriene til Enge og Valenta (2013). I symbolske representasjoner finner vi vanligvis bruk av tegn også. Representasjonen kan også kategoriseres som en representasjon en finner på der og da for å lette tenking eller kommunikasjon (Niss & Jensen, 2002).



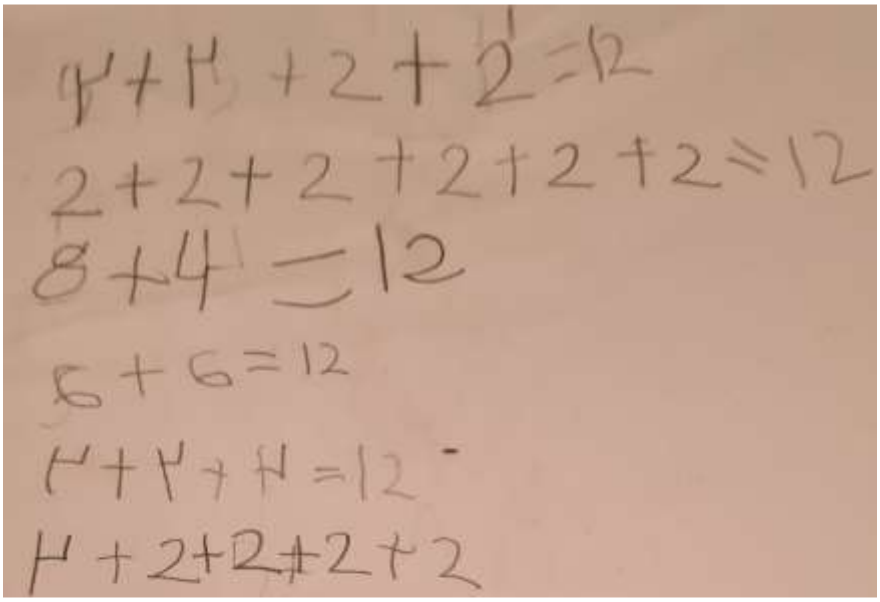
Figur 4: Representasjon ved enkel regnefortelling (klasse B).

Elevene har en oversiktlig fremstilling av løsningene sine, til sammen elleve løsninger. De har brukt tall for å vise hvor mange dyr av hver type som er med i løsningene. Det kan se ut til at det ble vanskelig å holde oversikt over løsninger som allerede var brukt. Gruppen skrev for eksempel tre dyr med fire bein i flere varianter. Ved å skrive regnestykket som hører til (4+4+4), ville de kanskje oppdaget at regnestykket ble det samme selv om de valgte ulike dyr med fire bein. Elevbesvarelsen viser både fantasi og utholdenhet. Det kan se ut til at de var opptatt av å finne mange ulike svar. Representasjonen kan fortelle oss noe om matematisk kompetanse. Det er litt overraskende at de ikke hadde behov for å notere antall bein i løsningene sine. Det kan tyde på at de regnet i hodet, uten å notere ned tallene de brukte underveis. Bortsett fra at det ser ut som de har tenkt at en flue har fire bein, regner de riktig. I mange av løsningene ser vi at elevene har med dyr uten bein, for eksempel 1001 snegler. Det kan være et uttrykk for humor og kreative løsninger på oppgaven. I denne besvarelsen må man lete litt for å finne tegn på at elevene har arbeidet systematisk med å finne multiple løsninger, selv om de har lister med resultatene sine. Hvis vi ser bort fra alle dyrene de har tatt med som ikke har bein, finner vi løsninger med **fire dyr, tre dyr** og **to dyr**. Det ser ut til at de har forstått oppgaven og løsningene er tydelig representert. I denne klassen brukte nesten alle elevene lister (varianter av figur 4), og overraskende nok var det *ingen* elever som brukte fullstendig symbolsk representasjon.

I trådmodellen handler *engasjement* om å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt. Det innebærer også å ha tro på at det er mulig å bli kompetent i matematikk, og at man lærer ved å streve og ikke gi opp. I denne elevbesvarelsen har elevene representert elleve løsninger. Det kan tyde på at de har arbeidet målrettet med oppgaven uten å gi opp. Valenta (2015) hevder at det er et tegn på matematisk kompetanse at elevene kan veksle mellom ulike representasjoner. Hun påpeker også at elevene bør kunne vise løsningene sine ved å bruke flere representasjoner, det vil si å veksle mellom ulike representasjoner for samme løsning. Hun fremhever at læreren har et viktig ansvar for å hjelpe elevene med å diskutere ulike representasjoner i klassesamtalen. Dette funnet vil bli drøftet nærmere i kapittel 5.

4.1.4 Symboler

En gruppe fra klasse D ser ut til å ha god kontroll på symbolsk representasjon. Arbeidsarket tyder på at de har arbeidet systematisk med å finne ulike løsninger på oppgaven (figur 5). Firetallet er skrevet speilvendt, ellers er regnestykkene skrevet riktig og passer til å løse oppgaven. Elevene har ikke skrevet samme løsning flere ganger og tallene stemmer godt med antall bein ulike dyr kan ha. Elevene tegnet ikke, de skrev heller ikke hvilke dyr de tenkte på. De noterte regnestykkene som hører til løsningene, ved bruk av symboler. Når de ble spurt hvilke dyr de tenkte på, svarte de: «Et dyr med fire bein». Denne representasjonen skilte seg litt ut på 2. trinn.



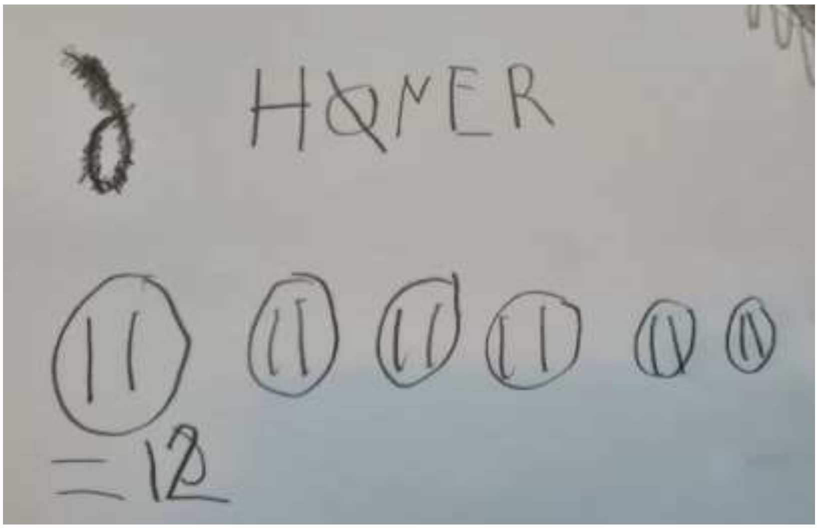
Figur 5: Representasjon ved symboler (Klasse D)

Elevene fant løsninger med **seks dyr**, **fem dyr**, **fire dyr**, **tre dyr** og **to dyr**. Selv om de bare noterte regnestykker, var det lett å se systematikken i løsningene. I klasse D var det denne gruppen som hadde den mest systematiske tilnærmingen til oppgaven. Elevene kombinerte ikke ulike representasjoner for å vise løsningene sine. I samtalen med elevene kom det frem at de ikke tenkte på spesifikke dyr, men løsningene viser tydelig at de har funnet flere tallkombinasjoner av tallet tolv. Selv om de ikke viser hvilke dyr de tenker på, viser de god forståelse for oppgaven, da de utelukkende har brukt partall i løsningene sine.

I trådmodellen handler *beregning* om å kunne utføre ulike matematiske prosedyrer nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig. I elevbesvarelsen finner vi mange regnestykker som gir summen tolv. Målet for denne aktiviteten var at elevene skulle utvikle forståelse for hvordan tolv kan deles i ulike mengder, for å styrke elevenes tallforståelse. Beregning innebærer å kunne utvikle ulike strategier med utgangspunkt i regnefortellinger, illustrasjoner, tallinjer, konkreter eller symboler, ifølge Valenta (2015). O*verganger* mellom de ulike representasjonene er av stor betydning. På denne måten vil en kunne generalisere fremgangsmåten. Regnestykkene med addisjon kan være et eksempel på generalisering. De tenkte ikke på spesifikke dyr når de noterte løsningene sine, men skrev regnestykker med ulikt antall addender som alle hadde summen tolv.

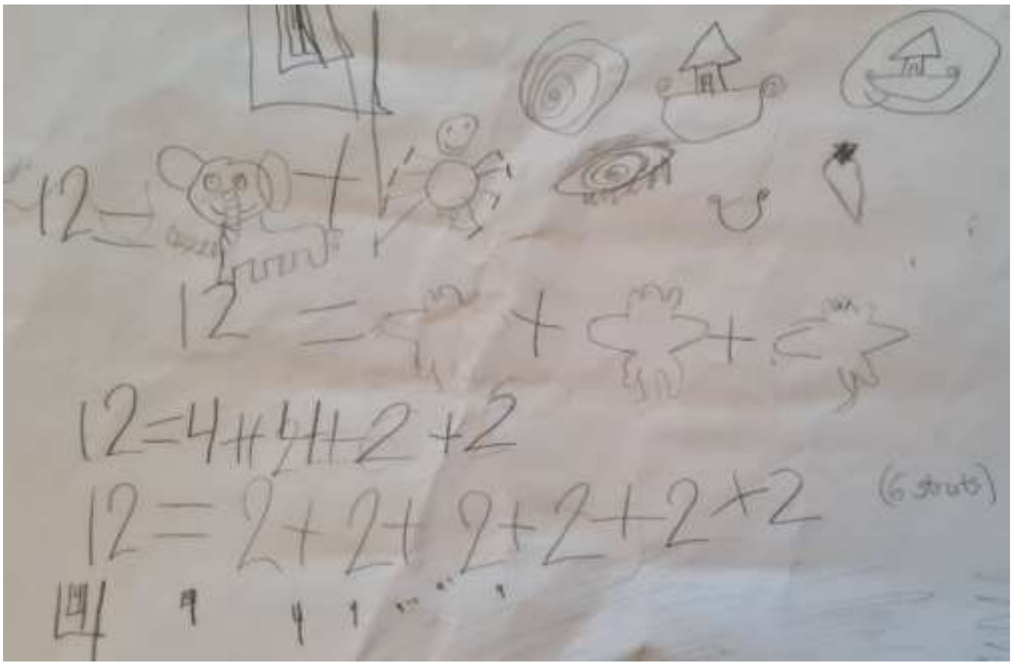
4.1.5 Kombinasjon av representasjoner

I figur 6 har eleven kombinert tegning med tellestreker og symboler (tall og ord). Det er en hensiktsmessig representasjon som er til hjelp for tanken. Hun har skrevet 6-tallet (speilvendt), ordet *høner* og tegnet seks ringer med to tellestreker inni hver. Nederst har hun skrevet = 12. I denne representasjonen ser vi at eleven har funnet en løsning på oppgaven, ved å kombinere tall med tellestreker og ord. Ved å bruke to tellestreker i hver ring, har hun laget en hensiktsmessig representasjon for tanken og det ser ut til at hun har forstått oppgaven. Ved å ha to tellestreker i hver ring, vil hun også kunne telle antall bein i løsningen for å kontrollere antallet. Her vil representasjonen være en visualisering for tanken, og læreren kan få innblikk i elevens forståelse.



Figur 6: Kombinasjon av representasjoner (klasse A)

En elev i klasse A startet med å tegne en elefant og en edderkopp (Figur 7). Videre tegnet han tre øyenstikkere (plastfiguren av øyenstikker hadde fire bein). De to første løsningene er presentert ved representasjonskategorien *tegning*.

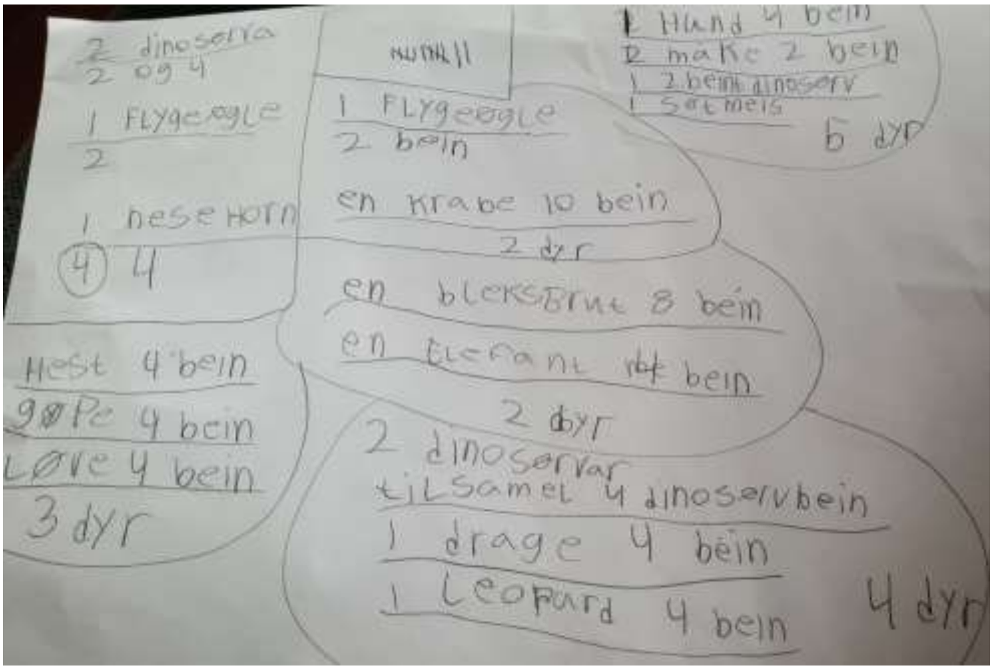


Figur 7: Kombinasjon av representasjoner (klasse A)

Etter de to første løsningene gikk han over til å skrive regnestykker, *symbolsk* representasjon. To dyr med fire bein og to dyr med to bein (4+4+2+2) og seks dyr med to bein (2+2+2+2+2+2). Ved å jobbe på denne måten har han funnet løsninger med **to dyr**, **tre dyr**, **fire dyr** og **seks dyr** og han bruker to ulike representasjoner. Eleven endrer representasjon til symbolbruk i løpet av oppgaven, som ser ut til å være en mer effektiv måte å skrive funnene sine. Det kan tyde på at eleven har god forståelse for symbolene. Regnestykkene starter med 12=, noe som kan bety at han starter regnestykket med det han vet. Det forteller også noe om forståelsen for likhetstegnet. Niss og Jensen (2002) påpeker at det er viktig at elevene lærer symbolene, blant annet likhetstegnet i begynneropplæringen. Eleven viser at han behersker flere representasjoner og at han kan veksle mellom dem.

