# Fra topologi til algebra til analyse

Alexander

Juni 2023

Fra topologi til algebra

Universitetet
i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

# MASTEROPPGAVE

| | |
|---|---|
| Studieprogram/spesialisering:<br>Lektorutdanning realfag trinn 8-13 | Vårsemesteret, 2023<br><br>Åpen |
| Forfatter: Alexander Serigstad | |
| Fagansvarlig: Alex Bentley Nielsen<br><br>Veileder(e): Eirik Eik Svanes | |
| Tittel på masteroppgaven: Fra topologi til algebra til analyse<br><br>Engelsk tittel: From topology to algebra to analysis | |
| Studiepoeng: 30 | |
| Emneord: 6192 | Sidetall: ……46 ……………<br><br>+ vedlegg/annet: ……5 ……<br><br>Stavanger, …06/2023 ……………..<br>dato/år |

# Innhold

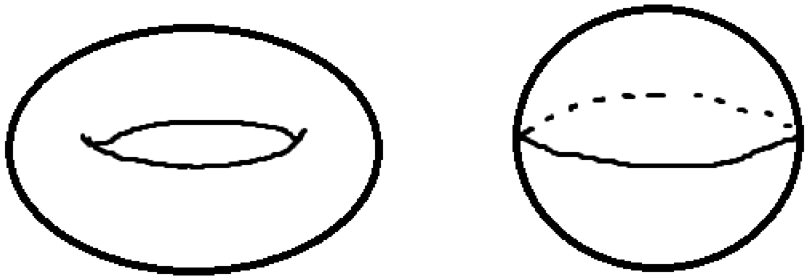
# Kapittel 1

# Introduksjon

Homologi, som er kjernen til denne masteroppgaven, er en viktig teori innenfor moderne matematikk, og som har kraftfulle applikasjoner. Homologi er en generell måte å assosiere følger av algebraiske objekter, som abelske grupper eller moduler, med andre matematiske objekter, som topologiske rom (Wikipedia, 2023b). Dannelsen av homologi kom fra observasjonen av at geometriske objekter kan bli skillet fra hverandre gjennom en undersøkelse av deres (høyere dimensjonale) hull. Et eksempel er forskjellen mellom en sirkel og en 2-dimensjonal sfære. En sirkel er ikke en sfære fordi sirkelen innelukker et én-dimensjonalt hull, mens en sfære innelukker et to-dimensjonalt hull. Derimot fører geometrien, spesielt i høyere dimensjoner, til at det ikke er åpenbart hvordan man skal kunne definere eller skille mellom ulike hull.

Den originale teorien bak homologi var en formell matematisk metode for å kategorisere og skille mellom ulike hull i en mangfoldighet (Wikipedia, 2023b). En *sykel* er en lukket undermangfoldighet, en *grense* er en sykel som også er grensen til en undermangfoldighet. En *homologi klasse* (som representerer et hull) er en ekvivalensklasse av sykler modulo grenser. En homologi klasse er dermed en sykel som ikke er en grense til en undermangfoldighet. Sykelen representerer dermed et "*hull*". Ut fra disse geometriske forestillingene så har begrepet homologigruppe blitt utviklet.

Et annet eksempel på hvordan man kan skille mellom to ulike geometriske objekter, ut fra deres hull, er torusen og den 2-dimensjonale sfæren. Torusen



Figur 1.1: Torusen og sfæren

er definert som produktet av to sirkler $T = S^1 \times S^1$. Geometrien til torusen fører til at den har to uavhengige 1-dimensjonale hull og et 2-dimensjonalt hull som er selve indre til torusen. I tillegg har den en bane-sammenhengende komponent. Den 2-dimensjonale sfæren derimot har et 2-dimensjonalt hull og en bane-sammenhengende komponent. Den innelukker ingen 1-dimensjonale hull. Sfæren og torusen vil dermed få ulike homologigrupper.

Et bestemt type matematisk objekt, som et topologisk rom eller en gruppe, kan ha en eller flere assosierte homologi teorier. Når det underliggende objektet har en geometrisk tolkning, som et topologisk rom har, så vil den $n$-te homologigruppen representere topologiske egenskaper i $n$-dimensjoner. En homologigruppe er dermed en gruppe assosiert med et topologisk rom med mål om å foreta en algebraisk studie av de topologiske egenskapene til rommet.

Denne masteroppgaven vil fokusere på den singulære homologi teorien til vilkårlige topologiske rom. Dette er en spesiell homologi teori som etter hvert har fått en stor samling av teorier. Intuitivt så finner singulær homologi teori for hver dimensjon $n$, antall $n$-dimensjonale hull av et rom. I algebraisk topologi så er det studiet av en bestemt mengde topologiske invarianter av et topologisk rom $X$ (Wikipedia, 2022b).

Ut fra fokuset på singulær homologi teori så vil hovedmålet med masteroppgaven være å komme frem til og utlede *Mayer-Vietoris følgen*. Innen homologi teori er Mayer-Vietoris følgen et algebraisk verktøy for å regne ut algebraiske invarianter av topologiske rom, kjent som deres homologi og kohomologi grupper (Wikipedia, 2023c). Metoden består av å dele et rom i flere underrom, som gjør at det blir lettere å regne ut homologi eller kohomologi gruppene til rommet. Masteroppgaven vil fokusere på kjennetegnene til Mayer-Vietoris følgen og hvordan den brukes til å regne ut algebraiske invarianter av topologiske rom. Vi skal for eksempel se på hvordan man beregner homologien til $n$-sfæren $S^n$. Resultatet kommer fra to østerrikske matematikere, Walther Mayer og Leopold Vietoris.

I tillegg vil oppgaven vise at det er en sammenheng mellom homologi og analyse. Gjennom de Rham-kohomologi så kan man uttrykke grunnleggende topologisk informasjon om glatte mangfoldigheter. Dette er en kohomologiteori basert på differensialformer på en glatt mangfoldighet med en ytrederivert som differensial. Vi vil se senere at vi kan bruke de Rham-kohomologi og homologi til å telle antall lineært uavhengige løsninger av Maxwell's likninger. Dette er et eksempel på et mer generelt matematisk prinsipp; relasjonen mellom topologi, homologi, algebra og analyse og løsninger av differensiallikninger.

Teorien bak denne masteroppgaven vil være basert hovedsakelig på boken *Homology Theory-An Introduction to Algebraic Topology* (Vick, 1994). Boken er skrevet av James W. Vick. Den singulære homologi teorien som blir presentert i kapittel 2 og Mayer-Vietoris følgen i kapittel 3 er basert hovedsakelig på denne boken.

# Kapittel 2

# Singulær homologi teori

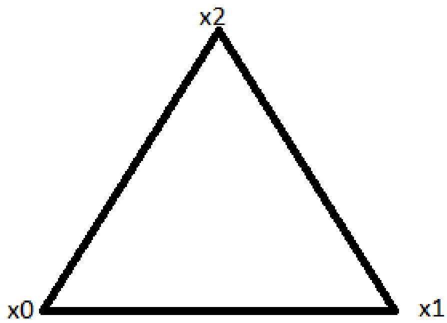
## 2.1 Introduksjon

Hensikten med dette kapittelet er å gi en innføring av singulær homologi teori til et vilkårlig topologisk rom. Singulær homologi er konstruert ved å ta funksjoner av såkalte standard $n$-simplekser til et topologisk rom og så komponere dem til formelle summer, kalt singulære $n$-kjeder (Wikipedia, 2022). Grense operasjonen, som sender hver $n$-simpleks til dens $(n-1)$-dimensjonale grense, induserer det singulære kjede komplekset (Wikipedia, 2022). Den singulære homologien er da homologien til dette kjede komplekset. Denne teorien danner grunnlaget for Mayer-Vietoris følgen og teksten vil anta at leseren har en grunnleggende forståelse av abelske grupper og topologi.

## 2.2 Simpleks

Den første matematiske definisjonen som er viktig i homologi er simplekser. Et simpleks er en generalisering av en trekant i to dimensjoner eller et tetraeder i tre dimensjoner. Et $p$-simpleks er en konveks omhylning av $(p+1)$ punkter i $p$ dimensjoner. Den formelle definisjonen:

**Definisjon 2.1.** Hvis $x$ og $y$ er punkter i $\mathbb{R}^n$, så vil *linjesegmentet* fra $x$ til $y$ være definert som $\{(1-t)x + ty | 0 \leq t \leq 1\}$. En undermengde $C \subseteq \mathbb{R}^n$ er *konveks* hvis, gitt $x$ og $y$ i $C$, så vil hele linjestykke fra $x$ til $y$ ligge i $C$. Merk




Figur 2.1: 2-simpleks

at et vilkårlig snitt av konvekse mengder er også konveks. Hvis $A \subseteq \mathbb{R}^n$, så vil den *konvekse omhylningen* av $A$ være snittet av alle konvekse mengder i $\mathbb{R}^n$ som inneholder $A$. Et $p$-simpleks $s$ i $\mathbb{R}^n$ er en slik konveks omhylning av en samling av $(p+1)$ punkter $\{x_0, \ldots, x_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ slik at $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ danner en lineær uavhengig mengde.

Husk at mengder av vektorer eller punkter er lineært uavhengige hvis ingen av mengdene kan bli uttrykket som en lineærkombinasjon av de andre mengdene.

**Proposisjon 2.1.** *La* $\{x_0, \ldots, x_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$*. Da er følgende ekvivalent;*

*(a)* $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ er lineær uavhengig;

*(b)* hvis $\sum s_i x_i = \sum t_i x_i$ og $\sum s_i = \sum t_i$, da er $s_i = t_i$ for $i = 0, \ldots, p$.

**Bevis.** $(a) \to (b)$: Hvis $\sum s_i x_i = \sum t_i x_i$ og $\sum s_i = \sum t_i$, da er

$$0 = \sum_{i=0}^{p} (s_i - t_i) x_i = \sum_{i=0}^{p} (s_i - t_i) x_i - \left[ \sum_{i=0}^{p} (s_i - t_i) \right] x_0 = \sum_{i=1}^{p} (s_i - t_i)(x_i - x_0)$$

Gitt den lineære uavhengigheten av $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ så følger det at $s_i = t_i$ for $i = 1, \ldots, p$. Dette impliserer $s_0 = t_0$ siden $\sum s_i = \sum t_i$. For $(b) \to (a)$:

Hvis $\sum_{i=1}^{p}(t_i)(x_i - x_0) = 0$, da er $\sum_{i=1}^{p} t_i x_i = (\sum_{i=1}^{p} t_i)x_0$ og gitt $(b)$ så må koeffisientene $t_1, \ldots, t_n$ være null. Dette beviser lineær uavhengighet.

QED.

