



Universitetet
i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering: Konstruksjon og Materialer - fordypning Bygg	Vår.....semesteret, 2011 Åpen / Konfidensiell
Forfatter: Jean Nounou KABEYA	<i>Jean N. Kabeya</i> (signatur forfatter)
Fagansvarlig: Professor Jasna B. Jakobsen Veileder(e): Roger Ebeltoft Guldvik (Statens Vegvesen, Stavanger)	
Tittel på masteroppgaven: Dynamisk analyse av bruer med jordskjelv last Engelsk tittel: <i>Dynamic analysis of bridges submitted to seismic loads</i>	
Studiepoeng: 30 sp	
Emneord: Jordskjelv Dynamikk Betongbruer	Sidetall:108..... + vedlegg/annet: ...155..... Stavanger, <i>15. Juni 2011</i> dato/år

Dynamisk analyse av bruer med jordskjelvløst
Masteroppgave 2011

Jean N. Kabeya
Universitetet i Stavanger

15. juni 2011

0.1 Sammendrag

Dette arbeidet ble utført våren 2011, som avslutning på studien Mastergrad i Konstruksjon og Materialer, ved Universitet i Stavanger, Norge.

Oppgaven var meget utfordrende, først og fremst på grunn av omfanget (se 0.2 Oppgavebeskrivelse), men også på grunn av undertegnedes manglende forkunnskaper i NovaFrame og Staad Pro, de to dataverktøy som ble brukt i analysen.

I dette arbeidet, er det lagt fram teoretisk bakgrunn om jordskjelv som et naturlig fenomen, samt teoretisk grunnlag for jordskjelvberegning.

I tillegg til det teoretiske, er det også utført to konkrete jordskjelvanalyser.

Analyse én (Kapittel 4) er en forenklet jordskjelvberegning utført på en betongbru ved forskjellige geometriske forhold.

I den første delen, hadde brua fast lengde, mens høyden øktes gradvis. Det ble mulig å se hvordan bruas respons på jordskjelv endrer seg når høyden økes.

I den andre analysen ble samme beregning utført, men denne gang var høyden fast, mens bruspenntet ble endret gradvis.

Analyse én konkluderte med at forenklet formelen for å beregne egenperiode, som står på side 45 i den Norske Standard NS-EN 1998-1, ikke egner seg godt i beregning av bruer, spesielt når søylenes geometri er asymmetrisk. Da er det heller ikke lurt å beregne maks skjærkrefter ved Newton's Andre lov: $F = m \cdot a$, der a er grunnakselerasjon. Man bør gå grundig til verks, og betrakte hver enkelt søyle for seg, og operere med søylestivhet og maks respons.

Analyse to (Kapittel 5) er mer detaljert jordskjelvberegning av Sandsfjordbrua i Soldal kommune i Rogaland, ved hjelp av dataverktøyet Staad pro. Resultater skulle sammenlignes med tilsvarende beregning utført med Nova Frame.

Beregning av brua i Nova Frame ga en respons på $90mm$, mens Staad Pro beregningene ga forskyvning på $148mm$, dermed et avvik på cirka $60mm$.

Innhold

0.1	Sammendrag	2
0.2	Oppgavebeskrivelse	6
0.3	Forord	7
1	Fenomenet Jordskjelv	10
1.1	Innledning	10
1.2	Hva er jordskjelv?	11
1.3	Bølgeforplantning	17
1.4	Måling og klassifisering av jordskjelv	19
1.4.1	Hvor startet jordskjelvet?	19
1.4.2	Hvor stor var jordskjelvet?	20
1.4.3	Hvor mye skade forårsaket jordskjelvet?	21
1.4.4	Måling av jordskjelv til ingeniør/teknisk formål	23
1.5	Jordskjelv i verden	23
1.6	Jordskjelv i Norge	25
2	Bruer med jordskjelvlast: Beregningsmetoder	26
2.1	Hva er vi ut etter?	26
2.2	Grunnleggende teori i Dynamikk	27
2.2.1	Udempet system med én frihetsgrad	27
2.2.2	Dempet system med én frihetsgrad	31
2.2.3	Svingesystemer med bevegelse av grunnen	34
2.2.4	Systemer med flere frihetsgrader	36
2.2.5	Modal Superposisjon	41
2.3	Respons Spektrum	42
2.4	Jordskjelvberegning ved forenklet metode	47
2.5	Jordskjelvberegning ved spektral modal analyse	49
2.6	Beregning ved Tidsplananalyse	50
2.6.1	Udempet system	50
3	Bruer med jordskjelvlast: Lover og regelverk	54

4	Studie 1: Jordskjelvberegning av betongbru ved forenklet metode	55
4.1	Beskrivelse	55
4.2	Analyse 1: Fast brulengde, varierende høyde	56
4.2.1	Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 1	57
4.2.2	Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 2	61
4.2.3	Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 3	63
4.2.4	Forskyvning i y -retning	66
4.2.5	Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 1	69
4.2.6	Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 2	72
4.2.7	Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 3	74
4.3	Analyse 2: Fast bruhøyde, varierende bjelkelengde	77
4.3.1	Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 1	78
4.3.2	Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 2	81
4.3.3	Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 3	83
4.3.4	Forskyvning i y -retning: Studietilfelle 1	86
4.3.5	Forskyvning i y -retning: Studietilfelle 2	88
4.3.6	Forskyvning i y -retning: Studietilfelle 3	89
4.3.7	Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 1	89
4.3.8	Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 2	92
4.3.9	Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 3	94
4.4	Oppsummering av resultater	97
4.5	Konklusjon	99
5	Studie 2: Beregning av Sandsfjorbrua ved full dynamisk analyse	100
5.1	Sandsfjordbrua	100
5.2	Sammenligning av modellene uten jordskjelvlast	101
5.3	Jordskjelvberegning	105
5.4	Resultater og konklusjon	107
A	Svingelingning for etasjebygg	111
B	Stivhet for en dobbelt innspent bjelke/søyle	114
C	Utleddning av modale ligninger	117
D	Modal analyse for etasjebygg	121
D.0.1	Forutsetninger	121
D.0.2	Svingelingning	123
D.0.3	Håndberegning flere frihetsgradsligning	124

D.0.4 Kjapt praktisk eksempel	127
E Håndberegning av bruas vertikal stivhet	129
F Utvalgte svingemoder fra Sandsfjorbrua	133
G Inputfil til Staad Pro	135

0.2 Oppgavebeskrivelse

(Skrevet av Odd G. Larsen, Statens vegvesen i Moss).

Hovedformålet med oppgaven **Dynamisk analyse av bruer utsatt for jordskjelvlaster** er å få en grunnleggende forståelse av regelverk og metoder for dimensjonering av bruer med jordskjelvbelastning.

Oppgaven skal behandle følgende punkter:

1. Generelt om jordskjelv , blant annet årsaker, bølgeforplantning, måling og klassifisering, osv. . .
2. Forekomst av Jordskjelv i verden. Soner med mest jordskjelvaktivitet. Jordskjelv i Norge.
3. Beskrivelse av gjeldende regelverk for prosjektering av bruer med jordskjelvbelastning.
Forklare hva et responsspekter er, og hvilke forhold som påvirker jordskjelvsitasjon og jordskjelvsrespons.
Beskrive Statens vegvesens krav til jordskjelvberegninger for bruer.
4. Kort beskrivelse av beregningsmetoder:
 - a) Forenklete metoder
 - b) Full dynamisk analyse (modal superposisjon).
 - c) Tidsplananalyse (trinnvis integrasjon, utgangspunkt aksellerogram)¹.
5. Analyse av en forholdsvis enkel bru, først med forenklet metode (metode 4a) , og så med full dynamisk analyse (metode 4b).
Sammenligne resultatene og trekke konklusjoner.
6. Full dynamisk analyse (metode 4b) av Sandsfjorbrua.
Gjerne endre bruparametre (for eksempel høyde på søyler, spennvidder, lagerbettingelser, fundamenteringsforhold, etc...).
Dokumentere og trekke konklusjoner om hvordan de forskjellige parametere påvirker bruens respons til jordskjelvbelastning.
7. Utforming: Beskrive hvordan bruer kan utformes og forbedres vha enkle tiltak og om nødvendig med mer kompliserte tiltak for å redusere jordskjelvpåvirkning.²
8. Avslutning: Oppsummering og konklusjoner om når jordskjelv har betydning og når det ikke er så viktig å ta dette i betraktning, avhengig av brutype, størrelse, viktighet, fundamentering, geografi, osv.

¹Gjennomføring av punkt 4C vurderes i forhold til tid.

²Punkt 7 kan sløyfes, dersom tiden ikke tillater det.

0.3 Forord

Jordskjelv omtales gjerne som “den største trusselen mot menneskeliv og eiendom, av alle andre naturkatastroffer i vår tid” [4], dette på grunn av omfang av ødeleggelse det kan føre med seg, spesielt hvis det inntreffer på tett bebodde områder. Nesten hvert år erfarer mange sannheten i disse ord.

Det er anslått at opp til 300.000 mennesker kan ha mistet livet, da et jordskjelv som målte 7 på Richter skala ristet byen Port-au-Prince i Haiti, så tidlig som i fjor [2].

I skrivende stund, pågår det fortsatt leting etter overlevende etter Tohoku jordskjelv og påfølgende Tsunami, i Japan. Japansk statsminister, Naoto Kan, kalte katastrofen “...den største krise etter den andre verdens krig” [2].

Erfaring viser at det ikke er alltid selve jordskjelvet som står bak alle ødeleggelser, men andre mekanismer som utløses av jordskjelv.

En av disse mekanismer er **Tsunamier**. Når jordskjelv inntreffer i havet, kan den mengde energi som blir frigitt årsake Tsunamier eller kjempe bølger, som er svært ødeleggende, når de treffer fast land på bebodde områder.

En slik Tsunami ble utløst etter et jordskjelv som skjedde den 26. desember 2004 i det indiske havet, ved kysten av Sumatra, Indonesia. Jordskjelvet målte $9,2M_W$ og var et av de største som var blitt registrert noensinne [2]. Det utsløste da en Tsunami som nådde opp til 30 meter høyde, og krevde opp til 200.000 menneskeliv i over 10 forskjellige land!¹

Tohoku jordskjelv som ble omtalt tidligere, forårsaket en Tsunami på opp til 10 meter, og den reiste opp til 10 kilometer opp på fast landet. I skrivende stund er allerede 7.058 mennesker bekreftet omkommet.

Jordskjelv er en spesiell utfordring for ingeniører, på grunn av enda en mekanisme som er med på å ta mange menneskeliv, spesielt når jordskjelv inntreffer i store byer: **kollaps av bygninger**.

Det er blitt rapportert at over 250.000 boligbygninger og 30.000 næringsboliger kollapset under Haiti jordskjelvet 24. januar i fjor. Dette er tydeligvis en av hovedårsakene til det omstridte store antall tapte menneskeliv (Se 1.6 Jordskjelv i verden).

Det er fortsatt mange “skyggeområder” innen jordskjelv-ingeniørvitenskap. Den teoretiske kunnskap som finnes idag innen jordskjelv-beregninger er stort sett kun begrenset til forenklet tilfeller [6] (se Tillegg D.0.1 Forutsetninger). Jordskjelvstandarden som brukes i Norge, NS-EN 1998-1 er helt tydelig på dette. Målet med jordskjelvberegning er for å begrense skadeomfang.

¹Se the Indian Ocean earthquake [2].

Det er dermed god grunn til å tro at forskning på byggemetoder som kan takle effekten av jordskjelv bedre kommer til å bli en stor satsingsområde enda “en stund til” i fremtiden [6].

Det er umulig å unngå jordskjelv, men det er mulig å begrense dets ødeleggelser, for eksempel ved bruk av varslingsystem for Tsunamier. Når det gjelder kollaps av bygninger, er jordskjelv fortsatt en stor utfordring for ingeniører. God design av jordskjelvmotstandige bygninger kan bidra til å redusere omfang av ødeleggelser og tap av menneskeliv.

Dette arbeidet skal handle om noe av dette. Først skal det framlegges grunnleggende teori om jordskjelv som et naturlig fenomen, deretter skal det innføres teoretisk grunnlag for jordskjelvberegninger med bruer i fokus, men noen prinsipper skal også utvides til å omfatte etasjebygg. Til slutt skal beregningsteorien anvendes på to konkrete eksempler: Først skal det utføres forenklet jordskjelvberegning på en betongbru ved forskjellige geometriske forhold, og til slutt mer detaljert jordskjelvberegning av Sandsfjordbrua, ved hjelp av data verktøy.

For å kunne besvare mest mulig av spørsmål fra 0.2 Oppgavebeskrivelse, kan dette arbeidet deles i fire viktigste deler:

1. **Kapittel 1** handler om generell og teoretisk karakteristikk av jordskjelv.
2. Først i **Kapittel 2** innføres det matematikk. Forståelsen av teori som ligger bak jordskjelvberegninger var en av de største utfordringene til undertegnede i dette arbeidet. Lære å bruke beregningsprogrammer var utfordrende nok, men enda viktig var det å forstå grunnlaget for beregningene, for å kunne kontrollere resultater fra dataverktøyet. Mye tid ble dermed brukt til å utlede alle formler. Alle mellomregninger er tatt med, med unntak av:
 - a) Steder der utledningen krever kunnskaper som overgår det jeg forventes å ha.
 - b) Steder der utledningen krever en altfor omfattende avsporing, som ikke er vesentlig for målet.
3. Alle deler av jordkloden er ikke påvirket av jordskjelv på samme måte. Derfor har noen land utarbeidet seg tilpasset regelverk som skal brukes i jordskjelvberegninger. **Kapittel 3** handler om regelverket som gjelder i Norge.

4. **Resten** av arbeidet er kanskje det viktigste, med tanke på vurdering av oppgaven. Her blir det gjort en serie forenklete håndberegninger av jordskjelv og, nødvendige konklusjoner trukket. Deretter blir Sandsfjordbrua beregnet på litt mer nøyaktig måte, ved hjelp av beregningsprogrammet Staad Pro, som avslutning av arbeidet.

Det ble ikke mulig å gjennomgå del 7 og 8 fra 0.2 Oppgavebeskrivelsen innen den tildelte tidsfristen.

All ære til **Vår Himmelske Far** for livets gave.

Dette arbeid ble utført under streng faglig tilsyn av **professor Jasna B. Jakobsen**.

Dyp takknemlighet til **Roger E. Guldvik**, Statens Vegvesen Stavanger.

Takk til **Bertil Brudeseth** og **Rune Gunnerød** ved Statens Vegvesen i Tønsberg.

Takk til Statens Vegvesen ved **Kai Midtskogen**, som ga meg mulighet til å videreutdanne meg.

Takk også til **Odd Georg Larsen** (i pensjon) som skrev denne spennende oppgaven til meg.

Gud har kanskje skapt et menneske, men dere lagde en mann ut av det. Mange takk til mine kjære mor og far **Agnes Kapinga** og **Filip Lukusa**. Glad i deg mamma!

Jean N. Kabeya
Stavanger, 13.juni 2011.

Kapittel 1

Fenomenet Jordskjelv

1.1 Innledning

Det var en samling av noen av verdens fremste vitenskapsmenn og forskere innen fagfeltet Geologi. Denne interessante gjengen var samlet til en konferanse i Washington USA, en gang på 1970-tallet, og der skulle man snakke, debattere og diskutere bergarter, jordtyper og lignende, det vil si, det meste, utenom Teologi!

Hvor stor ble ikke da overraskelsen når en av disse gråhårete vitenskapsmenn kom på talerstolen med en stor Bibel i hånda! Han åpnet talen sin ved å lese fra Bibelen, Zacharia 14:4,5 , der det står følgende:

Den dagen skal [Herren] stå med føttene på Oljeberget, som ligger rett øst for Jerusalem. Og Oljeberget skal dele seg i to fra øst til vest, så det danner seg en bred dal. Den ene halvparten av fjellet trekker seg mot nord og den andre mot sør [...] Og dere skal flykte som dere flyktet for jordskjelvet i de dager Ussia var konge i Juda.”^[1]

Denne ellers underdokumenterte beretningen stammer fra hukommelsen til en av deltakerne som var til stedet på konferansen: professor Xavier Le Pichon, ved College de France ^[3].

Taleren var geologen John Tuzo Wilson (24.10.1908 -15.4.1993), som er verdenskjent for å ha jobbet med teorien om Tektoniske Plater ¹, og han

¹Professor John Wilson Tuzo arbeidet i mange år som foreleser og forsker innen Geofysikk ved Universitet i Toronto. Teorien om tektoniske plater offentliggjorde han i artikkelen “A new class of Faults and their Bearing on continental Drift” fra 1965. Denne teorien var så revolusjonerende at “bøker måtte tilbakekalles og omskrives” ^[2]. Han sluttet offisielt fra Universitet i Toronto i 1974, men fortsatte som professor Emeritus,

brukte denne beretningen fra Bibelen for å argumentere om at dette uten tvil er et av de tidligste dokumenterte tilfeller av jordskjelv.

Siden “menneskehetens vugge”, har det alltid skjedd jordskjelv. Noen har vært mer destruktive enn andre, men det skulle ta flere år og mye forskning før man til slutt forstod at det er Tektoniske aktiviteter som er kilder til jordskjelv og andre fenomener slik som vulkan utbrudd, tsunamier, osv . . . Disse fenomener er mest berømte for sine destruktive sider, men de har faktisk en konstruktiv rolle: Gjennom tidene, har disse naturlige hendelser vært med å utforme vår planet slik vi kjenner den idag.

Uten disse aktiviteter, hadde det ikke vært fjell og daler, og planeten Jordan ville sannsynligvis vært flat og kjedelig, og dekket med store mengder vann, ettersom det ikke ville vært noen “barriere” mot vannet [3].

Ja, Jordan hadde vært en annen “død planet ” slik som vår nærmeste galaktiske nabo, Månen. [3]

1.2 Hva er jordskjelv?

Jordskjelvvitenskap er et forholdsvis ungt fagområde. I over 200 år jobbet geologer hardt med geologiske fenomener, blant annet jordskjelv, men gjennombruddet kom ikke før en gang på 60-tallet, da John Tuzo, som er nevnt innledningsvis, kom med sin **Teori om bevegelser av Tektoniske plater**.

Denne går ut på at **Lithosfæren**, den ytre delen av jordkloden, som består av noen få hundre kilometer, er delt opp i brede jordplater, som beveger seg mer eller mindre som et sammenhengende element.

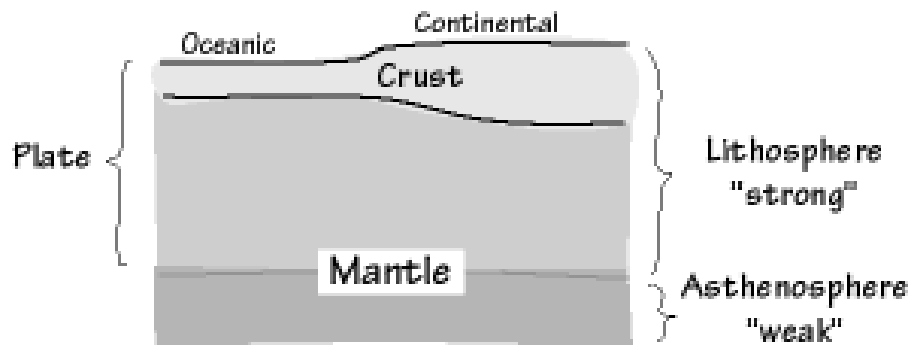
Disse kan tenkes på som et solid legeme som flyter på den indre delen av jordskorpa, **Astenosfæren**, som er mer duktil og fyldigere, slik som båter flyter på vannet.

Tykkelsen på platene er varierende, men de er vanligvis mellom 100 og 200 km. Øvre grense på lithosfæren, er enten den tørre jorda som vi går på, eller havbunnen.

Nedre grensen er varierende og avhengig av temperaturen. Jo lenger man beveger seg mot jordsentrum, jo mer øker temperaturen. Når denne kommer opp i ca. 1300°C begynner lithosfærens materie å smelte og mykne dramatisk.

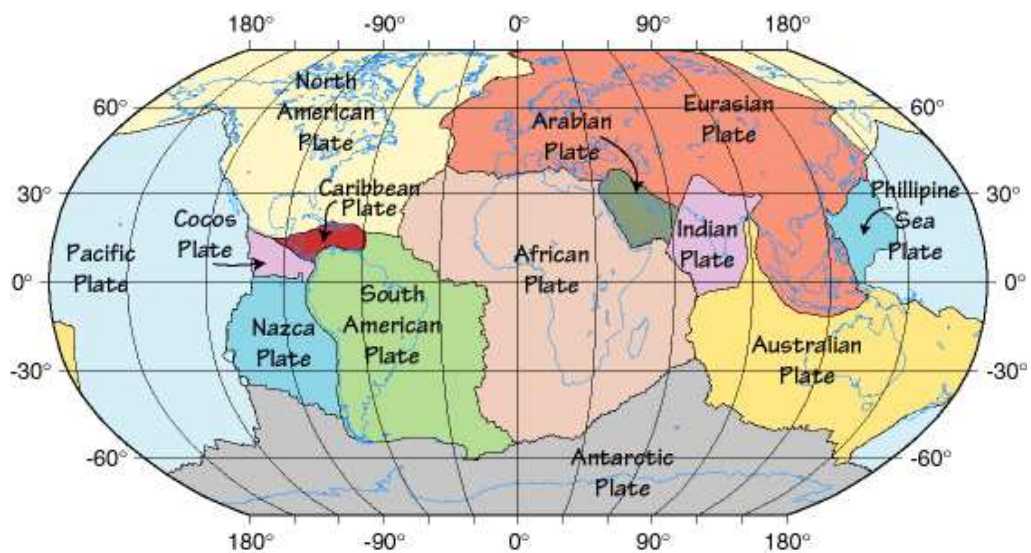
og leder for Ontario Science Center inntil 1985 [8]. Han døde i 1993 av naturlige årsaker. To aktive undervannsvulkaner ved British Columbia kysten i Canada ble “døpt” Tuzo Wilson Seamounts, etter han.

”I enjoy, and always have enjoyed disturbing scientists Professor John Tuzo Wilson. [9]



Figur 1.1: Prinsippskisse av Tektoniske plater. Bilde: Prof. Charles J. Ammon, Penn State University.

Her begynner asthenosfæren².

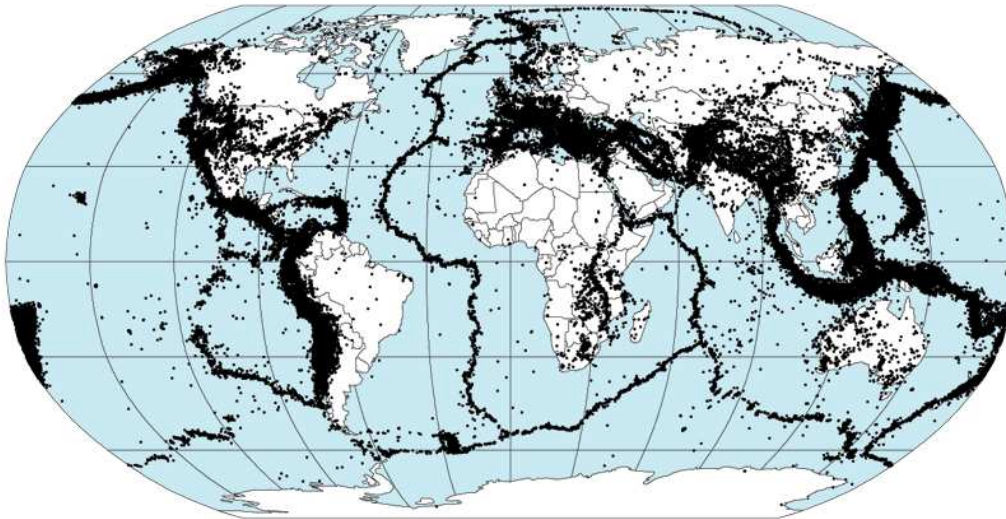


Figur 1.2: Jordskorpa er delt i Tektoniske plater. Bevegelse av disse fører til jordskjelv. Bilde: Prof. Charles J. Ammon, Penn State University.

Teorien om jordskorpas inndeling i Tektoniske plater ble lagt i tvil i lang tid, men vitenskapelig forskning (blant annet observasjon av fordeling av jordsjølvs episentre (figur 1.3), og vulkankjeder (figur 1.7), men spesielt måling av jordas magnetiske felter [12]) bekreftet denne. Senere har det visst seg at det er 12 store slike plater, pluss en del andre, av mindre betydning (figur 1.2).

²Prof. Charles J. Ammon, Penn State University.

Preliminary Determination of Epicenters
358,214 Events, 1963 - 1998



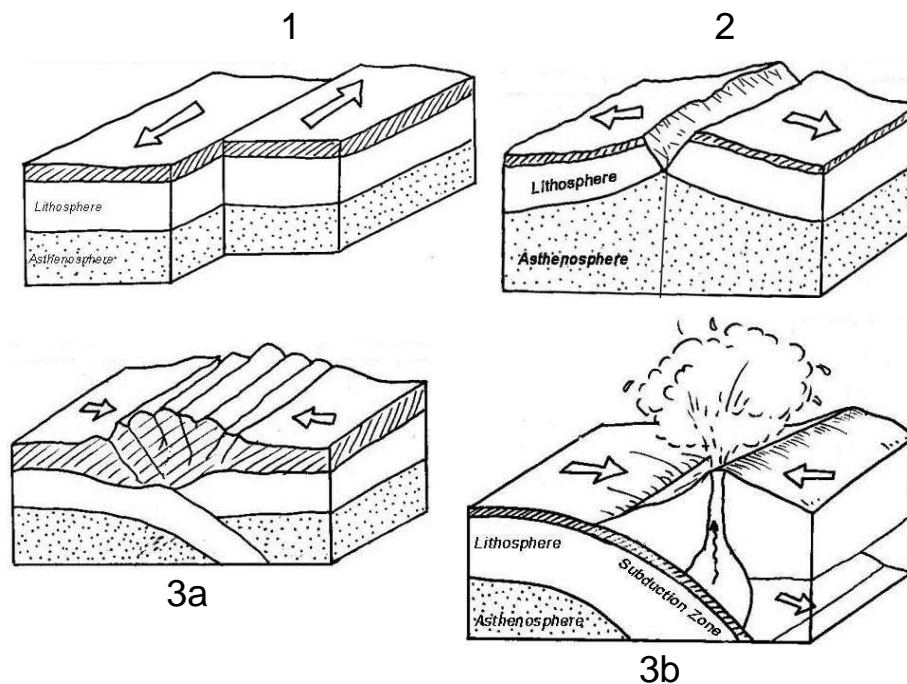
Figur 1.3: Oversikt over jordskjelvepisentre (alle intensiteter) som er blitt registrert i perioden fra 1963-1998. Episentrenes konsentrasjonsområder bekrefter læren om jorskorpas inndeling i Tektoniske Plater. Bilde: NASA.

De viktigste jordskjelvaktiviteter oppstår i grenseområder mellom Tektoniske plater ved at de støter på hverandre når de flyter på den mer duktile indre jordlaget astenosfæren. Kontinenter er også i bevegelse i takt med plater de hører til.

Det skiller mellom tre typer grenseområder der platene møtes (figur 1-3):

1. **Divergente grenseområder**, der to plater drifter fra hverandre. Denne type grensebevegelse er mest observert på havbunnen, der den fører til dannelse av lange vulkan kjeder.
2. **Konvergente grenseområder**: Her glir platene imot og støter på hverandre. Denne type bevegelsen, som også er mest observert på havbunnen, fører til at en av platene glir under den andre, og det oppstår dype grøfter. En slik grøft finnes i området rundt Mariana øyer i Stillehavet. Dybden er opp til hele 11 km [4] side 324.
3. **Transform fault boundaries**, eller parallelle grenseområder . Dette gjelder to plater som glir forbi hverandre.

San Antonio fault i California, USA er et synlig eksempel på konvergente grenseområder.



Figur 1.4: Grensetyper mellom Tektoniske plater: 1) Parallell 2) Divergente, og 3) Konvergente.

Når to nabo tektoniske plater sklir forbi hverandre (se figur 1.9), vil massene motsette seg dette, ved friksjon. Dette skaper store spenninger i fjellet langs grenselinjen (feil linjen). Platene sklir mer og mer, og fjellet rundt buler ut på grunn av spenninger. Når disse når en viss kritisk verdi som fjellet ikke tåler, da gir fjellet etter i brudd (figur 1.9)³. Dette skjer så plutselig, og den enorme mengde energi som frigjøres forplanter seg da i omkringliggende fjell på hver side av bruddflaten, og reiser videre i form av bølger, på samme måte som en stein som kastes i et tjern vil skape bølger som sprer seg videre i vannet. Dette kalles **Seimisk bølge**, også kjent som **jordskjelv**, på hverdagspråk.

Jordskjelv stopper når energien er blitt mindre, og bølgen ikke lenger kan fortsette å forplante seg gjennom fjell massene.

Fokus er stedet der jordskjelvet starter. Dette ligger ofte dypt ned i jorden (2-20 km for kontinental jordskjelv, og så dypt som over 600 km for jordskjelv

³Spenningen i fjellet opphører da, og jorda går til ro i forskjøvet tilstand (figur 1.8), i påvente av "neste runden", eller **etter-jordskjelv**.



Figur 1.5: *San Antonio, California USA. Den mest studerte bruddflaten i verden [4] side158.*

på havbunn), der litosfæren møter astenosfæren, mens skjelvets **Episenter** er det synlige geografiske stedet på jorden, der bruddflaten starter. Episenter ligger rett over fokuset.

Jordskjelv oppstår ved alle typer grenseflater (figur 1.4).

Jordskjelv inntreffer også inne på plata, langt fra plategrenser. Dette kan man legge merke til, for eksempel i sentrale Brasil eller nord-Russland på figur 1.3. Det er denne type jordskjelv som skjer i Norge (Kapittel 1.7 Jordskjelv i Norge).

Denne type jordskjelv er enda vanskeligere å beskrive⁴.

Det er også påvist en sammenheng mellom tektoniske plater og vulkansk aktivitet, spesielt undersjøiske vulkaner.

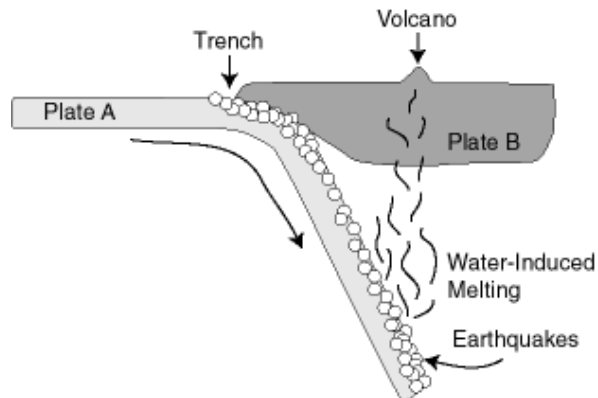
Når jordskjelv inntreffer under sjøen ved konvergente tektoniske grenseområder, glir den ene platen under den andre, og blir på en måte “slukt” av den andre plata, og tvunget dypt ned i jordas indre del, den varme Asthenosfæren.

Figur 1.6 viser et slikt fenomen i undersjøisk konvergente plater.

Dette resulterer i at vulkaner blir “født”.

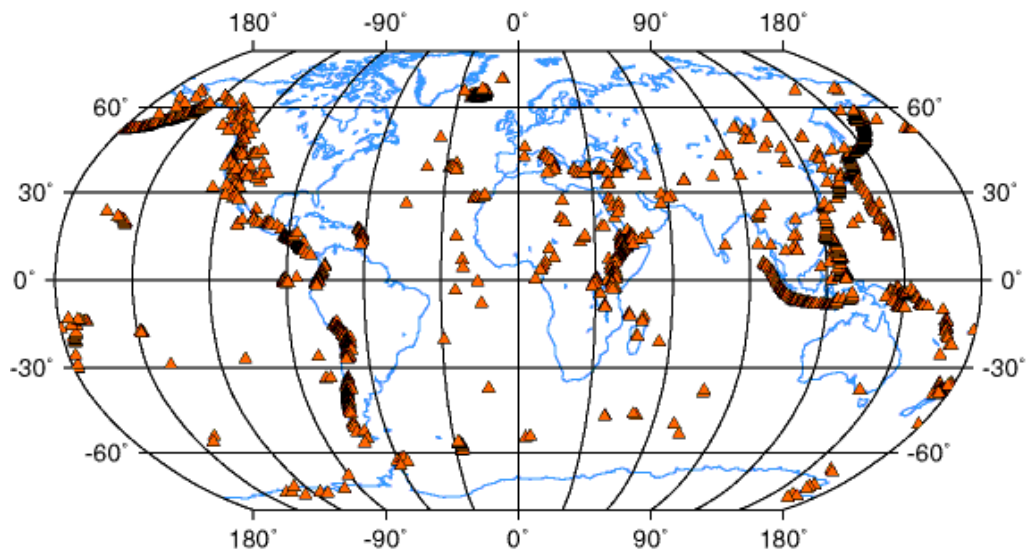
Dette skjer ved at fjellet som tvinges ned i asthenosfæren, og som har vært

⁴Punkt 2b i 0.2 Forord



Figur 1.6: *Collision of oceanic continental lithosphere and subsequent subduction zone. Bildet: Prof. Charles J. Ammon, Penn State University.*

i kontakt med vann i flere tusener av år, går inn Asthenosfæren, hvor både trykk og temperatur er meget høye, blir vannet i dette fjellet frigitt. Temperaturen på astenosfæren på dette stedet blir redusert noe, på grunn av dette, og det blir dannet magma, som er letter enn astenosfæren, og fliter da oppover i form av undersjøiske vulkaner.



Figur 1.7: *Nyere"vulkaner. Bildet: Prof. Charles J. Ammon, Penn State University.*

Figur 1.5 viser noen av de nyeste vulkaner (i geologisk tidsskala). Vi legger spesielt merke på vulkankjeder på vestkysten av sør-Amerika, USA og



Figur 1.8: *San Francisco, California, 18. april 1906. Skjelvet som målte 8,3 på Richter skala, førte til at dette gjerdet ble knekt og forflyttet nesten 3m. Bildet fra US Geological survey.*

Canada og Alaska, samt vulkankjeder i Nord Australia, og Vest for Kina, mot Japan.

Sammenligning av figur 1.7 og 1.3 eller 1.2 viser at de ovennevnte vulkankjeder ligger i grenseområder for tektoniske plater.

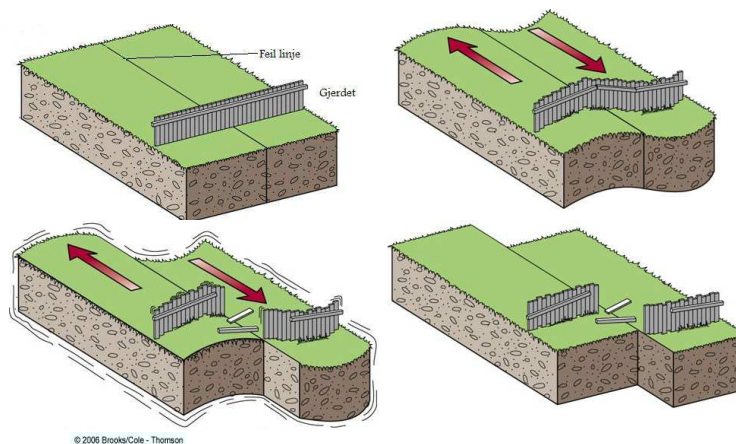
1.3 Bølgeforplantning

Som sagt, når jordskjelv inntreffer, vil den frigitte energien forplante seg videre i jordmassene i form av bølger. Disse bølger “reiser” tredimensjonelt i alle retninger. Rent praktisk betyr dette at gjenstander som befinner seg i berørte områder vil bevege seg i alle retninger (opp, ned og sideveis).

Jordskjelvbølger deles i tre typer: Primære-, sekundære-, og overflatebølger, derved omtalt P-, S- og O-bølger.

De to første typer har forholdsvis mindre energi og er ikke truende. Det er de som varsler ankomsten av de mest ødeleggende overflate bølger. [8]

- **P-bølger** er de aller første som registreres av seismograf (se 1.5 Måling av jordskjelv). Disse reiser gjennom fast fjell og vann med en hastighet på 6 km/s (20-ganger fortere enn lyd reiser gjennom lufta) [4]. De reiser



Figur 1.9: Mekanisme som fører til jordskjelv [7]

ca. 2-3 ganger forttere enn O-bølger, mens S-bølger reiser $3,5 \text{ km/s}$ [4]. P-bølger kalles også Trykk bølger”, fordi de reiser horisontalt i et “dytt-og-dra” mønster.

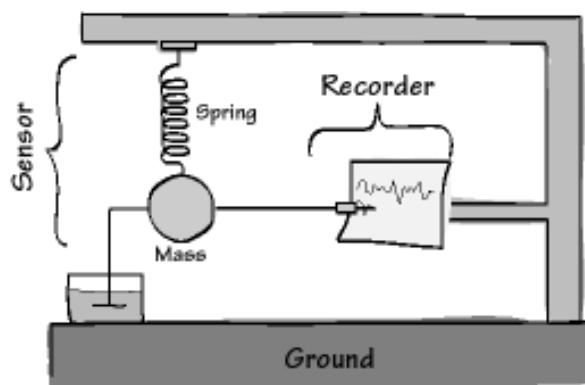
Objektet som er utsatt for P-bølger vil ristes fram og tilbake, parallelt med skjelvets retning.

- **S-bølger** kalles også skjærbølger fordi de “reiser” i et rullende mønster, og løfter gjenstander opp og ned, perpendikulært med sin egen retning. S-bølger reiser gjennom fast fjell, men ikke i vann. Hastighetsnivå ligger mellom P- og O-bølgenes hastigheter.
- **Overflatebølger** er de tregeste, men de mest destruktive. De reiser i to mønstre: Love-bølger er de raskeste, og de rister jordmasser sideveis, som en slange, mens Rayleigh (R-bølger) reiser i et rullende-mønster, slik en bølge ruller” i sjøen. På grunn av dette mønsteret, vil objekter som er utsatt for disse bølger ristes opp og ned og sideveis i samme retning som bølgen reiser. Mest følte rystelse fra et jordskjelv skyldes R-bølger.

