



Universitetet  
i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

## MASTEROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering: Konstruksjoner og materialer/ Byggkonstruksjoner	Vårsemesteret, 2013  Åpen
Forfatter: Kristian Svela Øglænd	..... (signatur forfatter)
Fagansvarlig: Jasna Bogunovic Jakobsen Veileder(e): Jasna Bogunovic Jakobsen	
Tittel på masteroppgaven: Vindindusert respons av en lang hengebro  Engelsk tittel: Wind induced response of a long suspension bridge	
Studiepoeng:30	
Emneord: Hengebro Sognefjorden Vindlast Turbulens Abaqus Statisk analyse Dynamisk analyse Flutter	Sidetall: 62  + vedlegg/annet: 43  Stavanger, 14.06.2013

## Sammendrag

Verdens lengste hengebro er per dags dato Akashi Kaikyo med hovedspenn på 1991 meter. Dersom det blir valgt hengebro som krysningsmåte over Sognefjorden vil den, med sitt hovedspenn på 3700 meter, bli verdens lengste med god margin. Ved konstruksjonen av lange hengebroer vil den aerodynamiske adferden, og da særlig flutter, spille en stor rolle og det vil bli nødvendig å tenke nytt i forhold til dagens hengebroer. De siste årene er det gjort en del studier på dette, og for lange spenn er det vist at det er et brotverrsnitt bestående av to separate brokasser som er den beste løsningen. For å undersøke et brotverrsnitts oppførsel under vindlast foretas det som regel vindtunnelforsøk. I slike forsøk er det viktig å inkludere så mange detaljer ved brotverrsnittet som mulig, da selv de minste detaljer vil ha en innvirkning på de målte parametere. Fra slike vindtunnelforsøk finner man blant annet de dimensjonsløse formfaktorer for statiske vindkrefter, og kan da beregne de såkalte aerodynamiske deriverte ved ulike vindhastigheter.

I denne oppgaven er det tatt utgangspunkt i en grov *Abaqus*modell og en rapport som heter *Brusymfonien* utarbeidet for *Statens Vegvesen*. *Abaqus*modellen av en tenkt hengebro over Sognefjorden, med to separate brokasser, er gitt som en input-fil levert av Kristian Berntsen ved *Statens Vegvesen*. Det er også gitt en tegning av det foreslåtte brotverrsnittet. *Brusymfonien* inneholder omfattende data om brotverrsnitt bestående av to separate brokasser.

Fra *Statens Vegvesen* ble det informert om at det ble brukt data fra *Brusymfonien* for et brotverrsnitt der det er 20 meter senteravstand mellom de to brokassene. Denne senteravstanden finner man igjen på tegningen fra *Statens Vegvesen*. Mens *Statens Vegvesen* har 12.9 meter som bredde på en brokasse, er en brokasse i *Brusymfonien* 7.5 meter bred. Dette gjør at luftgapet mellom de to brokassene blir 7.1 meter for tverrsnittet fra *Statens Vegvesen*, kalt SV1, og 12.96 meter for tverrsnittet gitt i *Brusymfonien*, kalt D13. *Brusymfonien* har også målinger gjort for et tverrsnitt som har 15 meter senteravstand. Dette gir et luftgap på 7.96 meter, kalt D8.

Ved endringer av luftgapet vil det skje store endringer ved formfaktorer og for flutterhastighet. Det er derfor i denne oppgaven undersøkt hvilke forskjeller som oppstår ved påføring av statiske laster ved bruk av formfaktorer for D8 og for D13. D8 har negativ løft og positivt moment, mens D13 har positivt løft og positivt moment, begge ved 0 graders rotasjon. Dette gjør at ved økende vindhastigheter vil de vertikale forskyvningene av brokassene og spenningene i hovedkablene bli forskjellige. Utnyttelsen av kapasiteten til hovedkablene vil variere lite og vil ved begge tilfellene ved middelvind være rundt 40 %.

Det er i tillegg gjort endringer i input-filen for å modellere to nye broer med 7.96 og 12.96 meter luftgap for å finne nye egenfrekvenser for estimering av kritisk flutterhastighet. Estimering av kritisk flutterhastighet ble foretatt ved bruk av forenklet metode og ved bruk av data fra vindtunnelforsøk og 2DOF flutter. Den forenklete metoden viste å stemme godt overens med 2DOF flutter for tverrsnitt uten ledskovler, hvor det ble svært lav kritisk flutterhastighet, 27.8m/s og 37.1m/s for henholdsvis D8 og D13, med frekvenser fra de nye bromodellene. Ved innføring av ledskovler økte den kritiske flutterhastigheten til 62m/s for D8, som er over det dobbelte, og til 114.2m/s for D13, som nesten er en tredobling, med egenfrekvenser fra de to nye bromodellene.

## Forord

Denne oppgaven er avslutningen på min toårige mastergrad innen konstruksjoner og materialer med fordypning i bygg- og offshorekonstruksjoner ved Universitetet i Stavanger. Oppgaven tar for seg en eventuell hengebro over Sognefjorden, som er en del av veiprosjektet *Ferjefri E39*, og er skrevet i samarbeid med Statens Vegvesen. *Akashi Kaikyo* er per dags dato verdens lengste hengebro med et hovedspenn på 1991 meter. Dersom det blir bygget hengebro over Sognefjorden vil den, med sitt hovedspenn på cirka 3700 meter, bli verdens lengste hengebro med god margin.

Opgaven tar utgangspunkt i en elementmodell levert av Statens Vegvesen og analyser og målinger fra rapporten *Brusymfonien*.

Jeg vil rette en takk til veileder ved Universitet i Stavanger, Jasna Bogunovic Jakobsen, Kristian Berntsen ved Statens Vegvesen for *Abaqus*modeller og regneark for hengestagskrefter.

Jeg vil også takke mine medstudenter Kristian Dahl og Erlend Hopland for gode samtaler på «kontoret» som har hjulpet til med å holde humøret oppe.

Så rettes det en stor takk til min søster, Ingvild Sveta Øglænd, som har lest korrektur på oppgaven og kommet med mange forbedringer når det gjelder det skriftlige.

Universitetet i Stavanger, 14. juni 2013

Kristian Sveta Øglænd

## Innholdsfortegnelse

Sammendrag .....	i
Forord .....	ii
Innledning .....	1
1 Generelt om hengebroer .....	2
1.1 Hengebroens historie .....	2
1.2 Hengebroers oppbygning .....	3
1.2.1 Forankring .....	3
1.2.2 Tårn .....	4
1.2.3 Hovedkabler .....	5
1.2.4 Hengestenger .....	6
1.2.5 Brokasse .....	7
2 Krefter som virker på hengebroer .....	8
2.1 Egenlast .....	9
2.2 Trafikklast .....	9
2.2.1 Last på kjørebane og skuldre .....	9
2.3 Vindlast .....	13
2.3.1 Statisk vindlast .....	16
2.3.2 Aeroelastisk atferd og turbulens .....	20
3 Abaqus .....	27
3.1 Trinnvis oppbygging av modellen av Sognefjordbroen .....	27
3.1.1 Hengestagskrefter .....	27
3.1.2 Trinn 1 og 2, Hovedkabler .....	29
3.1.3 Trinn 3, Brokasser og tverrbjelker .....	30
3.1.4 Trinn 4 og 5, Hengestenger .....	30
4 Egenfrekvenser og svingeformer .....	32
4.1 Egenfrekvenser .....	32
4.1.1 Egenfrekvenser for asymmetriske vertikale svingeformer .....	32
4.1.2 Egenfrekvenser for symmetriske vertikale svingeformer .....	33
4.1.3 Egenfrekvenser for symmetrisk torsjon .....	34
4.2 Svingeformer for brokassen .....	35
4.2.1 Asymmetriske vertikale svingeformer .....	36
4.2.2 Symmetrisk vertikale svingeformer .....	37
4.2.3 Asymmetrisk torsjons svingeformer .....	38

4.2.4	Symmetrisk torsjons svingeformer.....	39
5	Analyse av vindkrefter .....	41
5.1	Statiske vindkrefter .....	42
5.2	Dynamiske vindkrefter .....	49
5.2.1	Virvelinduserte svingninger.....	50
5.2.2	Turbulens.....	51
5.2.3	Flutter .....	53
6	Diskusjon og konklusjon .....	55
7	Referanser .....	57
8	Vedlegg .....	58

## Innledning

Europavei 39 stekker seg 1100 kilometer langs vestkysten av Norge, mellom Kristiansand i sør og Trondheim i nord. Langs denne veistrekningen er det syv fjorder som må krysses ved bruk av ferger. Dette gjør at det tar cirka syv timer lenger tid å kjøre strekingen enn det kunne ha tatt dersom det var bygget broer eller tunneler over/under disse fjordene. *Ferjefri E39* er et prosjekt i utredningsfase som tar for seg dette, hvor den kanskje største utfordringen blir å krysse Sognefjorden. Sognefjorden er Norges lengste og dypeste fjord, og på det foreslåtte krysningspunktet er den 3,7 kilometer bred. Dybden gjør en undersjøisk tunnel uaktuell og bredden gjør utfordringene med en bro store.

Et av forslagene for kryssing er byggingen av en hengebro. Denne vil da med sitt hovedspenn på 3700 meter bli verdens lengste. De siste årene har teknologien som gjør det mulig å bygge en så lang hengebro blitt tilgjengelig, men utfordringene er fortsatt store. Denne oppgaven tar for seg noen av disse utfordringene. Oppgaven tar utgangspunkt i en elementmodell av en 3700 meter lang bro levert av *Statens Vegvesen*, samt rapporten *Brusymfonien* som inneholder data for brotverrsnitt som det er aktuelt å bruke på en så lang bro.

Oppgaven går ut på å:

- Sette seg inn i krefter som virker på en hengebro
- Sette seg inn i oppbyggingen av en elementmodell av en hengebro for å så kunne foreta endringer ved modellen
- Sette seg inn i responsen av en hengebro under vindlast
- Sammenligne forskjeller ved bruk av data for forskjellige brotverrsnitt

Oppgaven inneholder:

- En innledning med kort historie om hengebroer og dens oppbygning
- En gjennomgang av krefter som virker på broen med særlig fokus på vind
- En gjennomgang av oppbyggingen av en modell av en hengebro i *Abaqus*
- Håndberegninger av egenfrekvenser for broen
- Identifisering av viktige svingeformer
- Analyse av vindkrefter, statiske og dynamiske

# 1 Generelt om hengebroer

På en hengebro henger brokassen i hengestenger fra hovedkablene. Hovedkablene strekker seg mellom to tårn og ned til forankringene på begge sider av broen. Hengebroer baserer seg på at hovedkreftene som virker i broen er strekk i kablene og trykk i tårnene. Avstandene mellom de to tårnene kalles hovedspennet, og det er dette spennet som regnes som lengden av en hengebro. Verdens lengste hengebro, *Akashi Kaikyo*, har et hovedspenn på 1991 meter.

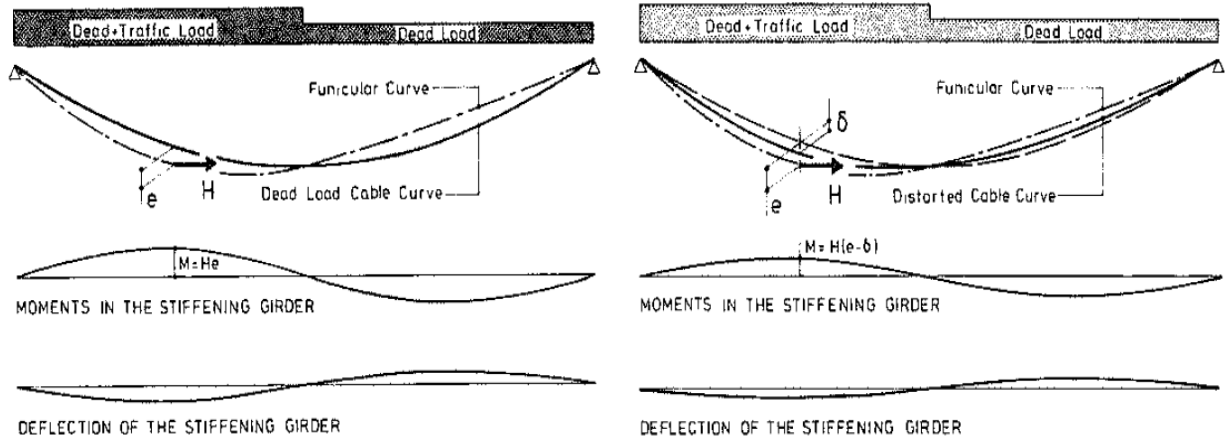
## 1.1 Hengebroens historie

Hengebroer er en av de første typer broer som ble brukt av mennesker. De enkleste versjonene av den er enkelt og greit et tau over det du vil krysse. Enkelte steder brukes slike broer den dag i dag. Disse broene kan være opp til 200 meter lange. Rundt år 700 bygde kinesere enkle hengebroer med planker mellom par av kjettinger [1].

Den reelle forgjengeren til dagens hengebroer så dagens lys på 1800-tallet da amerikaneren *James Finley* tok patent på et system der et stivt dekke henger under broens kabler. Den første store broen som ble bygget på denne måten ble bygget av *Thomas Telford* og krysser Menaistredet i England. Broen ble ferdigstilt i 1826, med 47 meter høye tårn av stein, en totallengde på 521 meter og hovedspenn på 176 meter. Brokassen hang på jernkjettinger, som ble byttet ut med stålkjettinger i 1939 og broen brukes fortsatt i dag [2].

På midten av 1800-tallet kom amerikaneren *John Roebling* med to store forbedringer til konstruksjonen av hengebroer. Den ene var å gjøre brokasse stivere ved bruk av fagverk. Den andre, og kanskje viktigste, var måten hovedkablene ble konstruert. Rundt 1830 kom franske ingeniører frem til at kabler konstruert av mange mindre, tynnere tråder hadde bedre egenskaper enn kjetting. *Roebling* utviklet en metode for å konstruere kablene på byggeplassen, kalt spinning [2], som fortsatt benyttes på broer i dag.

Fra midten og til slutten av 1800-tallet ble ingeniører i større grad lært opp til å støtte seg mer på beregninger. Dette førte til at broene som ble bygget på den tiden måtte ha et enklere kabelsystem for å få en mer nøyaktig beregningsmodell. De eldre hengebroene som ingeniører som *Roebling* hadde konstruert, for eksempel *Brooklyn Bridge* i New York, hadde så stor grad av statisk ubestemthet at det ville involvert numeriske beregninger av uoverkommelig størrelse ved bruk av elastisitetsteori. Beregningene lente seg i stor grad på førsteordensteori, som gjorde at brokassene ble svært høye grunnet det høye bøyemomentet man får i brokassen ved bruk av førsteordensteori. Helt på slutten av 1800-tallet ble *The Deflection Theory* lansert av *Josef Melan* i 1888. Denne andreordensteorien gjorde at bøyemomentet i brokassen kunne over halveres i forhold til førsteordensteori, og brokassene ble lavere.



Figur 1-1 Illustrert eksempel på forskjellen mellom 1.ordens teori og 2.ordens teori. Her illustrert ved hjelp av trafikklast over halve broens lengde. 1. ordens teori til venstre på bilde, hentet fra [2]

I 1930-årene ble det lansert en tredimensjonal teori som en videreutvikling av *The Deflection Theory*. Denne teorien tok også hensyn til kablernes forskyvning under sideveis belastning, hvor det tidligere bare ble tatt hensyn til vertikal belastning i planet. Denne nye teorien førte til enda lavere og smalere brokasser. Dette gjorde at konstruksjonene ble slankere og slankere. Til slutt førte dette til kollapsen av *Tacoma Narrow Bridge* i 1940. Broen hadde god sikkerhetsmargin med tanke på trafikklast og statisk vindtrykk, men brokassen hadde ingen torsjonsstivhet [2]. Den kollapset grunnet dynamiske vindkrefter som ledet til asymmetriske torsjonsbevegelser om midten av hovedspennet [2].

## 1.2 Hengebroers oppbygning

Hengebroer består i all hovedsak av fem hovedelementer

- Ankerfester
- Tårn
- Hovedkabler
- Hengestenger
- Brokasse

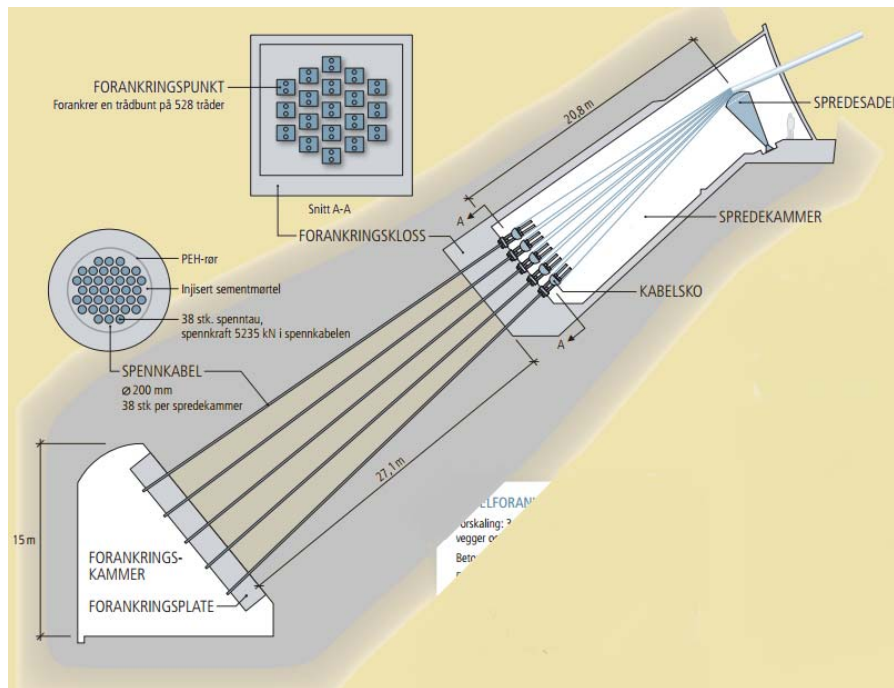
Dette delkapittelet er stort sett hentet fra *Gimsing* [2]

### 1.2.1 Forankring

Forankring av hengebroer skjer enten ved hjelp av konstruerte forankringsklosser av for eksempel betong, eller så forankres kablene direkte i fjellet. I Norge er det den siste som er vanligst siden hengebroene i Norge som regel bygges i nærheten av fjell som er godt egnet til denne typen forankring, som for eksempel over fjorder. Hovedkablene føres ned fra tårnet til en spredesadel hvor kableen splittes opp inne i spredesadelen. I bunnen av spredesadelen føres den oppsplittede kableen rundt en kabelsko. Kabelskoen er festet til forankringsklossen med flere forankringsstag. Fra forankringsklossen går det så spennstål gjennom fjellet og ned til forankringskammeret. Det borres



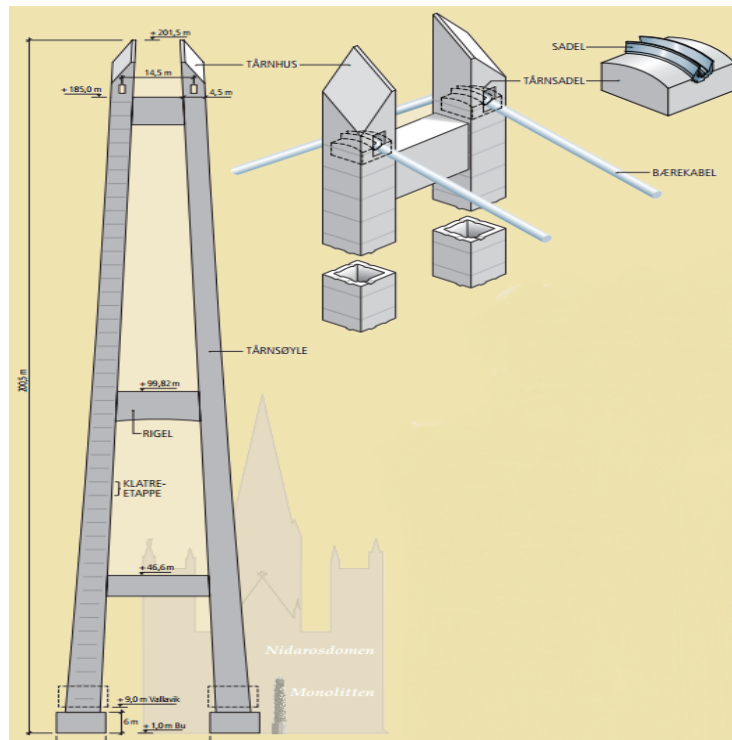
hull gjennom fjellet for å føre spennstålet ned til forankringsplaten. Vekten av fjellet over spennkabelen er det som bærer broen.



Figur 1-2 Forankring av kabler Hardangerbroen [3]

## 1.2.2 Tårn

Laster på brokassen og dens egenvekt blir overført til tårnene via hengestagene og hovedkablene. På toppen av tårnene er det en sadel som overfører kreftene ned i tårnet. Over sadelen blir hovedkablene splittet opp i mindre kabler før de samles igjen på den andre siden av tårnet. Siden tårnene bærer tyngden til brokassen og hovedkablene blir det svært store trykkrefter i dem. De fleste hengebroer har tårn bygget av stål, mens i Norge er de fleste bygget i betong. Stål blir ofte brukt for de har bedre egenskaper med tanke på jordskjelv, mens betong brukes grunnet betongens høye trykkapasitet. I Norge, hvor store jordskjelv sjeldent forekommer, er tårnene som regel fundamentert til grunnen. Dette gir et stigende moment fra toppen og nedover i tårnet, noe som gjør at tårnene ofte smalner med høyden. Andre broer har tårn som holdes på plass kun ved hjelp av egenvekten, som *Golden Gate* i San Fransisco. Når jordskjelv inntreffer, som er svært vanlig i området, beveger tårnene seg med bakken og utsettes dermed for mindre krefter. Tårnene til en bro er i bunn og grunn en vanlig tårnstruktur, men med en viktig forskjell. Der et frittstående tårn som regel har moment grunnet vindlast som den dominerende lasten, har brotårn aksialkrefter som dimensjonerende last. Denne aksialkraften kommer fra de vertikale komponentene i kablene og dette gjør at selv svært høye brotårn er stabile, og vindlast får liten innvirkning på tårnene når broen er ferdig.

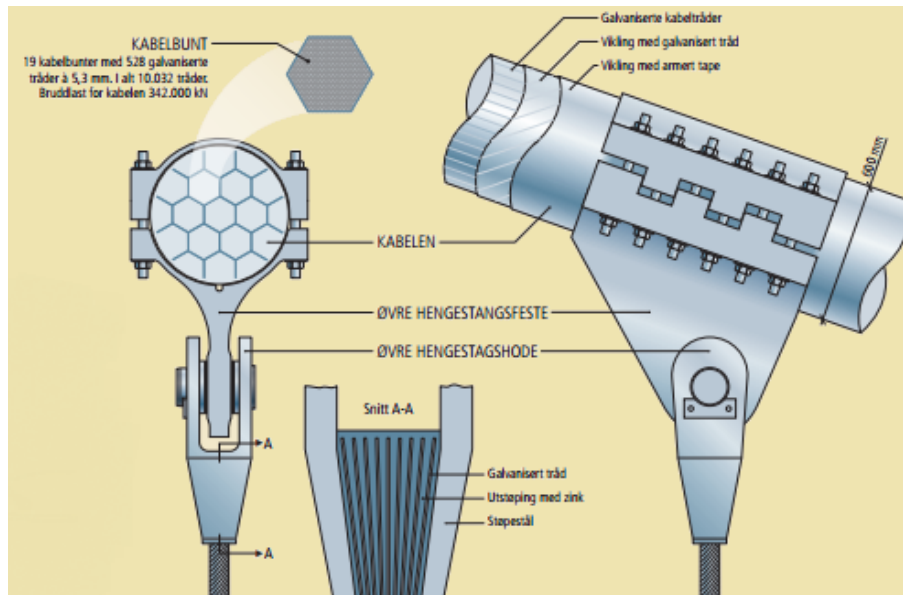


Figur 1-3 Hardangerbroens tårn [3]

### 1.2.3 Hovedkabler

Hovedkablene strekker seg fra ankerfestet til ankerfestet via de to tårnene. Mellom tårnene henger de som en parabel og er den konstruksjonsdelen som bærer brokassen. En hovedkabel består av mange mindre kabler som igjen er sammensatt av svært mange tråder. Denne måten å konstruere kablene på er grunnen til at det er mulig med svært lange hovedspenn på hengebroer. Når man strekker ut stål til tynne tråder for så å samle de sammen igjen, vil stekkapasiteten øke i forhold til en solid stålstang med samme diameter. Under denne prosessen vil man også miste så å si all bøyemomentkapasitet. Dette gjør at hengebroer er svært fleksible, men får svært høy kapasitet med tanke på kun egenvekt og statiske laster, som gir stekk i hovedkablene. Samtidig blir kablene utsatt for dynamiske krefter under konstruksjonsperioden til broen, da begrenset last på kabelen gir begrenset stivhet for den uferdige konstruksjonen.

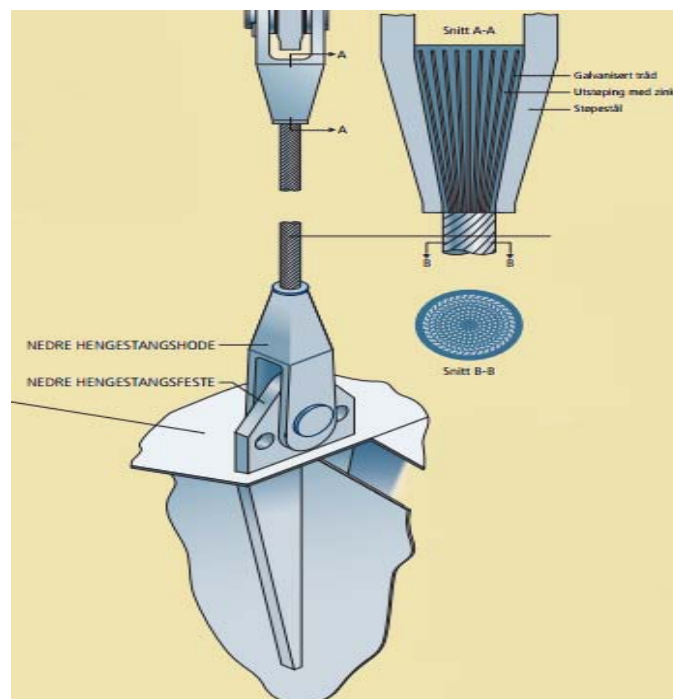
Hovedkablene er enten prefabrikkert og transportert til byggeplassen eller trukket frem og tilbake mellom ankerblokkene ved hjelp av spinning. Prefabrikerte kabler er ofte å foretrekke siden de er mindre utsatt for vindlast under konstruksjon, men kan være vanskelige å transportere og montere. Spesielt for hengebroer med langt hovedspenn vil det være tilnærmet umulig å benytte seg av prefabrikerte kabler.



Figur 1-4 Hovedkabel og øvre hengestagsfeste Hardangerbroen [3]

#### 1.2.4 Hengestenger

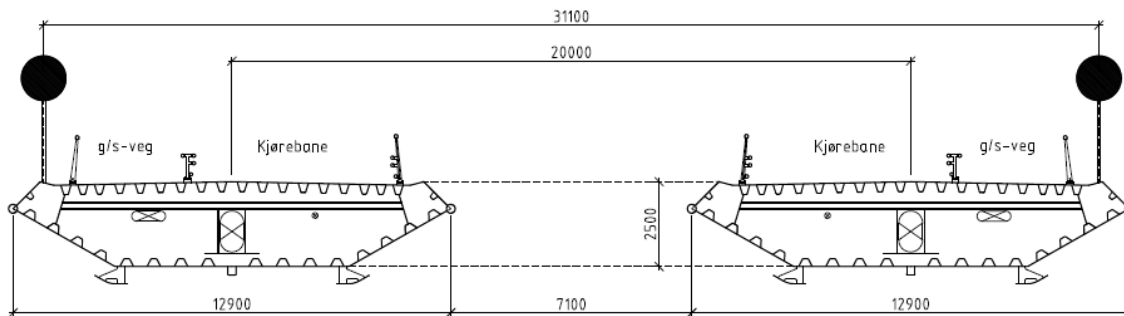
Hengestengene er det som binder brokassen og hovedkablene sammen. De skal overføre alle kreftene i brokassen til hovedkablene. De er konstruert som staver som er leddet i begge ender og tar kun opp aksialkrefter. Hengestengene er plassert ut med et gitt mellomrom etter beregninger for å fordele kreftene fra brokassen til hovedkablene på en mest mulig effektiv måte.



Figur 1-5 Nedre hengestagsfeste Hardangerbroen [3]

### 1.2.5 Brokasse

Brokassen skal bære trafikklast og avstive brokonstruksjonen. Hengebroer er som nevnt tidligere svært fleksible konstruksjoner grunnet den neglisjerbare momentstivheten i hovedkablene. Dersom man ikke har en stiv brokasse vil hele broen bli for fleksibel og det ville blitt store deformasjoner bare om en bil hadde kjørt over broen. Brokassen fordeler også konsentrerte krefter over flere hengestenger og vil dermed redusere den dimensjonerende kraften i hver hengestang. Som nevnt i kapittel 1.1 er brokasser også en av de mest utfordrende delene av en hengebro siden den er utsatt for dynamiske vindkrefter. Utformingen av brokassen er derfor svært viktig for å minimere aeroelastiske effekter som virvelinduserte svingninger, galoppering og flutter. Etter hvert som hovedspennet i hengebroer øker vil dette bli viktigere og viktigere. Ved undersøkelser er det kommet frem til at dersom man skal bygge hengebroer med lange hovedspenn er det et brotvernsnitt bestående av to separate brokasser, som på Figur 1-6, som er det beste alternativet med tanke på å gjøre de aerodynamiske effektene minst mulig og broen så stabil som mulig under vindlast.



Figur 1-6 Foreslått tverrsnitt Sognefjordbroen, tegning levert av Statens Vegvesen

## 2 Krefter som virker på hengebroer

Det er svært mange krefter som virker på en hengebro. Disse kan deles inn i fire hovedgrupper.

- Permanente laster
- Variable laster
- Deformasjonslaster
- Ulykkeslaster

Videre kan disse hovedgruppene deles inn i de forskjellige lastene under hver gruppe som vist i tabellen under.

LAST	BETEGNELSE
<b>PERMANENTE LASTER</b>	<b>G</b>
- Egenlast (tyngde)	
- Vanntrykk, permanent del	
- Jordtrykk	
<b>VARIABLE LASTER</b>	<b>Q*</b>
- Trafikklast (på bru og tilstøtende fyllinger)	
- Støt-/fortøyningslast fra ferje	
- Variabel ballast og utstyrsvekt	
- Variabel last i midlertidige faser	
- Friksjon	
- Snø	
- Vind	
- Bølger	
- Strøm	
- Vanntrykk, variabel del	
- Last fra variasjon i vannets tetthet	
- Is	
- Temperatur	
- Jordskjelv	<b>A<sub>E</sub></b>
<b>DEFORMASJONSLASTER</b>	<b>G</b>
- Svinn, kryp og relaksasjon	
- Setninger	
- Tvang fra bygge- eller installasjonsmetode	
- Forspenning (Spennkraft)	<b>P</b>
<b>ULYKKESSLASTER</b>	<b>A</b>
- Påkjøringslast fra kjøretøy	
- Påseilingslast fra skip	
- Påkjøringslast fra jernbanetrafikk	
- Kabelbrudd	
- Fallende gjenstander	
- Eksplosjon	
- Brannt	
- Laster forårsaket av skred	

Figur 2-1 Oversikt over laster som virker på en bro fra Håndbok 185 [4]

Som Figur 2-1 viser er det svært mange laster som virker på en bro. I denne oppgaven vil det fokuseres på trafikklast og vindlast. I denne delen vil det forekomme en gjennomgang av disse lastene før det blir en analyse av statiske og dynamiske vindkrefter senere.

## 2.1 Egenlast

Egenlast er egenvekten av de forskjellige konstruksjonselementene som inngår i broen. I modellen som brukes i denne oppgaven er ikke tårnene med. Man antar at bevegelsen i tårntoppen er svært begrenset og at tårnene ikke har noe vesentlig effekt på svingeformer og egenfrekvenser. Dermed blir et fiktivt tårn innført ved hjelp av at nodene på toppen, hvor hovedkablene skulle ha hvilt på tårnet, blir fastholdt i horisontaltretning på tvers av broen og vertikalt.

	Vekt pr meter [kg/m]	Lengde [m]	Totalt vekt [tonn]	Egenlast (kN/m)
<b>Brokasser</b>	13353,2	3700	49406,84	130,9548324
<b>Tverrbjelker</b>	1056	873,3	922,2048	2,444341209
<b>Hovedkabler</b>	18860	3798,66667	71642,85333	189,8922872
<b>Hengestenger</b>	460	3700	1702	4,51122
<b>Totalt</b>	<b>33729,2</b>		<b>123673,8981</b>	<b>327,8026808</b>

Tabell 2-1 Vekt i hovedspenn på Sognefjordbroen beregnet etter data fra Abaqus

## 2.2 Trafikklast

Alt fra dette delkapittelet er hentet fra *Statens Vegvesen Håndbok 185, Normaler* [5]

Trafikklast er naturlig nok en av de viktigste lastene på en bro. De består av flere elementer, «Med trafikklast forstås belastningen i vertikal og horisontal retning på kjørebane, skulder, gangbane, sykkelbane og midtdeler fra så vel forgjengere som de lette og tunge kjøretøy som kan belaste konstruksjonen uten spesielle restriksjoner» [5]. Trafikklastene kan deles inn på følgende måte

- Last på kjørebane og skuldre
  - o Vertikal last
  - o Horisontal last
- Utmattingslast

### 2.2.1 Last på kjørebane og skuldre

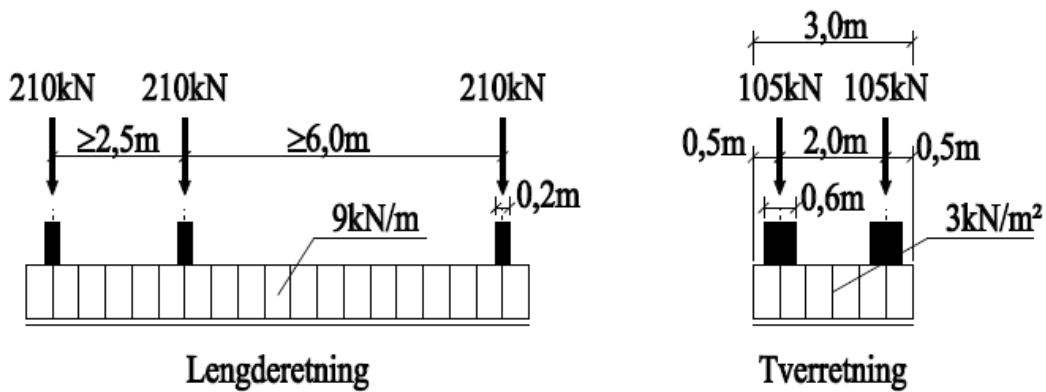
#### 2.2.1.1 Vertikal last

Virkningene fra vertikal last skal beregnes fra tre lasttyper hvor de enkelte delene av broen belastes med den av de tre lasttypene som gir den mest ugunstige virkningen. De tre lasttypene kalles V1, V2 og V3 [5]. Lasttypene V1 og V2 plasseres innfor et lastfelt, der et lastfelt er en tre meter bred flate,

med lengde lik broens lengde. I lengderetning plasseres trafikklasten slik at den mest ugunstige lastvirkningen oppnås. Lastfeltenes plassering i tverretning bestemmes i hvert enkelt tilfelle slik at mest ugunstig virkning oppnås. Antallet lastfelt skal ikke overstige antall kjørefelt som er forutsatt for broen.

