

# Ulineær analyse av Brusselatorens dynamiske egenskaper

Masteroppgave

**Inger Lende Sandve**

Institutt for data- og elektroteknikk,  
Det teknisk- naturvitenskapeligefakultet,  
Universitetet i Stavanger  
June 2009



# Forord

Jeg er takknemlig for alle den gode veiledningen og hjelp jeg har fått av veileder Tormod Drengstig. Dine gode spørsmål og tilbakemeldinger har motivert meg gjennom arbeidet.

Videre vil jeg takke Kristin Ytterstad Pettersen for møter og kontakt via mail underveis som har bidratt til innsikt.

Jeg vil også rette en takk til Peter Ruoff for å ha gitt undervisning i reaksjonskinetikk og svar på spørsmål.

Inger Lende Sandve  
Stavanger 15.06.2009



# Sammen drag

Denne rapporten beskriver arbeidet med å analysere Brusselatoren og dens dynamiske egenskaper. Brusselatoren er en autokatalyserende og oscillerende fiktiv kjemisk prosess. Målet har vært å gjennomføre en analyse av Brusselatoren som leder frem til et analytisk uttrykk for perioden til Brusselatorens grensesyklus. Med et slik analytisk uttrykk vil en kunne prediktere hvorvidt en adaptasjon i perioden vil forekomme ved en bestemt endring i forutsetningene.

Beskrivende funksjoners metode er brukt for å beregne en modell som tilnærmer Brusselatorens grensesyklus. Uttrykket for frekvensen  $\omega$  i denne tilnærmingen er deretter brukt til å sette opp et analytisk uttrykk  $T_{pe}$  for perioden i Brusselatorens grensesyklus. Estimat beregnet ut fra det analytiske uttrykket  $T_{pe}$  er blitt sammenlignet både med estimat fra andre rapporterte uttrykk for å beregne perioden i Brusselatorens grensesyklus og periodeverdier funnet ved simuleringer av ulineær Brusselatormodell.

Uttrykket  $T_{pe}$  som tilnærmer perioden i Brusselatorens grensesyklus gir mulighet til å si noe om adaptasjonsegenskapene for grensesyklusens periode. Nytteverdien av uttrykket  $T_{pe}$  er derimot begrenset fordi  $T_{pe}$  viser seg å gi gode periodeestimer kun i et begrenset område.

For å få et bedre estimat for perioden i Brusselatorens grensesyklus er det forsøkt å beregne en utvidet modell også ved hjelp av beskrivende funksjoners metode. Kompleksiteten i beregningene har imidlertid gjort at denne utvidede modellen ikke har latt seg løse.



# Innhold

<b>Forord</b>	<b>i</b>
<b>Sammendrag</b>	<b>iii</b>
<b>Innhold</b>	<b>v</b>
<b>Figurer</b>	<b>ix</b>
<b>Tabeller</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introduksjon</b>	<b>1</b>
1.1 Motivasjon . . . . .	1
1.2 Kjemiske, oscillerende prosesser - Historikk . . . . .	4
1.3 Reaksjonskinetikk . . . . .	4
1.4 Beskrivende funksjoners metode . . . . .	5
1.5 Rapportstruktur . . . . .	7
<b>2 Teori - Brusselatoren</b>	<b>9</b>
2.1 Brusselatoren . . . . .	9
2.2 Invariante sett . . . . .	10
2.3 Likevektspunkt og klassifisering . . . . .	10
2.4 Periodiske løsninger . . . . .	13
2.4.1 Indeksteori . . . . .	13
2.4.2 Bendixons negative kriterium . . . . .	15
2.4.3 Teorem for Brusselatoren . . . . .	16
2.4.4 Resultater - periodiske løsninger . . . . .	17
2.5 Illustrerende eksempler . . . . .	18
2.5.1 Eksempel 1 - Likevektspunktet er et stabilt fokus . . .	19
2.5.2 Eksempel 2 - Likevektspunktet er en stabilt node . . .	21
2.5.3 Eksempel 3 - Likevektspunktet er et ustabilt fokus . .	23
2.5.4 Eksempel 4 - Likevektspunktet er en ustabilt node . .	25
2.5.5 Bifurkasjon-forgrening . . . . .	26
2.6 Koordinattransformasjon . . . . .	27
2.6.1 Transformasjon av likevektspunktet til origo . . . . .	27

2.6.2	Transformasjon til en lukket sløyfe med en ulinearitet.	28
2.6.3	Beregning av $G(s)$ . . . . .	30
2.7	Oppsummering . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Enkel modell</b>	<b>33</b>
3.1	Beskrivende funksjoners metode anvendt på Brusselatoren . .	34
3.2	Løsning ved enkel modell . . . . .	38
3.3	Tolkning av analytisk uttrykk for periode . . . . .	40
3.4	Verifikasjon . . . . .	41
3.4.1	Verifikasjonseksempel 1 . . . . .	44
3.4.2	Verifikasjonseksempel 2 . . . . .	47
3.4.3	Verifikasjonseksempel 3 . . . . .	50
3.4.4	Diskusjon . . . . .	52
3.5	Sammenligning med alternative modeller . . . . .	54
3.5.1	Hes variasjonsmetode . . . . .	54
3.5.2	Periodeestimat av Zhang . . . . .	56
3.6	Konklusjon . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Utvidet modell</b>	<b>59</b>
4.1	Utvidelse av modellen . . . . .	59
4.1.1	Balanse for konstantleddet . . . . .	64
4.1.2	Balanse for den grunnharmoniske . . . . .	64
4.1.3	Balanse for den andre harmoniske . . . . .	64
4.1.4	Totalt ligningssett . . . . .	65
4.2	Kompleksiteten i ligningssettet . . . . .	65
4.2.1	Kompleksitet i 1.ligning . . . . .	66
4.2.2	Kompleksitet i 2.ligning . . . . .	67
4.2.3	Kompleksitet i 3.ligning . . . . .	68
4.2.4	Kompleksitet i 4.ligning . . . . .	68
4.2.5	Kompleksitet i 5.ligning . . . . .	69
4.2.6	Kompleksitet i ligningssettet . . . . .	69
4.2.7	Løse ut $\alpha_1^2$ . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Oppsummering</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>75</b>
	<b>Appendices</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Beregning av <math>f(x)</math> for utvidet modell</b>	<b>81</b>
<b>B</b>	<b>Integraler</b>	<b>87</b>
<b>C</b>	<b>Beregning av <math>\eta_0, \eta_1, \eta_2, \phi_1</math> og <math>\phi_2</math></b>	<b>91</b>



---

D Beregning av $ G(0) $ , $ G(j\omega) $ , $\angle G(j\omega)$ , $ G(j2\omega) $ og $\angle G(j2\omega)$	99
E Beregning av ligninger	101



# Figurer

1.1	Ulike typer adaptasjon . . . . .	1
1.2	Tidsrespons for $x_1$ og $x_2$ med stående svigninger. $a = 1$ og $b = 3$	2
1.3	Retningsdiagram med grensesyklus når $a = 1$ og $b = 3$ . . . . .	3
1.4	Grensesykluser med ulik stabilitet . . . . .	3
1.5	Systemstruktur for å anvende beskrivende funksjoners metode	6
2.1	Klassifisering av likevektspunkt. . . . .	12
2.2	En kurve med indeks lik 1 . . . . .	14
2.3	En kurve med indeks lik 0 . . . . .	14
2.4	Grensesyklus for Brusselatoren og Bendixons kurve . . . . .	16
2.5	Retningsdiagram når $a = 1$ og $b = 1$ . . . . .	19
2.6	Tidsrespons for $x_1$ og $x_2$ når $a = 1$ og $b = 1$ . . . . .	20
2.7	Retningsdiagram når $a = 2$ og $b = 0.5$ . . . . .	21
2.8	Tidsrespons for $x_1$ og $x_2$ når $a = 2$ , $b = 0.5$ . . . . .	22
2.9	Retningsdiagram med grensesyklus når $a = 1$ og $b = 3$ . . . . .	23
2.10	Tidsrespons for $x_1$ og $x_2$ med stående svigninger. $a = 1$ og $b = 3$	24
2.11	Retningsdiagram med grensesyklus når $k_i = 1$ , $a = 1$ og $b = 7$	25
2.12	Tidsrespons for $x_1$ og $x_2$ med stående svigninger. $a = 1$ og $b = 7$	26
2.13	Systemstruktur for å anvende Beskrivende funksjoners metode.	28
3.1	Systemstruktur for å anvende beskrivende funksjoners metode	33
3.2	Predikert og simulert grensesyklus når $k_i = 1$ , $a = 3.3$ , $b = 12$ .	44
3.3	Tidsrespons for $x_1$ og $x_2$ når $a = 3.3$ , $b = 12$ . . . . .	45
3.4	Periode og $k_i$ når temperaturen varierer. $a = 3.3$ , $b = 12$ . . .	46
3.5	Predikert og simulert grensesyklus når $k_i = 1$ , $a = 1$ , $b = 7$ . .	47
3.6	Tidsrespons for $x_1$ og $x_2$ når $a = 1$ , $b = 7$ . . . . .	48
3.7	Periode og $k_i$ når temperaturen varierer. $a = 1$ , $b = 7$ . . . . .	49
3.8	Predikert og simulert grensesyklus når $k_i = 1$ , $a = 1$ , $b = 3$ . .	50
3.9	Tidsrespons for $x_1$ og $x_2$ når $a = 1$ , $b = 3$ . . . . .	51
3.10	Periode og $k_i$ når temperaturen varierer. $a = 1$ , $b = 3$ . . . . .	52
4.1	Systemstruktur for å anvende beskrivende funksjoners metode	59



# Tabeller

3.1	Eksempler, $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$ . . . . .	42
3.2	Sammenligning av periodeestimer beregnet ved hjelp av beskrivende funksjoners metode og Hes variasjonsmetode . . . . .	55
3.3	Sammenligning av periodeestimer beregnet ved hjelp av beskrivende funksjoners metode og metode av Zhang (1982). . . . .	56
4.1	Kompleksiteten i 1.ligning m.h.p. forskjellige variabler. . . . .	67
4.2	Kompleksiteten i 2.ligning m.h.p. forskjellige variabler. . . . .	68
4.3	Kompleksiteten i 3.ligning m.h.p. forskjellige variabler. . . . .	68
4.4	Kompleksiteten i 4.ligning m.h.p. forskjellige variabler . . . . .	69
4.5	Kompleksiteten i 5.ligning m.h.p. forskjellige variabler. . . . .	69
4.6	Oversikt over antall løsninger for hver variabel i ligningene. . . . .	69
4.7	Kompleksiteten i ligning (4.22) og (4.24) der $\alpha_1$ er løst ut . . . . .	70
4.8	Kompleksiteten i ligning (4.22) og (4.26) der $\alpha_1$ er løst ut . . . . .	70
4.9	Kompleksiteten i ligning (4.24) og (4.26) der $\alpha_1$ er løst ut . . . . .	70



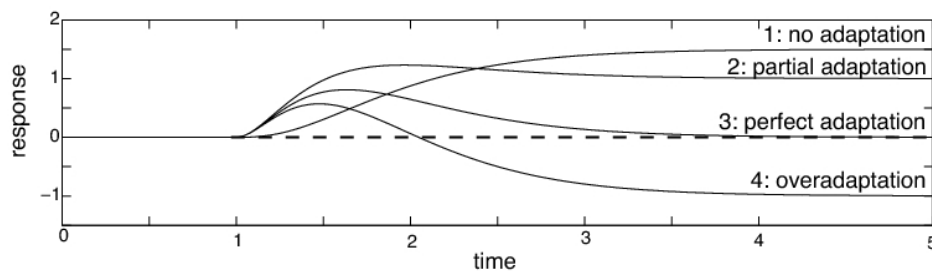
# Kapittel 1

## Introduksjon

I dette kapitlet vil problemstilling i oppgaven bli presentert, og grunnleggende begreper bli beskrevet.

### 1.1 Motivasjon

I møte med vedvarende endringer i omgivelsene har organismer evnen til å adaptere eller tilpasse seg. Det kan være endringer i temperatur, lysforhold eller andre faktorer. Man skiller mellom ingen adaptasjon, delvis adaptasjon, perfekt adaptasjon og overadaptasjon. Figur 1.1 er hentet fra Drengstig *et al.* (2008) og viser tidsresponsen for fire ulike system når et sprang er satt på systemet ved tiden  $t = 1$ . De fire responsene svarer til forskjellige typer adaptasjon.



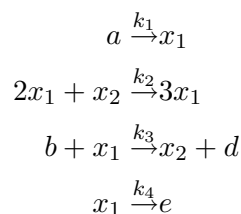
Figur 1.1: Ulike typer adaptasjon

Eksempler på adaptasjon som vi alle kan kjenne igjen er kroppens evne til å regulere temperatur selv om omgivelsestemperaturen varierer. Øyet tilpasser seg også raskt etter lysforholdene. Går en fra et mørkt rom og ut i sollys vil en først oppleve lyset som meget sterkt. Etter kort tid vil øyet tilpasse seg de nye lysforholdene. Pupillen trekker seg sammen og reduserer dermed mengden lys som kommer inn til netthinnen.

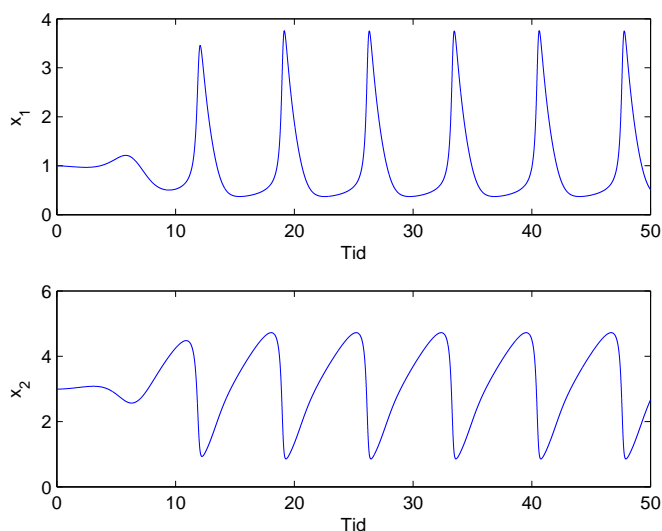
De fleste biokjemiske reaksjoner er svært avhengige av temperatur. Det er derfor interessant at mange organismer har evnen til å holde fysiologiske egenskaper tilnærmet konstant over et større område på temperaturskalaen. Adapsjon i forhold til endring i temperatur er i litteraturen ofte kalt temperaturkompensasjon (Ruoff 1992).

For oscillerende systemer er det interessant å studere om det finnes adapsjon i svingeperiode, det vil si at systemets periode ikke endres selv om omgivelsene endres. En vedvarende endring i omgivelsene kan gi en vedvarende endring i amplitude, men samtidig en nærmest perfekt adapsjon i periode.

I denne oppgaven fokuseres det på Brusselatoren og dens dynamiske egenskaper. Brusselatoren er en autokatalyserende og oscillerende fiktiv kjemisk prosess, som kan beskrives slik:



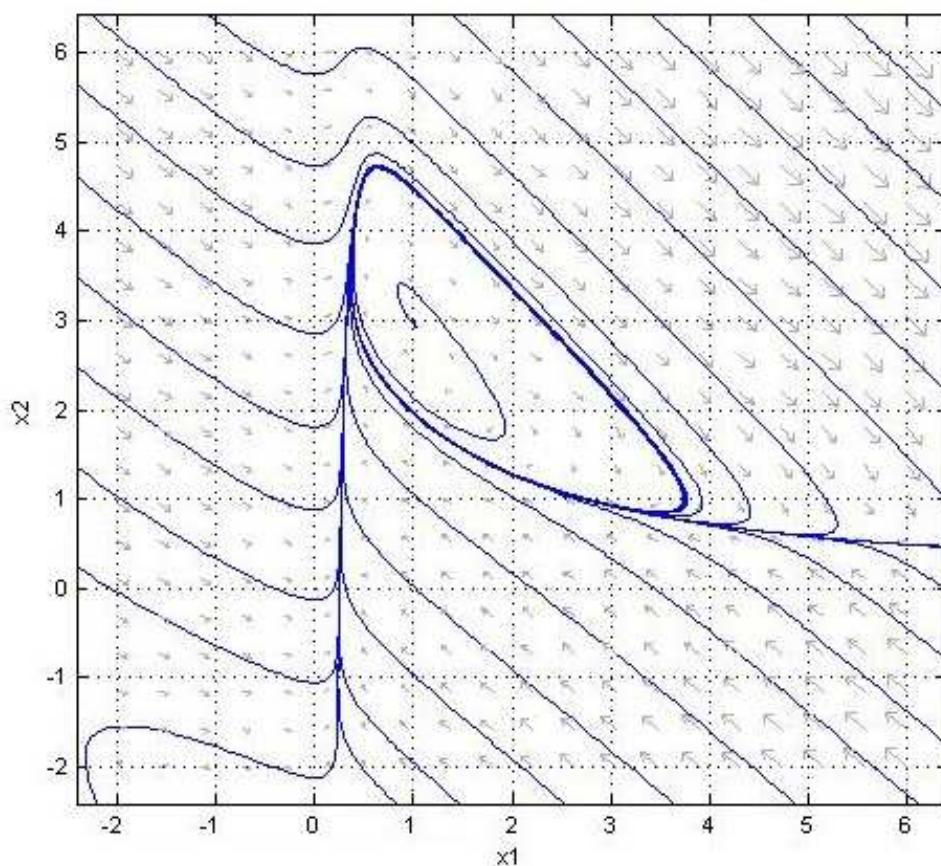
Et eksempel på tidsresponsen for  $x_1$  og  $x_2$  ved et valg av parametere,  $k_i = 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, 4$ ,  $a = 1$  og  $b = 3$ , er vist i figur 1.2.



Figur 1.2: Tidsrespons for  $x_1$  og  $x_2$  når  $k_i = 1$ ,  $a = 1$  og  $b = 3$

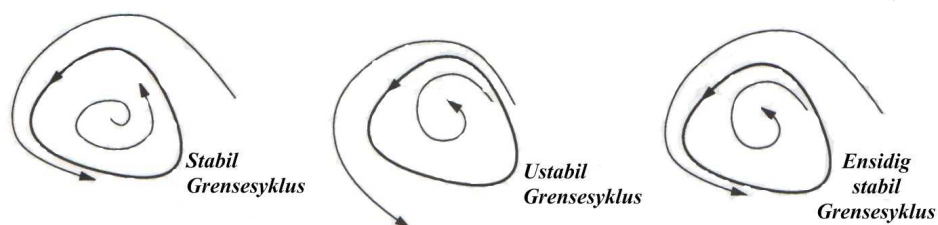
Det er videre mulig å plotte  $x_1$  mot  $x_2$  i faseplanet. For tilfellet i figur 1.2 vil det i faseplanet eksistere en grensesyklus som vist i figur 1.3





Figur 1.3: Retningsdiagram med grensesyklus når  $a = 1$  og  $b = 3$ .

En grensesyklus er en *isolert* lukket løsningskurve hvor det med isolert menes at nærliggende løsningskurver ikke er lukket. De går enten i en spiral mot eller bort fra grensesyklusen. Dersom alle nærliggende løsningskurver trekkes mot grensesyklusen, så kalles den stabil. Ellers er grensesyklusen ustabil eller i spesielle tilfeller ensidig-stabil (Strogatz 1994) se figur 1.4.



Figur 1.4: Grensesykluser med ulik stabilitet (Strogatz 1994)

I dette arbeidet har målet vært å gjennomføre en analyse av Brusselatoren

som leder frem til et analytisk uttrykk for perioden til Brusselatorens grensesyklus. Med et slik analytisk uttrykk vil en kunne prediktere hvorvidt en adaptasjon i perioden vil forekomme ved en bestemt endring i forutsetningene, for eksempel endring i konsentrasjonene  $a$ ,  $b$  eller  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . En vil også lettere kunne finne ut hvilke faktorer i prosessen som bidrar til adaptasjon.

## 1.2 Kjemiske, oscillerende prosesser - Historikk

Mesteparten av stoffet i dette delkapittelet er hentet fra Winfree (1984). Oscillerende kjemiske prosesser har ikke blitt systematisk studert før de siste 60 årene, og det var nærmest ved en tilfeldighet at det hele begynte. Rundt 1950 oppdaget Boris Pavlovich Belousov til sin overraskelse at reaksjonen han studerte, en sur løsning i vann med sitronsyre, oksidasjonsmiddelet natrium-bromat ( $NaBrO_3$ ) og Cerium (Ce(IV) eller Ce(III)) ioner, viste regulære oscillasjoner i redokstilstanden av løsningsen, dvs i konsentrasjonen av Ce(IV) eller Ce(III) ioner. Belousov gjorde grundige studier av det han oppdaget, men lyktes ikke i å få sine resultater publisert. På den tiden trodde det vitenskapelige miljøet at de termodynamiske lovene ikke tillot oscillerende kjemiske reaksjoner. Belousov prøvde igjen å få publisert sine resultater, men gav til slutt opp. I 1961 fikk studenten Anatol M. Zhabotinsky en oppgave av S. E. Schnoll som brakte ham inn på de samme oppdagelser som Belousov. Zhabotinskys grundige studier markerte starten på interessen for oscillerende kjemiske reaksjoner, som blant annet Higgins (1967) har sett nærmere på.

I dag kjenner man flere både fiktive og reelle kjemisk oscillerende prosesser. Brusselatoren er en fiktiv kjemisk oscillerende prosess, og ble første gang introdusert av Prigogine and Lefever (1968). Etterhvert er Brusselatoren blitt en "eksempel-prosess" som er mye brukt i forskning. Brusselatorens egenskaper er studert av mange, blant annet Qin and Zhen (1980), Zhang (1982), Ruoff (1992), Zhang (2007) og Bashkirtseva and Perevalova (2007).

## 1.3 Reaksjonskinetikk

Kjemiske prosesser beskrives vanligvis ved hjelp av støkiometriske ligninger:



der  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  er de kjemiske elementene og  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$  er støkiometriske koeffisienter og  $k$  er en hastighetskonstant som sier noe om hvor raskt reaksjonen går.

Reaksjonshastigheten,  $r$ , for reaksjonen i ligning (1.1) er definert slik:

$$r = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt} \quad (1.2)$$

hvor  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  og  $[D]$  betegner molare konsentrasjoner.

En elementærprosess er en prosess som går i et trinn, og som har maksimalt to molekyler involvert. Dersom en antar at ligning (1.1) er en elementærprosess, kan reaksjonshastigheten i ligning (1.2) skrives:

$$r = k[A]^a[B]^b$$

$k$  er hastighetskonstanten gitt ved Arrhenius ligning:

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}} \quad (1.3)$$

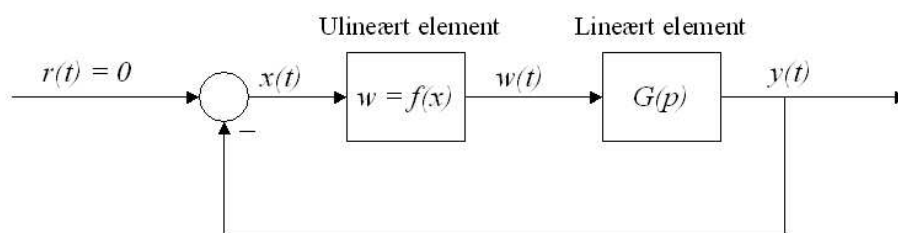
hvor  $T$  er temperaturen i Kelvin,  $A$  er en konstant uavhengig av temperatur,  $R$  er den universelle gasskonstanten og  $E_a$  er aktiveringsenergien som sier hvor sensitiv  $k$  er når man varierer  $T$ . Hastighetskonstanten  $k$  er med andre ord avhengig av temperatur. Van't Hoff's regel sier at ved 10 graders temperaturøkning vil reaksjonshastigheten vanligvis øke med en faktor 2–3.

## 1.4 Beskrivende funksjoners metode

Mye av det som er gjort av analyse og modellvalg er gjort i samarbeid med Pettersen (2009)

I analysen av Brusselatoren er det brukt beskrivende funksjoners metode (Balchen 1992). Dette er en tilnæringsmetode ved hjelp av Fourierrekkeutvikling, og nøyaktigheten i metoden avhenger av hvor mange ledd i rekken som tas med.

For i det hele å kunne anvende beskrivende funksjoners metode må en først kunne sette opp systemet på formen vist i figur 1.5. Den første blokken,  $w = f(x)$ , inneholder alle ulineariteter i systemet, mens den andre blokken,  $G(p)$ , er et lineært element.  $G(p)$  er en transferfunksjon, der variabelen  $p$  betyr at en er i tidsplanet.  $G(s)$  er den Laplacetransformerte av  $G(p)$ .



Figur 1.5: Systemstruktur for å anvende beskrivende funksjoners metode

Beskrivende funksjoners metode bygger på at det må være en harmonisk balanse mellom inngangen til det ulineære elementet,  $x(t)$ , og utgangen fra det lineære elementet,  $y(t)$ . Legg merke til i figur 1.5 at  $x(t) = -y(t)$ .

Utgangen  $w(t)$  fra det ulineære elementet i figur 1.5 består av en uendelig Fourierrekke. Det lineære elementet,  $G(p)$ , fungerer som et lavpassfilter. Dette gir grunn til å anta at de høye frekvensene i Fourierrekken filtreres bort og at en bare trenger å ta hensyn til de laveste frekvensene. Hvor mange frekvenser en skal velge å ta hensyn til for å få gode estimater er imidlertid ikke gitt. Det er ofte forskjellige krav til hvor godt et estimat skal være. Dersom det er tatt hensyn til et gitt antall frekvenser kan det gi gode estimater for en modell og dårlige estimater for andre modeller. Kompleksiteten i beregningen øker imidlertid ved å ta hensyn til flere frekvenser. En antar dermed ofte at utgangen  $y(t)$  fra det lineære elementet, og dermed også inngangen  $x(t)$  til det ulineære elementet (figur 1.5 viser at  $x(t) = -y(t)$ ), bare inneholder grunnfrekvensen.

En generell Fourierrekke vil være:

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos 2\omega t + \beta_2 \sin 2\omega t + \dots$$

eller ekvivalent

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + \alpha_2 \sin(2\omega t + \gamma_2) + \dots \quad (1.4)$$

Det er en ekstra frihetsgrad ved at startpunktet kan velges. Dette gir muligheten for å velge  $\gamma_1 = 0$  slik at ligning (1.4) kan skrives:

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin \omega t + \alpha_2 \sin(2\omega t + \gamma_2) + \dots \quad (1.5)$$

## 1.5 Rapportstruktur

Arbeidet i denne rapporten er tre-delt. Første del er generell teori og analyse av Brusselatoren i kapittel 2. Deretter beregnes en enklest mulig modell for Brusselatoren ved hjelp av beskrivende funksjoners metode i kapittel 3. Til slutt utvides modellen fra kapittel 3 for å få en mer presis modell for Brusselatoren i kapittel 4.

I beregningene i kapittel 3 gjøres antagelsen om at det bare er konstantleddet og grunnfrekvensen i Fourierrekken i ligning (1.5) som ikke filtreres bort i det lineære elementet i figur 1.5. Utgangen  $y(t)$  fra det lineære elementet  $G(p)$  i figur 1.5 er dermed en enkel sinussvigning. Inngangen  $x(t)$  (husk:  $x(t) = -y(t)$ ) til det ulineære elementet i figur 1.5 kan da skrives slik:

$$x(t) = -y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(\omega t) \quad (1.6)$$

I kapittel 2.6 gjøres det en koordinattransformasjon slik at likevektspunktet flyttes til origo. Etter dette gjøres antagelsen at konstantleddet,  $\alpha_0$  i ligning 1.6 må være lik 0. På dette grunnlag antas det i beregningen av modellen for Brusselatoren at inngangen  $x(t)$  til det ulineære elementet i figur 1.5 er gitt ved:

$$x(t) = -y(t) = \alpha \sin(\omega t) \quad (1.7)$$

Modellen beregnet ved hjelp av beskrivende funksjoners metode og med inngangen  $x(t)$  til det ulineære elementet i figur 1.5 gitt i ligning (1.7) kalles i rapporten for den *enkle modellen*.

I beregningene i kapittel 4 utvides modellen. Det vil si at inngangen  $x(t)$  til det ulineære elementet i figur 2.13 har med flere ledd av Fourierrekken enn i ligning (1.7). I beregningene i kapittel 4 antas inngangen  $x(t)$  å være:

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(\omega t) + \alpha_2 \sin(2\omega t + \gamma) \quad (1.8)$$

Modellen beregnet med  $x(t)$  gitt i ligning (1.8) kalles i rapporten for den *utvidede modellen*.



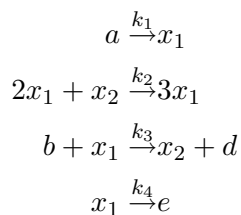
# Kapittel 2

## Teori - Brusselatoren

Dette kapitlet presenterer teori og generell analyse av Brusselatoren, noe som innebærer å finne og klassifisere invariante sett. Likevektspunkt blir arbeidet med i kapittel 2.3 og de periodiske løsningene er tema i kapittel 2.4, hvor også indeksteori og Bendixons negative kriterium presenteres. I kapittel 2.5 er det 4 eksempler som visualiserer resultat fra kapittel 2.3 og 2.4. I kapittel 2.6 gjøres en koordinattransformasjon slik at likevektspunktet blir liggende i origo. Denne transformasjonen gjøres for at de videre beregningene skal bli enklere. Til slutt i kapittel 2.7 er det en kort oppsummering.