Videre la $s$ være et $p$-simpleks i $\mathbb{R}^n$ og la mengden av alle punkter være på formen $t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_px_p$ hvor $\sum t_i = 1$ og $t_i \geq 0$ for hvert $i$. Dette er den konvekse omhylningen av mengden $\{x_0, \ldots, x_p\}$ og fra proposisjon 2.1 så får man følgende:

**Proposisjon 2.2.** *Hvis $p$-simpleksen $s$ er den konvekse omhylningen av $x_0, \ldots, x_p$, da vil hvert punkt av $s$ ha en unik representasjon i form av $\sum t_i x_i$ hvor $t_i \geq 0$ for alle $i$ og $\sum t_i = 1$.*

Punktene $x_i$ er *hjørnene* til $s$. Dette forslaget lar oss assosiere punktene til $s$ med $(p+1)$-tupler $(t_0, t_1, \ldots, t_p)$ med et passende valg til koordinatene $t_i$.

Hvis hjørnene av $s$ har en gitt orden, da er $s$ et *ordnet simpleks*. La $s$ være et ordnet simpleks med hjørner $x_0, x_1, \ldots, x_p$. Vi kan definere $\sigma_p$ til å være mengden av alle punkter $t_0, t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}^{p+1}$ med $\sum t_i = 1$ og $t_i \geq 0$ for hvert $i$. Hvis en funksjon

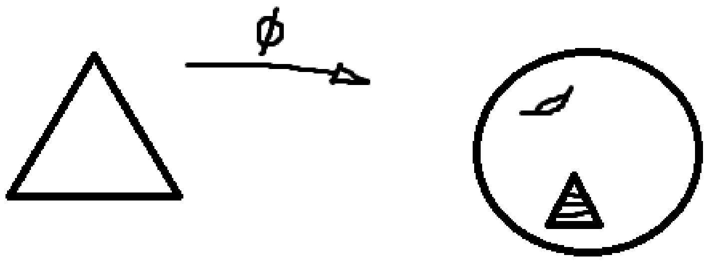
$$f : \sigma_p \to s$$

er gitt av $f(t_0, \ldots, t_p) = \sum t_i x_i$, da er $f$ kontinuerlig. Siden både $\sigma_p$ og $s$ er kompakte Hausdorffrom og fra unikheten av representasjoner så følger det at $f$ er en homeomorfi. Hvert ordnede $p$-simpleks er dermed et naturlig homeomorfisk bilde av $\sigma_p$. $\sigma_p$ kalles for en *standard* $p$-simpleks med naturlig orden.

La nå $X$ være et topologisk rom. En *singulær $p$-simpleks* i $X$ er en kontinuerlig funksjon

$$\phi : \sigma_p \to X.$$

De singulære 0-simpleksene kan bli identifisert med punktene av $X$, de singulære 1-simpleksene med banene i $X$ og så videre. Hvis $\phi$ er en singulær




Figur 2.2: Singulær $p$-simpleks

$p$-simpleks og $i$ er et tall hvor $0 \leq i \leq p$, så kan man definere $\delta_i(\phi)$ som en singulær $(p-1)$ simpleks i $X$, gitt ved

$$\delta_i(\phi)(t_0, \ldots, t_{p-1}) = \phi(t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{p-1}). \tag{2.1}$$

$\delta_i\phi$ er den i-te *"ansiktet"* til $\phi$.

## 2.3 Fri abelsk gruppe

Den neste matematiske definisjonen som er viktig for singulær-homologi teori er *frie* abelske grupper. En abelsk gruppe $G$ er fri hvis det eksisterer en undermengde $A \subseteq G$ slik at hvert element $g$ i $G$ har en unik representasjon

$$g = \sum_{x \in A} n_x \cdot x,$$

hvor $n_x$ er et heltall og lik null untatt for et endelig antall element $x$ i $A$. Mengden $A$ er en *basis* for $G$. Hvis $G$ er fri abelsk med base $A$ og $H$ er en abelsk gruppe, da kan hver funksjon $f : A \to H$ bli utvidet til en homomorfi $f : G \to H$.

## 2.4 Homologi grupper

En sentral definisjon for konstruksjonen av homologi grupper er den såkalte $S_n(X)$ gruppen.

Hvis $X$ er et topologisk rom så kan man definere $S_n(X)$ som den frie abelske gruppen hvor basen er mengden av alle singulære $n$-simplekser av $X$. Et element av $S_n(X)$ blir kalt et *singulær n-kjede* av $X$ og har formen $\sum_\phi n_\phi \cdot \phi$ hvor $n_\phi$ er et heltall, lik null untatt for et endelig antall av singulære simplekser $\phi$.

Siden $\delta_i$ er en funksjon fra mengden av singulære $n$-simplekser til mengden av singulære $(n-1)$-simplekser, så eksisterer det en unik utvidelse til en homomorfi

$$\delta_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

gitt av $\delta_i(\sum n_\phi \cdot \phi = \sum n_\phi \cdot \delta_i \phi$. La *randoperatoren* være definert ved homomorfien

$$\delta : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

gitt av

$$\delta = \delta_0 - \delta_1 + \delta_2 + \dots \ (-1)^n \delta_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_i. \tag{2.2}$$

**Proposisjon 2.3.** Komposisjonen $\delta \circ \delta$ i

$$S_n(X) \xrightarrow{\delta} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\delta} S_{n-2}(X)$$

er null.

**Bevis.** la

$$\delta \circ \delta = [\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_i][\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \delta_j] = \sum_i \sum_j (-1)^{i+j} \delta_i \delta_j = \sum_{i \geq j} (\delta_i \delta_j - \delta_i \delta_j) = 0.$$

QED

Denne påstanden uttrykker geometrisk at randen til enhver $n$-kjede er en $(n-1)$-kjede med ingen rand. Det er denne grunnleggende egenskapen som fører til definisjonen av homologi grupper. Et element $c \in S_n(X)$ er en $n$-*sykel* hvis $\delta(c) = 0$. I tillegg vil et element $d \in S_n(X)$ være en $n$-*rand* hvis $d = \delta(e)$ for en vilkårlig $e \in S_{n+1}(X)$. Siden $\delta$ er en homomorfi, så vil dens kjerne, mengden av alle $n$-sykler være en undergruppe av $S_n(X)$ angitt som $Z_n(X)$. På samme måte vil bildet av $\delta$ i $S_n(X)$ være undergruppen $B_n(X)$ av alle $n$-grenser. Proposisjon 1.3 impliserer at $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$ er en undergruppe. Dette forholdet fører til kvotientgruppen

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) \tag{2.3}$$

som er den $n$-te *singulære homologi gruppen* av $X$.

Den geometriske motivasjonen bak homologi grupper er klart; objektene som vi vil studere er sykler i topologiske rom. Derimot er samlingen av alle singulære sykler for stor. Den naturlige framgangsmåten er da å begrense oppmerksomheten til ekvivalensklasser av sykler under relasjonen av at to sykler er ekvivalente hvis forskjellen mellom dem danner en grense av en kjede som er én dimensjon høyere. Den $n$-te homologigruppen representerer dermed antall $n$-dimensjonale hull.

Denne homologi teorien kan videre utvides til en samling av abelske grupper.

## 2.5 Kjede komplekser

Vi kan nå definere kjede komplekser og dette danner grunnlaget for det meste av moderne homologi.

En *gradert* (abelsk) *gruppe* $G$ er en samling av abelske grupper $\{G_i\}$ indeksert av heltallene med komponentvis operasjon. Hvis $G$ og $G'$ er graderte grupper, en homomorfi

$$f : G \to G'$$

er en samling av homomorfier $f_i$, hvor

$$f_i : G_i \to G'_{i+r}$$

for en konstant $r$. $r$ kalles da for *graden* av f. En undergruppe $H \subseteq G$ av en gradert gruppe er også en gradert gruppe $\{H_i\}$ hvor $H_i$ er en undergruppe av $G_i$. Kvotientgruppen $G/H$ er den graderte gruppen $\{G_i/H_i\}$.

Et *kjede kompleks* er en følge av abelske grupper og homomorfier

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots \tag{2.4}$$

hvor komposisjonen $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$ for hver $n$. Tilsvarende er et kjede kompleks en gradert gruppe $C = \{C_i\}$ sammen med en homomorfi $\delta : C \to C$ av grad $-1$ slik at $\delta \circ \delta = 0$. Hvis $C$ og $C'$ er kjede komplekser med grenseoperatorer $\delta$ og $\delta'$, da vil en kjede funksjon fra $C$ til $C'$ være en homomorfi

$$\Phi : C \to C'$$

av grad null slik at $\delta' \circ \Phi_n = \Phi_{n-1} \circ \delta$ for hver $n$.

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
C_{n+1} & \xrightarrow{\Phi_{n+1}} & C'_{n+1} \\
\downarrow \delta_{n+1} & & \downarrow \delta'_{n+1} \\
C_n & \xrightarrow{\Phi_n} & C'_n \\
\downarrow \delta_n & & \downarrow \delta'_n \\
C_{n-1} & \xrightarrow{\Phi_{n-1}} & C'_{n-1} \\
\downarrow \delta_{n-1} & & \downarrow \delta'_{n-1} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

La kjernen og bildet av $\delta$ bli angitt som $Z_*(C)$ og $B_*(C)$. Homologien til C er da den graderte gruppen

$$H_*(C) = Z_*(C)/B_*(C).$$

Hvis $\Phi$ er en kjede funksjon, så fører dette til:

$$\Phi(Z_*(C)) \subseteq Z_*(C') \; og \; \Phi(B_*(C)) \subseteq B_*(C').$$

Dermed vil $\Phi$ indusere en homomorfi på homologi gruppene

$$\Phi : H_*(C) \to H_*(C').$$

Ut fra dette blir den graderte gruppen $S_*(X) = \{S_i(X)\}$ et kjede kompleks under grenseoperatoren $\delta$ (2.2), slik at homologi gruppen av $X$ er homologien til kjede komplekset. Hvis $f : X \to Y$ er en kontinuerlig funksjon og $\phi$ er en singulær $n$-simpleks i $X$, så vil det være en singulær $n$-simpleks $f_\#(\phi) = f \circ \phi$ i $Y$. Dette kan utvides til en homomorfi

$$f_\# : S_n(X) \to S_n(Y)\ for\ hver\ n. \tag{2.5}$$

For å vise at $f_\#$ er en kjede funksjon fra $S_*(X)$ til $S_*(Y)$ så må følgende rektangel kommutere:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{f_\#} & S_n(Y) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_\#} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

Det er nok å vise at dette er sant på de singulære $n$-simplekser $\phi$, altså $\delta_i f_\#(\phi) = f_\# \delta_i(\phi)$. La

$$f_\# \delta_i(\phi)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = f(\phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}))$$

og

$$\delta_i f_\#(\phi)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = f_\#(\phi)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) = f(\phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1})).$$

Dermed er $f_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$ en kjede funksjon og det blir indusert en homomorfi av grad null

$$f_* : H_*(X) \to H_*(Y). \tag{2.6}$$

La $X =$ punkt som et første eksempel. For hver $p \geq 0$ så eksisterer det en unik singulær $p$-simpleks $\phi_p : \sigma_p \to X$. Videre for $p > 0$, $\delta_i \phi_p = \phi_{p-1}$. Ta i betrakning følgende kjede kompleks

$$\cdots \to S_2(pt) \to S_1(pt) \to S_0(pt) \to 0.$$

Hver $S_n(pt)$ er en uendelig syklisk gruppe generert av $\phi_n$. Grenseoperatoren er dermed gitt ved

$$\delta\phi_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \delta_i \phi_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \phi_{n-1}. \tag{2.7}$$

Dette gir $\delta\phi_{2n-1} = 0$ og $\delta\phi_{2n} = \phi_{2n-1}$ for $n > 0$. Ved å anvende dette til kjede komplekset:

$$\cdots \to S_{2p+2}(pt) \xrightarrow{\delta} S_{2p+1}(pt) \xrightarrow{\delta} S_{2p}(pt) \xrightarrow{\delta} S_{2p-1}(pt) \to \ldots$$

og la $\alpha \in S_{2p+1}(pt)$ hvor $\alpha = q \cdot \phi_{2p+1}$, $q \in \mathbb{Z}$. Da er $\delta\alpha = 0$ og dermed er $Z_n(pt) = B_n(pt)$ for $n > 0$.