1.4 Måling og klassifisering av jordskjelv

1.4.1 Hvor startet jordskjelvet?

Seismograf er instrumentet som brukes for å registrere jordskjelvbølger. Prinsippet for en Seismograf er enkel: En kule med pålimt skriveutstut er hengt i ei fjær. Fjæra er festet på en solid kasse som er godt plantet i bakken. Hver gang jordskjelv inntreffer, vil kassa bevege seg i takt med fjellet som den er plantet i. Fjæra vil også bevege seg fram og tilbake, og skrivesystemet fra kula vil da kunne registrere utslagene, om det er horisontalt eller vertikalt.



Figur 1.10: *Prinsippet for seismograff. Bildet: Prof. Charles J. Ammon, Penn State University.*

Dagens moderne seismografer kan registrere jordskjelv som forårsaker så små utslag som 10^{-9} mm [4].

Som allerede sagt, er episentret, det geografiske stedet på jordoverflaten, rett over fokuset, der jordskjelvet startet.

Systemet for å bestemme episentrets beliggenhet ble utviklet ved hjelp av seismogrammer fra jordskjelver der episentret var helt tydelig (synlig). Fra disse ble det laget reise/tidgrafer, som i sin tur, ble enda mer forbedret når man studerte seismogrammer fra kjernefysisk sprengning, (siden man visste nøyaktig hvor sprengningen ble utført og dermed startpunktet for bølgene). Slike reisetid-grafer brukes i dag for å bestemme hvor langt et jordskjelvbølge som registreres i seismogram har "reist".

Når avstanden som den registrerte jordskjelvbølgen har reist, er blitt bestemt, brukes det en metode som heter "Triangulasjon" for å bestemme startpunktet, episentret av jordskjelvet. Dette skjer ved at man "tegner" en sirkel som har origo ved målestasjonen, og radius lik den beregnede avstanden som

bølget har reist. Hver stasjon på jordkloden som har registrert bølgen, tegner hver sin sirkel på tilsvarende måte. Kryssningspunkt for alle slike sirkler, utgjør da jordskjelvets episenter [4].

1.4.2 Hvor stor var jordskjelvet?

Enda viktigere enn startpunktet, er å kunne si noe om jordskjelvets størrelse. Dette kan bidra sterkt til å kunne si noe om omfanget av eventuelle ødeleggelser som en kan forvente, om ikke å begrense det.

I 1935 skapte en seismolog (jordskjelvforsker) det første systemet for å klassifisere jordskjelv. Han het **Charles Richter**, fra California, USA. Ideen fikk han etter å ha observert hvordan astronomene klassifiserte stjerner etter hvor sterkt de skinner. Systemet som han grunnla ble utviklet til det som idag er kjent som **Richter Skala**.

Richter skala er definert som:

Logaritmen av den maksimale amplitude i mikrometer ($1/1000000m$), målt fra et Wood-Anderson seismograf, korrigert med en avstand på 100km. ([12], side 571).

Skalaen er gradert fra 1 til 10, hvor 10 er det størst teoretiske mulig jordskjelv med et bruddflate på vel 40.000km, som er cirka jordas omkrets.

Det har blitt registrert jordskjelv i underkant av $10M_W$, men de er veldig sjeldne [7].

Richter skala er ikke i seg selv et mål for jordskjelvets energi, men er knyttet til denne gjennom formelen:

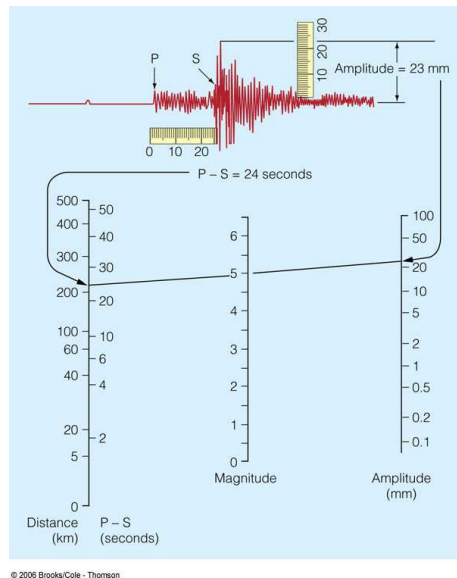
$$\log E = 11,8 + 1,5M$$

Det er lett å se (ved hjelp av denne formelen), at energimengden øker med en faktor på 32 ganger, mellom to nabo jordskjelv, slik at et jordskjelv på for eksempel 6 magnitudo har 32 mer energi enn ett på 5 magnitudo.

Det finnes et annet mål for jordskjelv. Dette kalles **Moment magnitudo** og skrives M_W . Dette blir også mye brukt i tillegg til Richter, og da spesielt når det gjelder veldig store jordskjelv, fordi størrelsen på et jordskjelv blir direkte knyttet til fysiske observbare størrelser, slik som bruddflaten (fault), omfang av ødeleggelsen og fjelltype ved episenteret.

Momentmagnitudo er definert som: Arealet som er rammet ganger gjennomsnittslengden av bruddflaten.

Både Richter- og Momentmagnitudo-skalaer er gradert fra 1 til 10, der jordskjelvet på 10 er det teoretiske største mulig jordskjelv med bruddflaten på 40.000km, som er cirka jordas omkrets.



Figur 1.11: Gradering av jordskjelv på Richter skala: Først måler mann og merkerer av avstanden til jordskjelvets fokus ved hjelp av tidsintervallet mellom registrering av S- og P-bølger (her 24sekunder). Deretter måler mann og merkerer av maks amplitude på seismografen (her 23mm). En rett strek mellom de to verdier angir riktig Richter magnitude M_L [7] .

1.4.3 Hvor mye skade forårsaket jordskjelvet?

Richter og Moment magnitudo er greie målemetoder, i vitenskapelig sammenheng, men for en “vanlig dødelig” vil det være mer meningsfullt å vite omfanget av ødeleggelser som kan forventes av et jordskjelv. Dette kan imidlertid ikke sies mye om kun ved å lese Richter skala.

Derfor ble det laget enda et jordskjelv skala, som sier noe om ristelsesintensiteten, og observerbare ødelegelsesomfang. Denne skala heter **Modifisert Mercalli Skala** etter italienske **Giuseppe Mercalli** som laget skisser av det i 1902 [4].

Denne skala rangerer jordskjelv i stigende romerske tall, fra I til XII. Det er en kvalitativ skala som kun er basert på det bløtte øyes observasjoner av virkninger av jordskjelv. Ikke til bruk i beregninger.

Her er Mercali skala sett i perspektiv med noen andre jordskjelvfakta [5]:

Richter M_L	Mercali intensitet	Effekt på folk og bygninger	Varighet nær kilden	Forskyv- ning	Brudd- flaten
< 2	I-II	De fleste vil ikke merke denne.	-	-	-
ca.3	III	Innendørs vil noen merke.	0-2s	-	-
ca.4	IV-V	Merkes av de fleste. Tallerkener rister, noen knekker.	0-2s	-	-
ca.5	VI-VII	Alle merker. Mange vinduer vil knekke. Noen murer risser opp og andre kollapser.	2-5s	ca.1cm	1km
ca.6	VIII-IX	Mange er skremte. De fleste røykpiper knekker. Omfattende skader på dårligebygninger.	10-15s	0,6-1,4m	ca.8km
ca.7	X-XI	Fullstendig panikk. De fleste bygninger og bruer ødelagt.	20-30s	ca.2m	50-80km
ca.8	XII	Nærmest fullstendig skader på bygninger. Store skader på bruer og dammer. Jernbane bøyes.	> 30s	4,1m	200-400km
9+	>XII	Total skader. De overlevende ser at jordmasser beveger seg i bølger, mens gjenstander kastes opp i lufta.	> 80s	13m	> 1200km

1.4.4 Måling av jordskjelv til ingeniør/teknisk formål

Jordskjelv med intensitet under 5M er ikke interessante for ingeniører, fordi disse vil ikke kunne gjøre skade på bygninger [12]. Over 5M derimot, kan det oppstå grunnforskyvninger som kan være fatale [12].

Måling av slike jordskjelv er blitt muliggjort ved at det er blitt installert et nettverk av en type seismografer som kalles Strong-motion accelerograph rundt om i verden, men spesielt i de mest jordskjelvutsatte land, slik som USA, Japan, og Mexico.

Strong-motion jordskjelv registrerer ikke jordskjelv kontinuerlig, men utløses automatisk når et jordskjelv på verdi større enn 5M oppstår. Utbredelse av slike instrumenter er fortsatt begrenset, og mange “store” jordskjelv skjer uten at viktig data, slik som magnitude, avstander, jord tilstand, osv... blir samlet inn. [12]

1.5 Jordskjelv i verden

Her er noen tall som setter jordskjelv i perspektiv⁵.

- Ti av de **største** jordskjelv som er blitt registrert

Årstall	Sted	Navn	Størrelse M_L	Tapt menneskeliv
22.05.1960	Valdivia, Chile	Valdivia	9,5	1.716
27.03.1964	Alaska, USA	Alaska	9,2	128
26.12.2004	Sumatra Indonesia	Indian Ocean	9,1	226.000
13.08.1868	Arica, Chile	Arica	9	25.000
31.01.1906	Ecuador og Colombia	Ecuador -Colombia	8,8	500
01.11.1755	Portugal	Lisbon	8,7	60.000
15.08.1950	Tibet		8,6	780
15.06.1896	Japan		8,5	22.000
11.11.1922	Chile og Argentina		8,5	Flere hundre
07.11.1837	Chile		8,5	58 på Hawaii

⁵Tallene gjelder per mars 2011. Disse kan avvike noe fra kilde til kilde. Mulighet også for flere jordskjelv i samme størrelsesorden

- Ti av de **nyeste** jordskjelv

Årstall	Sted	Navn	Størrelse M_L	Tapt menneskeliv
21.02.2011	New Zealand	Christchurch	6,3	155 ^(u)
14.04.2010	Kina	Yushu	6,9	2.698
03.11.2010	Chile	Pichilemu	6,9	1
08.03.2010	Tyrkia	Elazig	6,1	42
27.02.2010	Chile	Chile 2010	8,8	521
12.01.2010	Haiti	Haiti 2010	7	222.570 ^(d)
30.09.2009	Indonesia	Sumatra 2010	7,6	1.115
29.09.2009	Samoa		8,8	189
02.09.2009	Indonesia		7	79
06.04.2009	Italia		8,8	295

- Ti av de **mest dødelige**

Årstall	Sted	Navn	Størrelse M_L	Tapt menneskeliv
23.01.1556	Shaanxi, Kina	Shaanxi	8	820.000 ^(e)
26.12.2004	Indonesia	Indian Ocean	9,3	227.898
28.07.1976	Tangshan, Kina	Tangshan	over 7,8	ca. 225.000
11.10.1138	Aleppo, Syria	Aleppo	8,5	ca.230.000
21.05.0525	Antioch, Tyrkia	Antioch	8	250.000
16.12.2010	Ningxia-Gansu Kina	Gansu	7,8	235.502
12.01.2010	Haiti	Haiti 2010	7	222.570 ^(d)
01.09.1923	Kanto, Japan	Great Kanto	7,9	142.000
06.10.1948	Turkmenistan	Ashgabat	7,3	110.000
31.12.1703	Edo Japan	Genroku	8	108.800

(e): Tallet er et estimat, og ikke helt eksakt.

(d): Angitt antall døde fra Haiti jordskjelv er fra myndighetene. Tallet er høyt omdiskutert av forskere, som mener det er alt for høyt.

(u) Telling av tapt menneskeliv pågikk fortsatt, i skrivende stund.

1.6 Jordskjelv i Norge

Som vi var inne på tidligere, er det områder som ligger på grensen mellom tektoniske plater som er mest utsatt for jordskjelv, dette fordi 90% all alt jordskjelvaktivitet foregår der. Norge ligger på den Eurasiatiske platen, på en “trygg” avstand fra Tektoniske grenser (figur 1.2).

Det er dermed ikke sagt at Norge er helt fri for jordskjelv. Det skjer faktisk jordskjelv i Norge på nærmest daglig basis, men disse havner i kategorien Mikrojordskjelv ($< 2,5M_L$) som ikke blir lagt merke til.

Det største jordskjelv som er blitt registrert i Norge, skjedde klokken 11:27, den 23. oktober 1904. Det var på 5,4 Richter, og rammet mest Oslo-området, men det ble følt så langt som fra Namsos i nord til Polen mot sør, og fra hele syd Norge helt til Helsinki, Finland i øst, et område på ca. 800.000km². Det ble innledet av minst 11 førjordskjelv, og minst 18 etterkjelv ble rapportert.

Nyere forskning fra både norske og internasjonale fagfolk har konkludert med at skjelvet kan ha hatt episenteret i Kattegat, ca. 25 km sør for Hvaler (Østfold), mens fokuset lå cirka 28 km dypt. Etter det har det blitt registrert andre jordskjelv av mindre skala (29.november 2000 ble det registrert et på 3,8M i Strømstad område), men aldri så stort som det i 1904.

Det er altså over 100 år siden det største jordskjelv i Norge ble registrert, og det diskuteres i jordskjelforskningsmiljø om det var et engangstilfelle, eller om det kan bli en retur⁶.

NORSAR er organet som følger med jordskjelvaktiviteten i Norge, under mandat fra Institutt for Geovitenskap, Universitet i Bergen (gjelder per 6.mars 2011). Det finnes 33 seismiske stasjoner i Norge som registrerer jordskjelvaktivitet i Norge og arktiske øyer kontinuerlig. Innsamlet data blir, ved behov, analysert og bearbeidet ved UiB.

På NORSAR sine hjemmesider, kan man se et kart som viser steder der det er blitt registrert jordskjelv (både naturlig og menneskeskapt, for eksempel ved sprengning) for gjeldende dag og syv dager før (gjelder per 6. mars 2011).

Selv om det ikke er betydelige jordskjelvaktiviteter er Norge, tas det likevel hensyn til jordskjelv ved beregning av konstruksjoner. Mer om det kommer i Kapittel 3 Gjeldende regelverk.

⁶Kilde: Artikkelen “Jordskjelvet som rystet Oslo i 1904... og mulighet for en gjentakelse” fra Aftenposten for 24.10.2007.

Kapittel 2

Bruer med jordskjelvlast: Beregningsmetoder

Tre beregningsmetoder for bruer med jordskjelvlast vil bli presentert i dette arbeidet:

1. Forenklet metode,
2. Beregning ved modal analyse, og
3. Beregning ved tidsplan analyse.

Metode 3 skal kun presenteres, mens metode 1 og 2 skal gjennomgås noe grundigere.

I tillegg har det blitt utført to studier, det ene basert på metode én og det andre basert på metode to.

2.1 Hva er vi ut etter?

Byggingeniørens jobb er å finne fenomener i naturen (jordskjelv i dette tilfelle) som gir last på bygningen, lage matematiske modeller for fenomenet, for så å utvikle tall-verdier som kan brukes i dimensjonering.

Når jordskjelv inntreffer, vil den gi en **grunnakselerasjon** til de utsatte jordmasser. Bygninger i disse områder vil også reagere på denne grunnakselerasjonen, ved å forskyve seg.

Denne **forskyvningen** er kanskje den viktigste informasjon som vi er ute etter når vi utfører jordskjelvberegninger.

Når vi vet hvor mye et bygg vil forskyve seg ved et jordskjelv med en gitt grunnakselerasjon, kan vi for eksempel bedømme riktig avstand mellom to

nabobygninger, slik at de ikke kolliderer med hverandre når jordskjelv inntrer.

Noen industrier har kanskje følsomme instrumenter i bygningene sine, som kan reagere når en gitt akselerasjoner overstiges. Jordskjelvberegninger kan også vise maksimale akselerasjonverdier som kan forventes.

I tillegg til forskyvninger, er vi også interessert i **skjærkrefter**, og **momenter** som vil oppstå ved bakkenivå (ved fundamentet) på bygningen, på grunn av jordskjelvet slik at vi kan dimensjonere for disse kreftene.

Den tidsavhengige (eller dynamiske) type påkjenningen som jordskjelv påfører, har sine røtter i fagområdet Dynamikk. Neste underavsnitt vil gi en kort innføring i dette fagområdet, før man går inn på selve jordskjelvberegninger, fra og med Kapittel 4.

2.2 Grunnleggende teori i Dynamikk

Dynamisk analyse av bruer er en omfattende prosess som inneholder elementer fra minst to fagområder: Dynamikk og Finite Element Analysis. Dette underavsnitt skal gi innføring i grunnleggende dynamikk som resten av arbeidet bygger på.

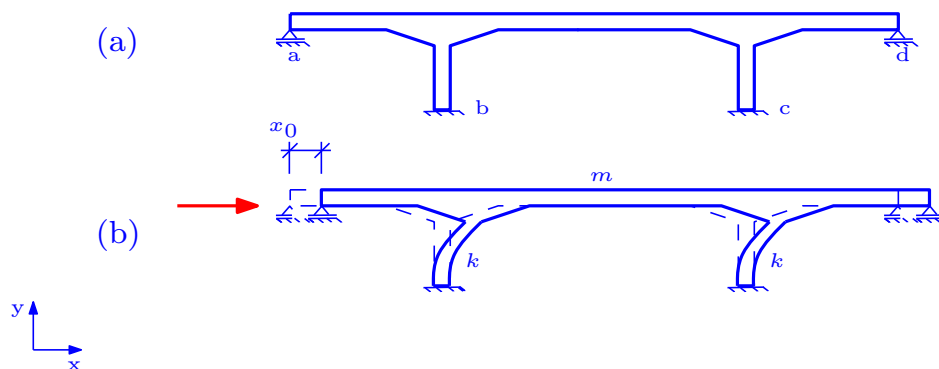
De prinsippene som skal gjennomgås i dette underavsnitt, tar konsekvent utgangspunkt i brukonstruksjon, men det er flere problemstillinger i hverdagen innen bygg- og /eller ingeniør-verden som også kan idealiseres til dynamiske modeller, frakobles for så å derivere matematiske ligninger for videre analyse. Følgende tilfeller av dynamiske problemstillinger og løsningsmetoder skal presenteres:

1. Udempet system med én frihetsgrad
2. Dempet system med én frihetsgrad
3. Dempet én frihetsgradssystem med grunn forskyvning
4. Dempet og udempet system med flere frihetsgrader

2.2.1 Udempet system med én frihetsgrad

Vi tenker oss en bru slik som visst i figur 2.1 a). Brua er fast innspent i knutepunktet b og c, og er fri opplagt ved endene. Brua blir påført en kraft som gir den en initiell forskyvning x_0 . Kraften tas vekk, og brua kommer da i **fri svingning**, slik at forskyvningen $x(t)$ blir mindre og mindre, inntil den blir lik null, i det brua slutter å svinge.

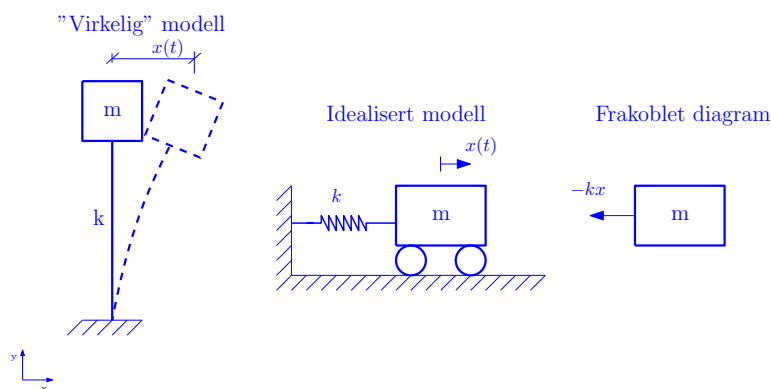
Figur 2.1 b) viser samme bru, i deformert tilstand (hensiktsmessig overdrevet)¹ etter påføring av initiell forskyvning.



Figur 2.1: Udempet system.

Vi vil utlede et matematisk uttrykk som beskriver utvikling av forskyvningen $x(t)$, fra starten $t = 0$ når den er $x(0) = x_0$ helt til slutten ved tiden $t = T$, når systemet går tilbake til ro $x(T) = 0$.

Brua kan forenkles (idealiseres) slik som i figur 2.2. Vi antar at alle masse m er konsentrert i bru dekket, mens søylenes stivhet k er det som tilatter brua til å svinge fram og tilbake.² Dette kan idealiseres som et masse-fjær system, slik som i figur 2.2.



Figur 2.2: Idealisert modell av udempet system.

¹Dette arbeidet skal begrense seg til små forskyvninger, innen grenser av linearitet.

²Stivhet k er en egenskap som varierer fra material til material. Den har å gjøre med type material og geometri (tverrsnitt og lengde).

Fra frakoblingsdiagram i figuren, ser vi at summen av krefter som virker på legemet er:

$$\sum F = -k \cdot x \quad (2.1)$$

, når vi definerer høyre siden som positiv. Vi innfører Newton's andre lov: $\sum F = m \cdot a$, der a er akselerasjonen, definert som: $a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$. Dette gir:

$$\sum F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = m \cdot x'' \quad (2.2)$$

Innsatt i (2.1) gir:

$$mx'' + kx = 0 \quad (2.3)$$

Dette er ligningen som beskriver fri svingning av brua i figur 2.1³. Dersom svingning av systemet er årsaket av en ytre dynamisk kraft $F(t)$, da snakker mann om tvungen svingning. Da gjelder Newton's Tredje lov: Indre krefter i systemet, må vare i likevekt med ytre påkjenningen:

$$mx'' + kx = F(t) \quad (2.4)$$

Både ligning 2.3 og 2.4 er differens ligninger som kan løses ved å sette opp karakteristisk ligning.

Løsning av ligning 2.4 avhenger delvis på formen av den ytre påkjenningen $F(t)$. Dette er ikke tema for dette arbeid⁴, men det er interessant å se på frivngning, det betyr tilfellet der $F(t) = 0$ (ligning 2.3).

Da er karakteristisk ligning:

$$\begin{aligned} mr^2 + k = 0 &\implies r = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} \\ &\implies r_1 = i\omega_n \quad r_2 = -i\omega_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

Her er det innført komplekse tall: $i^2 = -1$ og definisjonen $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$, der ω_n er bygningens **egenfrekvens** med enheter rad per sekund [rad/s].

Løsning på 2.3 blir da: [11]

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (2.6)$$

³Stivheten k i denne ligningen er et uttrykk av den totale stivheten fra alle søyler i brua.

⁴Punkt 2b i 0.2 Forord

, der C_1 og C_2 er vilkårlige konstanter.
 Innfører Euler's ligninger [11]:

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos xt + i \sin xt \\ e^{-ix} = \cos xt - i \sin xt \end{cases} \implies \begin{cases} e^{i\omega_n t} = \cos \omega_n t + i \sin \omega_n t \\ e^{-i\omega_n t} = \cos \omega_n t - i \sin \omega_n t \end{cases}$$

Ligning 2.5 blir da:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 [\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t] + C_2 [\cos \omega_n t - i \sin \omega_n t] \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega_n t + (C_1 - C_2) i \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (2.7)$$

C_1 og C_2 er to vilkårlige konstanter. Dermed setter vi $C_1 + C_2 = A$ og $C_1 - C_2 = B$, der A og B er også vilkårlige konstanter. Videre blir i neglisjert⁵ slik at vi får:

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad (2.8)$$

Dette er den **generelle løsningen** for ligning 2.3. Konstantene A og B bestemmes utifra **initial betingelser**.

En typisk **partikulær løsning** er når vi antar at systemet hadde en initiell forskyvning x_0 , slik som i figur 2.1b, og ingen fart $x'_0 = 0$ i det øyeblikket systemet blir sluppet fri (ved tid $t = 0$).

Fra (2.7) har vi:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \\ x'(t) &= -A\omega_n \sin \omega_n t + B\omega_n \cos \omega_n t \end{aligned}$$

Innfører initial betingelser:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 &\implies A \cdot 1 + 0 = x_0 \implies A = x_0 \\ x'(0) = 0 &\implies 0 + B\omega_n \cdot 1 = 0 \implies B = 0 \end{aligned}$$

innført i (2.7) gir:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t$$

, som er løsningen i så tilfelle.

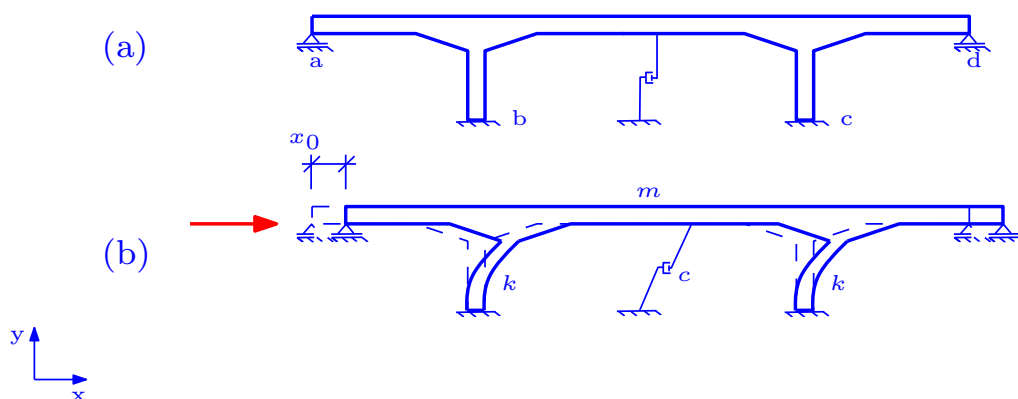
Hvis systemet har allerede en hastighet $x'(0) = x'_0$ og forskyvning $x(0) = x_0$, er det lett å bevise, ved å følge samme prosedyre, at løsningen i dette tilfelle vil bli:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{x'_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.9)$$

⁵Se [11] side 161.

2.2.2 Dempet system med én frihetsgrad

I dette tilfelle er systemet fortsatt slik som beskrevet ovenpå, men vi har med et ekstra ledd for **demping** (figur 2.3).



Figur 2.3: Et dempet svingesystem.

Demping forteller noe om energi som går tapt i hvert svingesyklus, enten på grunn av bevisste tiltak for å bremse svingninger⁶ eller på grunn av “naturlige” svigningsbremsende mekanismer som utvikles innad i bygget. For betong bruer, kan disse mekanismer være for eksempel friksjon i knutepunkter, åpning og låsing av små mikrospreker i betong, og/eller friksjon mellom bæresystemet og indre ikke-barende enheter, slik som skillevegger o.l., for betongbygninger. [5]

Det er forskjellige måter å uttrykke dempings kraft matematisk, men modellen som brukes ofte i bygg sammenheng er viskøs demping som er definert i forhold til svigningshastighet $x'(t)$ som ganges med en koeffisient c . Det er ikke mulig å bestemme dempingskraften ved å betrakte geometri, slik som stivhet. Demping blir bestemt ved forsøk i laboratorier ([5] side 13).

Tvungen svingning av et dempet system ligner på 2.4, men med demping:

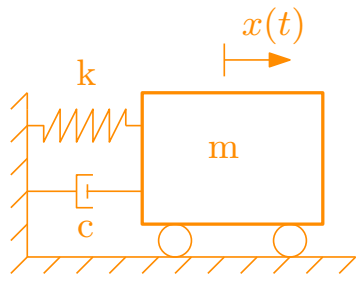
$$mx'' + cx' + kx = F(t) \quad (2.10)$$

Med utgangspunkt i figur 2.3 og ved å følge samme prosedyre som ligning 2.3, blir ligningen som beskriver fri svingning av et dempet system:

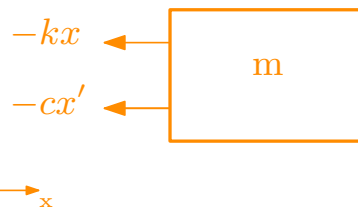
$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad (2.11)$$

⁶Mer om dette i siste kapittel Bygging av jordskjelvmotstandige bruer

Idealisert modell



Frakoblet diagram



Figur 2.4: *Idealisert modell av et dempet system med én frihetsgrad.*

Dette er også en differens ligning, og vi kan følge samme prosedyre som i Kapittel 2.2.1. Karakteristisk ligning er:

$$mr^2 + cr + k = 0$$

, en andre gradsligning som ikke er noe problem å løse:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab}}{2a} \implies \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-c}{2m} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}}_Q \quad (2.12)$$

Svingligningen vil bli sterkt påvirket av om uttrykket (som jeg har valgt å kalle Q) er positivt, negativt eller null.

Ved konvensjon, snakker mann om **kritiske**-, **under**- og **overdempet** systemer.

1. **Kritisk demping** er når $Q = 0$.

$$Q = 0 \implies \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = 0 \implies c^2 = 4mk \implies c = 2\sqrt{mk} \quad (2.13)$$

Per definisjon, blir dempings koeffisient som gir dette svar kalt kritisk demping c_c . Fra ligning 2.13 har vi:

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2\sqrt{m}\sqrt{k} \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$

Innsatt i 2.12 får vi to like røtter:

$$r_1 = r_2 = r = \frac{-c_c}{2m} = -\frac{2m\omega_n}{2m} = -\omega_n \quad (2.14)$$

Ifølge ligning 26 i [11] side 171, blir den generelle løsningen på ligning 2.11 i dette tilfelle:

$$x(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} = (C_1 + C_2 t) e^{\omega_n t} \quad (2.15)$$

, der C_1 og C_2 er vilkårlige konstanter, som bestemmes fra initial betingelser.

Dersom man har initial forskyvning x_0 og initial hastighet x'_0 , er det lett å vise, ved å følge samme prosedyren, at den partikulære løsningen vil bli:

$$x(t) = [x_0(1 - \omega_n t) + x'_0 t] e^{\omega_n t} \quad (2.16)$$

2. **Under dempet** situasjon har vi når demping c er mindre enn kritiske. Man bruker det greske bokstaven ξ (xi) for å uttrykke forholdet mellom tilgjengelig demping i bygget og kritisk demping:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \implies c = \xi \cdot 2m\omega_n \quad (2.17)$$

Det sier seg selv, at dempingskoeffisient ξ er < 1 i underdempet systemer.

Innsatt ligning 2.17 i 2.12 gir:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-\xi \cdot 2m\omega_n}{2m} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 \cdot 4m^2\omega_n^2 - 4mk}}{2m} \\ &= -\xi\omega_n \pm \sqrt{\frac{\xi^2 \cdot 4m^2\omega_n^2}{4m^2} - \frac{4mk}{4m^2}} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \frac{k}{m}} \\ &= -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\omega_n^2(\xi^2 - 1)} \\ &= -\xi\omega_n \pm \sqrt{-1 \cdot \omega_n^2(1 - \xi^2)} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{i^2 \cdot \omega_n^2(1 - \xi^2)} \\ &= -\xi\omega_n \pm \underbrace{i\omega_n\sqrt{(1 - \xi^2)}}_Z \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ved konvensjon blir uttrykket Z kalt **dempings frekvens** ω_d , og vi ender opp med to røtter:

$$r_1 = -\xi\omega_n + i\omega_d \quad r_2 = -\xi\omega_n - i\omega_d \quad (2.19)$$

Vi følger samme prosedyre som i Kapitel 2.2.1 og setter opp løsningen:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{(-\xi\omega_n + i\omega_d)t} + C_2 e^{(-\xi\omega_n - i\omega_d)t} \\ &= C_1 e^{-\xi\omega_n t} e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-\xi\omega_n t} e^{-i\omega_d t} \\ &= (C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}) e^{-\xi\omega_n t} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Igjen har vi eksponensielle av komplekse tall. Ved å innføre Eulers ligninger, og følge samme prosedyre som ligning 2.6 (Kapittel 2.2.1), ender vi opp med den generelle løsningen for et underkritisk dempet frisingnings system (ligning 2.11):

$$x(t) = [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] e^{-\xi \omega_n t} \quad (2.21)$$

, der A og B er vilkårlige konstanter.

Underdempet tilfelle er det meste interessante i dette arbeidet. Dampingskoeffisienten ξ blir gitt i prosent. For betong og stålkonstruksjoner er den vanligvis satt på 5%.

En viktig detalj å få med seg når det gjelder dempet systemer, er forholdet mellom to etterfølgende amplituder i en svingning. Vi kaller disse D_n og D_{n+1} . Forholdet mellom de to, δ , kalles "Logaritmisk dekrement", og kan fås ved følgende formel:

$$\delta = \ln \frac{D_n}{D_{n+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \ln \frac{D_n}{D_{n+m}} = \frac{2m\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Utleddning av denne er rett fram, og finnes på side 29 i [12]. Generelt kan man finne forholdet mellom to vilkårlige amplituder D_n og D_{n+m} ved formelen på høyre siden.

3. **Ovedempet** er når dampingskoeffisient ξ er > 0 . Slike systemer er akademisk interessante, men irrelevante for dette arbeidet. Detaljer om disse finnes for eksempel i [12].

2.2.3 Svingsystemer med bevegelse av grunnen

Dette er typisk svingbevegelser som skjer ved jordskjelv: bakken beveger seg, og setter bygget også i svingning.

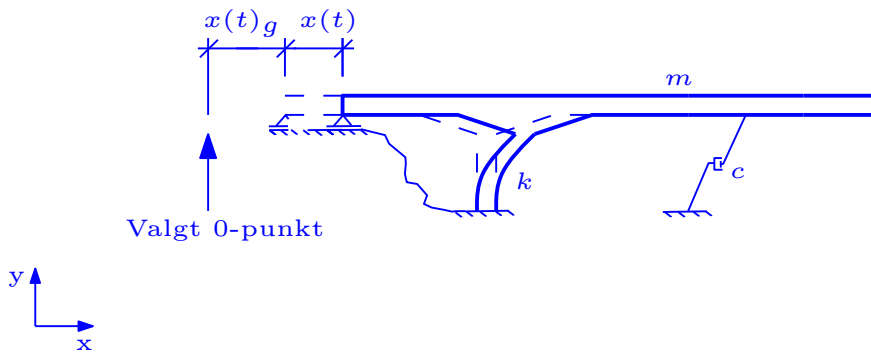
Figur 2.5 viser et slikt tilfelle for en bru.

Her skiller vi mellom to bevegelser: Bakke svigningen $x_g(t)$ og bru svigning $x(t)$.

Frakoblet diagram for systemt blir slik som i figur 2.4. Stivhetskraft er fortsatt en funksjon av byggets forskyvning $x(t)$ og damping er funksjon av byggets hastighet $x'(t)$. Forskjellen her er akselerasjonen. Den er nå en funksjon av både grunnen og byggets akselerasjoner:

$$x''(t)_{tot} = x_g(t)'' + x(t)''.$$

Vi følger samme prosedyre som i 2.2.1 og innfører Newton's andre lov (ligning



Figur 2.5: Et dempet svingesystem med grunn bevegelse.

2.2). I dette tilfelle blir det:

$$\begin{aligned}
 \sum F &= m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 x(t)_{tot}}{dt^2} \\
 &\text{der } x(t)_{tot} \text{ er den totale forskyvningen.} \\
 &= m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (x_g(t) + x(t)) \\
 &= m(x_g(t) + x(t))'' \\
 &= mx_g(t)'' + mx(t)'' \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Svingeligning for et dempet system med grunn bevegelse blir da:

$$\begin{aligned}
 mx_g(t)'' + mx'' + cx' + kx &= 0 \quad \text{eller,} \\
 mx'' + cx' + kx &= -mx_g(t)'' \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Dette uttrykket er samme som 2.10, men her vet mann at svingningen er årsaket av grunn akselerasjon: $F(t) = -mx_g(t)''$.

Herfra, vil det brukes, i dette arbeidet, notasjonen $z''(t)$ eller bare z'' for grunnakselerasjonen som kommer fra ordskjelv, i stedet for $x_g(t)''$ som brukes i noen litteratur.

Ligningen som beskriver svingninger av et bygg på grunn av jordskjelv er da:

$$mx'' + cx' + kx = -mz'' \tag{2.24}$$

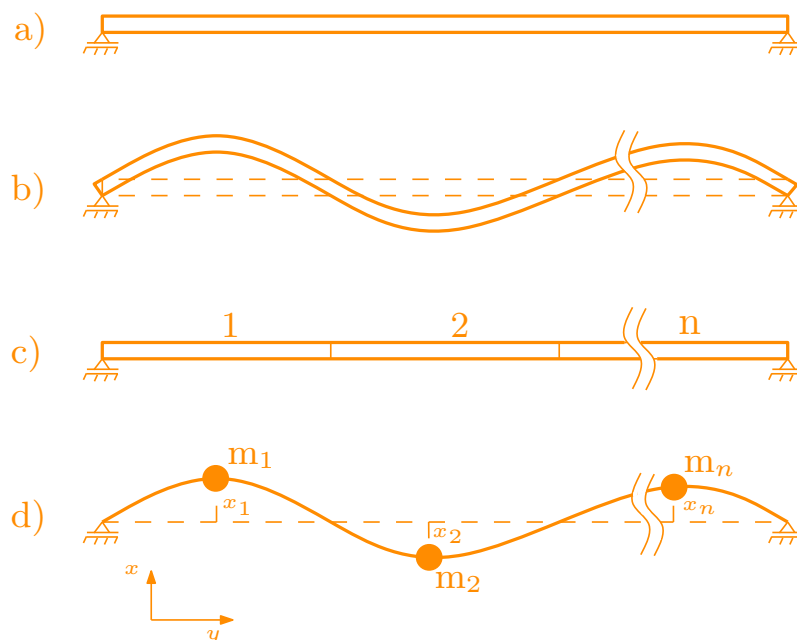
Løsning av denne ligningen er fundamentet som dette arbeidet er bygd på.

2.2.4 Systemer med flere frihetsgrader

Noen bruer kan forenkles til en frihets grad, og dette holder i tilfelle forenklet beregning (Kapittel 4). Ofte ønsker man bedre nøyaktighet i beregninger, eller konstruksjonen er rett og slett alt for komplisert for å idealiseres som en-frihetsgradsystem. Da er en mulighet å modellere det som et system av flere frihetsgrader, og beregne det videre ved hjelp av modal analyse. Dette skal drøftes nå.