### 2.1 Brusselatoren

Mekanismen for Brusselatoren kan beskrives slik:



Hvor  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $x_1$  og  $x_2$  representerer kjemiske elementer. De elementene som er av interesse er  $x_1$  og  $x_2$  som er de autokatalyserende elementene. Differensialligningene for  $x_1$  og  $x_2$  når tidsavhengigheten for enkelhetsskyld er fjernet er gitt ved:

$$\dot{x}_1 = ak_1 + k_2x_1^2x_2 - b \cdot k_3x_1 - k_4x_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = -k_2x_1^2x_2 + b \cdot k_3x_1 = f_2(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

Konsentrasjonene  $a$  og  $b$  i ligningene (2.1) og (2.2) antas å være konstante og større enn 0. Hastighetskonstantene  $k_i \forall i = 1, \dots, 4$  er også større enn 0.

## 2.2 Invariante sett

Et sett  $M$  sies å være et invariant sett med hensyn på  $\dot{x} = f(x)$  dersom (Khalil 2002):

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \in \mathbb{R}$$

Det vil si at om en løsning tilhører  $M$  ved et tidspunkt, så vil løsningen tilhøre  $M$  for all fremtid og fortid. Et sett  $M$  sies å være et positivt invariant sett med hensyn på  $\dot{x} = f(x)$  dersom:

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq 0$$

Likevektspunkt (kapittel 2.3) og periodiske løsninger (kapittel 2.4) er i det minste positivt invariante sett.

## 2.3 Likevektspunkt og klassifisering

For å finne eventuelle likevektspunkt for Brusselatormodellen i ligningene (2.1) og (2.2) løses ligningene:

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \tag{2.3}$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0 \tag{2.4}$$

hvor  $f_1(x_1, x_2)$  og  $f_2(x_1, x_2)$  er definert i henholdsvis ligning (2.1) og ligning (2.2).

Ligningssettet (2.3) og (2.4) gir kun en løsning for likevektspunktet, nemlig:

$$x_1^* = a \frac{k_1}{k_4} \tag{2.5}$$

$$x_2^* = \frac{b k_3 k_4}{a k_1 k_2} \tag{2.6}$$

Legg merke til at Brusselatorens likevektspunkt  $(x_1^*, x_2^*)$  er avhengig av både  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $a$ , og  $b$ . Siden alle disse parameterne er positive vil likevektspunktet alltid være lokalisert i første kvadrant.

For å klassifisere likevektspunktet og dermed kunne si noe om systemets oppførsel lokalt om likevektspunktet må den ulineære modellen gitt ved ligningene (2.1) og (2.2) lineariseres omkring arbeidspunktet  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ . Taylorrekkeutvikling gir:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x$$



hvor  $\Delta x = x - x^*$ , og  $A$  er Jakobimatrisen:

$$A = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x^*} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x^*} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x^*} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bk_3 - k_4 & a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} \\ -bk_3 & -a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Det lineære systemet kan da skrives slik:

$$\Delta \dot{x}_1 = (bk_3 - k_4)\Delta x_1 + a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} \Delta x_2 \quad (2.8)$$

$$\Delta \dot{x}_2 = -bk_3 \Delta x_1 - a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} \Delta x_2 \quad (2.9)$$

Det lineære systemets egenverdier finner man ved å løse den karakteristiske ligningen:

$$\lambda^2 - \left( bk_3 - k_4 - a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} \right) \lambda + a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4} = 0$$

som også kan skrives på formen:

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \quad (2.10)$$

hvor  $\text{Tr}(A)$  (eng: trace) er summen av diagonalelementene i matrisen  $A$  og  $\det(A)$  er determinanten til matrisen  $A$ .

Løsning av annengradsligningen (2.10) gir det lineære systemets egenverdier,  $\lambda$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{\text{Tr}^2(A) - 4 \det(A)}}{2} \quad (2.11)$$

Når ingen av egenverdiene ligger på den imaginære akse, d.v.s.  $\Re(\lambda_{1,2}) \neq 0$ , kalles ofte likevektspunktet for *hyperbolsk*. Hartman-Grobman teoremet (Strogatz 1994) sier at det lokale faseplanet i og nær et hyperbolsk likevektspunkt for et ulineært system er topologisk ekvivalent til faseplanet i og lokalt rundt likevektspunktet av det lineariserte systemet. Ved hjelp av det lineariserte systemet kan man altså si noe om oppførselen i og nær likevektspunktet for det ulineære systemet.

Fra ligning (2.11) ser man at det er to viktige størrelser som inngår i uttrykket for  $\lambda_{1,2}$ :

$$\det(A) = a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4} \quad (2.12)$$

$$\text{Tr}(A) = bk_3 - k_4 - a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} \quad (2.13)$$

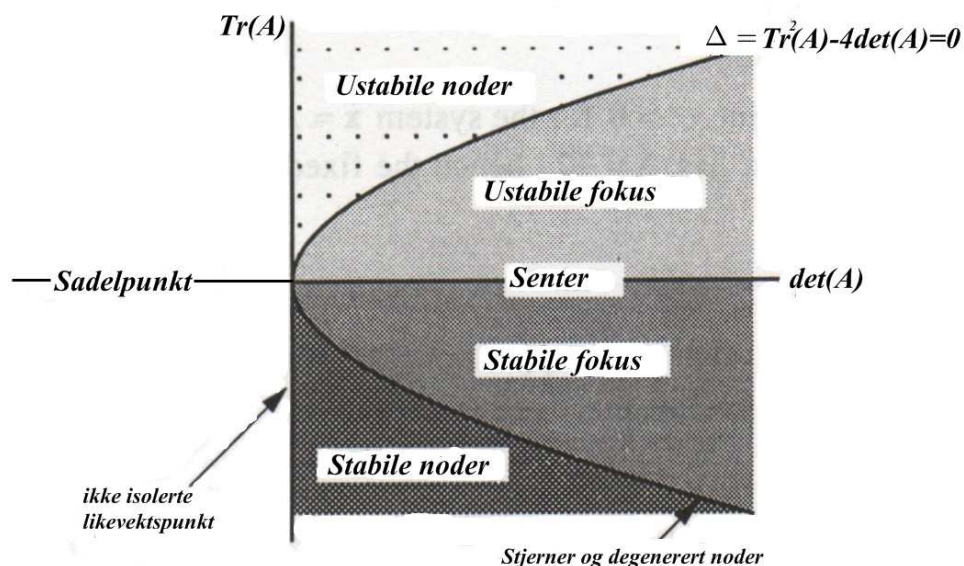
som igjen benyttes til å definere

$$\Delta = \text{Tr}^2(A) - 4 \det(A) \quad (2.14)$$

$\Delta$  er størrelsen under rottegnet i ligning (2.11),  $\Delta > 0$  gir to reelle egenverdier mens  $\Delta < 0$  gir to komplekskonjugerte egenverdier. Ligning (2.11) kan dermed omformuleres slik:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (2.15)$$

For å klassifisere likevektspunktet benyttes  $\text{Tr}(A)$ ,  $\det(A)$  og  $\Delta$ . Figur 2.1 er hentet fra Strogatz (1994) og oppsummerer hvordan likevektspunktet endres når  $\text{Tr}(A)$ ,  $\det(A)$  og  $\Delta$  endres.



Figur 2.1: Klassifisering av likevektspunkt.

Spesialtilfellene i figur 2.1 med ikke isolerte likevektspunkt, senter, stjerne noder og degenererte noder vil ikke bli viet oppmerksomhet i denne rapporten annet enn å henvise til mer stoff om emnet i Strogatz (1994)

Fra ligning (2.12), og det faktum at  $a > 0$ ,  $b > 0$  og  $k_i > 0 \forall i = 1, \dots, 4$ , er det gitt at  $\det(A) > 0$ . Likevektspunktet  $(x_1^*, x_2^*)$  (Ligning (2.5) og (2.6)) for Brusselatoren i (2.1) og (2.2) kan dermed aldri være et sadelpunkt.

Brusselatorens likevektspunkt  $(a \frac{k_1}{k_4}, \frac{b}{a} \frac{k_3 k_4}{k_1 k_2})$  er et:

- Eksponensielt **stabilt** likevektspunkt dersom  $\text{Tr}(A) < 0$

- **Ustabil** likevektspunkt dersom  $\text{Tr}(A) > 0$

For å få  $\text{Tr}(A) < 0$ , og dermed et eksponensielt stabilt likevektspunkt må:

$$b < \frac{k_4}{k_3} + a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_3 k_4^2} \quad (2.16)$$

Uavhengig av om likevektspunktet er stabilt eller ikke benyttes ligning (2.15) til å klassifisere likevektspunktet som:

- **Fokuspunkt** dersom  $\Delta < 0$  i ligning (2.14). Fra ligning (2.15) ser en at  $\Delta < 0$  gir komplekskonjugerte egenverdier  $\lambda_{1,2}$ .
- **Nodepunkt** dersom  $\Delta > 0$  i ligning (2.14). Fra ligning (2.15) ser en at  $\Delta > 0$  gir to reelle egenverdier,  $\lambda_{1,2}$ .

Visualisering med eksempler av de forskjellige typene likevektspunkt (stabil node, ustabil node, stabilt fokus og ustabil fokus) finnes i kapittel 2.5.

## 2.4 Periodiske løsninger

I dette kapittelet ser en på om det eksisterer invariante sett for Brusselatoren i ligning (2.1) og (2.2) i form av periodiske løsninger. Hensikten er å identifisere for hvilke tilfeller det kan eksistere en periodisk løsning og for hvilke tilfeller det ikke kan eksistere noen periodisk løsning. For å gjøre denne analysen benyttes indeksteori og Bendixon negative kriterium.

### 2.4.1 Indeksteori

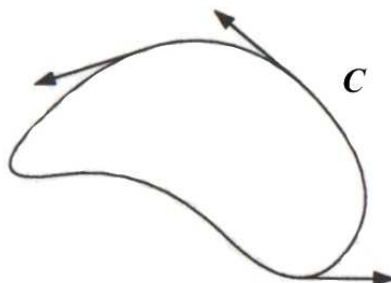
Mesteparten av stoffet i dette kapittelet er hentet fra (Strogatz 1994)

Indeksen  $I_c$  til en lukket kurve  $C$  er et heltall som er et mål for vridningen av retningsfeltet på  $C$ . Indeksen gir også informasjon om eventuelle likevektspunkt som ligger innenfor kurven.

Anta et glatt retningsfelt  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\mathbf{z})$  i faseplanet. Tenk så en lukket kurve  $C$  som blir lagt oppå retningsfeltet. Denne kurven trenger ikke være en løsningskurve. Videre antas det at kurven  $C$  ikke krysser seg selv eller går gjennom noen likevektspunkt på retningsfeltet. For hvert punkt på  $C$  er det da en retningsvektor i faseplanet.

Indeksen  $I_c$  til kurven  $C$  er lik antall vridninger retningsvektoren har mot klokken når en følger rundt  $C$  en runde mot klokken. At en kurve  $C$  har  $I_c = 1$  vil altså si at om en følger kurven  $C$  en runde mot klokken, så går

samtidig retningsvektoren en runde mot klokken, se figur 2.2.



Figur 2.2: En kurve med indeks lik 1

Dersom eksempelvis  $I_c = -2$ , betyr det at retningsvektoren roterer to runder med klokken når en følger kurven  $C$  en runde mot klokken.



Figur 2.3: En kurve med indeks lik 0

Kurven i figur 2.3 har indeks lik 0. Retningsvektoren roterer ikke når en følger kurven rundt en runde mot klokken.

Noen viktige egenskaper for indeks:

1. Anta at kurven  $C$  kan kontinuert omformes til kurven  $C'$  uten å gå gjennom noen likevektspunkt. Da er  $I_c = I_{c'}$ .
2. Dersom kurven  $C$  ikke omslutter noen likevektspunkt, så er  $I_c = 0$ .
3. Dersom en snur alle pilene i retningsdiagrammet ved å forandre  $t \rightarrow -t$ , så er indeksen uforandret.
4. En lukket kurve  $\hat{C}$  som er en løsningskurve for et system har  $I_{\hat{C}} = 1$ .

Tilsvarende som for indeksen  $I_c$  til en kurve, finnes indeks  $I_{z^*}$  for et likevektspunkt  $z^*$ . Indeksen  $I_{z^*}$  for et likevektspunkt  $z^*$  er lik indeksen til enhver kurve som omslutter dette likevektspunktet og ingen andre likevektspunkt.

Både for et nodepunkt og et fokuspunkt er indeksen  $I = 1$ . Fra punkt 3 over er det gitt at det ikke har noe å si om nodepunktet eller fokuspunktet er stabilt eller ustabil. Det svarer til å snu alle pilene i retningsdiagrammet ved å forandre  $t \rightarrow -t$ . For et sadelpunkt er indeksen  $I = -1$ .

**Indeks teoremet 2.4.1** *Dersom en lukket kurve  $C$  omringer  $n$  isolerte likevekts-punkt,  $\mathbf{z}_1^*, \dots, \mathbf{z}_n^*$ , så er:*

$$I_c = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

hvor  $I_k$  er indeksen til  $\mathbf{z}_k^*$ , for  $k = 1, \dots, n$ .

### 2.4.2 Bendixons negative kriterium

Bendixons negative kriterium (Glansdorff and Prigogine 1971) sier at enhver periodisk løsning er nødt til å krysse kurven

$$\frac{\partial h_X}{\partial X} + \frac{\partial h_Y}{\partial Y} = 0 \quad (2.17)$$

hvor

$$h_X = \frac{dX}{dt}$$

$$h_Y = \frac{dY}{dt}$$

For Brusselator modellen gitt i ligning (2.1) og (2.2) betyr det at dersom det eksisterer en periodisk løsning, så må den krysse kurven

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad (2.18)$$

hvor  $f_1(x_1, x_2)$  og  $f_2(x_1, x_2)$  er gitt i henholdsvis ligning (2.1) og (2.2).

Beregning av  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$  og  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  gir:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2k_2 x_1 x_2 - bk_3 - k_4$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -k_2 x_1^2$$

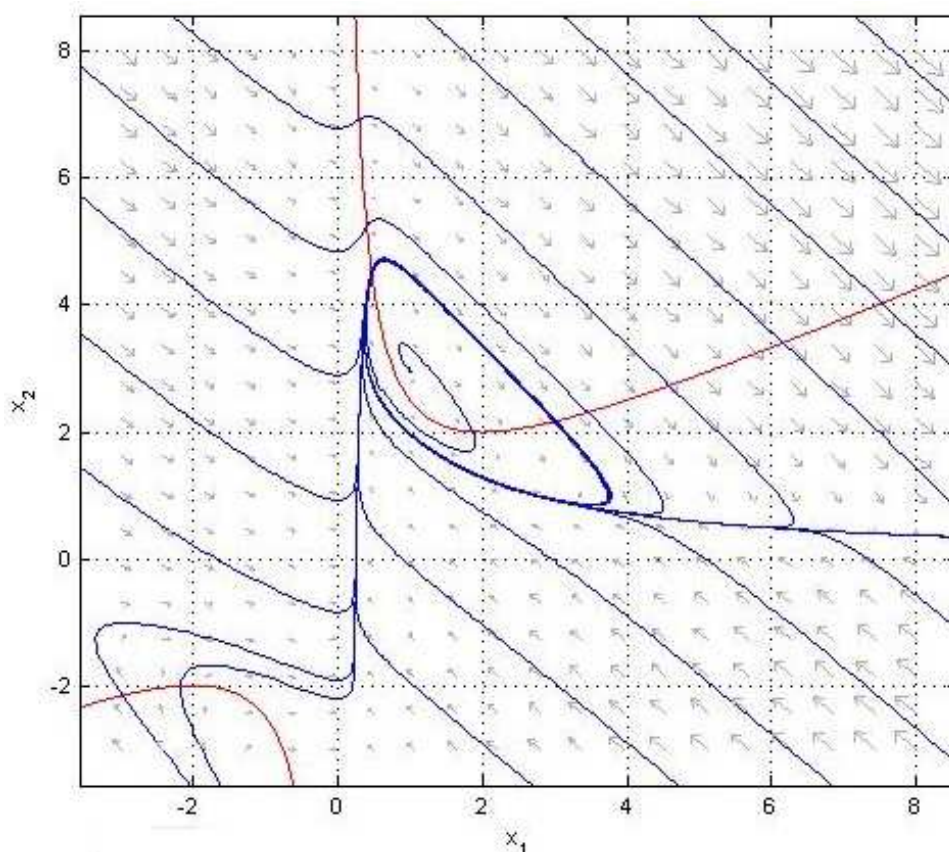
som innsatt i ligning (2.18) gir kurven:

$$2k_2 x_1 x_2 - bk_3 - k_4 - k_2 x_1^2 = 0$$

Løst med hensyn på for eksempel  $x_2$  gir:

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{bk_3 + k_4}{2k_2} \frac{1}{x_1} \quad (2.19)$$

Et eksempel på kurven gitt i ligning (2.19) ved et valg av parametere,  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$ ,  $a = 1$  og  $b = 3$  er vist i figur 2.4.



Figur 2.4: Grensesyklus for Brusselatoren og kurven gitt i ligning (2.19) når  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$ ,  $a = 1$  og  $b = 3$ .

### 2.4.3 Teorem for Brusselatoren

I Qin and Zhen (1980) blir det bevist eksistens av en stabil grensesyklus for Brusselatoren under gitte betingelser. Følgende teorem blir bevist:

**Teorem 2.4.1** *Systemet gitt ved:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - (1 + b)x + x^2y \\ \dot{y} &= bx - x^2y\end{aligned}$$

hvor  $a > 0$  og  $b > 0$  har en unik grensesyklus som er globalt periodisk asymptotisk stabil under forutsetningen  $b > 1 + a^2$ . I tilfellet hvor  $b \leq 1 + a^2$ , så er

det eneste singulære punktet  $(a, \frac{b}{a})$  globalt asymptotisk stabilt. Det eksisterer da ingen grensesyklus.

I teorem 2.4.1 er  $k_i \forall i = 1, \dots, 4$ . Ellers er systemet det samme som i ligning (2.1) og (2.2).

Legg merke til at når  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$  blir betingelsen i ligning (2.16) for å få  $\text{Tr}(A) < 0$ , og dermed et strabilt likevektspunkt, redusert til  $b < 1 + a^2$ . Betingelsene  $b > 1 + a^2$  og  $b \leq 1 + a^2$  i teorem 2.4.1 kan altså erstattes med henholdsvis  $\text{Tr}(A) > 0$  og  $\text{Tr}(A) \leq 0$ . Dette samsvarer med klassifiseringen av likevektspunktet diskutert i kapittel 2.3.

#### 2.4.4 Resultater - periodiske løsninger

**Proposisjon 1:** Dersom det finnes en periodisk løsning, vil den omslutte likevektspunktet  $(x_1^*, x_2^*) = \left(a \frac{k_1}{k_4}, \frac{b}{a} \frac{k_3 k_4}{k_1 k_2}\right)$ .

**Bevis:** Indeks teoremet.

**Proposition 2:** Dersom det eksisterer en periodisk løsning, vil den i faseplanet krysse kurven gitt i ligning (2.19), og gjengitt i ligning (2.20):

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{bk_3 + k_4}{2k_2} \frac{1}{x_1} \quad (2.20)$$

**Bevis:** Bendixsons negative kriterium.

En periodisk løsning må krysse kurven i ligning (2.20) minst 2 ganger. Kurven i ligning (2.20) er en hyperbel, som ligger i første og tredje kvadrant i faseplanet. Siden  $x_1$  og  $x_2$  er kjemiske størrelser, og dermed ikke kan ha verdi mindre enn 0, så er det den delen av kurven i ligning (2.20) som ligger i 1.kvadrant som er av interesse, se figur 2.4.

Teorem 2.4.1 sammen med proposisjon 1 og proposisjon 2 gir følgende:

**Proposition 3:**

- For  $k_i = 1$  og  $b \leq 1 + a^2$  har Brusselatoren et globalt asymptotisk stabilt likevektspunkt  $(a, \frac{b}{a})$ .
- For  $k_i = 1$  og  $b > 1 + a^2$  har Brusselatoren en unik globalt asymptotisk stabil grensesyklus i første kvadrant som krysser kurven gitt i ligning (2.20) og som omslutter det nå ustabile likevektspunktet  $(a, \frac{b}{a})$ .

## 2.5 Illustrerende eksempler

I dette kapitlet blir de fire forskjellige typene likevektspunkt, *i*) stabilt fokus, *ii*) stabil node, *iii*) ustabilt fokus og *iv*) ustabil node, tidligere diskutert i kapittel 2.3 visualisert gjennom fire eksempler. I de to tilfellene hvor likevektspunktet er ustabilt er det også en grensesyklus. Disse to eksemplene med grensesykluser visualiserer også at grensesyklusen er stabil, ligger i første kvadrant og hvordan den er i forhold til likevektspunktet  $(a, \frac{b}{a})$ . I hvert av de fire eksempler er det en figur med retningsdiagram og en figur med tidsrespons for  $x_1$  og  $x_2$ . Felles for alle eksemplene er at  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$ . Det gjør at uttrykket for  $\det(A)$  i ligning (2.12) og uttrykket for  $\text{Tr}(A)$  i ligning (2.13) reduseres til:

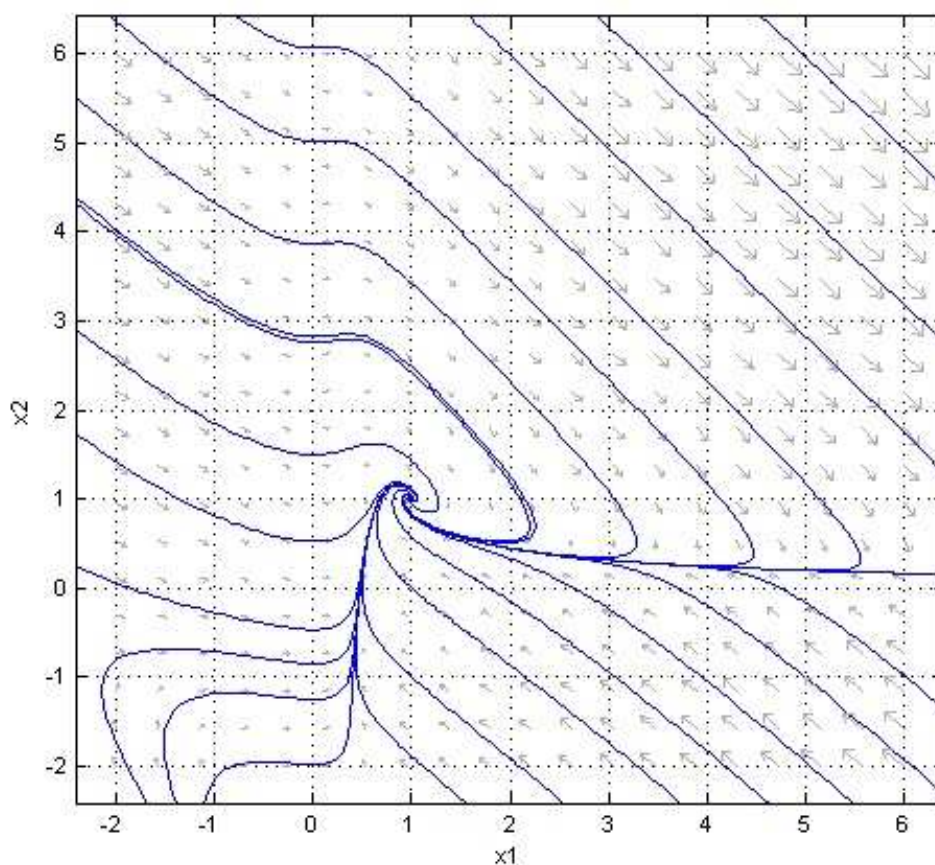
$$\det(A) = a^2 \tag{2.21}$$

$$\text{Tr}(A) = b - 1 - a^2 \tag{2.22}$$



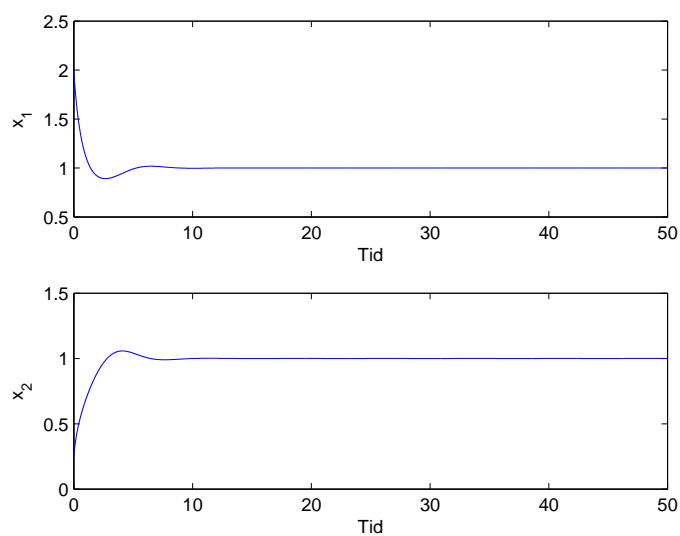
### 2.5.1 Eksempel 1 - Likevektspunktet er et stabilt fokus

I dette eksempelet er  $a = 1$  og  $b = 1$ . Det gir  $\text{Tr}(A) < 0$  fra ligning (2.22) og  $\Delta < 0$  fra ligning (2.14). Videre betyr det at likevektspunktet  $(a, \frac{b}{a}) = (1, 1)$  er et stabilt fokuspunkt.



Figur 2.5: Retningsdiagram når  $a = 1$  og  $b = 1$ .

I retningsdiagrammet i figur 2.5 kan en se at likevektspunktet er et fokuspunkt siden løsningskurvene svinger i en spiral inn mot likevektspunktet. Fra pilene i retningsdiagrammet er det også tydelig å se at likevektspunktet er stabilt siden pilene følger løsningskurvene inn mot likevektspunktet.

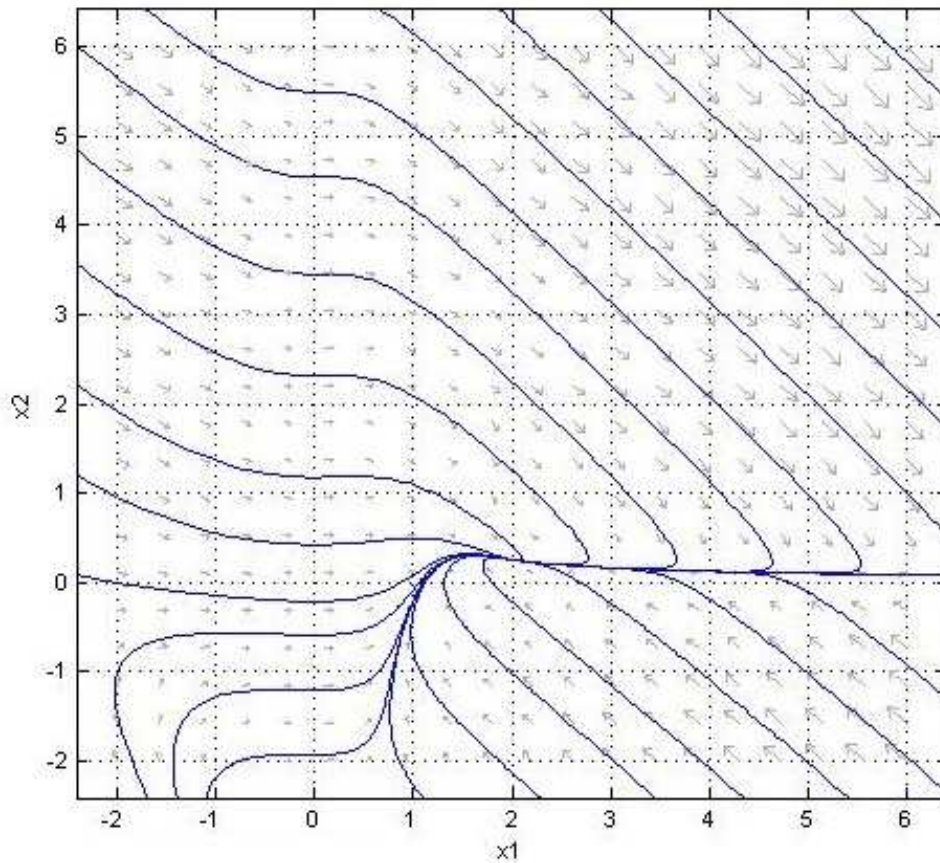


Figur 2.6: Tidsrespons for  $x_1$  og  $x_2$  når  $a = 1$  og  $b = 1$ .

Tidsresponsen for  $x_1$  og  $x_2$  i figur 2.6 går mot likevekt ( $x_1 = 1$ ) og ( $x_2 = 1$ ). Det tyder på at likevektspunktet er stabilt. I innsvigningsforløpet kan en se antydninger til dempede svigninger, det tyder på at likevektspunktet er et fokuspunkt.

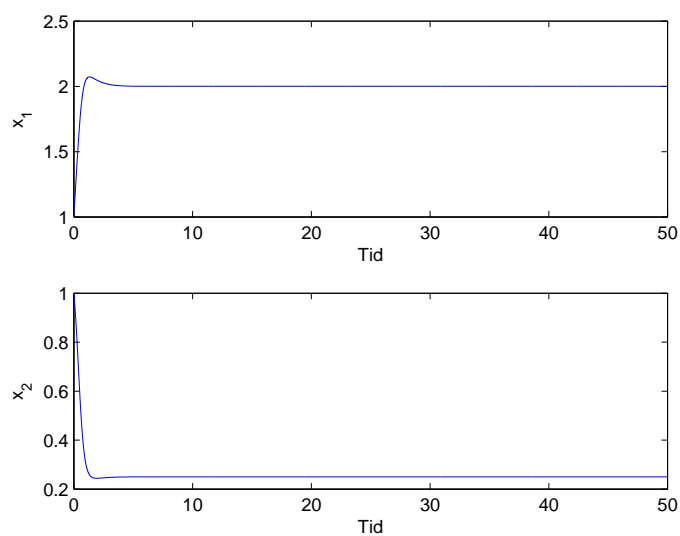
### 2.5.2 Eksempel 2 - Likevektspunktet er en stabilt node

I dette eksempelet er  $a = 2$  og  $b = 0.5$ . Det gir  $\text{Tr}(A) < 0$  fra ligning (2.22) og  $\Delta > 0$  fra ligning (2.14). Videre betyr det at likevektspunktet  $(a, \frac{b}{a}) = (2, 0.25)$ , er en stabilt node.