**Bevis.** La $\alpha = q \cdot \phi_{2p+1} \in S_{2p+1}, q \in \mathbb{Z}$. I tillegg la

$$\beta = q \cdot \phi_{2p+2} \ \ , \delta\beta = q((-1)^0\phi_{2p+1} + (-1)^1\phi_{2p+1} + \cdots + (-1)^{2p+2}\phi_{2p+1}) = q \cdot \phi_{2p+1} = \alpha.$$

QED.

Derimot er $Z_0(pt) = S_0(pt)$ uendelig syklisk hvor $B_0(pt) = 0$.

**Bevis.** La $\alpha \in Z_0(pt) \to \alpha = q \cdot \phi_0$, $q \in \mathbb{Z}$. Da er randen lik $\delta\alpha = q \cdot \delta\phi_0 = 0$, siden $\delta\phi_0 = 0$. Dermed er $S_0(pt) = Z_0(pt)$. La $\beta \in S_1(pt)$, randen til $\delta\beta = s \cdot \delta\phi_1 = 0 \to B_0(pt) = \{0\}$.
QED.

Man kan dermed konkludere at homologi gruppene til et punkt er gitt ved

$$H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & hvis\ n = 0 \\ 0 & hvis\ n > 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

## 2.6 Banevis sammenhengende rom

Den neste definisjonen som er viktig i studiet av singulær homologi er *banevis sammenhengende* rom. Vi vil se senere at de homologiske egenskapene til et rom er fullstendig bestemt av sine *bane komponenter*.

Et rom $X$ er banevis sammenhengede hvis $x$,$y \in X$, så fins det en kontinuerlig funksjon

$$\psi : [0,1] \to X$$

slik at $\psi(0) = x$ og $\psi(1) = y$.

Anta at $X$ er et slikt rom og la følgende singulære kjede kompleks av $X$ være gitt av

$$S_1(X) \xrightarrow{\delta} S_0(X) \to 0.$$

$S_0(X) = Z_0(X)$ som kan bli ansett som den frie abelske gruppen generert av punktene av $X$. Dette er $Z_0(X) = F(X)$. Dermed har et element $y$ av $Z_0(X)$ formen

$$y = \sum_{x \in X} n_x \cdot x,$$

der $n_x$ er alle heltallene hvor et endelig antall er lik 0. Derimot kan $S_1(X)$ bli ansett som den frie abelske gruppen generert av mengden av alle baner i $X$. Hvis hjørnepunktene av $\sigma_1$ er $v_0$ og $v_1$ og $\phi$ er en singulær 1-simpleks, da er randen til $\phi$:

$$\delta\phi = \phi(v_1) - \phi(v_0) \in Z_0(X).$$

Vi kan dermed definere en homomorfi $\alpha : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ gitt $\alpha(\sum n_x \cdot x) = \sum n_x$. Hvis $X$ er ikke-tom, så er $\alpha$ en epimorfi. Siden for enhver singulær 1-simpleks $\phi$ i X, $\alpha(\delta\phi) = \alpha(\phi(v_1) - \phi(v_0)) = 0$, så følger det at $B_0(X)$ er en undermengde av kjernen til $\alpha$.

På den andre siden, anta at $n_1x_1 + \cdots + n_kx_k \in Z_0(X)$ hvor $\sum n_i = 0$. Ta ethvert punkt $x \in X$ og for hver $i$ så er det en singulær 1-simpleks $\phi_i : \sigma_1 \to X$ med $\delta_0(\phi_i) = x_i$ og $\delta_1(\phi_i) = x$. Med å ta den singulære 1-kjeden $\sum n_i\phi_i$ i $S_1(X)$ så får man $\delta(\sum n_i\phi_i) = \sum n_ix_i - (\sum n_i)x = \sum n_ix_i$. Dermed er kjernen av $\alpha$ en delmengde av $B_0(X)$. Dette beviser at kjernen av $\alpha$ er lik $B_0(X)$ og man kan konkludere det følgende fundamentale homomorfi teoremet:

**Proposisjon 2.4.** *Hvis $X$ er et ikke-tom* banevis-sammenhengende *rom, da er*

$$H_0(X) \approx \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Videre la $A$ være en mengde og anta at for hver $\alpha \in A$ så vil det være gitt en abelsk gruppe $G_\alpha$. I tillegg la den abelske gruppen $\sum_{\alpha \in A} G_\alpha$ være definert på følgende måte: Elementene er alle funksjoner

$$f : A \to \cup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

slik at $f(\alpha) \in G_\alpha$ for hver $\alpha$, og $f(\alpha) = 0$ for alle untatt et endelig antall elementer $\alpha \in A$. Operasjonen er definert ved $(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$. Ved å sette $g_\alpha = f(\alpha) \in G_\alpha$ så kan $f$ være definert som $f = (g_\alpha : \alpha \in A)$, og la $g_\alpha$ hete komponentene til $f$. Gruppen $\sum G_\alpha$ er den *svake direkte summen* av alle $G_\alpha$. Hvis vi glemmer at $f(\alpha) = 0$ for alle untatt et endelig antall $\alpha$, så er den resulterende gruppen den *sterke direkte summen* eller *direkte produkt* av alle $G_\alpha$, angitt ved $\Pi_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Hvis $G$ er en abelsk gruppe og $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ er en samling av undergrupper av $G$ slik at $g \in G$ har en unik representasjon

$$g = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha \ , \ g_\alpha \in G_\alpha$$

og $g_\alpha = 0$ untatt for endelig mange $\alpha$, da er $G$ isomorf med $\sum_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Anta at for hver $\alpha \in A$ så har vi et kjede kompleks $C^\alpha$

$$\ldots \xrightarrow{\delta^\alpha} C_p^\alpha \xrightarrow{\delta^\alpha} C_{p-1}^\alpha \xrightarrow{\delta^\alpha} \ldots.$$

La kjede komplekset være definert som $\sum_{\alpha \in A} C^\alpha$ ved $(\sum C^\alpha)_p = \sum C_p^\alpha$ og la $\delta(c_\alpha : \alpha \in A) = (\delta^\alpha c_\alpha : \alpha \in A)$. Da kan man fastslå følgende:

**Lemma 2.5.**

$$H_k(\sum C^\alpha) \approx \sum_\alpha H_k(C^\alpha). \tag{2.10}$$

**Bevis.** Gjennom definisjonen av kjede komplekset $\sum C^\alpha$ så har man

$$Z_k(\sum C^\alpha) = \sum(Z_k(C^\alpha)) \text{ og } B_k(\sum(C^\alpha)) = \sum(B_k(C^\alpha)).$$

Dermed

$$\begin{aligned} H_k(\sum C^\alpha) &= Z_k(\sum C^\alpha)/B_k(\sum C^\alpha) \\ &= \sum(Z_k(C^\alpha))/\sum(B_k(C^\alpha)) \\ &\approx \sum(Z_k(C^\alpha)/B_k(C^\alpha)) \\ &= \sum H_k(C^\alpha) \end{aligned}$$

QED.

La nå $X$ være et topologisk rom og for $x$, $y \in X$, ta $x \sim y$ hvis det eksisterer en bane i $X$ fra $x$ til $y$. Det er tydelig at $\sim$ er en ekvivalens relasjon, som er,

(1) $x \sim x$,

(2) $x \sim y$ *og* $y \sim z$ *impliserer* $x \sim z$,

(3) $x \sim y$ *impliserer* $y \sim x$,

for alle punkter $x$, $y$, og $z$ i X. Denne relasjonen bryter ned $X$ i en samling av undermengder, ekvivalensklasser, hvor $x$ og $y$ er i samme ekvivalensklasse hvis og bare hvis $x \sim y$. Disse ekvivalensklassene kalles for bane komponentene av $X$. Hvis $x \in X$ så er bane komponenten av $X$ som inneholder $x$ den maksimale banevis-sammenhengende undermengden av X som inneholder $x$.

Disse bane komponentene til $X$ fører dermed til en ny proposisjon:

**Proposisjon 2.6.** . *Hvis $X$ er et rom og $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ er bane komponentene til $X$, da er*

$$H_k(X) \approx \sum_{\alpha \in A} H_k(X_\alpha).$$

**Bevis.** Det fins en naturlig homomorfi

$$\Psi : \sum_{\alpha \in A} S_k(X_\alpha) \to S_k(X)$$

gitt ved

$$\Psi\left(\left(\sum_{\phi_\alpha} n_{\phi,\alpha} \cdot \phi_\alpha\right) : \alpha \in A\right) = \sum_{\alpha \in A}\left(\sum_{\phi_\alpha} n_{\phi,\alpha} \cdot \phi_\alpha\right).$$

$\Psi$ må være en monomorfi siden gruppene involvert er frie abelske grupper. I tillegg for å observere at $\Psi$ også er en epimorfi, bemerk at hvis

$$\psi : \sigma_k \to X$$

er en singulær $k$-simpleks, da vil $\phi(\sigma_k)$ være inneholdt i en $X_\alpha$ fordi $\sigma_k$ er banevis-sammenhengende . Enhver $\phi$ er dermed assosiert med en unik $\phi_\alpha \in S_k(X_\alpha)$ med $\Psi(\phi_\alpha) = \phi$. $\Psi$ er dermed en isomorfi for hver $k$. Dessuten er $\Psi$ en kjede funksjon mellom kjede kompleksene slik at

$$H_k(X) \approx H_k\left(\sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha)\right).$$

Det følger fra Lemma 2.5 at

$$H_k\left(\sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha)\right) \approx \sum_{\alpha \in A} H_k(X_\alpha).$$

QED

Denne proposisjonen viser at de homologiske egenskapene til et rom er fullstendig bestemt av sine bane komponenter. I tillegg er de homologiske egenskapene av enhver bane komponent uavhengig av egenskapene av andre bane komponenter. Dermed kan vi begrense vårt fokus til studiet av banevis-sammenhengende rom.