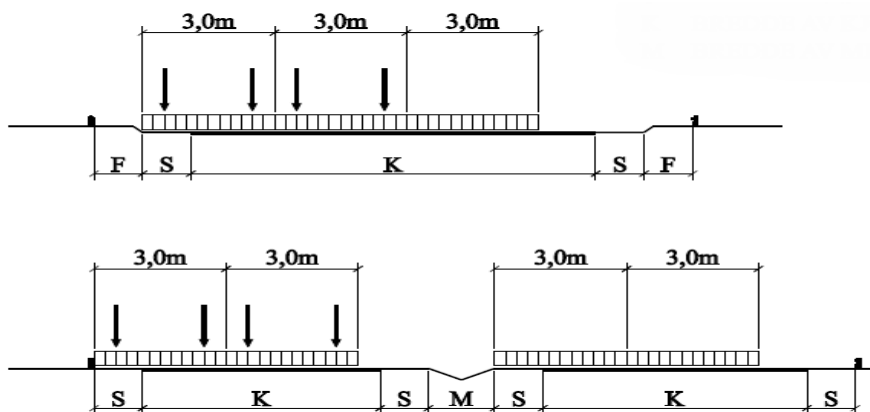
### 2.2.1.1.1 Lasttype V1

Lasttype V1 kan sees på som en lastebil eller trailer. I lengderetning består den av en jevnt fordelt last og tre aksellaster. Hver av disse aksellastene er delt opp i to hjullaster som er anlagt på et rektangel. Hjullastene står symmetrisk i lastfeltet.



Figur 2-2 Lasttype V1 fra Håndbok 185 [5]

Maksimalt to lastfelt belastes med hele V1. Resterende lastfelt belastes kun med den jevnt fordelte lasten. Plasseringen av lastfeltene i tverretningen velges som det mest ugunstige tilfelle der hele området som er tilgjengelig for trafikk er tilgjengelig for plassering av lastfeltene. Dette inkluderer også skuldre og andre flater i kjørebansens plan. De delene av broen som faller utenfor lastfeltene gis ingen trafikklast.

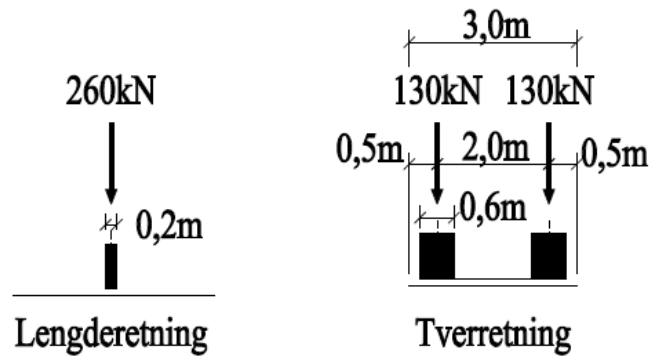


Figur 2-3 Eksempler på plasseringen av V1 [5]

Hvor **F** er bredden av fortau, **S** er bredde av skuldre, **K** er bredde av kjørebane og **M** er bredde av midtdelel.

### 2.2.1.1.2 Lasttype V2

Lasttype V2 består av en aksellast i lengderetningen som er fordelt på to hjullaster i tverretningen. Disse to er plassert med senteravstand på to meter og har en anleggsflate som et rektangel som for V1.

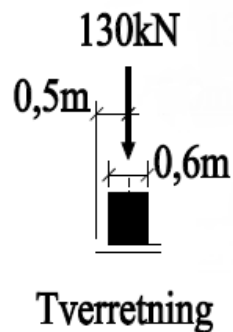


Figur 2-4 Lasttype V2 [5]

Ett eller to lastfelt belastes med V2 etter samme retningslinjer som for V1.

### 2.2.1.1.3 Lasttype V3

Denne lasttypen er en enkelt hjullast med anleggsflate lik V1 og V2 og minste avstand fra senter av anleggsflate til rekkverk, eller en annen hindring på siden av broen, er 0,5 meter.



Figur 2-5 Lasttype V3 [5]

### 2.2.1.2 Horizontal last

De horisontale trafikklastene kan ikke opptre alene, kun samtidig med de tilhørende vertikale trafikklastene.

#### 2.2.1.2.1 Bremselast

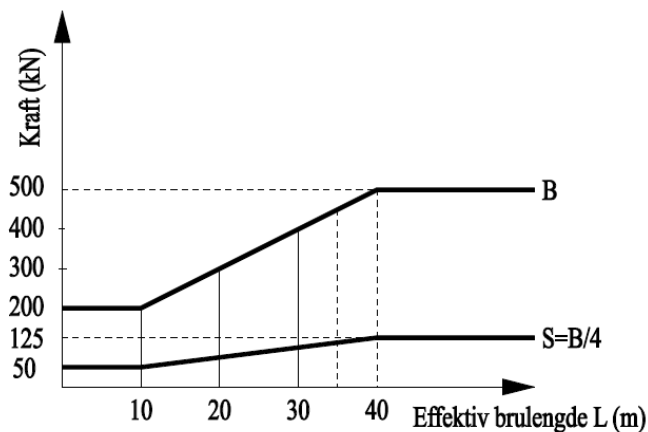


Virkingen av trafikens bremsing og akselerasjon for broer med effektiv lengde  $L \leq 10m$  er satt til  $B = 200 \text{ kN}$  og for broer med effektiv lengde  $L \geq 40m$  er virkingen satt til  $B = 500 \text{ kN}$ . For effektive lengder mellom 10 og 40 meter bestemmes bremselasten ved hjelp av rettlinjert interpolasjon. Ved to eller flere lastfelt i samme kjøreretning er horisontallasten  $1,5B$ . Med effektiv lengde menes den samlede lengde av den eller de brodelene som samtidig kan overføre bremselast til den delen av broen som skal dimensjoneres.

Bremselast regnes å kunne opptre samtidig med lasttypene  $V1$  og  $V2$ . Den forutsettes å virke i broens lengderetning i samme høyde som kjørebanelen og kan antas å være jevnt fordelt over hele kjørebanelens bredde.

#### 2.2.1.2.2 Sidelast

Sidelast er virkingen av skjev eller usymmetrisk bremsing, sidestøt og lignende. Sidelast beregnes på grunnlag av en vilkårlig plassert horisontal last som er  $S = 0,25B$ , og opptre samtidig med bremselasten og den tilhørende vertikallasten. Den antas å virke vinkelrett på broens lengderetning og i høyde med kjørebanelen.



Figur 2-6 Bremselast og sidelast [3]

#### 2.2.1.2.3 Sentrifugallast

Sentrifugallasten virker sammen med  $V1$  og  $V2$  med samme fordeling i broens lengderetning, men ikke samtidig som bremselasten og sidelasten. Den virker i høyde med kjørebanelen og det er nødvendig å ta hensyn til den ved  $R \geq 1500m$ .

$$S_c = \frac{40}{R} V \leq 0,2V \quad (2-1)$$

Hvor  $S_c$  er sentrifugallasten med samme enhet som  $V$  (kN, kN/m),  $V$  er vertikallasten og  $R$  er horisontalkurvens radius.

### 2.2.1.3 Utmattingslast

Dersom det ikke utføres en mer nøyaktig bestemmelse av utmattingslast skal følgende legges til grunne.

Lasten består av tre aksellaster med avstander som vist i Figur 2-2. Aksellasten består av fem grupper hvor størrelse og andelen av totale passeringen av tunge kjøretøy,  $n$ , er gitt av tabell 2-2.

Aksellast [kN]	Andel av $n$ [%]
3 · 60	75
3 · 80	10
3 · 100	5
3 · 125	5
3 · 145	5

Tabell 2-2 Fordeling av aksellast for utmattingsberegninger [5]

Dersom utmattingskapasiteten er gitt av en rettlinjert S/N-kurve uten utmattingsgrense med  $m=3$ , der  $m$  er helningskoeffisient, kan det regnes forenklet med tre laster på  $80kN$  med totalt antall passeringer  $n$ .

Lasten regnes å bevege seg langs broens lengderetning med eksentrisitet på maks  $0,3m$  til begge sider av senterlinjen i kjørefeltet. Den mest ugunstige eksentrisiteten legges til grunne for dimensjonering. Det skal kun forekomme last i et kjørefelt om gangen. For broer med mer enn ett kjørefelt i samme retning skal lasten plasseres i høyre kjørefelt for hver retning.

Totalt antall passeringer av utmattingslasten regnes som å være

$$n = 3650\text{ÅDT}$$

Der  $n$  er antall passeringer og  $\text{ÅDT}$  er vegens årstdøgntrafikk som ikke skal være mindre en 1000.

## 2.3 Vindlast

Vindlast utgjør en av de største utfordringene ved dimensjonering av lange hengebroer. Vindlast på en bro består av en statisk del og en dynamisk del. De statiske kreftene beregnes ut fra middelvindhastighet. De dynamiske kreftene skyldes turbulens, virvelavløsninger og konstruksjonens bevegelse i luftstrømmen.

Statens Vegvesen Håndbok 185 Eurokode utgave [4] deler vindlast på broer inn i tre vindklasser, klasse I, II og III, der klasse III omhandler alle broer hvor følgende to betingelser er oppfylt.

- Laveste egensvingeperiode er  $\geq 2s$
- Spennvidde er  $\geq 300m$

Den totale vindlasten på en bro deles opp i to bidrag, ett fra middelvind og ett fra fluktuerende del, slik at

$$q_{tot} = \bar{q} + q(t) \quad (2-2)$$

Der lastvirkingene fra den fluktuerende vinden som regel beregnes i frekvensplanet. Vindlastens tre statiske komponenter,  $q_D$ ,  $q_L$  og  $q_M$ , beregnes fra hastighetstrykket  $\bar{q}$  og de tilhørende dimensjonsløse formfaktorene for drag, løft og moment. Vindlastens tre lastkomponenter pr. lengdeenhet er dermed gitt ved

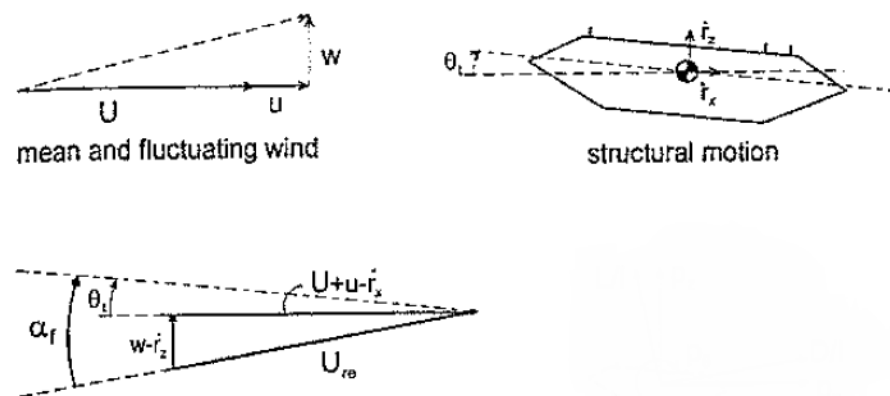
$$\begin{bmatrix} q_D \\ q_L \\ q_M \end{bmatrix} = \bar{q} \begin{bmatrix} C_D H \\ C_L B \\ C_M B^2 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

der

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho v_m^2 \quad (2-4)$$

Der  $\rho$  er luftens tetthet,  $H$  er høyde,  $B$  er bredde og  $v_m$  er vindens middelhastighet beregnet etter Eurokode 1 NS-EN 1991-1-4 [6] og ligninger fra Håndbok 185 [4]

For den fluktuerende vindlasten er den relative, tidsvarierende vindhastigheten og angrepsvinkel relevante. Se figur 2-7



Figur 2-7 Forklaring av vinkler og vindens komponenter [7]

Hvor  $U$  er middelvind tilsvarende  $v_m$  i 2-4,  $u$  og  $w$  er henholdsvis de horisontale og vertikale turbulenskomponentene,  $\theta_t$  er rotasjonen av brokassen som kan deles opp to komponenter, middelrotasjon  $\bar{\theta}$  og fluktuerende rotasjon  $\theta$ ,  $\dot{r}_x$  og  $\dot{r}_z$  er konstruksjonens hastighet i henholdsvis horisontal og vertikal retning.

Fra Figur 2-7 kan det da skrives relativ vindhastighet som [7]

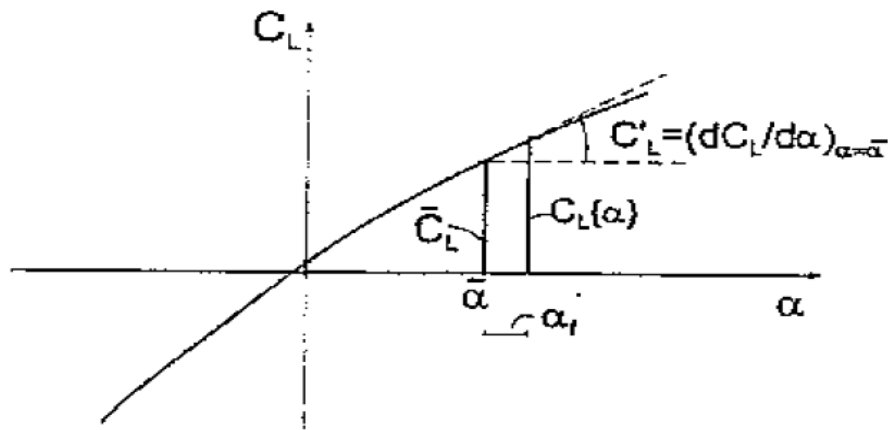
$$U_{re} = \sqrt{(U + u - \dot{r}_x)^2 + (w - \dot{r}_z)^2} \approx \sqrt{U + 2Uu - 2U\dot{r}_x} \quad (2-5)$$

som virker ved et relativt tilfelle med innfallsvinkel  $\alpha$ . Ved horisontal middelvind er innfallsvinkelens middsverdi  $\bar{\alpha}$  lik middsverdien til brokassens rotasjon  $\bar{\theta}$ , mens den fluktuerende delen av innfallsvinkelen blir

$$\alpha_f = \theta + \arctan \frac{(w - \dot{r}_z)}{U + u - \dot{r}_x} \approx \theta + \frac{w - \dot{r}_z}{U} \quad (2-6)$$

Utrykkene helt til høyre i ligning 2-5 og 2-6 er forenklinger basert på at  $U$  er mye større enn  $u$  og  $w$ , noe som er vanlig. Som Figur 2-7 viser vil  $u$ ,  $w$ ,  $\dot{r}_x$  og  $\dot{r}_z$  gi et bidrag til relativ vindhastighet  $U_{re}$  og dermed også gi et bidrag til angrepsvinkel. Alle ligninger frem til delkapittel 2.3.1 er inspirert eller hentet fra [7].

I den såkalte «kvasi-steady» teorien antar man at tidsvarierende laster kan beregnes ut fra tilsvarende forhold. Det vil si at de statiske lastkoeffisienter gjelder til enhver tid.



Figur 2-8 Linearisering av statisk lastkoeffisient [7]

Lastkoeffisientenes variasjon med varierende relativ angrepsvinkel kan forenkles ved hjelp av linearisering av den aktuelle kurven ved  $\bar{\alpha} = \alpha_p + \bar{\theta}$  som vist på Figur 2-8. For broer er det vanlig å forta denne lineariseringen ved  $\bar{\alpha} = \bar{\theta}$ . Denne lineariseringen vil dermed inkludere bidrag fra  $u$ ,  $w$ ,  $\dot{r}_x$  og  $\dot{r}_z$ , og blir som følger

$$C'_D = \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \quad C'_L = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \quad C'_M = \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \quad (2-7)$$

Her gjelder faktorene  $C_D$ ,  $C_L$  og  $C_M$  for innfallsvinkel  $\alpha = \bar{\alpha}$  hvor  $\bar{\alpha} = \bar{\theta}$ , som for Figur 2-8.

I tidsplanet blir dermed de tre turbulenskomponentene av den fluktuerende delen av vindlasten gitt som

$$\begin{bmatrix} q_D(x, z, t) \\ q_L(x, z, t) \\ q_M(x, z, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho v_m \begin{bmatrix} 2\bar{C}_D H & (C'_H - \bar{C}_L B) \\ 2\bar{C}_L B & (\bar{C}_D H + C'_L B) \\ 2\bar{C}_m B^2 & C'_m B^2 \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (2-8)$$

Der

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Som er relevant horisontale konstruksjoner, som for eksempel brokassen. Der  $u$  og  $w$  er turbulenshastigheten i henholdsvis vindens retning og normalt på vindens retning.

I tillegg til turbulensdelen av den fluktuerende vindlasten, vil det også være et tillegg grunnet bevegelsesavhengige krefter. Disse er gitt som

$$\begin{bmatrix} q_D(x, z, t) \\ q_L(x, z, t) \\ q_M(x, z, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho v_m \begin{bmatrix} -2\bar{C}_D H & -(C'_{DH} - \bar{C}_L B) & \bar{C}_D H \\ -2\bar{C}_L B & -(C'_{LB} + \bar{C}_D H) & C'_{LB} \\ -2\bar{C}_M B^2 & -\bar{C}_m B & C'_m B^2 \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (2-10)$$

der

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x(x, z, t) \\ \dot{r}_z(x, z, t) \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

Noe som gir total fluktuerende vindlaster pr. lengdeenhet

$$q(t) = \frac{1}{2} \rho v_m \begin{bmatrix} 2\bar{C}_D H & (C'_H - \bar{C}_L B) \\ 2\bar{C}_L B & (\bar{C}_D H + C'_{LB}) \\ 2\bar{C}_m B^2 & C'_m B^2 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho v_m \begin{bmatrix} -2\bar{C}_D H & -(C'_{DH} - \bar{C}_L B) & C'_{DH} \\ -2\bar{C}_L B & -(C'_{LB} + \bar{C}_D H) & C'_{LB} \\ -2\bar{C}_M B^2 & -\bar{C}_m B^2 & C'_m B^2 \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (2-12)$$

### 2.3.1 Statisk vindlast

Fra tidligere har vi

$$\begin{bmatrix} q_D \\ q_L \\ q_M \end{bmatrix} = \bar{q} \begin{bmatrix} C_D H \\ C_L B \\ C_M B^2 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

Dette leder til de tre kraftkomponentene per lengdeenhet langs broen som skrives som

$$\text{Drag:} \quad q_D = \frac{1}{2} \rho v_m^2 H C_D$$

$$\text{Løft} \quad q_L = \frac{1}{2} \rho v_m^2 B C_L \quad (2-13)$$

$$\text{Moment} \quad q_M = \frac{1}{2} \rho v_m^2 B^2 C_M$$

hvor  $\rho$  er tettheten til luft,  $v_m$  er middelvind,  $H$  er høyden av brokassen,  $B$  er bredden av en brokasse,  $C_D$ ,  $C_L$  og  $C_M$  er dimensjonsløse formfaktorer.

De dimensjonsløse formfaktorene er definert som

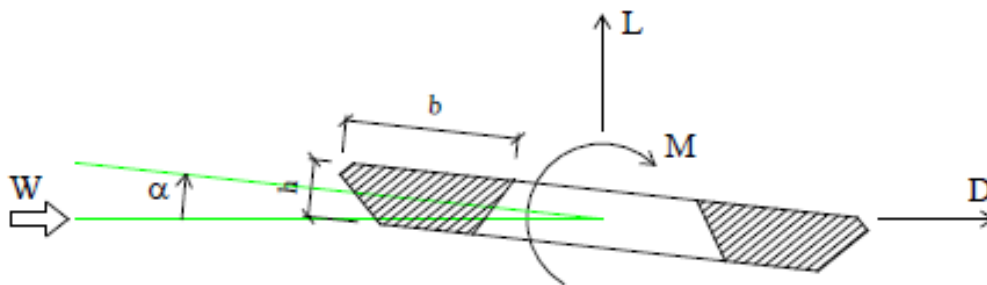
$$\text{Drag} \quad C_D = \frac{F_D}{qHl_m}$$

$$\text{Løft} \quad C_L = \frac{F_L}{qBl_m} \quad (2-14)$$

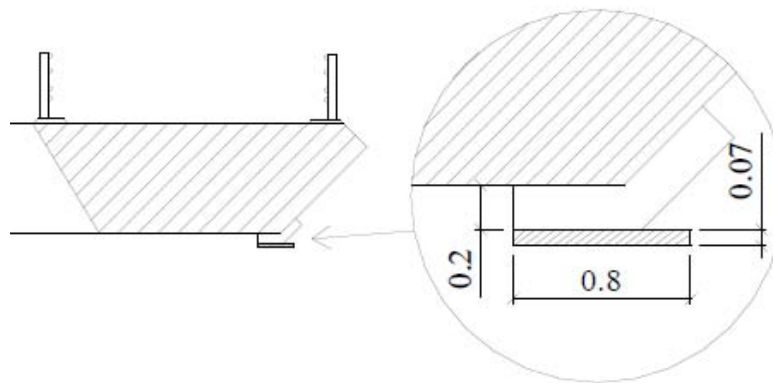
$$\text{Moment} \quad C_M = \frac{F_M}{qB^2l_m}$$

Hvor  $l_m$  er lengden langs brokassen og  $q$  er middelhastighetstrykket.

Disse faktorene er avhengige av formen på brokassen, detaljer som rekkverk og ledskovler, samt vindens innfallsvinkel, og bestemmes som regel ved et vindtunnelforsøk. Det kan også suppleres med CFD (Computational Fluid Dynamics) eller benyttes faktorer fra lignende tverrsnitt.



Figur 2-9 Orientering av kreftene på broen fra [8]



Figur 2-10 Detalj ledskovler [8]

Dette gjør at når innfallsvinkelen endrer seg vil de dimensjonsløse faktorene også endre seg. Faktorene finnes ved hjelp av forsøk i vindtunnel. Små variasjoner i modellen kan ha store innvirkninger på faktorene. De målte formfaktorene forenkles som regel til førstegradsfunksjoner av vindens innfallsvinkel med utgangspunkt i  $\alpha = 0^\circ$  og stigningstallet til tangenten gjennom dette punktet. Da kan formlene skrives om slik at de består av to deler. Formlene for drag-, løft- og momentkrefter blir da

Drag 
$$D(\alpha = \alpha_f) = \frac{1}{2} \rho v_m^2 H \left( C_D(\alpha = 0) + \alpha_f \frac{\delta C_D}{\delta \alpha}(\alpha = 0) \right)$$

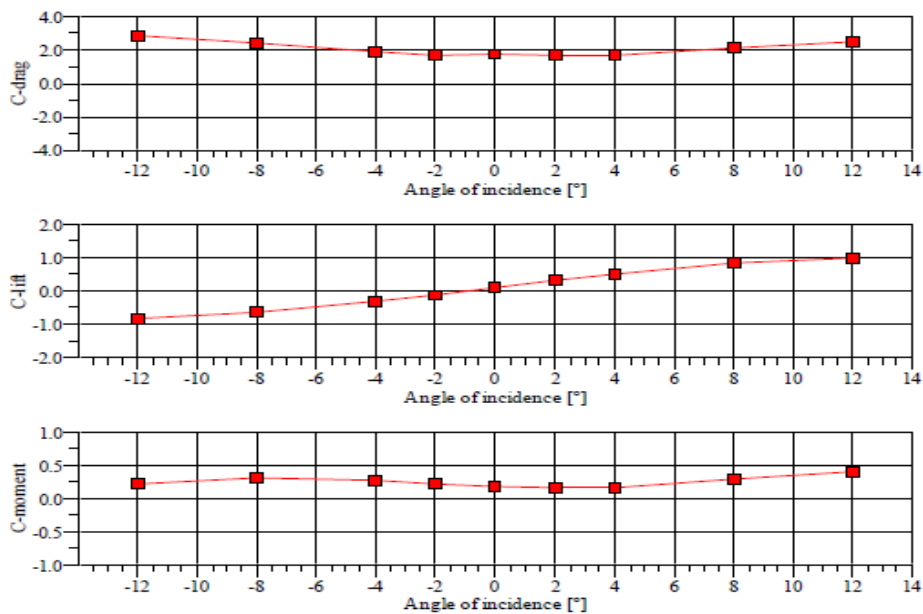
Løft 
$$L(\alpha = \alpha_f) = \frac{1}{2} \rho v_m^2 B \left( C_L(\alpha = 0) + \alpha_f \frac{\delta C_L}{\delta \alpha}(\alpha = 0) \right) \quad (2-15)$$

Moment 
$$M(\alpha = \alpha_f) = \frac{1}{2} \rho v_m^2 B^2 \left( C_M(\alpha = 0) + \alpha_f \frac{\delta C_M}{\delta \alpha}(\alpha = 0) \right)$$

Der  $C_D$ ,  $C_L$  og  $C_M$  er de dimensjonsløse formfaktorene,  $\frac{\delta C_D}{\delta \alpha}$ ,  $\frac{\delta C_L}{\delta \alpha}$ , og  $\frac{\delta C_M}{\delta \alpha}$  er som i ligning 2-7 og  $\alpha_f$  er en liten variasjon fra  $\alpha$  som vist i Figur 2-8 bare ved  $\alpha = 0$  og ikke  $\alpha = \bar{\alpha}$

Disse ligningene beskriver i utgangspunktet statisk vindlast, men som nevnt tidligere kan de også benyttes ved kvasi-statisk representasjon av fluktuerende vindkrefter, som antas å følge fluktuerende angrepsvinkel på samme måte som statiske laster avhenger av middel innfallsvinkel. Det vil si at  $\alpha_f$  kan beregnes til å inkludere bidrag fra  $\nu$  og  $r$ .

På Figur 2-11 vises resultatene fra et vindtunnelforsøk for å bestemme de dimensjonsløse formfaktorene, hentet fra [8], der det fra tabellen på figuren tydelig kommer frem hvordan formfaktorene endrer seg ved endring av vinkelen.



Angle of incidence [°]	Shape factors [-]		
	Drag	Lift	Moment
-12.0	2.887	-0.832	0.229
-8.0	2.444	-0.643	0.311
-4.0	1.891	-0.304	0.270
-2.0	1.724	-0.101	0.221
0.0	1.754	0.118	0.185
2.0	1.718	0.344	0.165
4.0	1.676	0.509	0.165
8.0	2.156	0.856	0.296
12.0	2.491	1.011	0.406

Figur 2-11 Formfaktorer fra vindtunnelforsøk for 20 senteravstand meter mellom brokassene [8]

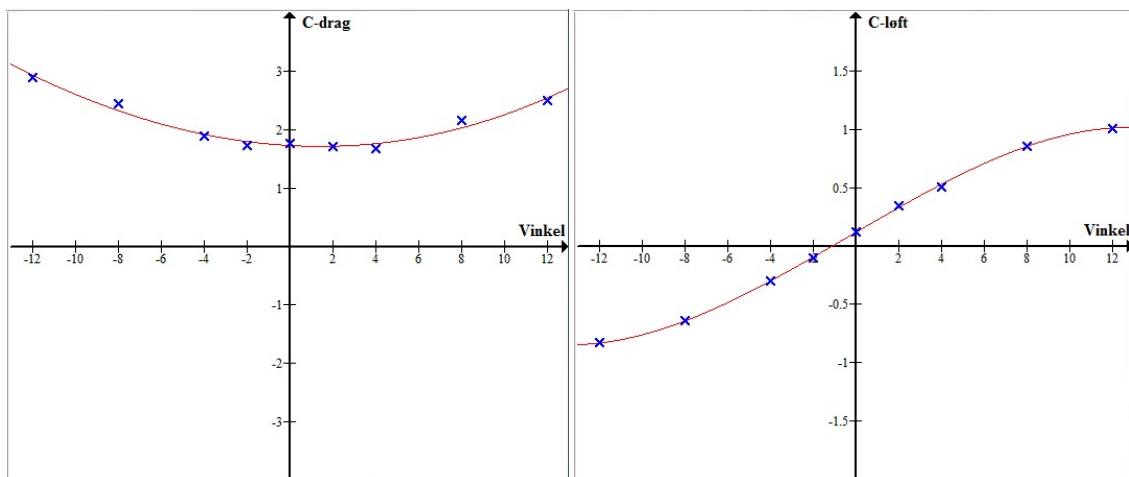
Forenklingen vil som sagt basere seg på en førstegradsfunksjon. I noen tilfeller kan man, for å få høyere nøyaktighet mellom verdiene som er gitt fra målingene, erstatte uttrykket for lastkoeffisient som en funksjon av vinkelen med et polynomuttrykk. Dersom området man måler formfaktorene i er lite, som her, vil dette polynomuttrykket gjelde for alle vinklene i området. I andre tilfeller vil forenklingen med førstegradsfunksjon være mer nøyaktig. Det er også viktig å påpeke at alt dette er basert på at målenøyaktigheten er tilstrekkelig høy.

Beregninger for å finne polynomene kan lett utføres i et program som f.eks. Mathcad, som er brukt her, og er gitt for et 5. gradspolynom som

$$C_{ip}(\alpha) = z_{i1} + z_{i2}\alpha + z_{i3}\alpha^2 + z_{M4}\alpha^3 + z_{M5}\alpha^4 + z_{M6}\alpha^5 \quad (2-16)$$

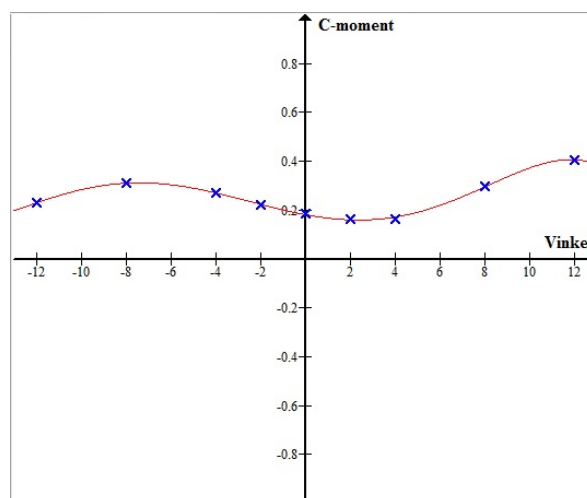
Der  $z_i$  er konstanter i polynomene funnet i Mathcad,  $i=D,L,M$  og  $\alpha$  er innfallsvinkel

I Figur 2-12 kan man se hvordan polynomene, heltrukken rød linje, følger verdiene som er målt i vindtunnel, blå kryss.



a)

b)



c)

Figur 2-12 a), b) og c) Målte verdier fra [8] mot polynomer for henholdsvis C-drag, C-loft og C-moment



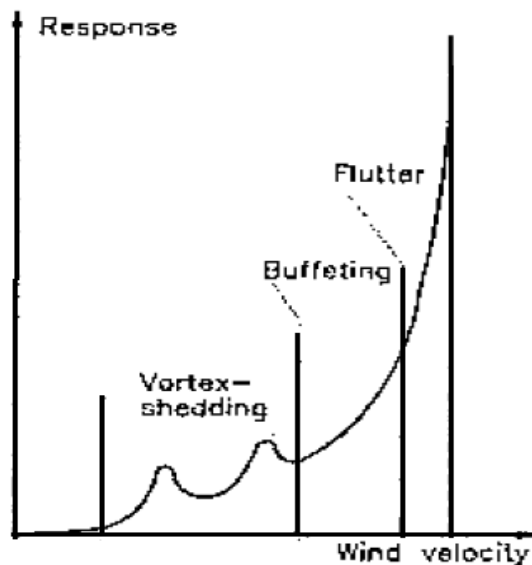
For statisk vindlast på kabler er det benyttet

$$q_D = \frac{1}{2} \rho v_m^2 D C_{Dk} \quad (2-17)$$

Hvor  $D$  er diameteren på kabelaen og  $C_{Dk}$  er formfaktor for drag for kabel valgt 0,7 [9].

### 2.3.2 Aeroelastisk atferd og turbulens

Når broen blir satt i bevegelse grunnet vinden vil broens oppførsel være påvirket av luftstrømningen. Denne bevegelsen blir deretter påvirket av de aerodynamiske kreftene den selv forårsaker. Disse kreftene er dermed bevegelsesavhengige krefter og atferden forbundet med disse kreftene kalles aeroelastisk atferd [9]. Atferder som går under aeroelastisitet er virvelinduserte svingninger, galoppering og flutter.



Figur 2-13 Dynamisk respons av en slank bro ved økende vindlast [2]

#### 2.3.2.1 Virvelindusert svingning

Når vinden passerer brokassen vil luftstrømmen bli separert. Dette fører til at virvler dannes vekselvis på over- og undersiden av broen på lesiden av brokassen. Disse virvlene fører primært til fluktuerende krefter normalt på vindretningen. Når en virvel dannes på en av sidene vil lufthastigheten på den andre siden øke, ifølge *Bernoulli's teori*, som fører til redusert trykk på den siden hvor hastigheten har økt. Dette gjør at det oppstår en kraft som virker vekk fra den siden som

virvelen oppstår på. Når virvlene så dannes vekselvis på over- og undersiden vil det oppstå en harmonisk varierende kraft som får samme frekvens som virvelavløsningens frekvens [10].

Separasjonen av luftstrømmen påvirkes av alle detaljer på en brokasse, som rekkverk, ledeskovler og lignende. Når man da skal foreta vindtunnelforsøk er det svært viktig at bromodellen er så detaljert som mulig. Virvelavløsningene vil ha sine egne frekvenser som er proporsjonal med vindhastigheten og avhengig av *Strouhals tall*, som er avhengig av formen på tverrsnittet [10]. *Strouhals tall* kan måles ved hjelp av vindtunnelforsøk eller beregnes basert på tidligere målinger

$$n_{vs} = S_t \frac{V}{D} \quad (2-18)$$

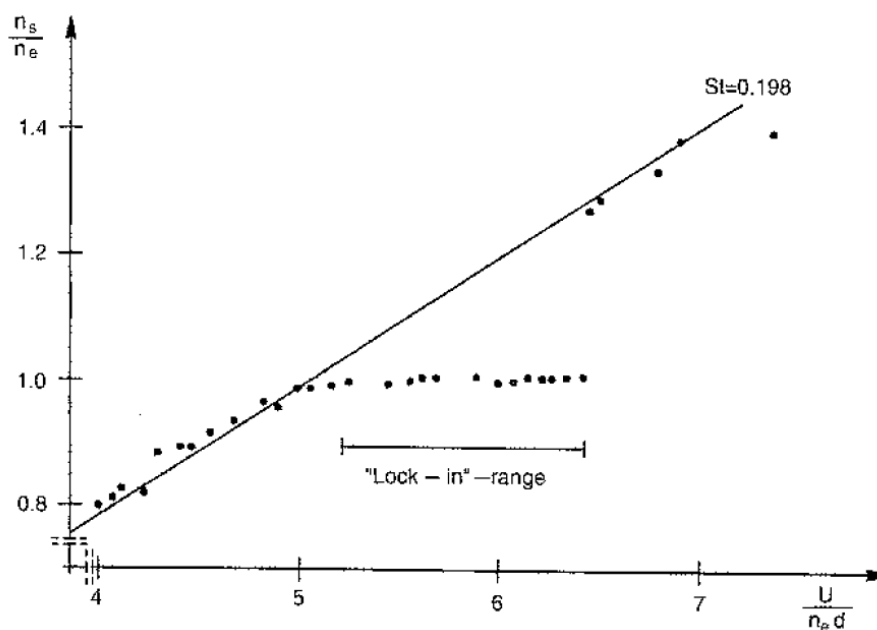
Hvor  $n_{vs}$  er virvelfrekvensen,  $S_t$  er Strouhals tall,  $V$  er vindhastighet og  $D$  er dimensjon på tvers av vinden, f.eks. høyden av brokassen [2].

Hvis virvelavløsningens frekvens samsvarer med broens egenfrekvens vil det oppstå resonans og det kan føre til store svingninger. Ligning 2-8 kan skrives om til et uttrykk for kritisk vindhastighet, med hensyn på broens egenfrekvens, hvor virvler vil oppstå

$$V_{crit} = \frac{Dn_y}{S_t} \quad (2-19)$$

Hvor  $n_y$  er broens laveste egenfrekvens og  $V_{crit}$  er kritisk vindhastighet for virvler [9]

Siden vindhastigheten på et hvilket som helst sted vil variere svært mye er det tilnærmet umulig å unngå at broens egenfrekvens aldri sammenfaller med virvelavløsningens frekvens. Dersom de to frekvensene blir tilstrekkelig like, vil de tilnærme seg hverandre. Konstruksjonenes frekvens vil da styre virvelavløsningens frekvens og det oppstår det som kalles *lock-in*. Virvelsvingninger er selvdempende, som gjør at svingninger grunnet virvelavløsninger ikke direkte fører til kollaps av broen, men svingningene kan oppleves som ubehagelig av personer som benytter seg av broen og de kan lede til utmatting [2].