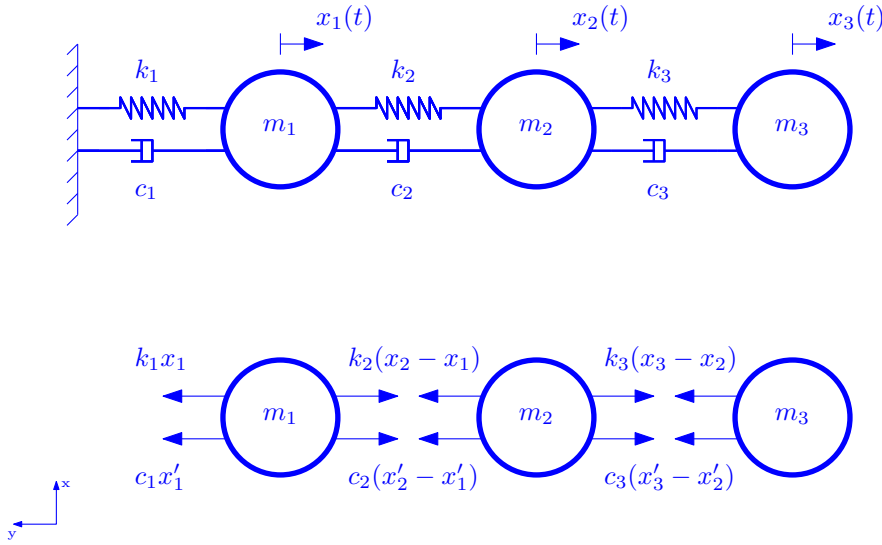
En bru som er fritt opplagt slik som i figur 2.6a, og utsatt for jord-skjelvlaster (eller dynamisk last generelt), vil begynne å svinge i bølger, slik som i figur 2.6b (forskyvningen er svart dramatisert).

Brua kan idealiseres ved at man deler den i et vist antall elementer (2.6c), og antar at masser er konsentrert ved nodene (knyttepunktene). Svingebevegelsen kan nå tegnes slik som i figur 2.6d, der de forskjellige masse amplituder utgjør forskyvningene $x(t)_i$ der $i \in [1, n]$, som må beregnes.



Figur 2.6: En bru med jordskjelvlaster.

Ved å idealisere modellen slik som i figur 2.7, og studere frakoblet diagram, kan vi sette opp summen av krefter som virker på hver masse (positiv retning



Figur 2.7: Idealisert modell og frakobling.

defineres mot y-aksen):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_1 = 0 \implies -k_1x_1 - c_1x_1' + k_2(x_2 - x_1) + c_2(x_2' - x_1') = 0 \\ \sum F_2 = 0 \implies -k_2(x_2 - x_1) - c_2(x_2' - x_1') + k_3(x_3 - x_2) + c_3(x_3' - x_2') = 0 \\ \vdots \\ \sum F_n = 0 \implies -k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) - c_{n-1}(x_n' - x_{n-1}') - k_nx_n - c_nx_n' = 0 \end{array} \right.$$

Innfører Newton's andre lov $\sum F = m \cdot a$, der $a = x''(t)$:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1x_1'' = -k_1x_1 - c_1x_1' + k_2(x_2 - x_1) + c_2(x_2' - x_1') \\ m_2x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(x_2' - x_1') + k_3(x_3 - x_2) + c_3(x_3' - x_2') \\ \vdots \\ m_nx_n'' = -k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) - c_{n-1}(x_n' - x_{n-1}') - k_nx_n - c_nx_n' \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1x_1'' - c_2x_2' + (c_2 + c_1)x_1' - k_2x_2 + (k_2 + k_1)x_1 = 0 \\ m_2x_2'' - c_3x_3' + (c_3 + c_2)x_2' + c_2x_1' - k_3x_3 + (k_3 + k_2)x_2 + k_2x_1 = 0 \\ \vdots \\ m_nx_n'' + (c_n + c_{n-1})x_n' - c_{n-1}x_{n-1}' + (k_n + k_{n-1})x_n - k_{n-1}x_{n-1} = 0 \end{array} \right.$$

Disse uttrykk kan grupperes og skrives på matrise form (se Tillegg A) slik:

$$[m]\{x''\} + [c]\{x'\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \quad (2.25)$$

, eller når ytre påkjenning kommer fra jordskjelv:

$$[m]\{x''\} + [c]\{x'\} + [k]\{x\} = -[m]z'' \quad (2.26)$$

, der:

- $[m]$: Systemets masse matrise
- $[c]$: Systemets demping matrise
- $[k]$: Systemets stivhets matrise
- $\{x''\}$: Akselerasjons vektor
- $\{x'\}$: Hastighets vektor
- $\{x\}$: Retnings vektor
- $\{F\}$: Systemets kraft vektor
- z'' : Grunn akselerasjonen

Dette er svingeligningen for et dempet svingsystem med flere frihetsgrader som er utsatt på jordskjelv med grunn akselerasjon $z''(t)$ ⁷. Ligningen har samme form som ligning 2.24.

Et interessant spørsmål er hvor mange slike elementer må man dele bjelken i, for å få “gode nok” resultater? Eller hvordan blir ligningen hvis man regner med forskyvninger i alle retninger pluss rotasjon? Disse og mange andre spørsmål knyttet til svingligninger med flere frihetsgrader, og løsninger av de drøftes grundig i litteratur, som for eksempel [5] og [12], men også [10]. Fleregradsligning med 2 eller 3 frihetsgrader går an å løse for hånd. Mer omfattende systemer, løses vanligvis digitalt ved hjelp av dataverktøy, både for å spare tid, og ivareta nøyaktighet i beregningene. Forståelsen av resultater fra slike beregninger og mulighet å kunne bedømme/vurdere de, vil imidlertid kun oppnås dersom man har en solid forståelse av teoretiske løsningsmetoder. Tillegget D viser et forslag for håndberegning av en ligning med flere frihetsgrader, i forbindelse med etasjebygg.

Resten av underkapittelet vil ta utgangspunkt i udempet frisingning av et system med flere frihetsgrader, og diskutere løsning av det. Målet er å komme fram til begreper, slik som **moder** (svingformer), **modal masser** og **modal stivheter** og **ortogonalitet**, som beregning av bruer ved spektral modal analyse metoden (Kapittel 2.4) bygger på.

⁷Tillegg A viser hvordan en kan sette opp en slik ligning for et etasjebygg. Framgangsmåten er noe lettere å forstå.

Fri svingning, betyr $\{F(t)\} = -[m]z'' = \{0\}$. Udempet svingning betyr $[c] = [0]$. Ligning 2.25 reduseres da til:

$$[m]\{x''\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (2.27)$$

En antar en løsning av typen [12]:

$$\begin{aligned} \{x\} &= \mathbb{X} \sin(\omega_n t + \phi) \\ , \text{ der } \mathbb{X} &= [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n]^T \end{aligned} \quad (2.28)$$

\mathbb{X} er **egen vektor**. Det finnes like mange egenvektorer og egenfrekvenser som frihetsgrader. Dette bevises under.

Utifra 2.28 settes det opp:

$$\begin{aligned} \{x\} &= \mathbb{X} \sin(\omega_n t + \phi) \\ \{x'\} &= \omega_n \mathbb{X} \cos(\omega t + \phi) \\ \{x''\} &= -\omega_n^2 \mathbb{X} \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Innsatt i ligning 2.27 gir:

$$\begin{aligned} -\omega_n^2 [m] \mathbb{X} \sin(\omega_{n_i} t + \phi) + [k] \mathbb{X} \sin(\omega_{n_i} t + \phi) &= \{0\} \\ [-\omega_{n_i}^2 [m] + [k]] \mathbb{X} &= \{0\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ikke-triviell løsning finnes kun dersom determinanten av $[-\omega_{n_i}^2 [m] + [k]]$ er lik null:

$$\det [[k] - \omega_n^2 [m]] = |[k] - \omega_n^2 [m]| = \{0\} \quad (2.30)$$

Ligning 2.30 kalles **Egenverdiproblem** av svingeligning 2.27.

Masser og stivhetene antas kjente. Løsning av ligningen med hensyn på ω_n vil gi et sett med **egen frekvenser** ω_{n_i} ; én egenfrekvens for hver frihetsgrad.

$$\omega_{n_i} = \{\omega_{n_1} \quad \omega_{n_2} \quad \omega_{n_3} \quad \dots \quad \omega_{n_N}\}^T \quad (2.31)$$

N er antall frihetsgrader samme som n . Her brukes det N for å unngå forvirring.

Fra ligning 2.30, antas masser og stivheter kjente. Nå er egenfrekvenser også kjente.

Innfører først ω_{n_1} i ligning 2.28, og løser med hensyn på \mathbb{X} . Da får en:

$$aX_1^1 + bX_2^1 + \dots + cX_{n-1}^1 + dX_n^1 = 0$$

Denne løses med hensyn på den største X , det betyr X_n^1 :

$$\begin{aligned} \Rightarrow X_n^1 &= \frac{1}{d} (aX_1^1 + bX_2^1 + \dots + cX_{n-1}^1) \\ &= eX_1^1 + fX_2^1 + \dots + gX_{n-1}^1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

der, $a - g$ er konstanter.

Herfra kan egenvektor \mathbb{X} skrives som:

$$\mathbb{X}^1 = [1 \quad eX_1^1 \quad fX_2^1 \quad \dots \quad gX_{n-1}^1]^T$$

Ved å innføre alle egenfrekvenser i tur og orden, og løse for \mathbb{X} , kan mann beregne alle egenvektorer \mathbb{X}^n , én egenvektor for hver frihetsgrad.

Egenvektor eller såkalt svingeform forandrer seg ikke med tiden. Kun amplitude forandrer seg [12].

Moden én $[\phi]_1$ (som naturligvis hører til egenfrekvens én) er definert slik, fra egenvektor:

$$[\phi]_1 = \phi_1 = [1 \quad e \quad f \quad \dots \quad g]^T$$

,der e, f, g er konstanter. (2.33)

Ved å følge samme prosedyre, kan mann beregne alle moder, slik at for n -antall frihetsgrader har mann:

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_n] \quad (2.34)$$

En viktig egenskap hos moder er **ortogonalitet**⁸.

Det betyr, at for to forskjellige moder ϕ_n og ϕ_m gjelder det:

$$\phi_n^T[m]\phi_m = \{0\} \quad \text{og} \quad \phi_n^T[k]\phi_m = \{0\} \quad (2.35)$$

Ellers er **modal masse** M_n og **modal stivhet** K_n definert slik:

$$M_n = \phi_n^T[m]\phi_n \quad \text{og} \quad K_n = \phi_n^T[k]\phi_n \quad (2.36)$$

Én modal masse og stivhet for hver mode. Generelt:

$$\mathbf{K} = \Phi_n^T[k]\Phi_n \quad \mathbf{M} = \Phi_n^T[m]\Phi_n$$

, der Φ er mode matrisen (ligning 2.33).

⁸Ortogonalitet gjelder kun for udempet systemer. Se Appendix C for mer detaljer.

2.2.5 Modal Superposisjon

Det er mulig å løse ligning 2.25 for hånd, når man har med kanskje to eller tre frihetsgrader å gjøre. Hvis frihetsgrader er mange, er ligningen så å si ”umulig” å løse for hånd, ikke bare fordi det blir mange ligninger, men også fordi masse- stivhets- og dempingsmatriser er koblet sammen.

Modal superposisjon er en metode som bygger på størrelser som er utviklet i forrige underkapittel, for å ”frakoble” ligning 2.25 i **modale ligninger**; som uafhengige og dermed lettere håndterbare. Resultatene av disse kombineres da, for å danne løsning av den opprinnelige ligningen (ligning 2.25).

Løsningen på ligning 2.25:

$$[m]\{x''\} + [c]\{x'\} + [k]\{x\} = -[m]z''$$

kan skrives som en linear kombinasjon av modene ϕ_i ganger med modal-forskyvning $v_i(t)$, der $i \in [1, n]$ [15]:

$$\mathbf{x}(t) = v_1(t)\phi_1 + v_2(t)\phi_2 + \dots + v_n(t)\phi_n = \Phi \mathbf{v}(t) \quad (2.37)$$

, der Φ er modal matrise (ligning 2.33).

v_i er løsninger av modale ligninger, som er definert slik:

$$v_i''(t) + 2\xi_i\omega_{n_i}v_i'(t) + \omega_{n_i}^2v_i(t) = \frac{1}{M_i}F_i(t) \quad (2.38)$$

$$i \in [1, n]$$

M_i er modal masse som hører til egenfrekvens ω_{n_i} , slik det er definert tidligere i dette arbeidet, mens $F_i(t) = \phi_i^T \cdot f_i(t)$. $f_i(t)$ er ytre påkjenning på frihetsgraden (se tvungen svingning, ligning 2.4).

For jordskjelv er ytre påkjenningen $f_i(t) = -z''m_i$, der m_i er elementets masse (se figur 2.6 og/eller 2.7). Ligningen blir:

$$v_i''(t) + 2\xi_i\omega_{n_i}v_i'(t) + \omega_{n_i}^2v_i(t) = \frac{-z''m_i\phi_i^T}{M_i} \quad (2.39)$$

$$i \in [1, n]$$

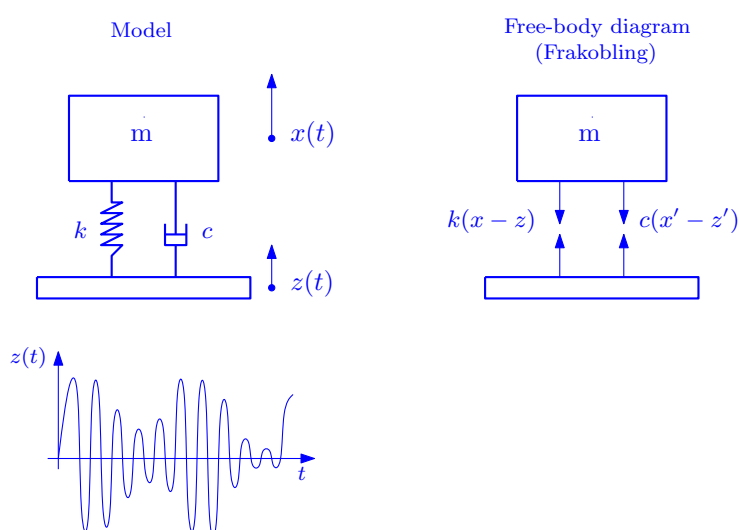
Denne ligningen er en variant av ligning 2.24.

Mer detaljert drøftelse (utledning) av ligning 2.39 finnes i Tillegg C. Løsning av ligningene 2.24 og 2.39 utgjør grunnlaget for dette arbeid.

2.3 Respons Spektrum

I kapittel 2.2.4 ble det utviklet svingeligning for grunnbevegelse i horisontal retning (x -planet). Jordskjelv vil imidlertid riste ei bru i alle retninger, og ligning for svingning i vertikal retning har samme form som ligning 2.24. Her er beviset:

Vi tenker en bru som er idealisert til en frihetsgrad system (figur 2.8). Bruas fundament er utsatt for jordskjelv, men denne gang ser vi kun på vertikal komponenten av ristelsene.



Figur 2.8: *Idealisert svingesystem som er utsatt for vertikal påkjenninger av et jordskjelv.*

Fundamentet vil da oppleve en tidsavhengig ”opp-nedforskyvning, $z(t)$. Brua, som her er idealisert ved masse m , vil også svinge opp og ned, men amplituden vil ikke nødvendigvis være den samme som fundamentet, på grunn av stivheten k og demping c . Massens forkyvning kalles vi dermed $x(t)$. Vi ser nå på frakoblede diagrammet på høyre siden i figur 2.8, og setter opp summen av krefter som virker på brua (massen):

$$\sum F = -c(x' - z') - k(x - z)$$

Innfører Newton’s andre lov: Summen av krefter er lik masse ganger akselerasjon: $\sum F = my''$ (se også ligning 2.2) og får:

$$\begin{aligned}
mx'' &= -c(x' - z') - k(x - z) \\
\implies mx'' + cy' + kx &= cz' + kz
\end{aligned}
\tag{2.40}$$

Nå innføre vi begrepet relativ forskyvning” $y(t)$, som gir en sammenheng mellom brua og fundamentets forskyvninger. Denne er definert slik:

$$y = x - z \implies x' = y' + z' \implies x'' = y'' + z'' \tag{2.41}$$

Innført i (2.37) og omsekrevet gir:

$$my'' + cy' + ky = -mz''_y \tag{2.42}$$

som er altså samme uttrykk som ble utviklet i Kapittel 2.2.3 (ligning 2.24), men her er det konsekvent brukt y i stedet for x bare for å fortelle at det er snakk om forskyvning i y -retning. I beregning av vertikal forskyvning, bør man også passe på å bruke riktig akselerasjoner komponenter. Strongmotion målere registrerer grunnakselerasjoner i alle retninger.

Statens Vegsenets Håndbok 185 samt Norske Standard NS-EN 1998-1 gir retningslinjer for beregning av jordskjelv i rommet (3D). Dette er gjort i Kapittel 5 i forbindelse med Sandsfjorbrua. Spesielt i NS-en er det gitt retningslinjer for å beregne Spektrum for bevegelse både i vertikal og horisontal retninger.

Påkjenninger i vertikal y -retningen bruker å være ubetydelige i forhold til horisontal retning. Kapittel 4 viser dette i detaljer.

For en gitt bru, skal alle størrelser i ligning 2.39 og 2.24 (masser, stivheter, og demping) være kjente, eller kunne “lett” beregnes. Størrelsen som er ukjent så langt er grunnakselerasjonen z'' .

Grunnakselerasjonen måles ved hjelp av Seismografer og/eller strong motion seismograf (se Kapittel 1.5.4), men det er ikke mulig å bare plukke en verdi, og bruke den i beregning. Grunnen til dette er at grunn akselerasjonen varierer betraktelig i løpet av tiden t som jordskjelvet varer. Det trengs en metodikk for å bestemme riktig verdi for grunnakselerasjon og største respons av en én frihetsgrad system til jordskjelvet, som kan brukes i beregning. Verktøyet som brukes til dette er **respons spekter** av et jordskjelv, som utvikles med utgangspunkt i løsninger for ligning 2.39 eller 2.24.

Dette underkapittel skal drøfte hva respons spekter er, og hvordan denne framstilles. Kapittel 3: Lover og regelverk skal si noe om hva slags respons

spekter brukes i Norge, og som skal brukes i de to studie tilfeller i dette arbeidet.

Ved å innføre definisjoner for naturlig egenfrekvens ω_n (ligning 2.5) og demping c (ligning 2.17), kan ligning 2.24 omskrives til:

$$\begin{aligned} mx'' + cx' + kx &= -mz'' \\ \implies x'' + \frac{c}{m}x' + \omega_n^2 x &= -z'' \\ \implies x'' + \frac{2}{m}\xi\sqrt{km}x' + \omega_n^2 x &= -z'' \\ \implies x'' + 2\xi\omega_n x' + \omega_n^2 x &= -z'' \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\implies x'' + z'' = z''^{Tot}(t) = -2\xi\omega_n x' - \omega_n^2 x \quad (2.44)$$

Uttrykket ξ forteller om raten av redusert kritisk demping (på grunn av indre mekanismer i bygget. Se Kapittel 2.2.2). Denne oppgis ofte i prosent. For betong bygninger er denne på 5%.

Løsningen på ligning 2.24 (eller 2.41) finnes ved hjelp av **Duhamel's integral**⁹. Løsningen er:

$$x(t) = \frac{-1}{m\omega_d} \int_0^t m z''(\tau) \sin[\omega_d(t - \tau)] e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} d\tau \quad (2.45)$$

der ω_d er dempet egen frekvens slik som definert i ligning 2.18.

Tanken bak Duhammels integral er som følge:

Jordskjelv inntreffer i løpet av tiden t . Jordskjelv varierer betraktelig i løpet av denne tiden, slik at bygningen som er utsatt for det, vil ristes fram og tilbake flere ganger i løpet av denne tiden. Hvordan finne da den totale forskyvning som er årsaket av jordskjevet i løpet av t ? Man deler tiden t i mange kortere tidspunkter $\tau \ll t$, og man antar at jordskjelvakselerasjon er konstant i løpet av τ .

⁹Duhamel integrall i sin generelle form er:

$$x_n(t) = -\frac{\omega_n}{\omega_d} \int_0^t z''(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_n(t - \tau) + n\theta] d\tau$$

der, $\theta = \frac{\pi}{2} + \arcsin \xi$

Det er mulig å bevise ([6] side 379) at massens relative forskyvning $x(t)$ (ligning 2.37), hastigheten $x'(t)$ og den absolutte akselerasjonen $z''(t) + x''(t)$ kan fås ved:

$$x(t) = x_0(t) \quad x'(t) = x_1(t) \quad \text{og} \quad x''(t) + z''(t) = x_2(t)$$

Forskyvning beregnes for hvert slikt tidspunkt τ . Summen av alle forskyvningene utgjør da den totale forskyvningen $x(t)$.

For små dampingsforhold ξ (for eksempel for stål og betong bygninger), er forskjellen mellom naturlig og dempet egenfrekvenser liten, slik at denne kan neglisjeres ([12] side 576). Videre, er vi kun interessert i de største påkjenningene på bygningene, slik at minus-tegnet i ligningen 2.42 ikke er viktig¹⁰.

Uttrykket som fås etter disse forenklinger kalles **Pseudo forskyvning** S_d :

$$S_d(\omega_n, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t z''(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} d\tau \quad (2.46)$$

Pseudo hastighet S_v og **Pseudo akselerasjon** S_a er definert som:

$$S_v(\omega_n, \xi) = \omega_n \cdot S_d(\omega_n, \xi) \quad S_a(\omega_n, \xi) = \omega_n^2 \cdot S_d(\omega_n, \xi) \quad (2.47)$$

Det er disse verdier som brukes i jordskjelv beregninger.

Når et jordskjelv inntreffer, blir det registrert grunn akselerasjoner z'' , i løpet av tiden t som jordskjelvet varer. Utifra disse, regnes det pseudo hastighet, vha ligning 2.43, og deretter pseudo hastighet og pseudo akselerasjon, med noen verdier av demping rasion ξ og ω_n eller τ_n eller f_n .

Disse beregninger kan gjøres ved forskjellige metoder, for eksempel ved numerisk integrasjon. Dette er grundig diskutert i litteratur. Figurene i dette arbeidet er framstilt ved hjelp av NONLIN, et gratis forsknings programvare for linear og ikke-linear analyse av rammer utsatt for dynamiske laseter.

Uansett hvilken metode som brukes, kommer resultatene, altså S_d , S_v eller S_a i form av irregulære kurver med høye spiss og lave punkter. Slike kurver kalles **Respons spekter** av et jordskjelv.

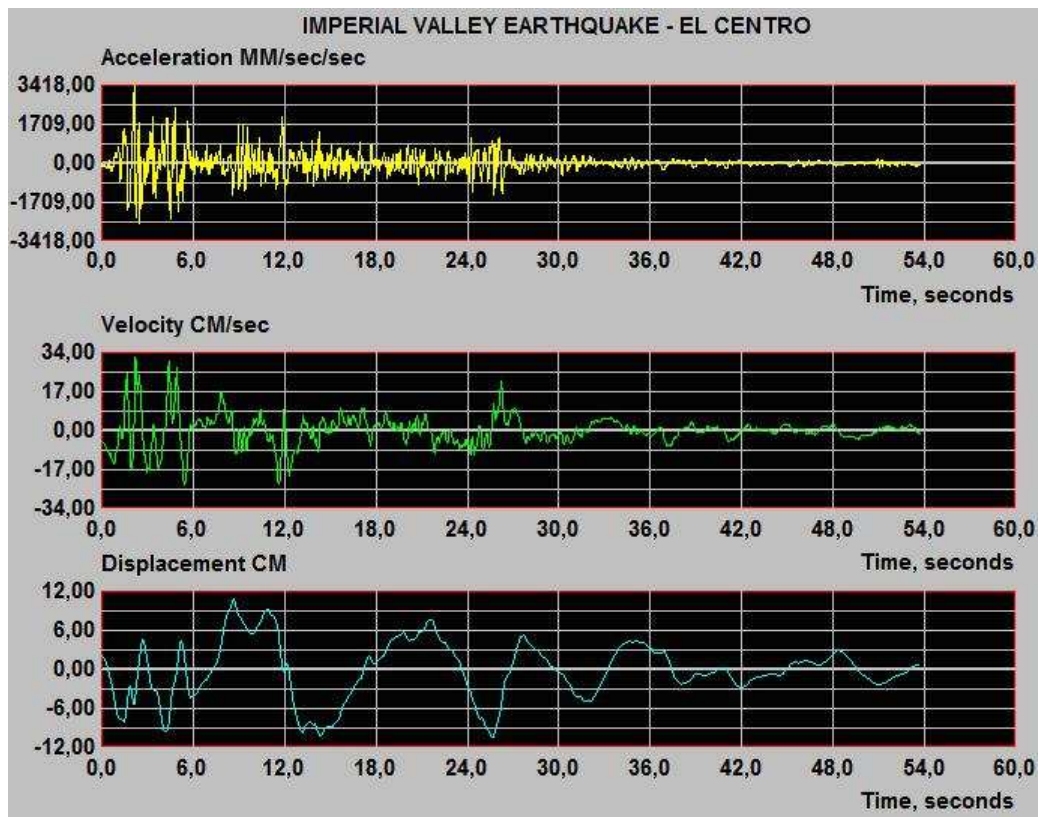
Figur 2.9 viser “ekte” målinger som ble registret fra El Centro jordskjelvet, 18.mai 1940. Målingene er fra Berkeley Universitet, i California.

Figur 2.10 viser S_d - og S_a -kurver som ble framstilt fra de målinger for samme jordskjelvet. Demping verdier ξ er fra 0% (gul) til 10% (blå). Figurene er framstilt ved hjelp av NONLIN.

Pseudo-verdier kan presenteres hver for seg slik som i figur 2.10, men det er mulig å presentere dem i en og samme figur, noe figur 2.11 viser. Slike figurer kalles Quadri-logaritmisk diagram.

Diagrammet på venstre siden i figur 2.11 er svart irregulær, og er ikke egnet til bruk i beregninger. Ved statistisk betraktning av flere jordskjelv med cirka samme styrke, har mann kunne utvikle en “glattere” respons spektrum,

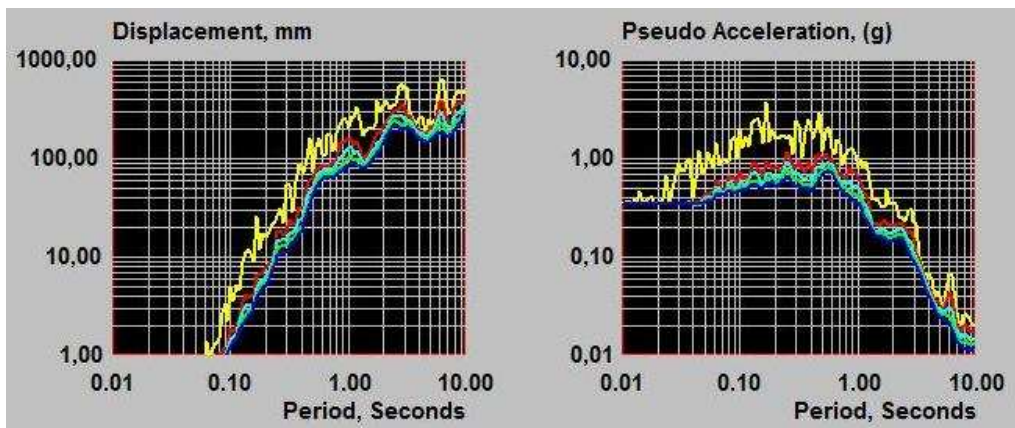
¹⁰Disse forenklinger er opphavet til benevningen “Pseudo” (falsk).



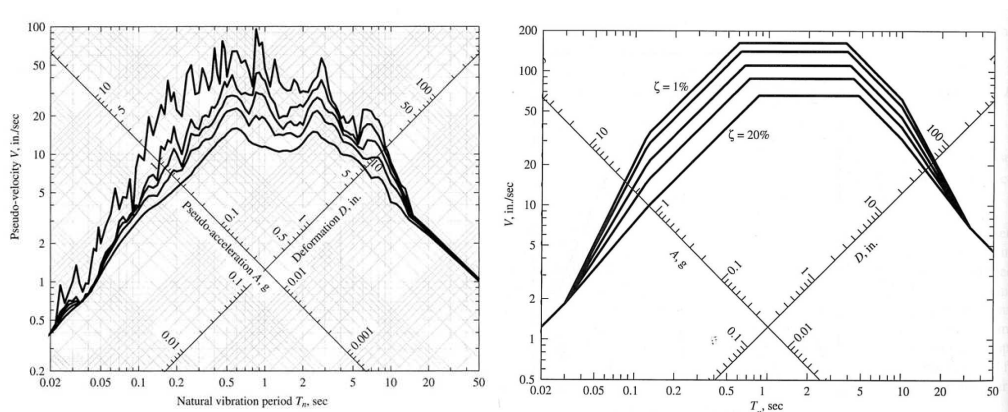
Figur 2.9: *Imperial Valley 1.*

som er bedre egnet til bruk i beregninger. Figur 2.11 høyre siden viser et slikt spekter for beregningbruk. Det er slike spekter som finne i teknisk litteratur. (Sammenlign også med det beregnede spektrum for Sandsfjorbrua, figur 5.12). For bedre synlighet, er figurene 2.11 hentet fra [5]. De er også fra El Centro jordskjelvet.

Hvordan respons spekter brukes praktisk i beregning, er tema for neste underkapittelet.



Figur 2.10: *Imperial Valley 2.*



Figur 2.11: *Imperial Valley 3.*

2.4 Jordskjølverberegning ved forenklet metode

Når ei bru er oppgitt, og avgjørelsen er tatt om å beregne den ved forenklet metode gjelder følgende:

- **Steg 1:** Bestemme massen m . For en bru, vil masse tilsvare egenvekten av bru bjelken, pluss et tillegg som utgjør en permanent last (asfaltlag, rekkverk, skilt og andre utstyr). Kilde [13] tar også med 50% av søyle massen. Neste steg er:
- **Steg 2:** Bestemme bruas stivhet k . Ved denne type beregning, ser mann kun på søylenes stivhet. Gjeldende formler for dette finnes i tekniske tabeller. Sandsfjordbrua og brua som beregnes i Kapittel 4 har søyler som er fast innspente i begge ender. Bøvestivhet per søyle kan da bereg-

nes ved følgende formel:

$$k_s = 12 \frac{E_s I_s}{h^3} \quad (2.48)$$

, der:

E er materialets Elastisitetsmodul

I er søyletverrsnitets annen areal moment, og

h er søylets høyde.

Hos ei bru, er alle søyler parallele, dermed kan bruas totale forskyvning fås ved å gange stivheten med antall søyler: $k = n \cdot k_s$.

Utleddning av ligning 2.46 finnes i Tillegg B.

- **Steg 3:** Beregne bruas egenfrekvens ω_n eller egenperiode τ_n eller frekvens f_n , avhengig av hvordan responsspektrum er angitt. Bruke disse verdier for å velge riktige Pseudo verdier (S_d , S_v og S_a) fra responspekteret.
- **Steg 4:** Når dette er gjort, da er det bare å sette i gang og beregne. Bruas maksimale forskyvning er:

$$x_{max} = S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} \quad (2.49)$$

Denne kan også leses direkte i grafen, dersom en har et respons spekter slik som i figur 2.11.

Hvis man har med idealisert etasjebygg, kan Maks skjærkraften ved fundamentet finnes ved følgende uttrykk:

$$V_{max} = k \cdot x_{max} = m \cdot S_a \quad (2.50)$$

Maks moment kan også finnes ved:

$$M_{max} = \frac{h}{2n} V_{max} \quad (2.51)$$

der n er antall søyler.

Bruer har veldig sjelden fullt simmetriske søyler, dermed blir de ovennevnte formler uriktige. I slike tilfeller må man beregne mer nøye, og betrakte hver søyle for seg.

Det er vist ved hjelp av beregningseksempler i Kapittel 4.

Respons spekteret som brukes i Norge er ikke oppgitt på samme måte som i figur 2.11. I standarden NS-EN 1998-1 er denne oppgitt i form av formler, som brukes i forhold til byggets egenperiode. Dette er vist nærmere i Kapittel 4, men også i Kapittel 5 i forbindelse med jordskjelvberegning av Sandsfjordbrua.

2.5 Jordskjelvberegning ved spektral modal analyse

Alle bruer kan ikke idealiseres til forenklet modeller. Mange av dagens moderne bruer er altfor kompliserte, slik at eventuell på idealisering vil inneholde for store avvik. En tyr da til flere frihetsgrad modeller, som fører til svingeligninger slik som ligning 2.25.

Flerefrihetsgradmodeller og ligninger er noe enklere å sette opp for etasjebygg (se Tillegg A) enn for bruer, men ligningene vil uansett praktisk talt være umulige å løse for hånd.

Det som gjøres da, er at man modellerer konstruksjonen ved hjelp av et dataverktøy, som vil framstille egenfrekvenser og moder, dermed kan man ta utgangspunkt i disse, og fortsette med modal analyse.

Tillegg D viser hvordan man kan kontrollere datagenererte egenfrekvenser, i tilfelle med etasjebygg.

Analyse verktøy slik som Staad Pro, vil beregne hver mode og oppgi både tilsvarende egenperiode og prosent av total massen som moden tar med seg i svingningen. Til slutt summeres alle slike bidrag.

NS-EN 1998-1 sier på side 47 at man må beregne så mange moder som nødvendig slik at den totale prosenten av medsvingende masse er minst 90%. Ved jordskjelvberegning, vil hver mode bidra til den globale responsen, og beregningsverktøyet vil summere opp alle disse bidrag, og gi den totale respons.

Ved håndberegning derimot, er det “umulig” å beregne bidrag av hver mode. Her også sier standarden at det er tilstrekkelig å beregne bidrag for alle moder som setter over 5% av masse i svingning (mass participation).

Tillegg F viser moder som ble beregnet for Sandsfjordbrua, samt former av noen av de som hadde over 5% mass participation.

2.6 Beregning ved Tidsplananalyse

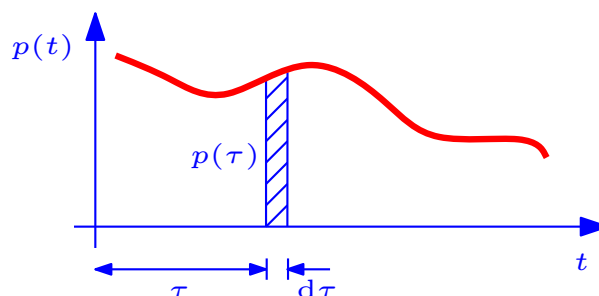
Tidsplan analyse er en metode som brukes for å bestemme forskyvninger, på en litt mer detaljer måte enn Respons spektrum.

Dette underkapittel vil gjennomgå grunnleggende teori bak denne metoden. Kun udempet system vil bli drøftet.

La oss si at jordskjelv varer i 10 minutter. Ved fore eksempel forenklet beregning, vil responsspektrum hjelpe oss å velge en bestemt verdi av pseudo akselerasjon S_a som vi bruker for å beregne den globale forskyvningen til hele bygget.

Tidsplananalyse derimot, går ut på å dele de 10 minuttene ($t = 600s$) i mindre inkrementelle tidsintervaller $\tau < t$ hvor man antar at jordskjelv er konstant. Responsen $x(\tau)$ beregnes for hvert slikt interval, og bruas total respons $x(t)$ blir summen av alle de enkelt bidragene $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$, $x_n(\tau)$, slik at resultatet er mer nøyaktig.

2.6.1 Udempet system



Figur 2.12: *Impulslast.*

Vi tenker oss en jordskjelvkraft $p(t)$ som varierer med tiden t . Vi vil se på størrelsen av kraften p i øyeblikket $t = \tau$. Vi kaller denne $p(\tau)$. Denne kraften, som virker i tidsintervallet $d\tau$ skaper en kortvarig impuls $p(\tau)d\tau$ på bygningen¹¹.

Forskyvning (respons) $dx(t)$ som impulsen $p(\tau)d\tau$ påfører bygget er [12]:

¹¹En impuls er en kortvarig last av arbitrar form. Denne skjer så raskt at maksimal forskyvning oppnås før bygningens damping rekker å absorbere noen energi. Analyse av Impuls laster er et eget kapittel, og mer om det står på side 73 i [12].

$$dx(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_n} \sin \omega_n(t - \tau) \quad (2.52)$$

Den globale responsen $x(t)$ for hele bygget kan betraktes som en sum av alle slike små responser over hele tidsintervallet τ (se figur 2.12). En slik sum fås ved integrasjon:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t dx(t) = \int_0^t \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_n} \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dette er Duhamel's integral som har blitt gjennomgått tidligere. Nå defineres det en størrelse $h(t - \tau)$ slik at [12]:

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n(t - \tau) \quad (2.54)$$

Nå kan $x(t)$ skrives:

$$x(t) = \int_0^t p(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.55)$$

Hittil har mann tatt det for gitt at systemet starter å svinge fra rolig (statisk) tilstand. Dersom bygget er allerede i svingning før $p(t)$ blir påført, det betyr $x(0) \neq 0$ og $x'(0) \neq 0$, da må mann ha med bidraget fra fri svingning (ligning 2.9). Responsen blir da:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega_n t + \frac{x'_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \\ &= x_0 \cos \omega_n t + \frac{x'_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \int_0^t p(\tau)h(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ligningen kan ikke løses direkte ved integrasjon, på grunn av $p(\tau)$. Dette skyldes at impuls laster fås ofte ved eksperimentelle og ikke analytiske metoder [12]. Ligningen må løses ved numeriske metoder.

Vi innfører trigonometrisk identitet:

$$\begin{aligned} \sin(x - y) &= [\sin x \cos y - \cos x \sin y] \\ \implies \sin(\omega_n t - \omega_n \tau) &= [\sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n t \sin \omega_n \tau] \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ved å anta $x(0) = 0$ og $x'(0) = 0$, innføres 2.57 i 2.53:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin(\omega_n t - \omega_n \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) [\sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n t \sin \omega_n \tau] d\tau \\
 &= \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_n t \cos \omega_n \tau d\tau - \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \cos \omega_n t \sin \omega_n \tau d\tau \\
 &= \sin \omega_n t \underbrace{\left[\frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau \right]}_{\text{Settes lik } \bar{A}} - \cos \omega_n t \underbrace{\left[\frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau \right]}_{\text{Settes lik } \bar{B}}
 \end{aligned}$$

Mann har til slutt:

$$x(t) = \bar{A}(t) \sin \omega_n t - \bar{B}(t) \cos \omega_n t \quad (2.58)$$

, der \bar{A} og \bar{B} må løses.