**Teorem 2.1.** *Hvis $f : X \to Y$ er en homeomorfi, da er*

$$f_* : H_p(X) \to H_p(Y)$$

*en isomorfi for hver $p$.*

**Bevis.** La $f^{-1}$ være definert som $f^{-1} : Y \to X$. Definer $f_\# : S_p(X) \to S_p(Y)$ som

$$f_\#(\sum n_i \phi_p^i) = \sum n_i f \circ \phi_p^i.$$

Se på $(f^{-1})_\# : S_p(Y) \to S_p(X)$ hvor

$$(f^{-1})_\#(\sum m_j \phi_p^j) = \sum n_i f^{-1} \circ \phi_p^i.$$

Dette fører til

$$\begin{aligned} & f_\#^{-1} \circ f_\#(\sum n_i \phi_p^i) \\ & \qquad = f_\#^{-1}(\sum n_i f \circ \phi_p^i) \\ & \qquad = \sum n_i f^{-1} \circ f \circ \phi_p^i \\ & \qquad = \sum n_i \phi_p^i \end{aligned}$$

$\to (f^{-1})_\# \circ f_\# = 1_{S_p(Y)} : S_p(X) \to S_p(X)$.

La oss sjekke at $f_\# \circ (f^{-1})_\# = 1_{S_p(Y)}$.

$$\begin{aligned} & f_\# \circ (f^{-1})_\#(\sum n_i \phi_p^i) \\ & \qquad = f_\#(\sum n_i f^{-1} \circ \phi_p^i) \\ & \qquad = \sum n_i f \circ f^{-1} \circ \phi_p^i \\ & \qquad = \sum n_i \phi_p^i \end{aligned}$$

$\to f_\# \circ (f^{-1})_\# = 1_{S_p(Y)} : S_p(Y) \to S_p(Y) \Rightarrow (f^{-1})_\# = (f_\#)^{-1}$. Altså, $S_p(X) \approx S_p(Y)$, så da må $H_p(X) \approx H_p(Y)$.

QED.

At dette teoremet, den topologiske invariansen av de singulære homologi gruppene, er ganske enkelt å bevise er en av de store fordelene ved å bruke singulær homologi teori. La oss nå se på undermengder i Euklidske rom $\mathbb{R}^n$, som vi ofte bruker til å bygge opp mer kompliserte geometrier.

**Teorem 2.2.** *Hvis $X$ er en konveks undermengde i $\mathbb{R}^n$, da er*

$$H_p(X) = 0 \ for \ p > 0.$$

**Bevis.** Anta $X \neq \emptyset$ og la $x \in X$ og $\phi : \sigma_p \to X$ være en singulær $p$-simpleks, hvor $p \geq 0$. La den singulære $(p+1)$-simpleksen $\theta : \sigma_{p+1} \to X$ være definert på følgende måte:

$$\theta(t_0, \ldots, t_{p+1}) = \begin{cases} (1-t_0) \cdot \left(\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}\right)\right) + t_0 x & for \quad t_0 < 1. \\ x & for \quad t_0 = 1 \end{cases}$$

Dette fører til

$$\theta(0, t_1, \ldots, t_{p+1}) = \phi(t_1, \ldots, t_{p+1}) \ og \ \theta(1, 0, \ldots, 0) = x.$$

Denne konstruksjonen er mulig siden $X$ er konveks.

Fra definisjonen så er $\theta$ kontinuerlig untatt muligens på $(1, 0, \ldots, 0)$. For å sjekke kontinuitet i dette punktet må vi vise at

$$\lim_{t_0 \to 1} \|\theta(t_0, \ldots, t_{p+1}) - x\| = 0.$$

La

$$\begin{aligned} &\lim_{t_0 \to 1} \|\theta(t_0, \ldots, t_{p+1}) - x\| \\ &\qquad = \lim_{t_0 \to 1} \left\| (1-t_0)\left(\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}\right)\right) - (1-t_0)x \right\| \\ &\qquad \leq \lim_{1-t_0} (1-t_0)\left(\left\|\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0}\right)\right\| + \|x\|\right). \end{aligned}$$

Siden $\sigma_p$ er kompakt så er også $\phi(\sigma_p)$ kompakt og $(\|\phi(t_1/(1-t_0), \ldots, t_{p+1}/(1-t_0))\| + \|x\|)$ må være begrenset. Dermed er den endelige grensen lik null fordi $\lim_{t_0 \to 1}(1-$

$t_0) = 0$ og det medfører at $\theta$ er kontinuerlig.

Det viser seg fra konstruksjonen at $\delta_0(\theta) = \phi$. Siden denne konstruksjonen av $\theta$ kan bli anvendt for enhver singulær $k$-simpleks, $k \geq 0$, så vil det være en unik utvidelse til en homomorfi

$$T : S_k(X) \to S_{k+1}(X)$$

slik at $\delta_0 \circ T = \mathit{identitet}$. Mer generelt for en singulær $k$-simpleks $\phi$,

$$\begin{aligned}
&\delta_i(T(\phi))(t_0, \ldots, t_k) \\
&\qquad = T(\phi)(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_k) \\
&\qquad = (1 - t_0)\left(\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \frac{t_i}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_k}{1-t_0}\right)\right) + t_0 x.
\end{aligned}$$

På den andre siden

$$\begin{aligned}
&T(\delta_{i-1}(\phi))(t_0, \ldots, t_k) \\
&\qquad = (1 - t_0)\left(\delta_{i-1}\phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_k}{1-t_0} + t_0 x\right)\right. \\
&\qquad = (1 - t_0) \cdot \phi\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{i-1}}{1-t_0}, 0, \frac{t_i}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_k}{1-t_0}\right) + t_0 x.
\end{aligned}$$

Dermed, for $1 \leq i \leq k + 1$,

$$\delta_i T\phi = T(\delta_{i-1}\phi). \tag{2.11}$$

La $\phi$ være enhver singulær $k$-simpleks

$$\begin{aligned}
\delta T\phi = \delta_0 T\phi + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \delta_i T(\phi) \\
&= \phi + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i T\delta_{i-1}\phi \\
&= \phi - T\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \delta_j \phi \\
\Rightarrow &= \phi - T\delta\phi
\end{aligned}$$

$$\delta T\phi + T\delta\phi = \phi.$$

Vi har konstruert en homomorfi $T : S_k(X) \to S_{k+1}(X)$ med egenskapen at $\delta T + T\delta$ er identitet homomorfien på $S_k(X)$, hvis $k \geq 1$.

La $z$ være et element av $Z_p(X)$. Fra det som er vist tidligere, for $p > 0$, $(\delta T + T\delta) = z$. Siden $z$ er sykel så medfører det at $T\delta z = 0$. Dermed er $\delta Tz = z$ og dette kan omformes til $z = \delta(Tz)$ og $z$ er i $B_p(X)$. Dette impliserer at $H_p(X) = 0$ for alle $p > 0$.

QED.

## 2.7 Kjede homotopi

Konstruksjonen brukt i beviset av Teorem (2.2) er et spesielt tilfelle av en kjede homotopi mellom kjede komplekser. Anta at $C = \{C_i, \delta_i\}$ og $C' = \{C'_i, \delta'\}$ er kjede komplekser:

$$\begin{array}{cc}
\vdots & \vdots \\
C_{i+1} & C'_{i+1} \\
\downarrow_{\delta} & \downarrow_{\delta'} \\
C_i & C'_i \\
\downarrow_{\delta} & \downarrow_{\delta'} \\
C_{i-1} & C'_{i-1} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

og $T : C \to C'$ er en homomorfi av graderte grupper av grad én(men den er ikke nødvendigvis en kjede funksjon). Altså: $T : S_n(X) \to S_{n+1}(X)$. Det følger da fra $T : C \to C'$:

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
C_{i+2} & & C'_{i+2} \\
\downarrow_{\delta} & & \downarrow_{\delta'} \\
C_{i+1} & \nearrow_T & C'_{i+1} \\
\downarrow_{\delta} & & \downarrow_{\delta'} \\
C_i & \nearrow_T & C'_i \\
\downarrow_{\delta} & & \downarrow_{\delta'} \\
C_{i-1} & \nearrow_T & C'i-1 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}.$$

La oss se på homomorfien

$$\delta' T + T\delta : C \to C'$$

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
C_{i+1} & \to & C'_{i+1} \\
\downarrow_{\delta} & & \downarrow_{\delta'} \\
C_i & \to & C'_i \\
\downarrow_{\delta} & & \downarrow_{\delta'} \\
C_{i-1} & \to & C'_{i-1} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Den har grad null. Dette vil være en kjede funksjon fordi

$$\delta'(\delta' T + T\delta) = \delta'\delta' T + \delta' T\delta = \delta' T\delta = \delta' T\delta + T\delta\delta = (\delta' T + T\delta)\delta.$$

Denne kjedefunksjonen $(\delta' T + T\delta)$ induserer en homomorfi på homologien

$$(\delta' T + T\delta)_* : H_p(C) \to H_p(C')$$

for hver p. Hvis $z \in Z_p(C)$,

$$(\delta' T + T\delta)(z) = \delta' T(z)$$

som betyr at den er i bildet $B_p(C')$. Dermed er $(\delta' T + T\delta)_*$ null homomorfien for hvert $p$. Gitt kjede funksjonene $f$ og $g$: $C \to C'$, $f$ og $g$ er kjede homotop hvis det eksisterer en homomorfi $T : C \to C'$ av grad én med $\delta' T + T\delta = f - g$.

**Proposisjon 2.7.** *Hvis $f$ og $g$: $C \to C'$ er kjede homotop kjede funksjoner, da er $f_* = g_*$ som homomorfier fra $H_*(C)$ til $H_*(C')$.*

**Bevis.** Dette følger umiddelbart fra forrige definisjon av kjede homotopi mellom $f$ og $g$. Siden $T : C \to C'$ er en kjede homotopi mellom $f$ og $g$, da er

$$0 = (\delta' T + T\delta)_* = (f - g)_* = f_* - g_*.$$

QED.

Som et spesielt tilfelle, anta at $f$ og $g$: $X \to Y$ er funksjoner slik at de induserte kjede funksjonene

$$f_\# \text{ og } g_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$$

er kjede homotop. Hvis $T$ er en kjede homotopi mellom $f_\#$ og $g_\#$, da kan $T$ bli tolket geometrisk på følgende måte:

La $\phi$ være en singulær $n$-simpleks i $X$. $T(\phi)$ kan da bli sett på som en kontinuerlig deformasjon av $f_\#(\phi)$ til $g_\#(\phi)$. $T(\phi)$ kan bli sett på som en prisme med ender $f_\#(\phi)$ og $g_\#(\phi)$ og sider $T(\delta\phi)$. Det er logisk at

$$\delta T(\phi) = f_\#(\phi) - g_\#(\phi) - T(\delta\phi),$$

som er det algebraiske kravet for at $T$ skal være en kjede homotopi.