I trådmodellen er en av komponentene *begrepsmessig forståelse*. Valenta (2015) påpeker at det er viktig å kunne tolke og benytte ulike representasjoner, oversette og veksle mellom dem ut fra hva som kan være nyttig. I elevbesvarelsene finner vi flere elever som klarer å veksle mellom ulike representasjoner. I figur 7 ser vi en elev som endrer representasjoner underveis i oppgaven, mens i figur 8 og 9 ser vi elever som bruker flere representasjoner i løsningene sine, for eksempel regnefortelling sammen med symboler. Det kan tyde på at de har en begrepsmessig forståelse. Spesielt i klasse C og D finner vi mange elever som ser ut til å ha utviklet begrepsmessig forståelse. Representasjonen i figur 7 kan også tyde på *strategisk tankegang* ved at eleven endrer til en mer effektiv representasjon av løsningene sine underveis i arbeidet.

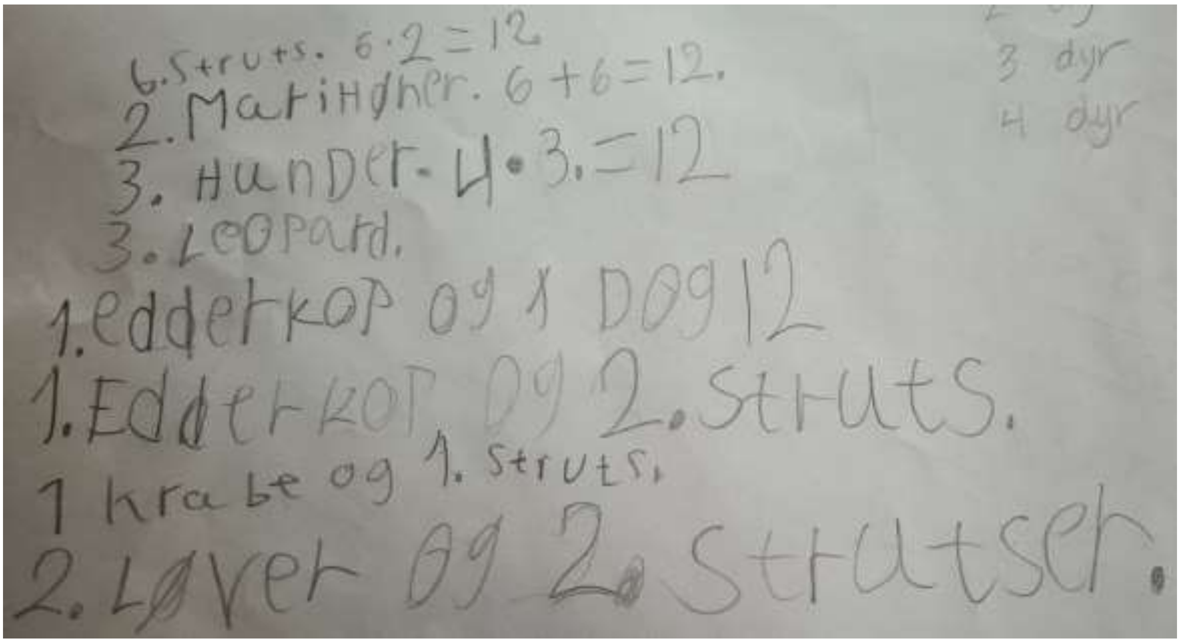
I figur 8 har elevene vist hvor mange bein hvert dyr har, og hvor mange dyr løsningen viser til. De bruker symbolsk representasjon med tall og ord, uten å vise regnestykker.



Figur 8 Kombinasjon av representasjoner (klasse C)

Elevene arbeidet målrettet med å lete etter ulike løsninger på oppgaven.
De har kommet frem til at Noa kan ha sett **fem dyr**, **fire dyr**, **tre dyr**, eller **to dyr**. På arket er det også tegnet tellestreker, tolv til sammen. Det kan tyde på at de telte for å se om de hadde regnet riktig. I den første løsningen med 4 dyr, har de skrevet 2 dinosaurer, 1 flyge-øgle og 1 neshorn. Dette kan også passe i representasjonskategorien forenklet regnefortelling. Under dinosaurene har de skrevet tallene 2 og 4. Dette kan vise til at den ene dinosauren hadde to bein og den andre fire bein. Under flyge-øglen står tallet 2 og under ordet neshorn står tallet 4. Elevene har ikke brukt fullstendig symbolsk representasjon, men de har en tydelig visualisering for tanken. I hver løsning er det også et tall med ring rundt, som viser hvor mange dyr det er til sammen i løsningen. I denne løsningen finner vi også kjennetegn på begrepsmessig kunnskap ved at de bruker ulike representasjoner i løsningene sine.

Figur 9 viser en representasjon som er en kombinasjon av ord, tall og regnestykker. Dette kategoriseres som symbolsk representasjon. Elevene har begynt å multiplisere og de viser noen av løsningene som regnestykker med addisjon og noen som regnestykker med multiplikasjon.



Figur 9 Kombinasjon av representasjoner (klasse C)

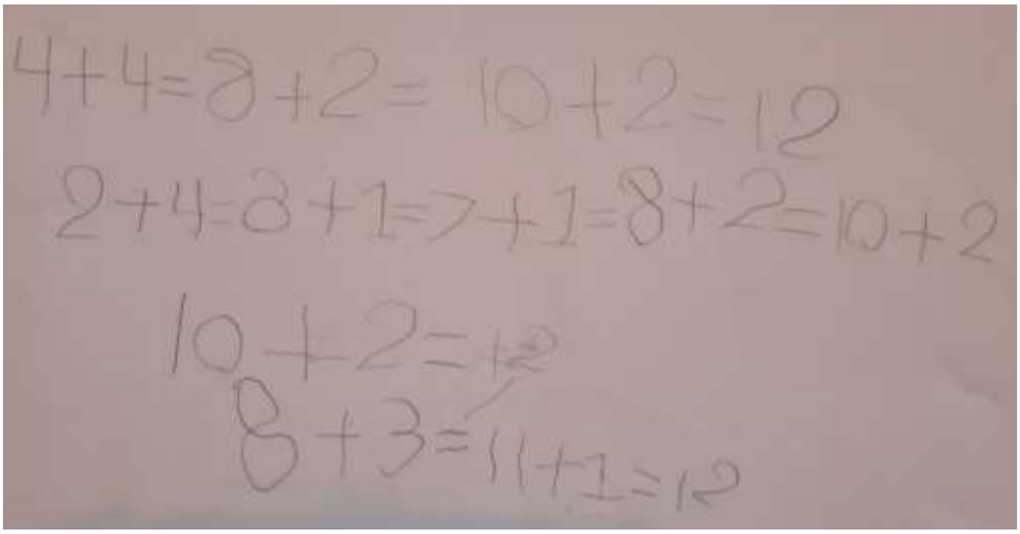
I flere av løsningene har de skrevet antall dyr og viser regnestykket som passer til løsningen. For eksempel: 6 struts, 6*2=12. Dette er en hensiktsmessig representasjon som viser til hvilke dyr de tenker på og hvor mange bein dette blir til sammen. De har også løsninger som er preget av lister, hvor de bare skriver hvilke dyr de tenker på (1 edderkopp og 2 struts). I denne studien har lister med dyr blitt definert som enkle regnefortellinger. Elevene har til sammen funnet løsninger med **seks dyr**, **fire dyr**, **tre dyr** og **to dyr**. De hadde begynt å arbeide med en løsning med fem dyr da læreren stoppet dem for å samle dem til klassesamtale. Elevbesvarelsen viser at elevene ser ut til å ha forstått oppgaven og de veksler mellom ulike representasjoner av løsningene sine.

I trådmodellen vil *resonnering* si å kunne tenke logisk rundt relasjoner mellom begreper og situasjoner. Valenta (2015) påpeker at det også vil innebære å reflektere, utforme hypoteser, forklare og argumentere for sammenhenger mellom ulike begreper, egenskaper og framgangsmåter. Innen tallforståelse handler resonnering om ulike sammenhenger og egenskaper ved tall og regneoperasjoner. I denne løsningen ser vi at elevene har en kobling mellom løsningen skrevet som lister, og regnestykker med addisjon og multiplikasjon. Dette kan tyde på at de har en logisk tenking rundt situasjonen og bruk av regneoperasjoner. Elevene oppdaget selv at de kunne bruke multiplikasjon 6*2 for å vise hvor mange bein seks strutser hadde. Dette er i tråd med hvordan Valenta påpeker at resonnering handler om å se sammenheng mellom ulike regneoperasjoner.

4.1.6 Ufullstendig bruk av symboler

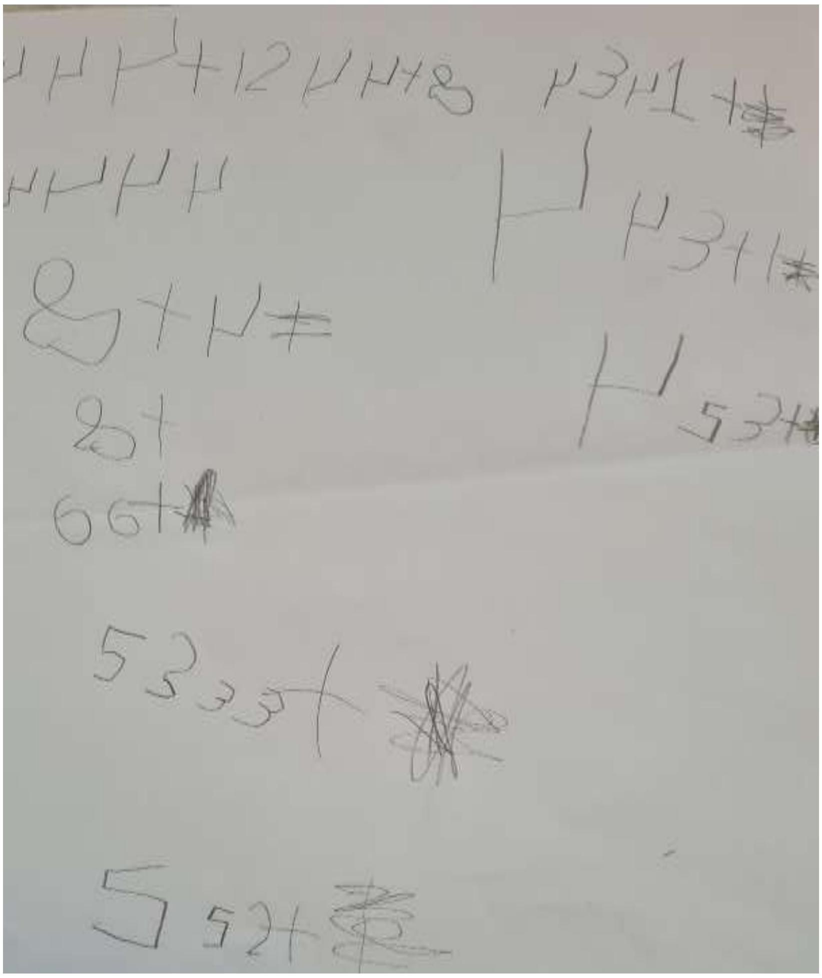
I klasse A valgte de fleste elevene å representere løsningene sine med symboler. Et overraskende funn var at de valgte denne representasjonskategorien selv om de ikke ser ut til å beherske den fullt ut. Læreren gav ingen føringer på hvordan de skulle notere funnene sine, så det var overraskende at de fleste elevene valgte symboler som representasjon. Ufullstendig forståelse for likhetstegnet og manglende tegnsetting er blant funnene i elevbesvarelsene. Videre vil jeg vise et par eksempler på representasjoner som illustrerer funnene.

Figur 10 viser arbeidsarket til en elev som bruker symbolsk representasjon. Eleven fant multiple løsninger på oppgaven, men representasjonen kan tyde på at han ikke har utviklet forståelse for bruken av likhetstegnet. Det går likevel an å tolke løsningene hans. Han ser ut til å regne sammen to tall om gangen, og fortsetter så direkte med neste regnestykke, der summen av de to addendene i første regnestykket blir første addend i neste regnestykke. Slik skriver han en hel rekke med regnestykker som «henger sammen». Dette er ikke riktig bruk av likhetstegnet, men vi klarer å følge idéen. Det ser ut til at symbolspråket ikke er et språk av første orden enda.