Figur 2.7: Retningsdiagram når  $a = 2$  og  $b = 0.5$ .

I retningsdiagrammet i figur 2.7, ser en igjen at likevektspunktet er stabilt. Pilene følger løsningskurvene inn mot likevektspunktet. I dette tilfellet er likevektspunktet en node, og det ser en ved at løsningskurvene *ikke* svinger seg i spiral inn mot likevektspunktet.

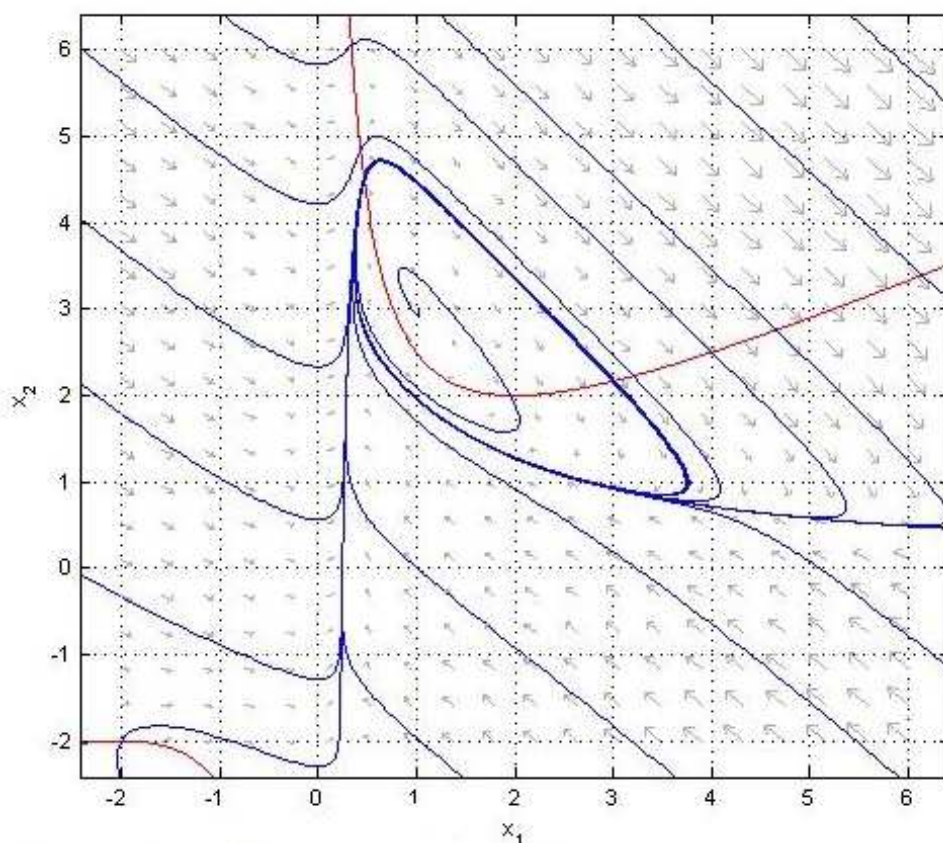


Figur 2.8: Tidsrespons for  $x_1$  og  $x_2$  når  $a = 2$ ,  $b = 0.5$ .

Fra tidsresponsen for  $x_1$  og  $x_2$  i figur 2.8 ser en at likevektspunktet er en stabil node. Tidsresponsen går mot likevekt ( $x_1 = 2$ ) og ( $x_2 = 0.25$ ), men i motsetning til i figur 2.6 er det ingen dempede svigninger i innsvigningsforløpet.

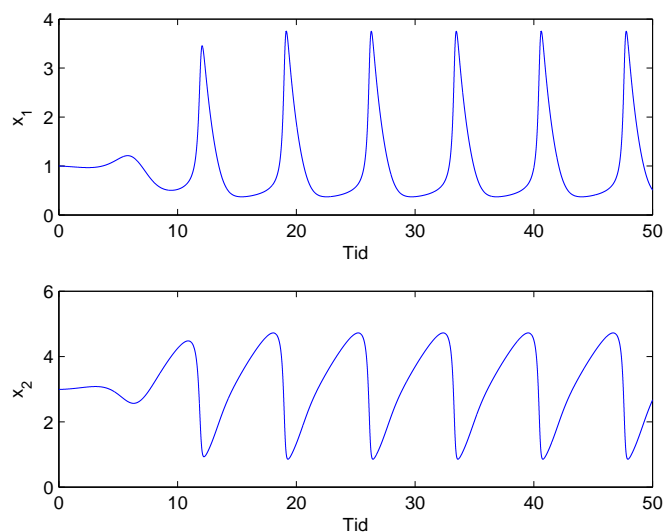
### 2.5.3 Eksempel 3 - Likevektspunktet er et ustabil fokus

I dette eksempelet er  $a = 1$  og  $b = 3$ . Det gir  $\text{Tr}(A) > 0$  fra ligning (2.22) og  $\Delta < 0$  fra ligning (2.14). Det betyr videre at likevektspunktet,  $(a, \frac{b}{a}) = (1, 3)$ , er et ustabil fokuspunkt.



Figur 2.9: Retningsdiagram med grensesyklus og kurven gitt i ligning (2.19) når  $a = 1$  og  $b = 3$ .

I retningsdiagrammet i figur 2.9 ser en at likevektspunktet er ustabil. Pilene følger løsningskurvene bort fra likevektspunktet og mot grensesyklusen. Grensesyklusen er derimot stabil, og trekker til seg løsningskurvene både fra utsiden og innsiden. Fra retningsdiagrammet kan en se at likevektspunktet er et fokus ved at løsningskurvene snurrer som en spiral bort fra likevektspunktet.



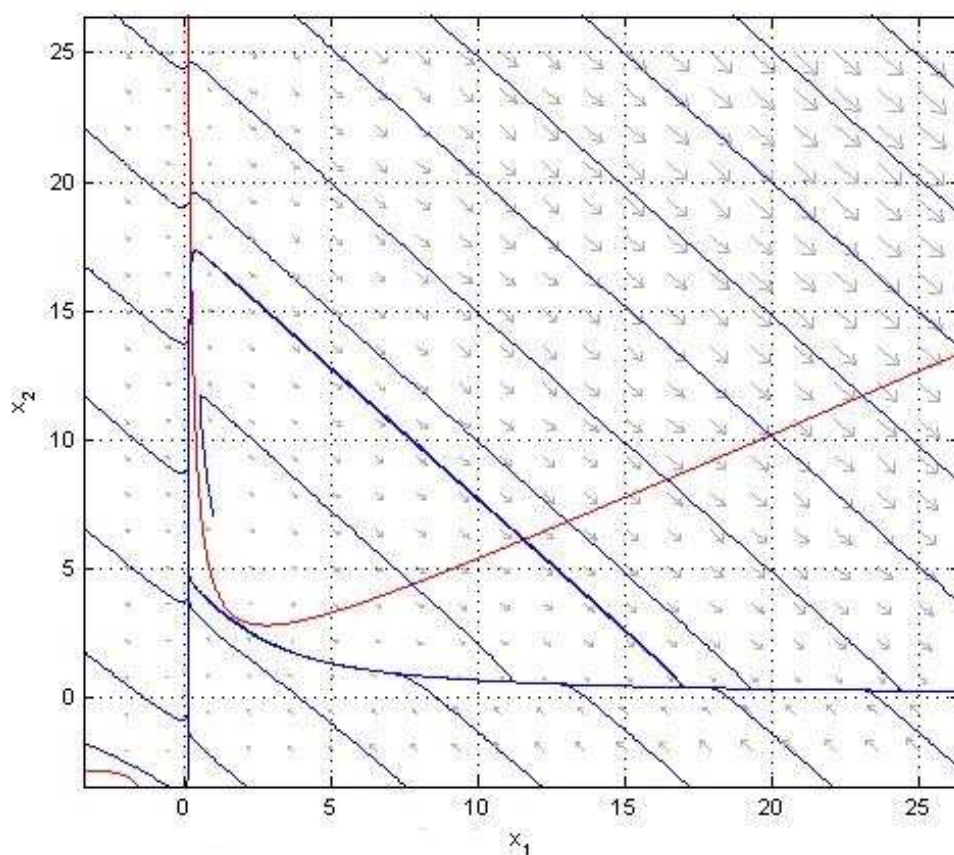
Figur 2.10: Tidsrespons for  $x_1$  og  $x_2$  med stående svigninger.  $a = 1$  og  $b = 3$ . Startpunktet er  $(1, 2.99)$ . Dersom startpunktet hadde vært lik likevektspunktet  $(1, 3)$  ville  $x_1$  og  $x_2$  forblitt i denne tilstanden.

Fra tidsresponsen for  $x_1$  og  $x_2$  i figur 2.9 ser en at likevektspunktet ikke er stabilt. Selv om en begynner nær likevektspunktet (startpunkt  $(1, 2.99)$ ) går ikke tidsresponsen inn i likevekt. Tidsresponsen går derimot inn i stående svigninger, noe som tyder på at det i faseplanet er en grensesyklus som i alle fall er stabil fra innsiden. For å også kunne anta stabilitet fra utsiden av grensesyklusen ut fra tidsresponsen til  $x_1$  og  $x_2$  må en se på tidsresponsen når en har et startpunkt utenfor grensesyklusen. Dersom tidsresponsen også da går inn i de samme stående svigningene, tyder det på at grensesyklusen er stabil også fra utsiden. I dette eksempelet viser retningsdiagrammet i figur 2.9 at grensesyklusen er stabil både fra innsiden og utsiden.



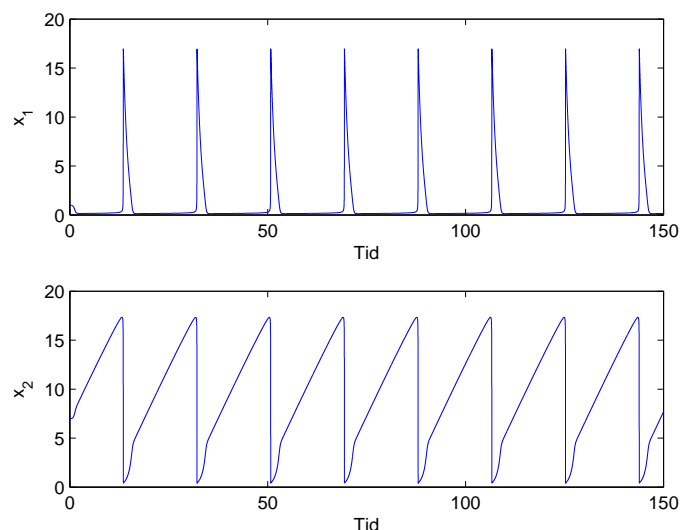
### 2.5.4 Eksempel 4 - Likevektspunktet er en ustabil node

I dette eksempelet er  $a = 1$  og  $b = 7$ . Det gir  $\text{Tr}(A) > 0$  fra ligning (2.22) og  $\Delta > 0$  fra ligning (2.14). Det betyr videre at likevektspunktet,  $(a, \frac{b}{a}) = (1, 7)$ , er et ustabil nodepunkt.



Figur 2.11: Retningsdiagram med grensesyklus og kurven gitt i ligning (2.19) når  $k_i = 1$ ,  $a = 1$  og  $b = 7$ . Merk at aksene på retningsdiagrammet i figur 2.11 er endret i forhold til retningsdiagrammene i figurene 2.5, 2.7 og 2.9. Det er for å få med hele grensesyklusen i figur 2.11.

Fra retningsdiagrammet i figur 2.11 ser en at likevektspunktet er ustabil. Pilene følger løsningskurvene bort fra likevektspunktet,  $(a, \frac{b}{a}) = (1, 7)$  og mot grensesyklusen som er stabil. Grensesyklusen trekker til seg løsningskurvene både fra utsiden og innsiden. Løsningskurvene snurrer seg *ikke* i en spiral bort fra likevektspunktet, det er fordi likevektspunktet er en node.



Figur 2.12: Tidsrespons for  $x_1$  og  $x_2$  med stående svigninger, hvor  $a = 1$  og  $b = 7$ . Startpunktet  $(1, 6.99)$  er som i figur 2.10 nært likevektspunktet  $(1, 7)$ . Merk at aksene i figur 2.12 er endret i forhold til tidresponsene i figur 2.6, 2.8 og 2.10.

Tidsresponsen for  $x_1$  og  $x_2$  i figur 2.12 tyder på at likevektspunktet er ustabilit. Tidsresponsen går inn i stående svigninger, selv om en starter nær likevektspunktet. Det er ingen mindre svigninger i tidsresponsen før den går inn i de stående svigningene slik som det er i figur 2.10. Det tyder på at likevektspunktet er en node.

### 2.5.5 Bifurkasjon-forgrening

I kapittel 2.5.1 vises et eksempel der likevektspunktet er et stabilt fokus. I kapittel 2.5.3 vises et eksempel der likevektspunktet er et ustabil fokus. Legg merke til at alle parameterne i de to eksemplene er like, bortsett fra  $b$ . Det at  $b$  endres fra 1 til 3 gjør at likevektspunktet endrer stabilitets egenskaper. Når  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_4 = 1$  og  $a = 1$  som i disse to eksemplene så er  $\text{Tr}(A) < 0$ , og likevektspunktet dermed stabilt, når  $b < 2$  (ligning (2.16)). Når  $b > 2$  blir  $\text{Tr}(A) > 0$  og likevektspunktet er ustabil. Denne endringen i stabilitetsegenskap kalles for en bifurkasjon eller forgrening (Strogatz 1994). Punktet  $(a = 1, b = 2)$  kalles bifurkasjonspunktet. Bifurkasjon vil ikke bli videre studert i denne oppgaven, men det er likevel verdt å registrere at det skjer.



## 2.6 Koordinattransformasjon

I dette kapitlet blir det først i kapittel 2.6.1 gjort en koordinattransformasjon av modellen for Brusselatoren i (2.1) og (2.2) slik at likevektspunktet blir liggende i origo. Deretter gjøres det enda en transformasjon i kapittel 2.6.2 for at modellen skal få en struktur slik at en kan anvende beskrivende funksjoners metode.

### 2.6.1 Transformasjon av likevektspunktet til origo

For å analysere Brusselatoren i (2.1) og (2.2) ved hjelp av beskrivende funksjoners metode, er det hensiktsmessig å transformere systemet slik at likevektspunktet er i origo. Dette er for å gjøre beregningene lettere.

Likevektspunktet transformeres til origo ved følgende transformasjon:

$$z_1 = x_1 - x_1^* = x_1 - a \frac{k_1}{k_4} \quad (2.23)$$

$$z_2 = x_2 - x_2^* = x_2 - \frac{b k_3 k_4}{a k_1 k_2} \quad (2.24)$$

Transformasjonen gitt ved ligning (2.23) og (2.24) gir sammenhengene:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 \quad (2.25)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 \quad (2.26)$$

$$x_1 = z_1 + a \frac{k_1}{k_4} \quad (2.27)$$

$$x_2 = z_2 + \frac{b k_3 k_4}{a k_1 k_2} \quad (2.28)$$

Ligningene (2.25) til (2.28) settes inn i modellen for Brusselatoren i (2.1) og (2.2) og gir systemligningene i de nye koordinatene som:

$$\dot{z}_1 = k_2 z_1^2 z_2 + \frac{b k_3 k_4}{a k_1} z_1^2 + 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} z_1 z_2 + b k_3 z_1 + a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} z_2 - k_4 z_1 \quad (2.29)$$

$$\dot{z}_2 = - \left( k_2 z_1^2 z_2 + \frac{b k_3 k_4}{a k_1} z_1^2 + 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} z_1 z_2 + b k_3 z_1 + a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} z_2 \right) \quad (2.30)$$

Legg merke til at ligningene (2.29) og (2.30) er på formen:

$$\dot{z}_1 = h_z(z_1, z_2) - k_4 z_1 \quad (2.31)$$

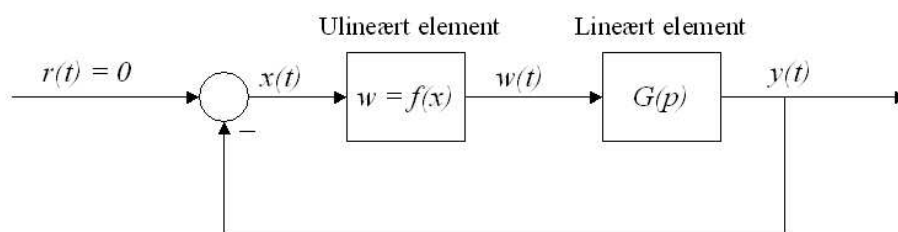
$$\dot{z}_2 = -h_z(z_1, z_2) \quad (2.32)$$

hvor

$$h_z(z_1, z_2) = k_2 z_1^2 z_2 + \frac{b}{a} \frac{k_3 k_4}{k_1} z_1^2 + 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} z_1 z_2 + b k_3 z_1 + a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} z_2$$

### 2.6.2 Transformasjon til en lukket sløyfe med en ulinearitet.

For å benytte beskrivende funksjoners metode på modellen i (2.29) og (2.30) må systemet transformeres slik at det har en struktur som i figur 1.5, gjengitt i figur 2.13.



Figur 2.13: Systemstruktur for å anvende Beskrivende funksjoners metode.

For at en modell skal ha struktur som i figur 2.13 må ulinearitetene bare opp-  
tre i en av systemligningene. For Brusselatoren opptrer ulinearitetene i begge  
systemligningene (2.1) og (2.2) som etter transformasjon av likevektspunktet  
til origo er gitt ved ligningene (2.29) og (2.30). Det er derfor nødvendig å  
gjøre enda en transformasjon av systemligningene (2.29) og (2.30) før en kan  
anvende beskrivendefunksjoners metode. Det er flere alternativer for trans-  
formasjon:

- En framgangsmåte kan være å se på ulinearitetene som inngang og deretter bruke inngang-utgang lineariseringsmetoder for å få en modell der inngangen, det vil si ulinearitetene, bare opptrer i én ligning. Utfordringen består da i å finne en passende utgang. Ved å prøve det mest opplagte valget,  $y = z_1$  eller  $y = z_2$  som utgang, resulterer det i en transformasjon som ikke er definert for  $x_1 = 0$ . Siden det først og fremst er oppførselen i første kvadrant av faseplanet som er av interesse, så kan en slik løsning være tilstrekkelig. Men det er likevel ikke en tilfredsstillende løsning i og med at denne transformasjonen ikke er diffeomorf (en én til én transformasjon som kan reverseres) i hele tilstandsrommet.
- En alternativ metode er å utnytte strukturen i systemligningene, (2.31)

og (2.32). Ved å velge transformasjonen:

$$\xi_1 = z_1 \quad (2.33)$$

$$\xi_2 = z_1 + z_2 \quad (2.34)$$

så vil de ulineære elementene falle bort i uttrykket for  $\xi_2$  (fra ligning (2.31) og (2.32) ser en at  $z_1 + z_2 = -k_4 z_1$ ).

Ved å benytte siste alternativ gitt ved ligning (2.33) og (2.34) gir:

$$\dot{\xi}_1 = \dot{z}_1 \quad (2.35)$$

$$\dot{\xi}_2 = \dot{z}_1 + \dot{z}_2 \quad (2.36)$$

$$z_1 = \xi_1 \quad (2.37)$$

$$z_2 = \xi_2 - \xi_1 \quad (2.38)$$

Ved å sette ligningene (2.35) til (2.38) inn i systemligningene (2.29) og (2.30) blir de nye systemligningene:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 = & bk_3 \xi_1 - k_4 \xi_1 - a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} \xi_1 + a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} \xi_2 \\ & - k_2 \xi_1^3 + \frac{b}{a} \frac{k_3 k_4}{k_1} \xi_1^2 - 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \xi_1^2 + k_2 \xi_1^2 \xi_2 + 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \xi_1 \xi_2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\dot{\xi}_2 = -k_4 \xi_1 \quad (2.40)$$

Strukturen i systemligningene (2.39) og (2.40) i disse nye koordinatene er gitt ved:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \text{Tr}(A) & \frac{1}{k_4} \det(A) \\ -k_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(\xi_1, \xi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\xi} &= A_\xi \cdot \xi + \begin{bmatrix} f(\xi_1, \xi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Legg merke til at  $\text{Tr}(A_\xi) = \text{Tr}(A)$  og  $\det(A_\xi) = \det(A)$ , hvor  $A$  er definert i ligning (2.7). Det vil si at som forventet er systemets egenskaper bevart gjennom transformasjonen. Den karakteristiske ligningen for  $A_\xi$  er også den samme som for  $A$ , ligning (2.10):

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

Funksjonen  $f(\xi_1, \xi_2)$  i ligning (2.41) er lik de ulineære leddene i ligning (2.39):

$$f(\xi_1, \xi_2) = -k_2 \xi_1^3 + \frac{b}{a} \frac{k_3 k_4}{k_1} \xi_1^2 - 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \xi_1^2 + k_2 \xi_1^2 \xi_2 + 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \xi_1 \xi_2$$

De transformerte systemligningene (2.39) og (2.40) har dermed struktur som i figur 2.13 hvor utgangen  $y(t)$  er gitt ved:

$$y(t) = \xi_2(t) \quad (2.42)$$

og inngangen  $x(t)$  til det ulineære elementet  $f(x)$  er gitt ved:

$$x(t) = -y(t) = -\xi_2(t) \quad (2.43)$$

Ligning (2.40) gir videre at

$$\xi_1 = -\frac{1}{k_4}\dot{\xi}_2 = \frac{1}{k_4}\dot{x} \quad (2.44)$$

og ved å sette inn  $\xi_1 = \frac{1}{k_4}\dot{x}$  og  $\xi_2 = -x$  i  $f(\xi_1, \xi_2)$  fra ligning (2.41) blir uttrykket for  $f(x)$  i figur 2.13:

$$\begin{aligned} f(x) = & -k_2 \left( \frac{1}{k_4} \frac{d}{dt}(x) \right)^3 + \left( \frac{b k_3 k_4}{a k_1} - 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \right) \left( \frac{1}{k_4} \frac{d}{dt}(x) \right)^2 \\ & + k_2 \left( \left( \frac{1}{k_4} \frac{d}{dt}(x) \right) + 2a \frac{k_1}{k_4} \right) \left( \frac{1}{k_4} \frac{d}{dt}(x) \right) (-x) \end{aligned} \quad (2.45)$$

### 2.6.3 Beregning av $G(s)$

For å finne transferfunksjonen,  $G(s)$ , benyttes ligning (2.41), gjengitt her:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_\xi \cdot \xi + \begin{bmatrix} f(\xi_1, \xi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\xi}(t) &= A_\xi \cdot \xi(t) + B \cdot f(\xi_1(t), \xi_2(t)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

hvor  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  og tidsavhengigheten er tatt med for å vise hvordan ligning (2.46) endres med Laplacetransformasjon. Fra figur 2.13 ser en at  $w(t) = f(x(t))$ . Ligning (2.46) kan da skrives som:

$$\dot{\xi}(t) = A_\xi \cdot \xi(t) + B \cdot w(t) \quad (2.47)$$

som Laplacetransformert blir:

$$\begin{aligned} s \cdot \xi(s) &= A_\xi \cdot \xi(s) + B \cdot w(s) \\ &\Downarrow \\ (sI - A_\xi) \cdot \xi(s) &= B \cdot w(s) \\ &\Downarrow \\ \frac{\xi(s)}{w(s)} &= (sI - A_\xi)^{-1} B \end{aligned}$$

Innsatt blir dette transferfunksjonsmatrisen  $\mathbf{G}(s)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \frac{1}{s^2 - \text{Tr}(A)s + \det(A)} \begin{bmatrix} s & \frac{1}{k_4} \det(A) \\ -k_4 & s - \text{Tr}(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 - \text{Tr}(A)s + \det(A)} \begin{bmatrix} s \\ -k_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Elementet  $G(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{\xi_2(s)}{w(s)}$  (ligning (2.42)) blir dermed:

$$G(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{-k_4}{(s)^2 - \text{Tr}(A)s + \det(A)} \quad (2.48)$$

hvor generelt  $s = j\omega$  og  $\omega$  representerer de ulike harmoniske i Fourierrekken.

## 2.7 Oppsummering

I dette kapitlet er det gjort en generell analyse av Brusselatoren. Det er funnet et likevektspunkt og det er diskutert hvilke egenskaper dette likevektspunktet har under forskjellige valg av  $k_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, 4$ ,  $a$  og  $b$ . Det er diskutert for hvilke tilfeller det kan eksistere periodiske løsninger i form av en grensesyklus i faseplanet og eksempel er med for å visualisere de forskjellige resultatene. Til slutt er det gjennomført to koordinattransformasjoner av Brusselatormodellen i (2.1) og (2.2), slik at likevektspunktet er lokalisert i origo, og systemet har en struktur som illustrert i figur 2.13.

I neste kapittel vil beskrivende funksjoners metode bli anvendt på Brusselatormodellen gitt i ligningene (2.39) og (2.40). Fra figur 2.13 gjelder følgende:

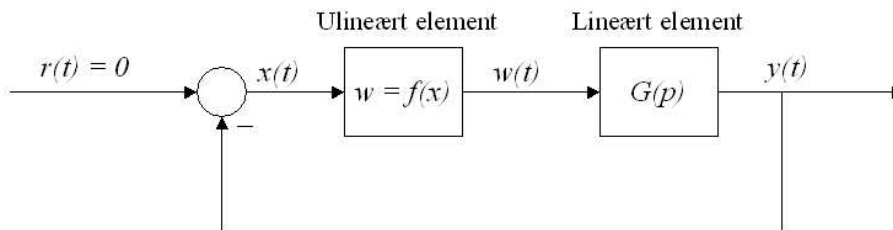
- Utgangen gitt ved  $y(t) = \xi_2(t)$ .
- Det ulineære elementet er gitt ved funksjonen  $f(x)$  i ligning (2.45).
- Det lineære elementet er gitt ved transferfunksjonen  $G(s)$  i ligning (2.48)
- Inngangen  $x(t)$  er en Fourierrekke med et valgt antall ledd (bare den grunnharmoniske i kapittel 3 og opp til og med andre harmoniske i kapittel 4).



## Kapittel 3

# Enkel modell

I dette kapitlet blir den såkalt enkle modellen gjennomgått, det vil si at inngangssignalet  $x(t)$  i figur 2.13, gjengitt i figur 3.1,



Figur 3.1: Systemstruktur for å anvende beskrivende funksjoners metode

velges som i ligning (3.1).

$$x(t) = \alpha \sin(\omega t) \quad (3.1)$$

I kapittel 3.1 blir beskrivende funksjoners metode brukt for å beregne et analytisk uttrykk for amplitude og frekvens for Brusselatorens grensesyklus. Dette brukes videre til å finne et analytisk uttrykk for grensesyklusens periode. I kapittel 3.3 brukes det analytiske uttrykket for grensesyklusens periode til å si noe om vilkårene for adaptasjon i periode. I kapittel 3.4 blir det vist eksempler med sammenligninger mellom estimerte periodeverdier beregnet ved hjelp av det analytiske uttrykket for perioden funnet i kapittel 3.1 og avleste periodeverdier ved å simulere den ulineære modellen for Brusselatoren i ligning (2.1) og (2.2). I kapittel 3.4 gjøres det en vurdering av når det analytiske uttrykket for perioden i Brusselatorens grensesyklus gir gode og dårlige estimater. I kapittel 3.5, blir uttrykket for perioden beregnet i kapittel 3.1 sammenlignet med andre rapporterte beregningsmåter for perioden i Brusselatorens grensesyklus.

### 3.1 Beskrivende funksjoners metode anvendt på Brusselatoren

I kapittel 2.6 ble det først gjort en koordinattransformasjon slik at likevektspunktet til Brusselatoren ble liggende i origo. Deretter ble systemet transformert slik at det kunne settes opp som i figur 3.1. Modellen gitt i ligningene (2.39) og (2.40) er dermed på en form som gjør at en kan anvende beskrivende funksjoners metode.