Gitt de topologiske rommene $X$ og $Y$, to funksjoner $f_0$ og $f_1$: $X \to Y$ er homotope, hvis det eksisterer en funksjon

$$F : X \times I \to Y, \quad I = [0, 1]. \tag{2.12}$$

hvor $F(x, 0) = f_0(x)$ og $F(x, 1) = f_1(x)$, for alle $x$ i $X$. Funksjonen $F$ er en *homotopi* mellom $f_0$ og $f_1$. Det er tydelig at en homotopi relasjon er en ekvivalensrelasjon på mengden av alle funksjoner fra $X$ til $Y$. Det er standard å betegne $[X, Y]$ mengden av homotopi klasser av funksjoner. Dette fører til følgende teorem:

**Teorem 2.3.** *Hvis $f_0$, $f_1$: $X \to Y$ er homotope funksjoner, da er $f_{0*} = f_{1*}$ som homomorfier fra $H_*(X) \to H_*(Y)$.*

**Bevis.** Tanken bak beviset er ganske enkelt: Hvis $z$ er en sykel i $X$, da vil bildene av $z$ under $f_0$ og $f_1$ være sykler i $Y$. Siden $f_0$ og $f_1$ er homotope funksjoner, så kan $f_0$ bli kontinuerlig deformert til $f_1$. Da burde også bildet av $z$ under $f_0$ bli kontinuerlig deformert til bildet av $z$ under $f_1$. Dette burde implisere at de to bildene er sykler som er homolog. Disse geometriske ideene kan bli konstruert innenfor det foreløpige algebraiske rammeverket.

Ut fra proposisjon (2.7) så vil det være nok å vise at kjede funksjonene $f_{0\#}, f_{1\#} : S_*(X) \to S_*(Y)$ er kjede homotop. Det betyr at kjede funksjonene $f_{0\#}$ og $f_{1\#}$ fra kjede komplekset $S_*(X) = \{S_i(X)\}$ til kjede komplekset $S_*(Y) = \{S_i(Y)\}$ kan bli kontinuerlig deformert inn i hverandre. Homologigruppen til $Y$ er homologien til dette kjede komplekset. La

$$F : X \times I \to Y$$

være en homotopi mellom $f_0$ og $f_1$. Definer funksjonene

$$g_0, g_1 : X \to X \times I$$

gitt ved $g_0(x) = (x, 0)$ og $g_1(x) = (x, 1)$:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow_{g_0} & \searrow f_0 & \\ X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\ \uparrow_{g_1} & \nearrow f_1 & \\ X & & \end{array} \tag{2.13}$$

Ut fra (2.13) så er $f_0 = F \circ g_0$ og $f_1 = F \circ g_1$.

Anta at $g_{0\#}$ og $g_{1\#}$ er kjede homotop som kjede funksjoner fra $S_*(X)$ til

$S_*(X \times I)$. Dette fører på grunn av definisjonen til kjede funksjoner som er kjede homotop, til en homomorfi

$$T : S_* \to S_*(X \times I)$$

av grad én med $\delta T + T\delta = g_{0\#} - g_{1\#}$. Ved å anvende $F_\#$ til begge sider gir

$$F_\#(\delta T + T\delta) = F_\#(g_{0\#} - g_{1\#}) \textit{ eller } \delta(F_\# T) + (F_\# T)\delta = f_{0\#} - f_{1\#}.$$

$F_\# T$ er dermed en homomorfi fra $S_*(X)$ til $S_*(Y)$ av grad én og er en kjede homotopi mellom $f_{0\#}$ og $f_{1\#}$. Dermed er det nok å vise at $g_{0\#}$ og $g_{1\#}$ er kjede homotop.

La $t_n \in S_n(\sigma_n)$ betegne standard $n$-simpleks $\sigma_n$ som elementet representert ved identitetsfunksjonen. Bemerk at hvis $\phi : \sigma_n \to X$ er et vilkårlig singulært $n$-simpleks i $X$, da har den induserte homomorfien

$$\phi_\# : S_n(\sigma_n) \to S_n(X)$$

$\phi_\#(t_n) = \phi$. Det er tydelig at hver singulære $n$-simpleks i $X$ kan bli uttrykket som bildet av $t_n$ på denne måten. Fremgangsmåten til beviset vil først være å gi en konstruksjon som involverer $t_n$ og så utvide dette til hele $S_n(X)$ gitt ved denne måten som nettopp har blitt vist.

Vi konstruerer en kjede homotopi $T$ mellom $g_{0\#}$ og $g_{1\#}$ induktivt på dimensjonen til kjede gruppen. For å gjøre det induktive steget først, anta at $n > 0$ og for alle topologiske rom $X$ og tall $i < n$ så vil det være en homomorfi

$$T : S_i(X) \to S_{i+1}(X \times I) \tag{2.14}$$

slik at $\delta T + T\delta = g_{0\#} - g_{1\#}$. Gitt en funksjon $h : X \to W$ av topologiske rom, anta at kommutativt holder i diagrammet

$$\begin{array}{ccc} S_i(X) & \xrightarrow{T_X} & S_{i+1}(X \times I) \\ \downarrow h_\# & & \downarrow (h \times id)_\# \\ S_i(W) & \xrightarrow{T_W} & S_{i+1}(W \times I) \end{array} \tag{2.15}$$

for alle $i < n$. Nå må $T$ bli definert på $n$-kjedene av $X$. Da er det nok å definere $T$ på de singulære $n$-simpleksene. Så la $\phi : \sigma_n \to X$ være en singulær $n$-simpleks og bemerk at $\phi_{\#}(t_n) = \phi$. Dermed, ved å definere $T_{\sigma_n} : S_n(\sigma_n) \to S_{n+1}(\sigma_n \times I)$, som følge av konstruksjonen vil dette kreve

$$T_X(\phi) = T_X(\phi_{\#}(t_n)) = (\phi \times id)_{\#}(T_{\sigma_n}(t_n)).$$

For å definere $T_X$ så er det nok å definere $T_{\sigma_n}$ på $S_n(\sigma_n)$.

La $d$ være en singulær $n$-simpleks i $\sigma_n$ og ta i betrakning kjeden i $S_n(\sigma_n \times I)$ gitt ved

$$c = g_{0\#}(d) - g_{1\#}(d) - T_{\sigma_n}(\delta d),$$

som er definert ved induksjon hypotesen siden $\delta d$ er i $S_{n-1}(\sigma_n)$. I henhold til tidligere definisjoner så korresponderer $c$ med grensen av en viss prisme i $\sigma_n$. Dette fører til

$$\begin{aligned}\delta c =& \delta g_{\#0}(d) + \delta g_{1\#}(d) - \delta T_{\sigma_n}(\delta d)\\ &= g_{0\#}(\delta d) - g_{1\#}(\delta d) - [g_{0\#}(\delta d) - g_{1\#}(\delta d) - T_{\sigma_n}\delta(\delta d)]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dermed er $c$ en sykel av dimensjon $n$ i den konvekse mengden $\sigma_n \times I$. Det følger fra Teorem (2.2) at $c$ er også en grense. La nå $b \in S_{n+1}(\sigma_n \times I)$ hvor $\delta b = c$. Siden randen til $b$ er lik $c$ så er $b$ geometrisk den solide prismen med $c$ som grense. Definer

$$T_{\sigma_n}(d) = b$$

og observer at

$$\delta T(d) + T\delta(d) = g_{0\#}(d) - g_{1\#}(d).$$

For enhver singulær $n$-simpleks $\phi : \sigma_n \to X$, la den være definert som før:

$$T_X(\phi) = (\phi \times id)_{\#} T_{\sigma_n}(t_n).$$

Dette vil gi en unik utvidelse til en homomorfi

$$T_X : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times I).$$

Denne induktive konstruksjon gir også en klar definisjon for $T$ på 0-kjedene. Bemerk at $\sigma_0$ er et punkt og ta i betrakning kjeden $c$ i $S_0(\sigma_0 \times I)$ gitt ved

$$c = g_{0\#}(t_0) - g_{1\#}(t_0).$$

La $T$ bli definert ved samme teknikken og ta en singulær 1-simpleks $b$ i $\sigma_0 \times I$ med grense $g_{0\#}(t_0) - g_{1\#}(t_0)$ og definer $T_{\sigma_o}(t_0) = b$. Dette definerer $T$ på 0-kjedene. Merk at konstruksjonen og definisjonen gitt for $T_X$ på $n$-kjedene av $X$,

$$\delta T_X + T_X \delta = g_{0\#} - g_{1\#}$$

er passende til funksjonene $h : X \to W$ og diagram (2.15) kommuterer.

Bemerk at hvis $\phi$ er en singulær $n$-simpleks i $X$,

$$g_{0\#}(\phi) = g_{0\#}\phi_{\#}(t_n) = (\phi \times id)_{\#} g_{0\#}(t_n)$$

og på samme måte

$$g_{1\#}(\phi) = g_{1\#}\phi_{\#}(t_n) = (\phi \times id)_{\#} g_{1\#}(t_n).$$

Ta i betrakning

$$\begin{aligned}
\delta T(\phi) + T\delta(\phi) =& \delta T\phi_{\#}(t_n) + T\delta\phi_{\#}(t_n) \\
&= \delta(\phi \times id)_{\#} T(t_n) + T\phi_{\#}\delta(t_n) \\
&= (\phi \times id)_{\#}\delta T(t_n) + (\phi \times id)_{\#} T\delta(t_n) \\
&= (\phi \times id)_{\#}(g_{0\#}(t_n) - g_{1\#}(t_n)) \\
&= g_{0\#}(\phi) - g_{1\#}(\phi).
\end{aligned}$$

$T_X$ gir dermed en kjede homotopi mellom $g_{0\#}$ og $g_{1\#}$, og vi har fullført beviset at $f_{0*} = f_{1*}$.
QED.

Begrepet homotopi er nyttig i homologi, siden det gir opphav til isomorfier i homologi.

La $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være funksjoner av topologiske rom.

Hvis komposisjonene $f \circ g : Y \to Y$ og $g \circ f : X \to X$ er begge homotope til identitetsfunksjonen, da er $f$ og $g$ homotopi inverser av hverandre. En funksjon $f : X \to Y$ er en homotopi ekvivalens hvis $f$ har en homotopi invers, i dette tilfelle har $X$ og $Y$ samme homotopi type.

**Proposisjon 2.8.** *Hvis $f : X \to Y$ er en homotopi ekvivalens, da er $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ en isomorfi for hver $n$.*

**Bevis.** Hvis $g$ er en homotopi invers for $f$, gitt ved (2.3) så er $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$=identiteten og $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$= identiteten slik at $g_* = f_*^{-1}$ og $f_*$ er dermed en isomorfi.
QED.