Figur 10: Manglende forståelse for likhetstegnet (klasse A)

Det er også interessant at eleven skriver +1 i regnestykkene. Hvilket dyr skal ettallet representere? Han har også med regnestykket 8 + 3. Hvilket dyr skal tretallet representere? Denne løsningen kan tyde på at eleven ikke fullt ut har forstått oppgaven.



Figur 11: Forsøk på bruk av symboler (klasse A)

Figur 11 viser en løsning som kan kategoriseres som ufullstendig bruk av symboler. Flere av tallene er speilvendte og addisjonstegnet og likhetstegnet brukes ikke på en konsekvent måte. Det kan være utfordrende å tolke representasjonen. Summen av tallene i flere av tallrekkene blir tolv: (5, 5, 2), (6 og 6), (8 og 4), (4, 4 og 4), (4, 5 og 3), (4, 4, 3 og 1). Representasjonen oppleves uoversiktlig, og det er usikkert om eleven har skjønt oppgaven. Hvilke dyr har ett, tre eller fem bein? Han bruker femtallet i flere av løsningene sine. I denne representasjonen må man lete litt for å forstå elevens løsninger. Han brukte ikke tegninger eller tellestreker for å visualisere tankene sine. Eleven valgte symboler, selv om dette ikke ser ut til å være et språk av første orden. Høines (2011) påpeker at flere barn vil trenge et oversettelsesledd for å bli trygge på symbolspråket, da dette for mange barn er et språk av andre orden ved skolestart. Denne eleven ser ut til å ha behov for et oversettelsesledd. For å få presentert idéene sine til andre, burde han kanskje valgt en representasjon som han behersker bedre.

Valenta (2015) påpeker også at overganger mellom ulike representasjoner kan være vanskelig for mange barn. I elevbesvarelsene i figur 10 og 11 finner vi en utrygg bruk av symboler. Elevene ser ut til å mangle begrepsmessig forståelse, ved at de ikke kan benytte ulike representasjoner og veksle mellom dem. De har ikke trygg bruk av symboler, og de bruker ikke tegning eller regnefortelling for å representere løsningene sine. Det kan tyde på at de trenger å arbeide mer med ulike representasjoner for å bygge forståelse for symboler. Det kan føre til at de oppnår begrepsmessig forståelse. Dette vil bli drøftet i kapittel 5.

Oppgaven «Noas ark» var virkelighetsnær, og elevene fikk utfordret sin forståelse av addisjon ved å undersøke ulike løsninger. Flere av elevene i klasse A hadde ikke hadde trygg bruk av symboler. I Pisa-undersøkelsene vises det til en syklus med tre problemløsningsprosesser som elevene må gjennom for å løse et problem: 1) *Gjenkjenne og formulere,* 2) *Bearbeide og bruke,* 3) *Tolke og vurdere.* Den tredje prosessen handler om at den matematiske løsningen tolkes og vurderes opp mot den opprinnelige situasjonen. Det innebærer ifølge Nortvedt og Pettersen (2016) å oversette fra et matematisk språk til et hverdagsspråk, vurdere hvor relevant løsningen er, og identifisere begrensninger i den modellen som ligger til grunn for resultatene. Flere av elevene i klasse A så ut til å ha en svak kobling mellom hverdagsspråk og matematisk språk, slik at flere av løsningene ikke passet til oppgaven. For eksempel ved at de skrev tallene 1, 3 og 5 i løsningene sine. Det er vanskelig å se hvilke dyr oddetallene skal representere. I trådmodellen for matematisk kompetanse, påpeker Valenta (2015) at komponenten **anvendelse** innebærer å løse abstrakte matematiske problem. Det vil innebære å formulere matematiske problem, representere dem på en hensiktsmessig måte, være fleksibel i utvikling av en løsningsstrategi og vurdere om løsningen er rimelig. Når problemet er formulert, må det representeres matematisk før en kan arbeide videre med det. Løsningsstrategien utvikles med utgangspunkt i representasjonen. Videre fremhever Valenta at læreren har en viktig rolle i å diskutere styrker og svakheter ved ulike representasjoner med elevene. Dette vil bli drøftet nærmere i kapittel 5.

Klassene i studien så ut til å foretrekke ulike representasjoner. Spesielt klasse B, som laget lister og klasse A som brukte symboler. Det kan ha sammenheng med hvordan lærerne har brukt ulike representasjoner i undervisningen. Enge og Valenta (2013) påpeker at å bruke ulike typer representasjoner og ha evne til å veksle mellom dem etter behov, har stor betydning for utvikling av begrepsforståelse i matematikk. Det er viktig å arbeide med flere representasjoner av et matematisk objekt. Ensidig vekt på øving av symbolsk manipulasjon kan føre til at elevene ikke gjenkjenner situasjoner fra virkeligheten. Klasse A skilte seg ut i denne studien ved å ha svært ulik forståelse for bruk av symboler. I denne klassen ser vi et stort sprik i matematisk kompetanse. Flere elever har ikke trygg bruk av symboler, likevel var det denne representasjonen de fleste valgte. I klasse B var det overraskende at *ingen* av elevene brukte fullstendig symbolsk representasjon når de var kommet til 3. trinn. Dette vil bli drøftet videre i kapittel 5. I klasse C og D brukte elevene konkreter, tegninger, symboler og enkle regnefortellinger. Flere grupper brukte også en kombinasjon av representasjoner.

4.2 Lærernes refleksjoner rundt undersøkende undervisning

Undervisningen i alle klassene ble gjennomført av klassens lærer. Raskt etter undervisningen ble det gjennomført individuelle intervju med lærerne for å få et innblikk i deres refleksjoner rundt å undervise på denne måten. Etter grundig gjennomgang av datamaterialet vil tre ulike funn bli analysert. De var fremtredende i intervjuene med lærerne og situasjoner fra klasserommet kan belyse lærernes utsagn. Funnene vil bli beskrevet under underoverskriftene: **Representasjoner**, **Motivasjon** og **Klassesamtalen**. Lærerintervjuene er hovedkilde og data fra intervjuene er analysert sammen med observasjonsnotatene, for å gi et tydeligere bilde. Utdrag fra intervjuene vil bli presentert for å illustrere funnene. Først presenteres funn som viser lærernes refleksjoner rundt elevenes bruk av representasjoner.

4.2.1 Representasjoner

Elevene i alle klassene arbeidet med å undersøke løsninger i omtrent 30 minutter. Nosrati og Wæge (2015) fremhever at elevene må få **god tid** til å undersøke ulike løsninger på oppgaven. Det er ikke spesifisert hva god tid innebærer. Barn i 7-8 årsalderen sitter sjelden lenge sammenhengende i ro. Når undervisningsøkten er på til sammen 60 minutter, regner jeg i denne sammenhengen 30 minutter som god tid. Det var ikke avtalt på forhånd hvor lang tid elevene skulle bruke på å løse oppgaven, men etter rundt 30 minutter observerte vi at mange elever begynte å komme i mål med løsningene. Mens elevene arbeidet med å undersøke løsninger, gikk de voksne rundt og diskuterte strategier med dem, i tråd med hvordan Nosrati og Wæge anbefaler at den tredelte strukturen gjennomføres. Noen elever trengte hint for å komme videre med oppgaven. Hvis de hadde funnet løsninger med to dyr og tre dyr, utfordret læreren dem til å undersøke om det finnes en løsning med fire dyr. Elevene arbeidet utholdende med å lete etter løsninger. Videre presenteres funn ved utdrag fra intervju med lærer B og lærer C som reflekterer rundt elevenes bruk av representasjoner.

I intervjuet ble lærer B spurt om det var noe elevene trengte å øve på hvis de skal mestre undersøkende undervisning:

> *Lærer B: Ja, det er det vi har snakket om (...) og så tenkte jeg på om vi skulle brukt litt tid på ... skal de alltid få lov til å tegne, på en måte? Eller skulle vi oppfordret dem til å bruke tall og tegn etter hvert?*

Lærer B stiller spørsmål ved elevenes representasjoner. Hun oppdaget at elevene hadde lite fleksibel bruk av representasjoner for sine løsninger. Noen få elever i klasse B tegnet sine løsninger, men de aller fleste elevene i klassen brukte en forenklet regnefortelling, med lister over hvilke dyr som skulle om bord i arken. Når lærer B spør om de alltid skal få lov til å tegne, kan det tolkes som at hun tror elevene bør beherske flere representasjoner. Det er interessant at lærer B, som ikke betegner seg selv som mattelærer, oppdaget dette ved gjennomføring av oppgaven. Elevene i klasse B kunne profitert på å utvide sin representasjonskompetanse, slik at de kunne ha vekslet mellom ulike representasjoner i tråd med hva Niss og Jensen (2002) hevder at er viktig. Elevene bør ha forståelse for de innbyrdes forbindelsene mellom forskjellige representasjonsformer og kunne velge blant og oversette mellom de ulike representasjonsformene. Det vil også være et kjennetegn på matematisk kompetanse ifølge Valenta (2015).

Lærer C kommer også inn på elvenes strategier og representasjoner. Etter at hun hadde introdusert oppgaven, forklarte hun at elevene ville få utdelt ark som de kunne bruke til å tegne, skrive tellestreker eller regnestykker for å løse oppgaven. Lærer C kommenterer elevenes representasjoner slik:

> *Lærer C: Ja, de får en helt annen forståelse av hvorfor de lærer matematikk. Bare sånn som i dag når de plutselig var inne på ganging (…) sant, vi har jobbet med ganging i ca. 2 uker og plutselig nå sitter de og: «Fire strutser er det same som 4 ganger 2».*
>
> *Intervjuer: Ja, her er en som skrev ned gangestykker: Seks strutser, 6 ganger 2. Tre hunder, 4 ganger 3. Da har de virkelig skjønt …*
>
> *Lærer C: Ja, det er det de har! Jeg synes jeg så en til som begynte så vidt på … her … 4+4+4 og så tre ganger fire er lik 12. Så de har kommet litt inn i det … og når vi da snakket med de som satt med tegning - de var jo så vidt inne på at de har 4 bein hver … jeg snakket med dem og spurte: Er ikke dette noe som vi jobber med i matematikken ellers? Men de skrev ikke det ned.*

Lærer C uttrykker at elevene får en helt annen forståelse av hvorfor de lærer matematikk når de arbeider med en utforskende oppgave. Dette er i tråd med hvordan Nosrati (2019) beskriver at elevene får oppdage matematiske sammenhenger ved å arbeide med problemløsingsoppgaver. Noen elever i klasse C bruker symbolsk representasjon for løsningene sine ved bruk av gjentatt addisjon og multiplikasjon. Ifølge lærer C er multiplikasjon et nytt emne som de bare har arbeidet med i to uker. Hun påpeker at elevene gjør denne koblingen mellom addisjon og multiplikasjon på eget initiativ. De elevene som er moden for det, gir dermed oppgaven ekstra takhøyde.

Det var ikke alle elevene i denne studien som hadde tydelige representasjoner for sine løsninger. I klasse A var det flere misoppfatninger og i klasse B var det lite fleksibel bruk av representasjoner. Elever som ikke behersker symbolsk representasjon, kan ifølge Høines (2011) ha behov for et oversettelsesledd. Det var ingen av lærerne som brukte oversettelsesledd i undervisningen. I klassesamtalen observerte jeg at tre av lærerne oversatte elevenes løsninger til symboler, uten å bruke oversettelsesledd. Et eksempel er elever som presenterte en løsning med tre katter. Læreren gjentok løsningen, og skrev 4+4+4=12 på tavla. Elevene var ikke aktive i oversettelsen, de ble ikke spurt om hvordan dette kan skrives med symboler. Elever som har usikker bruk av symboler, kan ha problemer med å se sammenhengen mellom de ulike representasjonene av samme løsning. Valenta (2015) påpeker at læreren må være bevisst på at overganger mellom representasjoner kan være problematiske for noen elever. Det er et viktig aspekt for matematikk-læring at elevene får undersøke likheter og forskjeller mellom metodene, hva som er fordeler og ulemper, og hvordan representasjonene henger sammen ifølge Enge og Valenta (2013). Klassesamtalen kan være en god arena for å diskutere gode representasjoner for løsninger på akkurat denne oppgaven. Bruken av representasjoner ble løftet frem i klassesamtalen som lærer C ledet. Dette bli nærmere beskrevet i kapittel 4.2.3, Klassesamtalen.

Alle elevene viste ikke trygg bruk av symboler i løsningene sine. Det er heller ikke et mål i begynneropplæringen. Noen grupper tegnet dyrene og telte opp antall bein ved bruk av tellestreker. Andre grupper skrev regnestykker med addisjon og multiplikasjon. Det kan tyde på at det var stor variasjon i matematisk kompetanse blant elevene i denne studien. Nosrati og Wæge (2015) fremhever at undersøkende undervisning kan gi god tilpasset opplæring og passe for både høyt-presterende og lavt-presterende elever. Tilpasset opplæring henger nært sammen med motivasjon. Elever som opplever mestring, vil ofte bli motivert for å løse oppgaver. Videre presenteres funn fra hvordan lærerne opplevde elevenes motivasjon i arbeidet med denne oppgaven.