Figur 2-14 Lock-in fenomenet [10]

### 2.3.2.2 Turbulens

Turbulensen, det vil si fluktuerende vindhastigheter, medfører fluktuerende vindkrefter [2]. Vindens turbulensegenskaper kan beskrives av turbulensintensitet, integrale lengdeskalaer, ettpunkts spektra og ko-koherens [4]. Ettpunkts spektra  $S_i(n)$  uttrykt ved frekvensen  $n$  er

$$\frac{ns_i}{\sigma_i^2} = \frac{A_i \hat{n}_i}{(1+1,5A_i \hat{n}_i)^{5/3}} \quad \text{for } i=u, v, w \quad (2-20)$$

Hvor  $\sigma_i$  er standardavviket til turbulenskomponenten  $i$  gitt som

$$\sigma_i = v_m I_i \quad (2-21)$$

Hvor  $v_m$  er middelvind og  $I_i$  er turbulensintensiteten som man finner i NS-EN-1991-1-4 [6]

og

$$A_u = 6,8 \quad A_v = 9,4 \quad A_w = 9,4$$

og

$$\hat{n}_i = \frac{nxLi}{v_m} \quad (2-22)$$

Hvor  $v_m$  er middelvind og  $n$  er frekvens

Og kospektra (ko-koherens)  $S_{i_1} S_{i_2}$  på normalisert form for separasjon normalt på vindens hovedretning, horisontalt,  $y$ , eller vertikalt,  $z$ , er gitt ved

$$\frac{\text{Re}[S_{i_1} S_{i_2}(n, \Delta s_j)]}{\sqrt{S_{i_1}(n) S_{i_2}(n)}} = \exp\left(-C_{ij} \frac{n \Delta s_j}{v_m}\right) \quad (2-23)$$

Der  $\Delta s_j$  er horisontal- eller vertikalavstand mellom de betraktete punktene,  $i_1, i_2 = u, v, w$  og  $j = y, z$

$$\text{Og} \quad C_{uy} = C_{uz} = 10 \quad C_{vy} = C_{vz} = C_{wy} = 6,5 \quad C_{wz} = 3$$

Ettpunkts spektra forteller om fordelingen til vinden i et frekvensområde og kospektra forteller noe om hvor sannsynlig det er at turbulens ved to punkter med gitt avstand har innvirkning på hverandre.

### 2.3.2.3 Galoppering

Galoppering er aeroelastiske svingninger med stor amplitude som i stor grad skyldes negativ aerodynamisk demping. Svingningene foregår normalt på vindretningen ved frekvenser som er mye lavere enn virvelavløsningsfrekvensene i samme retning. Vindhastighetene som forårsaker galoppering er som regel mye høyere enn vindhastighetene som forårsaker *lock-in* ved virvelavløsning [9]. Det fundamentale med galoppering er at når konstruksjonen settes i bevegelse grunnet vinden, vil innfallsvinkelen til luftstrømmen endres. Det som skjer dersom konstruksjonen får en forskyvning i negativ vertikal retning, er at den også vil få en hastighet i samme retning. Dette gjør

at luften vil få en tilsvarende hastighetskomponent i motsatt retning. Den relative vindhastigheten vil da være en vektor som består av to komponenter, den opprinnelige luftstrømmen og hastighetskomponenten grunnet forskyvningen av broen. Denne relative vindhastigheten vil danne en vinkel med horisontalplanet. Dersom de aerodynamiske egenskapene til konstruksjonen er slik at den relative vindhastigheten trykker den nedoverbevegende konstruksjonen videre nedover ved en vinkel på tilnærmet null grader i stedet for å bringe konstruksjonen tilbake til utgangsposisjonen, er det en ustabil konstruksjon og den vil være utsatt for galoppering [9]. For at galoppering skal være mulig må den aerodynamiske dempningen være negativ, som leder til *Den Hartog kriteriet*.

$$\left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D\right)\Big|_{\alpha=0} < 0 \quad (2-24)$$

For at galoppering skal skje må også den totale dempningen være negativ. Fra ligning (9.13) fra [10] kan det vises at dette kun er mulig dersom vindhastigheten er høyere enn den kritiske vindhastigheten for galoppering.

$$U_c = -\frac{4m_e\zeta_s\omega_e}{\rho d} \frac{1}{\left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D\right)\Big|_{\alpha=0}} \quad (2-25)$$

Hvor  $m_e$  er ekvivalent masse per lengdeenhet,  $\zeta_s$  er konstruksjonens dempning,  $\omega_e$  er vinkel egenfrekvensen,  $\rho$  er tettheten til luft og  $d$  er bredden av konstruksjonen.

Mange broer vil aldri oppleve galoppering grunnet at helningen for løft-koeffisienten,  $\frac{dC_L}{d\alpha}$ , aldri er negativ, altså vil det være umulig å oppfylle *Den Hartog kriteriet* i og med at drag-koeffisienten også er positiv. Man vil altså få negativ kritisk vindhastighet dersom man benytter seg av formel 2-25, noe som ikke stemmer.

### 2.3.2.4 Flutter

Flutter er et aeroelastisk fenomen som fleksible, relativt flate konstruksjoner er spesielt utsatt for. Flutter involverer svingninger med en amplitude som vokser med tiden og som kan forårsake katastrofal konstruksjonssvikt. Flutter deles inn i to typer, torsjonsflutter, ren torsjonssvingning, og klassisk flutter, kombinasjon av vertikale svingninger og torsjonssvingninger. Når vindhastigheten øker vil de aerodynamiske kreftene som viker på broen endres, og for en gitt kritisk vindhastighet vil de selvinduserte kreftene gjøre at broen blir nøytralt stabil. Dersom vindhastigheten overstiger denne kritiske hastigheten vil svingningene startet av en liten endring i likevektsposisjon øke over tid. De selvinduserte kreftene som skaper disse svingningene kan bli sett på som negativ aerodynamisk dempning. Ved torsjonsflutter vil det dannes virvler som skaper en svært ugunstig trykkvariasjon over og under kassen, som igjen skaper et moment som gjør at brokassen blir utsatt for torsjon. Ved klassisk flutter vil de to svingningene kobles. Koblingen kan skje når torsjonseigenfrekvens er større en vertikalegenfrekvens [10]. Det er sannsynlig at konstruksjoner der det er høyere torsjonseigenfrekvens enn vertikalegenfrekvens vil bli utsatt for klassisk flutter så lenge vindhastigheten blir høy nok. Det er derfor svært viktig ved design av broer at det kontrolleres at denne vindhastigheten er tilstrekkelig høy, altså høyere enn den vindhastigheten det er sannsynlig at broen opplever i sin levetid. For et første estimat for kritisk flutterhastighet kan man bruke *Selbergs formel*. Denne formelen finnes i svært mange varianter som alle har små forskjeller, men de gir alle

cirka det samme svart. Under følger et eksempel på *Selbergs formel* for kritisk flutterhastighet hentet fra [11].

$$U_{crit} = 3,72f_{\alpha}\sqrt{\frac{\sqrt{mI}}{\rho B}\left[1 - \left(\frac{f_h}{f_{\alpha}}\right)^2\right]} \quad (2-26)$$

Hvor  $f_{\alpha}$  er egenfrekvens for torsjonssvingninger,  $m$  er masse per lengdeenhet,  $I$  er masse treghetsmomentet gitt i  $kgm^2/m$ ,  $\rho$  er tettheten til luft,  $B$  er bredden av brokassen og  $f_h$  er egenfrekvens for vertikal svingninger.

Fordelen med *Selbergs formel* er at den kun inneholder verdier som er enkle å skaffe eller beregne, noe som gjør at den kan benyttes uten vindtunnelforsøk, og er nyttig ved en tidlig estimer av kritisk vindhastighet. Dette er også ulempen med den, da den ikke tar hensyn til noen former for demping eller hvordan vinden passerer brotverrsnittet. Små detaljer ved brotverrsnittet som ledskovler, hvordan rekkverk virker inn og lignende, vil påvirke dette og gi en annen kritisk flutterhastighet. For brotverrsnitt med to separate brokasser har det vist seg at avstanden mellom brokassene spiller en stor rolle for kritisk flutterhastighet. Forfatterne i [11] har derfor utviklet en modifisert utgave av *Selbergs formel* som tar hensyn til dette

$$U_{crit} = 3,72C_{D/B}f_{\alpha}\sqrt{\frac{\sqrt{mI}}{\rho B}\left[1 - \left(\frac{f_h}{f_{\alpha}}\right)^2\right]} \quad (2-27)$$

der

$$C_{D/B} = 1 + 0,7332\left(\frac{D}{B}\right)^{1,4211} \quad (2-28)$$

for tverrsnitt uten vindskjerm

$$C_{D/B} = 1 + 1,2438\left(\frac{D}{B}\right)^{1,4712} \quad (2-29)$$

for tverrsnitt med vindskjerm med 50 % OAR (open area ratio)

Hvor  $D$  er luftgapet mellom de to brokassene og  $B$  er totale bredde av begge brokassene.

For å foreta en mer nøyaktig estimering av kritisk flutterhastighet er man avhengig av såkalte aerodynamiske deriverte. Det finnes 18 slike aerodynamiske deriverte  $A_i, H_i$  og  $P_i$ ,  $i = 1,2,3,4,5,6$ . Det er mulig å måle 8 av disse gjennom vindtunnelforsøk,  $A_i$  og  $H_i$ ,  $i = 1,2,3,4$ . Dette er de aerodynamiske deriverte som er forbundet med vertikale og torsjonale frihetsgradene, og dette er som nevnt tidligere det som forbindes med flutter.

For å beregne flutter ved bruk av aerodynamiske deriverte kan det brukes ligning 2-30 under, som kan utledes fra den vanlige svingeligningen. Ligninger er hentet direkte fra [12]

$$\hat{\mathbf{E}}_{\eta}(\omega, V) \left\{ \mathbf{I} - \boldsymbol{\kappa}_{ae} - \left[ \omega \text{diag} \left( \frac{1}{\omega_i} \right) \right]^2 + 2i\omega \text{diag} \left( \frac{1}{\omega_i} \right) (\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_{ae}) \right\} \quad (2-30)$$

Som gir

$$\hat{\mathbf{E}}_{\eta}(\omega, V) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa_{aezz} & \kappa_{aez\theta} \\ \kappa_{ae\theta z} & \kappa_{ae\theta\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left( \frac{\omega_r}{\omega_z} \right)^2 & 0 \\ 0 & \left( \frac{\omega_r}{\omega_{\theta}} \right)^2 \end{bmatrix} + 2i \begin{bmatrix} \left( \frac{\omega_r}{\omega_z} \right) & 0 \\ 0 & \left( \frac{\omega_r}{\omega_{\theta}} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_z - \zeta_{aezz} & -\zeta_{aez\theta} \\ -\zeta_{ae\theta z} & \zeta_{\theta} - \zeta_{ae\theta\theta} \end{bmatrix} \right\} \quad (2-31)$$

der

$$\begin{aligned} \kappa_{aezz} &= \frac{\rho B^2}{2\tilde{m}_z} \left( \frac{\omega_z(V)}{\omega_z} \right)^2 H_4 * \frac{\int_{Lexp} \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} & \kappa_{aez\theta} &= \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_z} \left( \frac{\omega_z(V)}{\omega_z} \right)^2 H_3 * \frac{\int_{Lexp} \phi_z \phi_{\theta} dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \\ \kappa_{ae\theta\theta} &= \frac{\rho B^4}{2\tilde{m}_{\theta}} \left( \frac{\omega_{\theta}(V)}{\omega_{\theta}} \right)^2 A_3 * \frac{\int_{Lexp} \phi_{\theta}^2 dx}{\int_L \phi_{\theta}^2 dx} & \kappa_{ae\theta z} &= \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_{\theta}} \left( \frac{\omega_{\theta}(V)}{\omega_{\theta}} \right)^2 A_4 * \frac{\int_{Lexp} \phi_{\theta} \phi_z dx}{\int_L \phi_{\theta}^2 dx} \end{aligned} \quad (2-32 \text{ til } 2-35)$$

og

$$\begin{aligned} \zeta_{aezz} &= \frac{\rho B^2}{4\tilde{m}_z} \frac{\omega_r}{\omega_z} H_1 * \frac{\int_{Lexp} \phi_z^2 dx}{\int_L \phi_z^2 dx} & \zeta_{aez\theta} &= \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_z} \frac{\omega_r}{\omega_z} H_2 * \frac{\int_{Lexp} \phi_z \phi_{\theta} dx}{\int_L \phi_z^2 dx} \\ \zeta_{ae\theta\theta} &= \frac{\rho B^4}{2\tilde{m}_{\theta}} \frac{\omega_r}{\omega_{\theta}} A_2 * \frac{\int_{Lexp} \phi_{\theta}^2 dx}{\int_L \phi_{\theta}^2 dx} & \zeta_{ae\theta z} &= \frac{\rho B^3}{2\tilde{m}_{\theta}} \frac{\omega_r}{\omega_{\theta}} A_1 * \frac{\int_{Lexp} \phi_{\theta} \phi_z dx}{\int_L \phi_{\theta}^2 dx} \end{aligned} \quad (2-36 \text{ til } 2-39)$$

Hvor  $\omega_i$  er egenfrekvens,  $\omega_r$  er resonansfrekvens,  $V$  er vindhastighet,  $\boldsymbol{\kappa}_{ae}$  er aerodynamisk stivhet,  $\boldsymbol{\zeta}$  er konstruksjonsdempning,  $\boldsymbol{\zeta}_{ae}$  er aerodynamisk dempning,  $z$  vertikal retning,  $\theta$  er torsjon,  $B$  er bredde av brokasse,  $\tilde{m}$  er masse modal masse per lengdeenhet,  $H_{1,2,3,4}$  og  $A_{1,2,3,4}$  er aerodynamiske deriverte,  $\omega_i(V)$  i-vind frekvens og  $\phi_i$  er svingeformer. Der  $i=z, \theta$

Flutter kan bare skje dersom de antidiagonale, verdiene fra topp høyre hjørne til bunn venstre hjørne, i ligning 2-31 er ulik null [12]. Koblingen av svingningene skjer via  $\kappa_{aez\theta}$  og  $\kappa_{ae\theta z}$  når formen på  $\phi_z$  og  $\phi_{\theta}$  begynner å ligne på hverandre. Løsningen av ligningene 2-31 til 2-39 krever iterasjon, siden de aerodynamiske deriverte kun kan beregnes dersom man kjenner vindhastighet og resonansfrekvensen [12]. Som nevnt kan man beregne de aerodynamiske deriverte ved hjelp av vindtunnelforsøk. Dette vil bli utført ved hjelp av buffeting respons data, frisingningsforsøk ved ulike vindhastigheter, eller gjennom forsøk med tvungne, harmoniske svingninger ved ulike vindhastigheter.

For å benytte seg av de aerodynamiske deriverte må man finne den reduserte hastigheten, som finnes ved

$$V_{red} = \frac{V}{n_i B} \quad (2-40)$$

Hvor  $B$  er bredden av brokasse og  $n_i$  er egenfrekvens for  $i=z, \theta$

Man kan så lage et tilpasset polynom for redusert vindhastighet og ved hjelp av denne finne i-vindfrekvenser, og dermed finne aerodynamiske deriverte for valgte hastigheter. En av metodene for å estimere kritisk flutterhastighet kan da være ved å finne den aerodynamiske dempingen og stivheten ved valgt hastighet, og undersøke om den oppfyller kravet om å være større en null.

For lange broer kan det brukes at kritisk flutterhastighet bør være [10]

$$U_{crit} > 1,5v_m \quad (2-41)$$

## 3 Abaqus

*Abaqus* er en programvare som benytter seg av elementmetoden til å løse både enkle statiske analyser og tyngre dynamiske analyser. *Abaqus* foretar også beregninger av 2. ordens effekter og effektiv stivhet ved at programmet oppdaterer stivhetsmatrisene etter hvert som tiden går. I denne oppgaven er det blitt gitt input-filer fra *Statens Vegvesen* der broen, minus tårnene, er modellert. Dette gjorde at det gikk fort å få diverse resultater fra *Abaqus* tidlig i oppgaven. Ulempen med input-filene er at man kan ikke forta noen endringer i modellen via det grafiske vinduet i *Abaqus*, men man må redigere input-filen manuelt. Da må man åpne input-filen som et tekstdokument, i for eksempel *Notepad*, for så gjøre endringer. Dette medførte en hel del arbeid med å forstå hva som står i input-filene, lære seg hvordan modellen bygges opp og hvordan modellen belastes med egenlast og andre laster for å så kunne foreta endringer i modellen.

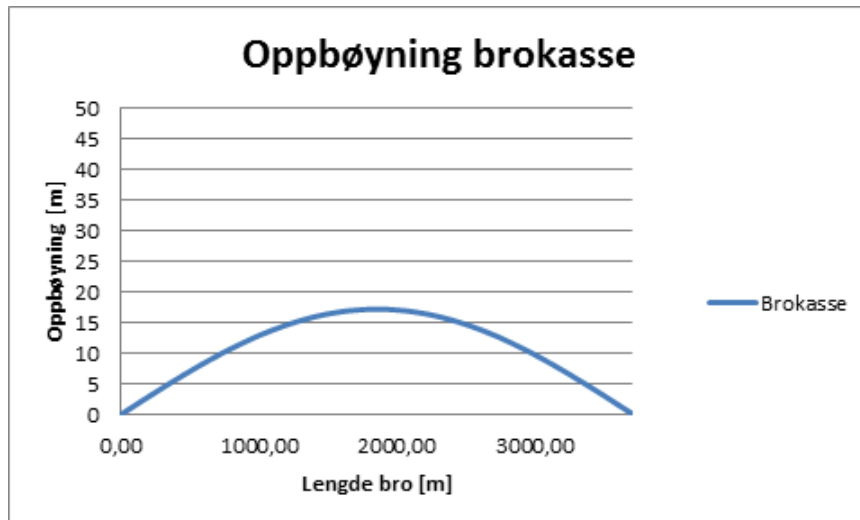
### 3.1 Trinnvis oppbygging av modellen av Sognefjordbroen

Hengebroer er kompliserte konstruksjoner, noe som ikke overraskende leder til kompliserte modeller. Denne bromodellen består av seks trinn, hvor hele broen blir modellert før man begynner på disse trinnene. På denne måten kan bruke samme modell til å utføre trinnvis analyse av montasjetilstandene. Men før man kan begynne på dette må man beregne kabelstørrelse, som ikke er diskutert her, og hengestagskrefter. Modellen som er brukt i denne oppgaven er en grov modell som blant annet ikke inneholder tårn. Toppen av tårnene er blitt forenklet slik at nodene der er fastholdt i y- og z-retning. I denne modellen er x-retning orientert horisontalt langs broens lengderetning. Y-regning er horisontalt på tvers av broens lengderetning, og z-retning er vertikal regning. Alle laster er påført ved bruk av *AMPLITUDE=RAMP* og *NLGEOM*-funksjonene i *Abaqus* der *RAMP* gjør at lastene legges på gradvis økende over tid til de når verdien som er spesifisert og *NLGEOM* tar hensyn til ikke-lineære geometrisk effekter.

#### 3.1.1 Hengestagskrefter

Hengestagskrefter beregnes fra en separat modell som kun består av brokassene. Disse hengestagskreftene bestemmes av brokassenes og tverrbjelkenes egenvekt, halve egenvekten til hengestengene samt ekstra krefter for å krumme broen.





Figur 3-1 Endelig form på brokassene

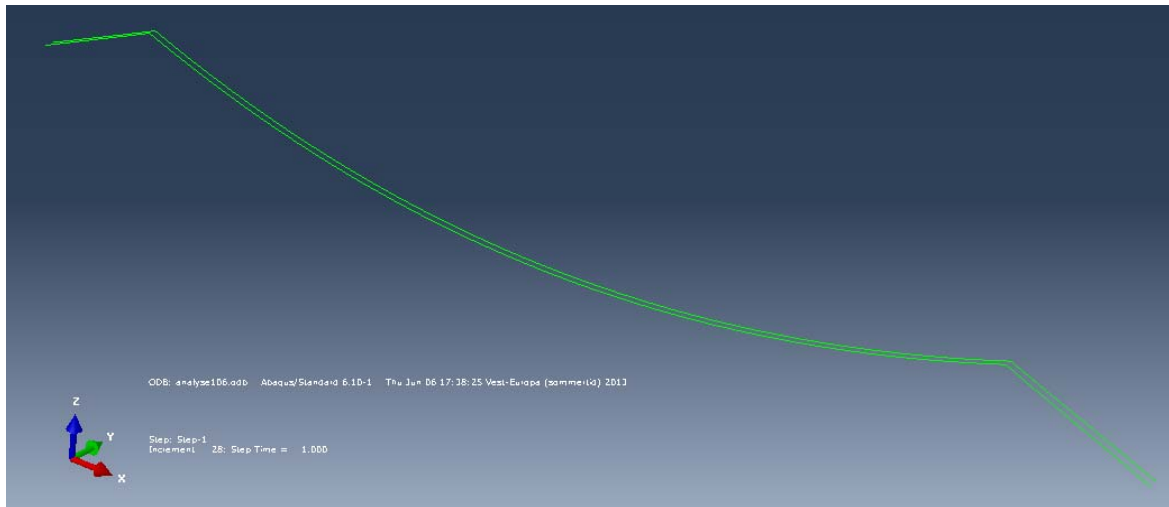
Den krummede formen bestemmes ut fra ønsket krumningsradius, her med 100 000 meter som valgt radius. Ved bruk av formel 4.1 blir det da en oppbøyning på 17.11 meter på midten av broen

$$\text{Oppskuring} = R - \sqrt{(R^2 - S^2)} \quad (3.1)$$

Hvor **R** er krumningsradiusen og **S** er lengden av hovedspennet delt på to

Ut fra denne verdien kan man så regne ut plasseringen av noder i bjelkemodellen slik at brokassen holder den krummede formen før påføring av egenvekt. Formler finnes i regnearket *montasje-sognefjorden* (finnes som digitalt vedlegg). Denne formen blir så null forskyvning for disse nodene slik at man ved hjelp av bjelkemodell input-filen kan finne de nødvendige hengestagskreftene for å oppnå null forskyvning etter påført last. Deretter føres hengestagskreftene inn i regnearket *montasje-sognefjorden* som så regner disse om til temperaturkrefter. Både hengestagskrefter og temperaturkrefter føres inn i input-fil for hele broen.

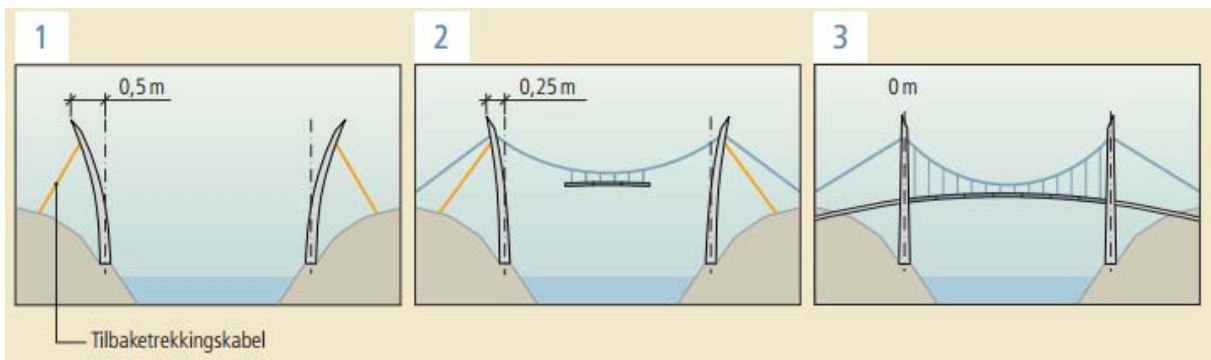
### 3.1.2 Trinn 1 og 2, Hovedkabler



Figur 3-2 Trinn 1 og 2 fra Abaqus

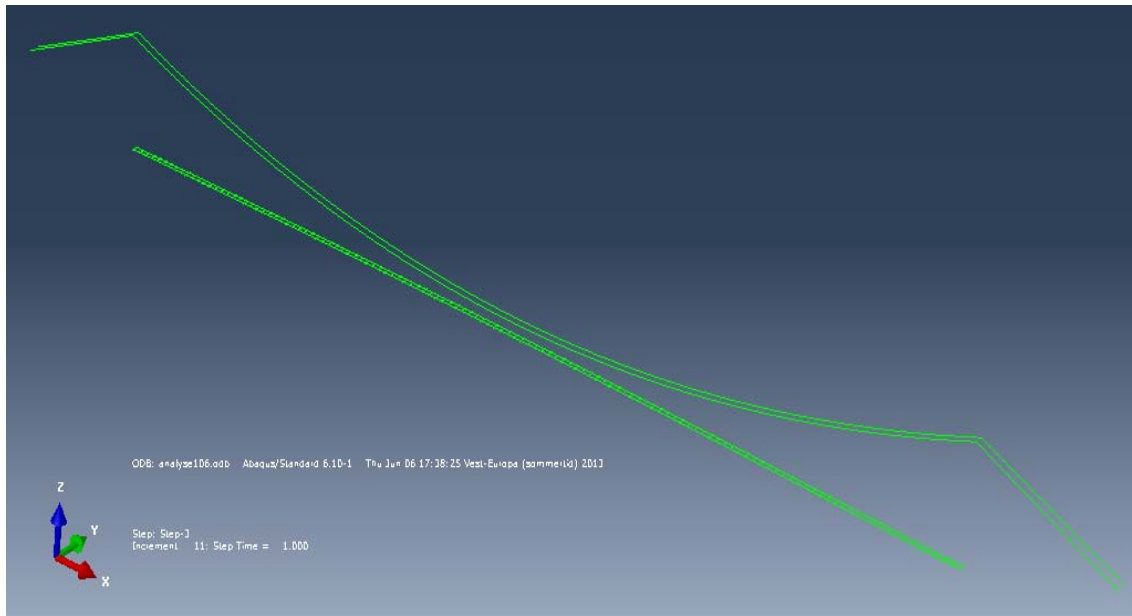
I dette trinnet fjerner man alle elementer og krefter, med unntak av hovedkablene. Startgeometrien til hovedkablene itereres ved hjelp av analyser i *Abaqus* og regnearket *montasje-sognefjorden*. Denne startgeometrien tilsvarer en spenningsløs kabel, noe som tilsvarer en kjedelinje i hovedspennet. Hovedkablene blir deretter belastet med sin egenvekt og blir en fritt hengende kabel. I dette trinnet er det viktig å merke seg at det brukes en redusert gravitasjonsakselerasjon. Dette er grunnet den ene halvdelene av egenvekten til hengestengene, som legges inn som ekstra tetthet i den delen av hovedkabelen som er i hovedspennet.

Deretter blir det påsatt nedad rettede hengestagskrefter tilsvarende vekten av brokassene og hengestengene på kabelen, her med vanlig gravitasjonsakselerasjon, slik at kabelen deformeres til sin permanente tilstand. Nå vil kabelen få en forskyvning ved toppen av tårnene, og denne forskyvningen sammen med alle forskyvninger i høyderetning legges inn i regnearket som så regner ny kabelgeometri. Etter  $x$  antall gjentakelser vil den endelige kabelgeometrien være klar, og forskyvningen på toppen av tårnet vil da tilsvare tårnsadelvandringen, se Figur 3-3.



Figur 3-3 Tårnsadelvandring på Hardangerbroen [2]

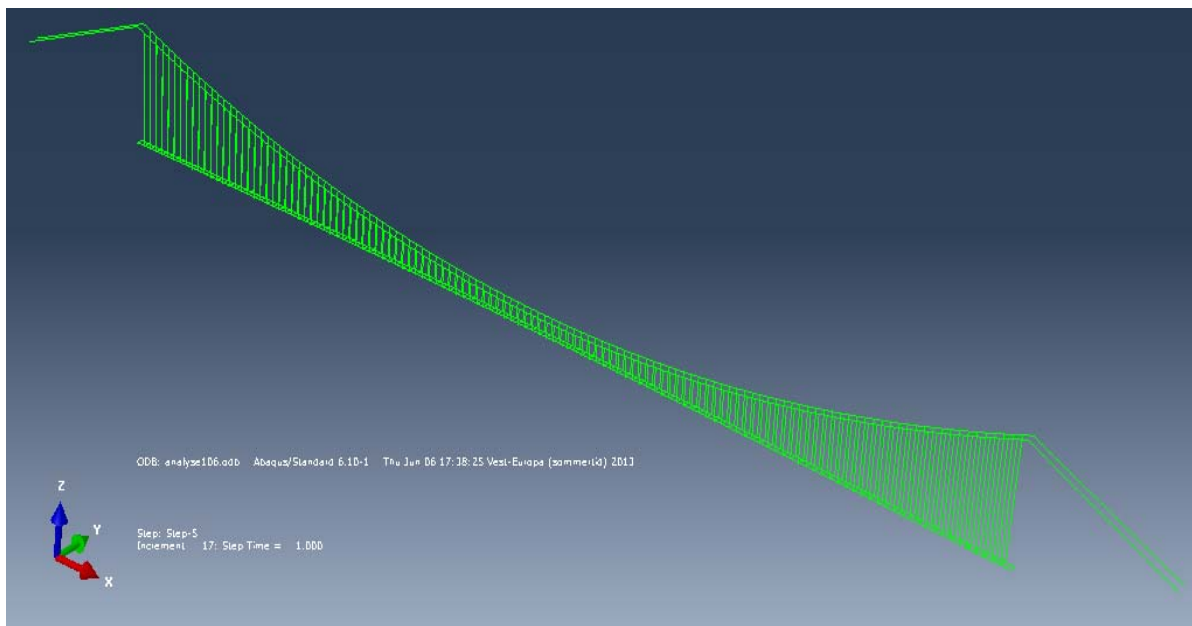
### 3.1.3 Trinn 3, Brokasser og tverrbjelker



Figur 3-4 Trinn tre fra Abaqus

Nå inkluderes brokassene og tverrbjelkene i modellen, og brokassene belastes med nedad rettet egenvekt og oppad rettede hengestagskrefter som er beregnet i bjelkemodell input-filen slik at den får riktig oppbøyning. Det er ikke noe forbindelse mellom hovedkabler og brokassene i dette steget.

### 3.1.4 Trinn 4 og 5, Hengestenger



Figur 3-5 Trinn 4 og 5 fra Abaqus

Nå inkluderes hengestengene, mens de oppad og nedad rettede kreftene fortsatt er på slik at hengestengene er spenningsløse. Deretter fjernes hengestagskreftene og erstattes med temperaturlaster for å lage spenninger i hengestengene slik at både kabler og brokasser beholder posisjonene sine fra forrige steg. I en fullverdig modell ville neste trinn være å inkludere tårn og kabel i spredekammer, noe som ikke er gjort her.

## 4 Egenfrekvenser og svingeformer

Egenfrekvenser og svingeformer er funnet ved hjelp av programmet *Abaqus* og input-filen som ble gitt av Statens Vegvesen. Det er også utført beregninger i Mathcad ved hjelp av forenklete uttrykk fra *Bleich* [13].

### 4.1 Egenfrekvenser

Det er beregnet egenfrekvenser for asymmetriske og symmetriske vertikalsvingeformer og torsjonssvingeformer ved hjelp av Mathcad, og disse er så sammenlignet med egenfrekvensene fra *Abaqus*. Ved beregninger av disse frekvensene er det benyttet forenklete uttrykk fra [13]. Denne teorien er basert på en del forenklinger.

- Svingeamplitudene for vibrasjonene er små og tillegget fra den horisontale kabelkraften grunnet treghetsmomentet er liten sammenlignet med kabelkraften grunnet egenvekten. Denne antagelsen gjør at teorien kan baseres seg på en lineær differensialligning.
- Jevnt fordelt egenvekt og treghetsmoment er konstant inne i et spenn, men kan variere i ulike spenn.
- Den totale massen av broen antas å være konsentrert langs senterlinjen av brokassen, som er antatt å være festet i en ende. Horisontale komponenter fra treghetsmoment neglisjeres.
- Hengestagene antas å være udeformbare, noe som leder til at man antar at den vertikale forskyvningen i kablene og brokassen er lik

For detaljert gjennomgang av utledninger av ligninger vises det til *Bleich* sitt notat [13]. Alle ligninger i delkapitlene 4.1 er hentet fra [13]

#### 4.1.1 Egenfrekvenser for asymmetriske vertikale svingeformer

Den lineære differensialligningen for vibrasjonsproblemet er gitt av den følgende partielle differensialligningen.

$$\frac{w}{g} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial x^4} - H_w \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial x^2} + \frac{w}{H_w} \bar{h} = 0 \quad (4-1)$$

Der  $w$  er vekt av hovedspenn per meter,  $g$  er gravitasjonsakselerasjonen,  $\bar{\eta}$  er amplituden ved avstand  $x$  fra opplager ved tiden  $t$ ,  $E$  er elastisitetsmodulen for brokassen,  $I$  er treghetsmoment om svak akse for brokassen,  $H_w$  er horisontal kabelkraft fra egenvekt og  $\bar{h}$  er et tillegg i kabelkraft fra treghetskrefte som en funksjon av  $t$ .

Ut fra ligning 5-1 kan det vises at den sirkulære frekvensen kan skrives som

$$\omega(n) = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{g}{w} (H_w + n^2\lambda)} \quad (4-2)$$

Hvor  $n$  er antall halv bølger i hovedspennet ( $n=2,4,6,\dots$ ),  $l$  er lengden av hovedspennet,  $g$ ,  $w$  og  $H_w$  samme som i ligning 5-1 og  $\lambda = \pi^2 EI/l^2$ .

Perioden for de asymmetriske vertikale svingningene blir så

$$T(n) = \frac{2\pi}{\omega(n)} \quad (4-3)$$

Og egenfrekvensene for de asymmetriske vertikale svingningene blir så

$$F_{VA}(n) = \frac{1}{T(n)} \quad (4-4)$$

	VA1	VA2	VA3
	Frekv. (Hz)	Frekv. (Hz)	Frekv. (Hz)
Abaqus	0,0604544	0,114904	0,171461
Bleich	0,0575679	0,1151883	0,1729134
Avvik fra Abaqus	4,77 %	0,25 %	0,84 %

Figur 4-1 Sammenligning av vertikale asymmetriske egenfrekvenser mellom Abaqus og utregninger fra Mathcad

#### 4.1.2 Egenfrekvenser for symmetriske vertikale svingformer

Her er det tatt utgangspunkt i energiligning for en hengebro med et hengende spenn. Da blir beregningene basert på de to ligningene

$$T - V = \frac{1}{2} \left[ \frac{w}{g} \omega^2 \int_0^l \eta^2 dx - EI \int_0^l \eta''^2 dx + H_w \int_0^l \eta'' \eta dx - \frac{8f}{l^2} h \int_0^l \eta dx \right] \quad (4-5)$$

og ligningen

$$\frac{8f}{l^2} \int_0^l \eta dx - \frac{L_E h}{E_C A_C} = 0 \quad (4-6)$$

Hvor  $T$  er maksimal kinetisk energi i broen,  $V$  er maksimal potensiell energi som delvis er lagret i brokassen som elastisk energi grunnet bøyning og delvis lagret i kabelen grunnet elastisk spennings-tøyning energi og grunnet økt gravitasjons potensial.  $L_E$  er lengden av kabelen i spennet,  $E_C$  er elastisitetsmodulen til kabelen,  $A_C$  er arealet til kabelen og  $f$  er pilhøyden (høyden fra toppen av tårnet til bunnen av kabelen). De andre variablene og konstantene er de samme som før.

Ut fra de to ligningene over kan det vises at for  $n=1$  og  $n=3$

$$\left( A - \frac{k}{p} \right) \left( B - \frac{k}{9p} \right) - \frac{k^2}{9p^2} = 0 \quad (4-7)$$

Som gir

$$Ak + 9B(k - Ap) = 0 \quad (4-8)$$

Der

$$A = s\omega^2 - H_w - \lambda \quad B = s\omega^2 - 9H_w - 8l\lambda \quad (4-9)$$

og

$$s = \frac{wl^2}{\pi^2 g} \quad k = \frac{32f}{\pi^3} \quad p = \frac{\pi l}{16f} \frac{L_E}{E_C A_C} \quad (4-10)$$

Og for  $n > 3$

$$\omega(n) = \sqrt{\left(n^2 H_w + n^4 \lambda + \frac{k}{n^2 p}\right) \frac{1}{s}} \quad (4-11)$$

	VS1	VS2	VS3
	Frekv. (Hz)	Frekv. (Hz)	Frekv. (Hz)
<b>Abaqus</b>	0,0755866	0,10108	0,145028
<b>Bleich</b>	0,0716416	0,0965846	0,1485749
<b>Avvik fra Abaqus</b>	5,22 %	4,45 %	2,39 %

Figur 4-2 Sammenligning av symmetriske vertikale egenfrekvenser mellom Abaqus og utregninger fra Mathcad

### 4.1.3 Egenfrekvenser for symmetrisk torsjon

Det er gjort forenklede håndberegninger for torsjon etter formlene til *Bleich*. Forenklingen som er gjort er at de to brokassene er samlet sammen til en bredde og kablene er trukket inn slik at det blir en brokasse.