Anta at $i : A \to X$ er inklusjon funksjonen av en undermengde $A$ av $X$. En funksjon $g : X \to A$ slik at $g \circ i$ er identiteten på $A$ er en *retraksjon* av $X$ på $A$. I tillegg hvis komposisjonen $i \circ g : X \to X$ er homotop til identiteten, da er $g$ en *deformasjon retraksjon* og $A$ er en *deformasjon retrakt* av $X$. Dette fører til følgende korollar:

**Korollar 2.9.** *Hvis $i : A \to X$ er inklusjonen av en retrakt $A$ av $X$, da er $i_* : H_*(A) \to H_*(X)$ en monomorfi på en direkte summand. Hvis $A$ er en deformasjon retrakt av $X$, da er $i_*$ en isomorfi.*

**Bevis.** Den andre påstanden i (2.9) følger direkte fra (2.8). For å bevise den første påstanden, la $g : X \to A$ være en retraksjon. Det fører til

$$g_* \circ i_* = (g \circ i)_* = (id)_*.$$

Dette gir identiteten på $H_*(A)$ og dermed er $i_*$ en monomorfi.

La nå undergruppene av $H_*(X)$ være definert som $G_1 =$ bilde $i_*$ og $G_2 =$ kjernen $g_*$. La $\alpha \in G_1 \cap G_2$, slik at $\alpha = i_*(\beta)$ for en $\beta \in H_*(A)$ og $g_*(\alpha) = 0$. Derimot

$$0 = g_*(\alpha) = g_* i_*(\beta) = \beta$$

slik at $\alpha = i_*(\beta)$ må være null. På den andre siden, la $\gamma \in H_*(X)$. Da er

$$\gamma = i_* g_*(\gamma) + (\gamma - i_* g_*(\gamma))$$

likningen viser $\gamma$ som en sum av et element i $G_1$ og et element i $G_2$. Dermed er $H_*(X) \approx G_1 \oplus G_2$ og beviset er fullført.

QED.

# Kapittel 3

# Mayer-Vietoris følgen

## 3.1 Introduksjon

Som følge av singulær homologi så kan Mayer-Vietoris følgen bli utledet. Siden (ko)homologien til de fleste rom ikke kan bli utregnet direkte fra deres definisjon, så har Mayer-Vietoris følgen blitt konstruert. Fremgangsmåten består av å dele et rom i flere underrom, hvor homologi eller kohomologi gruppene kan bli lettere utregnet. Følgen relaterer (ko)homologi gruppene av rommet til (ko)homologi gruppene til underrommene. For å komme frem til følgen, la oss først definere eksakte følger og overdekning.

## 3.2 Eksakte følger

En trippel $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ av abelske grupper og homomorfier er eksakt hvis bilde av $f =$ kjernen til $g$. Videre er en følge av abelske grupper og homomorfier

$$\ldots \to G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \ldots$$

eksakt hvis hver trippel er eksakt. En eksakt følge definert som:

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0 \tag{3.1}$$

er *korteksakt.* Dette er en generalisering av konseptet av isomorfi i den graden at $h : G_1 \to G_2$ er en isomorfi hvis og bare hvis

$$0 \to G_1 \xrightarrow{h} G_2 \to 0$$

er eksakt.

Bemerk at i en korteksakt følge som i (3.1), så er $f$ en monomorfi og identifiserer $C$ med en undergruppe $C' \subseteq D$. I tillegg er $g$ en epimorfi med kjerne $C'$. Dette gir, opp til en isomorfi følgen

$$0 \to C' \xrightarrow{i} D \xrightarrow{\pi} D/C' \to 0.$$

Anta nå at $C = \{C_n\}$, $D = \{D_n\}$ og $E = \{E_n\}$ er kjede komplekser og at

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$$

er en korteksakt følge hvor $f$ og $g$ er kjede funksjoner av grad null. Dermed, for hver $p$ så er det assosiert en trippel av homologi grupper,

$$H_p(C) \xrightarrow{f_*} H_p(D) \xrightarrow{g_*} H_p(E).$$

Vi vil nå undersøke hvordan dette avviker fra å være korteksakt. La oss anta at vi har et uendelig diagram hvor radene er korteksakt følger og hver firkant er kommutativ.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C_n & \xrightarrow{f} & D_n & \xrightarrow{g} & E_n & \to & 0 \\
 & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \\
0 & \to & C_{n-1} & \xrightarrow{f} & D_{n-1} & \xrightarrow{g} & E_{n-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

La nå $z$ være i $Z_n(E)$. Dette medfører at $z \in E_n$ og $\delta z = 0$. Siden $g$ er en epimorfi, så eksisterer det et element $d \in D_n$ hvor $g(d) = z$. På grunn av at $g$ er en kjede funksjon så får man

$$g(\delta d) = \delta(g(d)) = \delta z = 0.$$

Eksaktheten impliserer at $\delta d$ er i bildet av $f$, så la $c \in C_{n-1}$ med $f(c) = \delta d$. Bemerk at

$$f(\delta c) = \delta f(c) = \delta(\delta d) = 0,$$

og $\delta c$ må være null siden $f$ er en monomorfi og $c \in Z_{n-1}(C)$. Man ser at man kan gå fra $Z_n(E) \to Z_{n-1}(C)$.

Denne korrespondansen $z \to c$ er ikke en veldefinert funksjon fra sykler til sykler på grunn av antall mulige valg i konstruksjonen. Derimot er den assosierte korrespondansen på homologi gruppene en veldefinert homomorfi.

Fremgangsmåten til å vise at dette er en veldefinert homomorfi er ganske lik den øvre måten, men la nå $z, z' \in Z_n(E)$ være homologe sykler. Det eksisterer dermed et element $e \in E_{n+1}$ hvor $\delta(e) = z - z'$. La $d, d' \in D_n$ hvor $g(d) = z$ og $g(d') = z'$, og $c, c' \in C_{n-1}$ med $f(c) = \delta d$ og $f(c') = \delta d'$. Vi må vise at $c$ og $c'$ er homologe sykler.

Det eksisterer et element $a \in D_{n+1}$ hvor $g(a) = e$. Siden hver firkant er kommutativ så medfører det at $g(\delta a) = \delta g(a) = \delta e = z - z'$. Kjernen til $g$ er da $(d - d') - \delta a$ og dette er er også i bildet av $f$. La $b \in C_n$ med $f(b) = (d - d') - \delta a$. Man får da

$$\begin{aligned} f(\delta b) = \delta f(b) = \delta(d - d' - \delta a) &= \delta d - \delta d' \\ &= f(c) - f(c') = f(c - c'). \end{aligned}$$

Siden $f$ er en-til-en så følger det at $c - c' = \delta b$ og $c$ og $c'$ er homologe sykler. Korrespondansen indusert på homologi gruppene er dermed veldefinert og må være en homomorfi.

Denne homomorfien blir betegnet ved $\triangle : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$ og heter sammenføyningshomomorfien for den korteksakte følgen

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0.$$

**Teorem 3.1.** *Hvis* $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ *er en korteksakt følge av kjede komplekser og grad null kjede funksjoner, da er den langeksakte følgen*

$$\ldots \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\triangle} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_*} \ldots$$

*eksakt.*

**Bevis.** La oss vise at $H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E)$ er eksakt. Dette betyr at bilde $f_*$= kjernen $g_*$. Resten av beviset går på veldig lik måte.

Det er klart at $\mathrm{Im}(f_*) \subseteq \ker\,(g_*)$ siden $g_* \circ f_*([c]) = [g \circ f(c)] = 0$. Vi må også vise at for

$$[d] \in ker(g_*) \Rightarrow [d] \in Im(f_*):$$

$$g_*([d]) = 0 \Rightarrow [g(d)] = 0$$
$$\Rightarrow g(d) = \delta e,\ e \in E_{n+1}.$$

La oss se diagrammet:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & C_{n+1} \xrightarrow{f} & D_{n+1} \xrightarrow{g} & E_{n+1} \to & 0 \\ & \downarrow \delta & \downarrow \delta & \downarrow \delta & \\ 0 \to & C_n \xrightarrow{f} & D_n \xrightarrow{g} & E_n \to & 0. \end{array}$$

$e \in g(d')$ siden $g$ er på.

Se på $g(d - \delta d') = g(d) - \delta g(d') = \delta e - \delta e = 0$. Siden ( $\ker(f) = \mathrm{Im}(g)$) så fører det til

$$\begin{aligned} d - \delta d' &= f(c) \\ \Rightarrow [d] &= f_*([c]) \\ \Rightarrow ker(g_*) &\subseteq Im(f_*) \\ \Rightarrow ker(g_*) &= Im(f_*). \end{aligned}$$

QED.

Det er viktig å bemerke at konstruksjonen av sammenføyningshomomorfien er naturlig. Det er, hvis

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \to 0 \\ & & \Big\downarrow \alpha & & \Big\downarrow \beta & & \Big\downarrow \gamma & \\ 0 & \to & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \to 0 \end{array}$$

er et diagram av kjede komplekser og grad null kjede funksjoner hvor radene er eksakt og rektanglene er kommutative, da vil kommutativitet holde i hver rektangel av det assosierte diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & H_n(D) & \xrightarrow{g_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\triangle} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{f_*} & H_{n-1}(D) & \to \dots \\ & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & \\ \cdots \to & H_n(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(E') & \xrightarrow{\triangle} & H_{n-1}(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_{n-1}(D') & \to \dots \end{array}$$

## 3.3 Overdekning

La $X$ være et topologisk rom og $A \subseteq X$ et underrom. Det indre av $A$ (Int A) er unionen av alle åpne undermengder av $X$ som er i $A$. Ekvivalent er dette den maksimale undermengden av $A$ som er åpen i $X$. En samling $u$ av undermengder av $X$ er en overdekning av $X$ hvis $X \subseteq \cup_{u \in u} U$. Gitt en samling $u$, la Int $u$ være samlingen av de indre elementene av $u$. Vi er interessert i de $u$ hvor Int $u$ er en overdekning av $X$.

For enhver overdekning $u$ av $X$, la $S_n^u(X)$ være undergruppen av $S_n(X)$ generert av de singulære $n$-simpleksene $\phi : \sigma_n \to X$ hvor $\phi(\sigma_n)$ er inneholdt i en $U \in u$. Det fører til for hver i: bilde $\delta_i \phi \subseteq$ bilde $\phi$, slik at den totale grensen blir

$$\delta : S_n^u(X) \to S_{n-1}^u(X).$$

For enhver overdekning $u$ av $X$ så er det dermed assosiert et kjede kompleks

$S^u_*(X)$ og den naturlige inklusjonen

$$i : S^u_*(X) \to S_*(X)$$

er en kjede funksjon.