4.2.2 Motivasjon

Det kan være vanskelig å få en direkte observasjon av elevers motivasjon. Det er viktig at lærere kan observere, tolke og forstå elevers motivasjon, slik at de blir bedre rustet til å planlegge og gjennomføre undervisning som gir elevene glede, engasjement og mestring ifølge Wæge og Nosrati (2018). Selv om motivasjon vanskelig lar seg registrere og måle, undersøkes det hvordan lærerne i studien opplevde elevenes motivasjon. Gjennomgang av datamaterialet viste at det var mye felles for de fire klassene. Videre presenteres utdrag fra intervjuene med lærer A, B, C og D som illustrerer funnene.

I klasse A startet undervisningen i samlingskroken med en samtale om hvor mange dyr Noa kunne ha sett gå om bord i arken. Elevene var ivrige, og det var mange hender i været. Elevene foreslo: «Seks dyr!», «Nei, tre!». «Hvorfor?», spurte læreren. «Vet ikke». «Det må være tre!». «Seks pluss seks er tolv». «Men de har jo fire bein!». «Da må det være tre sjiraffer». Elevene snakket i munnen på hverandre og var ivrige etter å komme i gang. I intervjuet spurte jeg hvordan lærer A opplevde elevenes engasjement:

> *Engasjert. Ja, jeg synes de var engasjerte. I hvert fall i starten, de var ivrige på å komme i gang.*

Lærer A formidler at hun opplevde at elevene var engasjerte. Dette engasjementet kan tolkes som et tegn på motivasjon for oppgaven, i tråd med hvordan Wæge og Nosrati (2018) beskriver at motivasjon kan vises gjennom følelser og handlinger. Utholdenheten kan også fortelle noe om motivasjon, og elevene arbeidet med oppgaven i cirka 30 minutter uten pause. Ved å legge ned så mye innsats, tyder det på at elevene ble motiverte for å finne løsninger. Dette samsvarer godt med Lærer A sin oppfatning av elevenes engasjement.

I klasse B så elevene ut til å more seg når de fortalte om dyr som ikke hadde bein, men som kunne ha sneket seg om bord i arken. De fniste og lo mens de kom med forslagene. En elev som vanligvis har et negativt forhold til faget, arbeidet utholdende med samarbeidspartner om oppgaven. Dette var et positivt funn, som ble fremhevet av lærer B:

> *Ja, det også. Hun har veldig sånn, hun kan begynne å gråte når det står matematikk på planen … At hun egentlig var med på denne oppgaven, var en vinn i seg selv, på en måte.*

Lærer B påpeker at en elev som vanligvis sliter med motivasjon i faget, viste glede ved å arbeide med denne utforskende oppgaven. Lærer B beskriver at eleven vanligvis kan begynne å gråte når det står matematikk på planen. Dette kan være uttrykk for negativ mestrings-forventning, i tråd med hvordan Bandura (1997) hevder at elevenes mestringsforventninger har stor innvirkning på handlingene deres (sitert i Wæge & Nosrati, 2018). Elever med lave mestringsforventninger, gir ofte opp, eller legger liten innsats ned i å løse oppgaver. De forventer ikke å lykkes. Ved å samarbeide med en medelev, klarte denne eleven å finne flere løsninger på oppgaven. Dette samsvarer med Dysthes (2001) forskning om bruk av stillas, hvor en mer kompetent medelev kan fungere som støttende stillas. I denne studien fikk eleven samarbeide med en medelev om en utforskende LIST-oppgave, og vi observerte både humor, glede og utholdenhet. Dette kan tolkes som tegn på motivasjon for å løse oppgaven.

Elevene i klasse C var godt kjent med undersøkende undervisning. De fleste gruppene arbeidet med løsninger uten konkreter. Selv de elevene som trengte å telle bein på plastdyr, så ut til å ha høye mestringsforventninger. De telte bein på dyr, tegnet dem på arket og skrev antall bein. I intervjuet ble lærer C spurt om hvordan hun opplevde elevaktiviteten:

> *Lærer C: Jeg synes alle var aktive (…) I dag synes jeg at alle var med. (…) Jeg kom bort og så … Du, her har dere løsninger med 2 dyr, 3 dyr osv. Kan dere finne en løsning med 4 dyr? Så var de på igjen. De trengte bare den lille guiden til … de små hintene …*

Lærer C opplevde at elevene var aktive i arbeidet med å løse oppgaven. Noen elever trengte hint for å komme videre. Dette er i tråd med hvordan Nosrati (2018) beskriver at læreren må være tett på for å veilede når elevene arbeider med utforskende oppgaver. For å fremme matematisk forståelse er det avgjørende å stille gode spørsmål og følge opp elevenes fremgangsmåter, beskrivelser og begrunnelser. I intervjuet ble lærer C spurt hvordan hun opplevde elevenes engasjement:

> *Lærer C: De er veldig motiverte for grubleoppgaver. De kan komme inn til time litt sliten, men når de kommer i gang synes de det er veldig kjekt. (…) Vanligvis når jeg har grubleoppgave kan de sitte hvor de vil og bruke hva de vil. Finner de konkreter, kan de bruke det.*

Lærer C beskriver elever som er motiverte for grubleoppgaver. Elevene synes det er kjekt å arbeide med utforskende oppgaver, selv om de kan være slitne på slutten av skoledagen. Elevene så ut til å ha høy grad av mestringsforventninger. Dette kan komme av at de har erfaringer med å lykkes med tidligere oppgaver av samme type – de har positive mestringserfaringer. Wæge og Nosrati (2018) påpeker at når elever lykkes med oppgaver, vil deres forventninger om å kunne løse og forstå lignende oppgaver øke. Det ble også tydelig ved at elevene ønsket å vise frem løsningene sine. De så ut til å være stolte av arbeidet sitt, og gav uttrykk for at det var positivt at arbeids-arkene ville bli nærmere studert. Lærer C formidler i intervjuet at elevene er aktive og motiverte når de får jobbe med undersøkende undervisning.

I klasse D var det også stort engasjement rundt oppgaven. Etter felles start begynte elevene å samarbeide om å finne løsninger. Det var mye aktivitet på gruppene og lærer D uttrykker det slik i intervjuet:

> *Intervjuer: Ja, det var i forhold til aktivitet, men i forhold til motivasjon og engasjement …*
> *Lærer D: Det var der! (…) de var interesserte og virkelig jobbet for å prøve å finne ulike løsninger.*

Lærer D påpeker at elevene var interesserte, noe som kan tolkes som engasjement for oppgaven. Det kan tyde på at elevene hadde høye mestringsforventninger. Utholdenhet kan også være et uttrykk for motivasjon, og lærer D opplevde at elevene «virkelig jobbet» med å finne ulike løsninger. Elevene i klassen ble spurt om de kunne vise med tomlene sine hva de synes om oppgaven. Samtlige elever viste tommel opp – det var en direkte og konkret tilbakemelding på elevenes motivasjon. Alle de fire lærerne i studien vurderer elevene som motiverte ved gjennomføring av undersøkende undervisning. Dette samsvarer med tidligere forskning som peker på at IBL-inspirert undervisning kan føre til mer motiverte elever (Fuglestad, 2010; Nosrati & Wæge, 2015; Sikko & Grimeland, 2020).

Formålet med denne studien er å undersøke om vi kan bedre elevenes matematiske kompetanse ved bruk av undersøkende undervisning. Lærer C har brukt undersøkende undervisning siden førsteklasse og virker trygg på at dette er en god måte å undervise på. I intervjuet med lærer B, kommer det frem at hun har utfordret seg selv ved å delta i denne studien. Hun gjennomfører undersøkende undervisning med en List-oppgave for første gang. Det er interessant å finne ut hvordan lærer A og lærer B, som ikke har tidligere erfaring med undersøkende undervisning, reflekterer rundt å bruke undersøkende undervisning videre. Utdrag av intervjuet med lærer B vil illustrere funn som gjelder for begge lærerne.

Lærer B ble spurt om klassen var vant til å arbeide med rike oppgaver, som kan ha flere riktige løsninger:

> *Lærer B: Jeg har ikke brukt at det kan være mange forskjellige svar. Det har mest vært ett rett svar, men at de kan finne det på forskjellige måter. Noen kan tegne, noen kan lage tellestreker.*

Lærer B beskriver at elevene ikke er vant med å arbeide med rike oppgaver. De har tidligere jobbet med grubleoppgaver, men ikke utforskende oppgaver med flere mulige løsninger. Det kan tyde på at lærer B har brukt mer tradisjonell undervisning, i motsetning til hvordan et IBL-klasserom beskrives. Sikko og Grimeland (2020) beskriver IBL-klasserom hvor læringsmiljøet preges av oppgaver som oppleves som relevante og åpne, med flere mulige løsninger. Lærer B gir uttrykk for at hun synes det var utfordrende å gi slipp på kontrollen mens hun ble observert:

> *Og det er jo litt sånn … jeg kjente jo litt på det … å gi slipp på kontrollen, MENS noen observerer (…) Og så er ikke matematikk mitt fag. Hvis du skjønner … det er noe med det også … Det er noen fag man liker bedre enn andre. Jeg trenger litt det pushet, på en måte …*

Lærer B beskriver at matematikk ikke er hennes fag. Det kan tolkes som at hun ikke har like stor faglig trygghet i dette faget som i andre fag. Det vil kunne prege hennes trygghet i lærerrollen. Hun påpeker at hun kjente på det å gi slipp på kontrollen mens hun ble observert. Det kan tyde på at hun vanligvis bruker mer lærerstyrt undervisning i matematikk. Målet med undersøkende undervisning er at elevene skal bli tenkende, kreative og kritiske, og selv finne fremgangsmåter for å løse oppgaver. Sikko og Grimeland (2020) beskriver IBL-undervisning som utforskende og undersøkende. Dette vil medføre at læreren gir fra seg noe av kontrollen og hun vil ikke kunne forutse akkurat hvordan elevene vil løse oppgavene. Lærer B er interessert i å utvikle sin lærerrolle, og setter ord på at hun «pusher» seg litt ved å delta i denne studien. I barneskolen underviser læreren ofte i mange fag. Det kan føre til at man ikke har like stor faglig trygghet i alle timer.

I intervjuet ble lærer B spurt om hun tror elevene lærer det de skal ved å arbeide på denne måten, eller om hun tenker at hun velger bort noe fra pensum:

> *Lærer B: Nei, men jeg tenker kanskje at det er viktig å vise dem at de faktisk har vært igjennom gjentatt addisjon f.eks., eller vi kunne koblet gangetabellen på det vi holder på med nå da, kanskje vise dem faktisk … eller sette ord på det …at de også skjønner at vi har jobbet med pluss, minus eller ganging (…) Ja, men det er jo viktig … når de selv setter ord på, og vet hva de har vært igjennom. Jeg tenker ikke at man legger vekk noe, men hjelper dem å sette ord på at vi er innom ganging for eksempel.*

Lærer B fremhever at det er viktig å gjøre elevene bevisst på hva vi arbeider med. Hun påpeker at hun synes det er viktig å vise elevene hva de har vært gjennom når vi har arbeidet med undersøkende undervisning. Hennes refleksjoner rundt elevenes læring er i tråd med hvordan Wæge (2019) påpeker at læreren må ha klare mål for hva elevene skal lære og forstå ved å arbeide med en matematisk aktivitet. Wæge hevder at det kan være utfordrende for læreren. og foreslår tre spørsmål som kan virke oppklarende for hva som er målet med aktiviteten: Hvilke matematiske begreper og ideer skal elevene lære? Hvorfor er de viktige? Hvordan henger de sammen med det elevene har lært tidligere? (Wæge, 2019, s. 20).

Nosrati (2019) fremhever at læreren har en viktig rolle når elevene undersøker løsninger på LIST-oppgaver. Læreren må stille gode spørsmål, og fremgangsmåter, beskrivelser og begrunnelser bør diskuteres regelmessig. Lærer B kommer inn på dette i intervjuet, når hun beskriver at vi må hjelpe elevene til å se hva vi har arbeidet med. Dette kan tyde på at hun mener at læreren må tydeliggjøre målene for elevene. Lærer B uttrykker også at hun mener det er viktig at elevene selv får sette ord på sine oppdagelser. Dette er i tråd med hvordan Nosrati beskriver at fremgangsmåter, beskrivelser og begrunnelser bør diskuteres. Lærer B gir uttrykk for å være interessert i å utvikle sin praksis og ta i bruk undersøkende undervisning videre.

Bergem (2018) påpeker at læreboka i matematikk ofte erstatter læreplanen i faget. Det kan føre til at flere lærere følger boka i stedet for læreplanen. Funnene i denne studien kan tyde på at lærere som har fordypning i matematikk er mer bevisst på å bruke læreplanens kjerneelementer. Selv om lærer B gir uttrykk for at matematikk ikke er hennes fag, ville hun delta i prosjektet for å pushe seg litt. Hun hadde nyttige refleksjoner rundt undervisningen og rundt lærerrollen. Hun virket bevisst på innholdet i klassesamtalen og stilte spørsmål ved hvordan vi kan hjelpe elevene til å utvikle sine representasjoner. Videre i dette kapittelet vil lærernes refleksjoner rundt klassesamtalen vil bli presentert og analysert.