Tenker en numerisk funksjon $y(\tau) \equiv p(\tau) \cos \omega_n \tau$ slik at [12]:

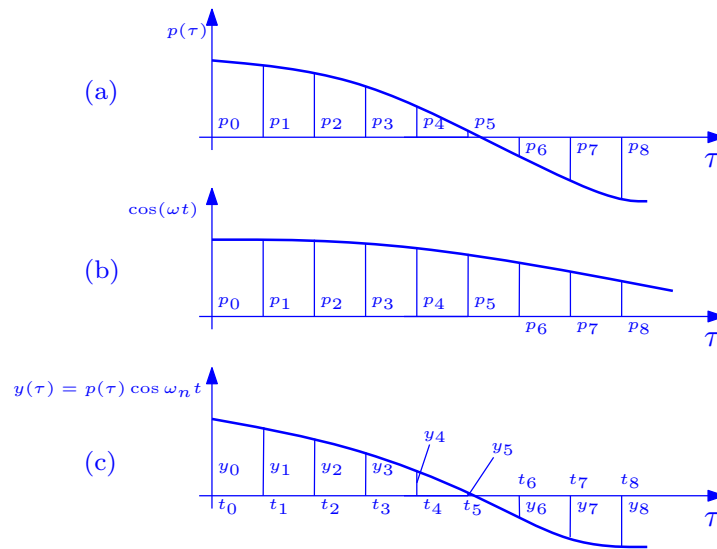
$$\bar{A} = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau \equiv \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t y(\tau) d\tau \quad (2.59)$$

Komponentene til $y(\tau)$, det betyr $p(\tau)$ og $\cos \omega_n \tau$, kan tegnes som grafer, som deles i små inkrementelle tidspunkter $\Delta\tau$. Figur 2.13 a) og b) viser slike grafer illustrativt. $y(\tau) \equiv p(\tau) \cos \omega_n \tau$ vil da se slik som i figur 2.14c).

I steden for å integrere, slik som i ligning 2.59, kan nå \bar{A} estimeres numerisk, ved å summer alle bidragene $y(\tau)$ (figur 2.13c). Ligning 2.59 kan nå omskrives til:

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &\equiv \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t y(\tau) d\tau = \frac{1}{m\omega_n} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta\tau \cdot y_i \\
 &= \frac{\Delta\tau}{m\omega_n} [y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1}]
 \end{aligned}$$

, der N er antall inkrementelle delinger.



Figur 2.13: Numerisk analyse av impuls last.

\bar{B} kan også evalueres på samme måte, med eneste forskjell at man vil få $y(\tau) \equiv p(\tau) \sin \omega_n \tau$ i steden for $y(\tau) \equiv p(\tau) \cos \omega_n \tau$

Responsen ved tidspunkt $t_N = N \cdot \Delta\tau$ blir da:

$$x(t_N) = \bar{A}_N \sin \omega_n t_N - \bar{B}_N \cos \omega_n t_N \quad (2.60)$$

Kapittel 3

Bruer med jordskjelvlast: Lover og regelverk

Norge befinner seg på et geografisk sted som er veldig lite utsatt for jordskjelv. Likevel, er landet, gjennom sitt medlemskap i Det Europeiske Økonomiske Felleskap, pålagt å følge noen bestemmelser som går på jordskjelvberegning av bygninger.

Disse bestemmelser er en del av et omfattende handlingsprogram som den ovennevnte organisasjonen har satt i gang, med tanke på å harmonisere regelverket for prosjektering av bygg- og anleggsarbeider i alle medlemslandene, med overordnet mål å fjerne handelshindringer.

I 1989 fikk European Committee for Standardization (CEN) ansvaret, fra organisasjonen og EU, for å utvikle et regelverk kalt Eurokode, i så henseende. Dette regelverket er også Norge forpliktet til å følge.

Med tanke på prosjektering av bygninger mot jordskjelv, er der Eurokode 8, som gjelder¹. I Norge er denne også kjent som NS-EN 1998 Prosjektering av konstruksjoner for seismisk påvirkning.

Jordskjelvberegninger i dette arbeidet tar utgangspunkt i denne standarden.

I tillegg til Eurocoden, har Statens Vegvesen, gjennom Håndbok 185 satt egne krav som skal følges spesielt i forbindelse med jordskjelvberegning av bruer.

I dette arbeidet skal det spesifiseres hver gang det skal brukes regler enten fra NS-EN 1998-1 eller fra Statens Vegvesenets håndbok 185.

¹Kilde: Vegdirektørens Notat 2010/115840-001 tilgjengelig på www.vegvesen.no under fag og håndbok 185.

Kapittel 4

Studie 1: Jordskjelvberegning av betongbru ved forenklet metode

I dette kapittelet skal en enkel betongbru håndberegnes, ved hjelp av forenklet metode (én-frihetsgrad metode), etter Norsk Standard NS-EN 1998-1. Beregningen skal utføres flere ganger ved å forandre på parametere, dermed skal resultatene sammenlignes, til slutt.

“Enkel bru” i denne sammenhengen, betyr at brubjelken og søyler har uniform geometri over sine respektive lengder, og at brua er symmetrisk og rettlinjert.

Takk til Siv. Ing. Eduardo Mariani ved Statens Vegvesen i Stavanger, som har hjulpet til med valg av realistiske geometri parametere til de forskjellige beregningstilfellene.

Beregningene i dette kapittel inneholder noen antagelser fra kilde [13].

4.1 Beskrivelse

Utgangspunktet for beregningen, er en betong bru som er antatt bygd i Stavanger kommune i Rogaland fylke. Bruas fundament er antatt anlagt på fjell. Videre skal brua bygges med **betongkvalitet C55**.

Betongdensitet $\rho = 2,55t/m^3$. I tillegg til egen vekt, er det et tillegg på 28kN/m for utstyr (lamper, rekkverk, skilt) og slitelag (asfalt).

Brua har fire søyler, dermed to og to som er like lange (figur 4.1), med mål slik som spesifisert i figuren.

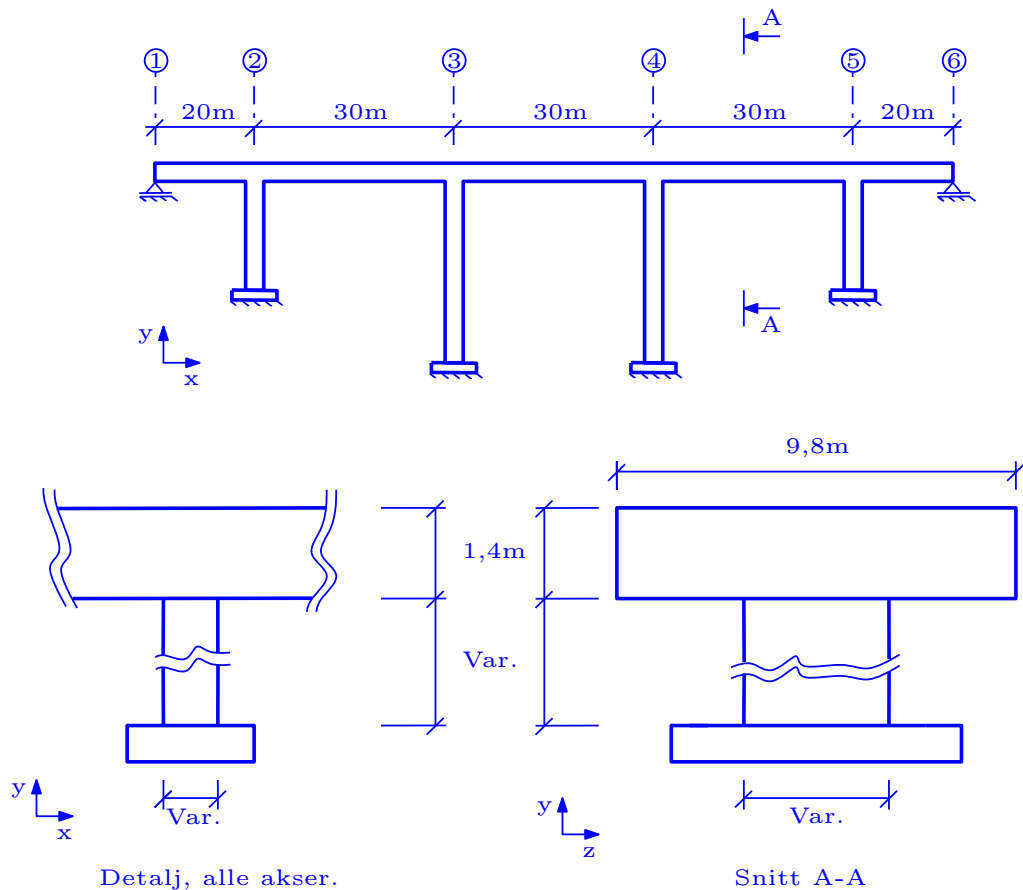
Alle søyler er fast innspenne, mens brua er fritt opplagt ved landkarene (bruer).

Fra side 20 i [13]: Betongens E-modul:

$$E_c = k_E \cdot (f_{cc})^{0,3} = 9500 \cdot 44^{0,3} = 29564 \text{MPa}$$

Ved dynamiske beregninger, kan denne økes med inntil 15% [14] slik at vi vil operere med $E = 34000 \text{MPa} = 34 \cdot 10^6 \text{kN/m}^2$.

4.2 Analyse 1: Fast brulengde, varierende høyde

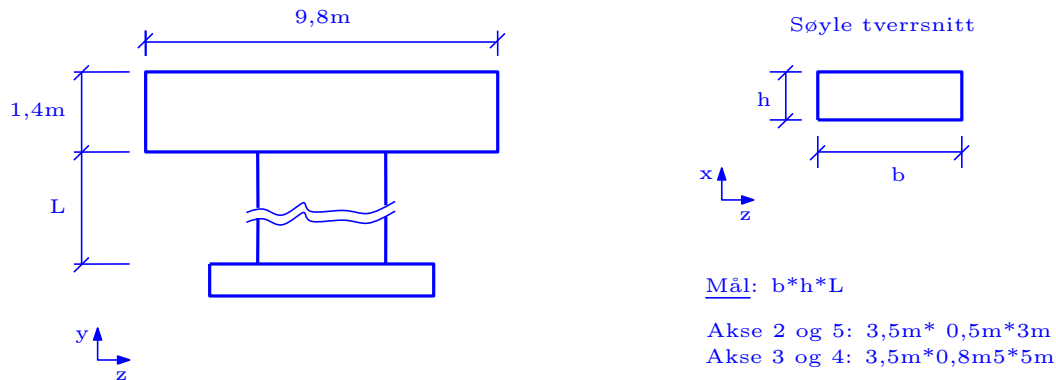


Figur 4.1: En betong bru med fire spenn.

I dette forsøket har brua 5 spenn med faste lengder slik som visst på figur 4.1. Geometrien på brubjelken blir uendret, mens geometri til søyler vil økes gradvis i hvert studie tilfelle. Man vil kunne da observere hvordan lengde endring av søyler påvirker resultatene.

4.2.1 Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 1

Begynner med søylelengder 3m og 5m for søyler henholdsvis akse 2 og 5 (fig.4.1) og akse 3 og 4.



Figur 4.2: Detaljer.

Masse

Bru bjelken:

$$m_1 = v \cdot \rho = b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 9,8m \cdot 1,4m \cdot 130m \cdot 2,55t/m^3 = 4548,18t$$

Tilleggsutstyr:

$$m_2 = 28kN/m \cdot l = 28 \cdot 1000kgm/s^2/m \cdot 130m \cdot \frac{1}{9,81m/s^2} = 371,1t$$

Antar 50% av søylemassen er med å svinge [13].

Akse 2 og 5:

$$m_3 = 2 \cdot 0,5 \cdot b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 1 \cdot 0,5m \cdot 3m \cdot 3,5m \cdot 2,55t/m^3 = 13,39t$$

Akse 3 og 4:

$$m_4 = 2 \cdot 0,5 \cdot b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 1 \cdot 0,8m \cdot 5m \cdot 3,5m \cdot 2,55t/m^3 = 35,7t$$

Total masse=4968,32t

Stivhet

Siden søylene er fast innspennt i begge ender, er stivheter gitt ved:

$$K = \frac{12EI}{L^3}$$

Formelen er utledet i Appendix B.

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3,5 \cdot 0,5^3}{12} = 0,0365\text{m}^4$$
$$\Rightarrow K_{2,5} = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 0,0365\text{m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6\text{kN/m}^2}{3^3\text{m}^3} = 550930\text{kN/m}$$

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3,5 \cdot 0,8^3}{12} = 0,149\text{m}^4$$
$$\Rightarrow K_{3,4} = \frac{12EI}{L} = \frac{12 \cdot 0,149\text{m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6\text{kN/m}^2}{5^3\text{m}^3} = 487420\text{kN/m}$$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{2076700}{4968,32}} = 20,445\text{rad/s}$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{20,4} = 0,307\text{s}$$

Tilnærmet egen periode etter NS EN-1998-1:

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 0,251\text{s}$$

$C_t = 0,075$ for betong bjelker.

H er den totale søyle høyden, L i figur 4.2.

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Side 28 i NS EN 1998-1: Grunntyper:

Brua er antatt bygd på fjell, det betyr grunntype A .

Side 31: Valg av spekter parametere:

Bruker tabell 3.2: For grunntype A , gjelder: $S = 1$, $T_B = 0,15$, $T_C = 0,4$, og $T_D = 2$.

Side 34: Formel for respons spekter:

$T_1 = 0,31s \in [T_B, T_C]$, det betyr formel 3.3.

$$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 = 0,68 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2,5 = 1,7m/s^2$$

Side 34: $S = 1$

Side 30: $\eta = 1$ for $\xi = 0,05$

Side 30: Dimensjonerende grunnakselerasjon:

$$a_g = \gamma_1 \cdot a_{gR} = 1 \cdot 0,68m/s^2 = 0,68m/s^2$$

Side 42: Seismiske klasser:

Velger seismisk klasse II, og dermed $\gamma_1 = 1$.

Side 3 i tillegget: Seismiske soner:

$$a_{gR} = 0,8 \cdot a_{g40Hz} = 0,8 \cdot 0,85 = 0,68m/s^2$$

Fra figur NA.3: Stavanger kommune ligger ved cirka $a_{g40Hz} = 0,85m/s^2$
Ifølge Håndbok 185 side 106, er ikke denne grunn akselerasjonen tilstrekkelig nok for at man skal foreta jordskjelv analyse.

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,7m/s^2}{(20,445)^2} = \frac{1,7m/s^2}{416,2s^{-2}} = 4,1mm$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 551555,6kN/m \cdot 0,0041m = 2258,8kN$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 486336kN/m \cdot 0,0041m = 1998,44kN$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 8514,5kN$$

Maks skjær ved Newton's lov: $F = m \cdot a$

$$F_{\max} = m_{Tot} \cdot S_e(T) = 4968,32 \cdot 1,7 = 8446,1kN$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 2261,4 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} = 6776,39 \text{ kNm}$$

Akse 3 og 4:

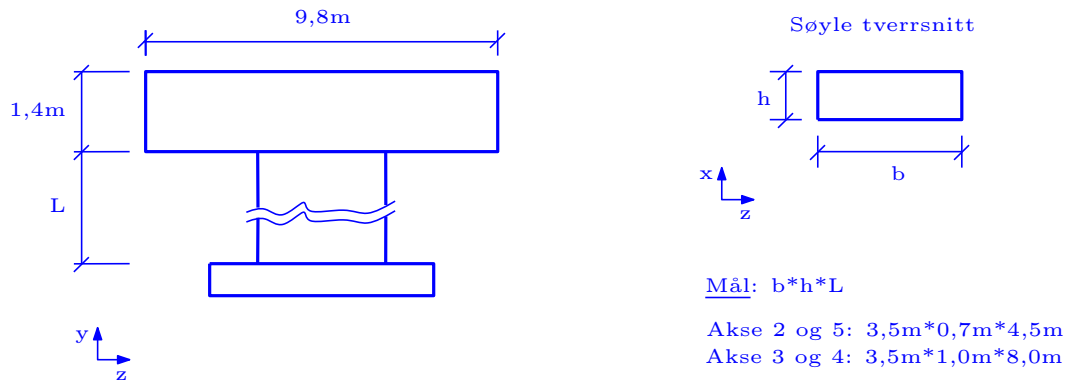
$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 1994 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} = 9992,2 \text{ kNm}$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 33537,16 \text{ kNm}$$

4.2.2 Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 2

Søylelengder økes fra 3m til 4,5m for søyler i akse 2 og 5 (fig.4.1) og fra 5m til 8m, akse 3 og 4.



Figur 4.3: Detaljer.

Masse

Bru bjelken er uendret: $m_1 = 4548,18t$

Tilleggsutstyr uendret: $m_2 = 37,05t$

Antar 50% av søylemassen er med å svinge [13].

Akse 2 og 5:

$$m_3 = 2 \cdot 0,5 \cdot b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 1 \cdot 0,7\text{m} \cdot 4,5\text{m} \cdot 3,5\text{m} \cdot 2,55\text{t}/\text{m}^3 = 28,11\text{t}$$

Akse 3 og 4:

$$m_4 = 2 \cdot 0,5 \cdot b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 1 \cdot 1\text{m} \cdot 8\text{m} \cdot 3,5\text{m} \cdot 2,55\text{t}/\text{m}^3 = 71,4\text{t}$$

Total masse=5018,7t

Stivhet

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3,5 \cdot 0,7^3}{12} = 0,1\text{m}^4$$
$$\Rightarrow K_{2,5} = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 0,1\text{m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6\text{kN}/\text{m}^2}{4,5^3\text{m}^3} = 447923,2\text{kN}/\text{m}$$

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3,5 \cdot 1,0^3}{12} = 0,3\text{m}^4$$
$$\Rightarrow K_{3,4} = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 0,3\text{m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6\text{kN/m}^2}{8^3\text{m}^3} = 239062,5\text{kN/m}$$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{1373971,4}{5018,7}} = 16,5\text{rad/s}$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0,38\text{s}$$

Tilnærmet egen periode etter NS EN-1998-1:

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 8^{\frac{3}{4}} = 0,36\text{s}$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Spekter parametere: Grunntype A betyr: $S = 1$, $T_B = 0,15$, $T_C = 0,4$, og $T_D = 2$, $S = 1$, $\eta = 1$.

Side 34: Formel for respons spekter:

$T_1 = 0,38\text{s} \in [T_B, T_C]$. Formel 3.3 er OK.

$$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 = 0,68 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2,5 = 1,7\text{m/s}^2$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon er uendret: $a_g = 0,68\text{m/s}^2$.

Beregning

• **Maksimal respons:**

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,7\text{m/s}^2}{(16,5)^2} = 6,2\text{mm}$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 447923, 2\text{kN/m} \cdot 0, 0062\text{m} = 2777, 1\text{kN}$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 239062, 5\text{kN/m} \cdot 0, 0062\text{m} = 1482, 2\text{kN}$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 8518, 6\text{kN}$$

Maks skjær ved Newton's lov: $F = m \cdot a$

$$F_{\max} = m_{Tot} \cdot S_e(T) = 5018, 7 \cdot 1, 7 = 8532\text{kN}$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 2777, 1\text{kN} \cdot 4, 5\text{m} = 6784, 1\text{kNm}$$

Akse 3 og 4:

$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 1482, 2\text{kN} \cdot 8\text{m} = 11857, 5\text{kNm}$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 48709, 1\text{kN}$$

4.2.3 Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 3

Søylelengder økes fra 4,5m til 7m, og fra 8m til 12m.

Masse

Bru bjelke: $m_1 = 4548, 2t$

Tilleggsutstyr: $m_2 = 371t$

Medsvingende søylemassen [13].

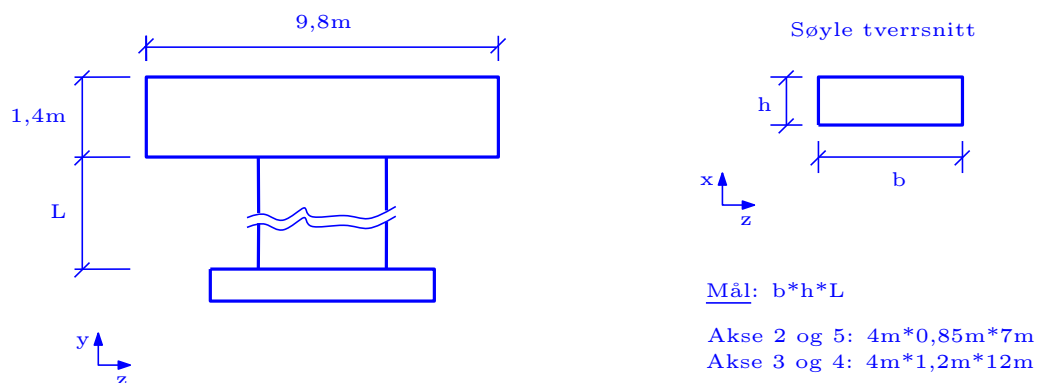
Akse 2 og 5:

$$m_3 = 2 \cdot 0, 5 \cdot b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 1 \cdot 0, 85\text{m} \cdot 7\text{m} \cdot 4\text{m} \cdot 2, 55\text{t/m}^3 = 61\text{t}$$

Akse 3 og 4:

$$m_4 = 2 \cdot 0, 5 \cdot b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 1 \cdot 1, 2\text{m} \cdot 12\text{m} \cdot 4\text{m} \cdot 2, 55\text{t/m}^3 = 147\text{t}$$

Total masse=5127,2t



Figur 4.4: Detaljer.

Stivhet

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 0,85^3}{12} = 0,21\text{m}^4$$

$$\Rightarrow K_{2,5} = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 0,21\text{m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6\text{kN/m}^2}{7^3\text{m}^3} = 249796\text{kN/m}$$

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 1,2^3}{12} = 0,58\text{m}^4$$

$$\Rightarrow K_{3,4} = \frac{12EI}{L} = \frac{12 \cdot 0,58\text{m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6\text{kN/m}^2}{12^3\text{m}^3} = 136944,4\text{kN/m}$$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{773481}{5127,2}} = 12,3\text{rad/s}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0,52\text{s}$$

Tilnærmet egen periode etter NS EN-1998-1:

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 12^{\frac{3}{4}} = 0,48\text{s}$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Side 31: Spekter parametere:

Tabell 3.2: $S = 1$, $T_B = 0,15$, $T_C = 0,4$, og $T_D = 2$. $S = 1$, $\eta = 1$.

Side 34: Formel for respons spekter:

$T_1 = 0,52s \in [T_C, T_D]$. Riktig formel er 3.4:

$$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \cdot \frac{T_C}{T} = 0,68 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2,5 \cdot \frac{0,4}{0,52} = 1,31m/s^2$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon: $a_g = 0,68m/s^2$.

Beregning

- **Maksimal respons:**

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,31m/s^2}{(12,2)^2} = 8,8mm$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 249796kN/m \cdot 0,0088m = 2198,2kN$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 136944,4kN/m \cdot 0,0088m = 1205,1kN$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 6806,6kN$$

Maks skjær ved Newton's lov: $F = m \cdot a$

$$F_{\max} = m_{Tot} \cdot S_e(T) = 5127,2 \cdot 1,31 = 6716,6kN$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 2198,2kN \cdot 7m = 15387,4kNm$$

Akse 3 og 4:

$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 1205,1kN \cdot 12m = 14461,3kNm$$

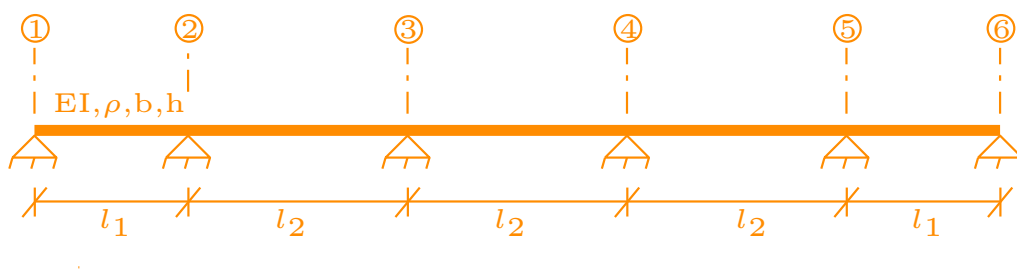
Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 59697,5kN$$

4.2.4 Forskyvning i y -retning

Beregning av egenperiode for en bru slik som i figur 4.6 er ikke rettfram som i de to andre retningene, dette spesielt på grunn av søylene.

En forenkling er å anta at brua er fritt opplagt om alle akser. og betrakte hvert spenn for seg¹. Antar videre at hver spenn har sin størst nedbøyning nedover i midten. Skal beregne momentet i midten av hvert spenn.



Figur 4.5: Forenklet.

På side 612 i [16] er det oppgitt uttrykk for beregning av kontinuerlige bjelker med svingning i vertikal retning, ved forskjellige typer opplagere. For tosidig fritt opplagring gjelder:

$$\omega_n = (\beta \cdot l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A \cdot l^4}}$$

, ,der $\beta \cdot l$ er oppgitt som en konstant. Kontroll av enheter:

$$\begin{aligned} \text{rad/s} &= \sqrt{\frac{N/m^2 \cdot m^4}{kg/m^3 \cdot m^2 \cdot m^4}} = \sqrt{\frac{Nm^2}{kgm^3}} \\ &= \sqrt{\frac{N}{kgm}} = \sqrt{\frac{kgm/s^2}{kgm}} = 1/s^2 \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

¹Dette er min personlig antagelse, og må tas med en "klype salt". Jeg rakk ikke å høre med veilederen. En noe mer eksakt framgangsmåte basert på elementmetoden er vist i Tillegg E.

Korte spenn (Akse 2 og 5)

Bru bredden er 9,8m og tykkelse: 1,4m. Spennlengde for de to korte seksjoner er: $l_1 = 20m$ (figur 4.1). Egenfrekvens blir da:

$$\omega_n = \pi^2 \sqrt{\frac{34 \cdot 10^9 \cdot \frac{9,8 \cdot 1,4^3}{12}}{2,55 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1,4 \cdot 20^4}} = 36,41 \text{ rad/s}$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{36,42 \text{ rad/s}} = 0,173 \text{ s}$$

Vertikal responspekter etter NS EN-1998-1

Side 33: Spekter parametere:

Tabell 3.4: $T_B = 0,05$, $T_C = 0,15$, og $T_D = 1$.

$$a_{vg}/a_g = 0,45 \implies a_{vg} = 0,45 \cdot 0,68 = 0,31 \text{ m/s}^2$$

Side 33: Formel for vertikal responspekter:

Naturlig periode: $T = \tau_n = 0,173 \text{ s} \in [T_C, T_D]$. Riktig formel er:

$$S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3 \cdot \left[\frac{T_C}{T} \right]$$
$$= 0,31 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{0,15}{0,173}$$
$$= \mathbf{0,82 \text{ m/s}^2}$$

Bøyemoment er gitt ved: $M = \omega''(x) \cdot EI$, der $\omega''(x)$ er krumningen, gitt ved uttrykket: $\omega(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

$$\omega''(x) = \frac{d^2\omega}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\frac{\pi^2}{L^2} A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Dropper n fordi vi er kun interessert i étt halvbølge.

I midten av bjelken er $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \implies \frac{\pi x}{L} = \frac{\pi}{2} \implies x = \frac{L}{2}$. Insatt gir uttrykket for krumning i midten av bjelken:

$$\omega''\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{L^2} A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ er det samme som² pseudo forskyvning S_d . Fra ligning 2.49 har vi: $S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2}$, der S_a er pseudo akselerasjon, det samme som vertikal spekteret, i dette tilfelle. Dette gir:

²Jfr. Øving 1 i Jordskjelv, UiS, vår 2010.

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{S_{ve}(T)}{\omega_n^2} = \frac{0,82}{36,42^2} = 0,62mm$$

Til slutt, moment i midten av de korte spenn:

$$\begin{aligned} M &= \omega''(x) \cdot EI = \\ &= -34 \cdot 10^9 \cdot \frac{9,8 \cdot 1,4^3}{12} \cdot \frac{\pi^2}{20^2} \cdot 6,2 \cdot 10^{-4} = -1163kNm \end{aligned}$$

Lange spenn (Akse 3 og 4)

Fra figur 4.1, de tre lange spenn har lengder: $l_1 = 30m$. Samme prosedyre vil gi:

$$\omega_n = 16,2rad/s \quad \tau_n = 0,39s$$

Gjeldende spektrum:

$$\begin{aligned} S_{ve}(T) &= a_{vg} \cdot \eta \cdot 3 \cdot \left[\frac{T_C}{T} \right] \\ &= 0,31 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{0,15}{0,39} \\ &= \mathbf{0,36m/s^2} \end{aligned}$$

Pseudoforskyvning:

$$S_d = \frac{S_{ve}(T)}{\omega_n^2} = \frac{0,36}{16,2^2} = 1,4mm$$

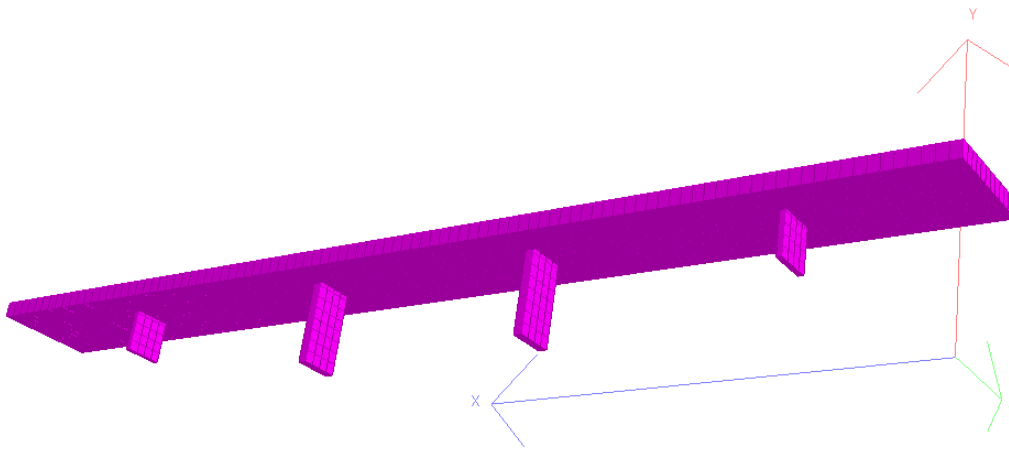
Moment i midten av de korte spenn:

$$M = \omega''(x) \cdot EI = -1114,5kNm$$

Kommentar:

Forenklingen som jeg har foretatt her medfører at egenfrekvenser er upåvirket av bruøyden. De respektive egenfrekvenser og egenperioder (og dermed hele bruas) i vertikal retning vil være konstante, uansett bruøyde.

Jeg testet dette ved å modellere brua i Staad Pro (se figur 4.6) og kjøre modal analyse i y -retning for de tre forskjellige høyder.



Figur 4.6: *Platemodell av beregnet bru.*

Resultatene ble som følge:

Tilfelle 1: Maks bruhøyde =5m: $\tau_n = 0,33$

Tilfelle 2: Maks bruhøyd e=8m: $\tau_n = 0,323$

Tilfelle 3: Maks bruhøyde =12m: $\tau_n = 0,32$

Det ser ut til å stemme at svingning i y -retning er veldig lite påvirket av søylehøyde.

4.2.5 Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 1

Samme analyse skal gjennomføres. Forskyvning, skjærkrefter og momenter skal beregnes for grunn akselerasjon i horisontal retning, men denne gang i bruas tverrakse (forskyvning i søylenes sterke akse).

Studietilfelle 1 har samme geometriforhold som 1.2.1: Søylelengder er 3m for søyler i akse 2 og 5 (fig.4.1) og 5m, akse 3 og 4.

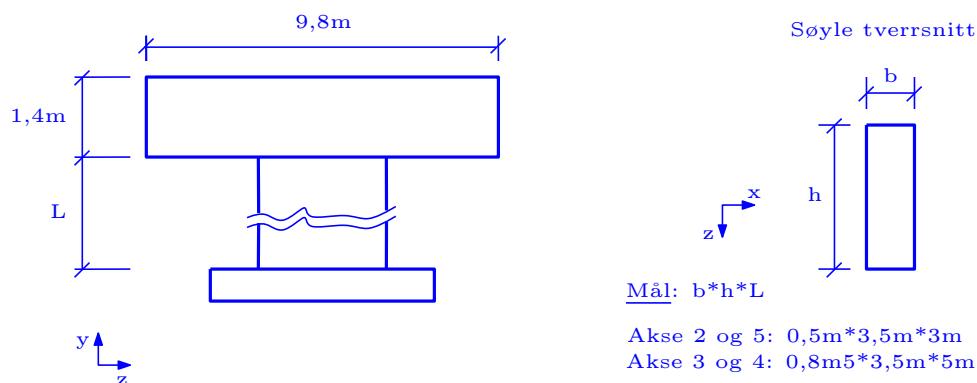
Total masse=4968,3t

Stivhet

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,5 \cdot 3,5^3}{12} = 1,786\text{m}^4$$

$$\Rightarrow K_{2,5} = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 1,786\text{m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6\text{kN/m}^2}{3^3\text{m}^3} = 26988444\text{kN/m}$$



Figur 4.7: Detaljer.

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,8 \cdot 3,5^3}{12} = 2,86\text{m}^4$$

$$\Rightarrow K_{3,4} = \frac{12EI}{L} = \frac{12 \cdot 2,86\text{m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6\text{kN/m}^2}{5^3\text{m}^3} = 9335040$$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{72646968}{4968,3}} = 121\text{rad/s}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{121} = 0,052\text{s}$$

Tilnærmet egen periode etter NS EN-1998-1:

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 0,25\text{s}$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Side 31: Spekter parametere:

$$S = 1, \eta = 1, T_B = 0,15, T_C = 0,4, \text{ og } T_D = 2.$$

Side 34: Formel for responspekter:

$T = 0,052s \in [0, T_B]$. Riktig formel er 3.2.

$$\begin{aligned} S_e(T) &= a_g \cdot S \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 0,68 \cdot 1 \left[1 + \frac{0,052}{0,15} \cdot (1 \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 1,034m/s^2 \end{aligned}$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon: $a_g = 0,68m/s^2$.

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,034m/s^2}{(121)^2} = 0,071mm$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 26988444kN/m \cdot 0,000071m = 1916,2kN$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 9335040kN/m \cdot 0,000071m = 662,8kN$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 5157,9kN$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 1916,2kN \cdot 3m = 5748,5kNm$$

Akse 3 og 4:

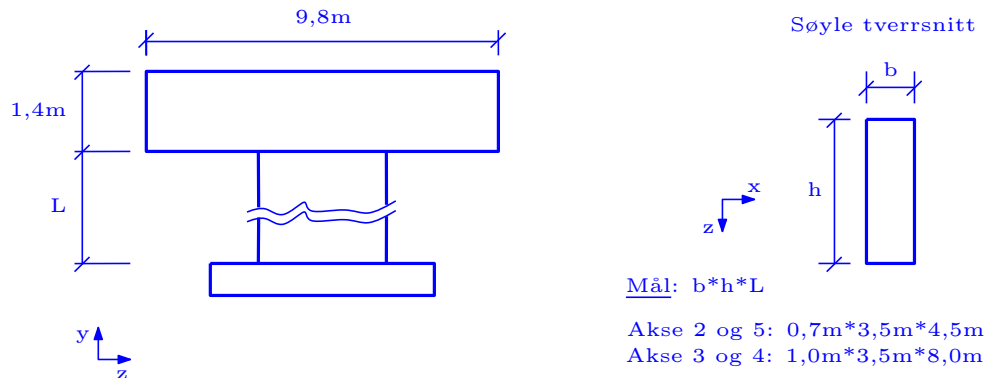
$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 662,8kN \cdot 5m = 3314kNm$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 18125kNm$$

4.2.6 Forskyvning i z-retning: Studietilfelle 2

Søylelengder økes fra 3m til 4,5m for søyler i akse 2 og 5 (fig.4.1) og fra 5m til 8m, akse 3 og 4.



Figur 4.8: Detaljer.

Masse

Samme som i 1.2.2:

Total masse=5018,7t

Stivhet

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,7 \cdot 3,5^3}{12} = 2,5m^4$$

$$\Rightarrow K_{2,5} = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 2,5m^4 \cdot 34 \cdot 10^6kN/m^2}{4,5^3m^3} = 11193415,6kN/m$$

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 3,5^3}{12} = 3,573m^4$$

$$\Rightarrow K_{3,4} = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 3,573m^4 \cdot 34 \cdot 10^6kN/m^2}{8^3m^3} = 2847234,4$$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{28081298,8}{4968,3}} = 75,2 \text{ rad/s}$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{75,2} = 0,084 \text{ s}$$

Tilnærmet egen periode etter NS EN-1998-1:

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 8^{\frac{3}{4}} = 0,36 \text{ s}$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Side 31: Spekter parametere:

Tabell 3.2: $S = 1$, $T_B = 0,15$, $T_C = 0,4$, og $T_D = 2$.