Utgangen  $w(t)$  fra det ulineære elementet i figur 3.1 kan representeres med en uendelig Fourierrekke. Det lineære elementet  $G(p)$  fungerer deretter som et lavpass filter på  $w(t)$ . På grunnlag av at transferfunksjonen  $G(p)$  funnet i ligning (2.48) fungerer som et lavpassfilter gjøres antagelsen at utgangen  $y(t)$  (se i figur 3.1) bare består av grunnfrekvensen, og dermed er en enkel sinussvigning. Fra figur 3.1 kan en se at  $x(t) = -y(t)$  som betyr at når utgangen  $y(t)$  er en enkel sinussvigning, så vil inngangen  $x(t)$  til den ulineære funksjonen  $f(x(t))$  også være det.  $x(t)$  antas da å være:

$$x(t) = -\xi_2(t) = \alpha \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

For å forenkle de videre beregningene, la:

$$\theta = \omega t$$

slik at

$$x(\theta) = \alpha \sin \theta \quad (3.3)$$

$$d\theta = \omega dt. \quad (3.4)$$

Ligning (2.44) sammen med (3.4) gir:

$$\xi_1 = -\frac{1}{k_4} \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{1}{k_4} \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_4} \frac{dx}{d\theta} \quad (3.5)$$

Fra ligning (2.43) er:

$$\xi_2 = -x \quad (3.6)$$

Setter uttrykket for  $x(\theta)$  i ligning (3.3) inn ligning (2.45) og får:

$$\begin{aligned} f(\alpha \sin \theta) = & -\frac{k_2}{k_4^3} \omega^3 \alpha^3 \cos^3 \theta + \left( \frac{b k_3 k_4}{a k_1} - 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \right) \frac{1}{k_4^2} \omega^2 \alpha^2 \cos^2 \theta \\ & - \frac{k_2}{k_4^2} \omega^2 \alpha^3 \cos^2 \theta \sin \theta + 2a \frac{k_1 k_2}{k_4^2} \omega \alpha^2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3.7)$$



### 3.1 Beskrivende funksjoners metode anvendt på Brusselatoren 35

Det er allerede antatt at inngangen til det ulineære elementet er en ren sinussvingning. Videre antas det at utgangen  $w(t)$  fra det ulineære elementet også er en førsteordens sinussvingning.

$$\omega(t) = \beta + c_s \sin(\omega t) + c_c \cos(\omega t) = \beta + c \sin(\omega t + \phi)$$

I Balchen (1992) er det vist hvordan  $\beta$ ,  $c_s$ ,  $c_c$ ,  $c$  og  $\phi$  finnes:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha \sin \theta) d\theta \\ c_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha \sin \theta) \sin \theta d\theta \\ c_c &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha \sin \theta) \cos \theta d\theta \\ c &= \sqrt{c_s^2 + c_c^2} \\ \phi &= \arctan \left( \frac{c_c}{c_s} \right)\end{aligned}$$

hvor funksjonen  $f(\alpha \sin \theta)$  er gitt i ligning (3.7). Funksjonen  $f(x(\theta))$  kan enkelt deles opp i ledd som er enkle å integrere ved hjelp av listen med integraler i vedlegg B. Flere av leddene faller faktisk bort under integrasjonen. Beregninger gir:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\alpha^2 \omega^2}{2k_1 k_4^3} \left( \frac{a}{b} k_3 k_4^2 - 2a k_1^2 k_2 \right) \\ c_s &= -\frac{\alpha^3 \omega^2 k_2}{4k_4^2} \\ c_c &= -\frac{3\alpha^3 \omega^3 k_2}{4k_4^3} \\ c &= \frac{\alpha^3 \omega^2 k_2}{4k_4^3} \sqrt{k_4^2 + 9\omega^2} \\ \phi &= \arctan \left( \frac{3\omega}{k_4} \right)\end{aligned}$$

Amplitude forsterkningen  $|\Psi(\alpha, \omega)|$  for den beskrivende funksjonen er et uttrykk for hvor mye en frekvens forsterkes gjennom det ulineære elementet  $f(x)$  i figur 3.1. Amplitude forsterkningen  $|\Psi(\alpha, \omega)|$  er gitt ved forholdet

mellom utgangs amplitude  $c$  og inngangs amplitude  $\alpha$  (Balchen 1992):

$$|\Psi(\alpha, \omega)| = \frac{c}{\alpha} = \alpha^2 \omega^2 \frac{k_2}{4k_4^3} \sqrt{k_4^2 + 9\omega^2} \quad (3.8)$$

Fasen  $\angle\Psi(\alpha, \omega)$  til den beskrivende funksjonen er et uttrykk for hvor stor faseforskyvningen er for en frekvens gjennom det ulineære elementet  $f(x)$  i figur 3.1, og er gitt ved:

$$\angle\Psi(\alpha, \omega) = \phi = \arctan\left(\frac{3\omega}{k_4}\right) \quad (3.9)$$

Fra inngangen  $x(t)$  til utgangen  $y(t)$  i figur 3.1 skal signalet bare endre fortegn ( $x(t) = -y(t)$ ). Med utgangspunkt i figur 3.1 kan en da sette opp den harmoniske balanseligningen:

$$G(j\omega)\Psi(\alpha, \omega) = -1 \quad (3.10)$$

Ved å løse ligning (3.10) analytisk finnes et uttrykk for amplitude  $\alpha$  og frekvens  $\omega$  fra ligning (3.2) som funksjon av  $a$ ,  $b$  og  $k_i$   $i = 1, \dots, 4$ . For å beregne  $\angle G(j\omega)$  og  $|G(j\omega)|$  tas det utgangspunkt i ligning (2.48), innsatt  $s = j\omega$ :

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{-k_4}{-\omega^2 - \text{Tr}(A)\omega j + \det(A)} \\ &= \frac{-k_4((\det(A) - \omega^2) + \text{Tr}(A)\omega j)}{((\det(A) - \omega^2) - \text{Tr}(A)\omega j)((\det(A) - \omega^2) + \text{Tr}(A)\omega j)} \\ &= \frac{-k_4(\det(A) - \omega^2)}{(\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2} + \frac{-k_4\text{Tr}(A)\omega}{(\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2} j \end{aligned} \quad (3.11)$$

Fasen til  $G(j\omega)$  finnes ut fra ligning (3.11):

$$\angle G(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} = \arctan \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} \quad (3.12)$$

Amplituden til  $G(j\omega)$  finnes også fra ligning (3.11) som:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{\text{Re}^2(G(j\omega)) + \text{Im}^2(G(j\omega))} \\ &= \frac{|-k_4|}{|-\omega^2 - \text{Tr}(A)\omega j + \det(A)|} \\ &= \frac{k_4}{\sqrt{(\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.1 Beskrivende funksjoners metode anvendt på Brusselatoren 37

Den harmoniske balanseligningen (3.10) på polar form blir da:

$$|G(j\omega)| |\Psi(\alpha, \omega)| e^{j(\angle G(j\omega) + \angle \Psi(\alpha, \omega))} = 1 \cdot e^{j(-\pi)}$$

som er ekvivalent med

$$|G(j\omega)| |\Psi(\alpha, \omega)| = 1 \quad (3.14)$$

$$\angle G(j\omega) + \angle \Psi(\alpha, \omega) = -\pi \quad (3.15)$$

Ved å sette inn for  $|\Psi(\alpha, \omega)|$  fra ligning (3.8),  $\angle \Psi(\alpha, \omega)$  fra (3.9),  $|G(j\omega)|$  fra ligning (3.12) og  $\angle G(j\omega)$  fra (3.13) i ligningene (3.14) og (3.15) gir dette:

$$\frac{k_4}{\sqrt{(\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2}} \cdot \alpha^2 \omega^2 \frac{k_2}{4k_4^3} \sqrt{k_4^2 + 9\omega^2} = 1 \quad (3.16)$$

$$\arctan \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} + \arctan \frac{3\omega}{k_4} = -\pi \quad (3.17)$$

Ligning (3.17) kan omformuleres ved å bruke at  $(\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy})$ , slik at:

$$\arctan \frac{\frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} + \frac{3\omega}{k_4}}{1 - \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} \frac{3\omega}{k_4}} = -\pi$$

Ved deretter å ta tan på begge sider blir ligningen seende slik ut:

$$\frac{\frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} + \frac{3\omega}{k_4}}{1 - \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} \frac{3\omega}{k_4}} = 0 \quad (3.18)$$

Ligning (3.18) er definert dersom

$$\frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} \frac{3\omega}{k_4} \neq 1$$

som vil si at:

$$\omega^2(3 \cdot \text{Tr}(A) + k_4) \neq \det(A)k_4$$

Når denne betingelsen er oppfylt, blir ligning (3.18) enda enklere:

$$\frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} + \frac{3\omega}{k_4} = 0$$

Å multiplisere med  $((\det(A) - \omega^2)k_4)$  gir:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr}(A)\omega k_4 + 3\omega (\det(A) - \omega^2) \\ &\Downarrow \\ \omega^2 &= \det(A) + \frac{k_4}{3}\text{Tr}(A) \end{aligned}$$

Det gir følgende uttrykk for frekvensen i den periodiske løsningen:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\det(A) + \frac{k_4}{3}\text{Tr}(A)} \\ &= \sqrt{a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4} + \frac{k_4}{3} \left( b \cdot k_3 - k_4 - a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_4^2} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2a^2 k_1^2 k_2 + b k_3 k_4^2 - k_4^3}{3k_4}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ved å returnere til ligning (3.16) finnes følgende uttrykk for inngangssignalets amplitude  $\alpha$  (ligning (3.2)):

$$\frac{k_4}{\sqrt{(\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2}} \cdot \alpha^2 \omega^2 \frac{k_2}{4k_4^3} \sqrt{k_4^2 + 9\omega^2} = 1$$

Løser denne med hensyn på  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 4 \frac{k_4^2}{k_2 \omega^2} \sqrt{\frac{(\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2}{k_4^2 + 9\omega^2}} \\ &\Downarrow \\ \alpha &= 2 \frac{k_4}{\omega \sqrt{k_2}} \sqrt[4]{\frac{(\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2}{k_4^2 + 9\omega^2}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

med  $\omega$  gitt i ligning (3.19).

## 3.2 Løsning ved enkel modell

Beskrivende funksjoners metode anvendt på systemet gitt ved ligningene (2.39) og (2.40) gir tilnærming til en grensesyklus. Husk at fra ligning (3.5) og (3.6) er det gitt at  $\xi_1 = \frac{1}{k_4}\dot{x}$  og  $\xi_2 = -x$ . Tilnærmingen av grensesyklusen er da:

$$\xi_1(t) = \frac{1}{k_4} \alpha \omega \cos(\omega t) \quad (3.21)$$

$$\xi_2(t) = -\alpha \sin(\omega t) \quad (3.22)$$

hvor frekvensen  $\omega$  og amplituden  $\alpha$  er gitt i henholdsvis ligning (3.19) og (3.20). For å finne tilnærmet løsning for grensesyklusen til Brusselatoren i ligning (2.1) og (2.2) må tilnærmingen gitt ved ligningene (3.21) og (3.22) transformeres tilbake til de opprinnelige koordinatene. Det gir:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + a \frac{k_1}{k_2} = \xi_1 + a \frac{k_1}{k_2} \\ &= \frac{1}{k_4} \alpha \omega \cos(\omega t) + a \frac{k_1}{k_2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= z_2 + \frac{bk_3k_4}{ak_1k_2} = \xi_2 - \xi_1 + \frac{bk_3k_4}{ak_1k_2} \\ &= -\alpha \sin(\omega t) - \frac{1}{k_4} \alpha \omega \cos(\omega t) + \frac{bk_3k_4}{ak_1k_2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Legg merke til at konstantleddet i ligningene (3.23) og (3.24) svarer til likevektspunktet gitt ved ligningene (2.5) og (2.6). Frekvensen  $\omega$  er gitt ved ligning (3.19) og  $\alpha$  er gitt ved ligning (3.20)

Fra diskusjonen i kapittel 2.3 og 2.4 viser det at for Brusselatoren i ligning (2.1) og (2.2) vil det ikke alltid eksistere en grensesyklus. Teorem 2.4.1 gir betingelsen for at det skal eksistere grensesyklus når  $k_i = 1, \forall i = 1, \dots, 4$ . Den generelle (når  $k_i \neq 1 \forall i = 1, \dots, 4$ ) betingelsen for at Brusselatoren skal ha en grensesyklus er ikke bevist her men den ser ut til å være  $\text{Tr}(A) > 0$ . Det vil si:

$$b > \frac{k_4}{k_3} + a^2 \frac{k_1^2 k_2}{k_3 k_4^2} \quad (3.25)$$

Basert på beskrivende funksjoners metode med inngangssignalet  $x(t)$  definert som i ligning (3.2), og forutsatt at betingelsen i ligning (3.25) er oppfylt, blir det analytiske uttrykket for perioden i Brusselatorens grensesyklus:

$$T_{pe} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.26)$$

hvor  $\omega$  er gitt i ligning (3.19). Dette gir:

$$T_{pe} = 2\pi \sqrt{\frac{3k_4}{2a^2 k_1^2 k_2 + bk_3 k_4^2 - k_4^3}} \quad (3.27)$$

### 3.3 Tolkning av analytisk uttrykk for periode

Det analytiske uttrykket i ligning (3.27) for perioden i Brusselatorens grensesyklus gir informasjon om hvorvidt det kan finnes adaptasjon i periode. Periodeestimatet  $T_{pe}$  i ligning (3.27) er avhengig av både  $a$ ,  $b$  samt  $k_i \forall i = 1, \dots, 4$ . Dette indikerer at det ikke kan eksistere en robust perfekt adaptasjon i perioden til Brusselatorens grensesyklus med hensyn på hverken  $k_i \forall i = 1, \dots, 4$ ,  $a$  eller  $b$ .

At det eksisterer en robust perfekt adaptasjon for et system med hensyn på en parameter vil si at dersom denne parameteren endres med et sprang, samtidig som alle andre parametere holdes konstant, så vil systemet etter en tid gå tilbake til den opprinnelige tilstanden før spranget (Drengstig *et al.* 2008).

Når en ut fra periodeestimatet  $T_{pe}$  i ligning (3.27) kan si at det ikke vil eksistere noen robust perfekt adaptasjon i perioden for Brusselatorens grensesyklus er det fordi  $T_{pe}$  er avhengig alle hastighetskonstantene  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  og  $k_4$  samt  $a$  og  $b$ . Dersom en av disse verdiene endres mens de andre holdes konstante vil periodeestimatet  $T_{pe}$  endres, og dermed ingen perfekt adaptasjon. Det kan likevel oppstå en "fininnstilt" (eng: fine tuned) perfekt adaptasjon, det vil si at dersom en endrer to eller flere av verdiene  $k_i \ i = 1, \dots, 4$ ,  $a$  eller  $b$  samtidig og i et bestemt forhold til hverandre så kan en finne perfekt adaptasjon i periode.

For at en skal kunne finne "fininnstilt" perfekt adaptasjon ut fra et analytisk uttrykk for perioden som i ligning (3.27) kan ikke periodeestimatet være gitt ved en *injektiv* funksjon. En funksjon  $h(x)$  er injektiv (eller en-entydig) dersom  $x_1 \neq x_2$  medfører  $h(x_1) \neq h(x_2)$  (Lindstrøm 1996).

Uttrykket  $T_{pe}$  gitt i ligning (3.27) er *ikke* injektivt, og en kan dermed finne "fininnstilt" perfekt adaptasjon for  $T_{pe}$ . La foreksempel  $k_4$  endres til  $k_4^*$  og samtidig endre  $k_3$  til  $k_3^*$  mens alle de andre parametere holdes konstant. Dersom

$$\frac{3k_4}{2a^2k_1^2k_2 + bk_3k_4^2 - k_4^3} = \frac{3k_4^*}{2a^2k_1^2k_2 + bk_3^*k_4^{*2} - k_4^{*3}} \quad (3.28)$$

vil periodeestimatet  $T_{pe}$  i ligning (3.27) ikke endres selv om parameterne  $k_3$  og  $k_4$  endres og dermed gir det en "fininnstilt" perfekt adaptasjon for  $T_{pe}$ . For at ligning (3.28) skal være oppfylt må:

$$k_3^* = \frac{2a^2k_1^2k_2(k_4^* - k_4) + k_4^*bk_3k_4^2 - k_4^*k_4^3 + k_4k_4^{*3}}{k_4bk_4^{*2}}$$

Hvorvidt denne ”finninstilte” adaptasjonen for  $T_{pe}$  virkelig opptrer for perioden til Brusselatorens grensesyklusen avhenger av hvor godt det analytiske uttrykket gitt i ligning (3.27) er til å beskrive perioden i grensesyklusen. I kapittel 3.4 vil periodeestimatet i ligning (3.27) bli verifisert for å kunne si noe om nettopp det.

### 3.4 Verifikasjon

I dette kapittelet blir det analytiske uttrykket for perioden  $T_{pe}$  (ligning (3.27)) i Brusselatorens grensesyklus verifisert mot simulering av ulineær modell gitt i ligning (2.1) og (2.2). Det er derfor de tilfellene der det oppstår en grensesyklus som er av interesse. Fra kapittel 2.3 og 2.4 tyder det på at Brusselatoren har en stabil grensesyklus når det er et ustabil likevektspunkt, det vil si når  $\text{Tr}(A) > 0$ .

Uttrykket for  $T_{pe}$  brukes til å beregne estimat for perioden i grensesyklusen. Verdien til  $T_{pe}$  sammenlignes med avleste periodeverdier fra simulering av den ulineære modellen for Brusselatoren gitt i ligning (2.1) og (2.2). I tabell 3.1 er det samlet 16 forskjellige eksempler hvor Brusselatoren har en stabil grensesyklus. For lettere å kunne sammenligne eksemplene er  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$  i alle eksemplene, mens parameterne  $a$  og  $b$  varierer. Når  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$  reduseres ligningene (2.13) og (2.12) til:

$$\begin{aligned}\det(A) &= a^2 \\ \text{Tr}(A) &= b - a^2 - 1\end{aligned}$$

og betingelsen for å få grensesyklus, nemlig  $\text{Tr}(A) > 0$  er oppfylt når:

$$b > a^2 + 1$$

For de eksemplene som er markert med uthevet tekst i tabell 3.1 vil det også blir vist resultater i form av figurer.

Tabell 3.1: Exemppler,  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$ .

$a$	$b$	$l.p = \left(a \frac{b}{a}\right)$	$\text{Tr}(A)$	$\Delta$	$\alpha$	$T_{pe}$	$T_{ps}$	$\frac{ T_{pe}-T_{ps} }{T_{ps}}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\left \frac{b-\bar{x}_2}{\bar{x}_2}\right $
<b>3.30</b>	<b>12</b>	<b>(3.30 3.64)</b>	<b>0.1100</b>	<b>-43.55</b>	<b>0.12</b>	<b>1.90</b>	<b>2.02</b>	<b>0.06</b>	<b>3.30</b>	<b>3.69</b>	<b>0.014</b>
3.00	12	(3.00 4.00)	2.0000	-32.00	0.53	2.02	6.59	0.69	3.00	7.90	0.494
1.00	12	(1.00 12.0)	10.0000	96.00	1.75	3.02	45.24	0.93	1.00	23.91	0.498
2.40	7	(2.40 2.92)	0.2400	-22.98	0.23	2.60	2.93	0.11	2.40	3.07	0.049
<b>1.00</b>	<b>7</b>	<b>(1.00 7.00)</b>	<b>5.0000</b>	<b>21.00</b>	<b>1.58</b>	<b>3.85</b>	<b>18.62</b>	<b>0.79</b>	<b>1.00</b>	<b>10.03</b>	<b>0.302</b>
2.00	6	(2.00 3.00)	1.0000	-15.00	0.55	3.02	5.09	0.41	2.00	4.07	0.263
1.00	6	(1.00 6.00)	4.0000	12.00	1.51	4.11	14.86	0.72	1.00	7.97	0.247
0.25	6	(0.25 24.0)	4.9375	24.13	1.96	4.81	229.76	0.98	0.25	27.09	0.114
<b>1.00</b>	<b>3</b>	<b>(1.00 3.00)</b>	<b>1.0000</b>	<b>-3.00</b>	<b>1.00</b>	<b>5.44</b>	<b>7.16</b>	<b>0.24</b>	<b>1.00</b>	<b>3.17</b>	<b>0.054</b>
0.50	3	(0.50 6.00)	1.7500	2.06	1.67	6.88	23.24	0.70	0.50	5.50	0.091
0.25	3	(0.25 12.0)	1.9375	3.50	1.91	7.47	89.77	0.92	0.25	9.74	0.232
0.50	1.5	(0.50 3.00)	0.2500	-0.94	1.00	10.88	15.16	0.28	0.50	2.63	0.141
0.25	1.5	(0.25 6.00)	0.4375	-0.059	1.67	13.77	51.46	0.73	0.25	3.65	0.644
0.25	1.1	(0.25 4.40)	0.0375	-0.249	0.82	22.94	35.34	0.35	0.25	4.16	0.058
0.25	1.09	(0.25 4.36)	0.0275	-0.249	0.72	23.47	30.17	0.22	0.25	4.22	0.033
0.25	1.07	(0.25 4.28)	0.0075	-0.250	0.39	24.64	26.17	0.06	0.25	4.24	0.009



**Forklaring til tabell 3.1:**

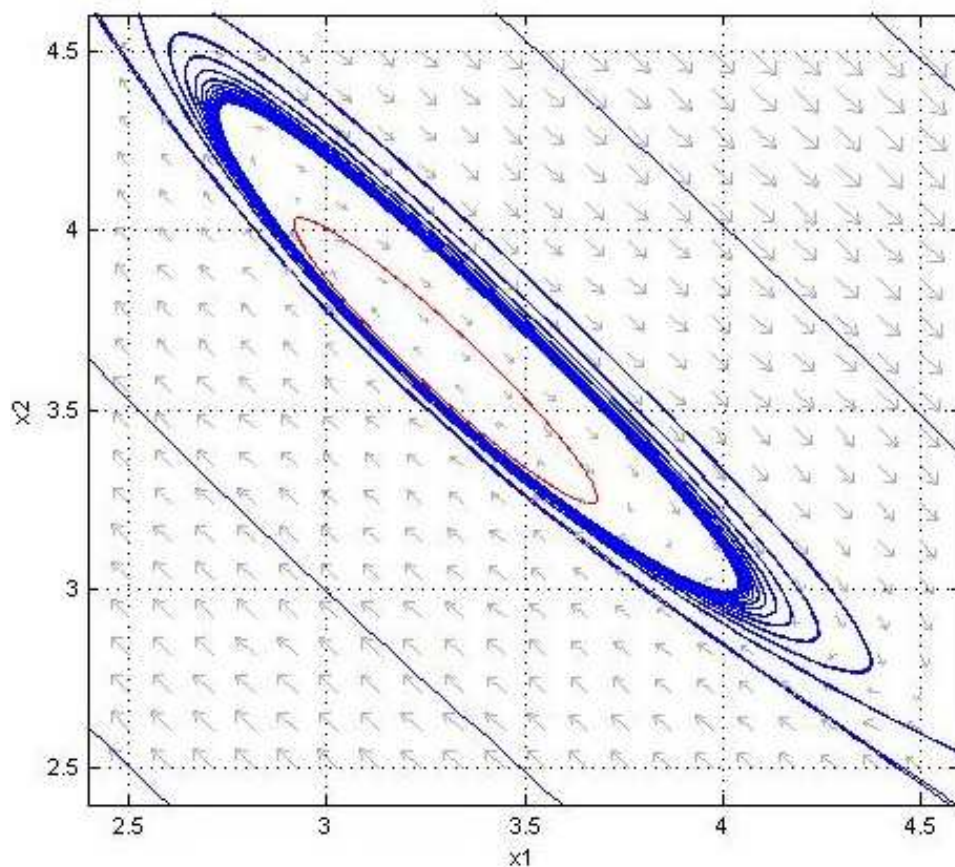
- $l.p$  står for likevektspunkt.
- $\Delta$  er gitt i ligning (2.14). Negativ verdi for  $\Delta$  gir fokus som likevektspunkt, og positiv verdi for  $\Delta$  gir node som likevektspunkt.
- $\alpha$  er estimatet for amplituden i Brusselatorens grensesyklus gitt ved ligning (3.20).
- $T_{pe} = \frac{2\pi}{\omega}$  er gitt i ligning (3.27) og er et periodeestimat funnet i kapittel 3.1 for perioden i Brusselatorens grensesyklus.
- $T_{ps}$  er avlest periode ved ulineær simulering av Brusselatormodellen i (2.1) og (2.2).
- $\frac{|T_{pe}-T_{ps}|}{T_{ps}}$  er den relative feilen mellom den estimerte preioden  $T_{pe}$  og perioden beregnet ved simulering av den ulineære modellen for Brusselatoren i ligningene (2.1) og (2.2). Den relative feilen er et tall mellom 0 og 1. Dersom den relative feilen er nær 0 i verdi, er periodeestimatet  $T_{pe}$  et godt estimat. Dersom den relative feilen er nær 1 er periodeestimatet  $T_{pe}$  svært dårlig. Denne verdien er altså en verdi som sier noe om hvor god den estimerte periodeverdien  $T_{pe}$  er i det gitte eksempelet.
- $\bar{x}_1$  og  $\bar{x}_2$  er gjennomsnittverdien til henholdsvis  $x_1$  og  $x_2$  over en periode, beregnet ved simulering av den ulineære modellen i ligning (2.1) og (2.2).
- $|\frac{b-\bar{x}_2}{\bar{x}_2}|$  er den relative feilen mellom  $\bar{x}_2$  og andrekoordinaten i likevektspunktet  $\frac{b}{a}$ . størrelsen  $|\frac{b-\bar{x}_2}{\bar{x}_2}|$  sier noe om hvor langt fra likevektspunktet systemet svinger. ( $\bar{x}_1 = a$  i alle de 16 eksemplene i tabell 3.1 og fra ligning (2.5) er det gitt at førstekoordinaten i likevektspunktet er lik  $a$ .)

For de tre eksemplene som er markert med uthevet tekst i tabell 3.1 er det i det etterfølgende vist resultat i form av figurer. Disse tre eksemplene representerer ett tilfelle der periodeestimatet  $T_{pe}$  treffer meget bra (kapittel 3.4.1), ett tilfelle der periodeestimatet  $T_{pe}$  er svært dårlig (kapittel 3.4.2) og ett tilfelle midt mellom (kapittel 3.4.3). Som for eksemplene i kapittel 2.5 er det en figur for hvert av de tre eksemplene som viser retningsdiagram med simulert og prediktert grensesyklus og en figur fra hver eksempel som viser tidsresponsen for  $x_1$  og  $x_2$ . Til slutt er det tatt med en figur i hvert eksempel med plott av prediktert og simulert verdi for perioden når en lar temperaturen variere, samt et plot av den relative feilen i periodeestimatet.

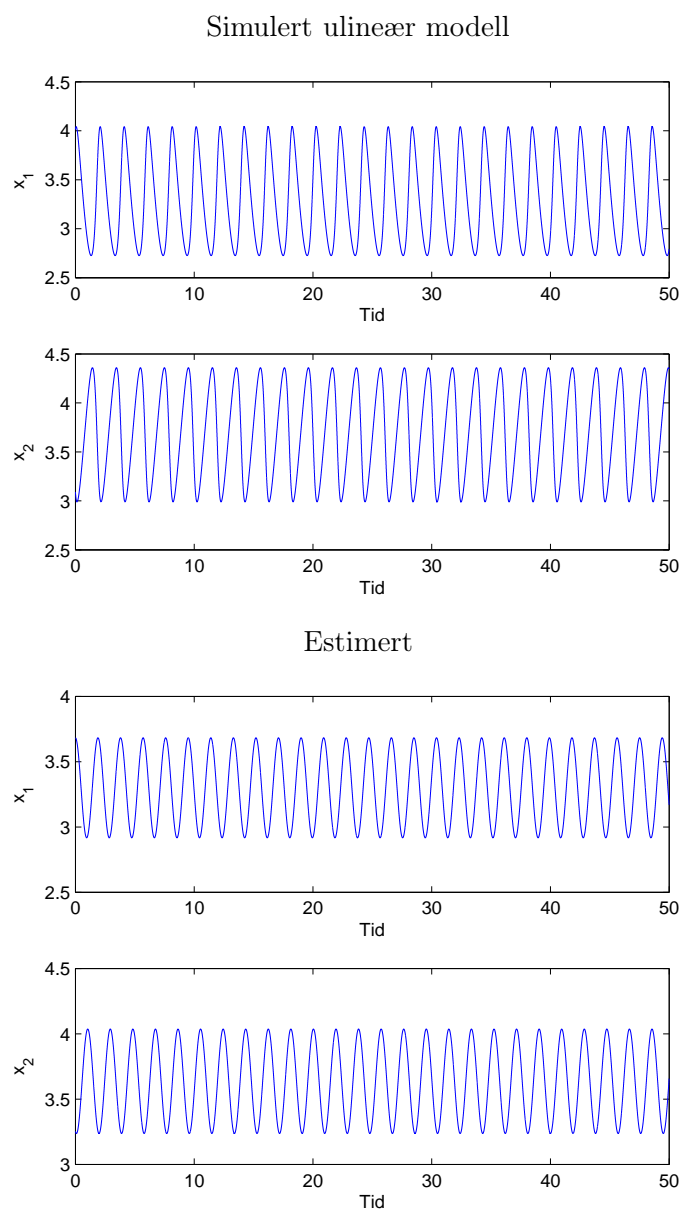
En samlet diskusjon rundt eksemplene i tabell 3.1 og figurene i de etterfølgende eksemplene er gitt i kapittel 3.4.4.

### 3.4.1 Verifikasjonseksempel 1

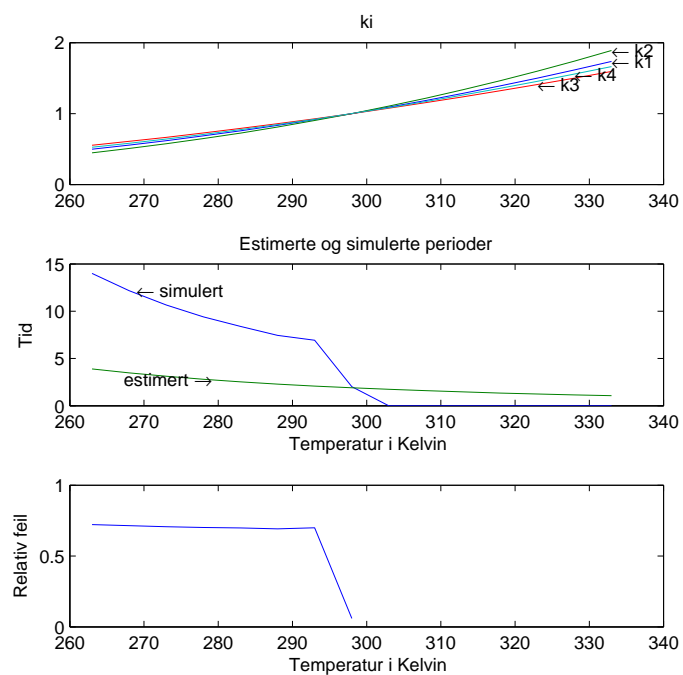
I dette kapitlet vises figurer som svarer til eksempelet i tabell 3.1 hvor  $a = 3.3$  og  $b = 12$ . Dette er et av de tilfellene der periodeestimatet  $T_{pe}$  treffer meget bra sammenlignet med perioden  $T_{ps}$  hentet fra ulineær simulering av ligningene (2.1) og (2.2).