For de to første symmetriske torsjonssvingeformene blir det da

$$B(A - K) - \frac{AK}{9} = 0 \quad (4-12)$$

Der

$$A = s\omega^2 - \Lambda - R \quad \text{og} \quad B = s\omega^2 - 8l\Lambda - 9R \quad (4-13)$$

Der

$$R = \left(E\beta b_k d + H_w \frac{b_k^2}{4}\right) \frac{\pi^2}{2l} \quad \text{der} \quad \beta = \frac{b_k d}{\left(\frac{\mu_v d^2}{A_v}\right) + \left(\frac{\mu_h b^2}{A_h}\right)} \quad (4-14)$$

$$\Lambda = EY \frac{\pi^4}{2l^3} \quad \text{der} \quad Y = I_v \varepsilon_v^2 + I_h \varepsilon_h^2 \quad (4-15)$$

$$s = M \frac{l}{4} \quad \text{der} \quad M = \frac{1}{g} \left(r^2 w_b + \frac{b_k^2}{4} w_c\right) \quad (4-16)$$

Der

$$\varepsilon_v = \frac{b}{2} - \frac{\mu_v}{A_v} \quad \text{og} \quad \varepsilon_h = \frac{d}{2} - \frac{\mu_h}{A_h} \quad \text{og} \quad r = \sqrt{\frac{I_m}{m_b}} \quad (4-17)$$

Der

$$\mu_v = \mu_h = 2\sqrt{2} \quad \text{og} \quad A_v = 1.09td \quad \text{og} \quad A_h = 1.09tb$$

Hvor  $b_k$  er avstanden mellom hovedkablene,  $d$  er høyden av brokassen,  $b$  er bredden av brokassen,  $t$  er tykkelsen av stålet i brokassen,  $I_v$  og  $I_h$  er arealtreghetsmoment for brokassen,  $I_m$  er massetreghetsmomentet til brokassen og  $m_b$  er vekten av brokassen per meter. De andre variablene og konstantene er som før.

	TS1	TS2	
	Frekv. (Hz)	Frekv. (Hz)	
<b>Abaqus</b>	0,0961779	0,129064	
<b>Bleich</b>	0,1023447	0,1483386	
<b>Avvik fra Abaqus</b>	<b>6,03 %</b>	<b>12,99 %</b>	

Tabell 4-1 Sammenligning av symmetriske torsjons egenfrekvenser mellom Abaqus og Mathcad

For de første asymmetriske torsjonssvingeformene har vi

$$\omega(n) = \sqrt{\frac{n^2}{s}(n^2\Lambda + R)} \quad (4-18)$$

Hvor  $n$  er antall svingeamplituder og de andre konstantene og variablene er samme som før

	TA1	TA2	
	Frekv. (Hz)	Frekv. (Hz)	
<b>Abaqus</b>	0,0816292	0,158365	
<b>Bleich</b>	0,0945758	0,189207	
<b>Avvik fra Abaqus</b>	<b>13,69 %</b>	<b>16,30 %</b>	

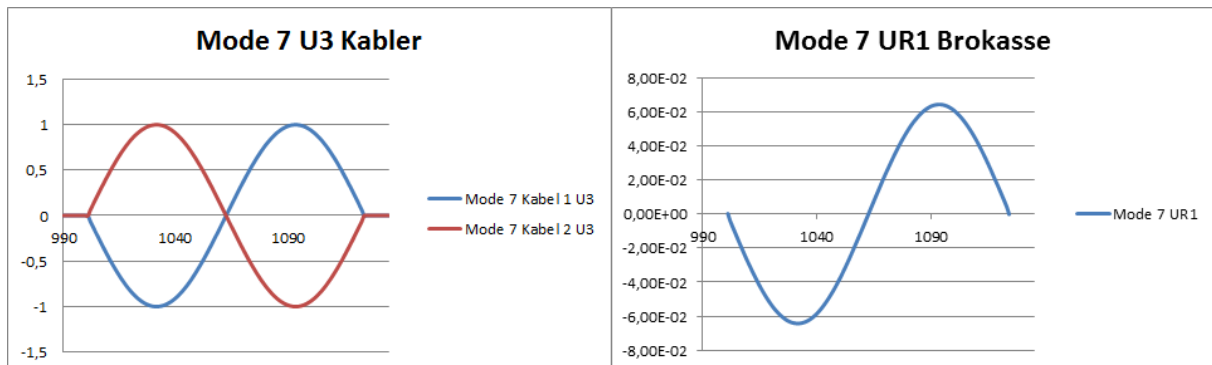
Tabell 4-2 Sammenligning av asymmetriske torsjons egenfrekvenser mellom Abaqus og Mathcad

## 4.2 Svingeformer for brokassen

Svingeformene er tegnet i Microsoft Excel ved å hente ut forskyvningskomponenter fra hver node fra egenfrekvensanalyse i *Abaqus*. Siden det er to brokasser er det benyttet nodene i midten av tverrbjelkene for å få riktig rotasjon. Forskyvningene er hentet ut i U2 og U3 retning samt rotasjon om U1 kalt UR1. U2 er den horisontale retningen på tvers av broen, y-retning, U3 er vertikal forskyvning, z-retning og UR1 er rotasjon om lengderetning av broen, om x-akse. Forskyvningene er gitt som «enhetsforskyvninger» hvor den største forskyvningen er lik 1 og de andre blir beregnet ut fra denne. X-akse på grafene er node nummer, hvor tverrbjelkene har node nummer fra 5001 til 5124. Det er også tegnet svingeformer for kablene (finnes i digitalt vedlegg), som blant annet er svært hjelpsomt når man skal indentifiserer torsjonssvingeformer for brokassen, da man kan se på de



vertikale svingformer for kablene hvor de to kablene er ute av fase med hverandre som vist på Figur 4-1.

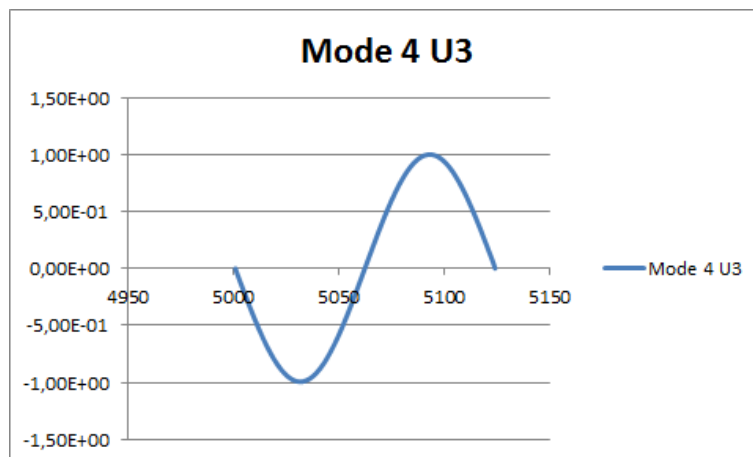


Figur 4-3 Vertikale svingninger i motfase for kabler som gir rotasjon i brokassen

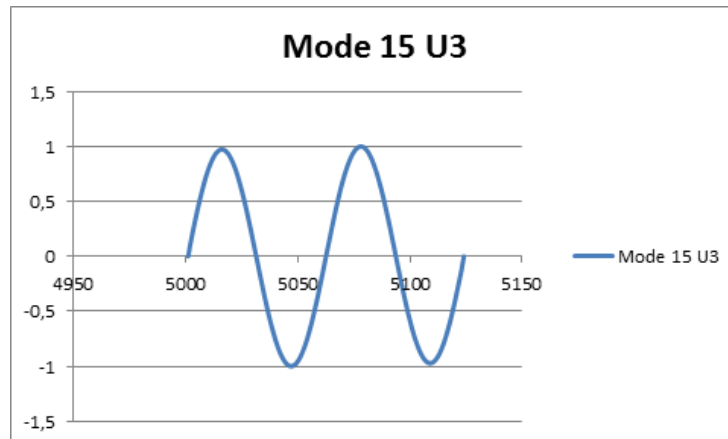
#### 4.2.1 Asymmetriske vertikale svingformer

Her følger svingformene til de tilhørende egenfrekvensene fra kapittel 4.1.1 der

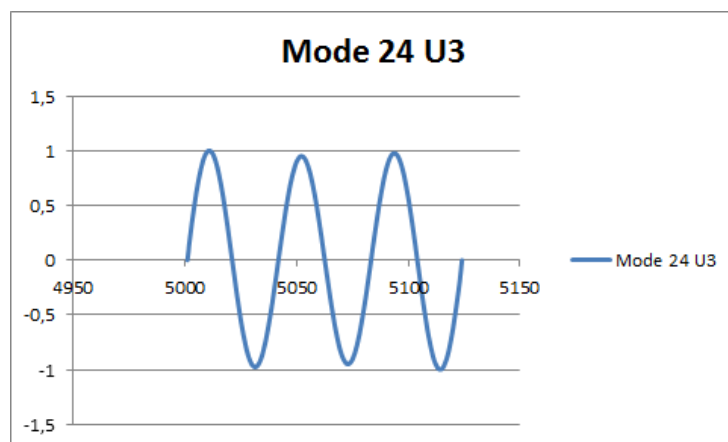
- Mode 4 U3 er VA1 med egenfrekvens  $F_{VA1} = 0,060 \text{ Hz}$
- Mode 15 U3 er VA2 med egenfrekvens  $F_{VA2} = 0,115 \text{ Hz}$
- Mode 24 U3 er VA3 med egenfrekvens  $F_{VA3} = 0,171 \text{ Hz}$



Figur 4-4 Asymmetrisk vertikal svingform nr. en, VA1



Figur 4-5 Asymmetrisk vertikal svingeform nr. to, VA2

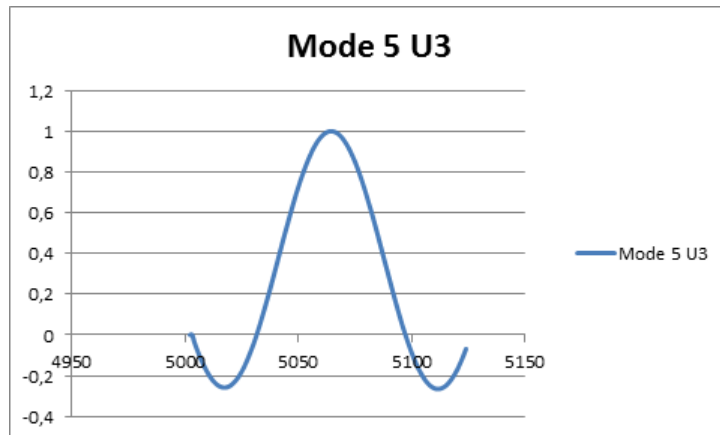


Figur 4-6 Asymmetrisk vertikal svingeform nr. tre, VA3

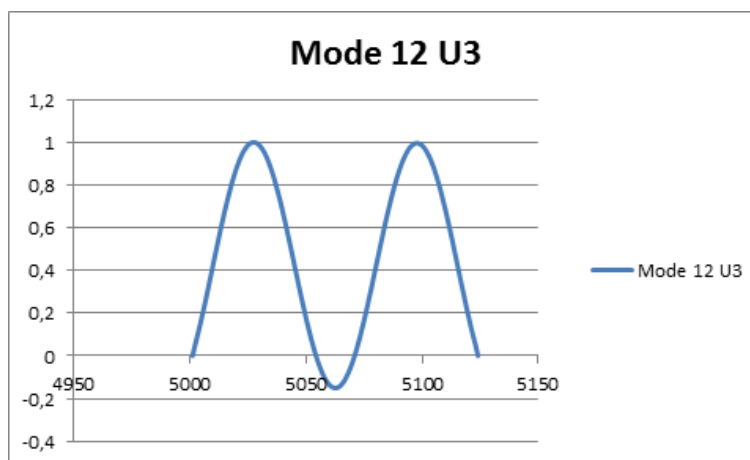
#### 4.2.2 Symmetrisk vertikale svingeformer

Her følger svingeformene til de tilhørende egenfrekvensene fra kapittel 4.1.2 der

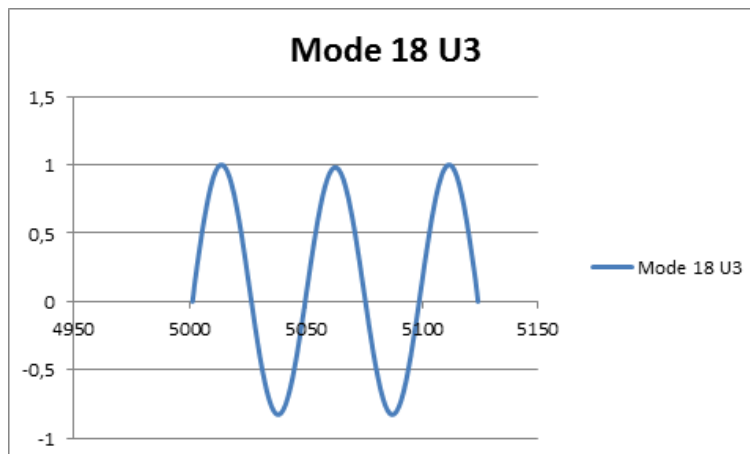
- *Mode 5 U3* er *VS1* med egenfrekvens  $F_{VS1} = 0,076 \text{ Hz}$
- *Mode 12 U3* er *VS2* med egenfrekvens  $F_{VS2} = 0,101 \text{ Hz}$
- *Mode 18 U3* er *VS3* med egenfrekvens  $F_{VS3} = 0,145 \text{ Hz}$



Figur 4-7 Symmetrisk vertikal svingeform nr. en, VS1



Figur 4-8 Symmetrisk vertikal svingeform nr. to, VS2

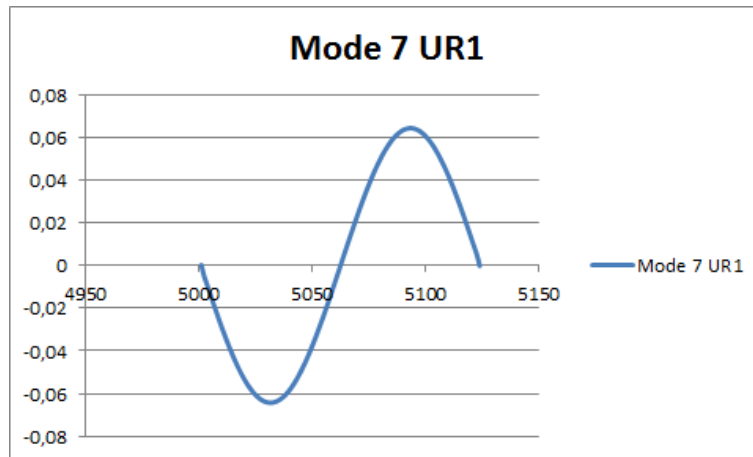


Figur 4-9 Symmetrisk vertikal svingeform nr. tre, VS3

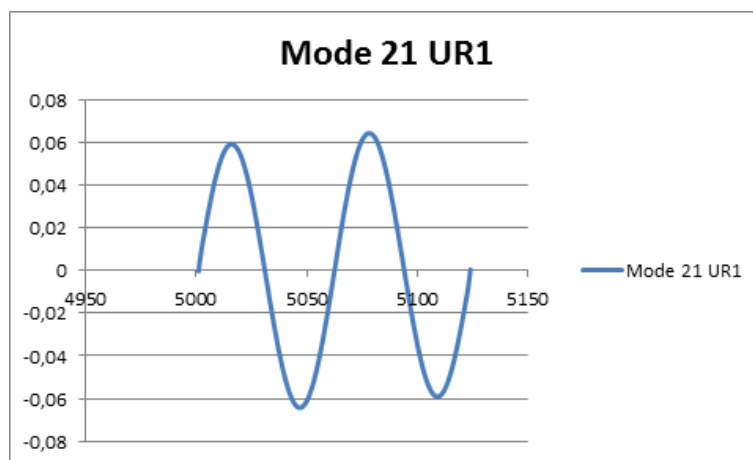
#### 4.2.3 Asymmetrisk torsjons svingeformer

Her følger svingeformene til de tilhørende egenfrekvensene fra kapittel 4.1.3 der

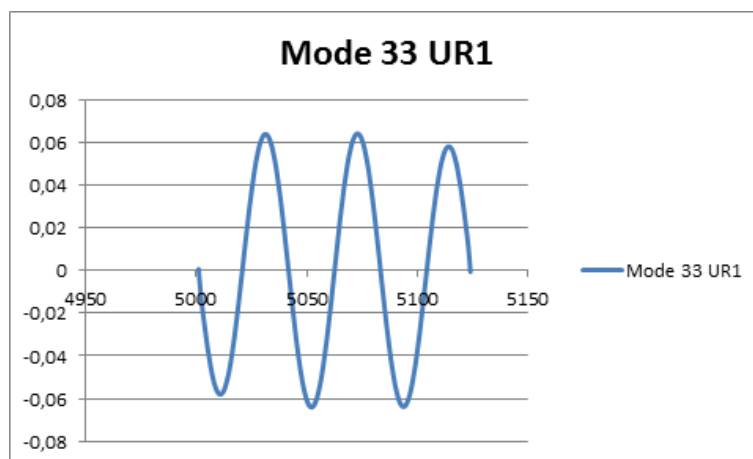
- Mode 7 UR1 er TA1 med egenfrekvens  $F_{VA1} = 0,082 \text{ Hz}$
- Mode 21 UR1 er TA2 med egenfrekvens  $F_{VA2} = 0,158 \text{ Hz}$
- Mode 33 UR1 er TA3 med egenfrekvens  $F_{VA3} = 0,238 \text{ Hz}$



Figur 4-10 Asymmetrisk torsjon svingeform nr. en, TS1



Figur 4-11 Asymmetrisk torsjon svingeform nr. to, TA2



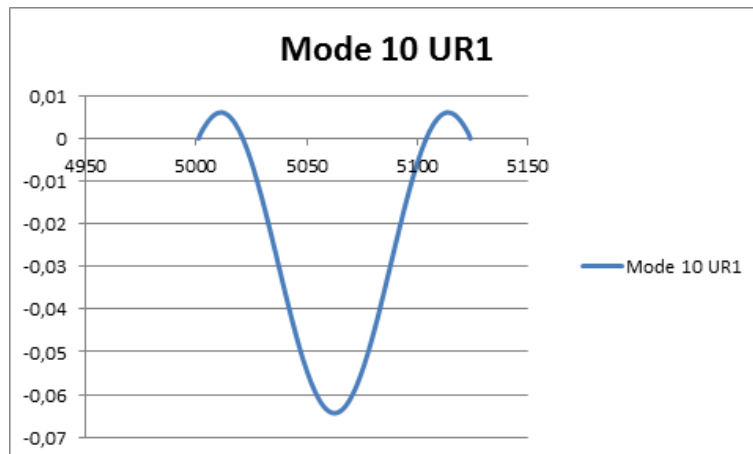
Figur 4-12 Asymmetrisk torsjon svingeform nr. tre, TA3

#### 4.2.4 Symmetrisk torsjons svingeformer

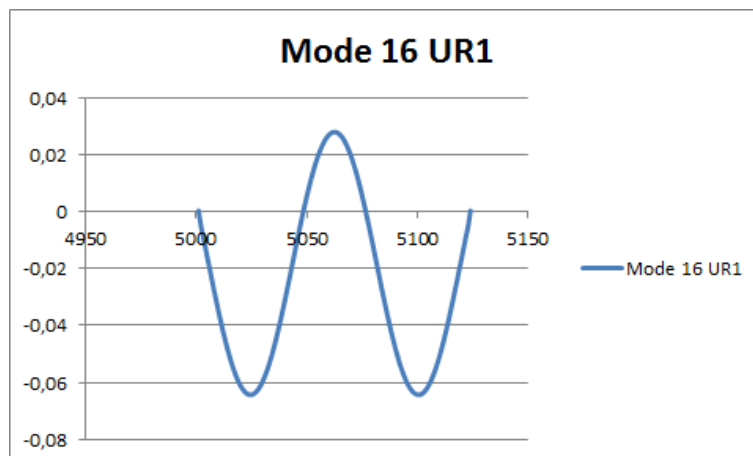
Her følger svingeformene til de tilhørende egenfrekvensene fra kapittel 4.1.3 der

- *Mode 10 UR1* er *TS1* med egenfrekvens  $F_{VA1} = 0,096 \text{ Hz}$

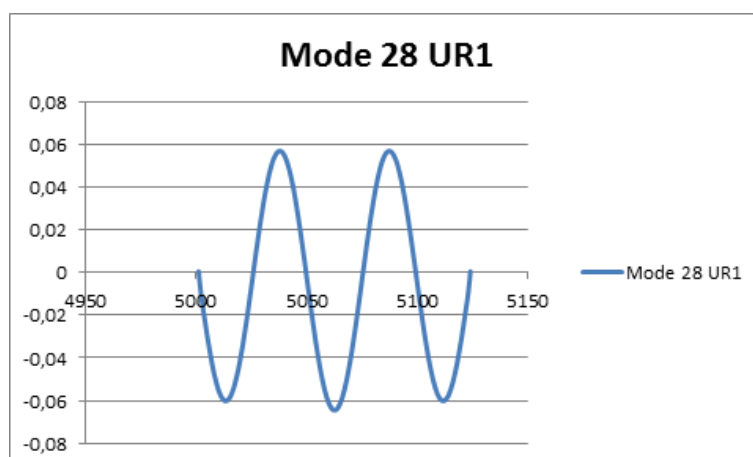
- Mode 16 UR1 er TS2 med egenfrekvens  $F_{VA2} = 0,129 \text{ Hz}$
- Mode 28 UR1 er TS3 med egenfrekvens  $F_{VA3} = 0,200 \text{ Hz}$



Figur 4-13 Symmetrisk torsjon svingeform nr. en, TS1



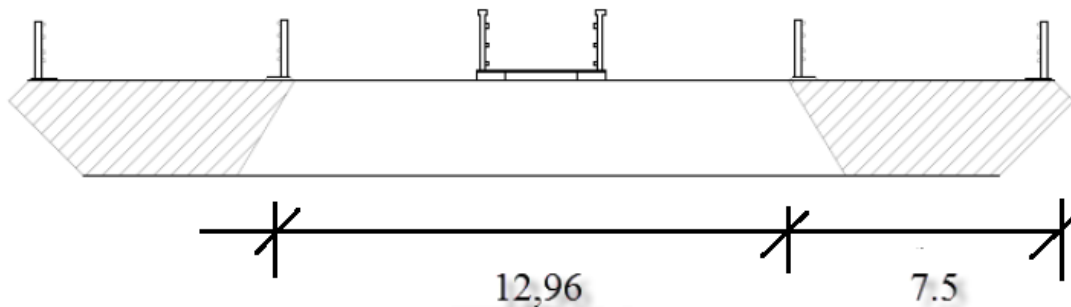
Figur 4-14 Symmetrisk torsjon svingeform nr. to, TS2



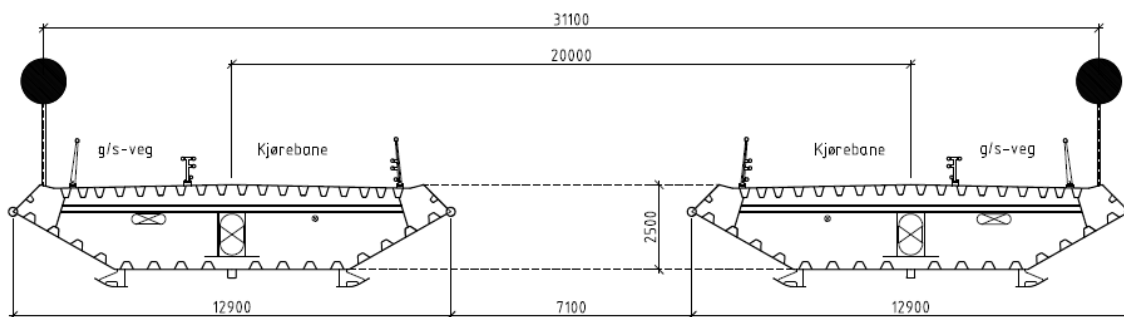
Figur 4-15 Symmetrisk torsjon svingeform nr. tre, TS3

## 5 Analyse av vindkrefter

Som figurene 5-1 og 5-2 viser er det forskjell på brotverrsnittet som det ble oppgitt er lagt til grunne for beregningen til *Statens Vegvesen*, og det brotverrsnittet som ble gitt på tegning og som er modellert inn i *Abaqus*, heretter kalt SV1. Det ble informert om at alle nødvendige resultater fra vindtunnelforsøk var gitt fra [8] for tverrsnittet med 20 meter senteravstand mellom de to brokassene, som gir et luftgap mellom de to brokassene på 12,96 meter, heretter kalt D13. Dette gjør at hver enkelt brokasse har en mindre bredde enn den gitt i tegninger.



Figur 5-1 Brotverrsnitt fra Brusymfonien som formfaktorer er hentet fra [8]. Alle tall gitt i meter

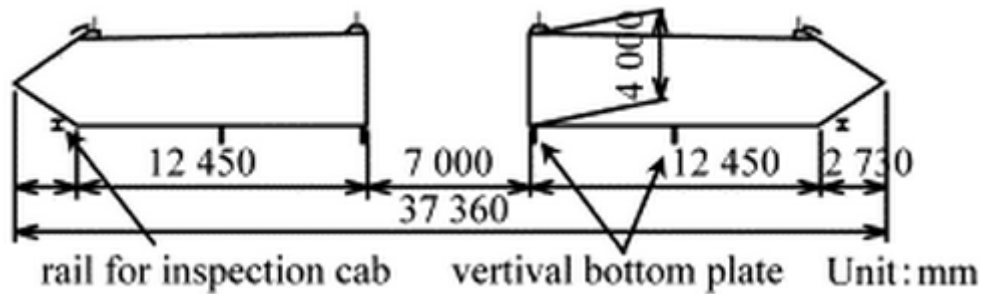


Figur 5-2 Brotverrsnitt brukt i Abaqus modell, gitt fra Statens Vegvesen. Alle tall gitt i millimeter

Som nevnt tidligere vil alle detaljer på en bro ha innvirkning på disse formfaktorene, som gjør at det vil være en viss usikkerhet rundt resultatene som følger. Det er gjort beregninger for vindkrefter med formfaktorer for tverrsnitt D13 og for 15 meter senteravstand mellom kassene, som gir et luftgap på 7,96 meter, heretter kalt D8. Man kan som en slags tommelfingerregel si at jo nærmere de to kassene kommer hverandre, jo mer vil de oppføre seg som en enkel brokasse og jo lenger vekk de kommer, jo mer vil de oppføre seg som to helt separate brokasser.

Som det vises på figurene 5-1 og 5-2 er det liten forskjell på total bredde mellom brotverrsnittet fra [8] og på brotverrsnittet gitt på tegning, men grunnet mye bredere brokasser på tverrsnittet på tegningen blir luftgapet nesten halvert i forhold til tverrsnittet fra [8]. Dette vil lede til store og små forskjeller ved alle aspekter av broens oppførsel under vindlast. Dette viste seg å være spesielt viktig ved estimering av kritisk flutterhastighet ved bruk av målte aerodynamiske verdier for brotverrsnitt med og uten ledskovler. Grunnet dette er det valgt å gjøre noen sammenligninger for laster, forskyvninger og krefter i konstruksjonsdeler ved bruk av formfaktorer for D13 og for D8. Dersom SV1 sammenlignes med tverrsnittet på figur 5-3 ser vi at det med tanke på total bredde, brokassenes

bredde og luftgapets bredde, har flere likheter med SV1 enn det D13 og D8 har. Tverrsnittet i Figur 5-3 er hentet fra en artikkel som omhandler valg av brotvernsnitt for lange hengebroer[14].



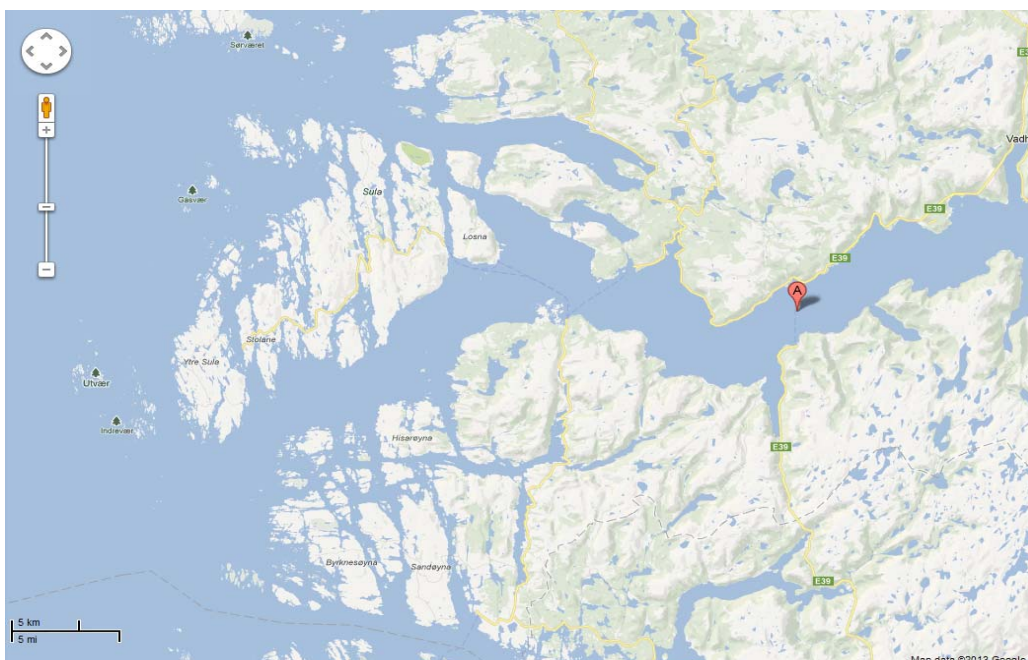
Figur 5-3 Brotvernsnitt for en bro med fire felt med aerodynamiske påheng fra [14]

Det er også blitt skrevet om på input-filen for å øke avstanden mellom brokassene i *Abaqus*modellen til de samme avstandene som for D8 og D13. Dette er gjort for å undersøke hvilken effekt det vil ha på egenfrekvenser for broen og estimert kritisk flutterhastighet, beregnet både ved hjelp av aerodynamiske deriverte og forenklet formel.

## 5.1 Statiske vindkrefter

Statisk vindlast beregnes som nevnt over på bakgrunn av middelvindhastighet. Denne hastigheten er beregnet etter *NS-EN-1991-1-4*[6]. På utdragene fra *Google Maps* [15] under ser man hvor man har planlagt at broen skal ligge. Ut fra dette er det gjort noen antagelser om terrengkategori, se utregninger i vedlegg C. Stedvindhastigheten ved brokassenes høyde over havet blir da

$$v_m = 42,1\text{m/s.}$$



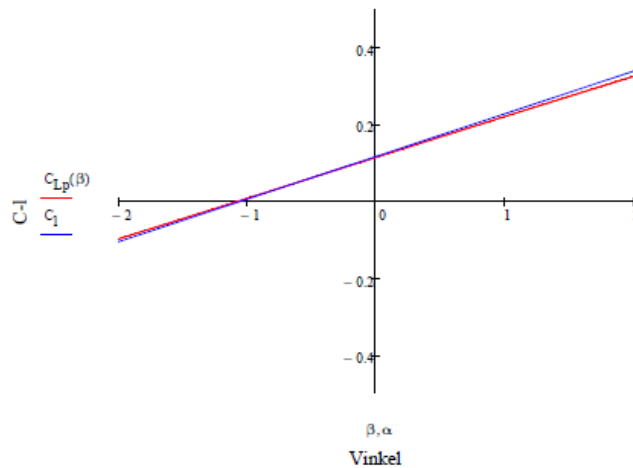
Figur 5-4 Oversiktsbilde over området der A er foreslått krysningspunkt [15]

Fra kapittel 2 husker vi at det er mulig å lage polynomer dersom man ønsker å få økt nøyaktighet for formfaktorverdier som ligger mellom de målte vinklene. I Tabell 5-1 på neste side finner man avvikene fra de målte vinklene mot verdier man får ved bruk av polynomer ved samme vinkler. For drag og løft er det brukt tredjegradspolynom, mens det for moment er brukt et femtegradspolynom. Det er antatt i alle beregninger hvor de inngår at de målte formfaktorene ikke inneholder målefeil.

Vinkel	Drag			Løft			Moment		
	Målinger	3. grads pol.	Avvik	Målinger	3. grads pol.	Avvik	Målinger	5. grads pol.	Avvik
-12	2,887	2,934	<b>1,60 %</b>	-0,832	-0,832	<b>0,00 %</b>	0,229	0,229	<b>0,00 %</b>
-8	2,444	2,325	<b>4,87 %</b>	-0,643	-0,644	<b>0,16 %</b>	0,311	0,31	<b>0,32 %</b>
-4	1,891	1,919	<b>1,46 %</b>	-0,304	-0,301	<b>0,99 %</b>	0,27	0,271	<b>0,37 %</b>
-2	1,724	1,727	<b>0,17 %</b>	0,101	0,097	<b>3,96 %</b>	0,221	0,224	<b>1,34 %</b>
0	1,754	1,727	<b>1,54 %</b>	0,118	0,116	<b>1,69 %</b>	0,185	0,182	<b>1,62 %</b>
2	1,718	1,714	<b>0,23 %</b>	0,344	0,327	<b>4,94 %</b>	0,165	0,16	<b>3,03 %</b>
4	1,676	1,759	<b>4,72 %</b>	0,509	0,527	<b>3,42 %</b>	0,165	0,171	<b>3,51 %</b>
8	2,156	2,026	<b>6,03 %</b>	0,856	0,852	<b>0,47 %</b>	0,296	0,294	<b>0,68 %</b>
12	2,491	2,54	<b>1,93 %</b>	1,011	1,011	<b>0,00 %</b>	0,406	0,406	<b>0,00 %</b>

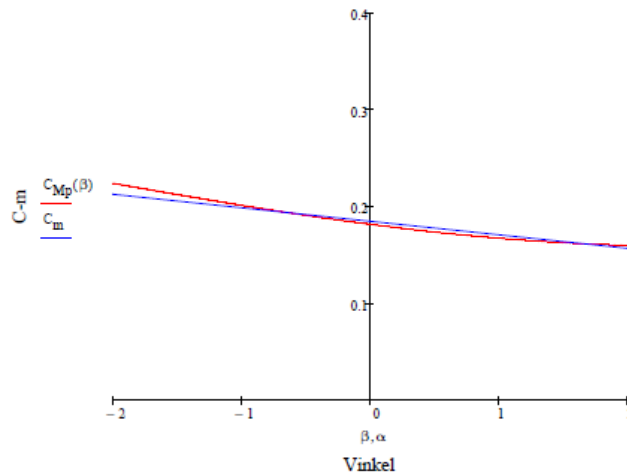
Tabell 5-1 Avvik formfaktorer for D13, målinger fra [8] mot polynomer

Som man ser klart fra tabellen over blir det en del avvik fra de målte verdiene, men som man ser fra figurene under vil det å bruke polynomene i noen av tilfellene bli mer riktig for vinkler mellom de målte verdiene enn de forenklete formlene med rettlinjede formfaktorer. Man kan øke graden av nøyaktighet ved å øke graden av polynomet.



Figur 5-5 C-løft polynom og rettlinjet rundt 0 grader for D13





Figur 5-6 C-moment polynom og rettlinjet rundt 0 grader for D13

Som man ser på figurene 5-5 og 5-6 er det ved lave vinkler veldig likt mellom den rettlinjede forenklingen og polynomene.

Vinkel	Løft			Avvik mot målt verdi	
	Rettlinjet	3. grads pol.	Målt verdi	Rettlinjet	Polynom
	N/m	N/m	N/m	%	%
-2	-1491,238	-1388,988	-1443,296	3,21 %	3,76 %
0	1686,227	1651,421	1686,227	0,00 %	2,06 %
2	4863,691	4671,252	4915,779	1,06 %	4,97 %

Tabell 5-2 Avvik løft krefter ved 42,1m/s vindhastighet med rettlinjet funksjon og polynomer mot målte verdier for D13 med formfaktorer fra [8]

Vinkel	Moment			Avvik mot målt verdi	
	Rettlinjet	5. grads pol.	Målt verdi	Rettlinjet	Polynom
	Nm/m	Nm/m	Nm/m	%	%
-2	39251,01	41343,258	40739,52	3,65 %	1,46 %
0	34103,218	33525,473	34103,218	0,00 %	1,69 %
2	28955,426	29517,065	30416,383	4,80 %	2,96 %

Tabell 5-3 Avvik moment ved 42m/s vindhastighet med rettlinjet funksjon og polynomer mot målte verdier for D13 med formfaktorer fra [8]

For løft viser det seg at den rettlinjede forenklingen er den som passer best for området fra -2 til +2 grader. Dette er ikke overraskende da polynomet må ta hensyn til utflatingen av løftkurven fra -8 grader og mindre, og +8 grader og høyere. Dersom det hadde blitt gjort en polynomtilpasning fra -8 til +8 grader i stedet for hele området, ville høyst sannsynlig polynomet gitt høyere nøyaktighet enn den rettlinjede forenklingen.