4.2.3. Klassesamtalen

Nosrati og Wæge fremhever at klassesamtalen en viktig del av den tredelte strukturen undersøkende undervisning bør følge. «Timen avsluttes med at hele klassen diskuterer aktiviteten og de forskjellige løsningene» (2015, s. 3). Ved analyse av datamaterialet kom det frem et interessant funn om lærerens følelse av trygghet ved gjennomføring av klassesamtalen. Tre av fire lærere påpekte at de følte seg usikre på å lede den matematiske klassesamtalen i slutten av timen. Videre vil utdrag fra intervjuene med lærer B og lærer C fremheves for å illustrere funnene. Lærer B gjennomfører undersøkende undervisning for første gang, og utdrag fra intervjuet med lærer B illustrerer funn fra intervjuene med lærer A, B og D. Lærer C har arbeidet mye med undersøkende undervisning siden elevene startet i første klasse, og uttrykker en annen opplevelse av trygghet ved gjennomføring av klassesamtalen.

Lærer B påpeker i intervjuet at hun var usikker på gjennomføring av klassesamtalen.

> *Lærer B: Du så kanskje det … og så kan det være at jeg var litt usikker på hvordan vi skulle gjøre klassesamtalen (…) Ja, og det var egentlig første gang jeg har hatt en sånn type oppgave (…) Men jeg hadde ikke helt tenkt igjennom den siste delen, jeg hadde ikke bestemt akkurat hvordan jeg skulle gjøre det, og da blir jeg litt usikker og da blir det litt kaos.*

Lærer B setter ord på at hun ikke hadde tenkt gjennom hvordan klassesamtalen skulle gjennomføres. Hun leder en matematisk klassesamtale for første gang og gir uttrykk for at dette gjør henne usikker. Hun beskriver en følelse av litt kaos når hun ikke hadde bestemt akkurat hvordan hun skulle gjennomføre den siste delen. Wæge (2019) påpeker at klassesamtalen er et interaktivt arbeid. Det krever at læreren tar avgjørelser og responderer på elevenes bidrag der og da. Dette kan føre til at læreren må improvisere noe i klassesamtalen. Wæge fremhever fem praksiser utarbeidet av Smith & Stein (2011) som kan gi læreren større kontroll over den matematiske samtalen og redusere graden av improvisasjon. De fem praksisene kan hjelpe læreren til å løfte frem elevenes strategier for å nå læringsmålene for timen. Praksisene er: (1) **forvente** hvilke strategier elevene vil bruke, (2) **observere** elevenes respons på oppgaven, (3) **velge** bestemte elever som skal presentere strategiene sine i klassesamtalen, (4) **bestemme rekkefølge** og (5) **se sammenhenger** mellom forskjellige elevstrategier og sentrale mål for timen. Lærer B sin første gjennomføring av matematisk klassesamtale viser ikke bruk av alle de fem strategiene, men det kan knapt forventes heller. I det forberedende møtet ble lærerne spurt om hvilke strategier de **forventet** at elevene ville velge. Det viste seg vanskelig å spå hvilke strategier elevene ville bruke.

Lærer B var tett på elevene mens de arbeidet med løsningene sine for å **observere** elevenes respons på oppgaven. Hun beveget seg mye mellom gruppene i klasserommet og snakket med elevene om løsningene deres. Elevene ble oppmuntret til å finne flere løsninger og til å sette ord på strategiene sine. Lærer B virket trygg i denne rollen. I det videre arbeidet med å **velge** bestemte elever som skal presentere strategiene sine i klassesamtalen, **bestemme rekkefølge** og **se sammenhenger** mellom forskjellige elevstrategier, gir lærer B uttrykk for at dette var vanskelig.

> *Lærer B: Hvem skal jeg ta først nå? Hvem har ikke arbeidet systematisk, hvis du skjønner … Hvem skal jeg ta sist og … Ja … Jeg tok jo noen bare for at … han første tok jeg fordi han er så urolig.*

Lærer B gir uttrykk for at hun synes det var vanskelig å avgjøre hvem som skulle få presentere sine løsninger for klassen og i hvilken rekkefølge. Hun valgte blant annet å la en elev få presentere først fordi han var så urolig. Det kan tyde på at Lærer B ikke hadde et klart bilde av hva som var de beste og mest systematiske strategiene. Lærer B gjennomfører undersøkende undervisning for første gang. Hun gir uttrykk for at hun tror det kan bli lettere når hun og elvene blir kjent med «oppskriften», eller gangen i undersøkende undervisning.

> *Lærer B: Og så blir man vant til å ha sånne oppgaver og de blir vant med det … De blir vant med hva som skal skje, at man har på en måte en oppskrift som man følger ... har jeg tenkt at vi kunne hatt, over hva som skal skje hver gang.*

Elever i begynneropplæringen kan ha behov for tydelige rutiner. Erfaringsmessig ser vi at det gir trygge barn, og trygge barn er ofte roligere enn utrygge barn. Når lærer B uttrykker at hun kunne tenkt seg en oppskrift over hva som skal skje, kan det ha bakgrunn i at hun underviser en klasse som har mange elever med ulike behov. Ved at både lærer og elever er trygge på hva som skal skje når de skal ha undersøkende undervisning, vil det kunne skape trygge rammer i klasserommet. Det kan også gi læreren en følelse av trygghet når hun vet hva som er læringsmål for timen. Ifølge Wæge (2019) må læreren formulere tydelige læringsmål for timen, slik at hun vet hva hun skal se etter i elevenes arbeider og hvilke matematiske ideer hun vil fremheve i diskusjonen. Dette kan være utfordrende, og læreren fokuserer ofte på hva elevene skal gjøre i stedet for hva de skal lære og forstå. I intervjuet gir lærer B uttrykk for usikkerhet vedrørende hvilke løsninger hun ville løfte frem i klassesamtalen og i hvilken rekkefølge elevene skulle presentere sine løsninger.

Et hovedfunn i denne studien er at tre av fire lærere følte seg usikre på å lede den matematiske klassesamtalen. Lærer A, B og D gav tydelig uttrykk for at de ikke følte seg trygge på å gjennomføre den matematiske klassesamtalen. Utdrag fra intervjuet med lærer B er fremhevet, da utdrag fra dette intervjuet samsvarer godt med uttalelser fra lærer A og lærer D om usikkerhet ved gjennomføring av klassesamtalen. Dette støttes også i tidligere forskning, hvor Wæge (2019) påpeker at godt ledete matematiske klassesamtaler er svært krevende for læreren.

Lærer C kjente ikke på denne utryggheten. Hun har brukt undersøkende undervisning siden elevene begynte i første klasse og gav uttrykk for å føle seg trygg på arbeidsmåten. I intervjuet etterpå ble hun spurt hva hun vektla i klassesamtalen:

> *Lærer C: (...) Såpass oversikt får du når du går rundt og når jeg ser hvilken gruppe jeg skal ta, så vet jeg etter hvert at hvis jeg tar den gruppen til slutt, så vet jeg at de har forstått hva jeg snakker om. Så da tar jeg den som jeg kan ta på slutten … Eh … for å fylle ut, ja … Sant, etter å ha gjort dette en god del ganger, så får du jo et helt annet syn når du vet hva du skal se etter når du går rundt. (...) Jeg tror jeg gjør det såpass automatisk etter hvert … at … for meg ble det viktig at når jeg så at alle var så engasjert at alle skulle få lov å gi et svar. Og så måtte jeg bare koble meg på, at jeg ikke endte opp med at alle var like svar. Så var jeg inne på at jeg må ta de gruppene som jeg vet er av de litt svake og så starte med dem slik at de får sagt noe, og så de som potensielt kan bli veldig sinte hvis de ikke får lov til å svare … Og så kan vi klare å holde de andre sånn at de kan få komme med sine svar som aldri har blitt sagt på slutten. Ja … jeg tror egentlig det bare var sånn jeg tenkte.*

Av Smith & Steins (2011) fem praksiser **forvente**, **observere**, **velge, bestemme rekkefølge** og **se sammenhenger** tok lærer C flere av dem i bruk i sin klassesamtale. Hun **forventet** hvilke strategier elevene kunne velge og hun gav oppgaven en lavere inngangsterskel ved å tilby konkrete plastdyr til elever som trengte det. Hun tilpasset også oppgaven ved å gjøre takhøyden høyere ved å utfordre noen grupper til å vise løsningene sine med multiplikasjon. Elevene hadde akkurat begynt å lære multiplikasjon når denne studien ble gjennomført. Ifølge Nosrati (2019) er det en av fordelene med listoppgaver, at de kan gi god tilpasset opplæring, ved at inngangsterskelen er lav og takhøyden stor. Lærer C beskriver at hun får god oversikt over elevene når hun går rundt og **observerer** mens de arbeider med løsninger. På denne måten er hun tett på elevene, slik Wæge og Nosrati (2015) anbefaler. Lærer C påpeker at hun velger seg en rekkefølge på hvilke elever som skal få presentere sine løsninger. Dette er i tråd med Wæges strategi **bestemme rekkefølge**. Elevene som presenterte løsningene sine sist, hadde flere løsninger enn de første som fikk presentere. De kunne dermed fylle ut med løsninger som ikke var presentert av andre grupper. Lærer C spurte en av de siste gruppene om de kunne vise løsningen sin som multiplikasjon også. Dette kan tolkes som at hun ville **fremheve sammenhengen** mellom gjentatt addisjon og multiplikasjon som strategi på denne oppgaven.

Elevene var rolige og konsentrerte om klassesamtalen. Det var mange som hadde lyst til å presentere sine løsninger og som rakte opp hånden for å svare. I denne studien skilte klasse C seg ut som den roligste klassen under klassesamtalen. Klassen består av elever med ulike behov, og elever med ulike forutsetninger. Vi kan karakterisere klassen som en normal-klasse med tanke på elevsammensetning. Det at de var rolige under gjennomføring av klassesamtalen kan ha sammenheng med at de er godt kjent med strukturen i undersøkende undervisning. Det kan også ha sammenheng med at lærer C var trygg i sin rolle. Hun ledet klassesamtalen etter Smith og Steins (2011) prinsipper for gode matematiske samtaler, og dette så ut til å være en effektiv måte å gjennomføre klassesamtalen på. Observasjonsnotater og lærerintervju bekreftet at denne klassen er godt kjent med å samarbeide og å arbeide med utforskende oppgaver. Videre vil noen hovedfunn fra studien drøftes i lys av tidligere forskning, hvor også implikasjoner for undervisningen i matematikk vil bli fremhevet.

5. Drøfting

Dette kapitlet vil inneholde en drøfting av hovedfunn fra kapittel 4. I drøftingen vil studiens forskningsspørsmål og problemstilling veves tettere sammen og funn fra studien vil drøftes i lys av tidligere forskning. Ifølge Valenta (2015) bør det i en lærerstyrt klassesamtale være søkelys på strategier og representasjoner. Drøftingen vil fremheve hvordan læreren kan utnytte *klassesamtalen* i arbeidet med å utvikle elevenes matematiske kompetanse. I kapittel 5.1 vil utviklingen av elevenes matematiske kompetanse drøftes med utgangspunkt i samarbeid og metakognisjon, den matematiske klassesamtalen og elevenes representasjoner. Hovedfunn fra lærernes refleksjoner rundt å gjennomføre klassesamtalen vil bli drøftet i kapittel 5.2.

5.1 Matematisk kompetanse

Problemstillingen for studien søker svar på om undersøkende undervisning kan legge til rette for at elevene får utvikle sin matematiske kompetanse. Valenta (2015) fremhever at **bevissthet** og **metakognisjon** er sentrale aspekter i utvikling av matematisk kompetanse. For å utvikle metakognisjon er det viktig at elevene blir bevisste hvordan de tenker når de løser matematiske problemer. Ifølge Nosrati og Wæge (2015) vil elevene kunne oppnå større grad av metakognisjon ved å sette ord på strategier. I kapittel 5.1.1 drøftes hvordan samarbeid kan fremme elevenes metakognisjon. **Klassesamtalen** har fått mye fokus i denne studien. Wæge (2019) påpeker at det kan være krevende å lede en klassesamtale, og læreren bør fremheve gode strategier og representasjoner for å løse oppgaven. I kapittel 5.1.2 drøftes funn fra klassesamtalen i lys av tidligere forskning. **Representasjoner** har også vært et sentralt tema i studien. Elevenes representasjoner kan fortelle noe om deres matematiske kompetanse. I kapittel 5.1.3 drøftes hvordan elevenes utvikling av representasjons-kompetanse kan støttes gjennom undersøkende undervisning.

5.1.1 Samarbeid og utvikling av metakognisjon

Et funn i denne studien peker på at elever som samarbeidet, fant flere riktige løsninger enn de som arbeidet alene. Dette er i tråd med tidligere forskning av Nosrati og Wæge (2015), som fremhever at samarbeid kan føre til bedre motivasjon og tilpasset opplæring. Elevene i klasse A ble ikke organisert i grupper som skulle samarbeide om oppgaven. Funnene kan tyde på at noe av stillaset da falt bort. Oppgavens inngangsterskel var lav, med tilgang til konkrete plastdyr på alle bordene. Elever som strevde med å løse oppgaven, kan ha manglet det Dysthe (2001) beskriver som støttende stillas. Ved å etablere et samarbeid mellom elevene, kunne de fått øving i å argumentere for sine løsninger og blitt mer bevisst på egne strategier. Metakognisjon har fått mye oppmerksomhet i forskning på matematikkundervisning og fremheves blant annet av Nosrati og Wæge (2015) som en viktig del av matematisk forståelse. De viser til et bredt utvalg forskning som tyder på at elever som venner seg til å tenke over og sette ord på sin egen tankegang i matematiske sammenhenger, opplever en positiv effekt på det matematiske prestasjonsnivået. Nosrati og Wæge fremhever at metakognisjon kan sees på som et verktøy som fremmer læring, og undersøkende arbeid i små grupper bidrar positivt til denne utviklingen. I denne studien ble elevene i klasse B, C og D organisert i par eller grupper som skulle samarbeide om løsninger på felles arbeidsark. Det gav dem mulighet til å diskutere løsninger og sette ord på sine strategier, noe som kan føre til bedre metakognisjon. Funn fra studien viser at elevene som samarbeidet kom frem til flere riktige løsninger på oppgaven. Det kan tyde på at samarbeid er en viktig faktor for å utvikle matematisk kompetanse ved gjennomføring av undersøkende undervisning.