Figur 3.2: Predikert og simulert grensesyklus når  $k_i = 1$ ,  $a = 3.3$ ,  $b = 12$ .



Figur 3.3: Tidsrespons for  $x_1$  og  $x_2$  når  $a = 3.3$ ,  $b = 12$ . Øverst: Tidsrespons fra ulineær simulering av ligning (2.1) og (2.2). Under: Tidsrespons beregnet ut fra ligningene (3.23) og (3.24) som gir tilnærmet verdi for  $x_1$  og  $x_2$ . Tidsresponsen fra den ulineære simuleringen (figuren øverst) starter i et punkt på grensesyklusen i faseplanet. Det gjør at det ikke er noe innsvigningsforløp hos hverken  $x_1$  eller  $x_2$ . Dette er gjort for å lettere kunne sammenligne de to tidsresponsene i figuren.

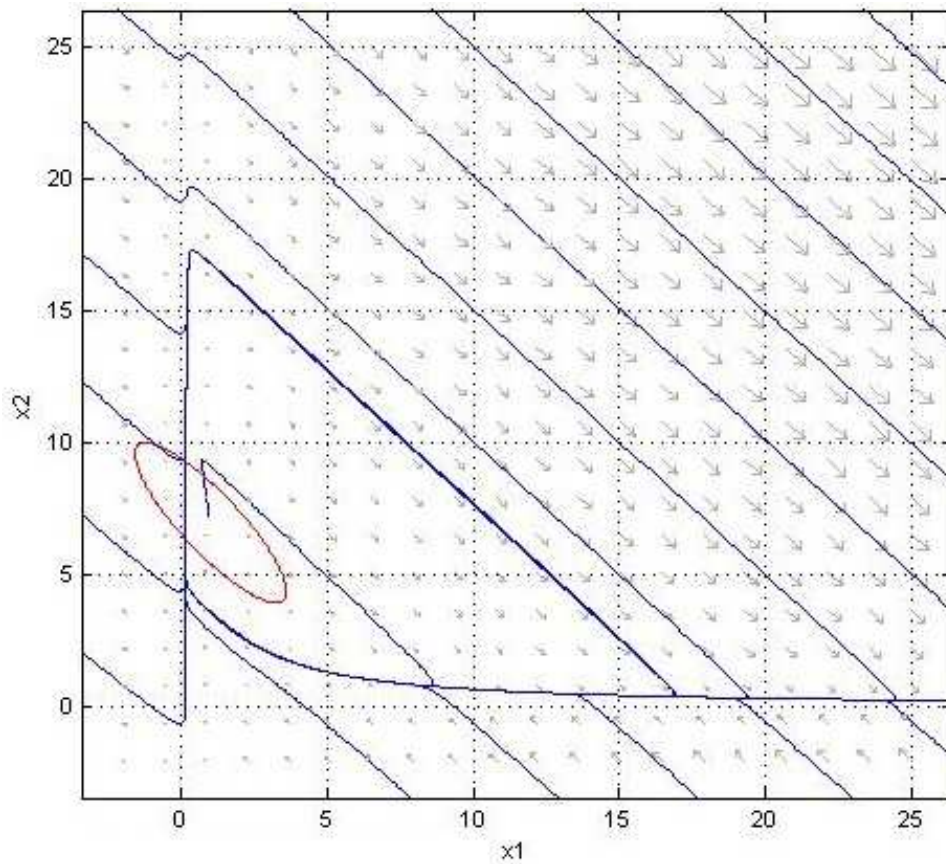


Figur 3.4: Periode og  $k_i$  når temperaturen varierer.  $a = 3.3$ ,  $b = 12$

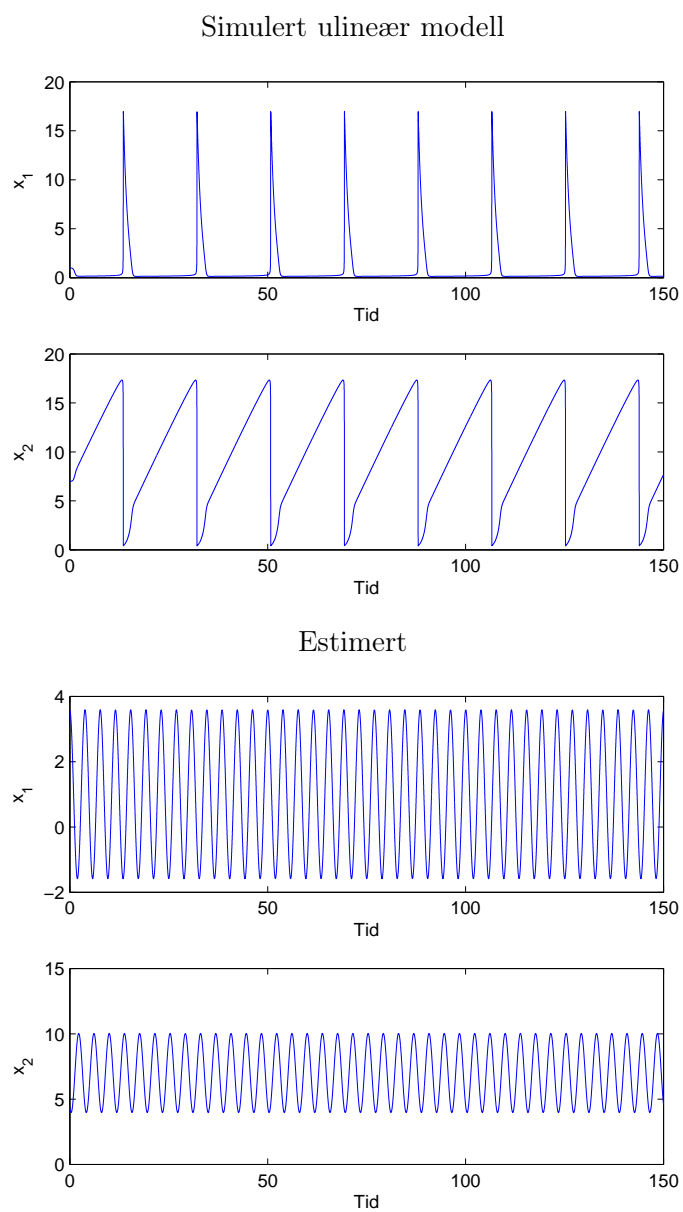
Legg merke til at  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$  ved  $298^\circ\text{K}$  eller  $25^\circ\text{C}$ . Det er ved denne temperaturen det er simulert og estimert periode samt relativ feil er oppgitt i tabell 3.1.

### 3.4.2 Verifikasjonseksempel 2

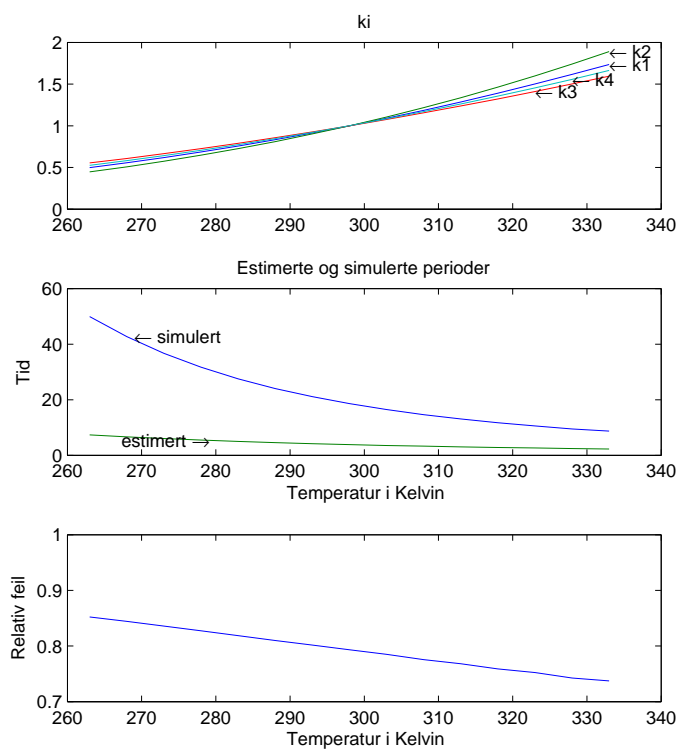
I dette kapitlet vises figurer som svarer til eksempelet i tabell 3.1 hvor  $a = 1$  og  $b = 7$ . Dette er et av de tilfellene der periodeestimatet  $T_{pe}$  treffer meget dårlig sammenlignet med perioden  $T_{ps}$  hentet fra ulineær simulering av ligningene (2.1) og (2.2).



Figur 3.5: Predikert og simulert grensesyklus når  $k_i = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 7$ .



Figur 3.6: Tidsrespons for  $x_1$  og  $x_2$  når  $a = 1$ ,  $b = 7$ . Øverst: Tidsrespons fra ulineær simulering av ligning (2.1) og (2.2). Under: Tidsrespons beregnet ut fra ligningene (3.23) og (3.24) som gir tilnærmet verdi for  $x_1$  og  $x_2$ .

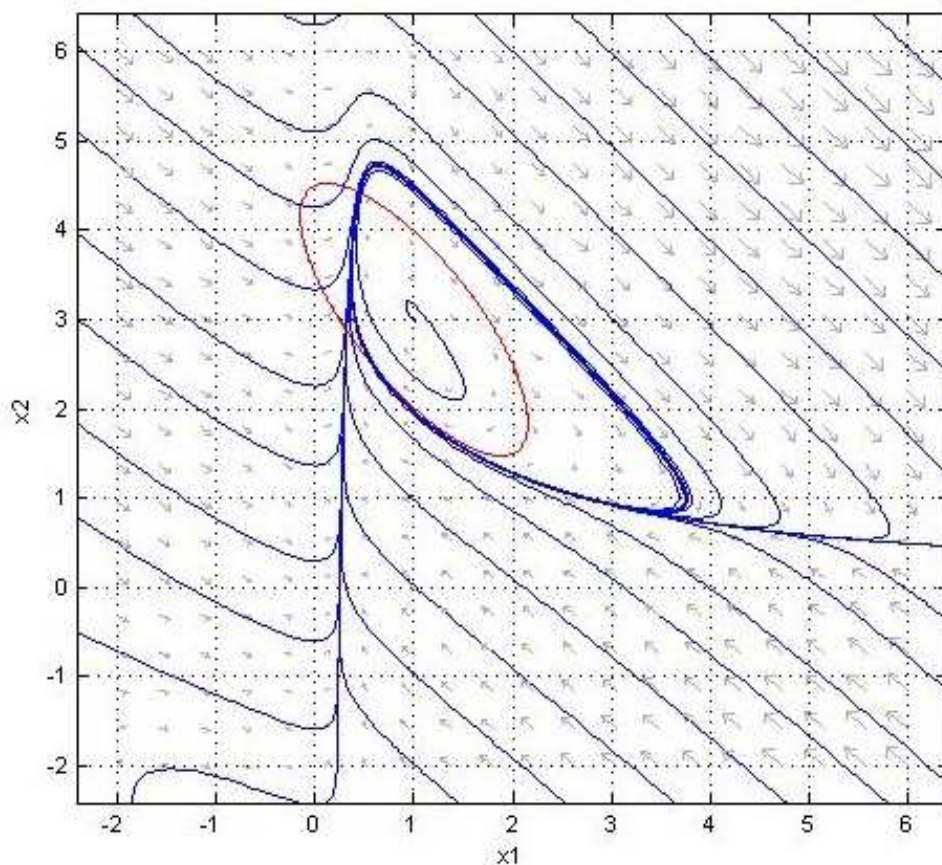


Figur 3.7: Periode og  $k_i$  når temperaturen varierer.  $a = 1$ ,  $b = 7$

Legg merke til at  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$  ved  $298^\circ\text{K}$  eller  $25^\circ\text{C}$ . Det er ved denne temperaturen det er simulert og estimert periode samt relativ feil er oppgitt i tabell 3.1.

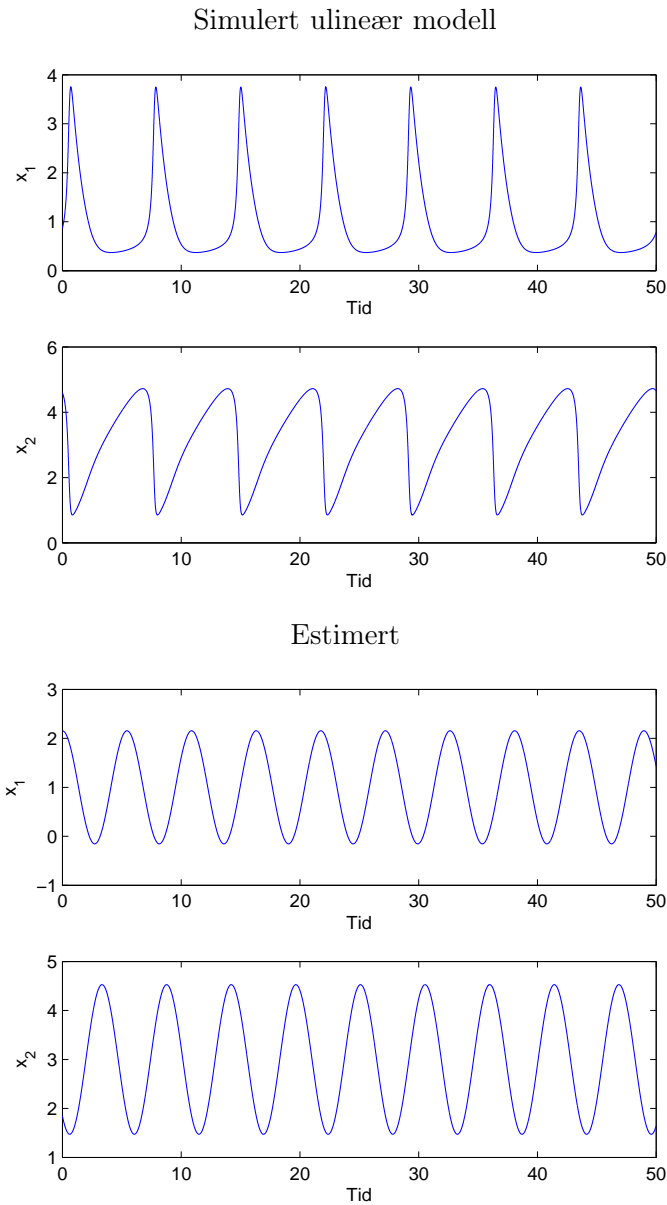
### 3.4.3 Verifikasjonseksempel 3

I dette kapitlet vises figurer som svarer til eksempelet i tabell 3.1 hvor  $a = 1$  og  $b = 3$ . Dette er et av de tilfellene der periodeestimatet  $T_{pe}$  ikke treffer bra, men heller ikke er meget dårlig sammenlignet med perioden  $T_{ps}$  hentet fra ulineær simulering av ligningene (2.1) og (2.2).

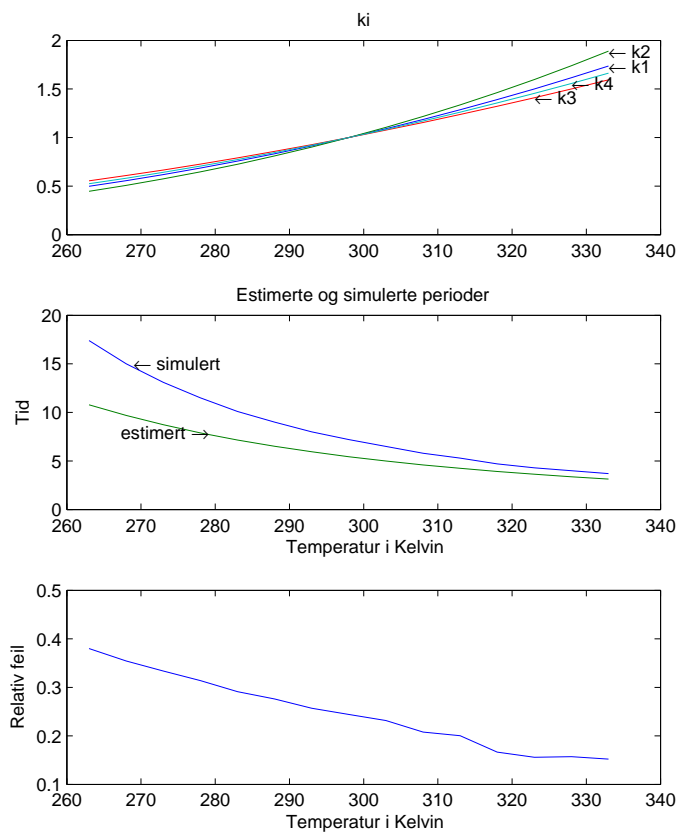


Figur 3.8: Predikert og simulert grensesyklus når  $k_i = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ .





Figur 3.9: Tidsrespons for  $x_1$  og  $x_2$  når  $a = 1$ ,  $b = 3$ . Øverst: Tidsrespons fra ulineær simulering av ligning (2.1) og (2.2). Under: Tidsrespons beregnet ut fra ligningene (3.23) og (3.24) som gir tilnærmet verdi for  $x_1$  og  $x_2$ . Tidsresponsen fra den ulineære simuleringen starter i et punkt på grensesyklusen i faseplanet. Det gjør at det ikke er noe innsvigningsforløp hos hverken  $x_1$  eller  $x_2$ . Dette er gjort for å lettere kunne sammenligne de to tidsresponsene i figuren.



Figur 3.10: Periode og  $k_i$  når temperaturen varierer.  $a = 1$ ,  $b = 3$

Legg igjen merke til at  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$  ved  $298^\circ\text{K}$  eller  $25^\circ\text{C}$ . Det er ved denne temperaturen det er simulert og estimert periode samt relativ feil er oppgitt i tabell 3.1.

### 3.4.4 Diskusjon

Sammenligning av eksemplene i tabell 3.1 og figurene 3.2 til 3.10 gir noen interessante observasjoner:

- Legg merke til i tabell 3.1 at estimatet av perioden fra ligning (3.27) er bra i noen tilfeller, men er særdeles dårlig for andre tilfeller. I de tilfellene der periodeestimatet  $T_{pe}$  er best, er  $\text{Tr}(A)$  relativt liten. For å få en grensesyklus må  $\text{Tr}(A) > 0$  men siden  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$  blir betingelsen for grensesyklus  $\text{Tr}(A) = b - a^2 - 1 > 0$ . Ut fra eksemplene i tabell 3.1 ser det ut til at dersom en velger verdier for  $a$  og  $b$  slik at

$\text{Tr}(A)$  er relativt mye mindre sammenlignet med  $a$ , så er modellen bra.

En kan oppnå å få en relativt liten positiv verdi for  $\text{Tr}(A)$  sammenlignet med  $a$  dersom en velger  $b = a^2 + 1 + \delta$  hvor  $\delta \ll a$ . Da blir  $\text{Tr}(A) = \delta$  og er liten sammenlignet med  $a$ .

- Det er også verdt å legge merke til at når  $\Delta > 0$ , så gir estimatet for perioden  $T_{pe}$  fra ligning (3.27) dårlige estimater. I tabell 3.1 er  $\Delta > 0$  for  $(a = 1, b = 12)$ ,  $(a = 1, b = 7)$ ,  $(a = 1, b = 6)$ ,  $(a = 0.25, b = 6)$ ,  $(a = 0.5, b = 3)$  og  $(a = 0.25, b = 3)$ . I alle disse eksemplene er estimatet for perioden svært dårlig med relativ feil på mer enn 0.70. At  $\Delta > 0$  betyr at likevektspunktet er en node, jamfør kapittel 2.3. Det analytiske uttrykket for perioden  $T_{pe}$  (ligning (3.27)) til grensesyklusen ser ut til å gi dårligere estimat når likevektspunktet er en node.

Denne observasjonen stemmer overens med figurene 3.2, 3.5 og 3.8. I figur 3.5 er likevektspunktet en ustabil node, og i dette tilfellet er periodeestimatet svært dårlig. I figurene 3.2 og 3.8, er derimot likevektspunktet et fokus, og periodeestimatene er bedre.

Om likevektspunktet er en node eller et fokus er imidlertid ikke nok til å avgjøre om det analytiske uttrykket for Brusselatorens grensesyklus i ligning (3.27) vil gi et bra periodeestimat i et gitt eksempel. I tabell 3.1 finnes eksempler der periodeestimatet  $T_{pe}$  fra ligning (3.27) passer svært dårlig selv om likevektspunktet er et ustabil fokus, se i tabell 3.1 når  $(a = 3, b = 12)$  og  $(a = 0.25, b = 1.5)$ . Det en kan si er at det ser ut til at dersom likevektspunktet er en ustabil node, så vil ikke uttrykket for  $T_{pe}$  gitt i ligning (3.27) gi et godt estimat. Det kreves en bedre modell for å beskrive Brusselatoren godt i disse tilfellene.

- En annen interessant sammenheng er at gjennomsnittet av  $x_1$  over en periode er lik  $a$  ( $\bar{x}_1 = a$ ). Simuleringene tyder på at  $x_1$  svinger meget nøyaktig om  $a$ , som er førstekoordinaten i likevektspunktet.

Simuleringene viser ikke en slik sammenheng for  $\bar{x}_2$  og andrekoordinaten i likevektspunktet,  $\frac{b}{a}$ . Det en likevel kan se ut fra eksemplene i tabell 3.1 er at i de tilfellene der modellen gir gode estimater for perioden,  $(a = 3.3, b = 12)$  og  $(a = 0.25, 1.07)$ , så er  $\bar{x}_2 \approx \frac{b}{a}$ . Det ser med andre ord ut til at uttrykket for  $T_{pe}$  gitt i ligning (3.27) gir gode estimater for perioden i Brusselatorens grensesyklus når  $x_1$  og  $x_2$  svinger tilnærmet symmetrisk om likevektspunktet  $(a, \frac{b}{a})$ .

- Figurene 3.4, 3.7 og 3.10 viser hvordan periodeestimatet endres når temperaturen endres. I figurene 3.7 og 3.10 er det tydelig at den rela-

tive feilen for periodeestimatet avtar når temperaturen øker. Figur 3.4 viser i grunnen det samme, men kurven for simulert periode får plutselig en knekk, og går til 0. Det som skjer er at likevektspunktet går over fra å være ustabil til stabilt, og det er ikke lenger noen grensesyklus. Dette er også tilfelle i eksempelet når  $(a = 0.25, b = 1.07)$  fra tabell 3.1. Ved en liten temperaturøkning går likevektspunktet over til å være et stabilt likevektspunkt, og grensesyklusen eksisterer ikke lenger.

Etter å ha endret temperaturen i alle eksemplene i tabell 3.1, ser det ut til at dess bedre periodeestimer for grensesyklusen ligning (3.27) gir, dess nærmere er det at likevektspunktet går fra å være et ustabil, til et stabilt likevektspunkt.

Dette stemmer godt med observasjonen at dersom  $x_1$  og  $x_2$  svinger nærmest symmetrisk om likevektspunktet, så gir ligning (3.27) gode periodeestimer. Like før likevektspunktet går over til å være stabilt, svinger  $x_1$  og  $x_2$  tilnærmet symmetrisk om likevektspunktet.

### 3.5 Sammenligning med alternative modeller

I dette kapitlet blir periodeestimatet  $T_{pe}$  i ligning (3.27) sammenlignet med to andre rapporterte periodeestimer for Brusselatorens grensesyklus.

#### 3.5.1 Hes variasjonsmetode

I Zhang (2007), brukes en metode kalt Hes variasjonsmetode. Metoden er hentet fra He (2003) er en metode for å tilnærme grensesykluser i ulineære system. Zhang (2007) anvender metoden på Brusselatoren, og kommer fram til følgende analytiske uttrykk når hastighetskonstantene  $k_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$ :

$$\alpha_{He} = \sqrt{\frac{ab - a - a^3}{B - \frac{5}{4}a}} \quad (3.29)$$

$$\omega_{He} = \sqrt{a^2 + \frac{ab - a - a^3}{4B - 5a}} \quad (3.30)$$

Når  $b > 1 + a^2$  er B gitt ved:

$$B = \frac{\frac{7}{2}a^2 + b + 1 + \sqrt{-\left(\frac{15}{4}\right)a^4 + 3a^2(b - 3) + (b + 1)^2}}{4a} \quad (3.31)$$

Estimatet for grensesyklusens periode er:

$$T_{pe_{He}} = \frac{2\pi}{\omega_{He}} \quad (3.32)$$

For å kunne sammenligne periodeestimatet  $T_{pe}$  gitt i ligning (3.27) beregnet ved hjelp av beskrivende funksjoners metode i kapittel 3.1 og metoden benyttet av Zhang (2007) er det i tabell 3.2 vist periode beregnet ved ulineære simuleringer  $T_{ps}$ , periodeestimat  $T_{pe}$  beregnet fra ligning (3.27) og periodeestimat  $T_{pe_{He}}$  fra ligning (3.32).

Tabell 3.2: Sammenligning av periodeestimater beregnet ved hjelp av beskrivende funksjoners metode og Hes variasjonsmetode

$a$	$b$	$T_{pe}$	$T_{pe_{He}}$	$T_{ps}$	$\frac{ T_{pe}-T_{ps} }{T_{ps}}$	$\frac{ T_{pe_{He}}-T_{ps} }{T_{ps}}$
<b>3.30</b>	<b>12.00</b>	<b>1.90</b>	<b>1.90</b>	<b>2.02</b>	<b>0.06</b>	<b>0.06</b>
3.00	12.00	2.02	2.07	6.59	0.69	0.69
1.00	12.00	3.02	5.66	45.24	0.93	0.87
2.40	7.00	2.60	2.61	2.93	0.11	0.11
<b>1.00</b>	<b>7.00</b>	<b>3.85</b>	<b>5.69</b>	<b>18.62</b>	<b>0.79</b>	<b>0.69</b>
2.00	6.00	3.02	3.09	5.09	0.41	0.39
1.00	6.00	4.11	5.71	14.86	0.72	0.62
0.25	6.00	4.81	18.39	229.76	0.98	0.92
<b>1.00</b>	<b>3.00</b>	<b>5.44</b>	<b>5.88</b>	<b>7.16</b>	<b>0.24</b>	<b>0.18</b>
0.50	3.00	6.88	10.74	23.24	0.70	0.54
0.25	3.00	7.47	19.16	89.77	0.92	0.79
0.50	1.50	10.88	11.75	15.16	0.28	0.22
0.25	1.50	13.77	21.48	51.46	0.73	0.58
0.25	1.10	22.94	24.55	35.34	0.35	0.31
0.25	1.09	23.47	24.70	30.17	0.22	0.18
0.25	1.07	24.64	25.01	26.17	0.06	0.04

### Forklaring til tabell 3.2

- $T_{pe} = \frac{2\pi}{\omega}$  er perioden estimert ut fra beskrivende funksjoners metode og er gitt i ligning (3.27).
- $T_{pe_{He}} = \frac{2\pi}{\omega_{He}}$  er perioden estimert ut fra Hes variasjonsmetode, hvor  $\omega_{He}$  er gitt i ligning (3.30).
- $T_{ps}$  er avlest periode ved ulineær simulering av Brusselator modellen i ligning (2.1) og (2.2).
- $\frac{|T_{pe}-T_{ps}|}{T_{ps}}$  er den relative feilen mellom den estimerte preioden  $T_{pe}$  og perioden beregnet ved simulering av den ulineære modellen for Brusselatoren i ligningene (2.1) og (2.2).
- $\frac{|T_{pe_{He}}-T_{ps}|}{T_{ps}}$  er den relative feilen mellom perioden beregnet ved simulering og perioden estimert ved hjelp av Hes variasjonsmetode.

Ved å sammenligne de to siste kolonnene i tabell 3.2, ser en at periodeestimatet  $T_{pe_{He}}$  gitt ved ligningene (3.30) til (3.32) som er beregnet av Zhang (2007) er like godt eller bedre enn periodeestimatet  $T_{pe}$  i ligning (3.27) beregnet i kapittel 3.1.

### 3.5.2 Periodeestimat av Zhang

I Zhang (1982) blir det foreslått et annet uttrykk for perioden til Bruselatoren's grensesyklus:

$$T_{pe_{Zh}} \approx -3.760a \cdot b^2 + 4.080b^2 + 16.398a \cdot b - 16.699b - 47.232a + 52.416 \quad (3.33)$$

Uttrykket for  $T_{pe_{Zh}}$  i ligning (3.33) er beregnet ut fra at  $k_i = 1, \forall i = 1, \dots, 4$  og  $a = 1$ . Periodeestimatet  $T_{pe_{Zh}}$  stemmer meget godt når  $b$  varierer så lenge  $k_i = 1, \forall i = 1, \dots, 4$  og  $a = 1$ . Derimot hvis en tillater at også  $a$  varierer, så gir uttrykket i ligning (3.33) svært dårlige periodeestimat for Bruselatoren's grensesyklus.

I tabell 3.3 sammenlignes periodeestimatet  $T_{pe}$  gitt i ligning (3.27) og periodeestimatet  $T_{pe_{Zh}}$  gitt i ligning (3.33). Det er tydelig ut fra tabellen at når  $a = 1$ , så gir periodeestimatet  $T_{pe_{Zh}}$  gitt i ligning (3.33) svært gode verdier, men når  $a \neq 1$ , så er periodeestimatet  $T_{pe_{Zh}}$  gitt i ligning (3.33) svært dårlig.