Nå kan vi komme frem til teoremet som vil være det essensielle regneverktøyet i studiet av homologi grupper til rom, Mayer-Vietoris følgen. Til det trenger vi:

**Teorem 3.2.** *Hvis $u$ er en familie av undermengder av $X$, slik at Int $u$ er en overdekning av $X$, da er*

$$i_* : H_n(S^u_*(X)) \to H_n(X)$$

*en isomorfi for hver $n$.*

Den første applikasjonen av Teorem (3.2) vil være å utvikle en teknikk for å studere homologien til et rom $X$, ut fra homologien til komponentene av en overdekning $u$ av $X$. I det enkleste ikke-trivielle tilfelle så vil overdekningen $u$ bestå av to undermengder $U$ og $V$ hvor $\text{Int } U \cup \text{Int } V = X$. La nå $A'$ være mengden av alle singulære $n$-simplekser i $U$ og $A''$ være mengden av alle singulære $n$-simplekser i $V$. Dette fører til

$$S_n(U) = F(A'),\ S_n(V) = F(A''),$$

$$S_n(U \cap V) = F(A' \cap A''),\ S^u_n(X) = F(A' \cup A'').$$

Bemerk at det vil være en naturlig homomorfi

$$h : F(A') \oplus F(A'') \to F(A' \cup A'')$$

gitt ved

$$h(a'_i, a''_j) = a'_i + a''_j$$

hvor $h$ er en epimorfi. På den andre siden så er det en homomorfi

$$g : F(A' \cap A'') \to F(A') \oplus F(A'')$$

gitt ved

$$g(b_i) = (b_i, -b_i).$$

Det følger at $g$ er en monomorfi og $h \circ g = 0$. Anta nå at

$$h(\sum n_i a_i', \sum m_j a_j'') = 0.$$

Dette er det samme som

$$\sum n_i a_i' + \sum m_j a_j'' = 0.$$

Dette kan bare skje for hver ikke-tom $n_i$, hvis $a_i' = a_j''$ for en tilfeldig $j$ og i tillegg $m_j = -n_i$. Alle ikke-tomme koeffisienter $m_j$ må være definert slik. Dette impliserer at alle $a_i'$ er i $A' \cap A''$ og hvis $x = \sum n_i a_i'$, da vil $\sum m_j a_j'' = -x$. Dermed,

$$x \in F(A' \cap A'') \; og \; g(x) = (\sum n_i a_i', \sum m_j a_j'').$$

Dette beviser at kjernen av $h$ er i bildet av $g$. Ved å anvende disse betingelsene til kjede grupper, så gir dette for hver $n$ en kort eksakt følge

$$0 \to S_n(U \cap V) \xrightarrow{g_\#} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h_\#} S_n^u(X) \to 0.$$

Definer et kjede kompleks $S_*(U) \oplus S_*(V)$ ved å sette $(S_*(U) \oplus S_*(V))_n = S_n(U) \oplus S_n(V)$ og la grense operatoren være den vanlige grensen på hver komponent. Da vil den øvre følgen bli en kort eksakt følge av kjede komplekser og grad null kjede funksjoner.

Gitt ved Teorem (3.1) så er det assosiert en lang eksakt følge av homologi grupper,

$$\ldots \xrightarrow{\triangle} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \xrightarrow{h_*} H_n(S_*^u(X)) \xrightarrow{\triangle} H_{n-1}(U \cap V) \to \ldots.$$

Fra definisjonen av kjede komplekser så er det klart at $H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \approx H_n(U) \oplus H_n(V)$, og ved Teorem (3.2) så har man $H_n(S_*^u(X)) \approx H_n(X)$. Ved å anvende disse isomorfiene til den lange eksakte følgen, så får man etablert

*Mayer-Vietoris følgen*

$$\ldots \xrightarrow{\triangle} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(X) \xrightarrow{\triangle} H_{n-1}(U \cap V) \to \ldots.$$

Bemerk at hvis vi definerer ved

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nearrow i & & \searrow k & \\ U \cap V & & & & U \cup V = X \\ & \searrow j & & \nearrow l & \\ & & V & & \end{array}$$

de respektive inklusjon funksjonene, da er $g_*(x) = (i_*(x), -j_*(x))$ og $h_*(y,z) = k_*(y) + l_*(z)$.

Konstruksjonen av Mayer-Vietoris følgen er naturlig i den forstand at hvis $X'$ er et rom og $U'$ og $V'$ er undermengder med Int $U' \cup$ Int $V' = X'$, og $f : X \to X'$ er en funksjon hvor $f(U) \subseteq U'$ og $f(V) \subseteq V'$, da holder kommutativitet i hver rektangel av diagrammet

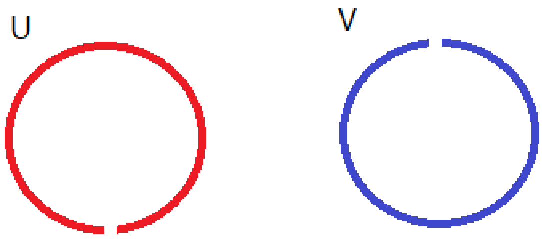
$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \xrightarrow{\triangle} & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_*} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\triangle} & H_{n-1}(U \cap V) & \to \ldots \\ & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \oplus f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\ \ldots \xrightarrow{\triangle'} & H_n(U' \cap V') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(U') \oplus H_n(V') & \xrightarrow{h'_*} & H_n(X') & \xrightarrow{\triangle'} & H_{n-1}(U' \cap V') & \to \ldots \end{array}$$

## 3.4 Anvendelse av Mayer-Vietoris følgen

### 3.4.1 Sirkelen

La oss nå se på et eksempel hvor man bruker Mayer-Vietoris følgen til å finne homologigruppene til en sirkel. La $X = S^1$ og betegn $z$ og $z'$ nord og sørpolene. I tillegg la $x$ og $y$ være punktene på ekvator. La undermengdene være definert som $U = S^1 - \{z'\}$ og $V = S^1 - \{z\}$(se Figur 3.1). Mayer-Vietoris følgen assosiert med denne overdekkingen vil da være

$$0 \to H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\triangle} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(S^1) \to 0.$$




Figur 3.1: $U = S^1 - \{z'\}$ og $V = S^1 - \{z\}$

Det første leddet er null siden $U$ og $V$ er kontraktibel. Dermed er $\triangle$ en monomorfi og $H_1(S^1)$ er isomorf med bildet $\triangle=$ kjernen $g_*$. Vi kan finne hva $H_1(S^1)$ er isomorf med ved å finne kjernen til $g_*$. Man får følgende eksakte trippel $H_1(S^1) \xrightarrow{\triangle} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_0(U) \oplus H_0(V)$. Vi vet at $H_0(U) = \mathbb{Z}$ og $H_0(V) = \mathbb{Z}$ fordi $U$ og $V$ er banevis sammenhengende. $U \cap V \simeq$ to punkter, et element av $H_0(U \cap V) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ kan dermed bli uttrykket på formen $ax + by$, hvor $a$ og $b$ er heltall. $g_*$ er da

$$g_*(ax + by) = (i_*(ax + by), -j_*(ax + by)).$$

Siden $U$ og $V$ er banevis sammenhengende, $i_*(ax + by) = 0$ hvis og bare hvis $a = -b$ og samme for $j_*$. Dermed er kjernen av $g_*$ undergruppen av $H_0(U \cap V)$ som består av alle elementer på formen $ax - ay$. Dette er en uendelig syklisk undergruppe generert av $x - y$. Dermed kan vi konkludere at

$$H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}.$$

Man ser at sirkelen innelukker dermed et én-dimensjonalt hull. Siden $S^1$ er et ikke-tom banevis-sammenhengende rom, så er

$$H_0(S^1) \approx \mathbb{Z}.$$

For enhver $n > 1$, delen av Mayer-Vietoris følgen

$$H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(S^1) \xrightarrow{\triangle} H_{n-1}(U \cap V)$$

har to sluttledd som er lik null. Dermed er $H_n(S^1) = 0$ og dette fullfører utregningen til homologien av $S^1$.

### 3.4.2 Homologien til $S^n$ for hver $n$

Vi kan nå bestemme homologien til $S^n$ for hver $n$ ved å bruke induksjon. Homologien til $S^1$ er

$$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1 \\ \{0\}, & n > 1. \end{cases}$$

La oss finne $H_n$ for hver $n$ av $S^n$. Anta at for $S^n$:

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & , \ p = 0 \\ 0, & , \ 0 < p < n \\ \mathbb{Z}, & , \ p = n. \end{cases}$$

La $S^{n+1} : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$. I tillegg la $U_1$ og $U_2$ være to undermengder som overdekker $S^{n+1}$, $S^{n+1} = U_1 \cup U_2$. Snittet til disse to undermengdene kan deformeres til ekvator av $S^{n+1}$: $U_1 \cap U_2 \simeq S^n$. Dessuten kan disse undermengdene deformeres til et punkt, $U_1 \simeq \mathrm{pt}$ og $U_2 \simeq \mathrm{pt}$.

Vi får følgende Mayer-Vietoris følge:

$$
\begin{array}{llll}
0 \to & H_{n+1}((u_1 \cap u_2) = S^n = 0) \to & H_{n+1}(U_1) = 0 \oplus H_{n+1}(U_2) = 0 \to & H_{n+1}(S^{n+1}) = \mathbb{Z} \\
\cong\to & H_n(S^n) = \mathbb{Z} \to & H_n(U_1) = 0 \oplus H_n(U_2) = 0 \to & H_n(S^{n+1}) = 0 \\
\to & H_{n-1}(S^n) = 0 \to & H_{n-1}(U_1) = 0 \oplus H_{n-1}(U_2) = 0 \to & H_{n-1}(S^{n+1}) = 0 \\
\to \ldots & & & \\
\to & H_1(S^n) = 0 \to & H_1(U_1) = 0 \oplus H_1(U_2) = 0 \to & H_1(S^{n+1}) = 0 \\
\to & H_0(S^n) = \mathbb{Z} \to & H_0(U_1) = \mathbb{Z} \oplus H_0(U_2) = \mathbb{Z} \to & H_0(S^{n+1}) = \mathbb{Z} \to 0.
\end{array}
\tag{3.2}
$$

La oss bevise at $H_1(S^{n+1}) = 0$. Vi har en eksakt følge

$$0 \to H_1(S^{n+1}) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z} \to 0.$$

$$\alpha(H_1(S^{n+1})) \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow H_1(S^{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \\ 0. \end{cases}$$

Siden den er en undergruppe av $\mathbb{Z}$ så må Im($\alpha$)=$k\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ eller være lik null, den trivielle gruppen. Anta at Im$(\alpha) \cong k\mathbb{Z}$, $\quad k \in \mathbb{Z}^+$. Dette fører til

$$\Rightarrow ker(\beta) = k\mathbb{Z},\ Im(\beta) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k.$$

$\Rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ har $\mathbb{Z}_k$ som undergruppe, $\Rightarrow k = 1$. Im$(\beta) = 0$=ker$(\gamma)$. Siden $\gamma$ er på $\Rightarrow \gamma$ er en isomorfi. Dette blir en selvmotsigelse og dermed er $H_1(S^{n+1}) = 0$.

Vi kan konkludere at for enhver $n \geq 0$, så er $H_p(S^n)$ en fri abelsk gruppe med to generatorer, en i dimensjon null og en i dimensjon $n$. Gjennom Mayer-Vietoris følgen så har man dermed funnet en generell måte å klassifisere hullene til $S^n$ i høyere dimensjoner.

# Kapittel 4

# Kohomologi og de Rham-kohomologi

## 4.1 Introduksjon

Ut fra de Rham kohomologi og homologi så kan man telle antall løsninger av kompliserte differensiallikninger. Det er en generell relasjon mellom analyse, algebra og topologi og dette skal vi se nærmere på i dette kapittelet.