Side 34: Formel for respons spekter:

$T = 0,084 \text{ s} \in [0, T_B]$. Riktig formel er 3.2.

$$\begin{aligned} S_e(T) &= a_g \cdot S \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 0,68 \cdot 1 \left[1 + \frac{0,12}{0,15} \cdot (1 \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 1,25 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon: $a_g = 0,68 \text{ m/s}^2$

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,25 \text{ m/s}^2}{(75,2)^2} = 0,22 \text{ mm}$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 11193415,6 \text{ kN/m} \cdot 0,00022 \text{ m} = 2462,5 \text{ kN}$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 2847234,4 \text{ kN/m} \cdot 0,00022 \text{ m} = 626,4 \text{ kN}$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 6177,9 \text{ kN}$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 2462,5 \text{ kN} \cdot 4,5 \text{ m} = 11081,5 \text{ kNm}$$

Akse 3 og 4:

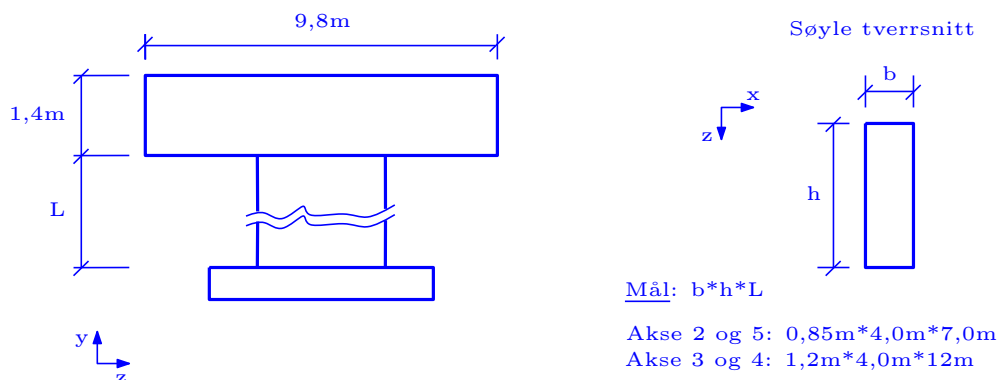
$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 626,4 \text{ kN} \cdot 8 \text{ m} = 5011,1 \text{ kNm}$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 32185,2 \text{ kNm}$$

4.2.7 Forskyvning i z-retning: Studietilfelle 3

Søylelengder økes fra 4,5m til 7m for søyler i akse 2 og 5 (fig.4.1) og fra 8m til 12m, akse 3 og 4.



Figur 4.9: Detaljer.

Masse

Samme som i 1.2.3:

Total masse=5127,2t

Stivhet

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,85 \cdot 4^3}{12} = 4,53m^4$$
$$\Rightarrow K_{2,5} = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 4,53m^4 \cdot 34 \cdot 10^6kN/m^2}{7^3m^3} = 5388454,8kN/m$$

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 4^3}{12} = 6,4m^4$$
$$\Rightarrow K_{3,4} = \frac{12EI}{L} = \frac{12 \cdot 6,4m^4 \cdot 34 \cdot 10^6kN/m^2}{12^3m^3} = 1511111$$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{13807062,2}{5127,2}} = 51,9rad/s$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{52,72} = 0,12s$$

Tilnærmet egen periode etter NS EN-1998-1:

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 12^{\frac{3}{4}} = 0,48s$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Side 31: Spekter parametere:

$$S = 1, T_B = 0,15, T_C = 0,4, \text{ og } T_D = 2.$$

Side 34: Formel for respons spekter:

$T_1 = 0,12s \in [0, T_B]$. Riktig formel er fortsatt 3.2.

$$S_e(T) = a_g \cdot S \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right]$$
$$= 0,68 \cdot 1 \left[1 + \frac{0,12}{0,15} \cdot (1 \cdot 2,5 - 1) \right]$$
$$= 1,5m/s^2$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon: $a_g = 0,68m/s^2$.

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,5\text{m/s}^2}{(51,9)^2} = 0,56\text{mm}$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 5388454,8\text{kN/m} \cdot 0,00056\text{m} = 3017,5\text{kN}$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 1511111\text{kN/m} \cdot 0,00056\text{m} = 846,2\text{kN}$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 7727,5\text{kN}$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 3017,5\text{kN} \cdot 7\text{m} = 21122,7\text{kNm}$$

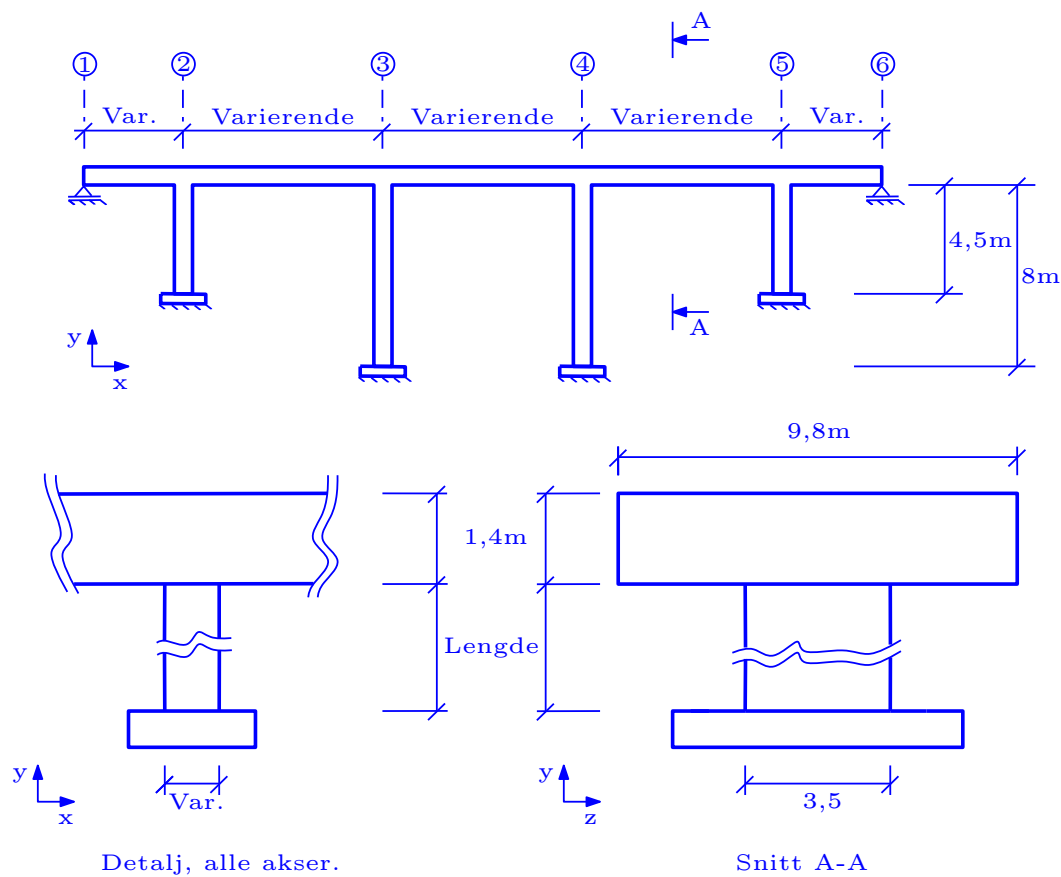
Akse 3 og 4:

$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 846,2\text{kN} \cdot 12\text{m} = 10154,7\text{kNm}$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 62554,8\text{kN}$$

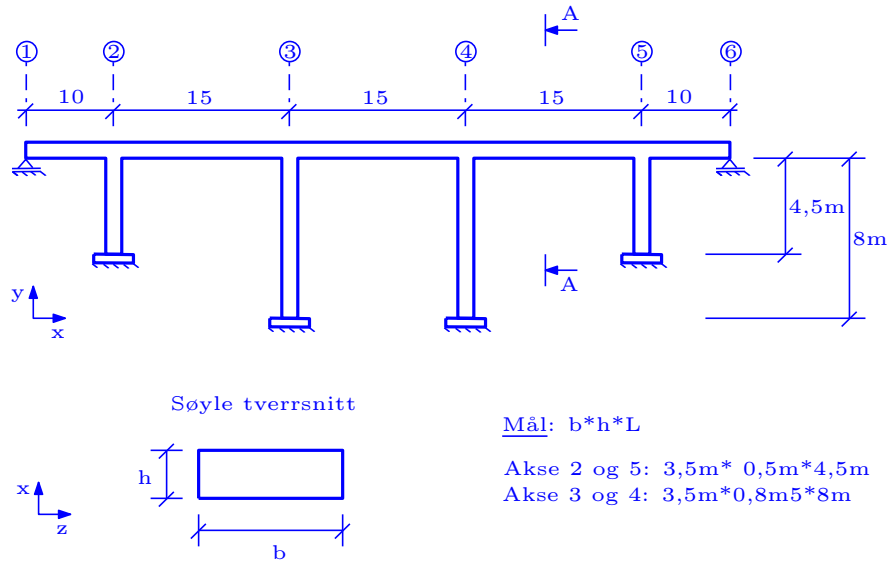
4.3 Analyse 2: Fast bruhøyde, varierende bjelkelengde



Figur 4.10: *Betong bru med fire spenn.*

Samme bru skal analyseres, men denne gang skal høyden holdes konstant, mens bru bjelken skal endre lengde gradvis i hvert forsøk. Til slutt, skal man kunne observere hvordan lengde endring av bru bjelken påvirker oppførselen ved jordskjelv.

4.3.1 Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 1



Figur 4.11: Bru med fire spenn.

Masse

Bru bjelken:

$$m_1 = v \cdot \rho = b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 9,8\text{m} \cdot 1,4\text{m} \cdot 65\text{m} \cdot 2,55\text{t}/\text{m}^3 = 2274\text{t}$$

Tilleggsutstyr:

$$m_2 = 28\text{kN}/\text{m} \cdot l = 28\text{t} \cdot \text{m}/\text{s}^2/\text{m} \cdot 65\text{m} \cdot \frac{1}{9,81\text{m}/\text{s}^2} = 185,5\text{t}$$

Antar 50% av søylemassen er med å svinge [13].

Akse 2 og 5:

$$m_3 = 2 \cdot 0,5 \cdot b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 1 \cdot 0,5\text{m} \cdot 4,5\text{m} \cdot 3,5\text{m} \cdot 2,55\text{t}/\text{m}^3 = 20,1\text{t}$$

Akse 3 og 4:

$$m_4 = 2 \cdot 0,5 \cdot b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 1 \cdot 3,5\text{m} \cdot 0,8\text{m} \cdot 8\text{m} \cdot 2,55\text{t}/\text{m}^3 = 57,1\text{t}$$

Total masse=2536,7t

Stivhet

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3,5 \cdot 0,5^3}{12} = 0,0365m^4$$
$$\Rightarrow K_{2,5} = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 0,0365m^4 \cdot 34 \cdot 10^6kN/m^2}{4,5^3m^3} = 163424kN/m$$

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3,5 \cdot 0,8^3}{12} = 0,149m^4$$
$$\Rightarrow K_{3,4} = \frac{12EI}{L} = \frac{12 \cdot 0,149m^4 \cdot 34 \cdot 10^6kN/m^2}{8^3m^3} = 118734,4$$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{564474,6}{2536,7}} = 14,9rad/s$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{20,4} = 0,42s$$

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 8^{\frac{3}{4}} = 0,36s$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Spekter parametere:

$$S = 1, T_B = 0,15, T_C = 0,4, \text{ og } T_D = 2.$$

Side 34: Formel for respons spekter:

$$T_1 = 0,42s \approx \in [T_B, T_C]. \text{ Bruker formel 3.3.}$$

$$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 = 0,68 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2,5 = 1,7m/s^2$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon: $a_g = \gamma_1 \cdot a_{gR} = 1 \cdot 0,68m/s^2 = 0,68m/s^2$

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,7\text{m/s}^2}{(14,9)^2} = \frac{1,7\text{m/s}^2}{416,2\text{s}^{-2}} = 7,7\text{mm}$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 163424\text{kN/m} \cdot 0,007\text{m} = 1144\text{kN}$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 118734,4\text{kN/m} \cdot 0,007\text{m} = 831,1\text{kN}$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 3950,2\text{kN}$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 1144\text{kN} \cdot 4,5\text{m} = 5147,9\text{kNm}$$

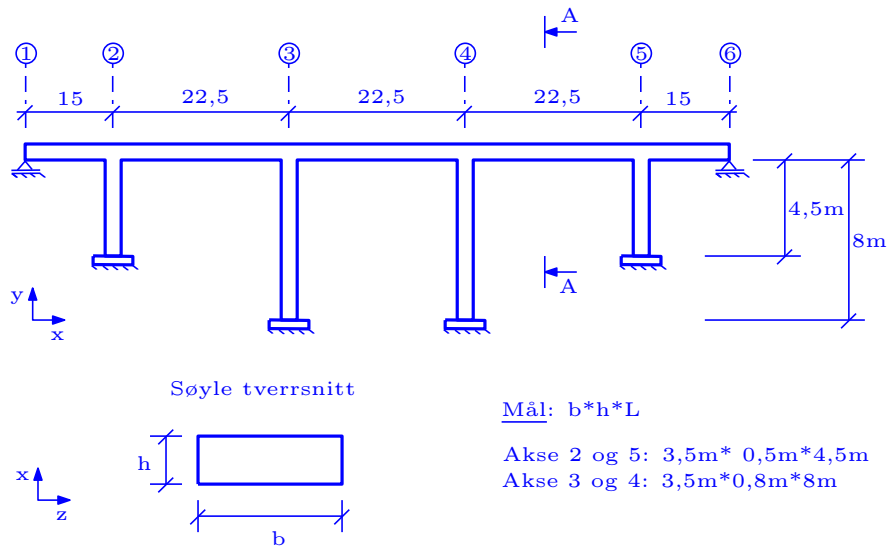
Akse 3 og 4:

$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 831,1\text{kN} \cdot 8\text{m} = 6649,1\text{kNm}$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 23594\text{kNm}$$

4.3.2 Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 2



Figur 4.12: *Detaljer.*

Masse

Bru bjelken:

$$m_1 = v \cdot \rho = b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 9,8m \cdot 1,4m \cdot 97,5m \cdot 2,55t/m^3 = 3411t$$

Tilleggsutstyr:

$$m_2 = 28kN/m \cdot l = 28t \cdot m/s^2/m \cdot 97,5m \cdot \frac{1}{9,81m/s^2} = 278,3t$$

Medsvingende søylemassen er uendret:

Akse 2 og 5:

$$m_3 = 20,1t$$

Akse 3 og 4:

$$m_4 = 57,1t$$

Total masse=3766,5t

Stivhet

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = 0,0365m^4$$

$$\Rightarrow K_{2,5} = 163424kN/m$$

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = 0,149\text{m}^4 \\ \implies K_{3,4} = 118734,4\text{kN/m}$$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{564316,7}{3766,5}} = 12,2\text{rad/s} \\ \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0,51\text{s}$$

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 8^{\frac{3}{4}} = 0,36\text{s}$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Side 31: Spekter parametere:

$$S = 1, T_B = 0,15, T_C = 0,4, \text{ og } T_D = 2.$$

Side 34: Formel for respons spekter:

$T_1 = 0,51\text{s} \in [T_C, T_D]$. Formel 3.3 er OK.

$$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \left[\frac{T_C}{T} \right] \\ = 0,68 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2,5 \left[\frac{0,4}{0,51} \right] \\ = 1,33\text{m/s}^2$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon: $a_g = 0,68\text{m/s}^2$

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,33\text{m/s}^2}{(12,2)^2} = 9\text{mm}$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 163424 \text{ kN/m} \cdot 0,009 \text{ m} = 1470,8 \text{ kN}$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 118734,4 \text{ kN/m} \cdot 0,009 \text{ m} = 1069 \text{ kN}$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 5078,8 \text{ kN}$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 1470,8 \text{ kN} \cdot 4,5 \text{ m} = 6618,7 \text{ kNm}$$

Akse 3 og 4:

$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 1068,6 \text{ kN} \cdot 8 \text{ m} = 8549 \text{ kNm}$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 30335 \text{ kN}$$

.

4.3.3 Forskyvning i x -retning: Studietilfelle 3

Masse

Bru bjelken:

$$m_1 = v \cdot \rho = b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 9,8 \text{ m} \cdot 1,4 \text{ m} \cdot 130 \text{ m} \cdot 2,55 \text{ t/m}^3 = 4548,2 \text{ t}$$

Tilleggsutstyr:

$$m_2 = 28 \text{ kN/m} \cdot l = 28 \text{ t} \cdot \text{m/s}^2 / \text{m} \cdot 130 \text{ m} \cdot \frac{1}{9,81 \text{ m/s}^2} = 371 \text{ t}$$

Medsvingende søylemassen er uendret:

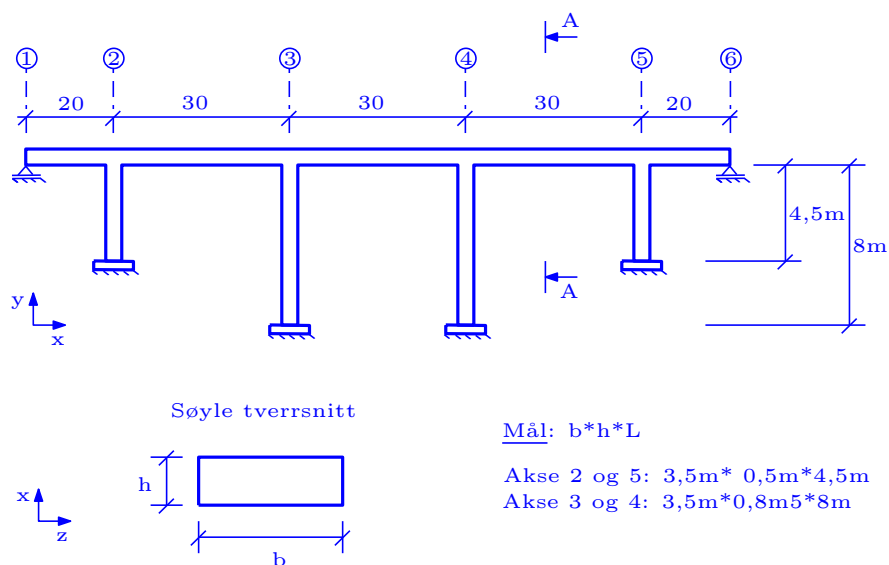
Akse 2 og 5:

$$m_3 = 20,1 \text{ t}$$

Akse 3 og 4:

$$m_4 = 57,1 \text{ t}$$

Total masse=4996,5t



Figur 4.13: *Detaljer.*

Stivhet

Tverrsnittet er uendret.

Total stivhet: $K = 2(K_{2,5} + K_{3,4}) = 564316,7 \text{ kN/m}$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{564316,7}{4996,5}} = 10,63 \text{ rad/s}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0,6 \text{ s}$$

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 8^{\frac{3}{4}} = 0,36 \text{ s}$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Side 31: Spekter parametere:

$S = 1$, $T_B = 0,15$, $T_C = 0,4$, og $T_D = 2$.

Side 34: Formel for respons spekter:

$T = 0,6s \in [T_C, T_D]$. Riktig formel er 3.4:

$$\begin{aligned} S_e(T) &= a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \cdot \frac{T_C}{T} \\ &= 0,68 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2,5 \cdot \frac{0,4}{0,6} \\ &= 1,13m/s^2 \end{aligned}$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon: $a_g = 0,68m/s^2$

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,133m/s^2}{(10,62)^2} = 10mm$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 163424kN/m \cdot 0,01m = 1634,2kN$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 118734,4kN/m \cdot 0,01m = 1187,3kN$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 5646kN$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 1634,2kN \cdot 4,5m = 7354,1kNm$$

Akse 3 og 4:

$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 1187,3kN \cdot 8m = 9499kNm$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 33705,7kN$$

4.3.4 Forskyvning i y -retning: Studietilfelle 1

Følger samme prosedyre som ble inført i Kapittel 4.2.4. Ifølger forenklingen som ble foretatt der, er egenperiode i vertikal y -retning kun avhengig av brubjelken (se figur 4.5).

I dette studietilfelle, har bru bjelken bredde $b = 9,8m$ og tykkelse $h = 1,4$. Lengder spesifiseres for hvert tilfelle.

Korte spenn (Akse 2 og 5)

I dette tilfelle er lengden på de to korte spenn (se figur 4.11): $l = 10m$. Egenfrekvens blir:

$$\omega_n = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A \cdot l^4}} = \pi^2 \sqrt{\frac{34 \cdot 10^9 \cdot \frac{9,8 \cdot 1,4^3}{12}}{2,55 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1,4 \cdot 10^4}} = 145,65 \text{ rad/s}$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{145,65 \text{ rad/s}} = 0,043 \text{ s}$$

Vertikal responspekter etter NS EN-1998-1

Side 33: Spekter parametere:

Tabell 3.4: $T_B = 0,05$, $T_C = 0,15$, og $T_D = 1$.
 $a_{vg} = 0,45 \cdot 0,68 = 0,31 \text{ m/s}^2$

Side 33: Formel for vertikal responspekter:

Naturlig periode: $T = \tau_n = 0,043 \text{ s} \in [0, T_B]$. Riktig formel er:

$$S_{ve}(T) = a_{vg} \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 3 - 1) \right]$$
$$= 0,31 \cdot \left[1 + \frac{0,043}{0,05} \cdot (1\eta \cdot 3 - 1) \right]$$
$$= \mathbf{0,53 \text{ m/s}^2}$$

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{S_{ve}(T)}{\omega_n^2} = \frac{0,53}{145,65^2} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Bøyemomentet i midten av spennet er:

$$M = \omega''(x) \cdot EI = S_d \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot EI$$
$$= -2,5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi^2}{10^2} \cdot EI$$
$$= -189 \text{ kNm}$$

Lange spenn

Lange spenn er på $l = 15m$ (se figur 4.11): .

Eigenfrekvens blir:

$$\omega_n = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A \cdot l^4}} = \pi^2 \sqrt{\frac{34 \cdot 10^9 \cdot \frac{9,8 \cdot 1,4^3}{12}}{2,55 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1,4 \cdot 15^4}} = 64,74 \text{ rad/s}$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{64,74 \text{ rad/s}} = 0,1 \text{ s}$$

Vertikal responspekter etter NS EN-1998-1

Side 33: Spekter parametere:

Tabell 3.4: $T_B = 0,05$, $T_C = 0,15$, og $T_D = 1$.

$a_{vg} = 0,31 \text{ m/s}^2$

Side 33: Formel for vertikal respons spekter:

Naturlig periode: $T = \tau_n = 0,1 \text{ s} \in [T_B, T_C]$.

$$\begin{aligned} S_{ve}(T) &= a_{vg} \cdot \eta \cdot 3 \\ &= 0,31 \cdot 1 \cdot 3 \\ &= \mathbf{0,93 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{S_{ve}(T)}{\omega_n^2} = \frac{0,93}{64,7^2} = 0,22 \text{ mm}$$

Bøyemomentet i midten av spennet er:

$$\begin{aligned} M &= \omega''(x) \cdot EI = S_d \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot EI \\ &= -2,2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\pi^2}{15^2} \cdot EI \\ &= -741,7 \text{ kNm} \end{aligned}$$

4.3.5 Forskyvning i y -retning: Studietilfelle 2

Korte spenn

Lengde $l = 15m$ (figur 4.11). Forholdene er samme som for Lange spenn i forrige studietilfelle.

Maks moment på midten av spenn:

$$M = -741,7kNm$$

Lange spenn

Lengde: $l = 22,5m$ (figur 4.11):

Eigenfrekvens blir:

$$\omega_n = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A \cdot l^4}} = \pi^2 \sqrt{\frac{34 \cdot 10^9 \cdot \frac{9,8 \cdot 1,4^3}{12}}{2,55 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1,4 \cdot 22,5^4}} = 22,8 \text{ rad/s}$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{64,74 \text{ rad/s}} = 0,22 \text{ s}$$

Vertikal responspekter etter NS EN-1998-1

Side 33: Spekter parametere:

Tabell 3.4: $T_B = 0,05$, $T_C = 0,15$, og $T_D = 1$.

$$a_{vg} = 0,31 \text{ m/s}^2$$

Side 33: Formel for vertikal respons spekter:

Naturlig periode: $T = \tau_n = 0,22 \text{ s} \in [T_C, T_D]$.

$$\begin{aligned} S_{ve}(T) &= a_{vg} \cdot \eta \cdot 3 \cdot \left[\frac{T_C}{T} \right] \\ &= 0,31 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left[\frac{0,15}{0,22} \right] \\ &= 0,63 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{S_{ve}(T)}{\omega_n^2} = \frac{0,63}{28,7^2} = 0,76 \text{ mm}$$

Bøyemomentet i midten av spennet er:

$$\begin{aligned} M &= \omega''(x) \cdot EI = S_d \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot EI \\ &= -7,6 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\pi^2}{22,5^2} \cdot EI \\ &= -1130,1 \text{ kNm} \end{aligned}$$

4.3.6 Forskyvning i y -retning: Studietilfelle 3

Korte og lange spenn

Lengde er henholdsvis: $l = 20\text{m}$ og $l = 30\text{m}$ (figur 4.13).

Samme tilfeller som i Kapittel 4.2.4.

For korte spenn:

$$M = -1163 \text{ kNm}$$

For lange spenn:

$$M = -1114,5 \text{ kNm}$$

4.3.7 Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 1

Masse

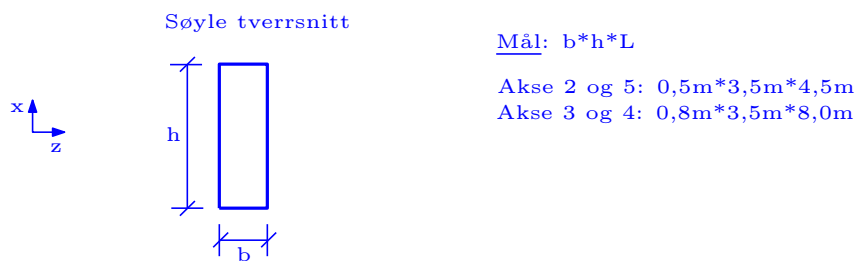
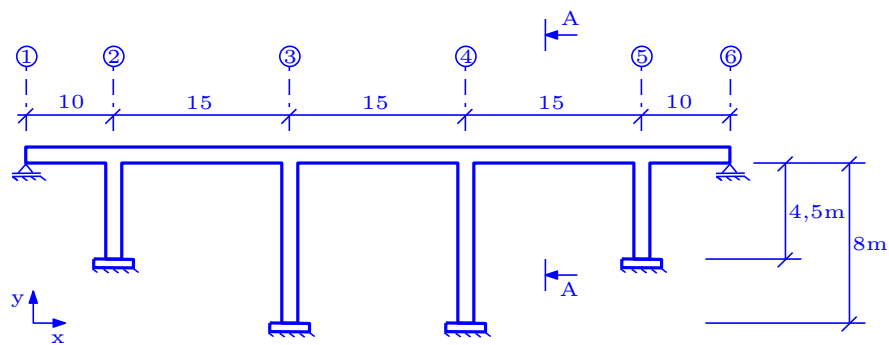
Samme masse som i 1.3.1

Total masse=2536,7t

Stivhet

Akse 2 og 5:

$$\begin{aligned} I_{2,5} &= \frac{bh^3}{12} = \frac{0,5 \cdot 3,5^3}{12} = 1,786 \text{ m}^4 \\ \Rightarrow K_{2,5} &= \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 1,786 \text{ m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2}{4,5^3 \text{ m}^3} = 7996576 \text{ kN/m} \end{aligned}$$



Figur 4.14: Bru med fire spenn.

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,8 \cdot 3,5^3}{12} = 2,86\text{m}^4$$

$$\Rightarrow K_{3,4} = \frac{12EI}{L} = \frac{12 \cdot 2,86\text{m}^4 \cdot 34 \cdot 10^6\text{kN/m}^2}{8^3\text{m}^3} = 2279062,5$$

Egenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{20551277}{2536,7}} = 90\text{rad/s}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{90} = 0,07\text{s}$$

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 8^{\frac{3}{4}} = 0,36\text{s}$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Spekter parametere:

$$S = 1, T_B = 0,15, T_C = 0,4, \text{ og } T_D = 2.$$

Side 34: Formel for respons spekter:

$T_1 = 0,07s \in [0, T_B]$. Riktig formel er fortsatt 3.2.

$$\begin{aligned} S_e(T) &= a_g \cdot S \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 0,68 \cdot 1 \left[1 + \frac{0,07}{0,15} \cdot (1 \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 1,2 \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon: $a_g = 0,68 \text{m/s}^2$.

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,2 \text{m/s}^2}{(89,9)^2} = 0,15 \text{mm}$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 7996576 \text{kN/m} \cdot 0,00015 \text{m} = 1199,5 \text{kN}$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 2279062,5 \text{kN/m} \cdot 0,00015 \text{m} = 341,86 \text{kN}$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 3082,7 \text{kN}$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 1199,5 \text{kN} \cdot 4,5 \text{m} = 5397,7 \text{kNm}$$

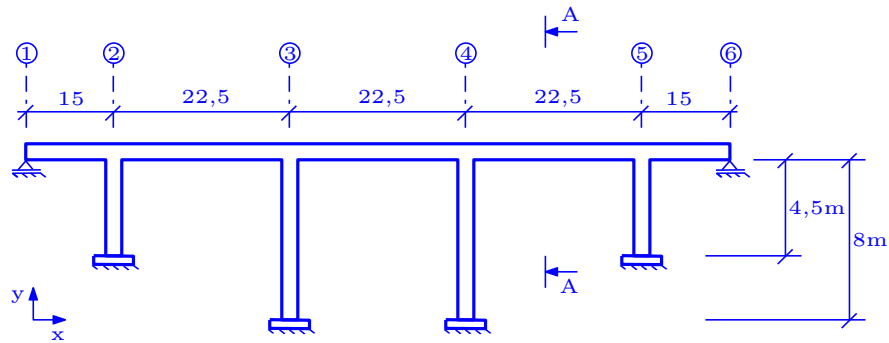
Akse 3 og 4:

$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 341,9 \text{kN} \cdot 8 \text{m} = 2734,9 \text{kNm}$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 16265,1382 \text{kNm}$$

4.3.8 Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 2



Figur 4.15: Bru med fire spenn.

Masse

Samme som i 1.3.2:

Total masse=3766,5t

Stivhet

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = 1,786\text{m}^4$$

$$\Rightarrow K_{2,5} = 7996576\text{kN/m}$$

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = 2,86\text{m}^4$$

$$\Rightarrow K_{3,4} = 2277734\text{kN/m}$$

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{20548621}{3766,5}} = 73,9 \text{ rad/s}$$
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0,085 \text{ s}$$

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 8^{\frac{3}{4}} = 0,36 \text{ s}$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Side 31: Valg av spekter parametere:

Tabell 3.2: $S = 1$, $T_B = 0,15$, $T_C = 0,4$, og $T_D = 2$.

Side 34: Formel for respons spekter:

$T_1 = 0,085 \text{ s} \in [0, T_B]$. Riktig formel er fortsatt 3.2.

$$\begin{aligned} S_e(T) &= a_g \cdot S \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 0,68 \cdot 1 \left[1 + \frac{0,085}{0,15} \cdot (1 \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 1,26 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Dimensjonerende grunnakselerasjon: $a_g = 0,68 \text{ m/s}^2$.

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,26 \text{ m/s}^2}{(73,9)^2} = 0,23 \text{ mm}$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 7996576 \text{ kN/m} \cdot 0,00023 \text{ m} = 1839,21 \text{ kN}$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 2277734 \text{ kN/m} \cdot 0,00023 \text{ m} = 523,9 \text{ kN}$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 4726,2 \text{ kN}$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 1839,21 \text{ kN} \cdot 4,5 \text{ m} = 8276,4 \text{ kNm}$$

Akse 3 og 4:

$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 523,9 \text{ kN} \cdot 8 \text{ m} = 4191 \text{ kNm}$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 24935 \text{ kNm}$$

4.3.9 Forskyvning i z -retning: Studietilfelle 3

Masse

Bru bjelken:

$$m_1 = v \cdot \rho = b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 9,8 \text{ m} \cdot 1,4 \text{ m} \cdot 130 \text{ m} \cdot 2,55 \text{ t/m}^3 = 4548,2 \text{ t}$$

Tilleggsutstyr:

$$m_2 = 28 \text{ kN/m} \cdot l = 28 \text{ t} \cdot \text{m/s}^2 / \text{m} \cdot 130 \text{ m} \cdot \frac{1}{9,81 \text{ m/s}^2} = 371 \text{ t}$$

Medsvingende søylemassen er uendret:

Akse 2 og 5:

$$m_3 = 20,1 \text{ t}$$

Akse 3 og 4:

$$m_4 = 57,1 \text{ t}$$

Total masse=4996,4t

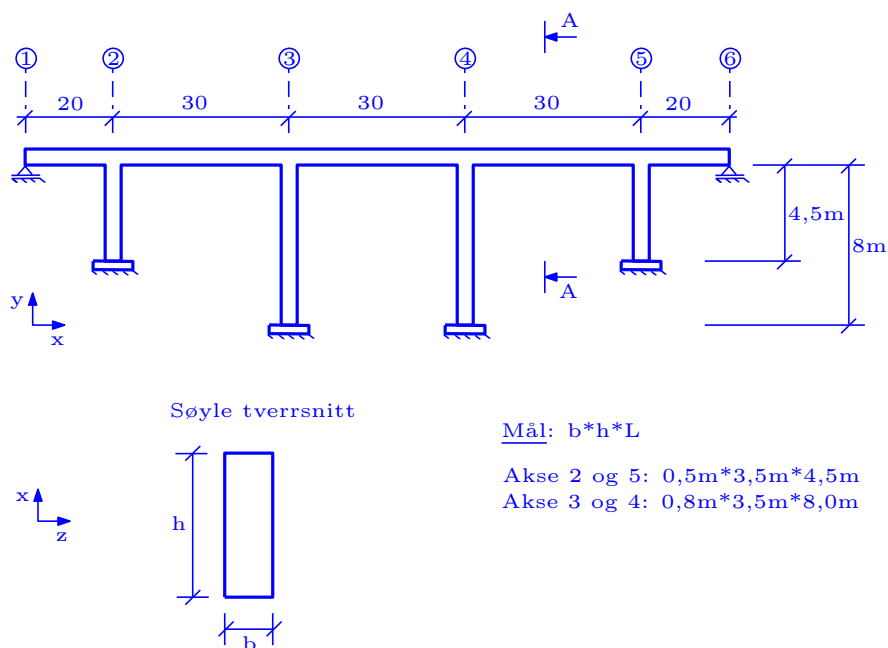
Stivhet

Akse 2 og 5:

$$I_{2,5} = 1,786 \text{ m}^4 \\ \implies K_{2,5} = 7996576 \text{ kN/m}$$

Akse 3 og 4:

$$I_{3,4} = 2,86 \text{ m}^4 \\ \implies K_{3,4} = 2277734 \text{ kN/m}$$



Figur 4.16: Bru med fire spenn.

Eigenfrekvens, egenperiode

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2(K_{2,5} + K_{3,4})}{m}} = \sqrt{\frac{20548621}{4996,4}} = 64,1 \text{ rad/s}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0,1 \text{ s}$$

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot 8^{\frac{3}{4}} = 0,36 \text{ s}$$

Horisontalt responspekter etter NS EN-1998-1

Side 31: Valg av spekter parametere:

Tabell 3.2: Grunntype A, gir: $S = 1$, $T_B = 0,15$, $T_C = 0,4$, og $T_D = 2$.

Side 34: Formel for respons spekter:

$T_1 = 0, 1s \in [0, T_B]$. Riktig formel er fortsatt 3.2.

$$\begin{aligned} S_e(T) &= a_g \cdot S \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 0,68 \cdot 1 \left[1 + \frac{0,1}{0,15} \cdot (1 \cdot 2,5 - 1) \right] \\ &= 1,36\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Side 30: Dimensjonerende grunnakselerasjon:

$$a_g = 0,68\text{m/s}^2$$

Uendret.

Beregning

- **Maksimal respons** (forskyvning):

$$x_{\max} = \frac{S_e(T)}{\omega_n^2} = \frac{1,36\text{m/s}^2}{(64)^2} = 0,33\text{mm}$$

- **Maks skjærkraft per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$F_{\max_{2,5}} = K_{2,5} \cdot x_{\max} = 7996576\text{kN/m} \cdot 0,00033\text{m} = 2638,9\text{kN}$$

Akse 3 og 4:

$$F_{\max_{3,4}} = K_{3,4} \cdot x_{\max} = 2277734\text{kN/m} \cdot 0,00033\text{m} = 751,65\text{kN}$$

Maks skjærkraft for tilfellet:

$$F_{\max} = 2 \cdot (F_{\max_{2,5}} + F_{\max_{3,4}}) = 6781\text{kN}$$

- **Maksimal bøyemoment per søyle:**

Akse 2 og 5:

$$M_{\max_{2,5}} = F_{\max_{2,5}} \cdot h_{2,5} = 2638,9\text{kN} \cdot 4,5\text{m} = 11875\text{kNm}$$

Akse 3 og 4:

$$M_{\max_{3,4}} = F_{\max_{3,4}} \cdot h_{3,4} = 751,65\text{kN} \cdot 8\text{m} = 6013,2\text{kNm}$$

Maks bøyemoment for tilfellet:

$$M_{\max} = 2 \cdot (M_{\max_{2,5}} + M_{\max_{3,4}}) = 35776,3\text{kNm}$$

4.4 Oppsummering av resultater

Endring søylelengde (bruhøyde)

Tilfelle	Total Høyde	Endringsfaktor
1	5m	1
2	8m	1,6
3	12m	2,4

Endring brulengde

Tilfelle	Total Høyde	Endringsfaktor
1	65m	1
2	95m	$\simeq 1,5$
3	130m	2

1. Høydeendring: Forskyvning om svak akse (x -retning)

Tilf.	Masse [tonn]	Økn.	Respons [mm]	F_{max} [mm]	Økn.	M_{max} [kN]	Økn.
1	4968,3	0%	4,1	8511	0%	33508	0%
2	5018,7	1%	6,2	8518,6	0,1%	48709	61,6%
3	5127,2	3,2%	8,8	6806,6	-20%	59697,5	91%

2. Høydeendring: Vertikal forskyvning (y -retning)

Maks vardier

Tilf.	Masse [tonn]	Økn.	Respons [mm]	Økn.	M_{max} [kN]	Økningsfaktor
1	4968,3	0%	1,4	0%	1163	-
2	5018,7	1%	1,4	0%	1163	-
3	5127,2	3,2%	1,4	0%	1163	-

3. Høydeendring: Forskyvning om sterk akse (z -retning)

Tilf.	Masse [tonn]	Økn.	Respons [mm]	F_{max} [kN]	Økn.	M_{max} [kNm]	Økningsfaktor
1	4968,3	0%	0,07	5157,9	0%	18125	1
2	5018,7	1%	0,22	6180	22,1%	32194,2	2
3	5127,2	3,2%	0,56	7727,5	50%	62554,8	3,6

4. Lengdeendring: Forskyvning om svak akse (x -retning)

Tilf.	Masse [tonn]	Økning	Respons [mm]	F_{max} [kN]	M_{max} [kNm]	Økning
1	2536,7	0%	7,7	1258,4	23594	0%
2	3766,5	48%	9	5078,8	300335	16%
3	4996,5	97%	10	5646	33705,7	54%

5. Lengdeendring: Vertikal forskyvning (y -retning)

Maks vardier

Tilf.	Masse [tonn]	Økning	Respons [mm]	M_{max} [kNm]	Økningsfaktor
1	2536,7	0%	0,22	741,7	1
2	3766,5	48%	0,76	1130,1	1,5
3	4996,5	97%	1,4	1163,1	1,6

6. Lengdeendring: Forskyvning om sterk akse (z -retning)

Tilf.	Masse [tonn]	Økning	Respons [mm]	F_{max} [kN]	M_{max} [kNm]	Økningsfaktor
1	2536,7	0%	0,15	3082,7	16265,1	1
2	3766,5	48%	0,23	4726,2	24935	1,56
3	4996,5	97%	0,33	6781	35776,3	2,2

4.5 Konklusjon

Her er noen av de viktigste observasjoner om forsøket med forenklet jord-skjelvberging:

- Tabell 1 og 5 viser at de største påkjenninger, spesielt moment, oppnås om bruas svak akse (x -aksen i dette tilfelle). Påkjenningene er forholdsvis ubetydelige i vertikal retning.
Statens Vegvesen håndbok 185 gir imidlertid retningslinjer for å kombinere virkning laster i alle tre retninger og bruke den største kombinasjon som dimensjonerende.
- **Massen** er nesten konstant under hele analyse med høyde endring, selv om det er tatt med 50% av søylemasse. Tabel 1-3 viser at fordobling av bruhøyden medfører en masse økning på knapt 3%.
Dette støtter forenklingen om at all masse er konsentrert i brubjelken (se også Appendix D.0.1: Forutsetninger), mens kun stivheten er interessant hos søyler.
- I NS-EN 1998-1 side 45 er det oppgitt en forenklet formel for å beregne egenperiode. Denne er funksjon av byggets høyde, og en konstant som har med material å gjøre.