Tabell 3.3: Sammenligning av periodeestimater beregnet ved hjelp av beskrivende funksjoners metode og metode av Zhang (1982).

$a$	$b$	$T_{pe_{Zh}}$	$T_{ps}$
<b>3.30</b>	<b>12.00</b>	<b>-853.71</b>	<b>2.02</b>
3.00	12.00	-736.14	6.59
1.00	12.00	47.65	45.24
2.40	7.00	-144.60	2.93
<b>1.00</b>	<b>7.00</b>	<b>18.76</b>	<b>18.62</b>
2.00	6.00	-69.31	5.09
1.00	6.00	14.90	14.86
0.25	6.00	78.05	229.76
<b>1.00</b>	<b>3.00</b>	<b>7.16</b>	<b>7.16</b>
0.50	3.00	23.10	23.24
0.25	3.00	31.07	89.77
0.50	1.50	21.00	15.16
0.25	1.50	28.77	51.46
0.25	1.10	30.55	35.34
0.25	1.09	30.61	30.17
0.25	1.07	30.72	26.17

## 3.6 Konklusjon

Det kan ikke sies at modellen beregnet i kapittel 3.1 med det analytiske uttrykket  $T_{pe}$  gitt i ligning (3.27) for perioden i Brusselatorens grensesyklus er en god modell. Det er bare i et begrenset område for  $a$  og  $b$  at uttrykket  $T_{pe}$  gir gode periodeestimer. Dessuten finnes det allerede en modell med uttrykk  $T_{peHe}$  i ligning (3.32) for perioden i Brusselatorens grensesyklus som er bedre. I neste kapittel vil en forsøke å utvide modellen fra kapittel 3.1 i håp om å finne et bedre analytisk uttrykk for perioden i Brusselatorens grensesyklus.





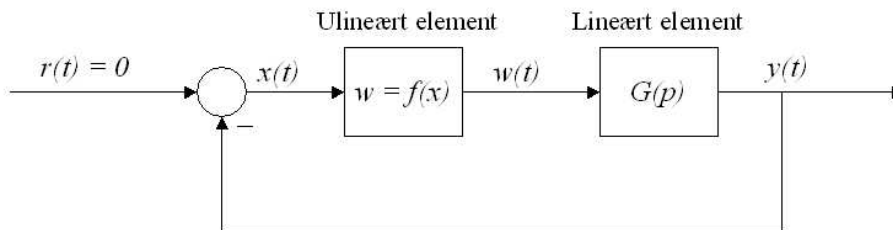
# Kapittel 4

## Utvidet modell

Ekseplene i tabell 3.1 og observasjonene i kapittel 3.4 viser at periodeestimatet  $T_{pe}$  (ligning (3.27)) for Brusselatorens grensesyklus er godt i et svært lite område for  $a$  og  $b$ . Periodeestimatet  $T_{pe}$  er godt når  $b = a^2 + 1 + \delta$  og  $\delta$  er liten sammenlignet med  $a$ . For å få bedre periodeestimer for Brusselatorens grensesyklus i et større område for  $a$  og  $b$  kreves det et mer nøyaktig analytisk uttrykk for perioden enn det gitt i ligning (3.27). I dette kapitlet utvides den enkle modellen, for å få et bedre analytisk uttrykk for grensesyklusens periode.

### 4.1 Utvidelse av modellen

Når modellen skal utvides, betyr det at det tas hensyn til flere ledd i Fourierrekken. Som sagt fungerer det lineære elementet i figur 1.5, 2.13 og 3.1 og nå gjengitt i figur 4.1, som et lavpassfilter på den ulineære utgangen  $f(x)$  som består av en uendelig lang Fourierrekke.



Figur 4.1: Systemstruktur for å anvende beskrivende funksjoners metode

I beregningene av den enkle modellen var antagelsen at alle frekvenser bortsett fra grunnfrekvensen ble filtrert bort. Nå ønskes en mer presis modell, og en må dermed ta hensyn til minst en frekvens til i de videre beregningene.

I valget av antall frekvenser å ta hensyn til, kan det være nyttig å først studere Brusselatoren ved ulike verdier for  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $a$  og  $b$ . Ved å sammenligne de tre retningsdiagrammene i figurene 3.2, 3.5 og 3.8, ser en at grensesyklusen varierer fra å være en fin ellipse i figur 3.2 til å ha nærmest en trekantet form og en skarp kant i figur 3.5. En grensesyklus med form som i figur 3.5 krever mange flere frekvenser for å tilnærmes godt. Men om ikke selve grensesyklusen blir tilnærmet godt med en utvidet modell, kan en likevel håpe på å få et mer tilfredstillende analytisk uttrykk for grensesyklusens periode.

Observasjonen fra kapittel 3.4 om at  $\bar{x}_2$  ikke alltid svinger symmetrisk om andrekoordinaten i likevektspunktet  $\frac{b}{a}$  (ligning (2.6)) indikerer at konstantleddet i utgangen  $y(t)$  i figur 4.1 og dermed også konstantleddet i inngangen  $x(t)$  til det ulineære elementet  $f(x)$  ikke kan settes lik 0, selv om likevektspunktet transformeres til origo slik som i kapittel 2.6. I kapittel 3.1 ble konstantleddet i inngangssignalet  $x(t)$  antatt å være lik 0, siden likevektspunktet var transponert til origo. Den antagelsen vil ikke bli gjort i den utvidede modellen.

Til den utvidede modellen velges inngangen  $x(t)$  til det ulineære elementet  $f(x)$  som i ligning (1.8), og gjengitt i ligning (4.1):

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin \omega t + \alpha_2 \sin(2\omega t + \gamma) \quad (4.1)$$

Den deriverte er da:

$$\dot{x}(t) = \alpha_1 \omega \cos(\omega t) + 2\alpha_2 \omega \cos(2\omega t + \gamma) \quad (4.2)$$

Uttrykket for  $x(t)$  i ligning (4.1) og  $\dot{x}(t)$  i ligning (4.2) settes inn i ligning (2.45), gjengitt i ligning (4.3). Utregningen av  $f(x)$  er imidlertid mye mer krevende for den utvidede modellen. Inngangssignalet  $x(t)$  inneholder flere ledd og det gjør utregningen betydelig mer omfattende. Mye av beregningene er derfor lagt til vedlegg A.

$$\begin{aligned} f(x) = & -k_2 \left( \frac{1}{k_4} \frac{d}{dt}(x) \right)^3 + \left( \frac{b}{a} \frac{k_3 k_4}{k_1} - 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \right) \left( \frac{1}{k_4} \frac{d}{dt}(x) \right)^2 \\ & + k_2 \left( \left( \frac{1}{k_4} \frac{d}{dt}(x) \right) + 2a \frac{k_1}{k_4} \right) \left( \frac{1}{k_4} \frac{d}{dt}(x) \right) (-x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

For å forenkle de videre beregningene gjøres som for den enkle modellen en substitusjon:

$$\theta = \omega t$$

slik at

$$x(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \sin(2\theta + \gamma) \quad (4.4)$$

$$\dot{x}(\theta) = \alpha_1 \omega \cos \theta + 2\alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma) \quad (4.5)$$

Setter så inn for  $x(\theta)$  og  $\dot{x}(\theta)$  i ligning (4.3) og får:

$$\begin{aligned} f(x(\theta)) = & -k_2 \left( \frac{1}{k_4} (\alpha_1 \omega \cos \theta + 2\alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma)) \right)^3 \\ & + \left( \frac{b}{a} \frac{k_3 k_4}{k_1} - 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \right) \left( \frac{1}{k_4} (\alpha_1 \omega \cos \theta + 2\alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma)) \right)^2 \\ & + k_2 \left( \frac{1}{k_4} (\alpha_1 \omega \cos \theta + 2\alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma)) \right)^2 \left( -\alpha_0 - \alpha_1 \sin \theta - \alpha_2 \sin(2\theta + \gamma) \right) \\ & + 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \left( \frac{1}{k_4} (\alpha_1 \omega \cos \theta + 2\alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma)) \right) \left( -\alpha_0 - \alpha_1 \sin \theta - \alpha_2 \sin(2\theta + \gamma) \right) \end{aligned}$$

For å kunne skrive  $f(x(\theta))$  på en enklere form, defineres nye variabler:

$$\begin{aligned} A_1 &= -k_2 \\ A_2 &= \frac{b}{a} \frac{k_3 k_4}{k_1} - 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \\ A_3 &= k_2 \\ A_4 &= 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \end{aligned}$$

samt:

$$\begin{aligned} B_1 &= \left( \frac{1}{k_4} (\alpha_1 \omega \cos \theta + 2\alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma)) \right)^3 \\ B_2 &= \left( \frac{1}{k_4} (\alpha_1 \omega \cos \theta + 2\alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma)) \right)^2 \\ B_3 &= \left( \frac{1}{k_4} (\alpha_1 \omega \cos \theta + 2\alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma)) \right)^2 \left( -\alpha_0 - \alpha_1 \sin \theta - \alpha_2 \sin(2\theta + \gamma) \right) \\ B_4 &= \left( \frac{1}{k_4} (\alpha_1 \omega \cos \theta + 2\alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma)) \right) \left( -\alpha_0 - \alpha_1 \sin \theta - \alpha_2 \sin(2\theta + \gamma) \right) \end{aligned}$$

Da kan  $f(x(\theta))$  skrives slik:

$$f(x(\theta)) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 \quad (4.6)$$

Videre utregninger av  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  og et fullstendig uttrykk for  $f(x)$  er gitt i vedlegg A.

Det er allerede antatt at inngangssignalet til det ulineære elementet i figur 4.1 er en Fourierrekke opp til og med andre harmoniske. Ved å anta at utgangen

fra det ulineære elementet  $f(x)$  også er en Fourierrekke opp til og med andre harmoniske fås:

$$f(x(t)) = \eta_0 + \eta_1 \sin(\omega t + \phi_1) + \eta_2 \sin(2\omega t + \phi_2)$$

Setter inn  $\theta = \omega t$  og får:

$$f(x(\theta)) = \eta_0 + \eta_1 \sin(\theta + \phi_1) + \eta_2 \sin(2\theta + \phi_2) \quad (4.7)$$

Den harmoniske balansen er oppfylt når blokkdiagrammet i figur 4.1 er oppfylt, det vil si når inngangen  $x(t) = -y(t)$  og i tillegg at utgangen  $y(t) = w(t) \cdot G(p)$ . En kan da sette balansen opp slik:

$$-x(t) = w(t) \cdot G(p) \quad (4.8)$$

Fra figur 4.1 er det gitt at  $w(t) = f(x(t))$ , og da kan ligning (4.8) skrives:

$$-x(t) = f(x(t)) \cdot G(p)$$

Ved å benytte  $\theta = \omega t$  og deretter sette inn ligning (4.4) og ligning (4.7) får

$$-x(\theta) = f(x(\theta)) \cdot G(p)$$

↓

$$-\alpha_0 - \alpha_1 \sin \theta - \alpha_2 \sin(2\theta + \gamma) = \left( \eta_0 + \eta_1 \sin(\theta + \phi_1) + \eta_2 \sin(2\theta + \phi_2) \right) \cdot G(p) \quad (4.9)$$

hvor  $G(p)$ , etter Laplacetransformasjon er gitt ved ligning (2.48) og gjengitt i ligning (4.10):

$$G(s) = \frac{-k_4}{s^2 - \text{Tr}(A)s + \det(A)} = \frac{y(s)}{w(s)} \quad (4.10)$$

hvor  $s = 0, j\omega$  og  $j2\omega$ .

Uttrykkene for  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \phi_1$  og  $\phi_2$  i ligning (4.9) er hentet fra Balchen (1992):

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) d\theta \\ \eta_{1s} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \sin \theta d\theta \\ \eta_{1c} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \cos \theta d\theta \\ \eta_1 &= \sqrt{\eta_{1s}^2 + \eta_{1c}^2} \\ \phi_1 &= \arctan \left( \frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{2s} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \sin(2\theta) d\theta \\ \eta_{2c} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \cos(2\theta) d\theta \\ \eta_2 &= \sqrt{\eta_{2s}^2 + \eta_{2c}^2} \\ \phi_2 &= \arctan\left(\frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}}\right)\end{aligned}$$

og beregningene av disse er lagt til vedlegg C. Resultatet fra vedlegg C er at:

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \eta_0(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \omega, \gamma) \\ \eta_1 &= \eta_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \omega, \gamma) \\ \phi_1 &= \phi_1(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \omega, \gamma) \\ \eta_2 &= \eta_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \omega, \gamma) \\ \phi_2 &= \phi_2(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \omega, \gamma)\end{aligned}$$

Med andre ord er alle  $\eta_0$ ,  $\eta_1$ ,  $\phi_1$ ,  $\eta_2$  og  $\phi_2$  funksjoner av  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\omega$  og  $\gamma$ .

De ulike frekvensene i en Fourierrekke er lineært uavhengige av hverandre. Strukturen i figur 4.1 må derfor være oppfylt for hver enkelt frekvens, noe som gir mulighet til å se på en frekvens av gangen. Fra balanseligningen (4.9) kan en utlede ligninger for å løse  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\omega$  og  $\gamma$ . Ligning (4.9) gir følgende 3 ligninger for konstantleddet, førsteharmoniske og andreharmoniske:

$$-\alpha_0 = \eta_0 G(0) \quad (4.11)$$

$$-\alpha_1 \sin \theta = \eta_1 \sin(\theta + \phi_1) G(j\omega) \quad (4.12)$$

$$-\alpha_2 \sin(2\theta + \gamma) = \eta_2 \sin(2\theta + \phi_2) G(j2\omega) \quad (4.13)$$

Siden  $-\sin z = \sin(z + \pi)$ , kan ligningene (4.12) og (4.13) skrives om slik:

$$\alpha_1 \sin(\theta + \pi) = \eta_1 \sin(\theta + \phi_1) G(j\omega) \quad (4.14)$$

$$\alpha_2 \sin(2\theta + \gamma + \pi) = \eta_2 \sin(2\theta + \phi_2) G(j2\omega) \quad (4.15)$$

Videre antas det at de ukjente  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\omega$  og  $\gamma$  er større eller lik 0. Dette er en rimelig antagelse siden  $\alpha_i$  er amplitude for forskjellige frekvenser,  $\omega$  er en frekvens og  $\gamma$  en faseforskyvning.

### 4.1.1 Balanse for konstantleddet

$G(0)$  i ligning (4.11) er beregnet i vedlegg D som:

$$G(0) = -\frac{k_4}{\det(A)} \quad (4.16)$$

hvor  $\det(A)$  er definert i ligning (2.12). Ligning (4.16) innsatt i ligning (4.11) gir:

$$\begin{aligned} -\alpha_0 &= \eta_0 \cdot \left( -\frac{k_4}{\det(A)} \right) \\ \frac{k_4}{\det(A)} \frac{\eta_0}{\alpha_0} &= 1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

### 4.1.2 Balanse for den grunnharmoniske

På grunn av lineær uavhengighet mellom amplitude og frekvens, og siden  $G(j\omega)$  er lineær, kan ligning (4.14) deles opp i to ligninger:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \eta_1 |G(j\omega)| \\ \theta + \pi &= \theta + \phi_1 + \angle G(j\omega) \end{aligned}$$

som kan skrives om til:

$$|G(j\omega)| \frac{\eta_1}{\alpha_1} = 1 \quad (4.18)$$

$$\phi_1 + \angle G(j\omega) = \pi \quad (4.19)$$

### 4.1.3 Balanse for den andre harmoniske

På grunn av lineær uavhengighet mellom amplitude og frekvens, og siden  $G(j2\omega)$  er lineær, kan ligning (4.15) deles opp i to ligninger:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \eta_2 |G(j2\omega)| \\ 2\theta + \gamma + \pi &= 2\theta + \phi_2 + \angle G(j2\omega) \end{aligned}$$

som kan skrives om til:

$$|G(j2\omega)| \frac{\eta_2}{\alpha_2} = 1 \quad (4.20)$$

$$\phi_2 + \angle G(j2\omega) = \pi + \gamma \quad (4.21)$$

#### 4.1.4 Totalt ligningssett

Ligningene 4.17 til 4.21 utgjør et ligningssett på 5 ligninger med 5 ukjente,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\gamma$  og  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\frac{k_4}{\det(A)} \frac{\eta_0}{\alpha_0} &= 1 \\ |G(j\omega)| \frac{\eta_1}{\alpha_1} &= 1 \\ \phi_1 + \angle G(j\omega) &= \pi \\ |G(j2\omega)| \frac{\eta_2}{\alpha_2} &= 1 \\ \phi_2 + \angle G(j2\omega) &= \pi + \gamma\end{aligned}$$

hvor alle de ukjente inngår i alle fem ligningene.

Beregningene av  $\eta_0$ ,  $\eta_1$ ,  $\phi_1$ ,  $\eta_2$  og  $\phi_2$  er som sagt lagt til vedlegg C mens beregningene av  $|G(0)|$ ,  $|G(j\omega)|$ ,  $\angle G(j\omega)$ ,  $|G(j2\omega)|$  og  $\angle G(j2\omega)$  er lagt til vedlegg D.

Utrekning av de fem ligningene i ligningssettet er lagt til vedlegg E. Resultatet fra vedlegg E er gitt i ligningene (E.6), (E.9), (E.13), (E.14) og (E.17).

## 4.2 Kompleksiteten i ligningssettet

For den utvidede modellen er det 5 ligninger, ligning (4.17) til (4.21), med 5 ukjente,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$ . Målet er å løse ligningssettet, og sette opp et nytt analytisk uttrykk for perioden i Brusselatorens grensesyklus. Et analytisk uttrykk for frekvensen  $\omega$  gir et analytisk uttrykk også for perioden  $T_p$  siden  $T_p = \frac{2\pi}{\omega}$ .

På grunn av høy kompleksitet har det så langt ikke lyktes å løse ligningssettet. I dette kapitlet blir det derfor sett nøyere på kompleksiteten i ligningssettet, og antall løsninger for hver variabel i de forskjellige ligningene. Dette er gjort for å prøve løse ut variablene en og en, og dermed redusere ligningssettet. Selv om ikke alle variablene kan løses ut analytisk kan en muligens løse de siste variablene ved en grafisk løsning.

Det er ikke studert kompleksitet i ligningene med hensyn på variabelen  $\gamma$ . Variabelen  $\gamma$  opptrer alltid som et argument i en trigonometrisk funksjon, og opptrer flere ganger i hver ligning (4.17) til (4.21).

Kompleksiteten i ligningene presenteres i tabeller. For å lettere forstå informasjonen gitt i tabellene, er det en lengre forklaring til den første tabellen. Strukturen i de andre tabellene er lik som for den første.

### 4.2.1 Kompleksitet i 1.ligning

Ligning (4.17) er beregnet i vedlegg E (ligning (E.6)) til å være:

$$0 = -4\alpha_0 k_4^2 \det(A) + 6\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma A_1 + \left(2k_4 \alpha_1^2 \omega^2 + 8k_4 \alpha_2^2 \omega^2\right) A_2 \\ + \left(-2k_4 \alpha_0 \alpha_1^2 \omega^2 - 8k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 + 3k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma\right) A_3 \quad (4.22)$$

Ligning (4.22) har forskjellig kompleksitet alt etter hvilken ukjent en tar utgangspunkt i. Ved å sette opp ligningen på nytt er kompleksiteten for hver variabel vist til høyre. Høyeste orden for hver variabel er uthevet og indikerer antall løsninger i ligningen for den aktuelle variabel.

$$\begin{array}{ll} 0 = -4\alpha_0 k_4^2 \det(A) & \alpha_0^1 \quad \alpha_1^0 \quad \alpha_2^0 \quad \omega^0 \\ + \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma A_1 & \alpha_0^0 \quad \alpha_1^2 \quad \alpha_2^1 \quad \omega^3 \\ + 2k_4 \alpha_1^2 \omega^2 A_2 & \alpha_0^0 \quad \alpha_1^2 \quad \alpha_2^0 \quad \omega^2 \\ + 8k_4 \alpha_2^2 \omega^2 A_2 & \alpha_0^0 \quad \alpha_1^0 \quad \alpha_2^2 \quad \omega^2 \\ - 2k_4 \alpha_0 \alpha_1^2 \omega^2 A_3 & \alpha_0^1 \quad \alpha_1^2 \quad \alpha_2^0 \quad \omega^2 \\ - 8k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 A_3 & \alpha_0^1 \quad \alpha_1^0 \quad \alpha_2^2 \quad \omega^2 \\ + 3k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma A_3 & \alpha_0^0 \quad \alpha_1^2 \quad \alpha_2^1 \quad \omega^2 \end{array}$$

Her har hvert ledd i ligning (4.22) fått en egen linje. Bak hvert ledd står det hvilken orden/grad dette leddet har med hensyn på variablene  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  og  $\omega$ . Når det i første linje viser  $\alpha_0^1$  så betyr det at med hensyn på variabelen  $\alpha_0$  er det første leddet et førstegradsledd. I første linje står det også  $\alpha_1^0$ ,  $\alpha_2^0$  og  $\omega^0$  som betyr at med hensyn på  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  og  $\omega$  er dette første leddet et konstantledd. Hva slags orden ligning (4.22) har med hensyn på de forskjellige variablene  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  og  $\omega$  er vist i tabell 4.1.



Tabell 4.1: Kompleksiteten i ligning (4.22) m.h.p. forskjellige variabler. Merk at med antagelsen  $\alpha_1 > 0$  er det bare en løsning for  $\alpha_1$ .

	0. c	1. b	2. a	3.	Antall løsninger	Prinsipiell løsningsstruktur
$\alpha_0$	x	x	-	-	1	$\left(-\frac{c}{b}\right)$
$\alpha_1$	x	-	x	-	2	$\left(\pm \sqrt{\frac{c}{a}}\right)$
$\alpha_2$	x	x	x	-	2	$\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$
$\omega$	x	-	x	x	3	

I tabellene betyr 0., 1., 2. osv. henholdsvis 0.gradsledd/konstantledd, 1.gradsledd, 2.gradsledd osv.

Et kryss x i tabellen betyr at det eksisterer ledd i ligning (4.22) som har den aktuelle graden (i kolonnen) med hensyn på den aktuelle variabelen (i raden). Tabellen viser også hvor mange løsninger det finnes for hver variabel ut fra ligning (4.22). For de tilfellene der det er mulig er det i siste kolonne oppgitt prinsipiell løsningsstruktur.

### 4.2.2 Kompleksitet i 2.ligning

Ligning (4.18) er beregnet i vedlegg E (ligning (E.9)) til å være:

$$\begin{aligned}
0 = & 16k_4^4 \left( (\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2 \right) + \omega^2 \left( 576\alpha_2^4\omega^4 A_1^2 \right. \\
& + 72\alpha_1^2\alpha_2^2\omega^4 A_1^2 + 192\alpha_2^3\omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_2 - 192\alpha_0\alpha_2^3\omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_3 \\
& - 96\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 k_4^2 A_1 A_4 + 48\alpha_2^3\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_1 A_4 + 9\alpha_1^4\omega^4 A_1^2 \\
& + 24\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_2 - 24\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_3 \\
& - 12\alpha_0\alpha_1^2\omega^2 k_4^2 A_1 A_4 + 6\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_1 A_4 + 64\alpha_2^2\omega^2 k_4^2 A_2^2 \\
& + 64\alpha_2^3\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_2 A_3 - 64\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 k_4^2 A_2 A_3 + 8\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_2 A_3 \\
& - 32\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma k_4^3 A_2 A_4 + 64\alpha_0^2\alpha_2^2\omega^2 k_4^2 A_3^2 - 8\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_3^2 \\
& + \alpha_1^4\omega^2 k_4^2 A_3^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2\omega \cos \gamma k_4^3 A_3 A_4 + 32\alpha_0^2\alpha_2\omega \cos \gamma k_4^3 A_3 A_4 \\
& \left. + 4\alpha_2^2 k_4^4 A_4^2 - 8\alpha_0\alpha_2 \sin \gamma k_4^4 A_4^2 + 16\alpha_0^2 k_4^4 A_4^2 \right) \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Kompleksiteten i ligning (4.23) er fremstilt i tabell 4.2:

Tabell 4.2: Kompleksiteten i ligning (4.23) m.h.p. forskjellige variabler. Merk at med antagelsen  $\alpha_1 > 0$  er det bare 2 løsninger for  $\alpha_1$ .

	0. c	1. b	2. a	3.	4. d	5.	6.	Antall løsninger	Prinsipiell løsningsstruktur
$\alpha_0$	x	x	x	-	-	-	-	2	$\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$
$\alpha_1$	x	-	x	-	x	-	-	4	$\left(\pm \sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4dc}}{2d}}\right)$
$\alpha_2$	x	x	x	x	x	-	-	4	
$\omega$	x	-	x	x	x	x	x	6	

### 4.2.3 Kompleksitet i 3.ligning

Ligning (4.19) er beregnet i vedlegg E (ligning (E.13)) til å være:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(A)\omega k_4 \left( -8\alpha_2\omega \sin \gamma A_2 + \left( -8\alpha_2^2\omega + 8\alpha_0\alpha_2\omega \sin \gamma - \alpha_1^2\omega \right) A_3 + 2\alpha_2 \cos \gamma k_4 A_4 \right) \\ & + (\det(A) - \omega^2) \left( \left( 24\alpha_2^2\omega^2 + 3\alpha_1^2\omega^2 \right) A_1 + 8\alpha_2\omega \cos \gamma k_4 A_2 \right. \\ & \left. - 8\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma k_4 A_3 + \left( 2\alpha_2 \sin \gamma - 4\alpha_0 \right) k_4^2 A_4 \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Kompleksiteten i ligning (4.24) er gitt i tabell 4.3:

Tabell 4.3: Kompleksiteten i ligning (4.24) m.h.p. forskjellige variabler. Merk at med antagelsen  $\alpha_1 > 0$  er det bare en løsning for  $\alpha_1$ .

	0. c	1. b	2. a	3.	4.	Antall løsninger	Prinsipiell løsningsstruktur
$\alpha_0$	x	x	-	-	-	1	$\left(-\frac{c}{b}\right)$
$\alpha_1$	x	-	x	-	-	2	$\left(\pm \sqrt{\frac{c}{a}}\right)$
$\alpha_2$	x	x	x	-	-	2	$\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$
$\omega$	x	-	x	x	x	4	

### 4.2.4 Kompleksitet i 4.ligning

Ligning (4.20) er ikke beregnet videre i vedlegg E på grunn av kompleksitet, men gjengis i ligning (4.25) uforandret:

$$|G(j2\omega)| \frac{\eta_2}{\alpha_2} = 1 \quad (4.25)$$

Kompleksiteten i ligning (4.25) er likevel studert og oppsummert i tabell 4.4

Tabell 4.4: Kompleksiteten i ligning (4.25) m.h.p. forskjellige variabler. Merk at igjen er det slik at med antagelsen  $\alpha_1 > 0$  er det bare 2 løsninger for  $\alpha_1$ .

	0. c	1. b	2. a	3.	4. d	5.	6.	Antall løsninger	Prinsipiell løsningsstruktur
$\alpha_0$	x	x	x	-	-	-	-	2	$\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$
$\alpha_1$	x	-	x	-	x	-	-	4	$\left(\pm \sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4dc}}{2d}}\right)$
$\alpha_2$	x	x	x	x	x	-	-	4	
$\omega$	x	-	x	x	x	x	x	6	

### 4.2.5 Kompleksitet i 5.ligning

Ligning (4.21) er beregnet i vedlegg E (ligning (E.17)) til å være:

$$2\text{Tr}(A)\omega(\eta_{2s} + \eta_{2c} \tan \gamma) + (\det(A) - 4\omega^2)(\eta_{2c} + \eta_{2s} \tan \gamma) = 0 \quad (4.26)$$

For enkelhetsskyld er ikke  $\eta_{2s}$  og  $\eta_{2c}$  satt inn i ligning (4.26). Kompleksiteten er likevel studert og oppsummert i tabell 4.5.

Tabell 4.5: Kompleksiteten i ligning (4.26) m.h.p. forskjellige variabler. Merk at med antagelsen  $\alpha_1 > 0$  er det bare en løsning for  $\alpha_1$ .

	0. c	1. b	2. a	3.	4.	5.	Antall løsninger	Prinsipiell løsningsstruktur
$\alpha_0$	x	x	-	-	-	-	1	$\left(-\frac{c}{b}\right)$
$\alpha_1$	x	-	x	-	-	-	2	$\left(\pm \sqrt{\frac{c}{a}}\right)$
$\alpha_2$	x	x	-	x	-	-	3	
$\omega$	-	x	x	x	x	x	4	

### 4.2.6 Kompleksitet i ligningssettet

I tabell 4.6 er informasjonen fra tabellene 4.1 til 4.5 om antall løsninger for hver variabel i de forskjellige ligningene samlet.

Tabell 4.6: Oversikt over antall løsninger for hver variabel i ligningene.

Ligning	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\omega$
(4.22)	1	2	2	3
(4.23)	2	4	4	6
(4.24)	1	2	2	4
(4.25)	2	4	4	6
(4.26)	1	2	3	4



I de tre tilfellene oppsumert i tabell 4.7 til 4.9, er to av ligningene i det opprinnelige ligningssettet redusert til en. Ved samtidig å sette inn en løsning for  $\alpha_1 > 0$  i de resterende resterende ligningene, så reduseres hele ligningssettet til 4 ligninger med 4 ukjente  $\alpha_0$ ,  $\alpha_2$ ,  $\omega$  og  $\gamma$ . Ligningssettet løses greit ned til 3 ligninger med 3 ukjente  $\alpha_2$ ,  $\omega$  og  $\gamma$ , men da er kompleksiteten i de 3 resterende ligningene så høy at det ikke har vært mulig å løse ut flere variabler. Ligningssettet med ligningene (4.22) til (4.26) viser seg å ikke være løsbart.