Bevissthet og metakognisjon er sentrale aspekter i utvikling av tallforståelse, fremhever Valenta (2015). De fem komponentene i trådmodellen for matematisk kompetanse støtter hverandre og utvikles samtidig. Ved at elevene får utvikle sin kompetanse med utgangspunkt i trådmodellen, vil de utvikle både bevissthet og metakognisjon. Funn i studien peker på at lærerne aktivt diskuterte løsninger og strategier med elevene mens de undersøkte løsninger. Elevenes representasjoner ble ikke i like stor grad diskutert. I klasse C behersker elevene flere representasjonskategorier. Læreren hadde satt sammen heterogene grupper som samarbeidet om å finne løsninger på oppgaven. I denne klassen hadde de egne regler for samarbeidet og det var tydelig at de var vant med å snakke matematikk. Det kan tyde på at elevene har større grad av metakognisjon i matematikk, da de er vant med å sette ord på egne tanker og strategier når de samarbeider. I klassesamtalene så det ut til å være et uutnyttet potensial for å diskutere strategier og representasjoner. Videre vil lærerens rolle i å hjelpe elevene med å utvikle sin matematiske kompetanse bli drøftet.

5.1.2 Den matematiske klassesamtalen

Ved en godt ledet klassesamtale kan læreren fremheve gode strategier og representasjoner for oppgaven. Valenta (2015) påpeker at læreren bør løfte frem ulike representasjoner av samme løsning for å hjelpe elevene med å utvikle forståelse for overganger. Å arbeide med flere representasjoner av et matematisk objekt er viktig for å utvikle begrepsforståelse. Elever som har behov for et oversettelsesledd, kan ha nytte av at en løsning blir representert på flere måter. Valenta fremhever at overganger mellom ulike representasjoner kan være problematiske for noen elever. Funn i denne studien peker på at elevene ikke var aktive i å oversette mellom representasjonene. I følge Vygotsky (1971) kan elever med symboler som språk av andre orden miste et viktig ledd, når det ikke er søkelys på oversettelsesleddet. Funnene peker på at lærerne oversatte elevenes løsninger til symboler, uten å sette ord på denne overgangen. De hadde ikke søkelys på oversettelsesleddet, og elevene deltok ikke i arbeidet med å endre representasjon. Det kan tyde på at lærerne i studien ikke var bevisst på at endring av representasjoner kan være utfordrende for noen elever.

Enge og Valenta (2013) opererer med fem ulike kategorier av representasjoner. Læreren bør være oppmerksom på hvilke representasjoner elevene foretrekker og hvilke de trenger mer øving på å forstå. I klassesamtalen kan læreren fremheve likheter og forskjeller mellom representasjonene, noe som vil kunne styrke overgangen for elever som ikke er trygge på ulike representasjoner. Elevene vil kunne lære av hverandre, og se ulike representasjoner for samme løsning. Funn fra denne studien viser at det var utfordrende for lærerne å lede gode klassesamtaler. Tre av fire lærere var usikre på hva de skulle vektlegge og gav uttrykk for at de kunne trenge øving på å fremheve strategier og gode løsninger i klassesamtalen. Lærernes refleksjoner rundt klassesamtalen vil bli drøftet nærmere i kapittel 5.2.

5.1.3 Representasjoner

Et tydelig funn i studien peker på at flere elever trenger å arbeide med ulike representasjoner for å bygge forståelse for symboler. Valenta (2015) påpeker at overganger mellom ulike representasjoner er av stor betydning. Det vil si at elevene kan veksle mellom ulike representasjoner og for eksempel uttrykke et matematisk uttrykk gjennom regnefortelling og symboler. I studien er det stor forskjell på hvordan elevene representerer sine løsninger på oppgaven. Funn fra analyse av representasjonene viser at elevene har ulik grad av matematisk kompetanse. Enge og Valenta (2013) fremhever at forståelsen kan bedres ved at elevene får øve på å uttrykke tankene sine ved *ulike* representasjoner. Et viktig aspekt for matematikklæring er å undersøke likheter og forskjeller mellom metodene, hva som er fordeler og ulemper, og hvordan representasjonene henger sammen. Dette bør fremheves i klassesamtalen, men kan også arbeides med mens elevene undersøker løsninger. I denne studien oppmuntret lærerne elevene til å sette ord på strategiene sine og finne flere løsninger mens de arbeidet undersøkende med oppgaven. Alle de fire lærerne virket trygge i denne rollen, og de var tett på elevene mens de arbeidet med å undersøke løsninger slik Nosrati (2019) påpeker at er viktig.

Funn i studien kan tyde på at lærerne var mer opptatt av elevenes strategier enn representasjonene de brukte. Lærer C veiledet elever til å endre representasjon når de oppdaget sammenhengen mellom gjentatt addisjon og multiplikasjon. Elevene i klasse C behersket flere ulike representasjoner. De brukte også kombinasjoner av ulike representasjoner, noe som kan tyde på høy matematisk kompetanse. Valenta (2015) fremhever at det er viktig at elevene kan veksle mellom ulike representasjoner for å oppnå matematisk kompetanse. Det var bare lærer C som veiledet elevene i bruk av representasjoner. Funn i denne studien peker på at elevene i klasse A og B kunne hatt nytte av å arbeide med flere ulike representasjoner for å bygge forståelse for symboler. Ved å veilede elevene underveis kan læreren arbeide med overganger. Dette bør også være fokus i klassesamtalen når en tar utgangspunkt i de ulike representasjonene elevene bruker for å presentere sine løsninger.

Lærer C har kortest erfaring av lærerne i studien, men hun fremhever at undersøkende undervisning er en god arbeidsmåte. Hun har arbeidet systematisk på denne måten siden elevene begynte i første klasse, og elevene er godt kjent med strukturen. Elevene i klasse C vekslet mellom ulike representasjoner i løsningene sine, og alle gruppene fant multiple løsninger på oppgaven. Lærer C så ut til å ha god oversikt over hvilke elever som trengte lavere terskel i form av konkreter og hvilke elever hun kunne utfordre til å endre representasjoner. Det vil være forhastet å konkludere med at det er fordi de har arbeidet mye med undersøkende undervisning, men det vil også være galt å utelukke at det er en sammenheng mellom undersøkende undervisning og trygg bruk av representasjoner. Elevene i klasse D var også vant med utforskende oppgaver, og de så ut til å ha trygg bruk av flere representasjoner. Elvene brukte tegninger, symboler og regnefortellinger. De fleste elevene i klasse C og flere elever i klasse D så ut til å ha trygg bruk av symboler, noe som ifølge Niss og Jensen (2002) er spesielt betydningsfullt i begynneropplæringen.

Et noe overraskende funn var at klasse A og B, som ikke har tidligere erfaring med undersøkende undervisning, var de elevene som hadde minst utvalg av representasjoner. Som bakgrunnsinformasjon scoret en stor del av elevene under kritisk grense på nasjonale kartleggingsprøver i regning i første og andre klasse. Knudtzon (2019) påpeker at representasjonene er en visualisering av ideene våre. Uten hensiktsmessige representasjoner, kan vi ikke forklare ideer til andre. I flere av elevbesvarelsene var det vanskelig å forstå hvordan elevene hadde tenkt. Uten tydelige tegninger og trygg symbolbruk var det vanskelig å representere løsningene. Ifølge Kulild (2020) må elevene beherske symbolbruk for å kunne hevde seg på kartleggingsprøvene. Det er ikke et mål i seg selv å ha gode resultater på kartleggingsprøver, men prøvene er laget for å fange opp elever som ikke har tilfredsstillende utvikling av matematisk kompetanse. Elevene i klasse B benyttet i liten grad symboler i løsningene sine. De laget lister med dyr som skulle om bord i arken. Denne representasjonen fungerte for å løse oppgaven. Det var ingen elever i klasse B som kombinerte regnefortelling med symboler, eller vekslet mellom flere representasjoner som Valenta (2015) fremhever at er viktig for å utvikle matematisk kompetanse. Det ville vært interessant å undersøke sammenhengen mellom undersøkende undervisning og matematisk kompetanse videre. I denne studien kan vi sammenligne klasse A og B med klasse C og D. Klassene har ulik erfaringsbakgrunn der klasse A og B ikke har erfaring med undersøkende undervisning og klasse C og D har god erfaring med å arbeide på denne måten. Vi finner flere kjennetegn på matematisk kompetanse blant elevene i klasse C og D enn i klasse A og B. Vi finner også en tryggere bruk av symboler i klasse C og D. Denne studien er liten for å påpeke slike sammenhenger, men det ville vært interessant å følge opp videre. Videre vil lærernes refleksjoner rundt klassesamtalen etter gjennomføring av undersøkende undervisning bli drøftet.

5.2 Lærernes refleksjoner rundt klassesamtalen

Et hovedfunn i denne studien er at tre av fire lærere følte seg usikre på å gjennomføre klassesamtalen. Unntaket var lærer C som har arbeidet mye med undersøkende undervisning i forkant av denne studien. Den matematiske klassesamtalen må inneholde en viss grad av improvisasjon, og Wæge (2019) beskriver det som et interaktivt arbeid hvor læreren responderer på elevenes bidrag der og da. Lærernes usikkerhet kan komme av at klassesamtalen må tas på sparket i slutten av timen. De kan også ha blitt påvirket av at de ble observert når de prøvde noe nytt. Klassesamtalen er en viktig del av den tredelte strukturen undersøkende undervisning legger opp til, og Wæge påpeker at det er en krevende jobb å lede gode klassesamtaler. Lærer A, B og D uttrykker at de tror det vil bli lettere å gjennomføre klassesamtaler når elevene er trygge på strukturen i denne typen undervisning, «når de kjenner oppskriften» som lærer B fremhever. Alle de fire lærerne i studien er positive til å arbeide videre med undersøkende undervisning etter gjennomføring. Ved å øve inn denne kulturen vil en kunne få mer IBL-inspirerte klasserom.

Nosrati og Wæge (2015) påpeker viktigheten av at læreren hjelper elevene å se sammenhenger mellom ulike fremgangsmåter og ulike representasjoner i klassesamtalen. Lærer B stiller spørsmål ved om elevene alltid skal få velge de samme representasjonene i arbeid med utforskende oppgaver. I klasse B var det svært mange elever som skrev løsningene sine som lister med ord. Lærer B påpeker i intervjuet at hun ønsker å tydeliggjøre hva som er målet for timen når elevene arbeider med utforskende oppgaver. Hennes refleksjoner samsvarer med hvordan Wæge (2019) beskriver at læreren bør være bevisst på hva som er gode strategier for å løse akkurat denne oppgaven. Læreren må vite hva som er målet for timen og forutse hvilke strategier elevene kan komme til å velge. Lærer A og B påpeker at de synes det er vanskelig å forutse hvilke strategier elevene vil velge. Det kan ha sammenheng med at de har lite erfaring med å undersøkende undervisning. Lærerne har ikke erfaring med å observere hvilke strategier elevene velger for å løse utforskende oppgaver.

Ved IBL-undervisning blir ikke elevene presentert for en strategi de skal øve på, men oppfordres selv til å finne strategier for å løse et relevant problem, ifølge Sikko og Grimeland (2020). Klasser hvor det er vanlig å snakke om matematikk, løsninger og å undre seg sammen, kan betegnes som IBL-inspirerte. I denne studien ble strategier og løsninger diskutert når lærerne pratet med elevene underveis i arbeidet. Elever som mente de hadde funnet alle løsningene, ble engasjert i å finne nye løsninger når læreren stilte spørsmål til videre utforsking. Lærerne virket tryggere i denne rollen, enn når de ledet klassesamtalen i slutten av timen. Representasjoner og strategier kan og bør diskuteres underveis i arbeidet. Sikko og Grimeland (2020) fremhever at prinsippene for IBL er at elevene skal utvikle et spørrende sinn og en vitenskapelig holdning, mer i tråd med hvordan fagfolk arbeider med disse fagene. I klassesamtalen kan læreren ta utgangspunkt i elevbesvarelser for å fremheve gode strategier og representasjoner. Det er lærerens rolle å lede en målrettet matematisk diskusjon med elevene om hensiktsmessige måter å løse oppgaven. Dette kan være et krevende arbeid, og funn i studien tyder på at læreren kan trenge øving for å bli trygg på å lede gode matematiske klassesamtaler. Med dette som utgangspunkt vil det komme en kort drøfting av lærernes kompetanse.