Analysen viser at denne formelen stemmer ganske bra når man betrakter svak akse (x -retning), men ikke sterk akse (z -retning), der avvirket ble ganske stort mellom den og beregnet egenfrekvens.

Jeg konkluderer dermed at denne formelen ikke egner seg for beregning av bruer, hvor man veldig ofte har ikke-uniforme søyler.

Denne formelen gir et akseptabelt estimat av egenfrekvens for idealiserte etasjebygninger (se Tillegg D.0.4 Kontroll), men i dette arbeid er det presentert en enkel metode for å beregne egenfrekvens eksakt, slik at man egentlig ikke trenger å bruke denne formelen verken for bruer eller for idealiserte etasjebygg.

- Det er heller ikke lurt å prøve å beregne maks skjærkraft ved Newton's lov: $V_{max} = m \times S_e(T)$, der m er masse og $S_e(T)$ er grunn akselerasjonen. Denne metoden sier ikke noe om fordeling av skjærkreftene på søylene. Denne vil, i tillegg, gi resultater som avviker noe med den mer detaljerte beregningen, noe analysene i 4.2.1, 4.2.2 og 4.2.3 viser.
For bruer er en nødt til å beregne mer nøye ved å betrakte hver søyle for seg, og operere med søylestivheten og bruas maks respons x_{maks} slik det ble gjort i dette arbeid.

Kapittel 5

Studie 2: Beregning av Sandsfjordbrua ved full dynamisk analyse

5.1 Sandsfjordbrua

Sandsfjordbrua er en betongbru av type “Fritt frambygg” (FFB-Bru), Vegdirektoratets betegnelse for bruer der søyler anlegges først, dermed bru bjelken bygges ut på hver side av søyle samtidig, slik at det er moment likevekt om pilaren hele tiden.

Dette er type bru som man har god erfaring med i Norge; den første slik bru i Norge er Tromsø bru som ble ferdigbygd allerede i 1960.

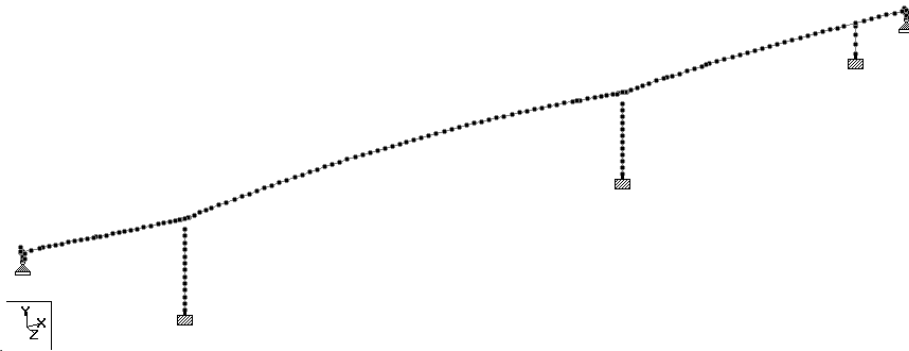
Sandsfjordbrua er under anlegg i Soldal kommune i Rogaland. Den skal ha fire spenn, derav hovedspenn på 290m. Maks høyde er på m . Brua er av typen som ikke bør jordskjelvanalyseres ved forenklet metode.

Brua var allerede beregnet ved hjelp av verktøyet NovaFrame, og jeg fikk en inputfil med geometri og mekaniske og material data, som jeg skulle programmere i Staad Pro, for så å sammenligne resultatene fra de to programvarene.

Modellen er av type “Bjelkemodell” der bru elementer modeleres som bjelker. Brua får akkurat samme mekaniske egenskaper som en eventuell “Platemodell”, så klart, men den mangler det 3-dimensjonelle visualingseffekt (se figur 4.6) .



Figur 5.1: *Belligenhet av Sandfjordbru.*



Figur 5.2: *Bjelmmodell av Sandfjordbrua.*

5.2 Sammenligning av modellene uten jordskjelvlast

Som en del av kvalitetssikring, sammenlignes modellene først med kun egenlast og permanent last. Ser det bra ut, kan man gå videre med jordskjelvberegning.

- **Egenlast:** I Staad Pro ble både permanent og egenvekt lagt i samme lasttilfeller, dermed vises totalen samlet. Totalt: $261350kN$. I Nova Frame er lastene definert hver for seg. Koordinatsystemet er annerledes også, derfor er den limt inn for bedre oversikt. Total last: $261314kN$.
- **Forskyvning:** Staad pro viser forskyvning på $1047mm$ på element 3200. Nova Frame viser forskyvning på $1045mm$ på element 3200. Glimrende!

1: DEAD&LIVE LOADS

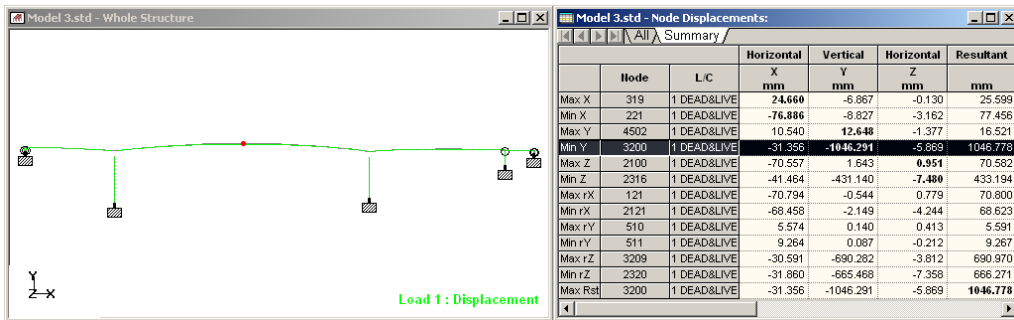
L/C		Fx kN	Fy kN	Fz kN	Mx kNm	My kNm	Mz kNm
1	Loads	-0.000	-261.34978E3	0.000	4.29584E6	-0.001	-77.50821E6
	Reactions	0.000	261.34978E3	-0.000	-4.29584E6	0.001	77.50821E6
	Difference	-0.000	-0.000	0.000	0.001	-0.000	0.029

Figur 5.3: Egenlast Staad Pro.

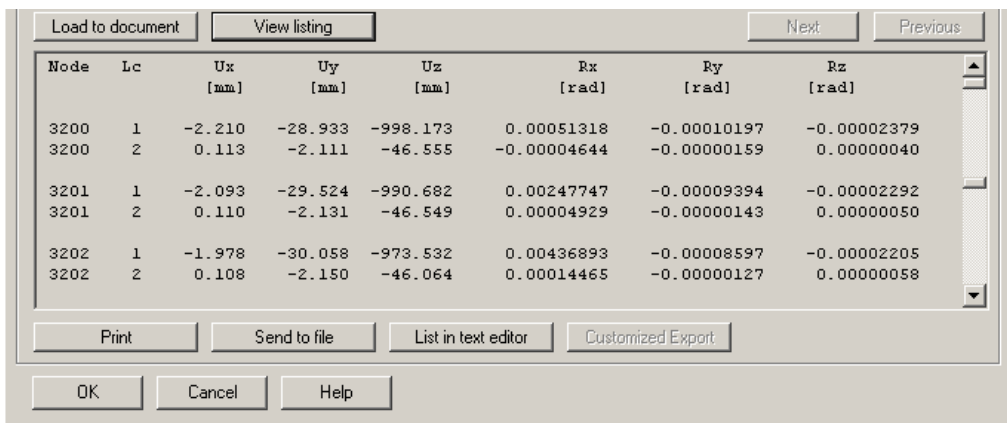
Lc		PX [kN]	PY [kN]	PZ [kN]
1	Sum applied loads	-0.01	0.00	-254838.47
	Sum reaction forces	0.01	-0.00	254838.47
2	Sum applied loads	-0.00	0.00	-6475.56
	Sum reaction forces	0.00	-0.00	6475.56

Figur 5.4: Egenlast Nova Frame.

- **Momenter og opplagerkrefter:** Nova Frame viser påkjenningene hver last for seg. Tabelene under viser en oppsummering av påkjenninger fra begge programmer.

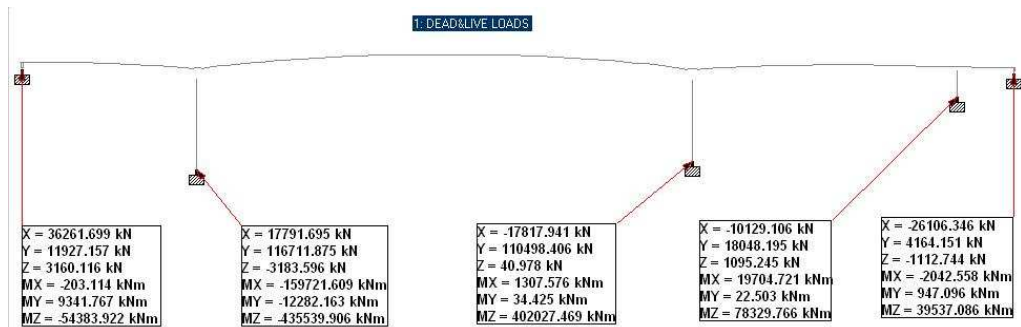


Figur 5.5: Forskyvning Staad Pro.

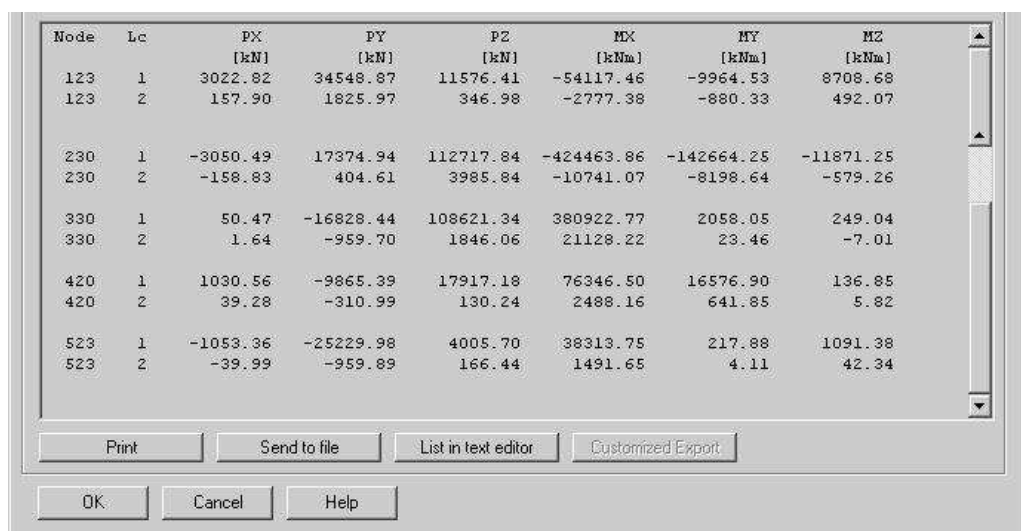


Figur 5.6: Forskyvning Nova Frame.

Node →	123		230		330	
Påkj. ↓	Nova	Staad	Nova	Staad	Nova	Staad
F_x [kN]	36374,8	36261,7	17779,5	17791,7	-17788	-17818
F_y [kN]	11923,39	11927,2	116712	17791,7	110467,4	110498,4
F_z [kN]	3180,72	3160,12	-3209,32	-3183,6	52,11	40,98
M_x [kNm]	-10844,9	-203,1	-150862,9	-159722	2081,51	1307,6
M_y [kNm]	9200,75	9200,75	-12450,51	-12282	242,03	34,4
M_z [kNm]	-56894,8	-54384	-435205	-435540	402051	402027,5



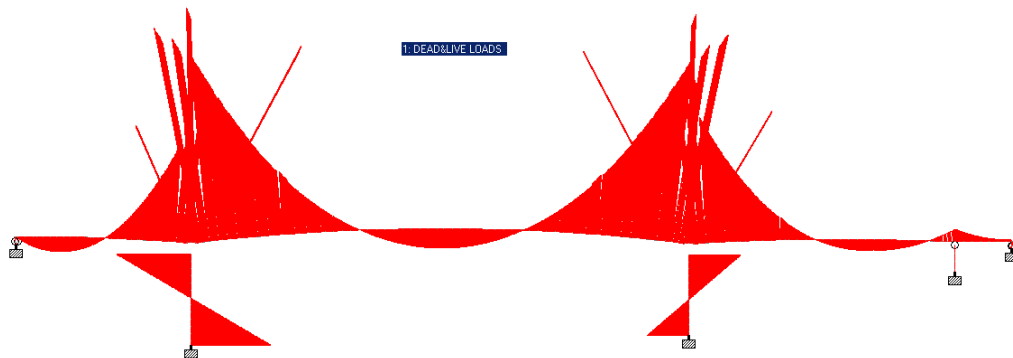
Figur 5.7: Opplagerkrefter og momenter Staad Pro.



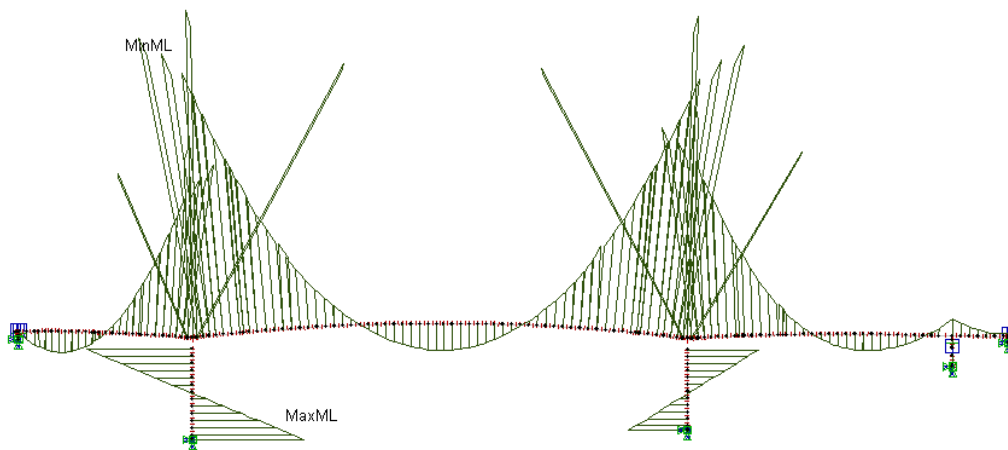
Figur 5.8: Opplagerkrefter og momenter Nova Frame.

Node →	420		523	
Påkj. ↓	Nova	Staad	Nova	Staad
F_x [kN]	-10176,4	-10129,1	-26189,87	-26106,3
F_y [kN]	18047,42	18048,2	4172,14	4164,151
F_z [kN]	1069,84	1095,3	-1093,35	-1112,74
M_x [kNm]	17218,75	19704,7	221,99	-2042,6
M_y [kNm]	142,67	22,503	-12450,51	-12282
M_z [kNm]	78834,66	78329,8	39805,4	39537,1

Resultatene er stortsett like, med samme fortegn, med noen få men betydelige avvik.



Figur 5.9: *Momentdiagram Staad Pro.*



Figur 5.10: *Momentdiagram Nova Frame.*

5.3 Jordskjelvberregning

Grunn akselerasjon

Utgangspunkt i NS EN-1998-1.

Side 30: Dimensjonerende grunnakselerasjon:

$$a_g = \gamma_1 \cdot a_{gR}$$

Side 42: Seismiske klasser:

Velger seismisk klasse II, og dermed $\gamma_1 = 1$.

Side 3 i tillegget: Seismiske soner:

Soldal kommune ligger ved cirka: $a_{g40Hz} = 0,52s$

$$a_{gR} = 0,8 \cdot a_{g40Hz} = 0,8 \cdot 0,52 = 0,42m/s^2$$

Dermed er grunnakselerasjonen:

$$a_g = \gamma_1 \cdot a_{gR} = 1 \cdot 0,42m/s^2 = 0,42m/s^2$$

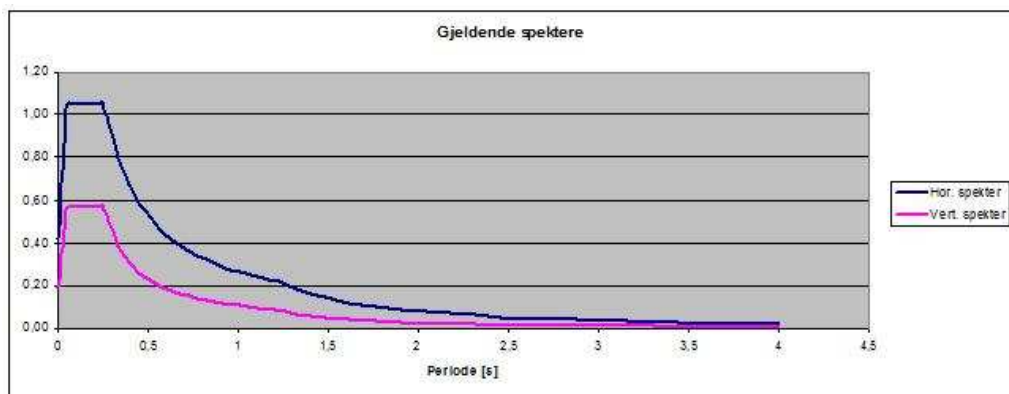
Horizontal og Vertikal Respons spektrum

Staad Pro aksepterer jordskjelvddata i form av periode T mot tilsvarende spektrum $S_e(T)$.

I NS-EN 1998-1, side 30 er det gitt retningslinjer for å beregne disse verdier med tanke på både horizontal og vertikal respons. I kapittel fire drev mann med forenklet en frihetsgrad. Her er det frihetsgrad, derfor ble en hel serie med egenperioder og egenmoder beregnet ved hjelp av Excell ark.

Begge spektrum, for horizontal og vertikal for grunnakselerasjon $a_g = 0,42m/s^2$ er figur 5.11.

De respektive data er innsatt på riktig plass i input fila (se for eksempel



Figur 5.11: Beregnet elastisk spektrum.

side 148, Tillegg G).

Valg av summeringsmetode

Staad Pro vil summere bidraget fra alle moder til den globale responsen, etter CQC eller SRSS-metoder. Metodene er nærmere beskrevet i Håndbok 185, side 147.

Figur 5.12 viser noen av de svingemoder til Sandsfjordbrua. Vi velger to

Model 3.std - Frequencies & Mass Participations					
Mode	Frequency Hz	Period seconds	Participation X %	Participation Y %	Participation Z %
7	1.141	0.877	23.896	6.903	0.000
8	1.242	0.805	34.713	2.038	0.022
9	1.452	0.689	0.000	0.000	0.175
10	1.694	0.590	1.349	0.181	0.002
11	2.024	0.494	0.003	0.018	0.080
12	2.184	0.458	1.763	19.229	0.000
13	2.639	0.379	0.003	0.000	0.287
14	2.734	0.366	0.048	1.923	0.001
15	2.926	0.342	2.294	3.862	0.001
16	3.250	0.308	0.064	0.019	0.001
17	3.372	0.297	0.003	0.000	0.290
18	4.186	0.239	0.001	0.001	1.210
19	4.222	0.234	0.045	6.404	0.000

Figur 5.12: Beregnet elastisk spektrum.

vilkårlige etterfølgende egenperioder, og gjør testen for å bestemme hvilken summeringsmetoden skal brukes. Velger τ_{n7} og τ_{n8} .

$$\frac{\tau_{n7}}{\tau_{n8}} > \frac{0,1}{0,1 + \xi} \implies \frac{0,877}{0,805} > \frac{0,1}{0,1 + 0,05} \implies 1,09 > 0,67$$

Kvalitetssikrer med τ_{n15} og τ_{n16} .

$$\frac{\tau_{n15}}{\tau_{n16}} = \frac{0,342}{0,308} = 1,11 > 0,67$$

Det betyr CQC.

Alle data settes i inputfila. Jordskjelvanalyse kjøres for alle tre retninger. Resultatene kombineres etter reglene på side 148 i Håndboka. Den komplette inputfila for Sandsjorfbu finnes i Tillegg G.

5.4 Resultater og konklusjon

Figur 5.13 viser oppnådde resultater for de to ugunstigste kombinasjoner. Den ugunstigste kombinasjonen gir en Respons på 148mm.

Modellen som jeg sammenligner med hadde respons på ca. 90mm, det betyr avvik på cirka 60mm.

11: COMBINATION LOAD CASE 11							13: COMBINATION LOAD CASE 13						
Model 3.std - Node Displacements: Summary							Model 3.std - Node Displacements: Summary						
	Node	L.C	Horizontal X mm	Vertical Y mm	Horizontal Z mm	Resultant mm		Node	L.C	Horizontal X mm	Vertical Y mm	Horizontal Z mm	Resultant mm
Max X	121	11 COMBINAT	53.152	0.539	1.446	53.175	Max X	121	13 COMBINAT	29.820	1.446	2.251	29.940
Min X	123	11 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000	Min X	123	13 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000
Max Y	2321	11 COMBINAT	45.308	119.779	41.140	134.508	Max Y	2322	13 COMBINAT	15.946	46.197	126.706	135.805
Min Y	123	11 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000	Min Y	123	13 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000
Max Z	2329	11 COMBINAT	42.534	80.810	45.475	102.016	Max Z	3200	13 COMBINAT	14.965	32.368	143.603	147.969
Min Z	123	11 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000	Min Z	123	13 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000
Max rX	413	11 COMBINAT	28.157	0.195	3.690	28.398	Max rX	3405	13 COMBINAT	12.373	11.179	99.499	100.887
Min rX	123	11 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000	Min rX	123	13 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000
Max rY	510	11 COMBINAT	16.080	0.448	1.185	16.130	Max rY	3426	13 COMBINAT	10.598	28.529	61.585	68.694
Min rY	123	11 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000	Min rY	123	13 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000
Max rZ	2329	11 COMBINAT	42.534	80.810	45.475	102.016	Max rZ	2329	13 COMBINAT	15.065	33.260	143.282	147.865
Min rZ	123	11 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000	Min rZ	123	13 COMBINAT	0.000	0.000	0.000	0.000
Max Rst	2322	11 COMBINAT	44.998	119.678	42.182	134.636	Max Rst	3200	13 COMBINAT	14.965	32.368	143.603	147.969

Figur 5.13: Respons fra de to ugunstigste kombinasjoner.

De to modellene ble sammenlignet med kun egenlast, og resultatene så ut til å stemte ganske bra. Når så jordskjelvresultater viser et slikt stort avvik, er det kun to ting jeg kan tenke meg som kan være årsak til dette:

1. **Jordskjelvanalyse:** Avviket kan skyldes at Nova Frame bruker innebygd spektrum, mens jeg har laget eget spektrum basert på grunnakselerasjonen som jeg har beregnet.
I “den virkelige verden” hadde jeg satt meg grundig i Nova Frame, og prøvd å forstå grunnlaget for spektrumet som er innebygd, og sammenlignet det med den som jeg har beregnet selv.
2. Gitt at spektrumene er riktige, en annen ting som kan gjøre at en model får mer forskyvning enn en annen er **stivhet**. Det er tre måneder siden jeg begynte på dette arbeid. Helt fra begynnelsen fikk jeg beskjed at brua var under prosjektering, og at endringer forekom hele tiden.
Responsen som jeg sammenligner med er gjeldende nå, mens data som jeg opererer med er fra 3 måneder siden.
Løsning på det, hadde vart å gjennomgå nåværende modell, sammenligne med den jeg mottok for tre måneder siden, og se om det er noen elementer som har fått tildelt for eksempel andre E -moduler.

— SLUTT —

Bibliografi

- [1] *Bibelen*, Det Norske Bibelselskapet (2008)
- [2] www.wikipedia.org: *John T. Wilson*
- [3] Pascal Bernard: *Qu'est-ce qui fait trembler la terre?*, EDP Sciences (2003)
- [4] Edward J. Tarbuck, Frederick K. Lutgens: *Earth Science*, 8th Edition, Prantice Hall, Inc. (1997)
- [5] Anil K. Chopra: *Dynamics of structures*, 3rd Edition, Pearson Prentice Hall (2007)
- [6] Jacques Betbeder-Matibet: *Génie parasismique*, Vol.I, II & III, 3rd, Hermes Science/Lavoisier (2003)
- [7] www.suu.edu/faculty/colberg/Hazards/Earthquakes/Earthquake.SG.html
- [8] *Physics in Canada*, Vol.56, No.2 (March/April 2000)
- [9] <http://www.science.ca/scientists/scientistprofile.php?pID=232>
- [10] Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, Robert J. Witt: *Concepts and application of finite element analysis*, 4th Edition, John Wiley&sons Inc.(2002)
- [11] William E. Boyce, Richard C. DiPrima: *Elementary Differential equations and boundary Value problems*, 8th Edition, John Wiley&sons Inc.(2005)
- [12] Ray W. Clough, Joseph Penzien: *Dynamics of Structures*, 2nd Edition, McGraw Hill, Inc, (1993)
- [13] Statens Vegvesen, Vegdirektoratet, Bruavdelingen, Rapport 2000-09: *Veiledning i jordskjelv analyse av bruer*, (2000)

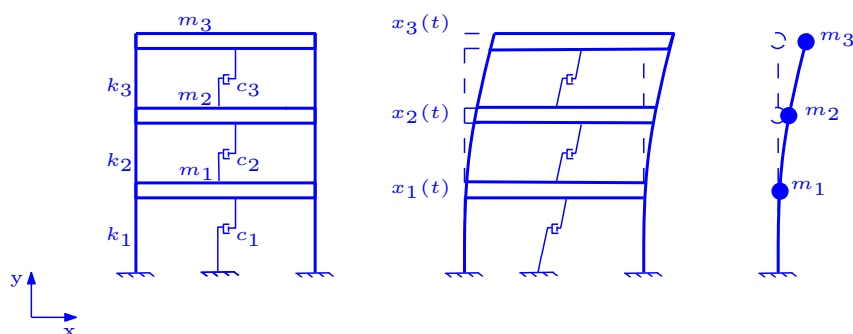
- [14] Knut Røhne, Kjell Vangestad: *Betong konstruksjoner: Prosjektering*
Utgave 1, Gyldendal (2001)
- [15] *Forelesningsnotater* til professor Shaoping Xiao, Universitet i Iowa,
tilgjengelig på ”<http://www.engineering.uiowa.edu/~sxiao/>”, lastet ned
april 2011.

Tillegg A

Svingelingning for etasjebygg

Vi tenker oss et idealisert etasjebygg på tre etasjer slik som i figur 2.6. En måte bygget kan deformeres på (en svingemode) er visst, samt forenklet framstilling av denne.

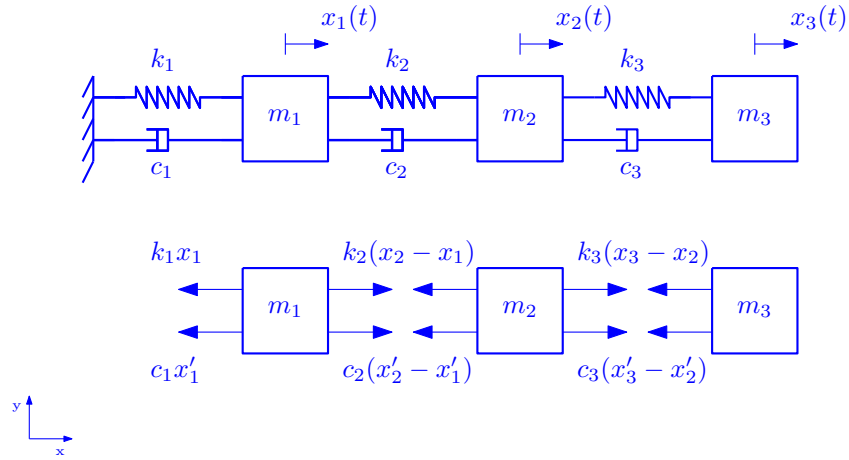
Idealisert i dette tilfelle betyr at mange detaljer er utelatt, slik som rotasjon i knutepunkter, masser til søylene, aksial deformasjoner. Se Tillegg D.0.1 Forutsetninger, som viser typiske antagelser som foretas, ved idealisering av “vanlig” etasjebygg.



Figur A.1: Et system med flere frihetsgrader.

Bygget er påført dynamiske laster $P(t)$ i hver etasje. Disse gir en forskyvning $x(t)$, og det er stivheten k til søylene som hindrer bygget til å ramle helt. Bygget kan modelleres som et fjærsystem, slik som figur 2.7 viser. Frakoblingsdiagram er også vist.

Samme prosedyre som Kapittel 2.2.1 følges her også, og man betrakter statisk likevekt av hver frakoblet masse. Dette fører til tre svingelinger:



Figur A.2: Modell og frakobling.

$$\begin{aligned} \sum F_1 = 0 &\implies -k_1x_1 - c_1x_1' + k_2(x_2 - x_1) + c_2(x_2' - x_1') = 0 \\ \sum F_2 = 0 &\implies -k_2(x_2 - x_1) - c_2(x_2' - x_1') + k_3(x_3 - x_2) + c_3(x_3' - x_2') = 0 \\ \sum F_3 = 0 &\implies -k_3(x_3 - x_2) - c_3(x_3' - x_2') = 0 \end{aligned}$$

Stivheter k_1 , k_2 og k_3 er uttrykk for stivhet fra begge søyler i hver etasje. Innførings av Newton's andre lov (likning 2.2):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} m_1x_1'' = -k_1x_1 - c_1x_1' + k_2(x_2 - x_1) + c_2(x_2' - x_1') \\ m_2x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(x_2' - x_1') + k_3(x_3 - x_2) + c_3(x_3' - x_2') \\ m_3x_3'' = -k_3(x_3 - x_2) - c_3(x_3' - x_2') \end{cases} \\ \implies &\begin{cases} m_1x_1'' + (c_1 + c_2)x_1' - c_2x_2' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2x_2'' - c_2x_1' + (c_2 + c_3)x_2' - c_3x_3' - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = 0 \\ m_3x_3'' - c_3x_2' + c_3x_3' - k_3x_2 + k_3x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dette kan skrives på matriseform:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}}_{[m]} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{Bmatrix}}_{\{x''\}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{[c]} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix}}_{\{x'\}} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}_{[k]} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}}_{\{x\}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

eller på generell form:

$$[m]\{x''\} + [c]\{x'\} + [k]\{x\} = [0] \quad (\text{A.2})$$

, der $[m]$, $[c]$ og $[k]$ er henholdsvis masse- demping- og stivhetsmatriser, mens $\{x''(t)\}$, $\{x'(t)\}$ og $\{x(t)\}$ er henholdsvis akselerasjon, hastighet og forskyvnings vektorer.

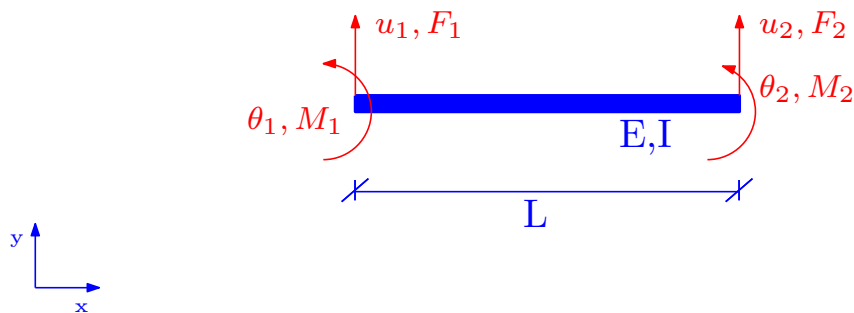
Tillegg B

Stivhet for en dobbelt innspent bjelke/søyle

Det er forskjellige måter å framstille ligning 2.46 på.

Velger å bruke en metode som har sitt opphav i faget Elementmetode (Finite Element Analysis). Detaljer om de forskjellige begreper finnes i kilde [10].

Tenker et bjelke element med elastisitetsmodul E og annen arealmoment I , slik som vist i figur B.1.



Figur B.1: Et bjelke element.

Elementet er fast innspent i begge ender: den kan ta opp momenter og krefter i hver ende. Vi har da totalt 4 frihetsgrader (rotasjon og forskyvning) i hver ende (aksial deformasjon ses bortifra).

Vi tenker oss at forskyvningen u varierer over bjelkens lengde:

$$u = u(x) \tag{B.1}$$

der $x \in [0, L]$

Videre er rotasjonen gitt ved:

$$\theta(x) = \frac{du}{dx} \quad (\text{B.2})$$

Forskyvningsmatrisen er gitt ved:

$$\begin{aligned} [u] &= [u_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad \theta_2]^T \quad , \text{innsatt (1) og (2) gir:} \\ &= \left[u_1(x) \quad \frac{du_1(x)}{dx} \quad u_2(x) \quad \frac{du_2(x)}{dx} \right]^T \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Forskyvningen $u(x)$ kan skrives som en tredjegradsfunksjon (fjerdegrads egentlig, men vi ser bort fra aksial deformasjon) slik:

$$\begin{aligned} u(x) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ \implies \theta(x) &= \frac{du(x)}{dx} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Innsatt i (3) gir:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Nå ser vi nærmere på figur 1, og noterer at $x_1 = 0$ og $x_2 = L$.

Innsatt gir:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}}_{\text{denne kalles A-matrise}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Vi introduserer form funksjoner N definert slik:

$$[N] = [A]^{-1}[x] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (\text{B.6})$$

, der $[A]$ er slik som definert i ligning (5) og $[x] = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]$. Enkel matrise manipulasjon skal kunne gi:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & N_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3(x) &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & N_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Nå introduserer vi **Strain displacement matrix** $[B]$ definert som:

$$[B] = \frac{d^2[N]}{dx^2} \quad (\text{B.8})$$

Enkel derivasjon i (7) gir:

$$[B] = \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \quad (\text{B.9})$$

Nå introduserer vi uttrykket for stivhet:

$$[k] = EI \int_0^L [B]^T [B] dx \quad (\text{B.10})$$

Elementær matrise manipulasjon og triviell integrasjon skal gi stivhetsmatrise for bjelke elementet slik som definert i figur 1:

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

I forutsetningene våre har vi bestemt å se bortifra rotasjon (forutsetning 7 i 2.4.1 Forutsetninger). Det betyr at kolonne 2 og 4 samt rad 2 og 4 forsvinner. Da får vi:

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \implies k = 12 \frac{EI}{L^3}$$

QUI

ERA

DEMONSTRANDUM

Tillegg C

Utleddning av modale ligninger

Dempet svingeligninger, slik som ligning 2.25:

$$[m]\{x''\} + [c]\{x'\} + [k]\{x\} = \{f(t)\}$$

lar seg ikke frakoble i modale ligninger, dette på grunn av at dempingmatrise $[c]$ ikke respekterer orthogonalitet (ligning 2.35). Hvorfor $[c]$ oppfører seg slik, er ingen tema for dette arbeid, men to oppslagsverk viser hvordan mann kan unngå dette, og klare likevel å komme fram til modale ligninger:

$$\sum_{i=1}^N v_i''(t) + 2\xi_i \omega_{n_i} v_i'(t) + \omega_{n_i}^2 v_i(t) = \frac{1}{M_i} F_i(t)$$

der N er antall frihetsgrader.

Kilde [12] side 223 foreslår rett og slett å anta at $[c]$ respekterer ortogonalitet, og gå videre med utledningen.

[15] viser en annen metode. Foreslår å snikke seg unna, ved å finne to konstanter α og φ som muliggjør å skrive $[c]$ som en kombinasjon av masse og svivhetsmatriser: $[c] = \alpha[m] + \varphi[k]$.

Innsatt i 2.25 gir:

$$[m]\{x''\} + (\alpha[m] + \varphi[k])\{x'\} + [k]\{x\} = \{f(t)\} \quad (\text{C.1})$$

Løsning av C.1 kan skrives som en linear kombinasjon av moder ϕ_i , $i \in [1, 3]$ ganger med $v_i(t)$, $i \in [1, n]$ [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= v_1(t)\phi_1 + v_2(t)\phi_2 + \dots + v_n(t)\phi_n \\ &= \Phi \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{x}'(t) &= \Phi \mathbf{v}'(t) \\ \mathbf{x}''(t) &= \Phi \mathbf{v}''(t) \end{aligned}$$

Mode matrisen Φ er en konstant matrise (ligninger 2.33 og 2.34), og dermed deriveres ikke.