## Kapittel 5

# Oppsummering

I denne rapporten er det gjort en generell analyse av Brusselatoren og dens dynamiske egenskaper. Videre er beskrivende funksjoners metode anvendt for å beregne en modell som tilnærmer Brusselatorens grensesyklus. Uttrykket for frekvensen  $\omega$  i denne tilnærmingen er deretter brukt til å sette opp et analytisk uttrykk  $T_{pe}$  i ligning (3.27) for perioden i Brusselatorens grensesyklus. Uttrykket  $T_{pe}$  gir muligheten til å si noe om adaptasjons egenskapene i perioden for Brusselatorens grensesyklus. Ut i fra uttrykket for  $T_{pe}$  kan en si at det for grensesyklusen til Brusselatoren *ikke* eksisterer robust perfekt adaptasjon i periode verken med hensyn på hastighetskonstantene  $k_1, k_2, k_3, k_4$  eller konsentrasjonene  $a$  og  $b$  fordi uttrykket  $T_{pe}$  er avhengig av alle disse parameterne. Derimot er uttrykket  $T_{pe}$  på en form som gjør at en kan finne ”fininnstilt” perfekt adaptasjon for  $T_{pe}$ . Nyttverdien av å finne ”fininnstilt” perfekt adaptasjon for  $T_{pe}$  er avhengig av hvor godt uttrykket  $T_{pe}$  beskriver perioden i Brusselatorens grensesyklus.

Det analytiske uttrykket  $T_{pe}$  i ligning (3.27) for perioden i Brusselatorens grensesyklus er verifisert ved å sammenligne periodeestimer beregnet ut fra ligning (3.27) og periodeverdier fra ulineær simulering av Brusselatormodellen i ligning (2.1) og (2.2). Verifiseringen viser at det er stor spredning i hvor godt uttrykket  $T_{pe}$  tilnærmer perioden i Brusselatorens grensesyklus. Med utgangspunkt i eksemplene i tabell 3.1 og verifikasjonseksemplene med figurer i kapittel 3.4.1 til 3.4.3 er det kommentert sammenhenger og betingelser for når uttrykket  $T_{pe}$  i ligning (3.27) gir en god tilnærming av perioden til Brusselatorens grensesyklus og når det ikke gjør det.

Det er også gjort en sammenligning mellom det analytiske uttrykket  $T_{pe}$  og andre rapporterte modeller for å beregne perioden i Brusselatorens grensesyklus. Et av disse periodeuttrykkene  $T_{pe_{He}}$  i ligning (3.32) beregnet ved Hes variasjonsmetode gav et uttrykk som i alle eksemplene i denne rapporten gav like gode eller bedre periodeestimat for Brusselatorens grensesyklus enn

periodeestimat beregnet ut fra ligning (3.27). Selvom uttrykket for perioden i Brusselatorens grensesyklus beregnet ved hjelp av Hes variasjonsmetode er bedre enn det beregnet i ligning (3.27) ved hjelp av beskrivende funksjoners metode, er heller ikke dette et godt nok uttrykk for å kunne si noe om "fininnstilt" perfekt adaptasjon i periode med større sikkerhet. Også dette uttrykket  $T_{pe_{He}}$  i ligning (3.32) gir store avvik i periodeestimatene i forhold til periodeverdiene funnet ved ulinear simulering. Dessuten er alle hastighetskonstantene antatt lik 1 i beregningen av dette uttrykket. Det er med andre ord ikke mulig ut fra uttrykket i ligning (3.32) å lete etter "fininnstilt" perfekt adaptasjon for  $T_{pe_{He}}$  med hensyn på hastighetskonstantene  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  og  $k_4$ .

For å få et bedre analytisk uttrykk for perioden i Brusselatorens grensesyklus enn det gitt ved ligning (3.27) ble det forsøkt å beregne en utvidet modell, også denne ved hjelp av beskrivende funksjoners metode. Ligningssettet som må løses for den utvidede modellen består av 5 ligninger (4.17) til (4.21) med 5 ukjente  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\omega$  og  $\gamma$ . Ligningssettet lar seg redusere ned til 3 ligninger med 3 ukjente, men deretter er de resterende ligningene av en så høy grad at de ikke lar seg løse.

Kompleksiteten i ligningssettet tyder på at det er flere løsninger for  $\omega$ , som igjen vil gi flere analytiske uttrykk for perioden i Brusselatorens grensesyklus. Et sett av uttrykk for perioden i Brusselatorens grensesyklus kan muligens sammen gi en god tilnærming til Brusselatorens grensesyklus i et større område, enn for  $T_{pe}$  gitt i ligning (3.27). Utfordringen med et sett av tilnærminger er å vite hvilken tilnærming som er best for et gitt tilfelle. En annen svakhet ved å ha et sett av periodeuttrykk i stedet for bare ett uttrykk er at det gir liten mulighet for å finne "fininnstilt" perfekt adaptasjon.



## Kapittel 6

# Konklusjon

Ut fra denne rapporten kan en konkludere med at det ikke eksisterer robust perfekt adaptasjon for perioden i Brusselatorens grensesyklus hverken med hensyn på hastighetskonstantene  $k_1, k_2, k_3, k_4$  eller konsentrasjonene  $a$  og  $b$ .

Når det gjelder ”finninstilt” perfekt adaptasjon i periode for Brusselatorens grensesyklus, kan en i alle fall finne ”finninstilt” perfekt adaptasjon for det analytiske uttrykket  $T_{pe}$  i ligning (3.27). Nytteverdien av dette er imidlertid ikke så stor siden tilnærmingen  $T_{pe}$  er begrenset i presisjon.

Et bedre analyttisk uttrykk for perioden i Brusselatorens grensesyklus enn det gitt ved ligning (3.27) kan ha ”finninstilt” perfekt adaptasjon som er av større nytteverdi.

Beskrivende funksjoners metode har vist seg å øke betraktelig i kompleksitet når det tas med flere ledd i utgangen  $y(t)$  (og dermed også inngangen  $x(t) = -y(t)$ ) i figur 4.1. For å finne et mer nøyaktig analytisk uttrykk for Brusselatorens grensesyklus enn det funnet i ligning (3.27) bør en derfor gjøre bruk av en annen metode.



# Bibliografi

- Balchen, J. G. (1992). *Ulineære systemer og stabilitetsteori*.
- Bashkirtseva, I. A. and T. V. Perevalova (2007). Analysis of stochastic attractors under the stationary point-cycle bifurcation. *Automation and Remote Control* **68**(10), 1778–1793.
- Drengstig, T., H. R. Ueda and P. Ruoff (2008). Predicting perfect adaptation motifs in reaction kinetic networks. *Journal of physical chemistry B* **112**(51), 16752–16758.
- Glansdorff, P. and I. Prigogine (1971). *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. John Wiley and Sons, Ltd.
- He, Ji-H. (2003). Determination of limit cycles for strongly nonlinear oscillators. *Physical Review Letters* **90**(17), 174301/1–174303/3.
- Higgins, J. (1967). The theory of oscillating reactions. *Industrial and engineering chemistry* **59**(5), 19–62.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. 3 ed. Prentice Hall. Upper Saddle River, New Jersey 07458.
- Lindstrøm, T. (1996). *Kalkulus*. 2 ed. Universitetsforlaget. Oslo.
- Petterson, K. Y. (2009). Personlig kommunikasjon.
- Prigogine, I. and R. Lefever (1968). Symmetry breaking instabilities in dissipative systems ii. *Journal of Chem. Phys.* **48**(4), 1695–1700.
- Qin, Y. and X. Zhen (1980). Qualitative investigation of the differential equation of the brusselator in biochemistry. *Kexue Tongbao* **25**(4), 273–276.
- Ruoff, P. (1992). Introducing temperature-compensation in any reaction kinetic oscillator model. *Journal of interdisciplinary cycle research* **23**(2), 92–99.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and chaos*. Westview Press.

- Winfree, A. T. (1984). The prehistory of the belousov-zhabotinsky oscillator. *Journal of Chemical Education* **61**(8), 661–663.
- Zhang, J. (2007). Limit cycle for the brusselator by he's variational method. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Zhang, S. (1982). Approximate solution og the brusselator limit cycle in biochemistry. *Kexue Tongbao* **27**(4), 433–437.

# Vedlegg



## Tillegg A

# Beregning av $f(x)$ for utvidet modell

Ligning (4.6) gir  $f(x)$  på formen:

$$f(x) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 \quad (\text{A.1})$$

hvor:

$$A_1 = -k_2 \quad (\text{A.2})$$

$$A_2 = \frac{b}{a} \frac{k_3 k_4}{k_1} - 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \quad (\text{A.3})$$

$$A_3 = k_2 \quad (\text{A.4})$$

$$A_4 = 2a \frac{k_1 k_2}{k_4} \quad (\text{A.5})$$

og

$$B_1 = \frac{1}{k_4^3} \left( \alpha_1^3 \omega^3 \cos^3(\theta) + 6\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos^2 \theta \cos(2\theta + \gamma) \right. \\ \left. + 12\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^3 \cos \theta \cos^2(2\theta + \gamma) + 8\alpha_2^3 \omega^3 \cos^3(2\theta + \gamma) \right) \quad (\text{A.6})$$

$$B_2 = \frac{1}{k_4^2} \left( \alpha_1^2 \omega^2 \cos^2 \theta + 4\alpha_1 \alpha_2 \omega^2 \cos \theta \cos(2\theta + \gamma) \right. \\ \left. + 4\alpha_2^2 \omega^2 \cos^2(2\theta + \gamma) \right) \quad (\text{A.7})$$

$$B_3 = \frac{1}{k_4^2} \left( -\alpha_0 \alpha_1^2 \omega^2 \cos^2 \theta - 4\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \omega^2 \cos \theta \cos(2\theta + \gamma) \right. \\ - 4\alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2(2\theta + \gamma) - \alpha_1^3 \omega^2 \cos^2 \theta \sin \theta \\ - 4\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta \cos(2\theta + \gamma) - 4\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 \sin \theta \cos^2(2\theta + \gamma) \\ - \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos^2 \theta \sin(2\theta + \gamma) \\ - 4\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 \cos(\theta) \cos(2\theta + \gamma) \sin(2\theta + \gamma) \\ \left. - 4\alpha_2^3 \omega^2 \cos^2(2\theta + \gamma) \sin(2\theta + \gamma) \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}
B_4 = \frac{1}{k_4} & \left( -\alpha_0 \alpha_1 \omega \cos(\theta) - 2\alpha_0 \alpha_2 \omega \cos(2\theta + \gamma) - \alpha_1^2 \omega \cos \theta \sin \theta \right. \\
& - 2\alpha_1 \alpha_2 \omega \sin \theta \cos(2\theta + \gamma) - \alpha_1 \alpha_2 \omega \cos \theta \sin(2\theta + \gamma) \\
& \left. - 2\alpha_2^2 \omega \cos(2\theta + \gamma) \sin(2\theta + \gamma) \right) \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

For å beregne  $f(x)$  gitt i ligning (A.1) er det utregningene delt opp i mindre deler. For lettere å kunne trekke sammen ledd til slutt, er det ønskelig å omformulere  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  og  $B_4$  gitt i ligningene (A.6) til (A.9) slik at det bare er en variabel i hvert argument for sin og cos. For å gjøre dette benyttes følgende hjelpesetning:

**Lemma:**

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{A.10})$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y \quad (\text{A.11})$$

Legg merke til at når  $x = y$ , reduseres ligningene (A.10) og (A.11) til:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Ved hjelp av ligning (A.10) og ligning (A.11) kan det vises at:

$$\cos(2\theta + \gamma) = \cos \gamma \cos^2 \theta - \cos \gamma \sin^2 \theta - 2 \sin \gamma \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.12})$$

$$\sin(2\theta + \gamma) = 2 \cos \gamma \cos \theta \sin \theta + \sin \gamma \cos^2 \theta - \sin \gamma \sin^2 \theta \quad (\text{A.13})$$

Ligningene (A.12) og (A.13) gjør at en videre kan regne ut:

$$\begin{aligned}
\cos^2(2\theta + \gamma) &= \cos^2 \gamma \cos^4 \theta - 4 \cos \gamma \sin \gamma \cos^3 \theta \sin \theta \\
&+ (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&+ 4 \cos \gamma \sin \gamma \cos \theta \sin^3 \theta + \cos^2 \gamma \sin^4 \theta \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^3(2\theta + \gamma) &= \cos^3 \gamma \cos^6 \theta - 6 \cos^2 \gamma \sin \gamma \cos^5 \theta \sin \theta \\
&+ (12 \cos \gamma \sin^2 \gamma - 3 \cos^3 \gamma) \cos^4 \theta \sin^2 \theta \\
&+ (12 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 8 \sin^3 \gamma) \cos^3 \theta \sin^3 \theta \\
&+ (3 \cos^3 \gamma - 12 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \cos^2 \theta \sin^4 \theta \\
&- 6 \cos^2 \gamma \sin \gamma \cos \theta \sin^5 \theta - \cos^3 \gamma \sin^6 \theta \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\cos(2\theta + \gamma) \sin(2\theta + \gamma) &= \cos \gamma \sin \gamma \cos^4 \theta \\
&+ (2 \cos^2 \gamma - 2 \sin^2 \gamma) \cos^3 \theta \sin \theta \\
&- 6 \cos \gamma \sin \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&+ (2 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \cos \theta \sin^3 \theta \\
&+ \cos \gamma \sin \gamma \sin^4 \theta
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2(2\theta + \gamma) \sin(2\theta + \gamma) &= \cos^2 \gamma \sin \gamma \cos^6 \theta \\
&+ (2 \cos^3 \gamma - 4 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \cos^5 \theta \sin \theta \\
&+ (4 \sin^3 \gamma - 11 \cos^2 \gamma \sin \gamma) \cos^4 \theta \sin^2 \theta \\
&+ (16 \cos \gamma \sin^2 \gamma - 4 \cos^3 \gamma) \cos^3 \theta \sin^3 \theta \\
&+ (11 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma) \cos^2 \theta \sin^4 \theta \\
&+ (2 \cos^3 \gamma - 4 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \cos \theta \sin^5 \theta \\
&- \cos^2 \gamma \sin \gamma \sin^6 \theta
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Substituerer så ligning (A.12) til (A.17) inn i ligning. (A.6) til (A.9) og trekker sammen. Det gir:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{k_4^3} \left( \alpha_1^3 \omega^3 \cos^3 \theta + 6 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma \cos^4 \theta - 6 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right. \\
&- 12 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \sin \gamma \cos^3 \theta \sin \theta + 12 \alpha_1 \alpha_2^2 \omega^3 \cos^2 \gamma \cos^5 \theta \\
&+ 12 \alpha_1 \alpha_2^2 \omega^3 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \cos^3 \theta \sin^2 \theta \\
&- 48 \alpha_1 \alpha_2^2 \omega^3 \cos \gamma \sin \gamma \cos^4 \theta \sin \theta + 12 \alpha_1 \alpha_2^2 \omega^3 \cos^2 \gamma \cos \theta \sin^4 \theta \\
&+ 48 \alpha_1 \alpha_2^2 \omega^3 \cos \gamma \sin \gamma \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 8 \alpha_2^3 \omega^3 \cos^3 \gamma \cos^6 \theta \\
&- 48 \alpha_2^3 \omega^3 \cos^2 \gamma \sin \gamma \cos^5 \theta \sin \theta \\
&+ 8 \alpha_2^3 \omega^3 (12 \cos \gamma \sin^2 \gamma - 3 \cos^3 \gamma) \cos^4 \theta \sin^2 \theta \\
&+ 8 \alpha_2^3 \omega^3 (12 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 8 \sin^3 \gamma) \cos^3 \theta \sin^3 \theta \\
&+ 8 \alpha_2^3 \omega^3 (3 \cos^3 \gamma - 12 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \cos^2 \theta \sin^4 \theta \\
&\left. - 48 \alpha_2^3 \omega^3 \cos^2 \gamma \sin \gamma \cos \theta \sin^5 \theta - 8 \alpha_2^3 \omega^3 \cos^3 \gamma \sin^6 \theta \right) \tag{A.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{k_4^2} \left( \alpha_1^2 \omega^2 \cos^2 \theta + 4 \alpha_1 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma \cos^3 \theta - 4 \alpha_1 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma \cos \theta \sin^2 \theta \right. \\
&- 8 \alpha_1 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma \cos^2 \theta \sin \theta + 4 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma \cos^4 \theta \\
&+ 4 \alpha_2^2 \omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&- 16 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \cos^3 \theta \sin \theta + 4 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma \sin^4 \theta \\
&\left. + 16 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \cos \theta \sin^3 \theta \right) \tag{A.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 = \frac{1}{k_4^2} & \left( -\alpha_0 \alpha_1^2 \omega^2 \cos^2 \theta - 4\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma \cos^3 \theta \right. \\
& + 4\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma \cos \theta \sin^2 \theta + 8\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma \cos^2 \theta \sin \theta \\
& - 4\alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma \cos^4 \theta - 4\alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
& + 16\alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \cos^3 \theta \sin \theta - 4\alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma \sin^4 \theta \\
& - 16\alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \cos \theta \sin^3 \theta - \alpha_1^3 \omega^2 \cos^2 \theta \sin \theta \\
& - 4\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma \cos^3 \theta \sin \theta + 4\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma \cos \theta \sin^3 \theta \\
& + 8\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 4\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma \cos^4 \theta \sin \theta \\
& - 4\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \theta \sin^3 \theta \\
& + 16\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \cos^3 \theta \sin^2 \theta - 4\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma \sin^5 \theta \\
& - 16\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \cos \theta \sin^4 \theta - 2\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma \cos^3 \theta \sin \theta \\
& - \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma \cos^4 \theta + \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
& - 4\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \cos^5 \theta - 4\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 (2 \cos^2 \gamma - 2 \sin^2 \gamma) \cos^4 \theta \sin \theta \\
& + 24\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \cos^3 \theta \sin^2 \theta \\
& - 4\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 (2 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \theta \sin^3 \theta \\
& - 4\alpha_1 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \cos \theta \sin^4 \theta - 4\alpha_2^3 \omega^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma \cos^6 \theta \\
& - \alpha_2^3 \omega^2 (2 \cos^3 \gamma - 4 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \cos^5 \theta \sin \theta \\
& + 4\alpha_2^3 \omega^2 (11 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma) \cos^4 \theta \sin^2 \theta \\
& - 4\alpha_2^3 \omega^2 (16 \cos \gamma \sin^2 \gamma - 4 \cos^3 \gamma) \cos^3 \theta \sin^3 \theta \\
& - 4\alpha_2^3 \omega^2 (11 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma) \cos^2 \theta \sin^4 \theta \\
& - 4\alpha_2^3 \omega^2 (2 \cos^3 \gamma - 4 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \cos \theta \sin^5 \theta \\
& \left. + 4\alpha_2^3 \omega^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma \sin^6 \theta \right) \tag{A.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 = \frac{1}{k_4} & \left( -\alpha_0 \alpha_1 \omega \cos \theta - 2\alpha_0 \alpha_2 \omega \cos \gamma \cos^2 \theta + 4\alpha_0 \alpha_2 \omega \sin \gamma \cos \theta \sin \theta \right. \\
& + 2\alpha_0 \alpha_2 \omega \cos \gamma \sin^2 \theta - \alpha_1^2 \omega \cos \theta \sin \theta - 2\alpha_1 \alpha_2 \omega \cos \gamma \cos^2 \theta \sin \theta \\
& + 4\alpha_1 \alpha_2 \omega \sin \gamma \cos \theta \sin^2 \theta + 2\alpha_1 \alpha_2 \omega \cos \gamma \sin^3 \theta - \alpha_1 \alpha_2 \omega \sin \gamma \cos^3 \theta \\
& - 2\alpha_1 \alpha_2 \omega \cos \gamma \cos^2 \theta \sin \theta + \alpha_1 \alpha_2 \omega \sin \gamma \cos \theta \sin^2 \theta \\
& - 2\alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma \cos^4 \theta - 2\alpha_2^2 \omega (2 \cos^2 \gamma - 2 \sin^2 \gamma) \cos^3 \theta \sin \theta \\
& + 12\alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 2\alpha_2^2 \omega (2 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \cos \theta \sin^3 \theta \\
& \left. - 2\alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma \sin^4 \theta \right) \tag{A.21}
\end{aligned}$$

Uttrykkene for  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  og  $B_4$  gitt i ligningene (A.18) til (A.21) settes så inn i ligning (A.1) og trekkes sammen til:

$$\begin{aligned}
f(x(\theta)) = & \frac{1}{k_4^3} \left( (8A_1\alpha_2^3\omega^3 \cos^3 \gamma - 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma) \cos^6 \theta \right. \\
& + \left( -48A_1\alpha_2^3\omega^3 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 (2 \cos^3 \gamma - 4 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \right) \cos^5 \theta \sin \theta \\
& + \left( 8A_1\alpha_2^3\omega^3 (12 \cos \gamma \sin^2 \gamma - 3 \cos^3 \gamma) + 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 (11 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma) \right) \cos^4 \theta \sin^2 \theta \\
& + \left( 8A_1\alpha_2^3\omega^3 (12 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 8 \sin^3 \gamma) - 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 (16 \cos \gamma \sin^2 \gamma - 4 \cos^3 \gamma) \right) \cos^3 \theta \sin^3 \theta \\
& + \left( 8A_1\alpha_2^3\omega^3 (3 \cos^3 \gamma - 12 \cos \gamma \sin^2 \gamma) - 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 (11 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma) \right) \cos^2 \theta \sin^4 \theta \\
& + \left( -48A_1\alpha_2^3\omega^3 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 (2 \cos^3 \gamma - 4 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \right) \cos \theta \sin^5 \theta \\
& + \left( -8A_1\alpha_2^3\omega^3 \cos^3 \gamma + 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma \right) \sin^6 \theta \\
& + \left( 12A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 \cos^2 \gamma - 4A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \right) \cos^5 \theta \\
& + \left( -48A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 \cos \gamma \sin \gamma - 4A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 (3 \cos^2 \gamma - 2 \sin^2 \gamma) \right) \cos^4 \theta \sin \theta \\
& + \left( 12A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) + 40A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \right) \cos^3 \theta \sin^2 \theta \\
& + \left( 48A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 \cos \gamma \sin \gamma - 4A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 (-4 \cos^2 \gamma + 6 \sin^2 \gamma) \right) \cos^2 \theta \sin^3 \theta \\
& + \left( 12A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 \cos^2 \gamma - 20A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \right) \cos \theta \sin^4 \theta \\
& + \left( -4A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma \right) \sin^5 \theta \\
& + \left( 6A_1\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma + 4A_2k_4\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma - 4A_3k_4\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma - A_3k_4\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma \right. \\
& \left. - 2A_4k_4^2\alpha_2^2\omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \cos^4 \theta \\
& + \left( -12A_1\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \sin \gamma - 16A_2k_4\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma + 16A_3k_4\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \right. \\
& \left. - 4A_3k_4\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \cos \gamma - 2A_3k_4\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \cos \gamma - 2A_4k_4^2\alpha_2^2\omega (2 \cos^2 \gamma - 2 \sin^2 \gamma) \right) \cos^3 \theta \sin \theta \\
& + \left( -6A_1\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma + 4A_2k_4\alpha_2^2\omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) - 4A_3k_4\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \right. \\
& \left. + 9A_3k_4\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma + 12A_4k_4^2\alpha_2^2\omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
& + \left( 16A_2k_4\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma - 16A_3k_4\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma + 4A_3k_4\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \cos \gamma \right. \\
& \left. - 2A_4k_4^2\alpha_2^2\omega (-2 \cos^2 \gamma + 2 \sin^2 \gamma) \right) \cos \theta \sin^3 \theta \\
& + \left( 4A_2k_4\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma - 4A_3k_4\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma - 2A_4k_4^2\alpha_2^2\omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \sin^4 \theta \\
& + \left( A_1\alpha_1^3\omega^3 + 4A_2k_4\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma - 4A_3k_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma - A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \sin \gamma \right) \cos^3 \theta \\
& + \left( -8A_2k_4\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma + 8A_3k_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma - A_3k_4\alpha_1^3\omega^2 - 4A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \cos \gamma \right) \cos^2 \theta \sin \theta \\
& + \left( -4A_2k_4\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma + 4A_3k_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma + 5A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \sin \gamma \right) \cos \theta \sin^2 \theta \\
& + \left( 2A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \cos \gamma \right) \sin^3 \theta \\
& + \left( 2A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \cos \gamma \right) \sin^3 \theta + \left( 4A_4k_4^2\alpha_0\alpha_2\omega \sin \gamma - A_4k_4^2\alpha_1^2\omega \right) \cos \theta \sin \theta \\
& + \left( 2A_4k_4^2\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma \right) \sin^2 \theta + \left( -A_4k_4^2\alpha_0\alpha_1\omega \right) \cos \theta \right) \tag{A.22}
\end{aligned}$$





## Tillegg B

## Integraler

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^5 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin^2 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^3 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^4 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^5 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{8}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^5 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{8}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^7 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta \sin \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^5 \theta \sin^2 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin^3 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin^4 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^5 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^6 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^7 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^8 \theta d\theta = \frac{35\pi}{64}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^7 \theta \sin \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{5\pi}{64}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^5 \theta \sin^3 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{64}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin^5 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{64}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^7 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^8 \theta d\theta = \frac{35\pi}{64}$$



## Tillegg C

### Beregning av $\eta_0$ , $\eta_1$ , $\eta_2$ , $\phi_1$ og $\phi_2$

$\eta_0$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\phi_1$  og  $\phi_2$  er gitt ved:

$$\eta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) d\theta$$

$$\eta_{1s} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \sin \theta d\theta$$

$$\eta_{1c} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \cos \theta d\theta$$

$$\eta_1 = \sqrt{\eta_{1s}^2 + \eta_{1c}^2}$$

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}}\right)$$

$$\eta_{2s} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \sin(2\theta) d\theta$$

$$\eta_{2c} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \cos(2\theta) d\theta$$

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_{2s}^2 + \eta_{2c}^2}$$

$$\phi_2 = \arctan\left(\frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}}\right)$$

hvor  $f(x(\theta))$  er gitt i ligning (A.22) i vedlegg A. Funksjonen  $f(x(\theta))$  gitt i ligning (A.22) er svært lang, men den kan enkelt deles opp i ledd som er enkle å integrere ved hjelp av listen med integraler i vedlegg B. Mange av leddene i  $f(x(\theta))$  fra ligning (A.22) faller faktisk bort under integrasjonen.