5.2.1 Lærerens kompetanse

Det er ikke nytt at elevene skal arbeide utforskende i matematikkfaget. I LK06 er det formulert tydelig i innledningen til matematikkplanen at opplæringen skal veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening (Utdanningsdirektoratet, 2006). Når funn i studien peker på at halvparten av lærerne ikke er vant til å jobbe med utforskende oppgaver, kan det stilles spørsmål ved om lærebøkene får for stor plass i undervisningen. Ved å bruke et læreverk i faget, trenger ikke læreren i like stor grad å sette seg inn i læreplanen for faget. I barneskolen underviser lærerne i mange fag og det kan være omfattende og tidkrevende å sette seg inn i alle læreplanene. To av lærerne i studien var ukjent med undersøkende undervisning, selv om LK20 inneholder kjerneelementet utforsking og problemløsning. Dette funnet samsvarer med tidligere forskning hvor Bergem (2018) påpeker at lærerne i stor grad stoler på at målene fra læreplanen er ivaretatt i lærebøkene.

Ulike læreverk vektlegger ulike sider av matematikkfaget. I denne studien bruker skolen tradisjonelle lærebøker i matematikk som ikke er fornyet etter LK20. I studien var de to lærerne som hadde 60 studiepoeng eller mer i matematikk, bevisst på viktigheten av å la elevene få arbeide undersøkende. Dette er et interessant funn, som kan peke på at lærerens kompetanse i faget påvirker valg av metode i undervisningen. Nosrati og Wæge (2015) påpeker hvor viktig rolle læreren har, og Bergem (2018) fremhever at undervisningskvalitet og god klasseromsledelse har positiv sammenheng med norske elevers faglige prestasjoner og motivasjon. Lærerens kompetanse kan sees i sammenheng med tilbud om etterutdanning. Ved at lærere tar videreutdanning i matematikk, kan en sikre god undervisning som er forankret i forskningsbaserte metoder. Ved at lærere som tar etterutdanning får formidle noe av sin nye kunnskap i kollegiet, vil en kunne spre kunnskap om forskningsbasert undervisning.

Denne studien har bare med korte utdrag fra intervjuene, for å belyse problemstilling og forskningsspørsmål. Ved å undersøke elevenes representasjoner i tillegg, preges funnene av to perspektiver. Funn fra representasjoner er drøftet i lys av hvordan lærerne gjennomførte klassesamtalen. Det kan gi noen didaktiske implikasjoner for undervisning i matematikk. I neste kapittel vil problemstillingen bli besvart og didaktiske implikasjoner blir fremhevet.

6. Konklusjon

I dette kapittelet vil problemstillingen bli besvart og det rettes søkelys på didaktiske implikasjoner funnene i studien kan gi. Denne studien er avgrenset til å gjelde:

> **Hvordan kan undersøkende undervisning ved bruk av en LIST-oppgave legge til rette for at elever i begynneropplæringen får utvikle matematisk kompetanse?**

To forskningsspørsmål ble utviklet for å undersøke dette:

- Hvilke representasjoner velger elevene i sine løsninger?
- Hvordan reflekterer lærerne rundt gjennomføring av undersøkende undervisning?

Forskningsspørsmålene har to ulike perspektiver, elevperspektivet og lærerperspektivet. Begge perspektivene vurderes som viktige, og ble forsøkt vevd tettere sammen i drøftingsdelen. Forskningsspørsmålene var underoverskrifter i kapittelet om funn og analyse, men i drøftingen ble representasjoner drøftet i sammenheng med klassesamtalen.

Forskningen som ble brukt for å belyse forskningsspørsmålene var relevant for å analysere funnene i studien. Å bruke en abduktiv metode gjorde at det under hele arbeidet med studien ble ervervet ny kunnskap om fagfeltet. Oppgaven endret seg etter hvert som interessante funn ble synlige i datamaterialet. Ved å beskrive alle stegene i prosessen med innsamling og bearbeiding av data, kan oppgavens reliabilitet styrkes. Med så stort datagrunnlag, kan det likevel hende at andre forskere ville fremhevet andre funn. Studiens validitet bør si noe om funnene i studien har overføringsverdi til å gjelde flere elever og lærere enn deltakerne i denne studien. Funnene i denne studien ansees som viktige, og bør påvirke deler av undervisningen i matematikkfaget.

Det første forskningsspørsmålet har søkelys på elevenes representasjoner. Ved å studere representasjoner, kan vi få innblikk i elevenes matematiske kompetanse. Elever som tegner, skriver og noterer regnestykker, viser at de har skjønt hvordan de kan arbeide for å løse problemet. De behersker å representere som et verktøy for tanken (Knudtzon, 2019). Et hovedfunn i studien er at elevene har svært ulik representasjonskompetanse; fra elever som er avhengige av konkreter, tegning og tellestreker, til elever som ikke tenker på spesifikke dyr, men skriver regnestykker ut fra antall bein dyrene kan ha. Funnene tyder på at elevene har ulik matematisk kompetanse. Elever som fant multiple løsninger, lot seg motivere til å undersøke videre, når læreren spurte om de trodde det fantes en løsning med et annet antall dyr. Det kan tyde på at oppgaven gav god tilpasset opplæring ved å favne om de som trengte lav inngangsterskel og de som trengte stor takhøyde. Den utforskende aktiviteten viste også at det var avgjørende at elevene fikk *tid* til å fordype seg i problemstillingen. Dette er i tråd med tidligere forskning på undersøkende undervisning.

Et noe overraskende funn var at elever som var kjent med undersøkende undervisning, så ut til å ha bedre representasjonskompetanse enn elever som ikke har arbeidet på denne måten i begynneropplæringen. Tidligere forskning har ikke kastet lys over akkurat denne sammenhengen mellom undersøkende undervisning og representasjonskompetanse. Det er en tydelig kobling mellom representasjonskompetanse og matematisk kompetanse. Uten å kunne representere ideene sine, vil det være vanskelig å gi uttrykk for matematisk kompetanse. Matematisk kompetanse innebærer å kunne veksle mellom ulike representasjoner og velge representasjoner som passer til å løse oppgaven. Denne studien er for liten til å slå fast at dette funnet har validitet for flere elever. Det var likevel et tydelig funn i dette utvalget, hvor to av fire klasser var kjent med å arbeide undersøkende i matematikk. Elever som ikke har godt utviklet representasjonskompetanse, vil få problemer med å hevde seg på standardiserte kartleggingsprøver. Dette er det relativt mye forskning på, og det stemmer også med bakgrunnsinformasjon i denne studien. Den mest interessante koblingen å fremheve vil derfor være mellom undersøkende undervisning og matematisk kompetanse.

Det andre forskningsspørsmålet handler om hvordan lærerne reflekterer rundt gjennomføring av undersøkende undervisning. Et noe uventet funn var at to av fire lærere ikke var kjent med å undervise på denne måten. Det kan tyde på at læreverket får stor plass i skolehverdagen, noe som samsvarer med tidligere forskning. Alle de fire lærerne gir uttrykk for at de vil arbeide videre med undersøkende undervisning fremover. Lærer C har brukt undersøkende undervisning siden førsteklasse og bruker metoden i flere fag. Klassesamtalen er en viktig del av undersøkende undervisning, men det er krevende å lede en god matematisk klassesamtale. I studien er det et funn at klassesamtalen var utfordrende for tre av fire lærere. Lærerne påpeker at det var vanskelig å spå hvilke løsninger elevene ville velge, og vanskelig å se de beste, mest systematiske strategiene underveis. Funnene kan tyde på at trygghet kan komme med erfaring. Lærer C, som har god erfaring med undersøkende undervisning, gav ikke uttrykk for usikkerhet. Undersøkende undervisning legger opp til at elevene selv finner ulike måter å arbeide med oppgaven, og læreren må gi fra seg noe av kontrollen. Det er krevende å lede gode matematiske samtaler, og læreren trenger kanskje øving og faglig trygghet for å beherske dette på en god måte. Om klassesamtalen ikke blir ledet helt gunstig de første gangene, vil lærerne kunne oppleve at det blir lettere etter hvert som de blir tryggere i rollen. Elevene kan også få øving i den tredelte strukturen for undersøkende undervisning, slik at de blir tryggere på strukturen.

Problemstillingen «Hvordan kan undersøkende undervisning ved bruk av en LIST-oppgave legge til rette for at elever i begynneropplæringen får utvikle sin matematiske kompetanse?» kan besvares ved å oppsummere noen av funnene i studien. Ved å gi elevene gode utforskende oppgaver, som for eksempel Noas ark, kan vi legge til rette for at elever i begynneropplæringen får utvikle sin matematiske kompetanse. Elevbesvarelsene viser at alle gruppene kunne finne løsninger på oppgaven. Elevenes representasjoner viste kjennetegn på matematisk kompetanse. Med utgangspunkt i trådmodellen, viste funn i studien kjennetegn på de fem komponentene i noen av elevbesvarelsene. Valenta (2015) påpeker at utvikling av strategier henger tett sammen med forståelse for relasjoner mellom tall og operasjoner, ulike representasjoner, begrunnelser for strategier og verdsetting av ulike måter å tenke på. I denne studien er kjennetegn på matematisk kompetanse undersøkt i elevenes representasjoner. Det har også vært søkelys på hvordan klassesamtalen kan brukes til å utvikle elevenes representasjoner og til å dele strategier. IBL-klasserom kjennetegnes ved en kultur som vil kunne ivareta alle komponentene i trådmodellens beskrivelse av matematisk kompetanse. Det kan ta tid å etablere denne kulturen, og læreren må være bevisst på hvordan hun legger opp undervisningen og hvordan hun leder klassesamtalene. Funn fra denne studien tyder på at ved å arbeide systematisk med undersøkende undervisning, vil elevenes matematiske kompetanse kunne styrkes.

Læreren kan med enkle grep gjøre oppgaver mer utforskende ved å fjerne noe av informasjonen i oppgaven. Tilgjengelige ressurser kan brukes i dette arbeidet. På Matematikksenteret sine nettsider finnes det mange utforskende oppgaver, blant annet Mattelist-oppgaver, som ble brukt i denne studien. Ved å følge den tredelte strukturen for undersøkende undervisning, vil elevene selv kunne finne fremgangsmåter for å representere løsningene sine. Det viste seg viktig at elevene fikk samarbeide og at de fikk god tid til å undersøke løsninger. Læreren var tett på for å observere og veilede mens elevene undersøkte løsninger.

I studien vises det til tidligere forskning som peker på at elevenes motivasjon og læringsutbytte kan forbedres ved å benytte mer undersøkende undervisning. Ved mer tid og ressurser tilgjengelig, hadde det vært interessant å følge klasser som satser på denne undervisningen over tid, for å se om dette vil påvirke læringsresultatene. Det blir for omfattende for denne studien. Det er også interessant at i de klassene hvor læreren har fordypning i matematikk, har elevene arbeidet mer med undersøkende undervisning. Det finnes mye forskning som fremhever at læreren er en av de viktigste faktorene for elevenes læring. Finnes det en sammenheng mellom fordypning i matematikk hos læreren, valg av undervisningsmetoder og elevresultater? Å studere disse sammenhengene vil kreve langt mer tid enn denne masteren tillater, men det kan være en interessant vinkling på videre forskning. Denne studien er avgrenset til å undersøke en liten del av feltet, men denne lille smakebiten gav meg definitivt lyst til å undersøke mer av et spennende fagfelt.

Referanser

Befring, E. (2020). *Sentrale forskningsmetoder. Med etikk og stitistikk.* Cappelen Damm Akademisk.

Bergem, O. K. (2018). Undervisningskvalitet i norsk skole: status, trender og utfordringerAnalyser basert på data fra PISA og TIMSS i perioden 2000–2015. I J. K. Björnsson, & R. V. Olsen, *Tjue år med TIMSS og PISA i Norge. Trender og nye analyser.* (ss. 199-219). Universitetsforlaget.

Björnsson, J. K., & Olsen, R. V. (2018). *TJUE ÅR MED TIMSS OG PISA I NORGE. Trender og analyse.* Universitetsforlaget.

Det kongelige kunnskapsdepartement. (2006, 12 15). *Regjeringen.no.* Hentet fra St.meld. nr. 16(2006–2007) ...og ingen stod igjen. Tidlig innsats for livslang læring: https://www.regjeringen.no/contentassets/a48dfbadb0bb492a8fb91de475b44c41/no/pdfs/stm200620070016000dddpdfs.pdf

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Springer Link*, ss. 103-131.

Dysthe, O. (1995). *Det flerstemmige klasserommet: Skriving og samtale for å lære.* Ad Notam Gyldendal.

Dysthe, O. (2001). *Dialog, samspel og læring.* Abstrakt forlag.

Enge, O., & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten 1*, ss. 8-12.

Eriksen, E., Solem, I. H., & Ulleberg, I. (2018). På jakt i elevers algebraiske tenkning. I K. Palm, & E. Michaelsen, *Den viktige begynneropplæringen. En forskningsbasert tilnærming* (ss. 187-212). Universitetsforlaget.

Evang, H. (2020). Matematikk for livet. Elevers myndiggjøring som didaktisk rettesnor. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift 3*, ss. 283–296.

Fuglestad, A. B. (2010). Bedre matematikkundervisning. *Tangenten 4*, ss. 9-14.

Gravanes, A., Svorkmo, A.-G., Matre, S., & Fottland, H. (2004). Blir det lettere å være lærer etter dette? *Norsk Pedagogisk Tidsskrift 1*, ss. 51-69.