Innsatt i C.1 gir:

$$\begin{aligned} & [m]\Phi v'' + (\alpha\{m\} + \varphi\{k\})\Phi v' + [k]\Phi v = \{F(t)\} \\ \implies & \Phi^T [m]\Phi v'' + \Phi^T (\alpha\{m\} + \Phi^T \varphi\{k\})\Phi v' + \Phi^T [k]\Phi v = \Phi^T \{f(t)\} \end{aligned} \quad (C.2)$$

Ser nærmere på uttrykket $\Phi^T [m]\Phi$ i C.2.

For enkelthetsskyld og bedre synlighet, velges det tre frihetsgrader til videre drøftelse. Generalisering blir gjort til slutt.

Det antas at moder er beregnet (ligning 2.33) og er lik:

$$\begin{aligned} \Phi &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] = \begin{bmatrix} \phi & \phi & \phi \\ a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \\ \implies \Phi^T &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^T \\ \phi^T \\ \phi^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (C.3)$$

Innsatt gir:

$$\begin{aligned} \Phi^T [m]\Phi &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi^T \\ \phi^T \\ \phi^T \end{bmatrix} [m] [\phi \quad \phi \quad \phi] = \begin{bmatrix} \phi^T \\ \phi^T \\ \phi^T \end{bmatrix} m [\phi \quad \phi \quad \phi] \\ &= \begin{bmatrix} \phi^T m \\ \phi^T m \\ \phi^T m \end{bmatrix} [\phi \quad \phi \quad \phi] = \begin{bmatrix} \phi^T m \phi & \phi^T m \phi & \phi^T m \phi \\ \phi^T m \phi & \phi^T m \phi & \phi^T m \phi \\ \phi^T m \phi & \phi^T m \phi & \phi^T m \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1^T m \phi_1 & \phi_1^T m \phi_2 & \phi_1^T m \phi_3 \\ \phi_2^T m \phi_1 & \phi_2^T m \phi_2 & \phi_2^T m \phi_3 \\ \phi_3^T m \phi_1 & \phi_3^T m \phi_2 & \phi_3^T m \phi_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Innfører orthogonalitet (ligning 2.34):

$$= \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

Samme prosess vil gi, fra ligning C.2:

$$\Phi^T[k]\Phi = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Fra ligning C.3:

$$\begin{aligned} (\alpha\{m\} + \varphi\{k\}) &= \alpha\Phi^T\{m\}\Phi + \varphi\Phi^T\{k\}\Phi \\ &= \alpha \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

der M_i og K_i er henholdsvis modale- masse og stivheter som hører til de respektive egenvektorer ϕ_i .

Høyre uttrykk i C.2:

$$\Phi^T\{f(t)\} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_n]^T \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = \Phi^T \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (\text{C.7})$$

For i -te frihetsgrad blir dette: $F_i(t) = \phi_i^T f_i(t)$ Innføring av C.5, C.6 og C.7 i C.3, og generalisering gir:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1'' \\ v_2'' \\ \vdots \\ v_n'' \end{Bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{Bmatrix} \\ \varphi & \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Denne kan nå frakobles i n -selvstendige ligninger:

$$\begin{aligned} M_i v_i'' + (\alpha M_i + \varphi K_i) v_i' + K_i v_i &= F_i \\ v_i'' + \left(\frac{\alpha M_i + \varphi K_i}{M_i} \right) v_i' + \frac{K_i}{M_i} v_i &= \frac{F_i}{M_i} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Fra [12] side 213: Ligning 2.29 kan også skrives med hensyn på moder:

$$\begin{aligned}
 [-\omega_{n_i}^2 [\mathbf{m}] + [\mathbf{k}]] \mathbb{X}^i = \{0\} &\equiv [-\omega_{n_i}^2 [\mathbf{m}] + [\mathbf{k}]] \boldsymbol{\phi}_i = \{0\} \\
 \implies [\mathbf{k}] \boldsymbol{\phi}_i = \omega_{n_i}^2 [\mathbf{m}] \boldsymbol{\phi}_i &\implies \boldsymbol{\phi}_i^T [\mathbf{k}] \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \omega_{n_i}^2 [\mathbf{m}] \boldsymbol{\phi}_i \\
 \implies K_i = \omega_{n_i}^2 M_i &\implies \omega_{n_i}^2 = \frac{K_i}{M_i}
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

Innsatt i C.8 gir:

$$\begin{aligned}
 M_i v_i'' + (\alpha M_i + \varphi K_i) v_i' + K_i v_i &= F_i \\
 v_i'' + \left(\frac{\alpha M_i + \varphi K_i}{M_i} \right) v_i' + \omega_{n_i}^2 v_i &= \frac{F_i}{M_i}
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

[15] sier at:

$$\frac{\alpha M_i + \varphi K_i}{M_i} \equiv 2\xi_i \omega_{n_i}$$

De to konstantene α og φ kan bestemmes ved denne ligningen, ved å betrakte ω_{n_i} , ω_{n_i} og ξ_j og ξ_j , der $i \neq j$.

Innsatt i C.10 gir:

$$v_i'' + 2\xi_i \omega_{n_i} v_i' + \omega_{n_i}^2 v_i = \frac{F_i}{M_i} \tag{C.11}$$

I tilfelle jordskjelv, er kraften $f_i(t) = -m_i \cdot z''(t)$ (se ligning 2.24).

Dermed blir ligningen:

$$\begin{aligned}
 v_i'' + 2\xi_i \omega_{n_i} v_i' + \omega_{n_i}^2 v_i &= \frac{F_i}{M_i} = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T f_i(t)}{M_i} \\
 v_i'' + 2\xi_i \omega_{n_i} v_i' + \omega_{n_i}^2 v_i &= - \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T \cdot m_i \cdot z''(t)}{M_i}
 \end{aligned}$$

2U I

ER A

DEMONSTRANDUM

Tillegg D

Modal analyse for etasjebygg

OBS: Stoffet i Appendix D er relatert til, men ikke direkte relevant for dette arbeidet. Jeg har tatt med likevel, av to grunner: først er personlig interesse for etasjebygg, men enda viktigere er at det gir en praktisk måte å kunne kvalitetssikre databeregninger av systemer med flere frihetsgrader.

I Kapittel 2.2.4 ble det utledet svingeligning for et system med flere frihetsgrader. Ligningen er tung og nærmest ”umulig” å løse for hånd. For å kunne forenkle ting, ble begrepet Modal superposisjon innført i kapittel 2.2.5. Dette ble drøftet fra et rent matematisk synspunkt.

Appendix D handler om en alternativ måte å utlede svingeligning for et etasjebygg. Videre viser det hvordan Modale ligninger (Appendix C) kan forenkles og beregnes for hånd. Dette er viktig for å kunne, for eksempel, kontrollere resultater fra datamaskin.

Metoden tar utgangspunkt i etasjebygg, men det skal være mulig å bruke samme prinsipp og generalisere til andre systemer med flere frihetsgrader.

Appendix D er basert på stoff fra [6].

Først, typiske forutsetninger som gjelder ved jordskjelvanalyse av etasjebygg.

D.0.1 Forutsetninger

Tar utgangspunkt i et etasjebygg i armert betong med N identiske nivåer (etasjer) og identiske bærende søyler og bjelker. Identisk i denne sammenheng betyr alle søyler og etasjer har samme geometriske og mekaniske (densitet, E-modul, areal momenter, stivhet) egenskaper. Bygget antas bygd på (fast fjell).

Følgende forutsetninger er typiske for ”vanligetasje bygninger til bolig og

kontorbruk, men ikke for spesiellebygninger, for eksempel industribygninger med ”veldig langesøylefrie etasjer [6].

1. **Nivåene** eller etasjer, antas å være uendelig stive mhp horisontale krefter. Etasjenes primar rolle er å overføre krefter til søylene.
2. Søylene kan kun **bøyes**. Normal deformasjon (tøyning) neglisjeres.
3. Antar at deformasjoner forblir innen grenser av **elastisitet** (små forskyvninger). Denne forutsetningen stemmer ikke med jordskjelv virkelighet, men målet er ikke å unngå effekter av jordskjelv, men å begrense dem ved fornuftigdesign [6] (se også punkt 1.1.1 i NS-EN 1998-1-undertegnede).
4. Alle masser antas konsentrert på etasjer. Det er vanlig å ta med en andel av nyttelast med i svingende masse. (Kilde [13] tar også med en andel av søylenes masse. Se studiene i Kapittel 4 i dette arbeid).
5. **Kun søyler** (søylenes stivhet) bidrar til motstand mot horisontal deformasjon. Effekten av fasader, lette vegger osv neglisjeres.
6. Beregningen begrenses kun til forskyvninger i **horisontal plan**. Svingningene i vertikal retning neglisjeres (Forskyvninger i vertikal planet blir veldig småe i forhold. Se studiene i kapittel 4-undertegnede).
7. Bygningens reaksjon antas begrenset kun til forskyvning i bølgens retning. Torsjon og vridning om egen akse ses bort ifra. Dette kravet er til for å forenkle beregninger noe.
8. Alle etasjer antas å ha samme masse.
Rimelig antagelse for de fleste bolig og kontorbygninger.
I praksis, kan naboen oppe i 3. eller 4.etasje ha 2 sofaer mer enn oss i 2., men massen til disse er ubetydelig i forhold til massen til etasjen i betong.
9. Alle søyler antas å ha like stor stivhet.

Stivhet per etasje er:

$$k = 12 \frac{EI}{h^3} N_e \quad (\text{D.1})$$

der: EI er søylens bøyestivhet
h er søylens lengde og
N_e antall søyler pr etasje.

Se utledning av denne i Appendix B.

Som ved alle jordskjelvberegninger, er man ute etter å finne forskyvninger $u_1, u_2 \dots u_n$ i hver etasje, samt skjærkrefter og momenter ved fundamentet, som er forårsaket av et jordskjelv med grunn akselerasjon z'' . Begynner da med å etablere svingeligningen.

D.0.2 Svingeligning

Ser på en vilkårlig etasje n .

Akselerasjon på etasjen er summen av grunnakselerasjonen $z''(t)$ og den relative akselerasjonen i forhold til bakken $u''(t)$. Etasjes motstandskraft er da:

$$I_n = -m(z'' + u_n'')$$

Kraften $F_{n+1,n}$ som **utøves av** etasje $n + 1$ **på** etasje n er produktet av stivheten k mellom etasjene og forskyvningsdifferanse $u_{n+1} - u_n$:

$$F_{n+1,n} = k(u_{n+1} - u_n)$$

Likens, kraften $F_{n-1,n}$ som utøves av etasje under (etasje $n - 1$) på etasje n er:

$$F_{n-1,n} = -k(u_n - u_{n-1})$$

Dermed er summen av krefter som virker på (likevekt av) etasje n :

$$\begin{aligned} \sum F &= 0 \implies I_n + F_{n+1,n} + F_{n-1,n} = 0 \\ &\implies -m(z'' + u_n'') + k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1}) = 0 \\ &\implies mu_n'' + k(-u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}) = -mz'' \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Ligning D.2 er gyldig for alle etasjer, unntatt første og siste etasjer (siden de ikke har henholdsvis etasje under og etasje over).

For første etasjen, kan man tenke seg en fiktiv underetasje der forskyvningen $u_0 = 0$. Likningen for første etasje er da:

$$\begin{aligned} mu_1'' + k(-u_{1+1} + 2u_1 - u_{1-1}) &= -mz'' \\ mu_1'' + k(2u_1 - u_2) &= -mz'' \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Likens for øverste etasje. En tenker en fiktiv overetasje $n + 1$ som har null forskyvning. Da må forskyvningen på denne fiktive etasje, u_{n+1} være den

samme u_n . Fra D.2 kan vi sette opp ligning for siste etasje:

$$\begin{aligned} mu_N'' + k(-u_{N+1} + 2u_N - u_{N-1}) &= -mz'' \\ \implies mu_N'' + k(-u_N + 2u_N - u_{N-1}) &= -mz'' \\ \implies mu_N'' + k(u_N - u_{N-1}) &= -mz'' \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Disse tre ligningene kan skrives om til en felles ligning, og siden vi har med mange frihetsgrader å gjøre, må ligningen skrives på matrisform:

$$[m]\mathbf{u}'' + [k]\mathbf{u} = -[m]z''[\Delta] \quad (\text{D.5})$$

der,

$$\begin{aligned} [\Delta] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} & [k] &= \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \\ [m] &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & m \end{bmatrix} & \text{og} & [u] &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

der $[m]$ er masse matrise for bygget, $[k]$ er stivhets matrise, $[u]$ er forskyvningsmatrise og N er antall etasjer.

At man har tatt med kolonevektoren $[\Delta]$ har ingen å si på ligningen. Dens betydning vil midlertidig bli tydelig litt lenger.s betydning vil komme tydelig fram litt lenger ned.

D.0.3 Håndberegning flere frihetsgradsligning

D.5 er ligning for udempet svingning av et etasjebygg. Ligning for dempet tilfelle er allerede blitt utledet i Kapittel 2.2.4 i dette arbeidet. En grundig gjennomgang av løsningen på ligningen førte fram til at man må sette opp en **Egenverdiligning** (ligning 2.30), som løst vil gi et sett med egenfrekvenser, som i sin tur vil gi et sett med egenvektorer.

Dette var en lang prosess som må gjøres ved hjelp av data verktøy, spesielt når mann har med mange frihetsgrader.

Målet med håndberegning er nemlig å kunne kontrollere datamaskin beregninger, og dermed oppgir kilde [6] en alternativ og enklere måte å beregne disse, nettopp for å kvalitetssikre resultater fra data programmet. I kilden er det utledet følgende løsninger for egenfrekvenser og egenvektorer:

$$\text{Egenfrekvenser: } \omega_{n,i} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{2i-1}{2N+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{D.7})$$

$$\text{Egenvektorer: } v_{i,n} = \frac{\sin\left(\frac{(2i-1)}{2N+1} n\pi\right)}{\sin\left(\frac{(2i-1)}{2N+1} N\pi\right)} \quad (\text{D.8})$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

der i er gjeldende etasje mann ser på, og N er antalletasjer, mens n er svingemoden.

Moden som gir lavest egenfrekvens ω_n har den agjørende innflytelse på byggets respons, som regel, er det mode 1.

Dersom antall etasjer N er lik eller høyere enn 2, blir sinus-uttrykket i D.7 og D.8 lite nok (dvs $\sin \alpha \approx \alpha$) slik at for høye bygninger gjelder forenklinger, for mode 1:

$$\omega_{n_1} \approx 2\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{\pi}{2(2N+1)}$$

$$\tau_{n_1} \approx \frac{2\pi}{\omega_1} = 2(2N+1)\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Utledning finnes i [6].

Fra modal ligning 2.39,

$$v_i'' + 2\xi_i \omega_{n_i} v_i' + \omega_{n_i}^2 v_i = \frac{F_i}{M_i} = \frac{\phi_i^T f_i(t)}{M_i} = -\frac{\phi_i^T \cdot m_i \cdot z''(t)}{M_i}$$

definerer mann en Participation factor" p_i :

$$p_i = \frac{\phi_i^T[m][\Delta]}{M_i} = \frac{\phi_i^T[m][\Delta]}{\phi_i^T[m]\phi_i} \quad (\text{D.9})$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N$$

slik at:

$$v_i'' + 2\xi_i\omega_{n_i}v_i' + \omega_{n_i}^2v_i = \frac{F_i}{M_i} = \frac{\phi_i^T f_i(t)}{M_i} = -p_i \cdot z''(t) \quad (\text{D.10})$$

ved å bruke $[m][\Delta]$ fra ligning D.5. Får:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{[v_i]^T [m][\Delta]}{[v_i]^T [m][v_i]} = \frac{m_{TOT}[v_i]^T}{m \cdot \mathbb{I} \cdot [v_i]^T [v_i]} = \frac{m_{TOT}}{m_{TOT}} \frac{[v_i]^T}{[v_i]^T [v_i]} = \frac{[v_i]^T}{[v_i]^T [v_i]} \\ \implies p_{i,n} &= \frac{\sum_{n=1}^N v_{i,n}}{\sum_{n=1}^N v_{i,n}^2} \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Innsetting av D.8 skal kunne gi [6]:

$$p_i = (-1)^{i+1} \frac{2}{2N+1} \frac{\sin^2\left(\frac{(2i-1)N\pi}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N+1}\right)} \quad (\text{D.12})$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Oppsummering

For et etasjebygg med N -antall etasjer, kan man kjøre dynamisk analyse, ved hjelp av dataverktøy (beregningsprogram). Slike dataverktøy gir resultater i form av egenfrekvenser og moder.

Kvaliteten på resultatene kan sikres ved at man kontrollerer egenfrekvenser for hver mode, ved hjelp av ligning D.7. Egenvektorer for hver mode kan beregnes også ved hjelp av ligning D.8. Disse kan lett tegnes opp, for å se om de stemmer med figur av svingeform fra data verktøyet.

Når det gjelder jordskjelv analyse, kan grunnakselerasjonen bestemmes ved hjelp av NS-EN 1998-1 slik som det ble gjort alt for mange ganger i Kapittel 4 i dette arbeidet. Når det er gjort, og participation factorer funnet, kan forskyvning for etasje n finnes ved:

$$x_{n_{max}} = \frac{1}{\omega_{n_i}^2} \cdot S_a \cdot |p_i| |v_{i,n}| \quad (\text{D.13})$$

Maksimal skjærkraft og moment ved fundamentet finnes på samme måte som det ble gjort i Kapittel 4 i dette arbeidet. Dette kan også kontrolleres mot resultater fra data beregningsprogram.

Enda en måte å kontrollere forskyvning, kan være å sette både egenfrekvens (ligning D.7), “participation factor” (ligning D.12) og grunnakselerasjonen (som er beregnet slik som i Kapittel 4 i dette arbeidet) inni ligning D.10, som da blir en enkel vanlig andre grads differensligning. Denne kan lett løses (som ligning 2.12 i Kapittel 2.2.2 i dette arbeidet) for så å kontrollere svaret mot resultatet fra computeren.

D.0.4 Kjapt praktisk eksempel

Nå følger en rask kontroll av formel D.7 mot mer tradisjonell beregningsmetode.

Anta at vi har fått et idealisert etasjebygg med følgende data:

$$\text{Antall etasjer: } N = 5$$

$$\text{Etasje høyde (søyle lengde): } L = 3,2m$$

$$\text{Masse per etasje: } m = 10^8 kg$$

$$\text{Elastisitetsmodul: } E = 34 \cdot 10^3 MPa = 34 \cdot 10^9 N/m^2$$

$$\text{Antall søyler per etasje: } N_p = 36$$

$$\text{Søyleverrsnitt: } b \times h = 0,8m \times 0,8m$$

$$\text{Stivhet per etasje: Formel D.1}$$

OBS: Dataene er valgt vilkårlig etter innsamlet erfaring fra 5 lange år på skolen :) Trenger ikke stemme med virkheligheten.

Håndberegning går ikke. Bygget modelleres da i et data program, som gir følgende egenfrekvenser (se Matlab arket og resultater under):

```
>> N=5;
>> L=3.2;
>> m=10^8;
>> E=34*10^9;
>> Np=36;
>> b=0.8;
>> h=0.8;
>> I=b*h^3/12;
>> k=12*36*E*I/(L^3);
>> K=[2*k -k 0 0 0; -k 2*k -k 0 0; 0 -k 2*k -k 0; 0 0 -k 2*k -k; 0 0 0 -k k];
>> M=[m 0 0 0 0; 0 m 0 0 0; 0 0 m 0 0; 0 0 0 m 0; 0 0 0 0 m];
>> Lambda=eig(K,M);
>> Frequency=sqrt(Lambda)
```


Frequency =

3.5207
10.2768
16.2004
20.8115
23.7365

Vi vil gjerne kontrollere disse resultater ved håndberegning, men å sette opp og løse svingeligning på 5 frihetsgrader er ikke akkurat fristende. Velger da å bruke formel D.7, som er lettere å håndberegne med. For å spare tid enda mer, programmeres D.7 også i Matlab.

```
>> Frequency1=2*sqrt(k/m)*sin((2*1-1)/(2*5+1)*pi/2);  
>> Frequency2=2*sqrt(k/m)*sin((2*2-1)/(2*5+1)*pi/2);  
>> Frequency3=2*sqrt(k/m)*sin((2*3-1)/(2*5+1)*pi/2);  
>> Frequency4=2*sqrt(k/m)*sin((2*4-1)/(2*5+1)*pi/2);  
>> Frequency5=2*sqrt(k/m)*sin((2*5-1)/(2*5+1)*pi/2);  
>> FrequencyMatrix=[Frequency1; Frequency2; Frequency3; Frequency4; Frequency5];
```

FrequencyMatrix =

3.5207
10.2768
16.2004
20.8115
23.7365

Resultat er akkurat som forventet.

Nå vil vi sammenligne beregnet egenfrekvens på denne måten, med forenklet egenperiode etter NS EN-1998-1 side 45:

Her vil den største mode gi:

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_{n_1}} = \frac{2\pi}{3,5207} = 1,8s$$

$$T_1 = C_t \cdot H^{\frac{3}{4}} = 0,075 \cdot (5 * 3,2)^{\frac{3}{4}} = 0,6s$$

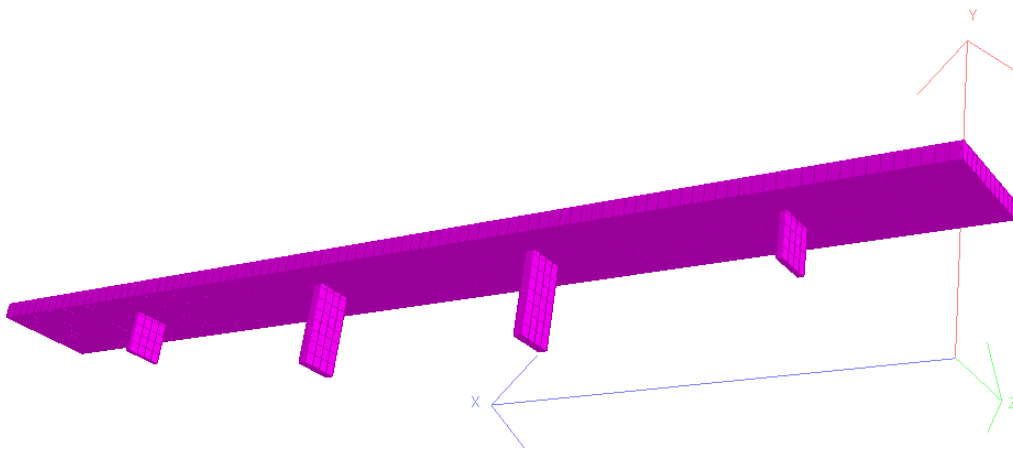
som er den samme som egenperiode for mode 2.

Selv om det er stort avvik mellom τ_{n_1} og den forenklete T_1 , er dette mode 2, og dermed et ganske godt estimat.

Tillegg E

Håndberegning av bruas vertikal stivhet

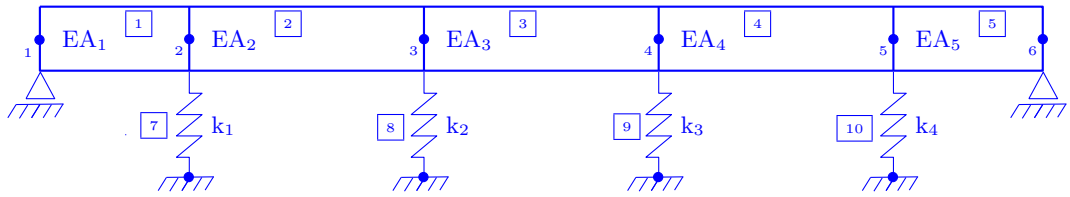
Det er forskjellige måter å beregne stivheten til en bru slik som i figur E1. Jeg ville først bestemme aksial stivheten til søylene. Disse kan kalles k_1 , k_2 , k_3 og k_4 .



Figur E.1: Bru med fem spenn.

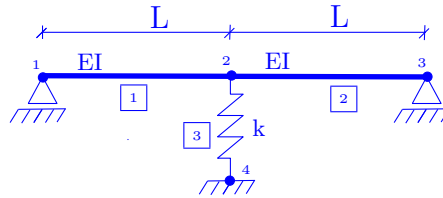
Dermed kan brua modelleres som et fire element bjelke som er fritt opplagt ved endene, og står på fire fjær elementer, der fjærstivheter er henholdsvis: k_1 , k_2 , k_3 og k_4 (fig E.2).

Stivheter for hvert bjelke element kan beregnes vha enkel statikk, slik det ble gjort akk så mange ganger i Kapittel 4. Deretter, kan global stivhetsmatrisen enkelt settes opp.



Figur E.2: Element model av bru med fire spenn.

Dette vil gjøres illustrativt, ved å velge en enklere modell. Antar fritt opplagt, med bare et fjær i midten. Videre antas like geometriske og mekaniske egenskaper for begge bjelke elementer (fig E.3).



Figur E.3: Illustrativt.

Stivhetsmatriser et bjelkelementene er utledet i Appendix B:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} u_1 & \theta_1 & u_2 & \theta_2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

Her er mann kun interessert i forskyvning i nedoverretning. Stivhetsmariser for de to bjelke elementer er:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \quad \mathbf{K}_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

Matrise for fjærelementet:

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} u_2 & u_4 \\ k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_4 \end{matrix}$$

Global stivhetsmatrise:

$$\mathbf{K}_G = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 12 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 12 + 12 + k^\dagger & -12 & k^\dagger \\ 0 & -12 & 12 & 0 \\ 0 & k^\dagger & 0 & k^\dagger \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

, der $k^\dagger = \frac{L^3}{EI}k$.

Grensebetingelser: I dette systemet er det kun node 2 som forskyver seg.
 $\implies u_1 = u_3 = 0$. Stivheten til systemet er:

$$\mathbf{K}_G = \frac{EI}{L^3} [(24 + k^\dagger)]$$

Lumped mass”metoden er en forenkling i FEM, hvor mann antar at massen av et element er lik fordelt på de to nodene ([12] side 184).

For systemet i fig E.3 kan vi sette opp:

m_1 : Massen til bjelke element 1

m_2 : Massen til bjelke element 2

m_3 : Massen til fjærelementet (element 3)

Vanligvis defineres fjærelementer i FEM som masseløse, men her kan mann for eksempel anta at 50% av søylemasse er med å svinge, slik [13] gjør, og fordele denne på de to nodene.

Med dette i bakhodet, blir systemets masse matrise:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_3}{2} \end{bmatrix}$$

I dette tilfelle er det kun masse ved node 2 som gjelder (element 2,2 i \mathbf{m} -matrisen). Dermed har man både stivhet og masse. Egenfrekvensen og egenperiode for systemet kan beregnes.

I dette illustrative og forenklet system, ble både stivhet og massen matriser på kun ett element. Dette er ikke overraskende fordi det er bare kun en frihetsgrad, nemlig vertikal forskyvning av node 2.

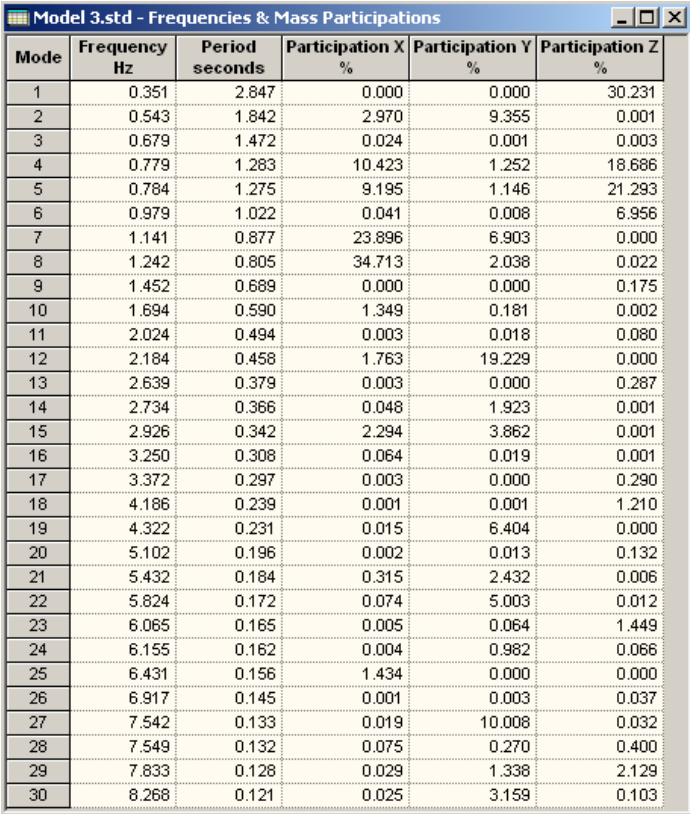
For systemet i fig E.2 vil matrisene vare $4 * 4$. Egenfrekvenser kan løses ved

å sette opp Egenverdiproblem (ligning 2.30).

Fordelen med beregningsprogram er at man kan detaljere enda mer, og fordele i enda mindre bjelke elementer, beregne flere moder, og få mer nøyaktige resultater.

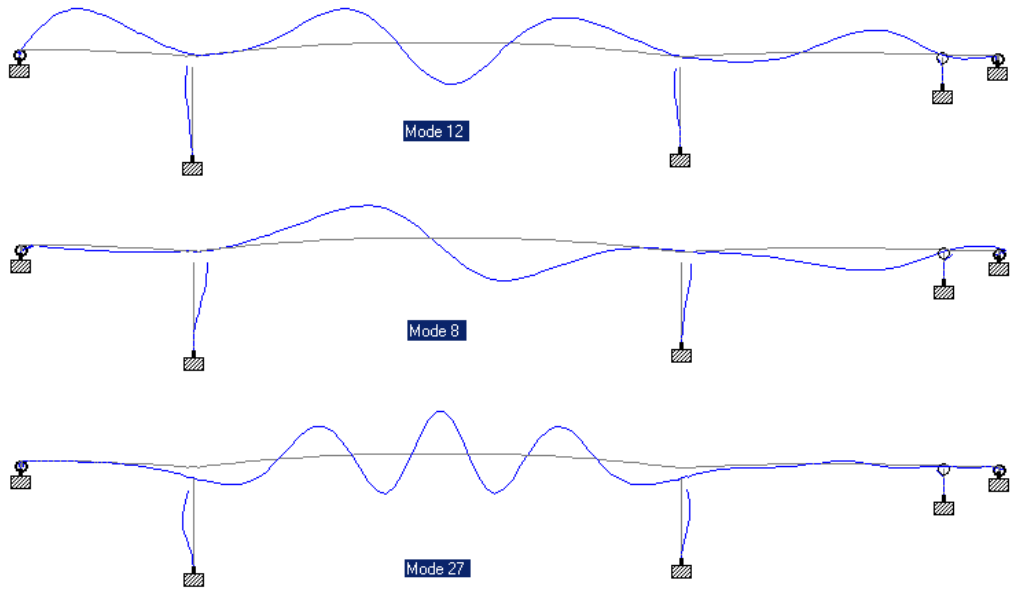
Tillegg F

Utvalgte svingemoder fra Sandsfjorbrua

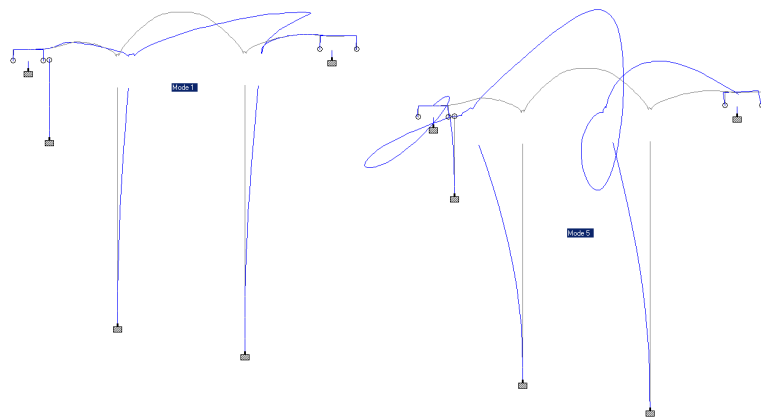


Mode	Frequency Hz	Period seconds	Participation X %	Participation Y %	Participation Z %
1	0.351	2.847	0.000	0.000	30.231
2	0.543	1.842	2.970	9.355	0.001
3	0.679	1.472	0.024	0.001	0.003
4	0.779	1.283	10.423	1.252	18.686
5	0.784	1.275	9.195	1.146	21.293
6	0.979	1.022	0.041	0.008	6.956
7	1.141	0.877	23.896	6.903	0.000
8	1.242	0.805	34.713	2.038	0.022
9	1.452	0.689	0.000	0.000	0.175
10	1.694	0.590	1.349	0.181	0.002
11	2.024	0.494	0.003	0.018	0.080
12	2.184	0.458	1.763	19.229	0.000
13	2.639	0.379	0.003	0.000	0.287
14	2.734	0.366	0.048	1.923	0.001
15	2.926	0.342	2.294	3.862	0.001
16	3.250	0.308	0.064	0.019	0.001
17	3.372	0.297	0.003	0.000	0.290
18	4.186	0.239	0.001	0.001	1.210
19	4.322	0.231	0.015	6.404	0.000
20	5.102	0.196	0.002	0.013	0.132
21	5.432	0.184	0.315	2.432	0.006
22	5.824	0.172	0.074	5.003	0.012
23	6.065	0.165	0.005	0.064	1.449
24	6.155	0.162	0.004	0.982	0.066
25	6.431	0.156	1.434	0.000	0.000
26	6.917	0.145	0.001	0.003	0.037
27	7.542	0.133	0.019	10.008	0.032
28	7.549	0.132	0.075	0.270	0.400
29	7.833	0.128	0.029	1.338	2.129
30	8.268	0.121	0.025	3.159	0.103

Figur F.1: Moder og egenfrekvenser.