Som nevnt i innledningen til dette kapittelet er det ganske stor forskjell på brotverrsnittet D13 og SV1. Det er beregnet polynomer for formfaktorverdier gitt for D8 fra [8]. Disse formfaktorene skiller seg ut på to områder. Det har negativt løft for 0 grader innfallsvinkel og det har en vesentlig flatere momentkurve rund 0 grader.

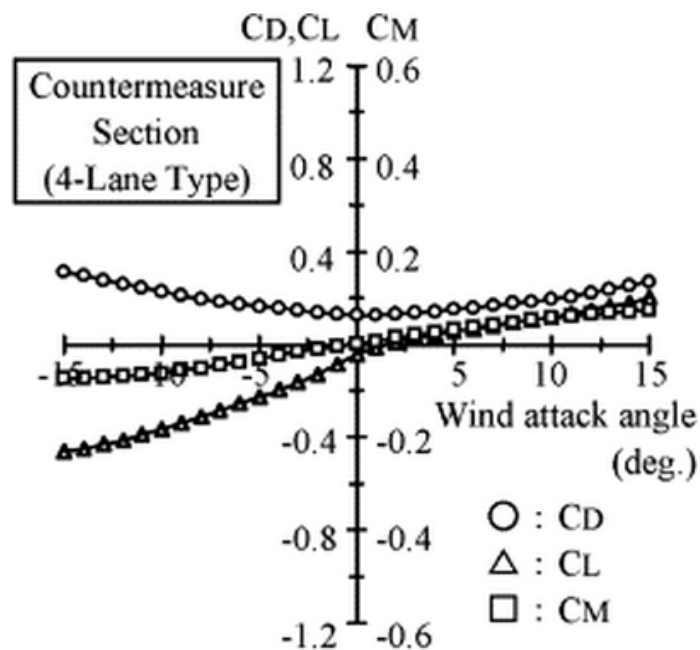
	Drag, $C_D$	Lift, $C_L$	$\delta C_L / \delta \alpha$	Moment, $C_M$	$\delta C_M / \delta \alpha$
walk./cycl. path incl. no guide vanes.	1.698	-0.187	5.07	0.106	-0.95
no walk./cycl. path no guide vanes.	1.593	-0.191	5.49	0.230	-2.29
walk./cycl. path incl. guide vanes incl.	1.675	-0.135	6.19	0.06	0.80
no walk./cycl. path guide vanes incl.	1.754	0.118	6.37	0.185	-0.80

Tabell 5-4 Formfaktorer og deres stigningstall ved 0 grader for D13 [8]

	Drag, $C_D$	Lift, $C_L$	$\delta C_L / \delta \alpha$	Moment, $C_M$	$\delta C_M / \delta \alpha$
walk./cycl. path incl. no guide vanes.	1.563	-0.183	5.10	0.063	1.29
no walk./cycl. path no guide vanes.	1.567	-0.140	5.54	0.246	-1.53
walk./cycl. path incl. guide vanes incl.	1.567	-0.165	4.53	-0.012	1.60
no walk./cycl. path guide vanes incl.	1.523	-0.145	5.46	0.134	0.04

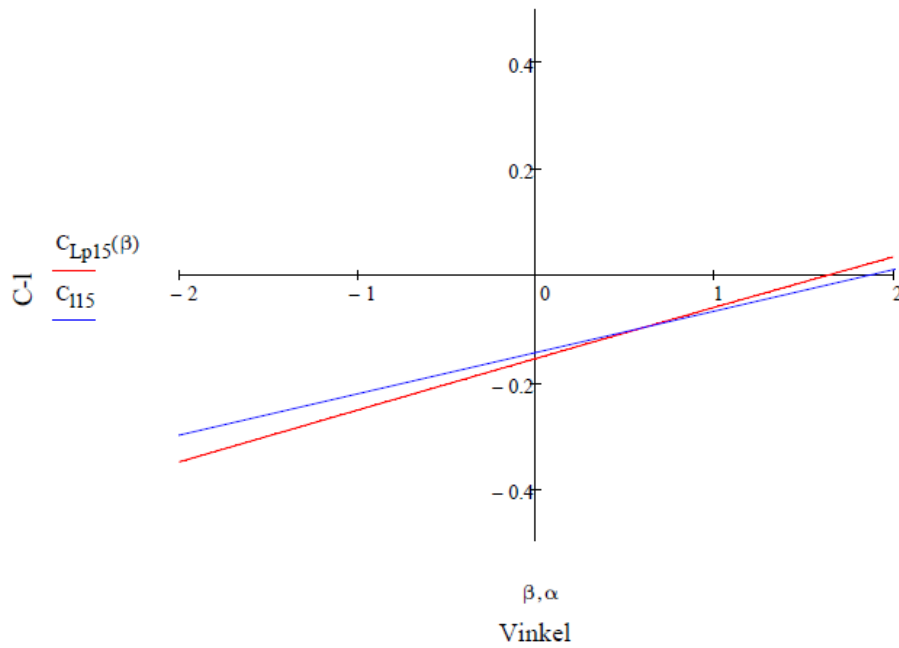
Tabell 5-5 Formfaktorer og deres stigningstall ved 0 grader for D8 fra [8]

Formfaktorene for D8 stemmer ganske bra overens med formfaktorer for brotverrsnittet i Figur 5-3. Disse formfaktorene er gitt i Figur 5-7 og viser at dette tverrsnittet, som D8, har negativt løft ved 0 grader og en flat, stigende momentkurve rundt 0 grader.

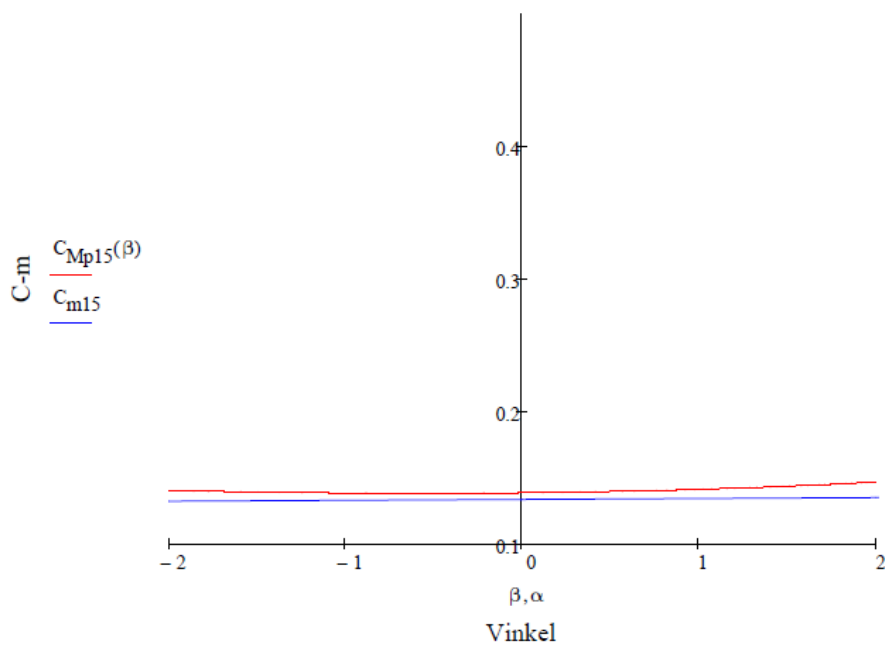


Figur 5-7 Formfaktorer for brotverrsnittet i Figur 5-3 [14]

Da blir det følgende former på polynomene ved bruk av målt data fra [8] for D8, her vist sammen med førstegradsfunksjoner rundt 0 grader

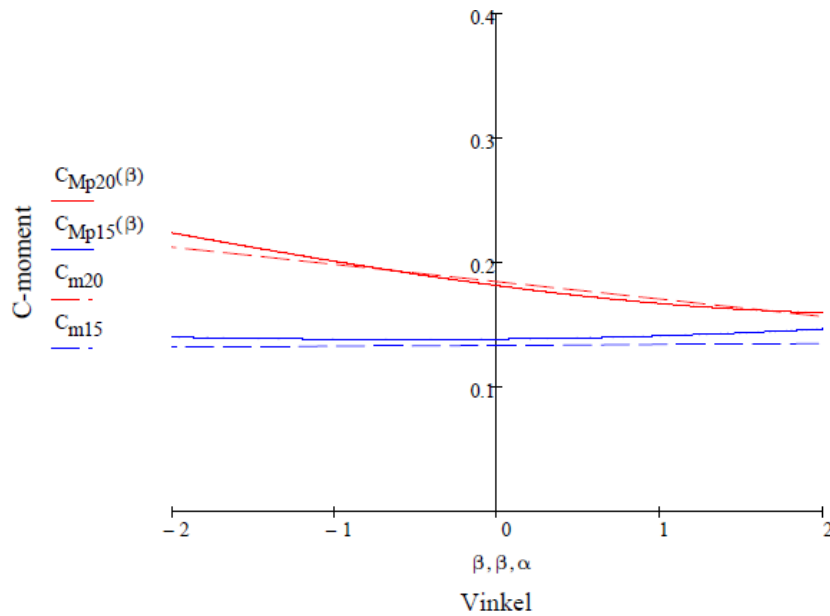


Figur 5-8 C-løft polynom og retlinjet rundt 0 grader for D8



Figur 5-9 C- moment polynom og retlinjet rundt 0 grader for D8

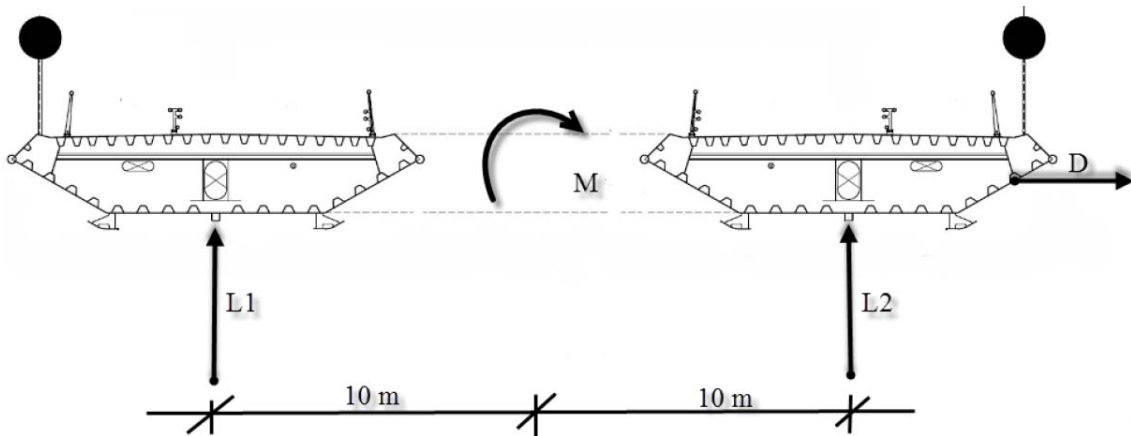
Dersom vi sammenligner figurene 5-9 og 5-8 med figurene 5-5 og 5-6 ser vi straks forskjellene som ble nevnt tidligere. Formen for løft er så og si lik for de to tverrsnittene, der forskjellen er at linjen på figur 5-6 er har negativ verdi for 0 grader. De to momentgrafene er derimot forskjellig, noe som lett kan illustreres ved å plote de to i samme graf som vist i Figur 5-8.



Figur 5-10 C-moment, heltrukne linje for polynom og stiplede for rettlinjet, rundt 0 grader for D13, rød, og D8, blå

For påføring av statisk vindlast er det benyttet DLOAD kommandoen til *Abaqus* i input-filen. Løft- og dragkrefter blir da påført som en jevnt fordelt last på de to brokassene. Løftkrefter og moment er beregnet på forhånd i *Mathcad*. For å generere det utregnede momentet er den beregnede løftkraften på broen fordelt på de to brokassene, slik at de skaper et moment om midten av broen som tilsvarer det beregnede for valgt vinkel.

Videre vil et ettall vise til brokassen eller kabelen som treffes først av vinden og et totalt vise til brokassen som er nedstrøms.



Figur 5-11 Plassering av statiske vindkrefter på brokassene, der  $L_1$  og  $L_2$  er løft krefter,  $M$  er moment og  $D$  er drag.  $L_1$  virker på brokassen som treffes først av vinden

For å finne  $L_1$  og  $L_2$  fra Figur 5-10 er det brukt helt vanlig mekanikk som gir

$$L_1 + L_2 = L \quad \text{som gir} \quad L_2 = L - L_1 \quad (5-1 \text{ og } 5-2)$$

$$10mL_1 - 10mL_2 = M \quad \text{som gir} \quad L_1 - L_2 = \frac{M}{10m} \quad (5-3 \text{ og } 5-4)$$

$$L_1 - (L - L_1) = \frac{M}{10m} \quad \text{som gir} \quad 2L_1 = \frac{M}{10m} + L \quad (5-5 \text{ og } 5-6)$$

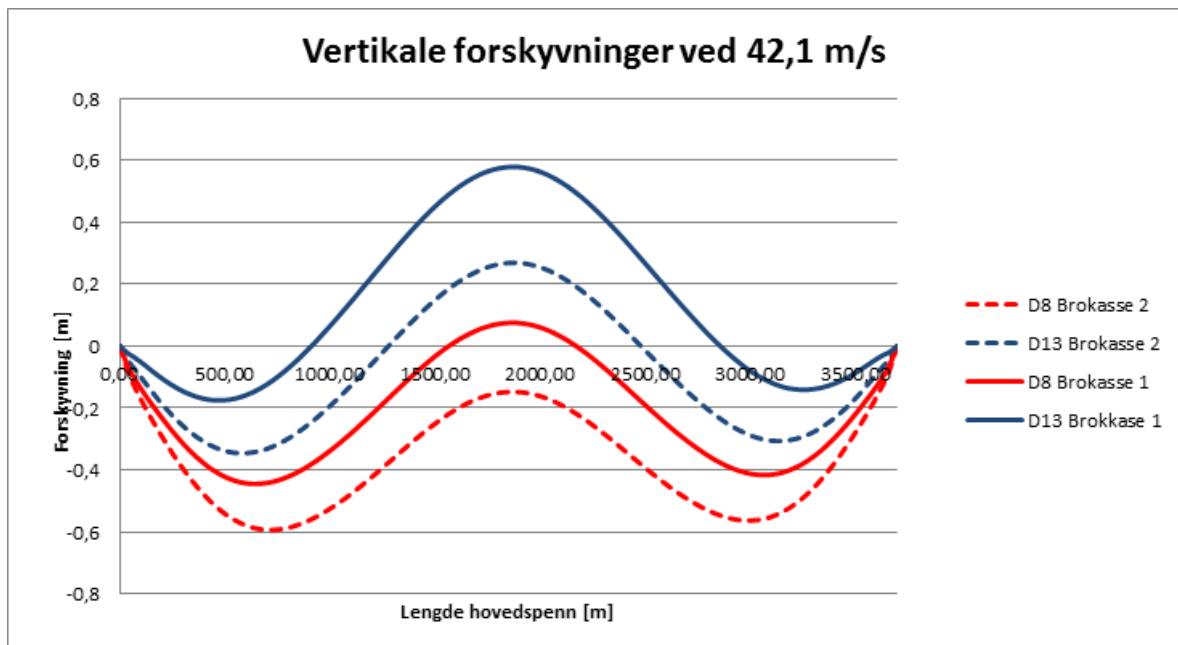
$$L_1 = \frac{M+10mL}{20m} \quad (5-7)$$

Der  $L$  og  $M$  er løft og moment ved valgt innfallsvinkel beregnet enten ved hjelp av førstegradsforenkling eller ved hjelp av polynomene,  $L_1$  er løft på brokassen som treffes først av vinden og  $L_2$  er løft på nedstrøms brokasse

For D13 og 0 grader innfallsvinkel blir  $L_1$  positiv og over dobbel så stor som  $L$ , noe som vil gi negativ  $L_2$  som er cirka halvparten av  $L$ . For dette tverrsnittet er momentet positivt ved null grader og det negativt stigningstall for momentkurven. Dette gjør at når vinkelen øker for vinkler over null grader, vil momentet bli mindre, og dermed vil også  $L$  og  $L_1$  bli mindre

For D8 og 0 grader innfallsvinkel er  $L$  negativ, dette gir positiv  $L_1$  som er cirka en tiendedel av størrelsen av  $L$ . Også for dette tverrsnittet er det positivt moment, så for å oppfylle ligning 5-3 må da  $L_2$  være negativ cirka 1.1 ganger større enn  $L$ . Momentet her er svakt stigende rundt null grader, noe som gjør at den negative løftkraften vil reduseres ved positive vinkler

Disse to forskjellene gjør at de vertikale forskyvningene ved vindlast blir forskjellige, illustrert i Figur 5-10, og spenningene i hovedkablene blir noe forskjellig, vist i Tabell 5-6.

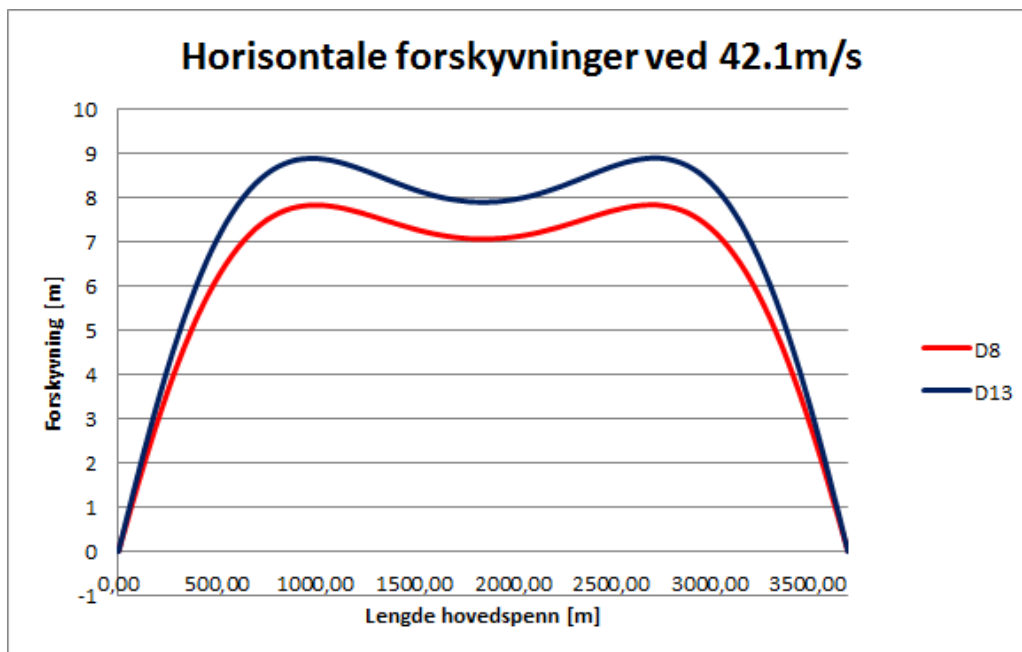


Figur 5-12 Vertikale forskyvninger av SV1, ved middelvind og 0 grader innfallsvinkel, ved bruk av formfaktorer for D8 og D13 fra [8] hentet direkte fra Abaqus

	Spenninger		Maks utnyttelse
	Ved tårn	Ved midten	
	Mpa	Mpa	%
Egenlast	719,17	660,14	40,63 %
D13 Kabel 1	712,16	653,5	40,24 %
D8 Kabel 1	720,44	661,21	40,70 %
D13 Kabel 2	720,28	661,01	40,69 %
D8 Kabel 2	726,33	666,65	41,04 %

Tabell 5-6 Spenninger i de to hovedkablene ved statisk vindlast ved 42,1m/s og utnyttelse ved bruk av kabel med fasthet på 1770 MPa

Som det vises i Tabell 5-5 vil bruk av formfaktorer for D13 senke spenningene i kabel 1 grunnet det positive løftet, og spenningene i kabel 2 vil heller ikke øke spesielt mye. For formfaktorer for D8 vil derimot spenningene øke i begge kablene, og da spesielt i kabel 2 grunnet det positive momentet og den negative løftkraften. Forskjellen på horisontal last vil være liten da eneste forskjell er at drag er litt lavere for D8 enn for D13 som vist i Figur 5-13. Ved beregnet middelvind, 42.1m/s, vil denne forskjellen være cirka 1 en meter.



Figur 5-13 Horisontale forskyvninger av SV1, ved middelvind og 0 grader innfallsvinkel, ved bruk av formfaktorer for D8 og D13 fra [8] hentet direkte fra Abaqus

Disse tallene er hentet direkte fra *Abaqus* for påført statisk vindlast. De inneholder ikke trafikklast eller sikkerhetsfaktorer for dimensjonering.

## 5.2 Dynamiske vindkrefter

Det er gjort noen forenklete beregninger av de dynamiske vindkreftene som virker inne på broen for å undersøke hva man kan forvente med en så lang bro. Det er for estimert flutterhastighet laget nye

bromodeller i *Abaqus* for å finne nye egenfrekvenser da det er ønskelig å sjekke flutterhastighet for D8 og D13 ved hjelp av data for aerodynamiske deriverte for de to tverrsnittene fra [8].

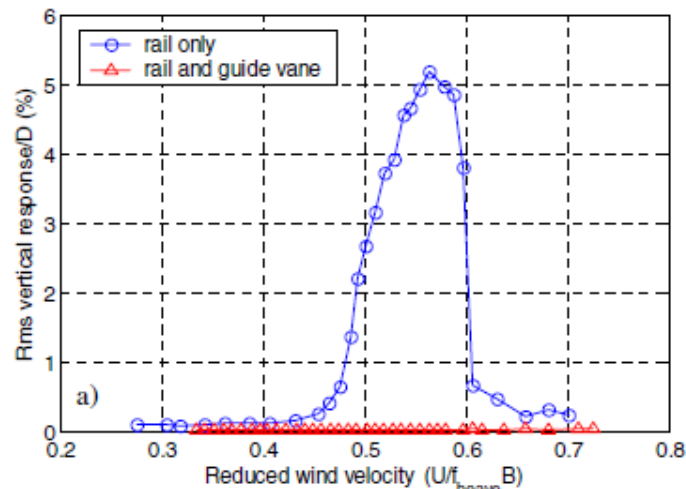
### 5.2.1 Virvelinduserte svingninger

For denne broen som har så lave vertikale egenfrekvenser som den har, vil kritisk vindhastighet for virvelinduserte svingninger også bli lav ved bruk av tradisjonell estimering av *Strouhals tall*. Det er gjort en estimering av tallet ved bruk av *NS-EN 1991-1-4* [6], se vedlegg C.

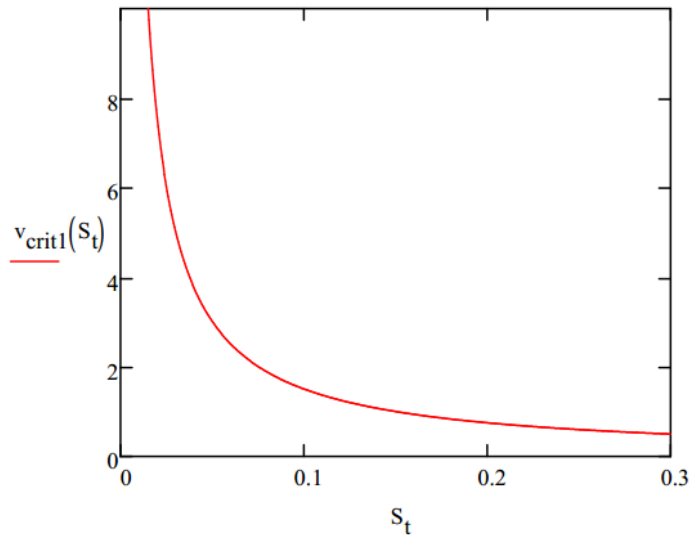
Kritisk vindhastighet for virvelinduserte svingninger ved bruk av ligning 2-18 blir da for laveste vertikale egenfrekvens

$$v_{crit} = \frac{Hn_{1y}}{S_t} = \frac{2,5m \times 0,0605Hz}{0,109} = 1,38 m/s$$

Som det vises på Figur 5-15 er den kritiske vindhastigheten for virvelinduserte svingninger svært avhengig av *Strouhals tall* som igjen er avhengig av *Reynolds tall* som varierer med vindhastighet. Ledskovler vil i noen tilfeller dempe de virvelinduserte svingningene til null, og den dempende effekten av ledskovlene er større ved høyere *Reynolds tall*, muligens grunnet det tynnere grensesjiktet som oppstår ved høyere *Reynolds tall*[16]. Dette vil høyst sannsynlig lede til bedre egenskaper, også med tanke på flutter.



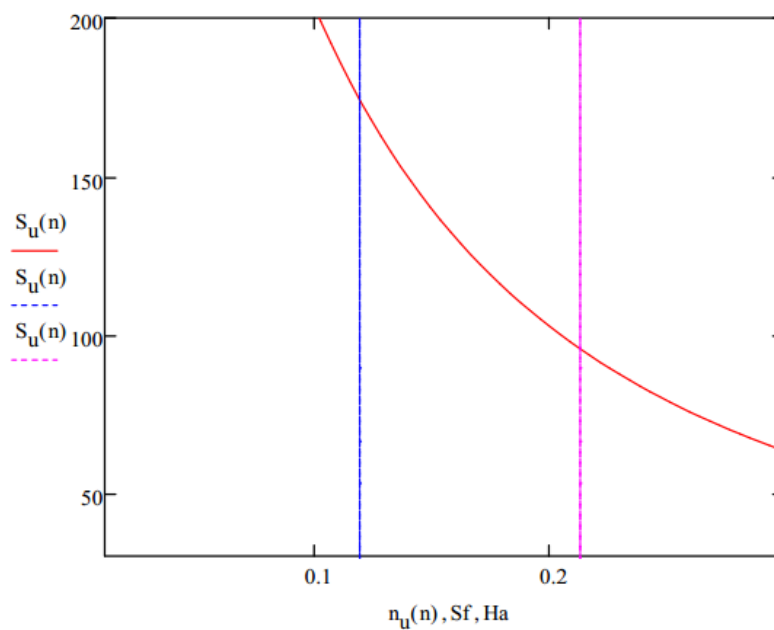
Figur 5-14 Vertikal forskyvning uten ledskovler, blå linje, og med ledskovler, rød linje, for modell av Stonecutters Bridge [16]



Figur 5-15 Kritisk vindhastighet for virvelinduserte svingninger ved laveste vertikale egenfrekvens som funksjon av Strouhals tall med laveste vertikale egenfrekvens for Sognefjordbroen og  $H=2,5m$

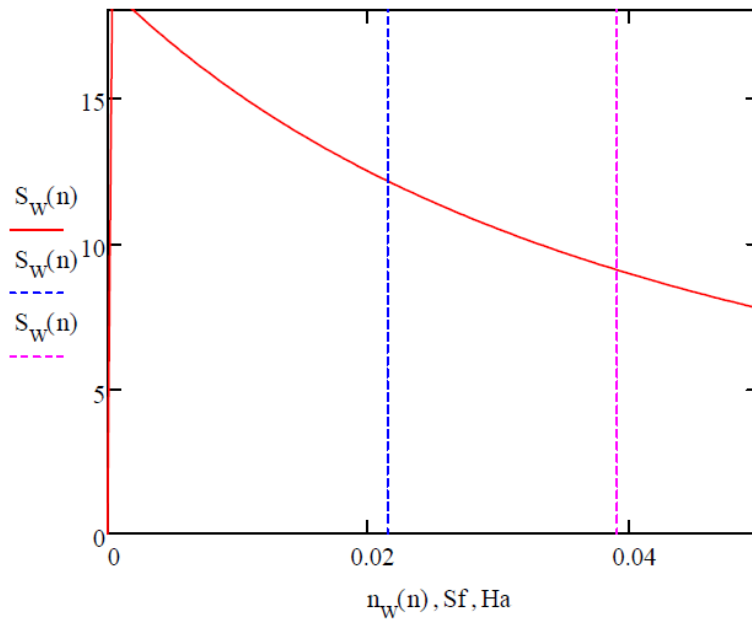
## 5.2.2 Turbulens

Fra ligning 2-20 kan det plottes ettpunktspektra som funksjon av den dimensjonsløse frekvensen fra ligning 2-22. Ført inn i grafene på figurene 5-16 og 5-17 er en linje som representerer Sognefjordbroen, og en som representerer Hardangerbroen for å ha et sammenligningsgrunnlag.



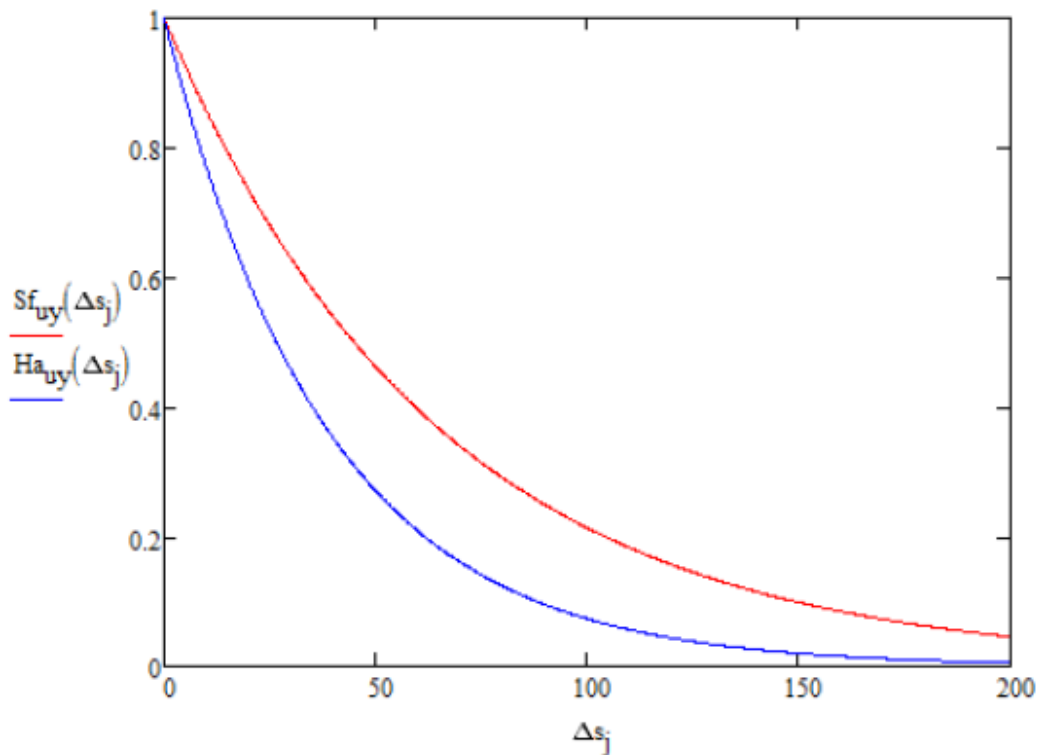
Figur 5-16 Turbulens i vindens retning ved 42,1m/s med dimensjonsløse egenfrekvenser for Sognefjordbroen, blå linje, og Hardangerbroen, lilla linje





Figur 5-17 Turbulens normalt på vindens retning ved 42,1m/s med dimensjonsløse egenfrekvenser for Sognefjordbroen, blå linje, og Hardangerbroen, lilla linje

Disse to ettpunktsspektraene sier noe om energien som kommer fra turbulensen i ett bestemt punkt, og det vises tydelig at det vil være et større bidrag fra turbulens på Sognefjordbroen kontra Hardangerbroen, og da spesielt i vindens retning. Det er benyttet de laveste horisontale egenfrekvensene for de to broene i Figur 5-16 og de laveste vertikale egenfrekvensene for de to broene i Figur 5-17.



Figur 5-18 Ko-koherens langs broen for u-komponent av turbulensen for Sognefjordbroen, rød line, og Hardangerbroen, blå linje.

På Figur 5-18 ser vi at for Sognefjordbroen er det større sannsynlighet for at turbulensen ved to gitte punkter langs med broen,  $\Delta s_j$ , har innvirkning på hverandre enn for Hardangerbroen. Dette skyldes at ko-koherens er avhengig av frekvens. Ko-koherens her også avhengig av middelvind, som gjør at linjen for Hardangerbroen i utgangspunktet skulle vært noe trukket ned, da det er benyttet middelvind for Sognefjordbroen for denne også.

### 5.2.3 Flutter

Fra ligning 2-30 kan får vi at kritisk flutterhastighet bør være

$$U_{crit} > 63,15 \text{ m/s}$$

For estimering av kritisk flutterhastighet er det brukt forenklet formel fra [11] som vist i ligning 2-27. Det er også foretatt estimering av kritisk flutterhastighet ved hjelp av data gitt i [8] for D8 og D13, og 2DOF flutterberegning gjort med *Matlab*kode levert av veileder *Jasna B. Jakobsen*. Denne metoden er heretter omtalt som 2DOF JBJ (finnes som digitalt vedlegg). 2DOF JBJ benytter seg av aerodynamiske deriverte beregnet fra data fra vindtunnelforsøk fra [8] og beregnes etter prinsippene forklart i delkapittel 2.3.2.4. Data fra beregninger av aerodynamiske deriverte som er benyttet finnes i vedlegg H.

	Første vertikale	Første torsjon
SV1	0,06045 Hz	0,08163 Hz
SV2	0,06052 Hz	0,08097 Hz
SV3	0,06045 Hz	0,07743 Hz

Tabell 5-7 Laveste asymmetriske egenfrekvenser

For å få flutterberegningene så nøyaktig som mulig er det endret på input-filen til *Abaqus* for å lage to nye bromodeller med det samme luftgapet som D8 og D13. Disse to nye tverrsnittene kalles SV2 og SV3. Der er da blitt beregnet nye egenfrekvenser, vist i Tabell 5-7, ny masse per lengdeenhet og nytt massetregghetsmoment som vist i Tabell 5-8. Det er antatt at første asymmetriske vertikal svingeform, VA1, kobler seg med første asymmetriske torsjonssvingeform, TA1, og at det er full mode likhet.

	Masse [kg/m]	Tregghetsmoment [kgm <sup>2</sup> /m]
SV1	33308,2	6081427,3
SV2	33338,5	6454432,3
SV3	33514,5	11277163,5

Tabell 5-8 Masse i hovedspenn per lengdeenhet og massetregghetsmoment for de tre modellene

		Larsen & Astiz u/ vind skjerm	Larsen & Astiz m/ vind skjerm	2DOF JBJ u/ led skovler	2DOF JBJ m/ led skovler
SV1	Flutterderiverte for D8	26,71 m/s	28,36 m/s	27,8 m/s	62 m/s
	Flutterderiverte for D13	26,71 m/s	28,36 m/s	38,4 m/s	117 m/s
SV2	Flutterderiverte for D8	27,08 m/s	29,04	27,8 m/s	61,4 m/s
SV3	Flutterderiverte for D13	34,23 m/s	38,95 m/s	37,1 m/s	114,3 m/s

Tabell 5-9 Kritisk flutterhastighet for de tre tverrsnittene ved bruk av forskjellige metoder

Tabell 5-8 viser at den forenklede formelen fra [11] er bra tilpasset for tverrsnitt uten ledskovler, og hvor enormt stor effekt ledskovler har for den kritiske flutterhastigheten for et tverrsnitt med to separate brokasser. Det som kan være en av grunnene til dette er at effekten av ledskovler økes ved høyere *Reynolds tall* [16].

## 6 Diskusjon og konklusjon

Denne oppgaven tar for seg noen av utfordringene ved å konstruere en lang hengebro. Den baserer seg på en grov elementmodell av en hengebro på 3700 meter levert av Statens Vegvesen og utdrag fra rapporten *Brusymfonien*. Det ble informert fra *Statens Vegvesen* at de har lagt til grunne data fra et brotverrsnitt fra *Brusymfonien* i sine analyser. Dette brotverrsnittet består av to brokasser, med bredde på 7,5 meter hver, senteravstand mellom de to brokassene på 20 meter og et luftgap på 12,96 meter. Brotverrsnittet som er modellert og tegnet har to brokasser med en bredde på 12,9 meter hver, senteravstand mellom de to brokassene på 20 meter og et luftgap på 7.1 meter. I denne oppgaven er det gjort analyser ved bruk av disse to tverrsnittene. I tillegg er det gjort analyser for et brotverrsnitt fra *Brusymfonien* som har to brokasser med bredde på 7,5 meter hver, senteravstand mellom de to brokassene på 15 meter og et luftgap på 7,96 meter.