De Rham kohomologi er først og fremst en kohomologi teori basert på differensialformer med foreskrevet egenskaper. Kohomologi er en generell betegnelse på en følge av abelske grupper, vanligvis assosiert med et topologisk rom, og ofte definert ut fra et såkalt kokjedekompleks. I tillegg kan noen versjoner av kohomologi oppstå ved å dualisere konstruksjonen av homologi. De viktigste kohomologi teoriene har et produkt, union produktet, som gir de en ring struktur. Som følge av dette har kohomologi vanligvis en sterkere invariant enn homologi (Wikipedia, 2023a).

## 4.2 Singulær kohomologi

Singulær kohomologi er en slik kraftfull invariant i topologi, hvor en grad-kommutativ ring er assosiert med ethvert topologisk rom. For et topologisk rom $X$, definisjonen av singulær kohomologi starter med det singulære kjedekomplekset:

$$\cdots \to C_{i+1} \xrightarrow{\delta_{i+1}} C_i \xrightarrow{\delta_i} C_{i-1} \to \dots$$

Den singulære homologien til $X$ er homologien til dette kjedekomplekset. Videre er $C_i$ den frie abelske gruppen på mengden av alle singulære $n$-simplekser i $X$ og $\delta_i$ er den $i$-te grense homomorfien.

Fastsett nå en abelsk gruppe $A$, og erstatt hver $C_i$ ved dens dualgruppe $C_i^*$ :=Hom$(C_i, A)$ og $\delta_i$ ved dens dualhomomorfi. La oss definere dualhomomorfien. La $\alpha \in \mathrm{Hom}(C_i, A) = C_i^*$ og i tillegg la

$$x \in C_i : (d_i\alpha)(x) := \alpha(\delta_i x)$$

som fører til

$$d_{i-1} : C_{i-1}^* \to C_i^*.$$

Dette gjør at pilene går motsatt vei til det originale kjedekomplekset og man får et kokjedekompleks

$$\cdots \leftarrow C_{i+1}^* \xleftarrow{d_i} C_i^* \xleftarrow{d_{i-1}} C_{i-1}^* \leftarrow \dots$$

For et heltall $i$, den $i$-te *kohomologi gruppen* av $X$ med koeffisienter i $A$ er definert som ker$(d_i)$/bilde$(d_{i-1})$ og er betegnet ved $H(X, A)$. Gruppen $H(X, A)$ er null for negative $i$. Elementene av $C_i^*$ kalles for singulære $i$-kokjeder med koeffisienter i $A$. Elementer av ker$(d_i)$ og bilde$(d_i)$ kalles for kosykler og kogrenser, mens elementer av ker$(d_i)$/bilde$(d_{i-1}) = H(X, A)$ heter kohomologi klasser.

Noen av de formelle egenskapene til kohomologi er bare mindre varianter av egenskapene til homologi. Et eksempel på dette er Mayer-Vietoris følgen som også er et viktig rekneverktøy i kohomologi. For kohomologi så øker grense homomorfien graden. Dette medfører at hvis man har et rom $X$ som er unionen av åpne undermengder $U$ og $V$, så får man den lange eksakte følgen:

$$\cdots \to H^i(X) \to H^i(U) \oplus H^i(V) \to H^i(U \cap V) \to H^{i+1}(X) \to \dots$$

## 4.3 De Rham-kohomologi

De Rham-kohomologi er et verktøy som kan uttrykke grunnleggende topologisk informasjon om glatte mangfoldigheter i en form som er tilpasset regning og en konkret representasjon av kohomologiklasser (Wikipedia, 2022a). På enhver glatt mangfoldighet så vil hver eksakte form være lukket, men det motsatte er nødvendigvis ikke sant. Denne motsigelsen er relatert til eksistensen av mulige "hull" i mangfoldigheten. De Rham-kohomologi grupper omfatter en mengde av topologiske invarianter av glatte mangfoldigheter som kvantifiserer dette forholdet. Spørsmålet om *hver* lukkede form er eksakt avhenger dermed av topologien til definisjonsområdet.

De Rham-komplekset er et kokjedekompleks av differensialformer på en glatt mangfoldighet $M$, med en ytrederivert som differensial:

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \Omega^3(M) \to \dots,$$

hvor $\Omega^0(M)$ er rommet av glatte funksjoner på $M$, $\Omega^1(M)$ er rommet av 1-former ($\cong$ vektorfelt), og så videre. Former som er bildet av andre former under en ytrederivert og i tillegg er konstanten 0 i $\Omega^0(M)$ kalles for eksakte former. Former hvor dens ytrederivert er lik 0 kalles for lukkede former. Forholdet $d^2 = 0$ forteller da at hver eksakte former er lukket. Derimot er ikke lukkede former nødvendigvis eksakt.

Ideen bak de Rham-kohomologi er å definere ekvivalensklasser av lukkede former på en mangfoldighet. En kan klassifisere to lukkede former $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ som kohomolog hvis de avviker ved en eksakt form. Dette betyr at $\alpha - \beta$ er eksakt. Denne klassifikasjonen induserer en ekvivalens relasjon på rommet av lukkede former i $\Omega^k(M)$. En de Rham-kohomologi gruppe $H^k_{dR}(M)$ kan dermed bli definert som mengden av alle ekvivalensklasser, som er mengden av lukkede former i $\Omega^k(M)$ modulo eksakte former:

$$H^p(X) = \{\alpha \in \Omega^p(X) | d\alpha = 0\} / \{\alpha = d\beta | \beta \in \Omega^{p-1}(X)\}.$$

For enhver kompakt mangfoldighet $M$ som består av $m$ usammenhengende komponenter, som selv er sammenhengende, så får man

$$H_d^0 \cong \mathbb{R}^n.$$

Dette kommer fra at enhver glatt funksjon på $M$ med 0 derivert overalt er hver for seg konstant på hver av de sammenhengende komponentene av $M$.

Man kan ofte finne de Rham-kohomologier av en mangfoldighet ved å bruke informasjonen om null homomorfien og en Mayer-Vietoris følge.

## 4.4 Relaterte ideer

De Rham-kohomologi har inspirert flere matematiske ideer og en av disse er hodgeteori. Denne teorien beviser at det er en isomorfi mellom kohomologien som består av harmoniske former og de Rham-kohomologi som består av lukkede former modulo eksakte former. I tillegg kan man bruke homologi og de Rham-kohomologi til å telle lineært uavhengige løsninger til høyere dimensjonale Maxwell's likninger av harmoniske former. Man har følgende forhold:

$$\mathbb{R}^{b_p} \cong H_p(X;\mathbb{R}) \cong H_\alpha^{n-p}(X;\mathbb{R}) \cong H_d^p(X;\mathbb{R}) \tag{4.1}$$

hvor $X$ er en mangfoldighet. $H_p(X;\mathbb{R}) \cong H_\alpha^{n-p}(X;\mathbb{R})$ er Poincaré dualitet og $H_\alpha^{n-p}(X;\mathbb{R}) \cong H_d^p(X;\mathbb{R})$ er Hodge dualitet. Ut fra (4.1) så får man:

$$H_d^p(X) \cong \mathbb{R}^{b_p}$$

$b_p$ er bettitall og teller lineært uavhengige løsninger til Maxwell's likninger av grad $p$. For at dette skal skje så må $X$ være Riemannsk, og i tillegg la $*$ være en Hodge-stjerneoperator:

$$* : \Omega^p(X) \to \Omega^{n-p}(X).$$

For $\alpha \in \Omega^p(X)$ så får man en Maxwell likning i grad $p$:

$$\left\{ \begin{matrix} d\alpha = 0 \\ d * \alpha = 0 \end{matrix} \right\}, \; \alpha \in H(X).$$

I følge hodgeteori så vil løsningsrommet av denne likningen være isomorf med $H^p(X;\mathbb{R})$. Vi kan dermed telle antall løsninger av differensiallikninger uten å vite hvordan de ser ut. Dermed, ved Poincaré dualitet og (4.1) så kan vi telle løsninger av kompliserte differensiallikninger, uten å vite løsningene eksplisitt. Vi trenger kun å vite litt om homologi, topologi og redskaper som Mayer-Vietoris følgen.

Dette er et eksempel på en mer generell ide innen matematikk:

$\{$Løsningsrom av differensiallikninger$\} \cong \{$Kohomologigruppe$\} \cong \{$Homologigruppe$\}$

# Kapittel 5

# Konklusjon

Ut fra den singulære homologi teorien så kom vi frem til definisjonen av homologigrupper og kjede komplekser. Vi så at singulær homologi er en viktig teori innen moderne matematikk. I tillegg ga teorien grunnlaget for utledningen av Mayer-Vietoris følgen.

Mayer-Vietoris følgen er et kraftfullt verktøy i matematikk fordi det kan la oss skille mellom ulike topologiske rom i høyere dimensjoner. Dette kommer fra den matematiske likningen $H_n(X) \neq H_n(Y)$, da vet vi at $X \neq Y$. Dessuten er det kraftfullt fordi det kan la oss regne ut homologigruppene til ulike rom og denne fremgangsmåten er ikke nødvendigvis åpenbar. Mayer-Vietoris følgen gir en mulighet for å regne ut disse homologigruppene.

Et eksempel på dette er forskjellen mellom en 2-dimensjonal sfære og en torus. Vi kan skille disse to geometriske objektene ved å bruke Mayer-Vietoris følgen. Dette verktøyet gir oss muligheten til å regne ut homologigruppene til sfæren og torusen direkte. Ut fra utregningene vil vi komme frem til at homologigruppene til sfæren er

$$H_n(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ 0, & ellers, \end{cases}$$

mens torusen vil være

$$H_n(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \ n = 1 \\ 0, \ ellers. \end{cases}$$

Vi ser at homologigruppene til disse to ulike objektene stemmer med geometrien. Sfæren innelukker et 2-dimensjonalt hull og har en banesammenhengende komponent. Torusen derimot innelukker to uavhengige 1-dimensjonale hull og et 2-dimensjonalt hull og har en banesammenhengende komponent.

Vi har også sett at vi kan bruke homologi som et verktøy i analyse. Ved å bruke homologi eller kohomologi så kan vi finne antall løsninger til Maxwell's likninger, uten å vite løsningene eksplisitt. Dette er et meget viktig redskap i moderne fysikk og geometri.

# Referanser

Vick, J. W. (1994). *Homology Theory-An Introduction to Algebraic Topology* (2.edition). Springer.

Wikipedia. (2022a). De Rham-cohomology. https://en.wikipedia.org/wiki/De_Rham_cohomology.

Wikipedia. (2022b). Singular homology. https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_homology.

Wikipedia. (2023a). Cohomology. https://en.wikipedia.org/wiki/Cohomology.

Wikipedia. (2023b). Homology (mathematics). https://en.wikipedia.org/wiki/Homology_(mathematics).

Wikipedia. (2023c). Mayer-Vietoris sequence. https://en.wikipedia.org/wiki/Mayer-Vietoris_sequence.