$\eta_0$  er gitt ved:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k_4^3} \left( \pi \left( 2A_4 k_4^2 \alpha_0 \alpha_2 \omega \cos \gamma \right) + \pi \left( A_2 k_4 \alpha_1^2 \omega^2 - A_3 k_4 \alpha_0 \alpha_1^2 \omega^2 - 2A_4 k_4^2 \alpha_0 \alpha_2 \omega \cos \gamma \right) \right. \\
&\quad + \frac{3\pi}{4} \left( 4A_2 k_4 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma - 4A_3 k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma - 2A_4 k_4^2 \alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \\
&\quad + \frac{\pi}{4} \left( -6A_1 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma + 4A_2 k_4 \alpha_2^2 \omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \right. \\
&\quad \left. - 4A_3 k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) + 9A_3 k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma + 12A_4 k_4^2 \alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \\
&\quad + \frac{3\pi}{4} \left( 6A_1 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma + 4A_2 k_4 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma - 4A_3 k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma \right. \\
&\quad \left. - A_3 k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma - 2A_4 k_4^2 \alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \\
&\quad + \frac{5\pi}{8} \left( -8A_1 \alpha_2^3 \omega^3 \cos^3 \gamma + 4A_3 k_4 \alpha_2^3 \omega^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma \right) \\
&\quad + \frac{\pi}{8} \left( 8A_1 \alpha_2^3 \omega^3 (3 \cos^3 \gamma - 12 \cos \gamma \sin^2 \gamma) - 4A_3 k_4 \alpha_2^3 \omega^2 (11 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma) \right) \\
&\quad + \frac{\pi}{8} \left( 8A_1 \alpha_2^3 \omega^3 (12 \cos \gamma \sin^2 \gamma - 3 \cos^3 \gamma) + 4A_3 k_4 \alpha_2^3 \omega^2 (11 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma) \right) \\
&\quad \left. + \frac{5\pi}{8} \left( 8A_1 \alpha_2^3 \omega^3 \cos^3 \gamma - 4A_3 k_4 \alpha_2^3 \omega^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma \right) \right) \\
&= \frac{1}{8k_4^3} \left( 4 \left( A_2 k_4 \alpha_1^2 \omega^2 - A_3 k_4 \alpha_0 \alpha_1^2 \omega^2 \right) + 3 \left( 6A_1 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma + 8A_2 k_4 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 8A_3 k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma - A_3 k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma - 4A_4 k_4^2 \alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \right. \\
&\quad + \left( -6A_1 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma + 4A_2 k_4 \alpha_2^2 \omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \right. \\
&\quad \left. - 4A_3 k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) + 9A_3 k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma + 12A_4 k_4^2 \alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \left. \right) \\
&= \frac{1}{8k_4^3} \left( \left( 18\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma - 6\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma \right) A_1 \right. \\
&\quad + \left( 4k_4 \alpha_1^2 \omega^2 + 24k_4 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma + 4k_4 \alpha_2^2 \omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) \right) A_2 \\
&\quad + \left( -4k_4 \alpha_0 \alpha_1^2 \omega^2 - 24k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos^2 \gamma - 3k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma \right. \\
&\quad \left. - 4k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 (4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \gamma) + 9k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma \right) A_3 \\
&\quad \left. + \left( -12k_4^2 \alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma + 12k_4^2 \alpha_2^2 \omega \cos \gamma \sin \gamma \right) A_4 \right)
\end{aligned}$$

Til slutt kan  $\eta_0$  reduseres til:

$$\begin{aligned} \eta_0 = & \frac{1}{4k_4^3} \left( 6\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma A_1 + \left( 2k_4\alpha_1^2\omega^2 + 8k_4\alpha_2^2\omega^2 \right) A_2 \right. \\ & \left. + \left( -2k_4\alpha_0\alpha_1^2\omega^2 - 8k_4\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 + 3k_4\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma \right) A_3 \right) \end{aligned} \quad (C.1)$$

$\eta_{1s}$  er gitt ved:

$$\begin{aligned} \eta_{1s} = & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\ = & \frac{1}{k_4^3 \pi} \left( \frac{\pi}{8} \left( -48A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 \cos \gamma \sin \gamma - 4A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 (3\cos^2 \gamma - 2\sin^2 \gamma) \right) \right. \\ & + \frac{\pi}{8} \left( 48A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 \cos \gamma \sin \gamma - 4A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 (-4\cos^2 \gamma + 6\sin^2 \gamma) \right) \\ & + \frac{5\pi}{8} \left( -4A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma \right) + \frac{\pi}{4} \left( -8A_2k_4\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma \right. \\ & + 8A_3k_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma - A_3k_4\alpha_1^3\omega^2 - 4A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \cos \gamma \left. \right) \\ & \left. + \frac{3\pi}{4} \left( 2A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \cos \gamma \right) \right) \quad (C.2) \\ = & \frac{1}{4k_4^3} \left( A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 (2\cos^2 \gamma - 8\sin^2 \gamma) - 10A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma \right. \\ & - 8A_2k_4\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma + 8A_3k_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma - A_3k_4\alpha_1^3\omega^2 \\ & \left. - 4A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \cos \gamma + 6A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \cos \gamma \right) \\ = & \frac{1}{4k_4^3} \left( -8\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma k_4 A_2 + \left( -8\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) \right. \right. \\ & \left. \left. + 8\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma - \alpha_1^3\omega^2 \right) k_4 A_3 + 2\alpha_1\alpha_2\omega \cos \gamma k_4^2 A_4 \right) \\ = & \frac{1}{4k_4^2} \left( -8\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma A_2 + \left( -8\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 8\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \sin \gamma - \alpha_1^3\omega^2 \right) A_3 + 2\alpha_1\alpha_2\omega \cos \gamma k_4 A_4 \right) \end{aligned}$$

Til slutt reduseres  $\eta_{1s}$  til:

$$\begin{aligned} \eta_{1s} = & \frac{\alpha_1\omega}{4k_4^2} \left( -8\alpha_2\omega \sin \gamma A_2 + \left( -8\alpha_2^2\omega + 8\alpha_0\alpha_2\omega \sin \gamma - \alpha_1^2\omega \right) A_3 \right. \\ & \left. + 2\alpha_2 \cos \gamma k_4 A_4 \right) \end{aligned} \quad (C.3)$$

$\eta_{1c}$  er gitt ved:

$$\begin{aligned}
\eta_{1c} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \cos(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi k_4^3} \left( \frac{5\pi}{8} \left( 12A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 \cos^2 \gamma - 4A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \right) \right. \\
&\quad + \frac{\pi}{8} \left( 12A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 (4\sin^2 \gamma - 2\cos^2 \gamma) + 40A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \right) \\
&\quad + \frac{\pi}{8} \left( 12A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 \cos^2 \gamma - 20A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \right) \\
&\quad + \frac{3\pi}{4} \left( A_1\alpha_1^3\omega^3 + 4A_2k_4\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma - 4A_3k_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma \right. \\
&\quad \left. - A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \sin \gamma \right) + \frac{\pi}{4} \left( -4A_2k_4\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma \right. \\
&\quad \left. + 4A_3k_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma + 5A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \sin \gamma \right) + \pi \left( -A_4k_4^2\alpha_0\alpha_1\omega \right) \Big) \\
&= \frac{1}{4k_4^3} \left( 6A_1\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 (5\cos^2 \gamma + 4\sin^2 \gamma - 2\cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma) \right. \\
&\quad + A_3k_4\alpha_1\alpha_2^2\omega^2 \cos \gamma \sin \gamma (-10 + 20 - 10) + 3A_1\alpha_1^3\omega^3 \\
&\quad + A_2k_4\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma (12 - 4) + A_3k_4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma (-12 + 4) \\
&\quad \left. + A_4k_4^2\alpha_1\alpha_2\omega \sin \gamma (-3 + 5) - 4A_4k_4^2\alpha_0\alpha_1\omega \right) \\
&= \frac{1}{4k_4^3} \left( \left( 24\alpha_1\alpha_2^2\omega^3 + 3\alpha_1^3\omega^3 \right) A_1 + 8\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma k_4 A_2 \right. \\
&\quad \left. - 8\alpha_0\alpha_1\alpha_2\omega^2 \cos \gamma k_4 A_3 + \left( 2\alpha_1\alpha_2\omega \sin \gamma - 4\alpha_0\alpha_1\omega \right) k_4^2 A_4 \right)
\end{aligned}$$

Til slutt reduseres  $\eta_{1c}$  til:

$$\begin{aligned}
\eta_{1c} &= \frac{\alpha_1\omega}{4k_4^3} \left( \left( 24\alpha_2^2\omega^2 + 3\alpha_1^2\omega^2 \right) A_1 + 8\alpha_2\omega \cos \gamma k_4 A_2 \right. \\
&\quad \left. - 8\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma k_4 A_3 + \left( 2\alpha_2 \sin \gamma - 4\alpha_0 \right) k_4^2 A_4 \right) \quad (C.4)
\end{aligned}$$

$\eta_1$  er gitt ved:

$$\eta_1 = \sqrt{\eta_{1s}^2 + \eta_{1c}^2} \quad (\text{C.5})$$

Setter uttrykket for  $\eta_{1s}$  fra ligning (C.3) og uttrykket for  $\eta_{1c}$  fra ligning (C.4) inn i ligning (C.5), og trekker sammen. Det gir:

$$\begin{aligned} \eta_1 = & \frac{\alpha_1 \omega}{4k_4^3} \left( 576\alpha_2^4 \omega^4 A_1^2 + 72\alpha_1^2 \alpha_2^2 \omega^4 A_1^2 + 192\alpha_2^3 \omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_2 \right. \\ & - 192\alpha_0 \alpha_2^3 \omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_3 - 96\alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 k_4^2 A_1 A_4 \\ & + 48\alpha_2^3 \omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_1 A_4 + 9\alpha_1^4 \omega^4 A_1^2 + 24\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_2 \\ & - 24\alpha_0 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_3 - 12\alpha_0 \alpha_1^2 \omega^2 k_4^2 A_1 A_4 \\ & + 6\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_1 A_4 + 64\alpha_2^2 \omega^2 k_4^2 A_2^2 + 64\alpha_2^3 \omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_2 A_3 \\ & - 64\alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 k_4^2 A_2 A_3 + 8\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_2 A_3 - 32\alpha_0 \alpha_2 \omega \cos \gamma k_4^3 A_2 A_4 \\ & + 64\alpha_0^2 \alpha_2^2 \omega^2 k_4^2 A_3^2 - 8\alpha_0 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_3^2 + \alpha_1^4 \omega^2 k_4^2 A_3^2 \\ & - 2\alpha_1^2 \alpha_2 \omega \cos \gamma k_4^3 A_3 A_4 + 32\alpha_0^2 \alpha_2 \omega \cos \gamma k_4^3 A_3 A_4 + 4\alpha_2^2 k_4^4 A_4^2 \\ & \left. - 8\alpha_0 \alpha_2 \sin \gamma k_4^4 A_4^2 + 16\alpha_0^2 k_4^4 A_4^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

$\phi_1$  er gitt ved:

$$\phi_1 = \arctan \left( \frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}} \right) \quad (\text{C.7})$$

Setter uttrykket for  $\eta_{1s}$  fra ligning (C.3) og uttrykket for  $\eta_{1c}$  fra ligning (C.4) inn i ligning (C.7), og trekker sammen. Det gir:

$$\phi_1 = \arctan \frac{\left( 24\alpha_2^2 \omega^2 + 3\alpha_1^2 \omega^2 \right) A_1 + 8\alpha_2 \omega \cos \gamma k_4 A_2 - 8\alpha_0 \alpha_2 \omega \cos \gamma k_4 A_3 + \left( 2\alpha_2 \sin \gamma - 4\alpha_0 \right) k_4^2 A_4}{-8\alpha_2 \omega \sin \gamma k_4 A_2 + \left( -8\alpha_2^2 \omega + 8\alpha_0 \alpha_2 \omega \sin \gamma - \alpha_1^2 \omega \right) k_4 A_3 + 2\alpha_2 \cos \gamma k_4^2 A_4} \quad (\text{C.8})$$

Beregner så  $\eta_{2s}$

$$\begin{aligned}
\eta_{2s} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \sin(2\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) 2 \cos \theta \sin \theta d\theta \\
&= \frac{2}{k_4^3 \pi} \left( \frac{5\pi}{64} \left( -48A_1 \alpha_2^3 \omega^3 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4A_3 k_4 \alpha_2^3 \omega^2 (2 \cos^3 \gamma - 4 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \right) \right. \\
&\quad + \frac{3\pi}{64} \left( 8A_1 \alpha_2^3 \omega^3 (12 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 8 \sin^3 \gamma) - 4A_3 k_4 \alpha_2^3 \omega^2 (16 \cos \gamma \sin^2 \gamma - 4 \cos^3 \gamma) \right) \\
&\quad + \frac{5\pi}{64} \left( -48A_1 \alpha_2^3 \omega^3 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4A_3 k_4 \alpha_2^3 \omega^2 (2 \cos^3 \gamma - 4 \cos \gamma \sin^2 \gamma) \right) \\
&\quad + \frac{\pi}{8} \left( -12A_1 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \sin \gamma - 16A_2 k_4 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma + 16A_3 k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma \right. \\
&\quad \left. - 4A_3 k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma - 2A_3 k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma - 2A_4 k_4^2 \alpha_2^2 \omega (2 \cos^2 \gamma - 2 \sin^2 \gamma) \right) \\
&\quad + \frac{\pi}{8} \left( 16A_2 k_4 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma - 16A_3 k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma + 4A_3 k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma \right. \\
&\quad \left. - 2A_4 k_4^2 \alpha_2^2 \omega (-2 \cos^2 \gamma + 2 \sin^2 \gamma) \right) \\
&\quad + \frac{\pi}{4} \left( 4A_4 k_4^2 \alpha_0 \alpha_2 \omega \sin \gamma - A_4 k_4^2 \alpha_1^2 \omega \right) \Big) \\
&= \frac{1}{8k_4^3} \left( A_1 \alpha_2^3 \omega^3 (\cos^2 \gamma \sin \gamma (-60 + 72 - 60) - 48 \sin^3 \gamma) \right. \\
&\quad + A_3 k_4 \alpha_2^3 \omega^2 ((-10 + 12 - 10) \cos^3 \gamma + (20 - 48 + 20) \cos \gamma \sin^2 \gamma) \\
&\quad \left. - 24A_1 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \sin \gamma - 4A_3 k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma + 16A_4 k_4^2 \alpha_0 \alpha_2 \omega \sin \gamma - 4A_4 k_4^2 \alpha_1^2 \omega \right)
\end{aligned}$$

Benytter så at:

$$\begin{aligned}
\cos^2 \gamma \sin \gamma + \sin^3 \gamma &= (1 - \sin^2 \gamma) \sin \gamma + \sin^3 \gamma = \sin \gamma \\
\cos \gamma \sin^2 \gamma + \cos^3 \gamma &= \cos \gamma (1 - \cos^2 \gamma) + \cos^3 \gamma = \cos \gamma
\end{aligned}$$

og får videre:

$$\begin{aligned}
\eta_{2s} &= \frac{1}{8k_4^3} \left( \left( -48\alpha_2^3 \omega^3 \sin \gamma - 24\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \sin \gamma \right) A_1 \right. \\
&\quad + \left( -8k_4 \alpha_2^3 \omega^2 \cos \gamma - 4k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \cos \gamma \right) A_3 \\
&\quad \left. + \left( 16k_4^2 \alpha_0 \alpha_2 \omega \sin \gamma - 4k_4^2 \alpha_1^2 \omega \right) A_4 \right)
\end{aligned}$$

$\eta_{2s}$  reduseres til slutt til:

$$\begin{aligned} \eta_{2s} = & \frac{1}{2k_4^3} \left( \left( -12\alpha_2^3\omega^3 \sin \gamma - 6\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \sin \gamma \right) A_1 \right. \\ & + \left( -2\alpha_2^3\omega^2 \cos \gamma - \alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \cos \gamma \right) k_4 A_3 \\ & \left. + \left( 4\alpha_0\alpha_2\omega \sin \gamma - \alpha_1^2\omega \right) k_4^2 A_4 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Beregner så  $\eta_{2c}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{2c} = & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) \cos(2\theta) d\theta \\ = & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x(\theta)) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta \\ = & \frac{1}{k_4^3 \pi} \left( \left( \frac{35\pi}{64} - \frac{5\pi}{64} \right) \left( 8A_1\alpha_2^3\omega^3 \cos^3 \gamma - 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma \right) \right. \\ & + \left( \frac{5\pi}{64} - \frac{3\pi}{64} \right) \left( 8A_1\alpha_2^3\omega^3 (12 \cos \gamma \sin^2 \gamma - 3 \cos^3 \gamma) + 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 (11 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma) \right) \\ & + \left( \frac{3\pi}{64} - \frac{5\pi}{64} \right) \left( 8A_1\alpha_2^3\omega^3 (3 \cos^3 \gamma - 12 \cos \gamma \sin^2 \gamma) - 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 (11 \cos^2 \gamma \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma) \right) \\ & + \left( \frac{5\pi}{64} - \frac{35\pi}{64} \right) \left( -8A_1\alpha_2^3\omega^3 \cos^3 \gamma + 4A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 \cos^2 \gamma \sin \gamma \right) \\ & + \left( \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right) \left( 6A_1\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma + 4A_2k_4\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma - 4A_3k_4\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma \right. \\ & \left. - A_3k_4\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma - 2A_4k_4^2\alpha_2^2\omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \\ & + \left( \frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} \right) \left( 4A_2k_4\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma - 4A_3k_4\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 \cos^2 \gamma - 2A_4k_4^2\alpha_2^2\omega \cos \gamma \sin \gamma \right) \\ & + \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \left( A_2k_4\alpha_1^2\omega^2 - A_3k_4\alpha_0\alpha_1^2\omega^2 - 2A_4k_4^2\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma \right) \\ & \left. + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) \left( 2A_4k_4^2\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma \right) \right) \\ = & \frac{1}{8k_4^3} \left( A_1\alpha_2^3\omega^3 \left( (30 - 6 - 6 + 30) \cos^3 \gamma + (24 + 24) \cos \gamma \sin^2 \gamma \right) \right. \\ & + A_3k_4\alpha_2^3\omega^2 \left( (-15 + 11 + 11 - 15) \cos^2 \gamma \sin \gamma + (-4 - 4) \sin^3 \gamma \right) \\ & + 24A_1\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma - 4A_3k_4\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma \\ & \left. + 4A_2k_4\alpha_1^2\omega^2 - 4A_3k_4\alpha_0\alpha_1^2\omega^2 - 16A_4k_4^2\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma \right) \end{aligned}$$

Til slutt reduseres  $\eta_{2c}$  til:

$$\begin{aligned} \eta_{2c} = \frac{1}{2k_4^3} & \left( \left( 12\alpha_2^3\omega^3 \cos \gamma + 6\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma \right) A_1 + \alpha_1^2\omega^2 k_4 A_2 \right. \\ & + \left( -2\alpha_2^3\omega^2 \sin \gamma - \alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma - \alpha_0\alpha_1^2\omega^2 \right) k_4 A_3 \\ & \left. - 4\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma k_4^2 A_4 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$\eta_2$  er da gitt ved:

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_{2s}^2 + \eta_{2c}^2} \quad (\text{C.11})$$

Verdiene for  $\eta_{2s}$  og  $\eta_{2c}$  blir ikke satt inn i ligning (C.11). Uttrykket for  $\eta_2$  er utelatt her.

$\phi_2$  er gitt ved:

$$\phi_2 = \arctan \left( \frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}} \right) \quad (\text{C.12})$$

Setter uttrykket for  $\eta_{2s}$  fra ligning (C.9) og uttrykket for  $\eta_{2c}$  fra ligning (C.10) inn i ligning (C.12), og trekker sammen. Det gir:

$$\phi_2 = \arctan \frac{\left( 12\alpha_2^3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 \right) \omega^2 \cos \gamma A_1 + \alpha_1^2 \omega k_4 A_2 - \left( 2\alpha_2^3 \sin \gamma + \alpha_1^2 \alpha_2 \sin \gamma + \alpha_0 \alpha_1^2 \right) \omega k_4 A_3 - 4\alpha_0 \alpha_2 \cos \gamma k_4^2 A_4}{\left( -12\alpha_2^3 - 6\alpha_1^2 \alpha_2 \right) \omega^2 \sin \gamma A_1 + \left( -2\alpha_2^3 - \alpha_1^2 \alpha_2 \right) \omega \cos \gamma k_4 A_3 + \left( 4\alpha_0 \alpha_2 \sin \gamma - \alpha_1^2 \right) k_4^2 A_4} \quad (\text{C.13})$$



## Tillegg D

### Beregning av $|G(0)|$ , $|G(j\omega)|$ , $\angle G(j\omega)$ , $|G(j2\omega)|$ og $\angle G(j2\omega)$

Fra kapittel 2.6 er  $G(s)$  gitt ved ligning (2.48):

$$G(s) = \frac{y_2(s)}{w(p)} = \frac{-k_4}{s^2 - \text{Tr}(A)s + \det(A)} \quad (\text{D.1})$$

hvor  $s = jk\omega$  og  $k$  er et heltall avhengig av frekvens.

#### Konstantledd

For  $k = 0$  blir ligning (D.1) redusert til:

$$G(0) = -\frac{k_4}{\det(A)} \quad (\text{D.2})$$

Da er:

$$|G(0)| = \frac{k_4}{\det(A)} \quad (\text{D.3})$$

Husk:  $\det(A) > 0$  og  $k_4 > 0$ .

#### Første harmoniske

$|G(j\omega)|$  og  $\angle G(j\omega)$  har vi regnet ut under analyse enkel modell i henholdsvis ligning (3.13) og ligning (3.12).

$$|G(j\omega)| = \frac{k_4}{\sqrt{(\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2}} \quad (\text{D.4})$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} \quad (\text{D.5})$$

**Andre harmoniske**

$|G(j2\omega)|$  og  $\angle G(j2\omega)$  beregnes ved å la  $s = j2\omega$  i ligning (D.1):

$$\begin{aligned}
 G(j2\omega) &= \frac{-k_4}{-4\omega^2 - 2\text{Tr}(A)\omega j + \det(A)} \\
 &= \frac{-k_4}{(\det(A) - 4\omega^2) - 2\text{Tr}(A)\omega j} \\
 &= \frac{-k_4 ((\det(A) - 4\omega^2) + 2\text{Tr}(A)\omega j)}{((\det(A) - 4\omega^2) - 2\text{Tr}(A)\omega j)((\det(A) - 4\omega^2) + 2\text{Tr}(A)\omega j)} \\
 &= \frac{-k_4(\det(A) - 4\omega^2)}{(\det(A) - 4\omega^2)^2 + 4\text{Tr}^2(A)\omega^2} + \frac{-2k_4\text{Tr}(A)\omega}{(\det(A) - 4\omega^2)^2 + 4\text{Tr}^2(A)\omega^2}j
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

Fasen til  $G(2j\omega)$  finnes ut fra ligning (D.6):

$$\angle G(2j\omega) = \arctan \frac{2\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - 4\omega^2} \tag{D.7}$$

$$\tag{D.8}$$

Amplituden til  $G(2j\omega)$  finnes også fra ligning (D.6):

$$|G(j2\omega)| = \frac{k_4}{\sqrt{(\det(A) - 4\omega^2)^2 + 4\text{Tr}^2(A)\omega^2}} \tag{D.9}$$

## Tillegg E

# Beregning av ligninger

Ligningene E.1 til E.5 utgjør et ligningssett på fem ligninger med fem ukjente,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\gamma$  og  $\omega$ :

$$\frac{k_4}{\det(A)} \frac{\eta_0}{\alpha_0} = 1 \quad (\text{E.1})$$

$$|G(j\omega)| \frac{\eta_1}{\alpha_1} = 1 \quad (\text{E.2})$$

$$\phi_1 + \angle G(j\omega) = \pi \quad (\text{E.3})$$

$$|G(j2\omega)| \frac{\eta_2}{\alpha_2} = 1 \quad (\text{E.4})$$

$$\phi_2 + \angle G(j2\omega) = \pi + \gamma \quad (\text{E.5})$$

hvor alle de ukjente inngår i alle fem ligningene.

### Beregning av 1.ligning.

Setter uttrykket for  $\eta_0$  i ligning (C.1) inn i ligning (E.1) og samler alle leddene på ei side. Da blir første ligning i ligningssettet:

$$0 = -4\alpha_0 k_4^2 \det(A) + \left( 6\alpha_1^2 \alpha_2 \omega^3 \cos \gamma A_1 + (2k_4 \alpha_1^2 \omega^2 + 8k_4 \alpha_2^2 \omega^2) A_2 \right. \\ \left. + (-2k_4 \alpha_0 \alpha_1^2 \omega^2 - 8k_4 \alpha_0 \alpha_2^2 \omega^2 + 3k_4 \alpha_1^2 \alpha_2 \omega^2 \sin \gamma) A_3 \right) \quad (\text{E.6})$$

### Beregning av 2.ligning.

Begynner med å opphøye ligning (E.2) i andre. Det gir:

$$|G(j\omega)|^2 \frac{\eta_1^2}{\alpha_1^2} = 1 \quad (\text{E.7})$$

Setter så inn  $\eta_1 = \sqrt{\eta_{1s}^2 + \eta_{1c}^2}$  og får:

$$|G(j\omega)|^2 \frac{\eta_{1s}^2 + \eta_{1c}^2}{\alpha_1^2} = 1 \quad (\text{E.8})$$

Setter til slutt uttrykket for  $\eta_{1s}$  i ligning (C.3), uttrykket for  $\eta_{1c}$  i ligning (C.4) og uttrykket for  $|G(j\omega)|$  i ligning (D.4) inn i ligning (E.8) og samler alle leddene på ei side. Da blir andre ligning i ligningssettet:

$$\begin{aligned} 0 = & 16k_4^4 \left( (\det(A) - \omega^2)^2 + \text{Tr}^2(A)\omega^2 \right) + \omega^2 \left( 576\alpha_2^4\omega^4 A_1^2 \right. \\ & + 72\alpha_1^2\alpha_2^2\omega^4 A_1^2 + 192\alpha_2^3\omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_2 - 192\alpha_0\alpha_2^3\omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_3 \\ & - 96\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 k_4^2 A_1 A_4 + 48\alpha_2^3\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_1 A_4 + 9\alpha_1^4\omega^4 A_1^2 \\ & + 24\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_2 - 24\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2\omega^3 \cos \gamma k_4 A_1 A_3 \\ & - 12\alpha_0\alpha_1^2\omega^2 k_4^2 A_1 A_4 + 6\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_1 A_4 + 64\alpha_2^2\omega^2 k_4^2 A_2^2 \\ & + 64\alpha_2^3\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_2 A_3 - 64\alpha_0\alpha_2^2\omega^2 k_4^2 A_2 A_3 + 8\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_2 A_3 \\ & - 32\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma k_4^3 A_2 A_4 + 64\alpha_0^2\alpha_2\omega^2 k_4^2 A_3^2 - 8\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2\omega^2 \sin \gamma k_4^2 A_3^2 \\ & + \alpha_1^4\omega^2 k_4^2 A_3^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2\omega \cos \gamma k_4^3 A_3 A_4 + 32\alpha_0^2\alpha_2\omega \cos \gamma k_4^3 A_3 A_4 \\ & \left. + 4\alpha_2^2 k_4^4 A_4^2 - 8\alpha_0\alpha_2 \sin \gamma k_4^4 A_4^2 + 16\alpha_0^2 k_4^4 A_4^2 \right) \quad (\text{E.9}) \end{aligned}$$

### Beregning av 3.ligning.

Setter uttrykket for  $\phi_1$  i ligning (C.8) og uttrykket for  $\angle G(j\omega)$  fra ligning (D.5) inn i ligning (E.3). Det gir:

$$\arctan \frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}} + \arctan \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} = -\pi$$

Bruker at  $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ , og får da:

$$\arctan \frac{\frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}} + \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2}}{1 - \frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}} \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2}} = -\pi$$

Tar tan på begge sider, og får:

$$\frac{\frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}} + \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2}}{1 - \frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}} \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2}} = 0 \quad (\text{E.10})$$

som er definert dersom:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}} \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} &\neq 1 \\ \Downarrow \\ \text{Tr}(A)\omega\eta_{1c} &\neq (\det(A) - \omega^2)\eta_{1s} \quad (\text{E.11}) \end{aligned}$$

Når betingelsen i ligning (E.11) er oppfylt, reduseres ligning (E.10) til:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - \omega^2} + \frac{\eta_{1c}}{\eta_{1s}} &= 0 \\ \downarrow \\ \text{Tr}(A)\omega\eta_{1s} + (\det(A) - \omega^2)\eta_{1c} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Setter uttrykket for  $\eta_{1s}$  i ligning (C.3) og uttrykket for  $\eta_{1c}$  i ligning (C.4) inn i ligning (E.12) og samler alle leddene på en side. Da blir tredje ligning i ligningssettet:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A)\omega k_4 \left( -8\alpha_2\omega \sin \gamma A_2 + \left( -8\alpha_2^2\omega + 8\alpha_0\alpha_2\omega \sin \gamma - \alpha_1^2\omega \right) A_3 + 2\alpha_2 \cos \gamma k_4 A_4 \right) \\ + (\det(A) - \omega^2) \left( \left( 24\alpha_2^2\omega^2 + 3\alpha_1^2\omega^2 \right) A_1 + 8\alpha_2\omega \cos \gamma k_4 A_2 \right. \\ \left. - 8\alpha_0\alpha_2\omega \cos \gamma k_4 A_3 + \left( 2\alpha_2 \sin \gamma - 4\alpha_0 \right) k_4^2 A_4 \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

#### Beregning av 4.ligning.

Ligning (E.4) blir stående uendret på grunn av kompleksiteten. Fjerde ligning i ligningssettet er:

$$|G(j2\omega)| \frac{\eta_2}{\alpha_2} = 1 \quad (\text{E.14})$$

#### Beregning av 5.ligning.

Setter uttrykket for  $\phi_2$  i ligning (C.13) og uttrykket for  $\angle G(j2\omega)$  fra ligning (D.7) inn i ligning (E.5). Det gir:

$$\arctan \frac{2\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - 4\omega^2} + \arctan \left( \frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}} \right) = \pi + \gamma$$

Bruker igjen at  $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ , og får da:

$$\arctan \frac{\frac{2\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - 4\omega^2} + \frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}}}{1 - \frac{2\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - 4\omega^2} \frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}}} = \pi + \gamma$$

Tar tan på begge sider, og får:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2\text{Tr}(A)\omega}{\det(A)-4\omega^2} + \frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}}}{1 - \frac{2\text{Tr}(A)\omega}{\det(A)-4\omega^2} \frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}}} &= \tan \gamma \\
&\downarrow \\
\frac{2\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - 4\omega^2} + \frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}} &= \tan \gamma - \frac{2\text{Tr}(A)\omega}{\det(A) - 4\omega^2} \frac{\eta_{2c}}{\eta_{2s}} \tan \gamma \\
&\downarrow \\
\frac{2\text{Tr}(A)\omega\eta_{2s} + \eta_{2c}(\det(A) - 4\omega^2)}{(\det(A) - 4\omega^2)\eta_{2s}} &= \frac{(\det(A) - 4\omega^2)\eta_{2s} \tan \gamma - 2\text{Tr}(A)\omega\eta_{2c} \tan \gamma}{(\det(A) - 4\omega^2)\eta_{2s}} \quad (\text{E.15})
\end{aligned}$$

som er definert dersom:

$$(\det(A) - 4\omega^2)\eta_{2s} \neq 0 \quad (\text{E.16})$$

Når betingelsen i ligning (E.16) er oppfylt, reduseres ligning (E.15) til:

$$2\text{Tr}(A)\omega\eta_{2s} + \eta_{2c}(\det(A) - 4\omega^2) = (\det(A) - 4\omega^2)\eta_{2s} \tan \gamma - 2\text{Tr}(A)\omega\eta_{2c} \tan \gamma$$

På grunn av kompleksitet settes det ikke inn for  $\eta_{2s}$  og  $\eta_{2c}$ , men ved å samle alle leddene på ei side blir femte ligning i ligningssettet:

$$2\text{Tr}(A)\omega(\eta_{2s} + \eta_{2c} \tan \gamma) + (\det(A) - 4\omega^2)(\eta_{2c} + \eta_{2s} \tan \gamma) = 0 \quad (\text{E.17})$$