Håndberegninger av egenfrekvenser ved bruk av formler fra *Bleich* viste seg å stemme nokså godt overens med egenfrekvensene fra *Abaqus* for vertikale egenfrekvenser, med største avvik på 5,22 % for den første symmetriske. Ikke overraskende ble det større avvik ved håndberegninger av torsjonsfrekvenser der minste avvik ble på 6,03 % for den første symmetriske. Dette tilskrives forenklingen av brotverrsnittet bestående av to separate brokasser til en brokasse, der luftgapet som separerer brokassene er fjernet, og brokassene og kablene er trukket inn for å lage en brokasse.

Det var planlagt å lage en *Intel Fortran* subrutine som skulle kjøres sammen med *Abaqus* for påføre de statiske vindkreftene som en *ikke-uniform last*. Det vil si at lasten ikke legges på som jevnt fordelt last langs brokassen, men den varierer i henhold til en vinkel hvor som helst langs brokassene. I en slik subrutine skal det være mulig å kjøre en løkke slik at den kan iterere seg fram til en innfallsvinkel hvor broen er stabil for valgt vindhastighet. Grunnet store vanskeligheter, samt ingen forkunnskap om kodeskriving, som ledet til knapt med tid, ble det benyttet forenklet metode som beskrevet i kapittel 5.

Resultatene fra den forenklete analysen av statiske vindlaster viser at hvilke formfaktorer man benytter vil ha stor innvirkning på forskyvningene til broen. I de to tilfellene som er presentert her vil det være positivt løft ved bruk av formfaktorer for D13 og negativt løft ved bruk av formfaktorer for D8. Dette ledet til forskjellige forskyvninger ved økende vindhastigheter, der broen blir trykket nedover ved bruk av D8, og oppover ved bruk av D13, og noen mindre forskjeller i kabelspenninger. De maksimale forskyvningene ved middelvind vil være 0.58meter og -0.35meter, henholdsvis for brokassen vinden treffer først og sist, ved bruk av formfaktorer for D13. Ved bruk av D8 vil de maksimale forskyvninger ved middelvind vil være -0.45meter og -0.59meter, henholdsvis for brokassen vinden treffer først og sist.

Resultatene fra flutterberegninger viser ikke overraskende at luftgapet mellom de to brokassene spiller en stor rolle. SV1 har mindre luftgap enn D8, men det er ikke foretatt vindtunnelforsøk for dette tverrsnittet, så det finnes ikke aerodynamiske deriverte for det. Det vil derfor ikke være mulig å si med sikkerhet at det vil bli lavere kritisk flutterhastighet for SV1, selv om mye tilsier nettopp det. Ved bruk av 2DOF flutter og data fra *Brusymfonien* for D8 og D13 på SV1 vil det oppstå store

forskjeller for estimert kritisk flutterhastighet, der bruk av data fra D13 gir nærmere dobbel kritisk hastighet, fra 62m/s til 117m/s. Ved å lage to nye modeller, SV2 og SV3, med de samme luftgapene som D8 og D13, synker kritisk hastighet noe grunnet lavere egenfrekvenser. De bevegelsesavhengige kreftene som er målt i vindtunellforsøk for D8 og D13 er svært små dersom man sammenligner de med et «vanlig» brotverrsnitt med kun én brokasse. Dette gjør at disse kreftene blir vanskeligere å måle, og usikkerheten rundt de aerodynamiske deriverte vil øke. Dermed vil også usikkerheten rundt den kritiske flutterhastigheten øke, altså dette må undersøkes grundig.

Resultatene fra flutterberegningene viser at ledskovler på et brotverrsnitt med to separate brokasser har stor innvirkning på kritisk flutterhastighet. Noe av grunnen til dette kan være at effekten av ledskovler øker ved høyere *Reynolds tall*. Luftgapet mellom de to brokassene vil også ha en innvirkning på den kritiske flutterhastigheten, der større luftgap øker den kritiske hastigheten.

Videre arbeid vil være å foreta vindtunellforsøk med en modell med samme dimensjoner som for SV1. Dette må gjøres for å finne de riktige dimensjonsløse formfaktorene og for å beregne aerodynamiske deriverte. I modellen må alle detaljer tas med og det bør legges vekt på effekten av ledskovler ved forskjellige *Reynolds tall*. Dette og måling av aerodynamiske deriverte bør det legges særlig vekt på da kritisk flutterhastighet for D8 er rett rundt  $1,5v_m = 63,15m/s$  som kan benyttes som krav for kritisk flutterhastighet. Før dette blir gjort er det vanskelig å si hvor gyldig resultatene fra både de statiske og dynamiske analysene i denne oppgaven er for tverrsnitt SV1.

## 7 Referanser

- [1] Hall, L. (Ukjent). *Made How*. Hentet Januar 2013 fra Suspension Bridge:  
<http://www.madehow.com/Volume-5/Suspension-Bridge.html>
- [2] Gimsing, N. J. (1997). *Cable Supportet Bridges, Concept & Design*. John Wiley & Sons.
- [3] Statens Vegvesen. (u.d.). *Hardangerbrua, teknisk brosjyre*. Hentet fra  
[http://www.vegvesen.no/\\_attachment/113344](http://www.vegvesen.no/_attachment/113344)
- [4] Statens Vegvesen. (2011). *Bruprojektering Eurokodeutegave, veiledning Håndbok 185*. Statens Vegvesen.
- [5] Statens Vegvesen. (2009). *Bruprojektering, Normaler Håndbok 185*. Statens Vegvesen.
- [6] Standard Norge. (2009). *Eurokode 1 NS-EN-1991-1-4:2005+NA:2009 Allmenne laster, Vindlast*. Standard Norge.
- [7] Jakobsen, J. B. (1995). *Fluctuating Wind Load and Respons of a Line-like Engineering Structure With Emphasis on Motion-induced Wind Forces*. Department of Structural Engineering, The Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim.
- [8] Hansen, S. O., Løllesgaard, M., Jakobsen, J. B., & Hjorth-Hansen, E. (2005). *Brusymfonien, Revision 1*. Prepared for Statens Vegvesen.
- [9] Simiu, E., & Miyata, T. (2006). *Design of Buildings and Bridges for Wind*. John Wiley & Sons.
- [10] Dyrbye, C., & Hansen, S. O. (1999). *Wind Loads on Structures*. John Wiley & Sons.
- [11] Larsen, A., & Astiz, M. (1998). Aeroelastic considerations for the Gibraltar Bridge feasibility study. *Bridge Aerodynamics, Larsen & Esdahl (eds) 1998 Balkema, Rotterdam*.
- [12] Strømmen, E. (2006). *Theory of bridge aerodynamics*. Springer.
- [13] F. Bleich, C. B. (1950). *The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges*. Department of Commerce, Bureau of Public Roads.
- [14] Ogawa, K., Shimodoi, H., & Oryu, T. (2002, Desember). Aerodynamic characteristics of a 2-box girder section adaptable for a super-long span suspension bridge. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, ss. 2033-2043.
- [15] Google. (u.d.). *Google Maps*. Hentet 2013 fra <http://maps.google.no/>
- [16] Larose, G., Larsen, S., Larsen, A., Hui, M., & Jensen, A. (2003). Sectional model experiments at high Reynolds number for the deck of a 1018 m span cable-stayed bridge.
- [17] Hjorth-Hansen, E. (1993). *Fluctuating drag, lift and overturning moment for a line-like structure predicted (primarily) from static, mean loads*. *Wind Engineering, Lecture note no. 2*. Institutt for konstruksjonsteknikk, Universitetet i Trondheim, Norges Tekniske Høgskole.

## 8 Vedlegg

Vedlegg A: Benyttet data for broen

Vedlegg B: Spenninger i hovedkabler

Vedlegg C: Vindberegninger

Vedlegg D: Frekvensberegninger

Vedlegg F: Forenklede flutterberegninger

Vedlegg G: Eksempel beregning løft og moment

Vedlegg H: Aerodynamiske deriverte fra Brusymfonien

## Vedlegg A

### Benyttet data for broen

Legde hovedspenn

$$L_b = 3700 \text{ m}$$

Pilhøyde hovedspenn

$$f = 370 \text{ m}$$

Masse en brokasse per lengdeenhet

$$m_b = 2 \times 1440,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}} + 3796,4 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$I_v = 0,4220 \text{ m}^4$$

Benyttet treghetsmoment en brokasse

$$I_h = 6,3182 \text{ m}^4$$

E-modul brokasse

$$E_b = 210 \text{ N/mm}^2$$

Tetthet hovedkabel i hovedspenn inkl halv hengestagsmasse

$$\rho_k = 8200 \text{ kg/m}^3$$

Vekt resterende hengestag fordelt over broens lengde

$$m_h = 460 \text{ kg/m}$$

Areal hovedkabel

$$A_k = 1,15 \text{ m}^2$$

E-modul hovedkabel

$$E_k = 160 \text{ N/mm}^2$$



## Vedlegg B

### Beregninger av spenninger i hovedkabler med egnevekt

$$L_b := 3700\text{m}$$

Lengde av hele broen

$$f := 370\text{m}$$

Pilhøyde fra "montasje sognefjordbroen"

$$m_k := 8200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Massetetthet hovedkabel, fra Abaqus

$$A_k := 1.15\text{m}^2$$

Areal hovedkabel, fra Abaqus

$$m_b := 14448.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Vekt av brokasser per meter, fra arket "laster" på "montasje sognefjordbroen" valgt BNHSTAG11 da den er over nesten hele broen. Finne også i input-fil til Abaqus

$$w := (2 \cdot m_k \cdot A_k + m_b) \cdot g = 326.64186 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Jevnt fordelt egenvekt fra kabel og brokasser

$$H := \frac{w \cdot L_b^2}{8 \cdot f} = 1510.719 \cdot \text{MN}$$

Horisontal kraft i kabel i midten av hovedspenn

$$T := \sqrt{H^2 + \left( \frac{w \cdot L_b}{2} \right)^2} = 1627.094 \cdot \text{MN}$$

Kraft i kabel ved tårn i kabelen sin retning

$$L_k := L_b + \frac{8f^2}{3 \cdot L_b} = 3798.6667 \text{ m}$$

Lengde av hovedkabel

$$\sigma_{\max} := \frac{\max(H, T)}{2 \cdot A_k} = 707.432 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Maks spenning i en hovedkabel

$$\sigma_{yk} := 1770 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Flytegrense hovedkabel

$$u_{\text{nytt}} := \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{yk}} = 0.3997$$

Utnyttelse hovedkabel med kun dead load

Kontroll med tall fra Abaqus

$$H_{A1} := 7.5916 \cdot 10^8 \text{ N}$$

Fra .dat fil i Abaqus. SF1 for element 1062, som er i midten av kabel 1. Gjelder for en kabel

$$H_A := H_{A1} \cdot 2 = 1518.32 \cdot \text{MN}$$

$$T_{A1} := 8.1734 \cdot 10^8 \text{ N}$$

SF1 for element 2001, som er ved tårn på kabel 2. Gjelder for en kabel

$$T_A := T_{A1} \cdot 2 = 1634.68 \cdot \text{MN}$$

## Vedlegg C

### Beregninger av vind etter NS-EN 1991-1-4 [6] og Håndbok 185, Eurokode utgave [4]

$$v_{b0} := 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_b = c_{\text{dir}} \cdot c_{\text{season}} \cdot c_{\text{alt}} \cdot c_{\text{prob}} \cdot v_{b0}$$

$$v_m(z) = c_r(z) \cdot c_0(z) \cdot v_b$$

$$c_{\text{dir}} \cdot c_{\text{season}} \cdot c_{\text{alt}} \cdot c_{\text{prob}} \cdot v_{b0}$$

$$K := 0.2 \quad p := \frac{1}{50}$$

$$c_{\text{prob}} := 1$$

$$c_{\text{season}} := 1 \quad c_{\text{alt}} := 1 \quad c_{\text{prob}} = 1$$

Antar terrengkategorori 1

$$z_0 := 0.01\text{m} \quad z_{\text{min}} := 1\text{m} \quad z_{\text{maks}} := 200\text{m} \quad z_{0\text{II}} := 0.05\text{m}$$

Ca høyde bro

$$z := 70\text{m}$$

$$c_r(z) = k_r \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad k_r := 0.19 \cdot \left(\frac{z_0}{z_{0\text{II}}}\right)^{0.07} = 0.17$$

$$c_r := k_r \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) = 1.503$$

$$v_b := c_{\text{dir}} \cdot c_{\text{season}} \cdot c_{\text{alt}} \cdot c_{\text{prob}} \cdot v_{b0} = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c_0 := 1$$

$$v_m := v_b \cdot c_0 \cdot c_r = 42.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Middelvindhastighet 70 meter over bakken med returperiode på 50 år

$$k_1 := 1 \quad \rho := 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$I_u := \frac{k_1}{c_0 \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} = 0.113$$

$$\sigma_u := k_r \cdot v_b \cdot k_1 = 4.753 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$k_p := 3.5$$

$$z_1 := 10\text{m} \quad L_1 := 100\text{m}$$

$$x_{Lu} := L_1 \cdot \left(\frac{z}{z_1}\right)^{0.3} = 179.279 \text{m}$$

$$\begin{pmatrix} I_v \\ I_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot u = \begin{pmatrix} 0.085 \\ 0.056 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{Lu} \\ z_{Lu} \\ x_{Lv} \\ y_{Lv} \\ z_{Lv} \\ x_{Lw} \\ y_{Lw} \\ z_{Lw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix} \cdot x_{Lu} = \begin{pmatrix} 59.76 \\ 35.856 \\ 44.82 \\ 44.82 \\ 14.94 \\ 14.94 \\ 9.96 \\ 9.96 \end{pmatrix} \text{m}$$

## Ettpunktsspektra

$$I_u = 0.113$$

$$I_v = 0.085$$

$$I_w = 0.056$$

$$A_u := 6.8$$

$$A_v := 9.4$$

$$A_w := 9.4$$

$$\sigma_v := v_m \cdot I_v = 3.565 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\sigma_w := v_m \cdot I_w = 2.377 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

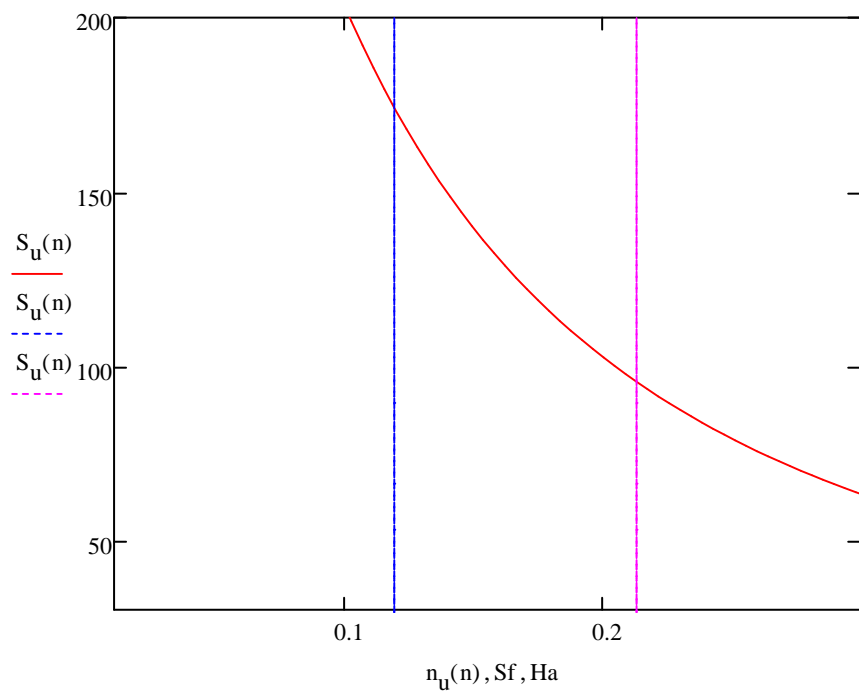
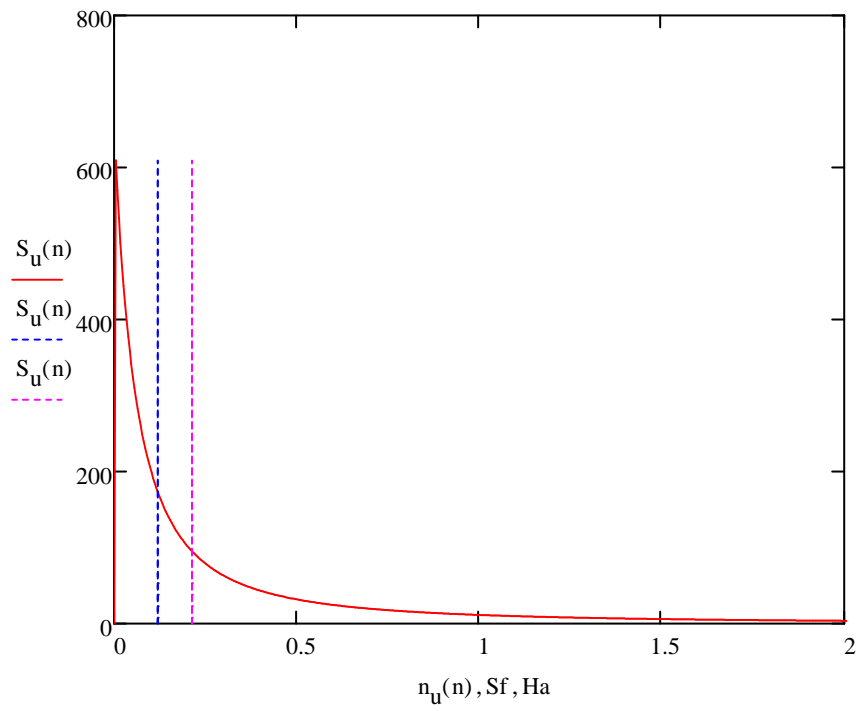
$$A_i := \begin{pmatrix} A_u \\ A_v \\ A_w \end{pmatrix} \quad x_{Li} := \begin{pmatrix} x_{Lu} \\ x_{Lv} \\ x_{Lw} \end{pmatrix}$$

$$n_u(n) := \frac{n \cdot x_{Lu}}{v_m}$$

$$R_u(n) := \frac{A_u \cdot n_u(n)}{\left(1 + 1.5 \cdot A_u \cdot n_u(n)\right)^{\frac{5}{3}}}$$

$$S_u(n) := \frac{A_u \cdot n_u(n) \cdot \sigma_u^2}{\left(1 + 1.5 \cdot A_u \cdot n_u(n)\right)^{\frac{5}{3}} \cdot n}$$

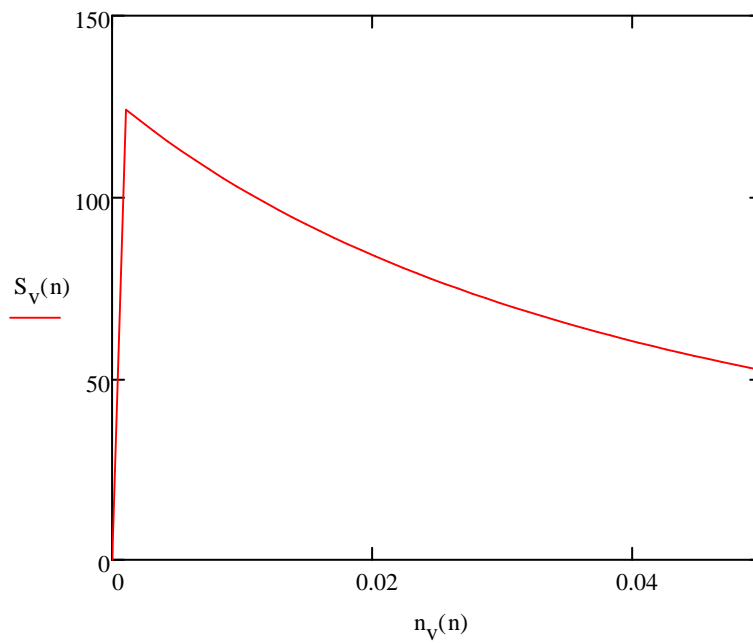
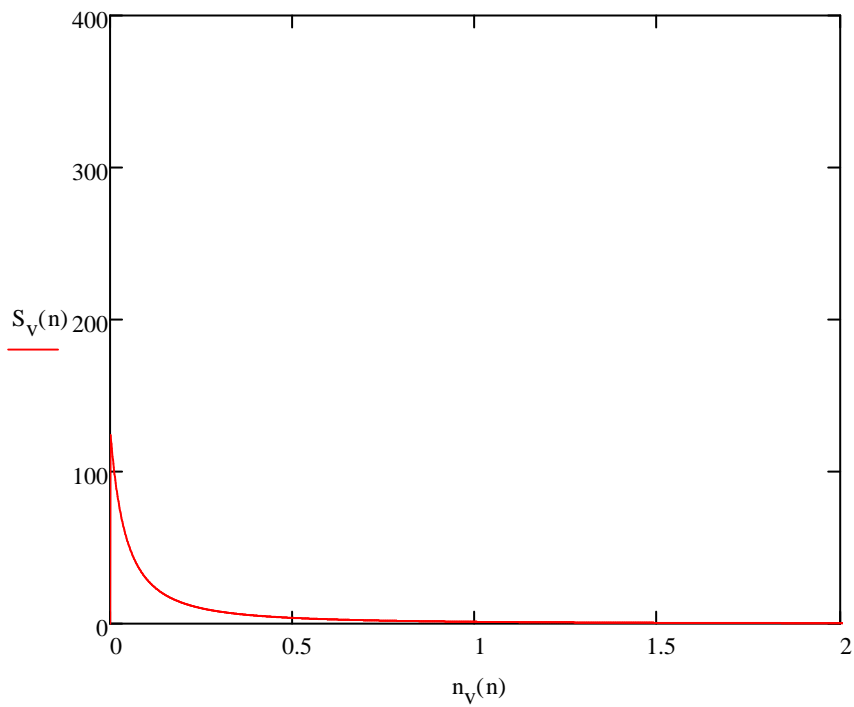
$$n := 0, 0.001\text{Hz}.. 2\text{Hz}$$



$$n_V(n) := \frac{n \cdot x_{LV}}{v_m}$$

$$R_V(n) := \frac{A_V \cdot n_V(n)}{(1 + 1.5 \cdot A_V \cdot n_V(n))^{\frac{5}{3}}}$$

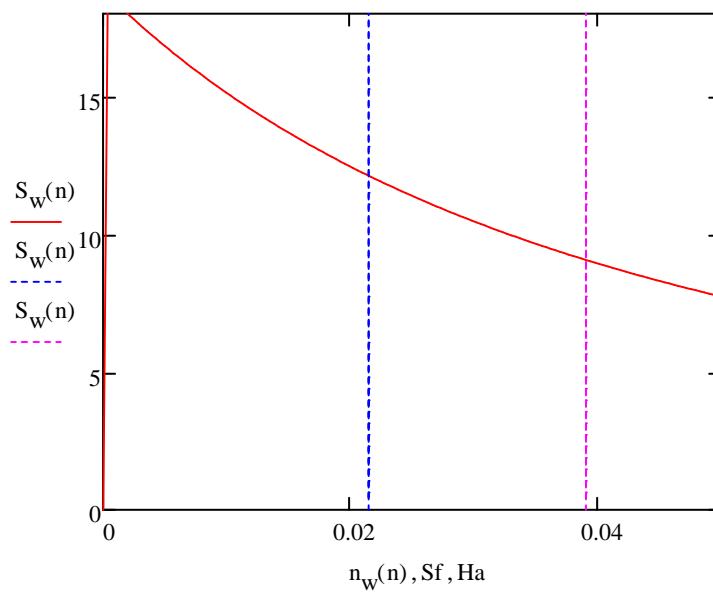
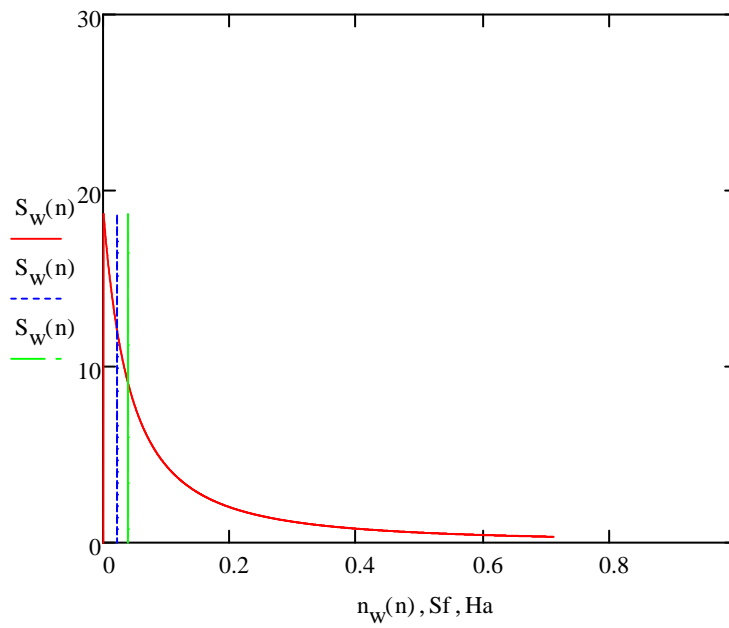
$$S_V(n) := \frac{A_V \cdot n_V(n) \cdot \sigma_V^2}{(1 + 1.5 \cdot A_V \cdot n_V(n))^{\frac{5}{3}} \cdot n}$$



$$n_w(n) := \frac{n \cdot x_{LW}}{v_m}$$

$$R_w(n) := \frac{A_w \cdot n_w(n)}{\left(1 + 1.5 \cdot A_w \cdot n_w(n)\right)^{\frac{5}{3}}}$$

$$S_w(n) := \frac{A_w \cdot n_w(n) \cdot \sigma_w^2}{\left(1 + 1.5 \cdot A_w \cdot n_w(n)\right)^{\frac{5}{3}} \cdot n}$$





## Ko - koherens

$$C_{uy} := 10$$

$$C_{vz} := 6.5$$

$$C_{uz} := 10$$

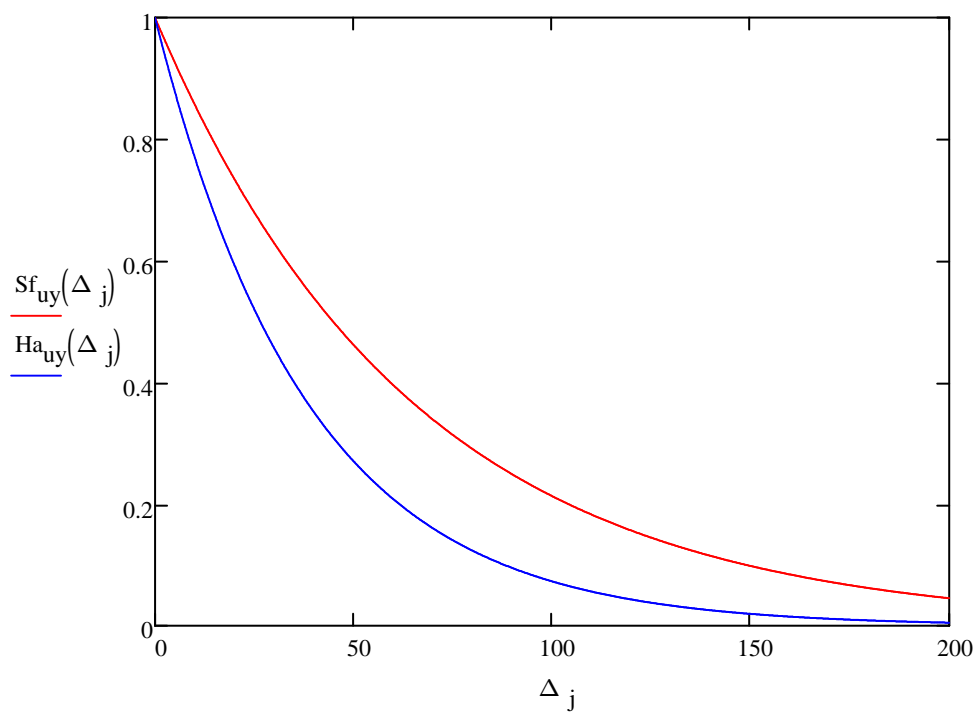
$$C_{wy} := 6.5$$

$$C_{vy} := 6.5$$

$$C_{wz} := 6.5$$

$$Sf_{uy}(\Delta_j) := e^{\left(-C_{uy} \cdot \frac{\Delta_j \cdot 0.065 \text{ Hz}}{v_m}\right)}$$

$$Ha_{uy}(\Delta_j) := e^{\left(-C_{uy} \cdot \frac{0.11 \cdot \text{ Hz} \cdot \Delta_j}{v_m}\right)}$$



Ko - koherens tubulenspunkter langs broen fra turbulenskomponent u  
Sognefjordbroen med rød linje  
Hardangerbroen med blå linje  
Begge for 42.1 m/s

## Tillegg E i Eurokode 1 NS-EN-1991-1-4

### Bergening av VIV

$$B := 12.9\text{m} \quad H := 2.5\text{m}$$

$$\frac{B}{H} = 5.16$$

$$S_t := 0.11 + (0.09 - 0.11) \cdot \frac{(5.16 - 5)}{(10 - 5)}$$

$$S_t = 0.109$$

$$n_{iy} := \begin{pmatrix} 60.4544 \cdot 10^{-3} \\ 75.5866 \cdot 10^{-3} \\ 101.08 \cdot 10^{-3} \\ 114.904 \cdot 10^{-3} \\ 145.028 \cdot 10^{-3} \\ 171.461 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ Hz}$$

$$S_t := 0.05$$

$$v_{\text{cri}} := \frac{H \cdot n_{iy}}{S_t} = \begin{pmatrix} 3.023 \\ 3.779 \\ 5.054 \\ 5.745 \\ 7.251 \\ 8.573 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$S_t := 0.0, 0.0005 .. 0.3$$

$$v_{\text{crit1}}(S_t) := \frac{H \cdot n_{iy0}}{S_t}$$

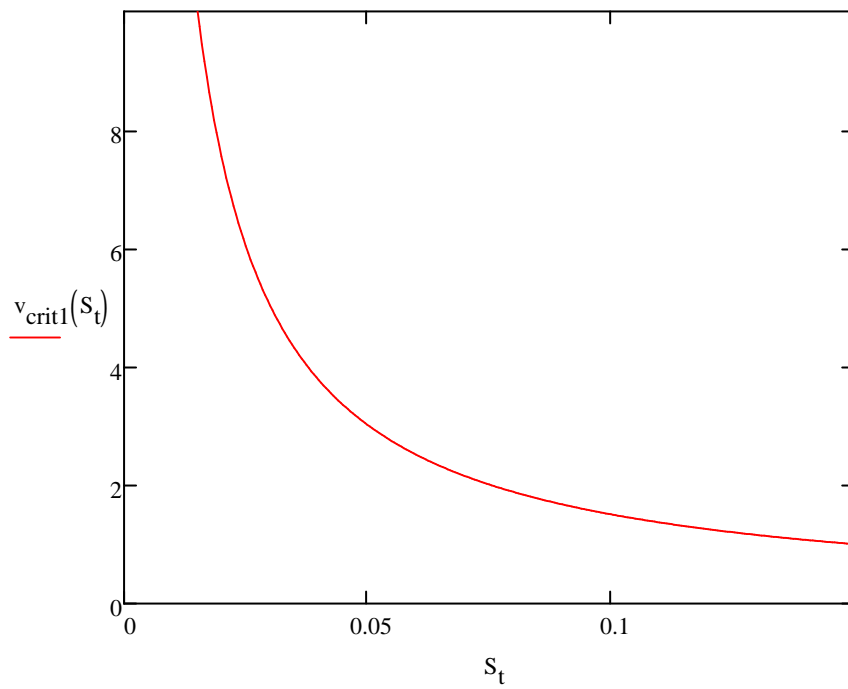
Interpolering mellom  $d/b=5$  og  $d/b=10$  i figur E.1

Bruker  $S_t$  for "flat pan" i Tabell E.1

Med dette  $S_t$  blir det antatt at vinden samler seg etter å ha truffet en brokasse, noe som mest sannsynlig er feil. Om vi bruker bredden av begge får vi  $S_t=0.9$  noe som gir høyere kritisk hastighet så det brukes  $S_t$  for en brokasse. Dette må undersøkes nærmere

Vertikale frekvenser fra Abaqus

Kritisk VIV hastighet for de 6 første vertikale egenfrekvensene



Kritisk VIV hastighet for første vertikale egenfrekvens som funksjon av  $S_t$

## Vedlegg D

### Bergninger av frekvenser etter formler fra Bleich [13]

Frekvenser for D=7.1m

Lengde brokasse	$L_b := 3700\text{m}$	
Lengde hovedkabel	$L_k := 3798.6667\text{m}$	Fra Mathcad ark "Spenninger hovedkabler"
E-modul brokasse	$E_b := 210\text{GPa}$	
E-modul hovedkabel	$E_k := 160\text{GPa}$	Fra Abaqus
Areal hovedkabel	$A_k := 1.15\text{m}^2$	
Treghetsmoment brokasse	$I := 2 \cdot 0.422\text{m}^4$	
Vekt av hovedspenn pr meter	$w := 328.0195247 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$	Fra Mathcad ark "Spenninger hovedkabler"
Pilhøyde	$f := 370 \text{ m}$	

$$\lambda := \frac{\pi^2 \cdot E_b \cdot I}{L_k^2} = 1.212 \times 10^5 \text{ N}$$

$$H_w := \frac{w \cdot L_k^2}{f \cdot 8} = 1.599 \times 10^9 \text{ N}$$

$$\omega(n) := \frac{n \cdot \pi}{L_k} \cdot \sqrt{\frac{g}{w} \cdot (H_w + n^2 \cdot \lambda)}$$

$$n := 2, 4 \dots 6$$

$$\omega(n) = \begin{pmatrix} 0.36171 \\ 0.72375 \\ 1.08644 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T(n) := \frac{2\pi}{\omega(n)}$$

$$T(n) = \begin{pmatrix} 17.37079 \\ 8.68145 \\ 5.78326 \end{pmatrix} \text{ s}$$

$$F_{VA}(n) := \frac{1}{T(n)}$$

$$F_{VA1} := F_{VA}(2) = 0.0575679 \cdot \text{Hz}$$

$$F_{VA2} := F_{VA}(4) = 0.1151881 \cdot \text{Hz}$$

$$F_{VA3} := F_{VA}(6) = 0.172913 \cdot \text{Hz}$$

Asymmetriske vertikale

### Symmetriske vertikale

$$\lambda := \frac{\pi^2 \cdot E_b \cdot I}{L_k^2} = 1.212 \times 10^5$$

$$H_w := \frac{w \cdot L_k^2}{f \cdot 8} = 1.599 \times 10^9$$

### Symmetriske vertikale 1 og 2

$$A \cdot k + 9 \cdot B \cdot (k - A \cdot p) = 0$$

$$A = s \cdot \omega^2 - H_w - \lambda$$

$$B = s \cdot \omega^2 - 9 \cdot H_w - 81 \cdot \lambda$$

$$s := \frac{w \cdot L_b^2}{\pi^2 \cdot 9.80665} = 4.64 \times 10^{10}$$

$$k := \frac{32 \cdot f}{\pi^3} = 381.858$$

$$p := \frac{\pi \cdot L_b}{16 \cdot f} \cdot \frac{L_k}{E_k \cdot A_k} = 4.054 \times 10^{-8}$$

$$A(x) := s \cdot x^2 - H_w - \lambda$$

$$B(x) := s \cdot x^2 - 9 \cdot H_w - 81 \cdot \lambda$$

$$q := A(x) \cdot k + 9 B(x) \cdot (k - A(x) \cdot p) \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -0.60667157752555817309 \\ 0.60667157752555817309 \\ -0.44990934827895371811 \\ 0.44990934827895371811 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 := q_3 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} = 0.45 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\omega_3 := q_1 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} = 0.607 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