Figur F.2: *Svingemoder.*



Figur F.3: *Moder 1 og 5.*

Tillegg G

Inputfil til Staad Pro

STAAD SPACE

START JOB INFORMATION

ENGINEER DATE 06-Jun-11

END JOB INFORMATION

INPUT WIDTH 79

UNIT METER KN

JOINT COORDINATES

110 38.174 64.045 10.754; 111 38.174 66.8 10.754; 120 39.485 64.045 3.369;
121 39.485 66.8 3.369; 122 38.611 63.93 8.292; 123 38.611 62.4 8.292; 210
140.606 6.5 16.884; 211 140.606 10.697 16.884; 212 140.606 14.893 16.884;
213 140.606 19.09 16.884; 214 140.606 23.287 16.884; 215 140.606 27.484
16.884; 216 140.606 31.68 16.884; 217 140.606 35.877 16.884; 218 140.606
40.074 16.884; 219 140.606 44.271 16.884; 220 140.606 48.467 16.884; 221
140.606 52.664 16.884; 222 140.606 56.861 16.884; 230 140.606 4 16.884; 310
430.61 12 16.928; 311 430.61 16.034 16.928; 312 430.61 20.068 16.928; 313
430.61 24.103 16.928; 314 430.61 28.137 16.928; 315 430.61 32.171 16.928;
316 430.61 36.205 16.928; 317 430.61 40.24 16.928; 318 430.61 44.274 16.928;
319 430.61 48.308 16.928; 320 430.61 52.342 16.928; 321 430.61 56.377 16.928;
330 430.61 9.5 16.928; 410 585.609 48 17.01; 411 585.609 52.748 17.01; 412
585.609 57.496 17.01; 413 585.609 62.245 17.01; 420 585.609 46.5 17.01; 510
618.326 61.75 21.38; 511 618.326 64.049 21.38; 520 618.821 61.75 15.401; 521
618.821 64.049 15.401; 522 618.573 61.75 18.391; 523 618.573 60.3 18.391;
2100 37.135 66.689 8.028; 2101 38.611 66.719 8.292; 2102 43.489 66.817
9.135; 2103 48.423 66.917 9.942; 2104 50.577 66.961 10.28; 2105 54.443 67.049
10.864; 2106 58.303 67.031 11.42; 2107 62.147 67.005 11.945; 2108 66.164
66.968 12.465; 2109 70.164 66.921 12.953; 2110 74.168 66.818 13.411; 2111
78.145 66.698 13.837; 2112 82.116 66.566 14.233; 2113 83.689 66.423 14.382;
2114 86.079 66.417 14.599; 2115 90.015 66.251 14.934; 2116 93.973 66.069

15.243; 2117 97.893 65.872 15.52; 2118 101.785 65.673 15.767; 2119 105.629
65.484 15.984; 2120 109.374 65.316 16.17; 2121 110.623 65.257 16.226; 2122
114.116 65.086 16.368; 2123 118.812 64.841 16.527; 2124 123.51 64.578 16.651;
2125 127.259 64.355 16.729; 2126 130.958 64.123 16.79; 2127 134.357 63.762
16.832; 2128 137.607 63.279 16.863; 2129 138.207 63.538 16.868; 2200 140.606
63.586 16.884; 2298 143.006 63.634 16.896; 2299 143.606 63.311 16.899; 2300
146.856 63.959 16.909; 2301 150.605 64.513 16.916; 2302 154.605 64.924 16.918;
2303 158.61 65.32 16.919; 2304 163.61 65.798 16.919; 2305 168.61 66.255
16.919; 2306 170.61 66.432 16.919; 2307 173.61 66.692 16.919; 2308 178.61
67.097 16.919; 2309 183.61 67.526 16.92; 2310 188.61 67.957 16.92; 2311
193.61 68.376 16.92; 2312 198.61 68.606 16.92; 2313 203.61 68.984 16.92;
2314 208.61 69.337 16.92; 2315 213.61 69.658 16.921; 2316 218.61 69.955
16.921; 2317 223.61 70.227 16.921; 2318 228.61 70.478 16.921; 2319 233.61
70.705 16.921; 2320 238.61 70.928 16.921; 2321 243.61 71.119 16.922; 2322
248.61 71.159 16.922; 2323 253.61 71.289 16.922; 2324 258.61 71.368 16.922;
2325 263.61 71.43 16.922; 2326 268.61 71.478 16.922; 2327 273.61 71.511
16.923; 2328 278.61 71.532 16.923; 2329 283.61 71.541 16.923; 3200 287.61
71.541 16.923; 3201 292.61 71.532 16.923; 3202 297.61 71.511 16.923; 3203
302.61 71.478 16.924; 3204 307.61 71.43 16.924; 3205 312.61 71.368 16.924;
3206 317.61 71.289 16.924; 3207 322.61 71.16 16.924; 3208 327.61 71.119
16.924; 3209 332.61 70.928 16.925; 3210 337.61 70.705 16.925; 3211 342.61
70.478 16.925; 3212 347.61 70.227 16.925; 3213 352.61 69.955 16.925; 3214
357.61 69.658 16.925; 3215 362.61 69.337 16.926; 3216 367.61 68.983 16.926;
3217 372.61 68.599 16.926; 3218 377.61 68.358 16.926; 3219 382.61 67.921
16.926; 3220 387.61 67.465 16.926; 3221 392.61 67.005 16.927; 3222 397.61
66.563 16.927; 3223 400.61 66.278 16.927; 3224 402.61 66.083 16.927; 3225
407.61 65.577 16.927; 3226 412.61 65.043 16.927; 3227 416.61 64.601 16.927;
3228 420.61 64.144 16.927; 3229 424.36 63.547 16.928; 3230 427.61 62.861
16.928; 3231 428.21 63.178 16.928; 3300 430.61 63.102 16.928; 3398 433.01
63.027 16.928; 3399 433.61 62.672 16.928; 3400 436.86 63.153 16.928; 3401
440.61 63.515 16.928; 3402 444.61 63.719 16.928; 3403 448.61 63.91 16.928;
3404 453.61 64.13 16.929; 3405 458.61 64.329 16.929; 3406 460.61 64.404
16.929; 3407 463.61 64.509 16.929; 3408 468.61 64.657 16.929; 3409 473.61
64.829 16.929; 3410 478.61 65.002 16.929; 3411 483.61 65.164 16.93; 3412
486.61 65.106 16.93; 3413 488.61 65.136 16.93; 3414 493.61 65.257 16.93; 3415
498.61 65.353 16.93; 3416 503.61 65.424 16.93; 3417 508.61 65.477 16.93; 3418
513.61 65.511 16.931; 3419 518.61 65.53 16.931; 3420 523.61 65.532 16.931;
3421 528.61 65.535 16.931; 3422 533.61 65.513 16.931; 3423 538.61 65.346
16.931; 3424 543.61 65.275 16.931; 3425 548.61 65.16 16.932; 3426 553.61
65.034 16.932; 3427 558.61 64.903 16.932; 3428 563.61 64.776 16.932; 3429
568.61 64.655 16.933; 3430 573.61 64.541 16.937; 3431 577.61 64.456 16.949;

4400 585.609 64.311 17.01; 4500 590.609 64.236 17.085; 4501 595.608 64.174 17.196; 4502 600.605 64.124 17.351; 4503 605.601 64.087 17.558; 4504 610.594 64.063 17.824; 4505 615.583 64.05 18.157; 5500 618.573 64.049 18.391;

MEMBER INCIDENCES

110 110 111; 111 111 2101; 120 120 121; 121 121 2101; 122 122 123; 210 210 211; 211 211 212; 212 212 213; 213 213 214; 214 214 215; 215 215 216; 216 216 217; 217 217 218; 218 218 219; 219 219 220; 220 220 221; 221 221 222; 230 210 230; 310 310 311; 311 311 312; 312 312 313; 313 313 314; 314 314 315; 315 315 316; 316 316 317; 317 317 318; 318 318 319; 319 319 320; 320 320 321; 330 310 330; 410 410 411; 411 411 412; 412 412 413; 420 410 420; 510 510 511; 511 511 5500; 520 520 521; 521 521 5500; 522 522 523; 2101 2100 2101; 2102 2101 2102; 2103 2102 2103; 2104 2103 2104; 2105 2104 2105; 2106 2105 2106; 2107 2106 2107; 2108 2107 2108; 2109 2108 2109; 2110 2109 2110; 2111 2110 2111; 2112 2111 2112; 2113 2112 2113; 2114 2113 2114; 2115 2114 2115; 2116 2115 2116; 2117 2116 2117; 2118 2117 2118; 2119 2118 2119; 2120 2119 2120; 2121 2120 2121; 2122 2121 2122; 2123 2122 2123; 2124 2123 2124; 2125 2124 2125; 2126 2125 2126; 2127 2126 2127; 2128 2127 2128; 2129 2128 2129; 2130 2129 2200; 2298 2200 2298; 2299 2298 2299; 2300 2299 2300; 2301 2300 2301; 2302 2301 2302; 2303 2302 2303; 2304 2303 2304; 2305 2304 2305; 2306 2305 2306; 2307 2306 2307; 2308 2307 2308; 2309 2308 2309; 2310 2309 2310; 2311 2310 2311; 2312 2311 2312; 2313 2312 2313; 2314 2313 2314; 2315 2314 2315; 2316 2315 2316; 2317 2316 2317; 2318 2317 2318; 2319 2318 2319; 2320 2319 2320; 2321 2320 2321; 2322 2321 2322; 2323 2322 2323; 2324 2323 2324; 2325 2324 2325; 2326 2325 2326; 2327 2326 2327; 2328 2327 2328; 2329 2328 2329; 2330 2329 3200; 3201 3200 3201; 3202 3201 3202; 3203 3202 3203; 3204 3203 3204; 3205 3204 3205; 3206 3205 3206; 3207 3206 3207; 3208 3207 3208; 3209 3208 3209; 3210 3209 3210; 3211 3210 3211; 3212 3211 3212; 3213 3212 3213; 3214 3213 3214; 3215 3214 3215; 3216 3215 3216; 3217 3216 3217; 3218 3217 3218; 3219 3218 3219; 3220 3219 3220; 3221 3220 3221; 3222 3221 3222; 3223 3222 3223; 3224 3223 3224; 3225 3224 3225; 3226 3225 3226; 3227 3226 3227; 3228 3227 3228; 3229 3228 3229; 3230 3229 3230; 3231 3230 3231; 3232 3231 3300; 3398 3300 3398; 3399 3398 3399; 3400 3399 3400; 3401 3400 3401; 3402 3401 3402; 3403 3402 3403; 3404 3403 3404; 3405 3404 3405; 3406 3405 3406; 3407 3406 3407; 3408 3407 3408; 3409 3408 3409; 3410 3409 3410; 3411 3410 3411; 3412 3411 3412; 3413 3412 3413; 3414 3413 3414; 3415 3414 3415; 3416 3415 3416; 3417 3416 3417; 3418 3417 3418; 3419 3418 3419; 3420 3419 3420; 3421 3420 3421; 3422 3421 3422; 3423 3422 3423; 3424 3423 3424; 3425 3424 3425; 3426 3425 3426; 3427 3426 3427; 3428 3427 3428; 3429 3428 3429; 3430 3429 3430; 3431 3430 3431; 3432 3431 4400; 4500 4400 4500; 4501 4500 4501; 4502 4501 4502; 4503 4502 4503; 4504 4503 4504; 4505 4504 4505; 4506 4505 5500;

SUPPORTS

123 230 330 420 523 FIXED

MEMBER RELEASE

110 START FY FZ MX MY MZ
120 START FY MX MY MZ
412 END FY MX MY MZ
510 START FZ MX MY MZ
520 START FY MX MY MZ
SLAVE RIGID MASTER 122 JOINT 110
SLAVE RIGID MASTER 122 JOINT 120
SLAVE RIGID MASTER 2200 JOINT 222
SLAVE RIGID MASTER 3300 JOINT 321
SLAVE RIGID MASTER 4400 JOINT 413
SLAVE RIGID MASTER 522 JOINT 510
SLAVE RIGID MASTER 522 JOINT 520

MEMBER PROPERTY AMERICAN

110 PRIS AX 1 IX 1 IY 1 IZ 1
111 PRIS AX 100 IX 1400 IY 833.333 IZ 833.333
120 PRIS AX 1 IX 1 IY 1 IZ 1
121 PRIS AX 100 IX 1400 IY 833.333 IZ 833.333
122 PRIS AX 7.20001 IX 1.443 IY 48.6 IZ 0.384
210 PRIS AX 20.16 IX 270.688 IY 360.115 IZ 116.467
211 PRIS AX 19.382 IX 250.45 IY 312.936 IZ 110.775
212 PRIS AX 18.674 IX 232.2 IY 273.522 IZ 105.593
213 PRIS AX 18.035 IX 215.874 IY 240.715 IZ 100.911
214 PRIS AX 17.464 IX 201.439 IY 213.584 IZ 96.73
215 PRIS AX 16.962 IX 188.886 IY 191.392 IZ 93.058
216 PRIS AX 16.528 IX 178.116 IY 173.373 IZ 89.878
217 PRIS AX 16.162 IX 169.121 IY 159.033 IZ 87.199
218 PRIS AX 15.865 IX 161.893 IY 147.971 IZ 85.029
219 PRIS AX 15.636 IX 156.341 IY 139.749 IZ 83.352
220 PRIS AX 15.475 IX 152.466 IY 134.152 IZ 82.174
221 PRIS AX 15.383 IX 150.247 IY 130.998 IZ 81.498
230 PRIS AX 135 IX 2361.96 IY 2531.25 IZ 911.25
310 PRIS AX 18.900001 IX 237.996 IY 285.722 IZ 107.244
311 PRIS AX 18.242 IX 221.155 IY 251.078 IZ 102.43
312 PRIS AX 17.648 IX 206.093 IY 222.142 IZ 98.082
313 PRIS AX 17.123 IX 192.897 IY 198.343 IZ 94.235

314 PRIS AX 16.667 IX 181.556 IY 179.028 IZ 90.897
315 PRIS AX 16.278 IX 171.973 IY 163.511 IZ 88.051
316 PRIS AX 15.958 IX 164.141 IY 151.367 IZ 85.706
317 PRIS AX 15.706 IX 158.024 IY 142.216 IZ 83.861
318 PRIS AX 15.522 IX 153.592 IY 135.767 IZ 82.517
319 PRIS AX 15.407 IX 150.823 IY 131.813 IZ 81.674
320 PRIS AX 15.36 IX 149.7 IY 130.227 IZ 81.331
330 PRIS AX 135 IX 2361.96 IY 2531.25 IZ 911.25
410 PRIS AX 14 IX 15.44 IY 57.167 IZ 4.667
411 PRIS AX 14 IX 15.44 IY 57.167 IZ 4.667
412 PRIS AX 14 IX 15.44 IY 57.167 IZ 4.667
420 PRIS AX 36 IX 141.44 IY 243 IZ 48
510 PRIS AX 1 IX 1 IY 1 IZ 1
511 PRIS AX 100 IX 1400 IY 833.333 IZ 833.333
520 PRIS AX 100 IX 1 IY 1 IZ 1
521 PRIS AX 7.20001 IX 1400 IY 833.333 IZ 833.333
522 PRIS AX 18.435 IX 1.443 IY 48.6 IZ 0.384
2101 PRIS AX 18.435 IX 216.073 IY 366.744 IZ 63.335
2102 PRIS AX 18.435 IX 216.073 IY 366.744 IZ 63.335
2103 PRIS AX 18.435 IX 216.073 IY 366.744 IZ 63.335
2104 PRIS AX 15.524 IX 216.073 IY 366.744 IZ 63.335
2105 PRIS AX 12.717 IX 158.505 IY 228.72 IZ 53.119
2106 PRIS AX 12.935 IX 104.448 IY 91.801 IZ 45.248
2107 PRIS AX 13.177 IX 111.839 IY 94.108 IZ 50.295
2108 PRIS AX 13.445 IX 120.191 IY 96.67 IZ 56.261
2109 PRIS AX 13.848 IX 129.589 IY 99.501 IZ 63.299
2110 PRIS AX 14.400001 IX 141.226 IY 102.896 IZ 72.305
2111 PRIS AX 14.984 IX 155.275 IY 106.895 IZ 83.685
2112 PRIS AX 15.642 IX 170.426 IY 111.153 IZ 96.913
2113 PRIS AX 15.964 IX 183.596 IY 114.954 IZ 109.05
2114 PRIS AX 16.266 IX 192.054 IY 117.293 IZ 117.327
2115 PRIS AX 16.971 IX 204.193 IY 120.489 IZ 130.129
2116 PRIS AX 17.712 IX 222.924 IY 125.602 IZ 150.864
2117 PRIS AX 18.452 IX 242.822 IY 130.992 IZ 174.771
2118 PRIS AX 19.124 IX 263.521 IY 136.526 IZ 201.713
2119 PRIS AX 19.672 IX 284.545 IY 141.995 IZ 231.15
2120 PRIS AX 19.99 IX 305.385 IY 147.198 IZ 262.184
2121 PRIS AX 20.307 IX 319.256 IY 150.574 IZ 283.646
2122 PRIS AX 20.874 IX 333.15 IY 153.929 IZ 306.472
2123 PRIS AX 21.556 IX 358.157 IY 159.93 IZ 349.701
2124 PRIS AX 22.198 IX 388.456 IY 167.142 IZ 405.841

2125 PRIS AX 22.79 IX 417.217 IY 173.937 IZ 463.034
2126 PRIS AX 23.676 IX 443.925 IY 180.202 IZ 520.033
2127 PRIS AX 25.145 IX 472.942 IY 187.304 IZ 589.424
2128 PRIS AX 29.32 IX 505.224 IY 196.026 IZ 679.618
2129 PRIS AX 32.613 IX 572.303 IY 214.196 IZ 836.916
2130 PRIS AX 32.613 IX 622.542 IY 227.571 IZ 943.54
2298 PRIS AX 28.104 IX 622.542 IY 227.571 IZ 943.54
2299 PRIS AX 22.749 IX 530.433 IY 202.907 IZ 820.942
2300 PRIS AX 21.341 IX 424.989 IY 173.788 IZ 649.653
2301 PRIS AX 20.521 IX 398.195 IY 165.593 IZ 560.429
2302 PRIS AX 20.016 IX 372.798 IY 159.039 IZ 490.024
2303 PRIS AX 19.474 IX 349.476 IY 153.531 IZ 433.505
2304 PRIS AX 18.902 IX 324.615 IY 147.625 IZ 377.583
2305 PRIS AX 18.518 IX 298.522 IY 141.389 IZ 323.08
2306 PRIS AX 18.256 IX 281.079 IY 137.198 IZ 288.748
2307 PRIS AX 17.49 IX 269.285 IY 134.345 IZ 267.027
2308 PRIS AX 16.596 IX 240.423 IY 126.422 IZ 234.098
2309 PRIS AX 15.979 IX 209.13 IY 117.688 IZ 197.413
2310 PRIS AX 15.298 IX 190.734 IY 112.628 IZ 166.582
2311 PRIS AX 14.216 IX 173.27 IY 107.555 IZ 139.722
2312 PRIS AX 13.175 IX 153.653 IY 101.689 IZ 113.739
2313 PRIS AX 12.582 IX 135.572 IY 96.157 IZ 92.132
2314 PRIS AX 12.039 IX 122.329 IY 91.971 IZ 77.433
2315 PRIS AX 11.532 IX 110.355 IY 88.135 IZ 65.288
2316 PRIS AX 11.048 IX 99.549 IY 84.604 IZ 55.241
2317 PRIS AX 10.586 IX 89.77 IY 81.325 IZ 46.877
2318 PRIS AX 10.146 IX 80.941 IY 78.29 IZ 39.921
2319 PRIS AX 9.555 IX 72.998 IY 75.495 IZ 34.144
2320 PRIS AX 8.991 IX 63.673 IY 71.238 IZ 29.144
2321 PRIS AX 8.146 IX 55.34 IY 67.269 IZ 24.949
2322 PRIS AX 7.386 IX 48.036 IY 64.016 IZ 20.891
2323 PRIS AX 7.256 IX 41.924 IY 61.179 IZ 17.739
2324 PRIS AX 7.204 IX 39.51 IY 60.219 IZ 16.338
2325 PRIS AX 7.165 IX 38.012 IY 59.633 IZ 15.465
2326 PRIS AX 7.138 IX 36.895 IY 59.192 IZ 14.824
2327 PRIS AX 7.121 IX 36.126 IY 58.885 IZ 14.389
2328 PRIS AX 7.112 IX 35.655 IY 58.696 IZ 14.124
2329 PRIS AX 7.110001 IX 35.42 IY 58.602 IZ 13.993
2330 PRIS AX 7.112 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956
3201 PRIS AX 7.121 IX 35.42 IY 58.602 IZ 13.993
3202 PRIS AX 7.138 IX 35.655 IY 58.696 IZ 14.124

3203 PRIS AX 7.165 IX 36.126 IY 58.885 IZ 14.389
3204 PRIS AX 7.204 IX 36.895 IY 59.192 IZ 14.824
3205 PRIS AX 7.256 IX 56.545 IY 59.633 IZ 15.465
3206 PRIS AX 7.386 IX 58.044 IY 60.219 IZ 16.338
3207 PRIS AX 8.146 IX 41.924 IY 61.179 IZ 17.739
3208 PRIS AX 8.991 IX 48.036 IY 64.016 IZ 20.891
3209 PRIS AX 9.555 IX 55.34 IY 67.269 IZ 24.949
3210 PRIS AX 10.146 IX 63.673 IY 71.238 IZ 29.144
3211 PRIS AX 10.586 IX 72.998 IY 75.495 IZ 34.144
3212 PRIS AX 11.048 IX 80.941 IY 78.29 IZ 39.921
3213 PRIS AX 11.532 IX 89.77 IY 81.325 IZ 46.877
3214 PRIS AX 12.039 IX 99.549 IY 84.604 IZ 55.241
3215 PRIS AX 12.582 IX 110.355 IY 88.135 IZ 65.288
3216 PRIS AX 13.175 IX 122.329 IY 91.971 IZ 77.433
3217 PRIS AX 14.216 IX 135.572 IY 96.157 IZ 92.132
3218 PRIS AX 15.298 IX 153.653 IY 101.689 IZ 113.739
3219 PRIS AX 15.979 IX 173.27 IY 107.555 IZ 139.722
3220 PRIS AX 16.596 IX 190.734 IY 112.628 IZ 166.582
3221 PRIS AX 17.49 IX 209.13 IY 117.688 IZ 197.413
3222 PRIS AX 18.256 IX 240.423 IY 126.422 IZ 234.098
3223 PRIS AX 18.518 IX 269.285 IY 134.345 IZ 267.027
3224 PRIS AX 18.902 IX 281.079 IY 137.198 IZ 288.748
3225 PRIS AX 19.474 IX 298.522 IY 141.389 IZ 323.08
3226 PRIS AX 20.016 IX 324.615 IY 147.625 IZ 377.583
3227 PRIS AX 20.521 IX 349.476 IY 153.531 IZ 433.505
3228 PRIS AX 21.341 IX 372.798 IY 159.039 IZ 490.024
3229 PRIS AX 22.749 IX 398.195 IY 165.593 IZ 560.429
3230 PRIS AX 28.104 IX 424.989 IY 173.788 IZ 649.653
3231 PRIS AX 32.613 IX 530.433 IY 202.907 IZ 820.942
3232 PRIS AX 32.613 IX 622.542 IY 227.571 IZ 943.54
3398 PRIS AX 28.104 IX 622.542 IY 227.571 IZ 943.54
3399 PRIS AX 22.749 IX 530.433 IY 202.907 IZ 820.942
3400 PRIS AX 21.341 IX 424.989 IY 173.788 IZ 649.653
3401 PRIS AX 20.521 IX 398.195 IY 165.593 IZ 560.429
3402 PRIS AX 20.016 IX 372.798 IY 159.039 IZ 490.024
3403 PRIS AX 19.474 IX 349.476 IY 153.531 IZ 433.505
3404 PRIS AX 18.902 IX 324.615 IY 147.625 IZ 377.583
3405 PRIS AX 18.518 IX 298.522 IY 141.389 IZ 323.08
3406 PRIS AX 18.256 IX 281.079 IY 137.198 IZ 288.748
3407 PRIS AX 17.49 IX 269.285 IY 134.345 IZ 267.027
3408 PRIS AX 16.596 IX 240.423 IY 126.422 IZ 234.098

3409 PRIS AX 15.979 IX 209.13 IY 117.688 IZ 197.413
3410 PRIS AX 15.298 IX 190.734 IY 112.628 IZ 166.582
3411 PRIS AX 14.279 IX 173.27 IY 107.555 IZ 139.722
3412 PRIS AX 13.545 IX 156.31 IY 102.39 IZ 116.938
3413 PRIS AX 13.175 IX 145.159 IY 99.033 IZ 103.357
3414 PRIS AX 12.582 IX 135.572 IY 96.157 IZ 92.132
3415 PRIS AX 12.039 IX 122.329 IY 91.971 IZ 77.433
3416 PRIS AX 11.532 IX 110.355 IY 88.135 IZ 65.288
3417 PRIS AX 11.048 IX 99.549 IY 84.604 IZ 55.241
3418 PRIS AX 10.586 IX 89.77 IY 81.325 IZ 46.877
3419 PRIS AX 10.146 IX 80.941 IY 78.29 IZ 39.921
3420 PRIS AX 9.555 IX 72.998 IY 75.495 IZ 34.144
3421 PRIS AX 8.991 IX 63.673 IY 71.238 IZ 29.144
3422 PRIS AX 8.146 IX 55.34 IY 67.269 IZ 24.949
3423 PRIS AX 7.386 IX 48.036 IY 64.016 IZ 20.891
3424 PRIS AX 7.256 IX 41.924 IY 61.179 IZ 17.739
3425 PRIS AX 7.204 IX 39.51 IY 60.219 IZ 16.338
3426 PRIS AX 7.165 IX 38.012 IY 59.633 IZ 15.465
3427 PRIS AX 7.138 IX 36.895 IY 59.192 IZ 14.824
3428 PRIS AX 7.121 IX 36.126 IY 58.885 IZ 14.389
3429 PRIS AX 7.112 IX 35.655 IY 58.696 IZ 14.124
3430 PRIS AX 7.11000001 IX 35.42 IY 58.602 IZ 13.993
3431 PRIS AX 7.11000001 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956
3432 PRIS AX 7.11000001 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956
4500 PRIS AX 7.11000001 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956
4501 PRIS AX 7.11000001 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956
4502 PRIS AX 7.11000001 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956
4503 PRIS AX 7.11000001 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956
4504 PRIS AX 7.11000001 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956
4505 PRIS AX 7.11000001 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956
4506 PRIS AX 7.11000001 IX 35.353 IY 58.575 IZ 13.956

DEFINE MATERIAL START
ISOTROPIC MATERIAL1
E 2.98e+007
POISSON 0.2
DENSITY 26
DAMP 0.05
ISOTROPIC MATERIAL2
E 3e+007
POISSON 0.2

DENSITY 0.01
 DAMP 0.05
 ISOTROPIC MATERIAL3
 E 5e+008
 POISSON 0.2
 DENSITY 0.01
 DAMP 0.05
 ISOTROPIC MATERIAL4
 E 3.4503e+007
 POISSON 0.2
 DENSITY 0.01
 DAMP 0.05
 ISOTROPIC MATERIAL5
 E 3.1611e+007
 POISSON 0.2
 DENSITY 26
 DAMP 0.05
 ISOTROPIC MATERIAL6
 E 3.1611e+007
 POISSON 0.2
 DENSITY 21.4
 DAMP 0.05
 ISOTROPIC MATERIAL7
 E 2.8803e+007
 POISSON 0.2
 DENSITY 21.4
 DAMP 0.05
 END DEFINE MATERIAL
 CUT OFF MODE SHAPE 30

CONSTANTS

MATERIAL MATERIAL1 MEMB 210 TO 221 230 310 TO 320 330 410 TO
 412 420
 MATERIAL MATERIAL2 MEMB 110 120 510 520
 MATERIAL MATERIAL3 MEMB 111 121 511 521
 MATERIAL MATERIAL4 MEMB 122 522
 MATERIAL MATERIAL5 MEMB 2101 TO 2130 2298 TO 2306 3223 TO
 3232 3398 TO 3407 -
 3432 4500 TO 4506
 MATERIAL MATERIAL6 MEMB 2307 TO 2310 3408 TO 3431 MATERI-
 AL MATERIAL7 MEMB 2311 TO 2330 3201 TO 3222

LOAD 1 DEAD& LIVE LOADS

SELFWEIGHT Y -1

MEMBER LOAD

2101 TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GY -5

2109 CON GY -52.3 1

2113 CON GY -133.7 1

2113 CON GY -214.2 1

2125 CON GY -2262 0

2311 CON GY -89 3

2316 CON GY -45.4 3

2319 CON GY -35.1 0

2320 CON GY -35.1 0

2321 CON GY -35.1 0

2322 CON GY -19.2 1

2322 CON GY -35.1 0

2323 CON GY -35.1 0

2324 CON GY -35.1 0

2325 CON GY -35.1 0

3204 CON GY -35.1 0

3205 CON GY -35.1 0

3206 CON GY -35.1 0

3207 CON GY -35.1 4

3207 CON GY -35.1 0

3208 CON GY -35.1 0

3209 CON GY -35.1 0

3210 CON GY -35.1 0

3213 CON GY -45.4 2

3218 CON GY -89 2

3223 CON GY -71.4 3

3406 CON GY -71.4 2

3412 CON GY -13.28 3

3412 CON GY -21.42 3

3418 CON GY -45.4 3

3424 CON GY -12.9 1

4506 CON GY -86.6 3

LOAD 2 SPECTRUM X-RETNING

SELFWEIGHT X 1

SELFWEIGHT Y 1

SELFWEIGHT Z 1

MEMBER LOAD

2101 TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GX 5

2101 TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GY 5
2101 TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GZ 5
2109 CON GX 52.3 1
2113 CON GX 133.7 1
2113 CON GX 214.2 1
2125 CON GX 2262 0
2311 CON GX 89 3
2316 CON GX 45.4 3
2319 CON GX 35.1 0
2320 CON GX 35.1 0
2321 CON GX 35.1 0
2322 CON GX 19.2 1
2322 CON GX 35.1 0
2323 CON GX 35.1 0
2324 CON GX 35.1 0
2325 CON GX 35.1 0
3204 CON GX 35.1 0
3205 CON GX 35.1 0
3206 CON GX 35.1 0
3207 CON GX 35.1 4
3207 CON GX 35.1 0
3208 CON GX 35.1 0
3209 CON GX 35.1 0
3210 CON GX 35.1 0
3213 CON GX 45.4 2
3218 CON GX 89 2
3223 CON GX 71.4 3
3406 CON GX 71.4 2
3412 CON GX 13.28 3
3412 CON GX 21.42 3
3418 CON GX 45.4 3
3424 CON GX 12.9 1
4506 CON GX 86.6 3
2109 CON GY 52.3 1
2113 CON GY 133.7 1
2113 CON GY 214.2 1
2125 CON GY 2262 0
2311 CON GY 89 3
2316 CON GY 45.4 3
2319 CON GY 35.1 0
2320 CON GY 35.1 0

2321 CON GY 35.1 0
2322 CON GY 19.2 1
2322 CON GY 35.1 0
2323 CON GY 35.1 0
2324 CON GY 35.1 0
2325 CON GY 35.1 0
3204 CON GY 35.1 0
3205 CON GY 35.1 0
3206 CON GY 35.1 0
3207 CON GY 35.1 4
3207 CON GY 35.1 0
3208 CON GY 35.1 0
3209 CON GY 35.1 0
3210 CON GY 35.1 0
3213 CON GY 45.4 2
3218 CON GY 89 2
3223 CON GY 71.4 3
3406 CON GY 71.4 2
3412 CON GY 13.28 3
3412 CON GY 21.42 3
3418 CON GY 45.4 3
3424 CON GY 12.9 1
4506 CON GY 86.6 3
2109 CON GZ 52.3 1
2113 CON GZ 133.7 1
2113 CON GZ 214.2 1
2125 CON GZ 2262 0
2311 CON GZ 89 3
2316 CON GZ 45.4 3
2319 CON GZ 35.1 0
2320 CON GZ 35.1 0
2321 CON GZ 35.1 0
2322 CON GZ 19.2 1
2322 CON GZ 35.1 0
2323 CON GZ 35.1 0
2324 CON GZ 35.1 0
2325 CON GZ 35.1 0
3204 CON GZ 35.1 0
3205 CON GZ 35.1 0
3206 CON GZ 35.1 0
3207 CON GZ 35.1 4

3207 CON GZ 35.1 0
3208 CON GZ 35.1 0
3209 CON GZ 35.1 0
3210 CON GZ 35.1 0
3213 CON GZ 45.4 2
3218 CON GZ 89 2
3223 CON GZ 71.4 3
3406 CON GZ 71.4 2
3412 CON GZ 13.28 3
3412 CON GZ 21.42 3
3418 CON GZ 45.4 3
3424 CON GZ 12.9 1
4506 CON GZ 86.6 3
SPECTRUM CQC X 1 ACC SCALE 9.81
0 0.42
0.005 0.48
0.01 0.55
0.015 0.61
0.02 0.67
0.025 0.74
0.03 0.80
0.035 0.86
0.04 0.92
0.045 0.99
0.05 1.05
0.07 1.05
0.09 1.05
0.11 1.05
0.13 1.05
0.15 1.05
0.17 1.05
0.19 1.05
0.21 1.05
0.23 1.05
0.25 1.05
0.345 0.76
0.44 0.60
0.535 0.49
0.63 0.42
0.725 0.36
0.82 0.32

0.915 0.29
1.01 0.26
1.105 0.24
1.2 0.22
1.48 0.14
1.76 0.10
2.04 0.08
2.32 0.06
2.6 0.05
2.88 0.04
3.16 0.03
3.44 0.03
3.72 0.02
4 0.02

LOAD 3 SPECTRUM Y-RETNING

SELFWEIGHT X 1

SELFWEIGHT Y 1

SELFWEIGHT Z 1

MEMBER LOAD

2101 **TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GX 5**
2101 **TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GY 5**
2101 **TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GZ 5**
2109 **CON GX 52.3 1**
2113 **CON GX 133.7 1**
2113 **CON GX 214.2 1**
2125 **CON GX 2262 0**
2311 **CON GX 89 3**
2316 **CON GX 45.4 3**
2319 **CON GX 35.1 0**
2320 **CON GX 35.1 0**
2321 **CON GX 35.1 0**
2322 **CON GX 19.2 1**
2322 **CON GX 35.1 0**
2323 **CON GX 35.1 0**
2324 **CON GX 35.1 0**
2325 **CON GX 35.1 0**
3204 **CON GX 35.1 0**
3205 **CON GX 35.1 0**
3206 **CON GX 35.1 0**
3207 **CON GX 35.1 4**
3207 **CON GX 35.1 0**

3208 CON GX 35.1 0
3209 CON GX 35.1 0
3210 CON GX 35.1 0
3213 CON GX 45.4 2
3218 CON GX 89 2
3223 CON GX 71.4 3
3406 CON GX 71.4 2
3412 CON GX 13.28 3
3412 CON GX 21.42 3
3418 CON GX 45.4 3
3424 CON GX 12.9 1
4506 CON GX 86.6 3
2109 CON GY 52.3 1
2113 CON GY 133.7 1
2113 CON GY 214.2 1
2125 CON GY 2262 0
2311 CON GY 89 3
2316 CON GY 45.4 3
2319 CON GY 35.1 0
2320 CON GY 35.1 0
2321 CON GY 35.1 0
2322 CON GY 19.2 1
2322 CON GY 35.1 0
2323 CON GY 35.1 0
2324 CON GY 35.1 0
2325 CON GY 35.1 0
3204 CON GY 35.1 0
3205 CON GY 35.1 0
3206 CON GY 35.1 0
3207 CON GY 35.1 4
3207 CON GY 35.1 0
3208 CON GY 35.1 0
3209 CON GY 35.1 0
3210 CON GY 35.1 0
3213 CON GY 45.4 2
3218 CON GY 89 2
3223 CON GY 71.4 3
3406 CON GY 71.4 2
3412 CON GY 13.28 3
3412 CON GY 21.42 3
3418 CON GY 45.4 3

3424 CON GY 12.9 1
4506 CON GY 86.6 3
2109 CON GZ 52.3 1
2113 CON GZ 133.7 1
2113 CON GZ 214.2 1
2125 CON GZ 2262 0
2311 CON GZ 89 3
2316 CON GZ 45.4 3
2319 CON GZ 35.1 0
2320 CON GZ 35.1 0
2321 CON GZ 35.1 0
2322 CON GZ 19.2 1
2322 CON GZ 35.1 0
2323 CON GZ 35.1 0
2324 CON GZ 35.1 0
2325 CON GZ 35.1 0
3204 CON GZ 35.1 0
3205 CON GZ 35.1 0
3206 CON GZ 35.1 0
3207 CON GZ 35.1 4
3207 CON GZ 35.1 0
3208 CON GZ 35.1 0
3209 CON GZ 35.1 0
3210 CON GZ 35.1 0
3213 CON GZ 45.4 2
3218 CON GZ 89 2
3223 CON GZ 71.4 3
3406 CON GZ 71.4 2
3412 CON GZ 13.28 3
3412 CON GZ 21.42 3
3418 CON GZ 45.4 3
3424 CON GZ 12.9 1
4506 CON GZ 86.6 3
SPECTRUM CQC Y 1 ACC SCALE 9.81
0.00 0.19
0.01 0.23
0.01 0.26
0.02 0.30
0.02 0.34
0.03 0.38
0.03 0.42

0.04 0.45
0.04 0.49
0.05 0.53
0.05 0.57
0.06 0.57
0.07 0.57
0.08 0.57
0.09 0.57
0.10 0.57
0.11 0.57
0.12 0.57
0.13 0.57
0.14 0.57
0.15 0.57
0.24 0.36
0.32 0.27
0.41 0.21
0.49 0.17
0.58 0.15
0.66 0.13
0.75 0.11
0.83 0.10
0.92 0.09
1.00 0.09
1.30 0.05
1.60 0.03
1.90 0.02
2.20 0.02
2.50 0.01
2.80 0.01
3.10 0.01
3.40 0.01
3.70 0.01
4.00 0.01

LOAD 4 SPECTRUM Z-RETNING
SELFWEIGHT X 1
SELFWEIGHT Y 1
SELFWEIGHT Z 1
MEMBER LOAD
2101 TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GX 5

2101 TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GY 5
2101 TO 2130 2298 TO 2330 3201 TO 3232 3398 TO 3431 UNI GZ 5
2109 CON GX 52.3 1
2113 CON GX 133.7 1
2113 CON GX 214.2 1
2125 CON GX 2262 0
2311 CON GX 89 3
2316 CON GX 45.4 3
2319 CON GX 35.1 0
2320 CON GX 35.1 0
2321 CON GX 35.1 0
2322 CON GX 19.2 1
2322 CON GX 35.1 0
2323 CON GX 35.1 0
2324 CON GX 35.1 0
2325 CON GX 35.1 0
3204 CON GX 35.1 0
3205 CON GX 35.1 0
3206 CON GX 35.1 0
3207 CON GX 35.1 4
3207 CON GX 35.1 0
3208 CON GX 35.1 0
3209 CON GX 35.1 0
3210 CON GX 35.1 0
3213 CON GX 45.4 2
3218 CON GX 89 2
3223 CON GX 71.4 3
3406 CON GX 71.4 2
3412 CON GX 13.28 3
3412 CON GX 21.42 3
3418 CON GX 45.4 3
3424 CON GX 12.9 1
4506 CON GX 86.6 3
2109 CON GY 52.3 1
2113 CON GY 133.7 1
2113 CON GY 214.2 1
2125 CON GY 2262 0
2311 CON GY 89 3
2316 CON GY 45.4 3
2319 CON GY 35.1 0
2320 CON GY 35.1 0

2321 CON GY 35.1 0
2322 CON GY 19.2 1
2322 CON GY 35.1 0
2323 CON GY 35.1 0
2324 CON GY 35.1 0
2325 CON GY 35.1 0
3204 CON GY 35.1 0
3205 CON GY 35.1 0
3206 CON GY 35.1 0
3207 CON GY 35.1 4
3207 CON GY 35.1 0
3208 CON GY 35.1 0
3209 CON GY 35.1 0
3210 CON GY 35.1 0
3213 CON GY 45.4 2
3218 CON GY 89 2
3223 CON GY 71.4 3
3406 CON GY 71.4 2
3412 CON GY 13.28 3
3412 CON GY 21.42 3
3418 CON GY 45.4 3
3424 CON GY 12.9 1
4506 CON GY 86.6 3
2109 CON GZ 52.3 1
2113 CON GZ 133.7 1
2113 CON GZ 214.2 1
2125 CON GZ 2262 0
2311 CON GZ 89 3
2316 CON GZ 45.4 3
2319 CON GZ 35.1 0
2320 CON GZ 35.1 0
2321 CON GZ 35.1 0
2322 CON GZ 19.2 1
2322 CON GZ 35.1 0
2323 CON GZ 35.1 0
2324 CON GZ 35.1 0
2325 CON GZ 35.1 0
3204 CON GZ 35.1 0
3205 CON GZ 35.1 0
3206 CON GZ 35.1 0
3207 CON GZ 35.1 4

3207 CON GZ 35.1 0
3208 CON GZ 35.1 0
3209 CON GZ 35.1 0
3210 CON GZ 35.1 0
3213 CON GZ 45.4 2
3218 CON GZ 89 2
3223 CON GZ 71.4 3
3406 CON GZ 71.4 2
3412 CON GZ 13.28 3
3412 CON GZ 21.42 3
3418 CON GZ 45.4 3
3424 CON GZ 12.9 1
4506 CON GZ 86.6 3
SPECTRUM CQC Z 1 ACC SCALE 9.81 0 0.42
0.005 0.48
0.01 0.55
0.015 0.61
0.02 0.67
0.025 0.74
0.03 0.80
0.035 0.86
0.04 0.92
0.045 0.99
0.05 1.05
0.07 1.05
0.09 1.05
0.11 1.05
0.13 1.05
0.15 1.05
0.17 1.05
0.19 1.05
0.21 1.05
0.23 1.05
0.25 1.05
0.345 0.76
0.44 0.60
0.535 0.49
0.63 0.42
0.725 0.36
0.82 0.32
0.915 0.29

1.01 0.26
1.105 0.24
1.2 0.22
1.48 0.14
1.76 0.10
2.04 0.08
2.32 0.06
2.6 0.05
2.88 0.04
3.16 0.03
3.44 0.03
3.72 0.02
4 0.02

LOAD COMB 11 COMBINATION LOAD CASE 11
2 1.0 3 0.3 4 0.3
LOAD COMB 12 COMBINATION LOAD CASE 12
2 0.3 3 1.0 4 0.3
LOAD COMB 13 COMBINATION LOAD CASE 13
2 0.3 3 0.3 4 1.0
PERFORM ANALYSIS
FINISH

-- SLUTT --