Hermansen, H., Lorentzen, M., Mausethagen, S., & Zlatanovic, T. (2018). *Hva kjennetegner forskning på lærerrollen under Kunnskapsløftet? En forskningskartlegging av studier av norske lærere, lærerstudenter og lærerutdannere.* Hentet fra Acta Didactica Norge 04 13: https://journals.uio.no/adno/article/view/4351

Høines, M. J. (2011). *Begynneropplæringen. Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning.* Caspar Forlag.

Jablonka, E. (2003). Mathematical Literacy. I A. J. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. Leung, *Second International Handbook of Mathematics Education* (ss. 75-102). Springer Link.

Kazemi, E., & Hintz, A. (2014). *Intentional talk - How to structure and lead productive mathematical discussions.* Stenhouse Publishers.

Kjærnsli, M., & Jensen, F. (2016). *STØ KURS. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015.* Universitetsforlaget.

Knudtzon, S. H. (2019). Elever representerer sine matematiske ideer når frosker hopper. I E. Klaveness, L. Karlsen, & K. Kverndokken, *101 grep for å aktivisere elever i matematikk. Matematikkdidaktikk i teori og praksis.* (ss. 133-158). Fagbokforlaget.

Kulild, M. (2020). «Korleis tenkte du no?» Frå øving til gjennomføring i grunnskulelærarutdanninga. *Uniped, Tidsskrift for universitets- og høgskolepedagogikk 02 06*, ss. 146-158.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju.* Gyldendal Akademisk.

Matematikksenteret. (2021, 10 15). *Mattelist*. Hentet fra Matematikksenteret.no: https://www.mattelist.no/

Mellin-Olsen, S. T. (1990). Oppgavediskursen. I I. G. Blomhøj, *Matematikundervisning og Demokrati. Initiativ vedr. Matematikundervisning* (ss. 47–64). IMFUFA, RUC.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* Undervisningsministeriet.

Nortvedt, G. A. (2018). *«Det er et verktøy, ikke sant, for oss?» Erfaringer fra fire gjennomføringer med kartleggingsprøver i regning 2014–2017.* Hentet fra Acta Didactica Norge 12 12: https://doi.org/10.5617/adno.6383

Nortvedt, G. A., & Buchholtz, N. (2018). Assessment in mathematics education: responding to issues regarding methodology, policy, and equity. *ZDM Mathematics Education*, ss. 555-570. Hentet fra Springer.com 06 23: https://link-springer-com.ezproxy.uis.no/article/10.1007/s11858-018-0963-z

Nortvedt, G. A., & Pettersen, A. (2016). Matematikk. I M. Kjærnsli, & F. Jensen, *STØ KURS. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015* (ss. 107-134). Universitetsforlaget.

Nosrati, M. (2019). Matematiske aktiviteter med lav inngangsterskel og stor takhøyde. I E. Klavesen, L. Karlsen, & K. Kverndokken, *101 grep for å aktivisere elever i matematikk. Matematikkdidaktikk i teori og praksis* (ss. 77-89). Fagbokforlaget.

Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk.* Hentet fra Matematikksenteret. Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen 06 05: https://www.matematikksenteret.no/nettbutikk/sentrale-kjennetegn-p%C3%A5-god-l%C3%A6ring-og-undervisning-i-matematikk

OECD. (2017). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving.* OECD Publishing.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2021). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning.* Cappelen Damm Akademisk.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2002). Overview of Self-Determination Theory. An Organismic Dialectical Perspective. I I. E. Deci, & R. M. Ryan, *Handbook of selv-Determination Research* (ss. 3-33). The University of Rochester Press.

Sikko, S. A., & Grimeland, B. (2020). Kritisk matematisk literacy i ein inquirybasert. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis 1 14*, ss. 104-117.

Skogen, K. (2018). Caseforskning. I M. S. Krogtoft, *Masteroppgaven i lærerutdanninga. Temavalg, forskningsplan, metoder* (ss. 79-91). Cappelen Damm Akademisk.

Smith, M., & Stein, M. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions.* NCTM.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *udir.no*. Hentet fra KL06. Mat1-04, hele, grunnleggende ferdigheter 03 15: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter

Utdanningsdirektoratet. (2020). Utdanningsdirektoratet's videos 03 19: Oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde.

Valenta, A. (2015). *Aspekter ved tallforståelse.* Hentet fra Matematikksenteret. Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen 06 20.: https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/MAM/Revisjon%2020-21/Modul%201/Valenta%20Aspekter%20ved%20tallforstaelse%20revidert.pdf

Vygotsky, L. S. (1971). *Tænkning og sprog.* Hans Reitzel.

Wood, D., & Bruner, J. S. (1976). The Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry 2 17*, ss. 89–100.

Wæge, K. (2019). Samtaler i matematikk. I E. Klaveness, L. Karlsen, & K. Kverndokken, *101 grep for å aktivisere elever i matematikk. Matematikkdidaktikk i teori og praksis* (ss. 19-37). Fagbokforlaget.

Wæge, K., & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk.* Universitetsforlaget.

Vedlegg 1: Samtykkeerklæring fra informantene

Vil du delta i forskingsprosjektet

" Bruk av utforskande oppgåver i begynnaropplæringa"?

Dette er eit spørsmål til deg om å delta i eit forskingsprosjekt der formålet er å *inspirere deg til å sjå fordelane med å la elevane arbeide med utforskande oppgåver i matematikkfaget*. I dette skrivet får du informasjon om måla for prosjektet og kva deltaking vil innebere for deg.

Formål

Eg skal skrive ei masteroppgåve der eg vil sjå på fordelane med å la elevane arbeide med utforskande oppgåver i matematikk. Dette er ei oppgåve eg kjem til å arbeide med skuleåret 2021-22. Det vil krevje eit førebuingsmøte med deltakarane i prosjektgruppa. Vi skal sjå på kva utforskande oppgåver vil seie og knytte dette opp mot Fagfornyinga. Vi skal også sjå på eit undervisningsopplegg som skal gjennomførast i fleire grupper, med intervju etter gjennomførte økter. Eg kjem til å bruke lydopptakar i intervjua, slik at eg hugsar kva som vert sagt. Eg kjem til å anonymisere opplysningane i oppgåva, og du får tilbod om å lese gjennom oppgåva før eg leverer.

Kven er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Laila Haugland som student ved Universitetet i Stavanger er ansvarleg for prosjektet.
Rettleiar på masteroppgåva er Ingunn Valbekmo ved Matematikksenteret v/NTNU.

Kvifor får du spørsmål om å delta?

Eg ønskjer å sjå på korleis vi kan jobbe med utforskande undervisning på 2. og 3. trinn på eigen skule, difor spør eg deg om du vil delta på dette prosjektet.

Kva inneber det for deg å delta?

I intervjua vil eg bruke lydopptakar, i undervisninga vil eg bruke observasjon og elevarbeid som dokumentasjon. Lydopptaka vil bli sletta så snart dei er transkribert. Foto vil berre vise elevarbeid utan namn, ingen ansikt på barn eller vaksne. Å delta vil innebere eit planleggingsmøte og eit intervju etter gjennomført undervisning der du skal få setje ord på tankar rundt denne undervisningsmåten. Det inneber også ei undervisningsøkt med *elevgruppa di, der du gjennomfører avtalt undervisning, og eg får observere deg og klassen din.*

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Viss du vel å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake utan å grunngje kvifor. Alle opplysningar om deg vil då bli sletta. Det vil ikkje ha nokon negative konsekvensar for deg viss du ikkje vil delta eller seinare vel å trekke deg.

Ditt personvern – korleis vi oppbevarer og bruker dine opplysningar

Vi vil berre bruke opplysningane om deg til formåla vi har fortalt om i dette skrivet. Vi handsamar opplysningane konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det vil ikkje vere mogleg å identifisere deg i den ferdige oppgåva.

Kva skjer med opplysningane dine når vi avsluttar forskingsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttast *05.06.22. Eg vil då slette lydopptaka og makulere samtykkeskjema.*

Dine rettar:

Så lenge du kan identifiserast i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i kva personopplysningar som er registrert om deg,
- å få retta personopplysningar om deg,
- få sletta personopplysningar om deg,
- få utlevert ein kopi av dine personopplysningar (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombodet eller Datatilsynet om handsaminga av dine personopplysningar.

Kva gjev oss rett til å handsame personopplysningar om deg?

Vi handsamar opplysningar om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Universitetet i Stavanger* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at handsaminga av personopplysningar i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Kvar kan eg finne ut meir?

Dersom du har spørsmål til studien, eller ønskjer å nytte deg av dine rettar, ta kontakt med:

- *Matematikksenteret v/NTNU* ved *Ingunn Valbekmo. Epost: ingunn.valbekmo@matematikksenteret.no*
- Vårt personvernombud: Universitetet i Stavanger ved personvernombud@uis.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennleg helsing

Laila Haugland
*Student/*Prosjektansvarleg

Samtykkeerklæring

Eg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Utforskande oppgåver i matematikk*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Eg samtykker til:

- ☐ å delta i *intervju*
- ☐ å delta i *undervisning med observasjon*

Eg samtykker til at mine opplysningar handsamast fram til prosjektet er avslutta, *05.06.22*

(Signert av prosjektdeltakar, dato)

Vedlegg 2: Informasjon til foreldrene

Informasjon til føresette på

2. og 3. trinn

I samband med at eg skriv masteroppgåve i begynnaropplæring, skal eg gjennomføre litt forsking på vår eigen praksis. Matematikk-lærarane på andre og tredje trinn har sagt ja til å bli med på prosjektet og vi skal sjå på elevane si læring i matematikk.

Eg kjem til å bruke observasjon som metode og det vil **ikkje** bli brukt opptaksutstyr, film eller bilete av elevane. Vi kjem **heller ikkje** til å bruke namn eller nokon andre personopplysningar om barna. Eg kjem til å samle inn nokre *elevarbeid* for å vise korleis dei løyser oppgåvene. Målet er at vi skal betre undervisninga vår i matematikk slik at elevane får best mogleg læringsutbytte.

Vi lærarar planlegg undervisninga i lag, så får eg observere medan klassen sin lærar underviser. Dersom du har spørsmål til dette kan du ta kontakt med kontaktlærar eller direkte med meg på epost: [redacted] Observasjonen vil bli gjennomført etter haustferien.

Håper flest mogleg vil vere positive til at vi kan drive skuleutvikling og prøve å påverke elevane si læring i positiv retning.

Observasjonane vil bli brukt til ei masteroppgåve som blir levert til universitetet i Stavanger våren 2022. Etter dette vil alle opplysningar bli sletta.

Med vennleg helsing

Laila Haugland

Kontaktlærar 2B

Vedlegg 3 Intervjuguide

Intervjuguide

Semistrukturert intervju med lærere på 2. og 3. trinn

Bakgrunn:

1. Hvor mange studiepoeng har du i matematikk?
2. Hvor mange år har du undervist i skolen?
3. Er elevene i klassen din vant med å samarbeide i matematikktimene?
4. Har de arbeidet med utforskende oppgaver tidligere?
5. Hvordan synes du dette passer inn med kjerneelementene i Fagfornyelsen?

Gjennomføringen:

6. Hvordan synes du gjennomføringen gikk?
7. Hvor aktive opplevde du at elevene var?
8. Hvordan opplevde du elevenes motivasjon/engasjement?
9. Hvordan synes du elevene klarte å sette ord på løsningene sine? Resonnere seg frem? (Muntlig aktivitet)
10. Så du elever som klarte å systematisere arbeidet sitt?
11. Hva la du vekt på når du skulle ha klassesamtale og få frem løsninger i slutten av timen?

Videre arbeid:

12. Hva tenker du om å la elevene arbeide med utforsking og problemløsning i matematikktimene fremover?
13. Tror du elevene vil lære det de skal ved å jobbe på denne måten?
14. Er det noe din klasse trenger å øve på for å mestre denne type undervisning?
15. Er det andre erfaringer du vil dele fra denne prosessen?

Vedlegg 4 Transkripsjonsnøkkel

Transkripsjonsnøkkel

Intervjuene ble transkribert i sin helhet i Word. I transkripsjonene brukte jeg følgende forkortelser:
LA: Lærer A
LB: Lærer B
LC: Lærer C
LD: Lærer D
I: Intervjuer

Når jeg har satt inn utdrag fra intervjuene i teksten, har jeg endret fra LC til lærer C og I til intervjuer slik at det skulle bli tydeligere for leseren å orientere seg i teksten.

Korte pauser i talen markeres med … i teksten.
Når jeg har tatt bort noe som ikke er relevant, har jeg markert dette med (…).
Latter markeres slik: (latter).

Jeg har skrevet hele transkripsjonen på bokmål, slik at informantene ikke skal kunne kjennes igjen på dialektkjennetegn.

Eksempel på utdrag fra transkripsjon av intervju med Lærer A:
I: Ja, jeg så at du gjør det samme som meg… du tar dem frem i samlingskroken når du vil ha felles oppmerksomhet… Det var et bra grep at du brukte den til klassesamtalen på slutten av timen.
LA: Ja, men det ble lyd av alle arkene da (ler) hørte du lyden av alle arkene? Det ville jeg gjort annerledes, det med arkene…
I: Vi opplevde det samme… vi sa akkurat det samme, du skal ha arket for at du skal huske løsningen din, men… (ler)
LA: ja, de laget paraplyer… (ler)