**For n=5 og høyere**

$$\omega(n) := \sqrt{\left( n^2 \cdot H_w + n^4 \cdot \lambda + \frac{k}{n^2 \cdot p} \right) \frac{1}{s}}$$

$$\omega_5 := \omega(5) = 0.933 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$T_1 := \frac{2\pi}{\omega_1} = 13.965 \text{ s}$$

$$T_2 := \frac{2\pi}{\omega_3} = 10.357 \text{ s}$$

$$T_3 := \frac{2\pi}{\omega_5} = 6.731 \text{ s}$$

$$F_{VS1} := \frac{1}{T_1} = 0.0716053 \cdot \text{Hz}$$

$$F_{VS2} := \frac{1}{T_2} = 0.0965548 \cdot \text{Hz}$$

$$F_{VS3} := \frac{1}{T_3} = 0.1485691 \cdot \text{Hz}$$

Vertikal symmetriske

## Symmetrisk torsjons

$$D := 7.1$$

$$B := 2 \cdot 12.9$$

$$L_b := \frac{L_b}{m}$$

$$E_b := \frac{E_b}{\text{Pa}}$$

$$A_k := \frac{A_k}{m^2}$$

$$w := \frac{w}{\frac{N}{m}}$$

$$L_k := \frac{L_k}{m}$$

$$E_k := \frac{E_k}{\text{Pa}}$$

$$I := \frac{I}{m^4}$$

$$f := \frac{f}{m}$$

$$m_b := 14448.2$$

Fra hengestagskrefter

$$B := 12.9 \cdot 2$$

$$r := 13.74$$

Fra Mathcad ark Flutter

$$\frac{B}{2r} = 0.939$$

$$D := 2.5$$

$$B_k := 24$$

$$\mu_v := 2\sqrt{2}$$

$$\mu_h := 2\sqrt{2}$$

$$t := \frac{10}{1000}$$

$$A_v := 1.09 \cdot t \cdot D = 0.027$$

$$A_h := 1.09 \cdot t \cdot B = 0.281$$

$$\beta := \frac{B_k \cdot D}{\left( \frac{\mu_v \cdot D^2}{A_v} \right) + \left( \frac{\mu_h \cdot B^2}{A_h} \right)}$$

$$H_w := \frac{w \cdot L_k^2}{f \cdot 8} = 1.599 \times 10^9$$

$$R := \left( E_b \cdot \beta \cdot B_k \cdot D + H_w \cdot \frac{B_k^2}{4} \right) \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot L_b} = 4.444 \times 10^8$$

$$I_h := t \cdot D \cdot \frac{B^2}{2} = 8.321$$

$$I_v := t \cdot B \cdot \frac{D^2}{2} = 0.806$$

### Fra Abaqus

$$I_h := 6.3182 \cdot 2 = 12.636$$

$$I_v := 2 \cdot 0.422 = 0.844$$

$$\epsilon_v := \frac{B}{2} - \frac{\mu_v}{A_v} \cdot \beta \cdot D = 10.78$$

$$\epsilon_h := \frac{D}{2} - \frac{\mu_h}{A_h} \cdot \beta \cdot B = -0.87$$

$$Y := I_v \cdot \epsilon_v^2 + I_h \cdot \epsilon_h^2 = 107.645$$

$$\Lambda := E_b \cdot Y \cdot \frac{\pi^4}{2 \cdot L_b^3} = 2.174 \times 10^4$$

$$w_k := (2 \cdot 8200 \cdot 1.15) \cdot 9.807 = 1.85 \times 10^5$$

$$w_b := m_b \cdot 9.807 = 1.417 \times 10^5$$

$$M := \frac{1}{9.807} \left( r^2 \cdot w_b + \frac{B_k^2}{4} \cdot w_k \right) = 5.443 \times 10^6$$

$$s := M \cdot \frac{L_b}{4} = 5.035 \times 10^9$$

$$A(x) := s \cdot x^2 - \Lambda - R$$

$$B(x) := s \cdot x^2 - 81 \cdot \Lambda - 9R$$

$$K := \frac{E_k \cdot A_k}{L_k} \cdot \frac{64 \cdot f^2 \cdot B_k^2}{\pi^2 \cdot L_b^2} = 1.809 \times 10^9$$

$$p(x) := B(x) \cdot (A(x) - K) - \frac{A(x) \cdot K}{9}$$



$$p := p(x) \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -0.64305045085881282888 \\ 0.64305045085881282888 \\ -0.93203894017820877343 \\ 0.93203894017820877343 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 := p_1 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} = 0.643 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_2 := p_3 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} = 0.932 \frac{1}{\text{s}}$$

$$T_{\text{TS1}} := \frac{2\pi}{\omega_1} = 9.771 \text{ s}$$

$$T_{\text{TS2}} := \frac{2\pi}{\omega_2} = 6.741 \text{ s}$$

$$F_{\text{TS1}} := \frac{1}{T_{\text{TS1}}} = 0.1023447 \cdot \text{Hz}$$

Torsjon symmetriske

$$F_{\text{TS2}} := \frac{1}{T_{\text{TS2}}} = 0.1483386 \cdot \text{Hz}$$

### Asymmetrisk torsjon

$$\omega(n) := \sqrt{\frac{n^2}{s} (n^2 \cdot \Lambda + R)} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad n := 2, 4, \dots, 4$$

$$\omega(n) = \begin{pmatrix} 0.594 \\ 1.189 \end{pmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$T(n) := \frac{2\pi}{\omega(n)}$$

$$F(n) := \frac{1}{T(n)}$$

$$F(n) = \begin{pmatrix} 0.095 \\ 0.189 \end{pmatrix} \text{Hz}$$

$$F_{\text{TA1}} := F(2) = 0.0945758 \cdot \text{Hz}$$

Torsjon asymmetriske

$$F_{\text{TA2}} := F(4) = 0.189207 \cdot \text{Hz}$$

## Vedlegg E

### Beregning og plotting av polynomer

$$\begin{array}{l} \text{Innfallsvinkel} \\ \alpha := \end{array} \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Dragkoeffisienter} \\ C_{D20} := \end{array} \begin{pmatrix} 2.887 \\ 2.444 \\ 1.891 \\ 1.724 \\ 1.754 \\ 1.718 \\ 1.676 \\ 2.156 \\ 2.491 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Momentkoeffisienter} \\ C_{M20} := \end{array} \begin{pmatrix} .229 \\ .311 \\ .270 \\ .221 \\ .185 \\ .165 \\ .165 \\ .296 \\ .406 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Løftkoeffisienter} \\ C_{L20} := \end{array} \begin{pmatrix} -.832 \\ -.643 \\ -.304 \\ -.101 \\ .118 \\ .344 \\ .509 \\ .856 \\ 1.011 \end{pmatrix}$$

Alle koeffisienter hentet fra Brusymfonien

Drag

$$\rho := 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

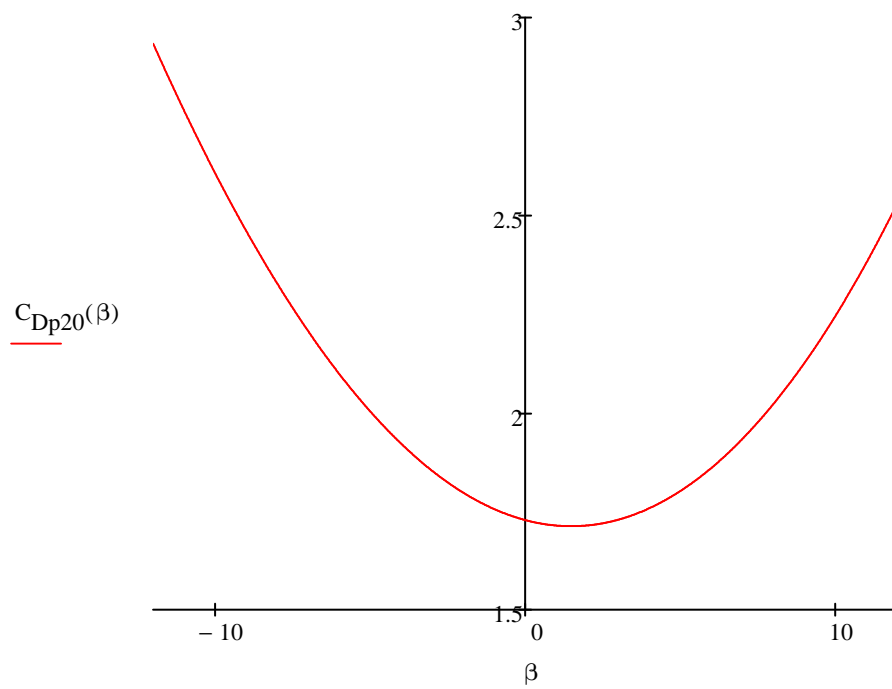
$$k := 3$$

$$V := 42.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad B := 12.9\text{m} \quad H := 2.5\text{m}$$

$$z := \text{regress}(\alpha, C_{D20}, k)$$

$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1.726918929555 \\ -0.020471508114 \\ 0.007014757969 \\ 0.000028023576 \end{pmatrix}$$

$$C_{Dp20}(\beta) := z_3 + z_4 \cdot \beta + z_5 \cdot \beta^2 + z_6 \cdot \beta^3$$



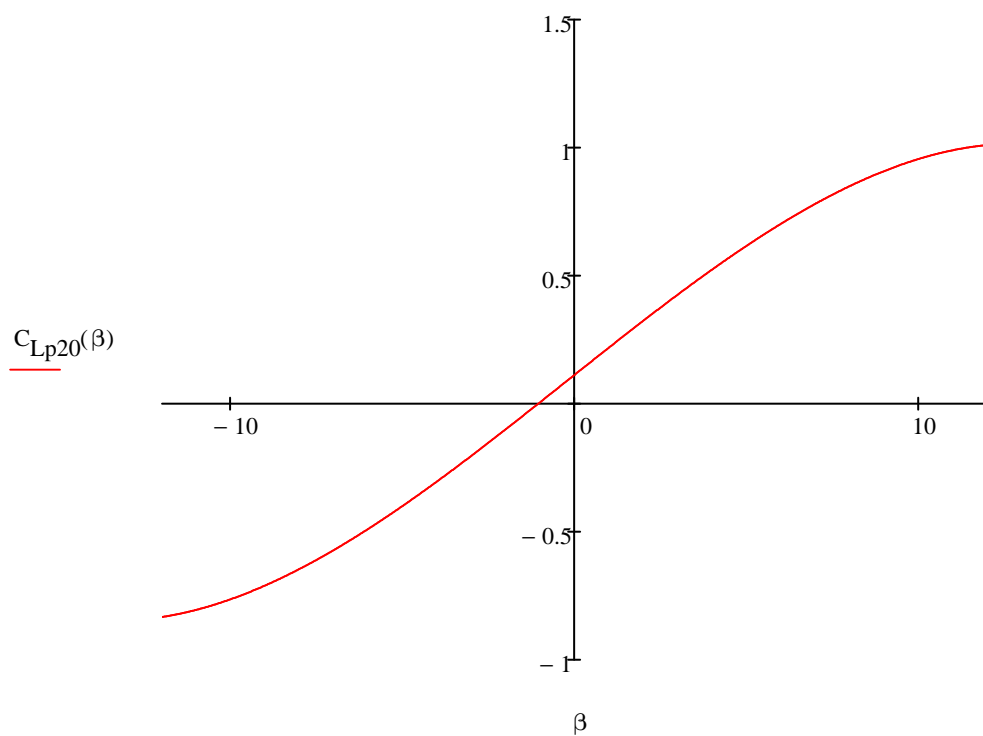
Løft

$k := 3$

$z2 := \text{regress}(\alpha, C_{L20}, k)$

$$z2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0.11556434474616292 \\ 0.10685664017221397 \\ -0.00017999803227076 \\ -0.00020866451399238 \end{pmatrix}$$

$$C_{Lp20}(\beta) := z2_3 + z2_4 \cdot \beta + z2_5 \cdot \beta^2 + z2_6 \cdot \beta^3$$



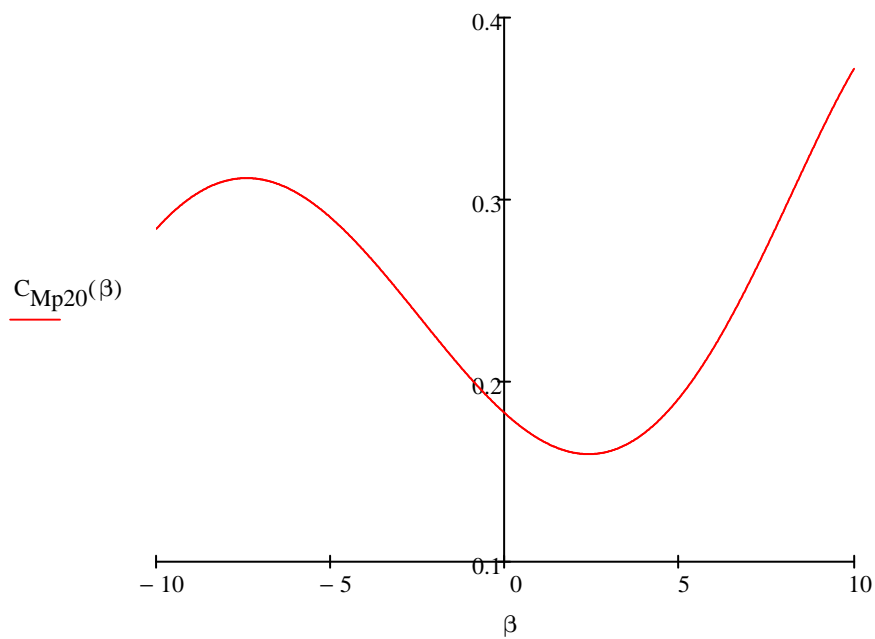
## Moment

$k := 5$

$z3 := \text{regress}(\alpha, C_{M20}, k)$

$$z3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 0.1818659031 \\ -0.017308576 \\ 0.0026299436 \\ 0.0003217158 \\ -0.0000117122 \\ -0.0000010436 \end{pmatrix}$$

$$C_{Mp20}(\beta) := z3_3 + z3_4 \cdot \beta + z3_5 \cdot \beta^2 + z3_6 \cdot \beta^3 + z3_7 \cdot \beta^4 + z3_8 \cdot \beta^5$$



$$D(\beta) := 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot H \cdot C_{Dp20}(\beta)$$

$$L(\beta) := 0.5 \cdot V^2 \cdot \rho \cdot B \cdot C_{Lp20}(\beta)$$

$$M(\beta) := 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot B^2 \cdot C_{Mp20}(\beta)$$

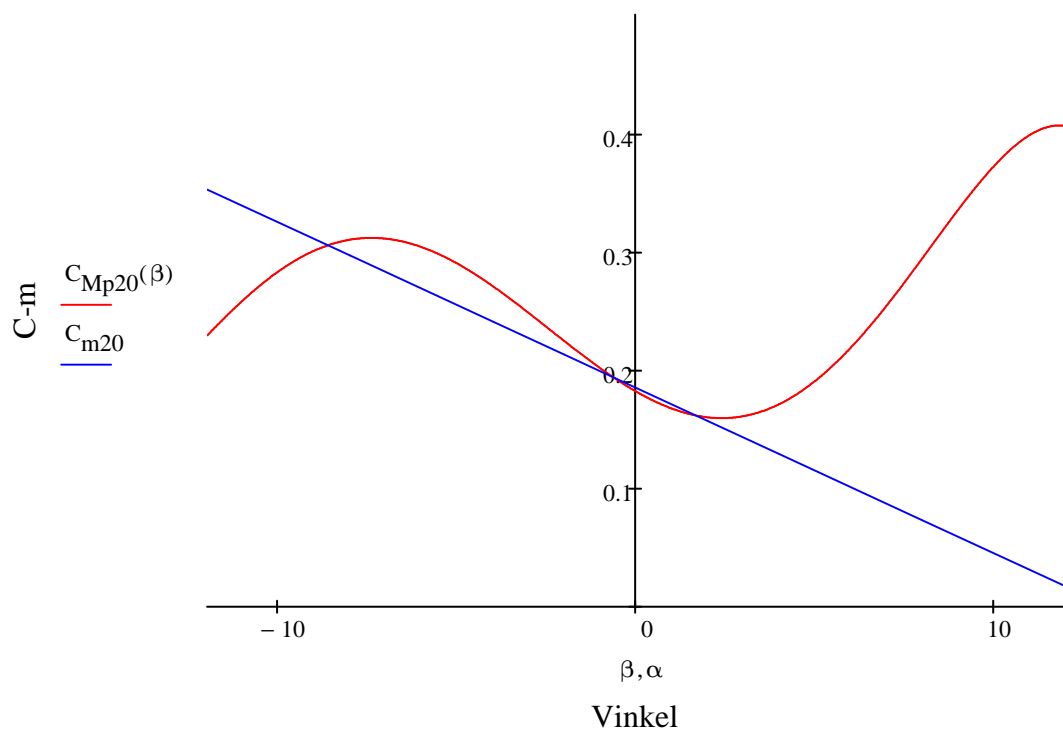
$$C_{L20} := 0.118 \quad C_{L20} := 6.37$$

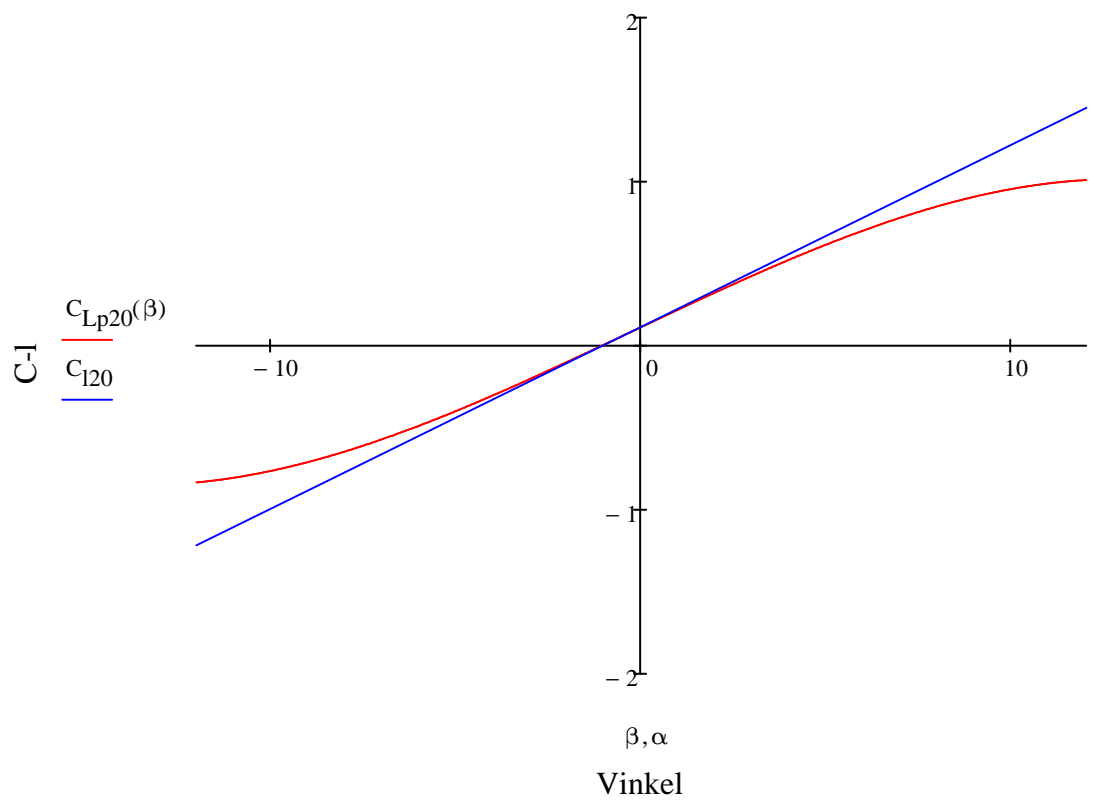
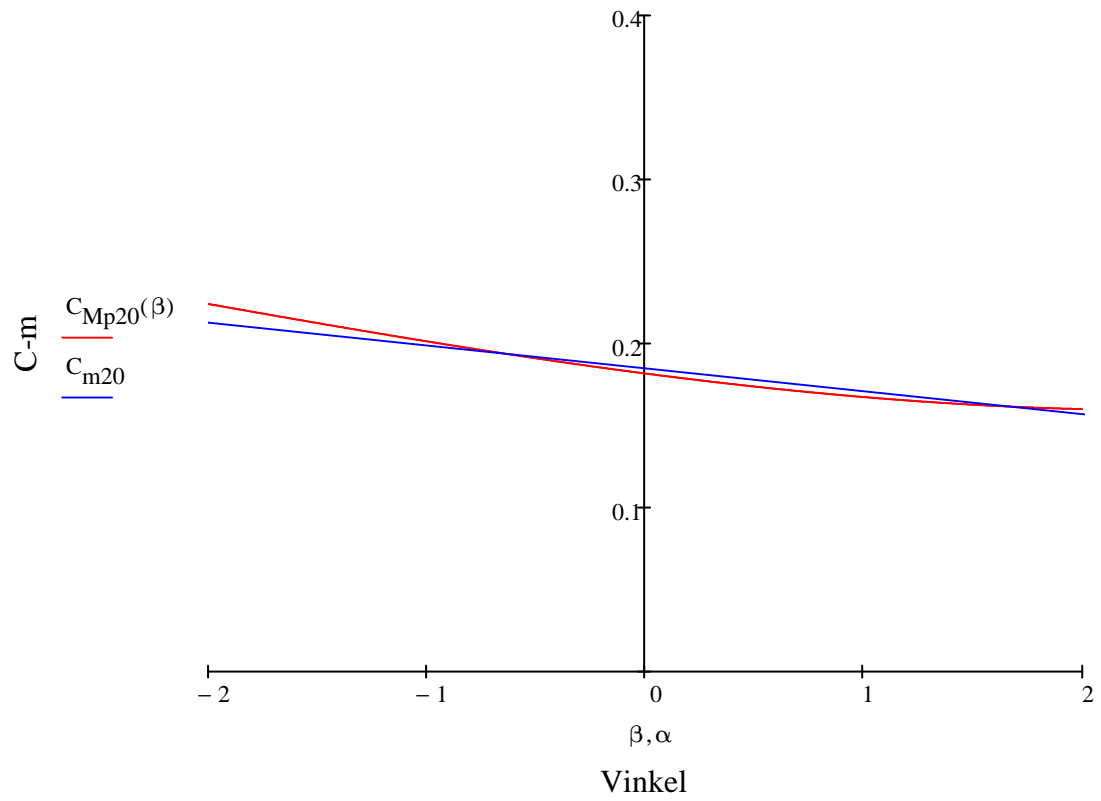
$$C_{M20} := 0.185 \quad C_{M20} := -0.8$$

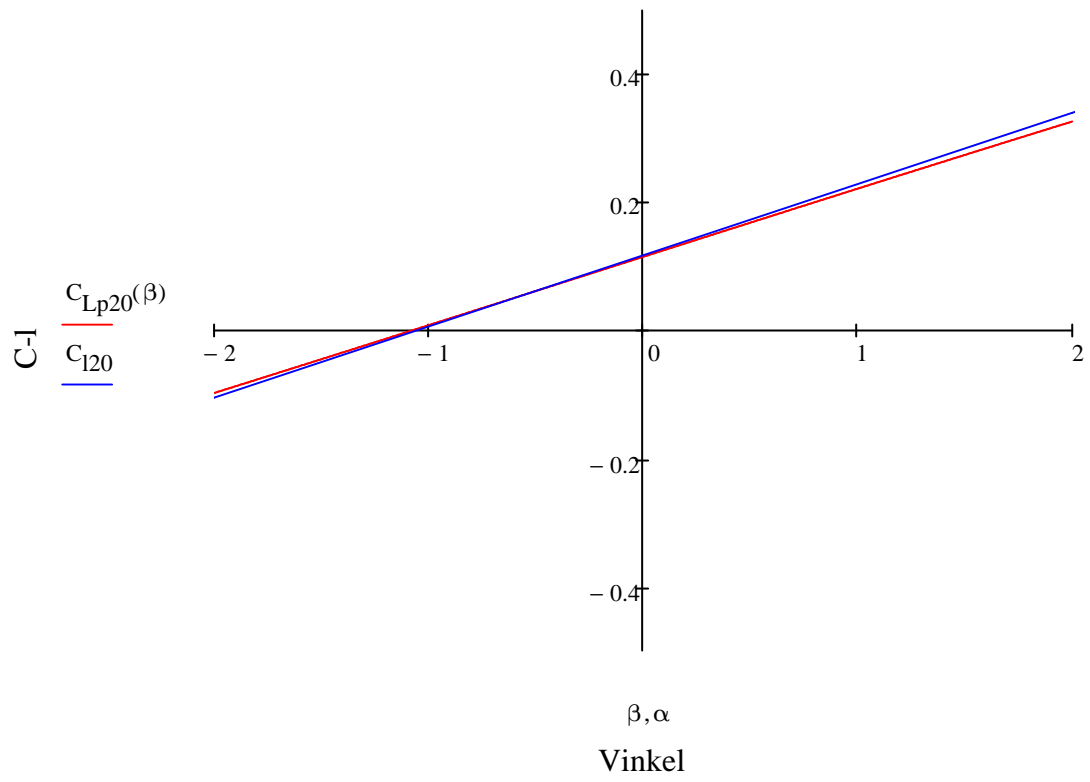
$$(M_1) := \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot B^2 \cdot \left( C_{M20} + \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot C_{M20} \right) \quad L_1 := \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot B \cdot \left( C_{L20} + \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot C_{L20} \right)$$

$$C_{m20} := C_{M20} + \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot C_{M20}$$

$$C_{l20} := C_{L20} + \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot C_{L20}$$









$$\begin{array}{l} \text{Innfallsvinkel} \\ \alpha := \end{array} \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Dragkoeffisienter} \\ C_{D15} := \end{array} \begin{pmatrix} 2.824 \\ 2.193 \\ 1.884 \\ 1.604 \\ 1.523 \\ 1.476 \\ 1.665 \\ 1.860 \\ 2.470 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Momentkoeffisienter} \\ C_{M15} := \end{array} \begin{pmatrix} .092 \\ .146 \\ .160 \\ .135 \\ .134 \\ .138 \\ .183 \\ .243 \\ .348 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Løftkoeffisienter} \\ C_{L15} := \end{array} \begin{pmatrix} -1.195 \\ -.898 \\ -.571 \\ -.346 \\ -.145 \\ .035 \\ .241 \\ .497 \\ .755 \end{pmatrix}$$

Drag

$$\rho := 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

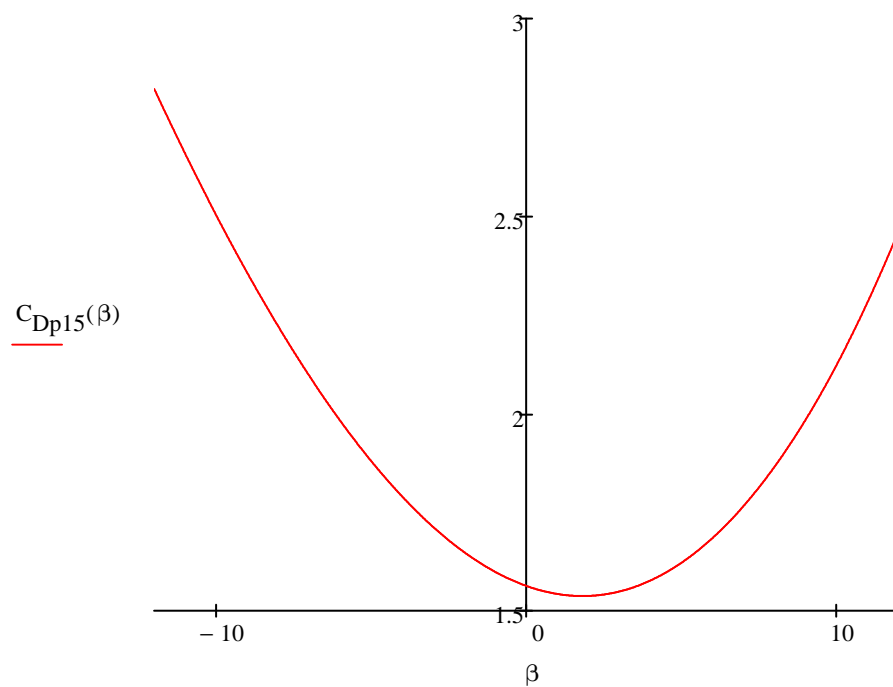
$$k := 3$$

$$V := 42.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad B := 12.9\text{m} \quad H := 2.5\text{m}$$

$$z4 := \text{regress}(\alpha, C_{D15}, k)$$

$$z_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1.562583628493 \\ -0.027613170641 \\ 0.007534533648 \\ 0.000090575323 \end{pmatrix}$$

$$C_{Dp15}(\beta) := z_3 + z_4 \cdot \beta + z_5 \cdot \beta^2 + z_6 \cdot \beta^3$$



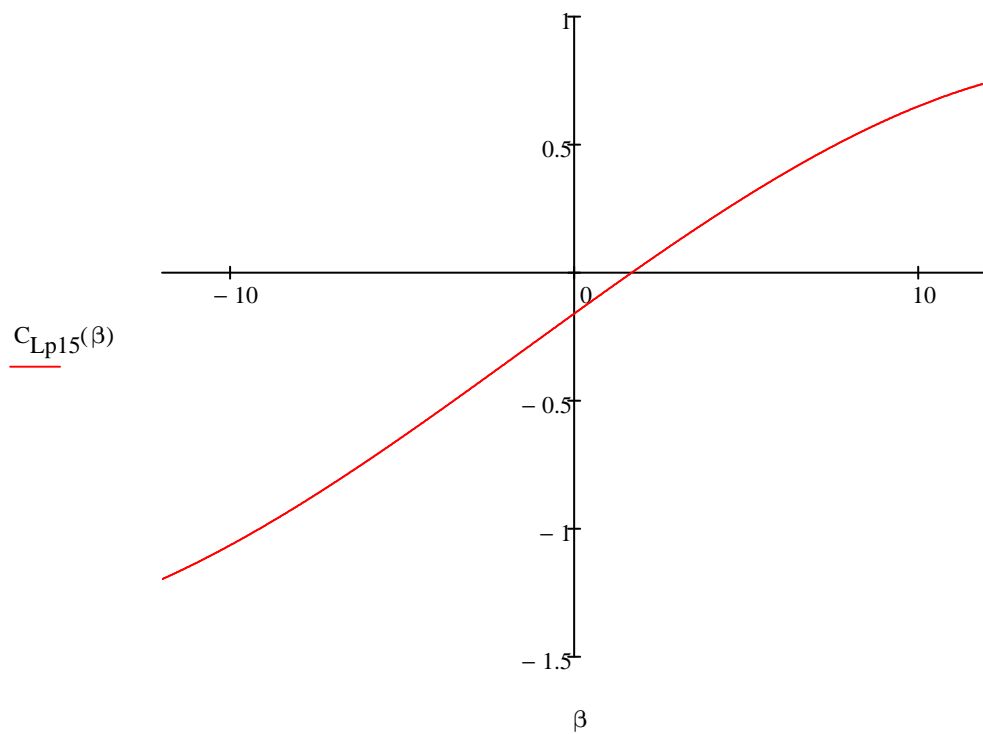
Løft

$k := 3$

$z5 := \text{regress}(\alpha, C_{L15}, k)$

$$z5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -0.15626446280991743 \\ 0.09675115913230668 \\ -0.00048381542699724 \\ -0.00011051084616658 \end{pmatrix}$$

$$C_{Lp15}(\beta) := z5_3 + z5_4 \cdot \beta + z5_5 \cdot \beta^2 + z5_6 \cdot \beta^3$$



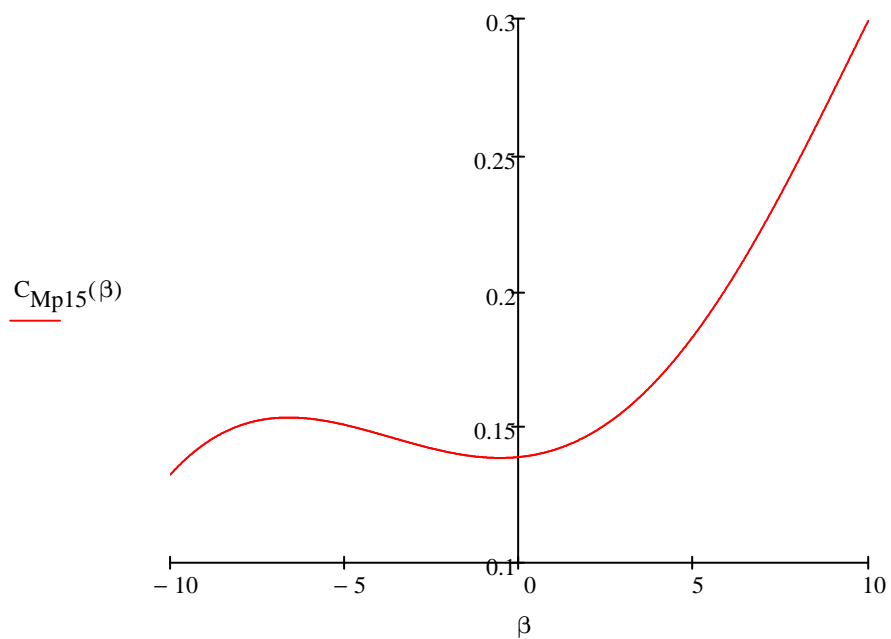
Moment

$k := 5$

$z6 := \text{regress}(\alpha, C_{M15}, k)$

$$z6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 0.1389541141 \\ 0.0012843119 \\ 0.001248743 \\ 0.0000829362 \\ -0.0000048003 \\ -0.0000001236 \end{pmatrix}$$

$$C_{Mp15}(\beta) := z6_3 + z6_4 \cdot \beta + z6_5 \cdot \beta^2 + z6_6 \cdot \beta^3 + z6_7 \cdot \beta^4 + z6_8 \cdot \beta^5$$



$$D(\beta) := 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot H \cdot C_{Dp15}(\beta)$$

$$L(\beta) := 0.5 \cdot V^2 \cdot \rho \cdot B \cdot C_{Lp15}(\beta)$$

$$M(\beta) := 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot B^2 \cdot C_{Mp15}(\beta)$$

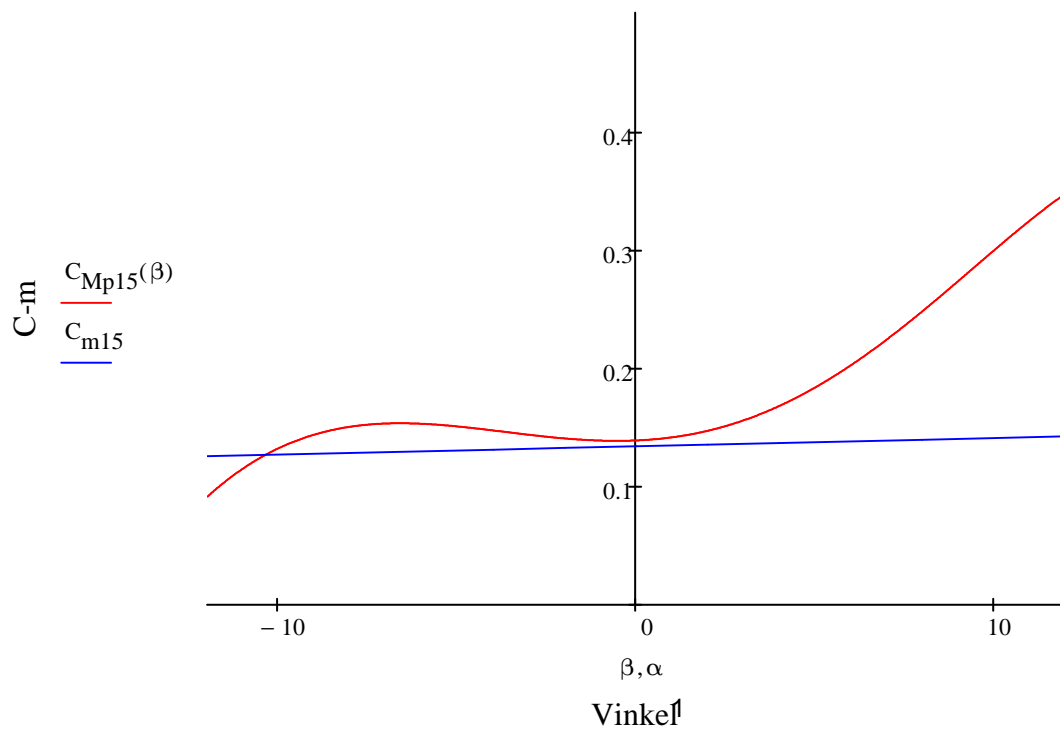
$$C_{L15} := -0.145 \quad C_{L15} := 4.46$$

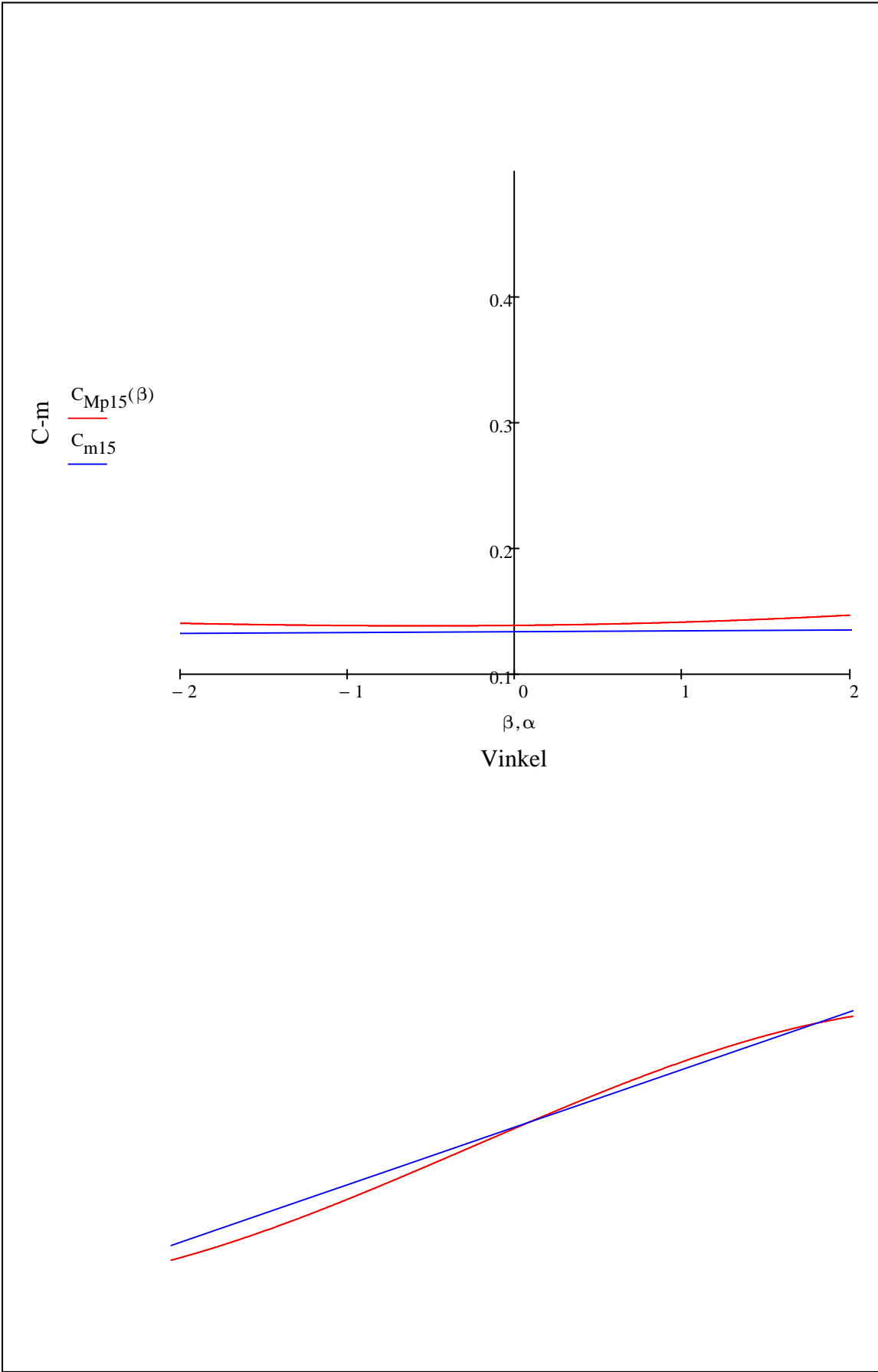
$$C_{M15} := 0.134 \quad C_{M15} := 0.04$$

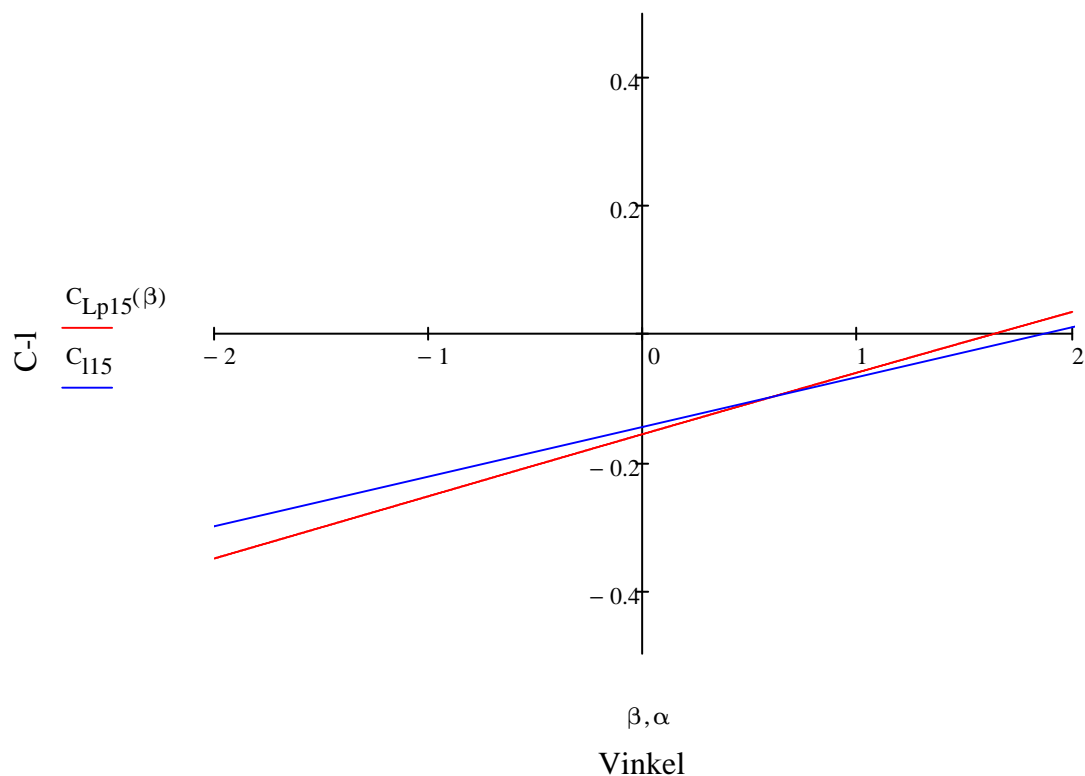
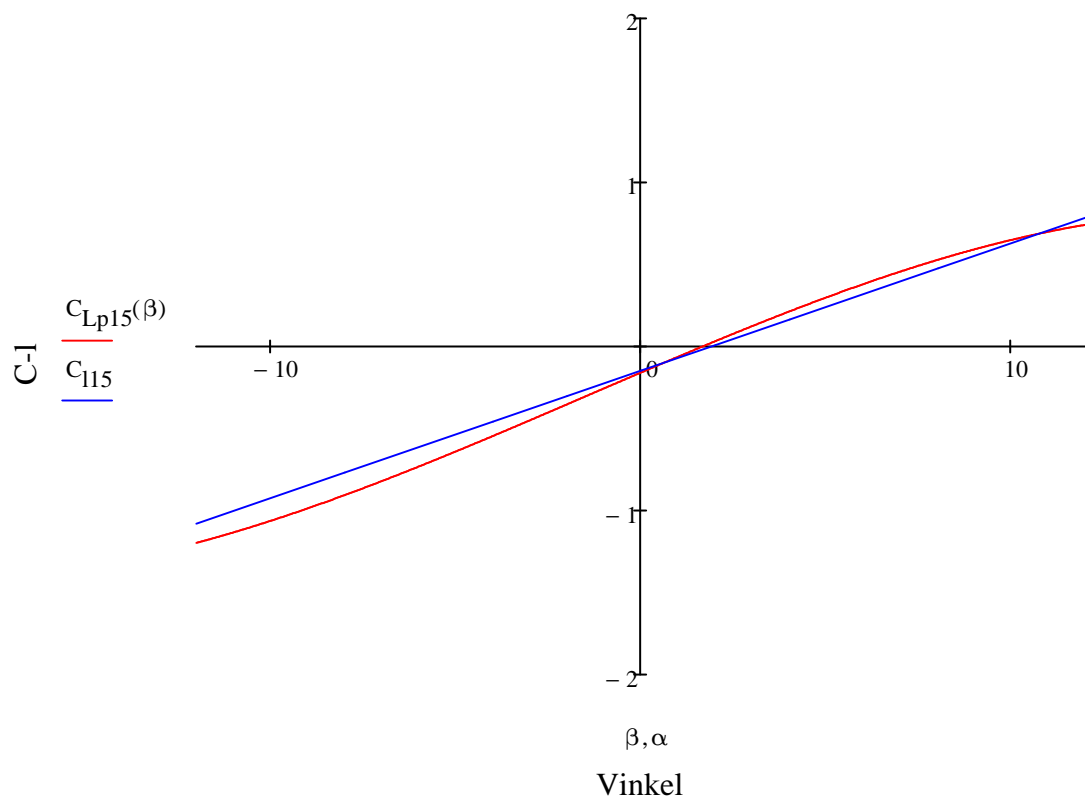
$$(M_1) := \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot B^2 \cdot \left( C_{M15} + \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot C_{M15} \right) \quad L_1 := \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot B \cdot \left( C_{L15} + \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot C_{L15} \right)$$

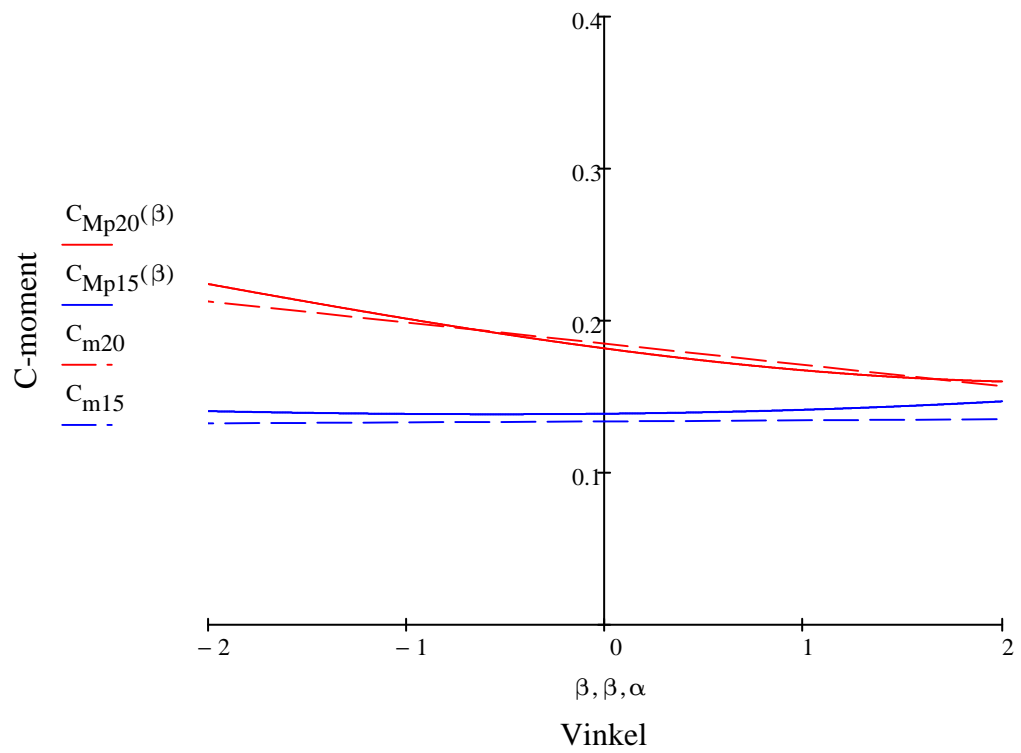
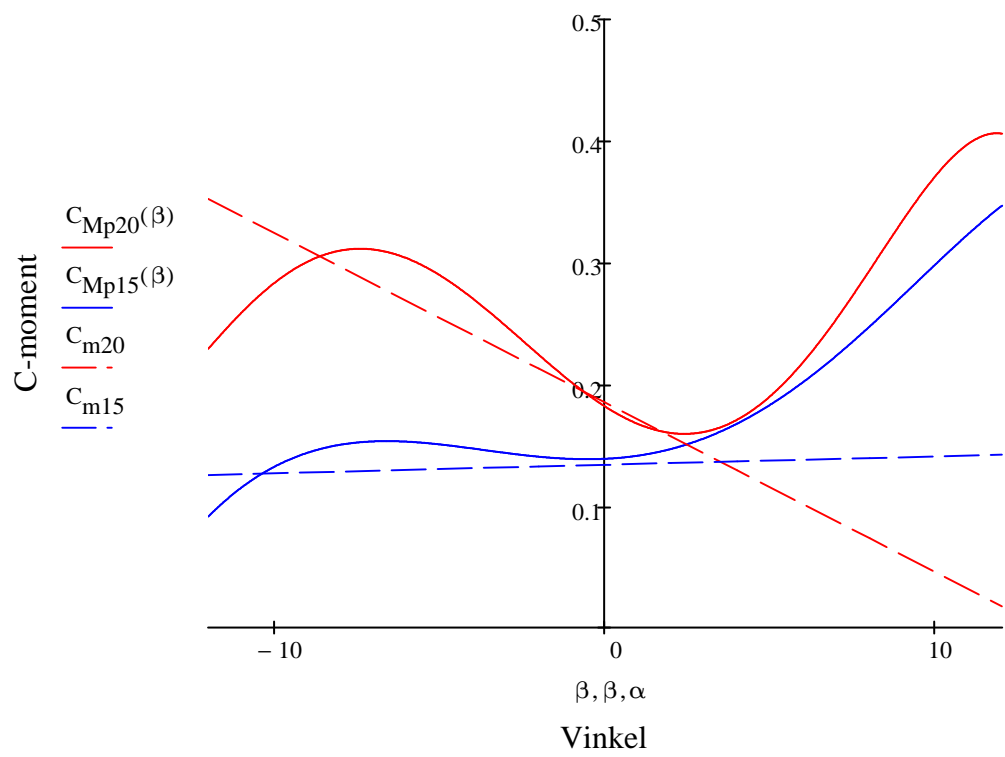
$$C_{m15} := C_{M15} + \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot C_{M15}$$

$$C_{l15} := C_{L15} + \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot C_{L15}$$

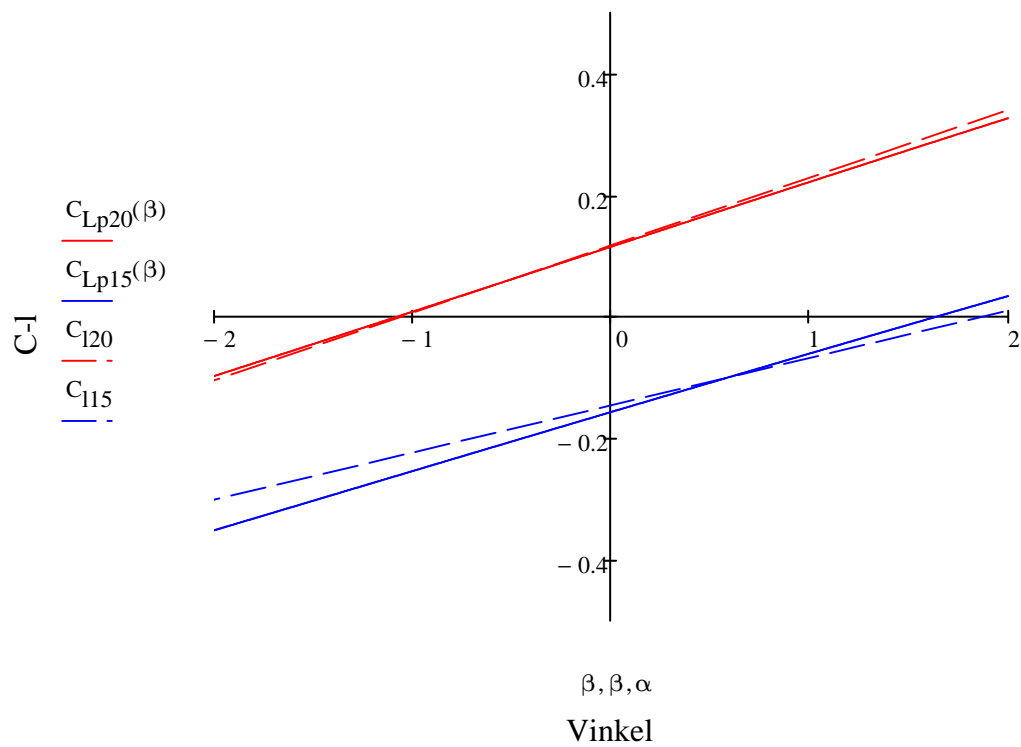
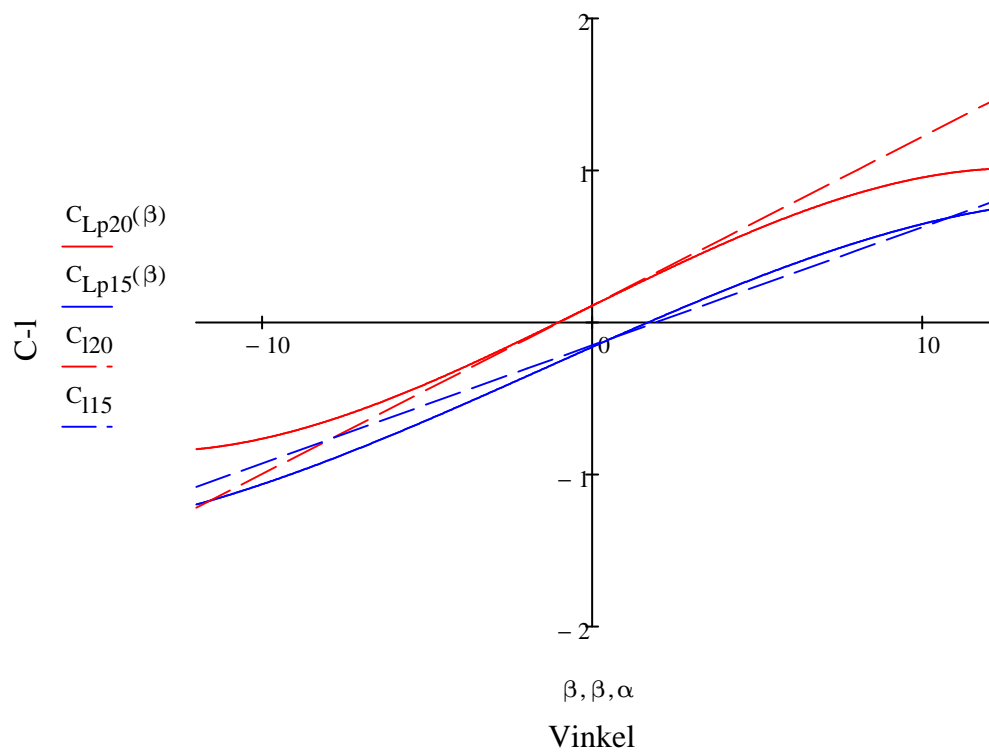












## Vedlegg F

### Estimering av kritisk flutterhastighet ved bruk av formel fra Larsen & Astiz [11]

#### For SV1

$$D := 7.1\text{m} \quad B := 2 \cdot 12.9\text{m} \quad K := 3.72 \quad \rho := 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

D er avstanden mellom brokassen fra tegning fra SV

B er total bredde av de to brokassen fra tegning fra SV

$\rho$  er tettheten til luft

$$m_1 := 1440 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad m_2 := 3796.4 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad m_k := 8200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1.15\text{m}^2$$

$$r_1 := \sqrt{(5.55\text{m})^2 + (1.087\text{m})^2} \quad r_2 := 0.448\text{m} \quad r_x := \left( \frac{D}{2} + \frac{B}{4} \right) = 10\text{m}$$

$$r_k := r_x + \frac{B}{4} - 0.9\text{m} = 15.55\text{m}$$

$$I_{bk} := 2 \cdot m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 = 9.288 \times 10^4 \text{m} \cdot \text{kg}$$

$$I_{tot} := 2 \cdot I_{bk} + 2 \cdot (m_1 \cdot 2 + m_2) \cdot r_x^2 + 2 \cdot m_k \cdot r_k^2 = 6081427.293 \text{m} \cdot \text{kg}$$

$$m_{tot} := 2 \cdot (2 \cdot m_1 + m_2) + 2 \cdot m_k = 32212.8 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$r_g := \sqrt{\left( \frac{I_{tot}}{m_{tot}} \right)} = 13.74\text{m}$$

$$f_z := 60.4544 \cdot 10^{-3} \text{Hz} = 0.06 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{Første vertikal svingning}$$

$$f_\theta := 81.6292 \cdot 10^{-3} \text{Hz} = 0.082 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{Første torsjons svingning}$$

$$C_{DB1} := 1 + 0.7332 \cdot \left( \frac{D}{B} \right)^{1.42111} = 1.117 \quad \text{Uten vind skjerm}$$

$$C_{DB2} := 1 + 1.2438 \cdot \left( \frac{D}{B} \right)^{1.4712} = 1.186 \quad \text{Med 50\% OAR vind skjerm}$$

$$U_{\text{crit}} := K \cdot C_{\text{DB1}} \cdot f_{\theta} \cdot \sqrt{\frac{m_{\text{tot}} \cdot I_{\text{tot}}}{\rho \cdot B}} \left[ 1 - \left( \frac{f_z}{f_{\theta}} \right)^2 \right] = 26.705 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$U_{\text{crit}} := K \cdot C_{\text{DB2}} \cdot f_{\theta} \cdot \sqrt{\frac{m_{\text{tot}} \cdot I_{\text{tot}}}{\rho \cdot B}} \left[ 1 - \left( \frac{f_z}{f_{\theta}} \right)^2 \right] = 28.359 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## For SV2

$$D := 7.96\text{m} \quad B := 2 \cdot 12.9\text{m} \quad K := 3.72 \quad \rho := 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

D er avstanden mellom brokassen

B er total bredde av de to brokassene

$\rho$  er tettheten til luft

$$m_1 := 1440 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad m_2 := 3796.4 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad m_k := 8200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1.15\text{m}^2$$

$$r_1 := \sqrt{(5.55\text{m})^2 + (1.087\text{m})^2} \quad r_2 := 0.448\text{m} \quad r_x := \left( \frac{D}{2} + \frac{B}{4} \right) = 10.43\text{m}$$

$$r_k := r_x + \frac{B}{4} - 0.9\text{m} = 15.98\text{m}$$

$$I_{\text{bk}} := 2 \cdot m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 = 9.288 \times 10^4 \text{m} \cdot \text{kg}$$

$$I_{\text{tot}} := 2 \cdot I_{\text{bk}} + 2 \cdot (m_1 \cdot 2 + m_2) \cdot r_x^2 + 2 \cdot m_k \cdot r_k^2 = 6.454 \times 10^6 \text{m} \cdot \text{kg}$$

$$m_{\text{tot}} := 2 \cdot (2 \cdot m_1 + m_2) + 2m_k = 3.221 \times 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$r_g := \sqrt{\left( \frac{I_{\text{tot}}}{m_{\text{tot}}} \right)} = 14.155\text{m}$$

$$f_z := 60.5188 \cdot 10^{-3} \text{Hz} = 0.061 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{Første vertikal svingning}$$

$$f_{\theta} := 80.9739 \cdot 10^{-3} \text{Hz} = 0.081 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{Første torsjons svingning}$$

$$C_{DB1} := 1 + 0.7332 \cdot \left(\frac{D}{B}\right)^{1.42111} = 1.138$$

Uten vind skjerm

$$C_{DB2} := 1 + 1.2438 \cdot \left(\frac{D}{B}\right)^{1.4712} = 1.22$$

Med 50% OAR vind skjerm

$$U_{crit} := K \cdot C_{DB1} \cdot f_{\theta} \cdot \sqrt{\frac{m_{tot} \cdot I_{tot}}{\rho \cdot B}} \cdot \left[1 - \left(\frac{f_z}{f_{\theta}}\right)^2\right] = 27.077 \frac{m}{s}$$

$$U_{crit} := K \cdot C_{DB2} \cdot f_{\theta} \cdot \sqrt{\frac{m_{tot} \cdot I_{tot}}{\rho \cdot B}} \cdot \left[1 - \left(\frac{f_z}{f_{\theta}}\right)^2\right] = 29.044 \frac{m}{s}$$

### For SV3

$$D := 12.96m \quad B := 2 \cdot 12.9m \quad K := 3.72 \quad \rho := 1.25 \frac{kg}{m^3}$$

D er avstanden mellom brokassen

B er total bredde av de to brokassene

$\rho$  er tettheten til luft

$$m_1 := 2 \cdot 1440 \frac{kg}{m} \quad m_2 := 2 \cdot 3796.4 \frac{kg}{m} \quad m_k := 8200 \frac{kg}{m^3} \cdot 1.15m^2$$

$$r_1 := \sqrt{(5.55m)^2 + (1.087m)^2} \quad r_2 := 0.448m \quad r_x := \left(\frac{D}{2} + \frac{B}{4}\right) = 12.93m$$

$$r_k := r_x + \frac{B}{4} - 0.9m = 18.48m$$

$$I_{bk} := 2 \cdot m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 = 1.858 \times 10^5 m \cdot kg$$

$$I_{tot} := 2 \cdot I_{bk} + 2 \cdot (m_1 \cdot 2 + m_2) \cdot r_x^2 + 2 \cdot m_k \cdot r_k^2 = 11277163.495 m \cdot kg$$

$$m_{tot} := 2 \cdot (2 \cdot m_1 + m_2 + m_k) = 45565.6 \frac{kg}{m}$$

$$r_g := \sqrt{\left(\frac{I_{\text{tot}}}{m_{\text{tot}}}\right)} = 15.732 \text{ m}$$

$$f_z := 60.4495 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} \quad \text{Første vertikal svingning}$$

$$f_{\theta} := 77.4252 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} \quad \text{Første torsjons svingning}$$

$$C_{DB1} := 1 + 0.7332 \cdot \left(\frac{D}{B}\right)^{1.42111} = 1.276 \quad \text{Uten vind skjerm}$$

$$C_{DB2} := 1 + 1.2438 \cdot \left(\frac{D}{B}\right)^{1.4712} = 1.452 \quad \text{Med 50\% OAR vind skjerm}$$

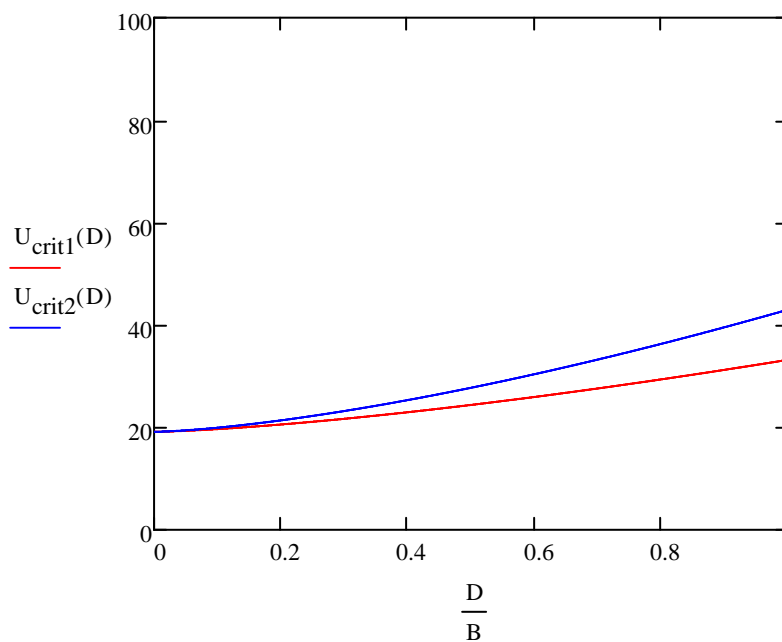
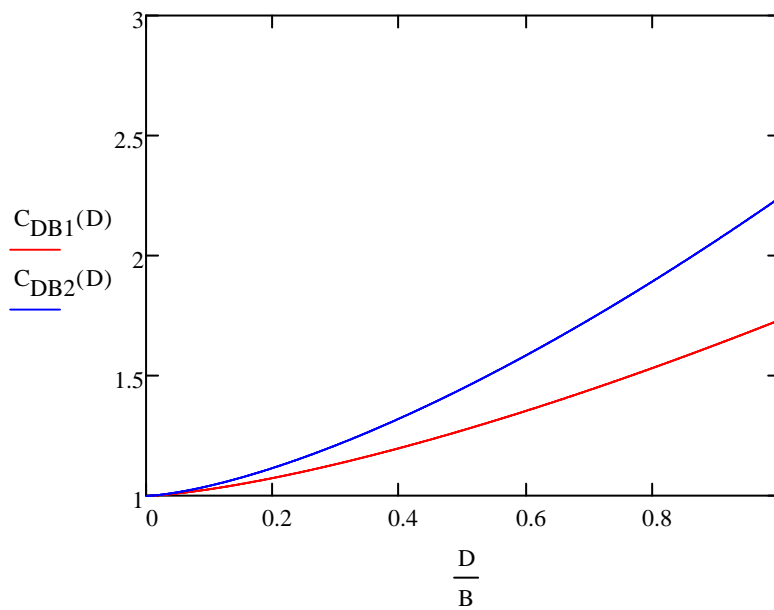
$$U_{\text{crit}} := K \cdot C_{DB1} \cdot f_{\theta} \cdot \sqrt{\frac{m_{\text{tot}} \cdot I_{\text{tot}}}{\rho \cdot B}} \cdot \left[1 - \left(\frac{f_z}{f_{\theta}}\right)^2\right] = 34.226 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$U_{\text{crit}} := K \cdot C_{DB2} \cdot f_{\theta} \cdot \sqrt{\frac{m_{\text{tot}} \cdot I_{\text{tot}}}{\rho \cdot B}} \cdot \left[1 - \left(\frac{f_z}{f_{\theta}}\right)^2\right] = 38.951 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Graf for konstanten med og uten vindskjerm for 2 brokasser med hensyn på D/B og graf for Ucrit med og uten vindskjerm for tverrsnitt 1 med hensyn på D/B.

$$D := 0,001 \text{m}..50 \text{m} \quad C_{DB1}(D) := 1 + 0.7332 \cdot \left(\frac{D}{B}\right)^{1.42111}$$

$$B := 2 \cdot 12.9 \text{m} \quad C_{DB2}(D) := 1 + 1.2438 \cdot \left(\frac{D}{B}\right)^{1.4712}$$



## Vedlegg G

### Eksempel på beregninger for statiske vindkrefter

Innfallsvinkel	$\alpha :=$	$\begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$	Dragkoeffisienter	$C_{D20} :=$	$\begin{pmatrix} 2.887 \\ 2.444 \\ 1.891 \\ 1.724 \\ 1.754 \\ 1.718 \\ 1.676 \\ 2.156 \\ 2.491 \end{pmatrix}$
----------------	-------------	---	-------------------	--------------	---

Løftkoeffisienter	$C_{L20} :=$	$\begin{pmatrix} -.832 \\ -.643 \\ -.304 \\ -.101 \\ .118 \\ .344 \\ .509 \\ .856 \\ 1.011 \end{pmatrix}$	Momentkoeffisienter	$C_{M20} :=$	$\begin{pmatrix} .229 \\ .311 \\ .270 \\ .221 \\ .185 \\ .165 \\ .165 \\ .296 \\ .406 \end{pmatrix}$
-------------------	--------------	---	---------------------	--------------	--

$$h := 2.5\text{m} \quad b := 12.9\text{m} \quad \rho := 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad v := 42.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\beta := \alpha_4 = 0$$

$$C_d := C_{D20_4} = 1.754 \quad C_m := C_{M20_4} = 0.185 \quad C_l := C_{L20_4} = 0.118$$

$$D := \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot h \cdot C_d \quad L := \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot b \cdot C_l \quad M := \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot b^2 \cdot C_m$$

$$D = 4.858 \times 10^3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad L = 1.686 \times 10^3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad M = 34103.218 \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

$$x := \frac{M + 10m \cdot L}{20m \cdot L}$$

$$x = 1.51123$$

$$x_1 := 1 - x = -0.511229$$

$$L_1 := L \cdot x_1 = -862.048 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$L_2 := L \cdot x = 2548.274 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$L_1 + L_2 = 1.686 \times 10^3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$D = 4857.511 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$D_1 := \frac{D}{2} = 2428.756 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$C_{Dka} := 0.7$$

$$A := 1.15 \text{m}^2 \quad d := 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 1.21 \text{m}$$

$$D_{ka} := \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot d \cdot C_{Dka} = 938.31 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



## Vedlegg H

### Aerodynamiske deriverte fra Brusymfonien [8]

#### For D8

Table C4.8. Bridge with 15m between the two box-girder sections, angle of incidence 0°, frequency ratio of 1.8, no walking/cycle path, no guide vanes.

U [m/s]	U/(n,b) [-]	U/(n <sub>q</sub> b) [-]	$\sigma_{rh}$ [%]	$\sigma_{\phi}$ [°]	H <sub>1</sub> *	H <sub>2</sub> *	H <sub>3</sub> *	H <sub>4</sub> *	A <sub>1</sub> *	A <sub>2</sub> *	A <sub>3</sub> *	A <sub>4</sub> *	
1.25*	9.73	5.46	2.61	0.21	-12.53	4.72	13.85	-3.77	-2.78	-7.98	1.96	0.83	
2.43	18.99	10.67	4.64	0.49	-16.7	1.24	25.4	-0.89	-0.43	-5.11	6.56	-0.76	
3.37	26.65	14.71	5.57	0.9	-28.03	9.08	41.07	6.16	0.26	-3.88	2.88	4.75	
3.93	30.09	17.13	6.57	1.86	-31.39	8.47	52.66	-13.63	-5.33	0.77	3.87	6.6	
4.42	34.04	19.36	8.72	3.16	-24.13	12.31	64.89	-11.01	-4.77	1.88	8.05	6.56	
4.9	37.81	21.45	9.76	3.66	-34.48	11.37	76.63	-11.28	-1.34	2.87	7.68	10.43	
5.34	41.62	23.51	13.83	4.63	-24.9	14.31	90.32	-2.76	-0.16	2.72	11.48	0.74	
5.79	45.25	25.49	14.86	4.75	-42.81	12.98	105.11	-10.54	-7.31	1.1	14.45	21.15	
6.33*	48.99	27.91	18.86	5.59	-36.42	15.89	118.33	-16.05	-12.26	-0.75	17.23	17.21	
6.85*	53.24	30.25	21.84	5.97	-41.93	16.77	134.32	-21.16	9.85	7.61	20.68	34.26	
					c <sub>2</sub>	0.0063	0.0070	0.1211	-0.0033	-0.0021	0.0237	0.0214	0.0112
					c <sub>1</sub>	-1.0819	0.4304	1.0006	-0.0987	-0.0078	-0.4256	-0.0632	-0.1891
					c <sub>0</sub>	-0.1608	-0.7174	0.1979	0.8776	0.0524	-0.8072	0.8158	0.0796

\* wind speeds with derivatives not included in the polynomial fit

Table C5.6. Bridge with 15m between the two box-girder sections, angle of incidence 0°, frequency ratio of 1.3, no walking/cycle path, guide vanes included.

U [m/s]	U/(n,b) [-]	U/(n <sub>q</sub> b) [-]	$\sigma_{rh}$ [%]	$\sigma_{\phi}$ [°]	H <sub>1</sub> *	H <sub>2</sub> *	H <sub>3</sub> *	H <sub>4</sub> *	A <sub>1</sub> *	A <sub>2</sub> *	A <sub>3</sub> *	A <sub>4</sub> *	
1.51*	18.07	13.54	3.78	0.47	-20.79	5.7	46.04	1.04	-2.11	-4.42	-6.3	0.71	
2.57	31	22.85	7.52	0.61	-16.69	17.47	108.05	10.79	-0.58	-3.27	-12.34	-3.99	
3.47	40.52	30.62	10.78	0.46	-15.34	96.46	159.19	-18.25	-2.21	-18.26	-13.73	5.37	
4.43	51.07	39.72	10.14	0.45	-35.8	51.44	231.56	-24.16	-9.7	-31.44	2.7	1.17	
5.37	63.16	49.04	14.53	0.64	-37.16	60.8	414.43	-12.92	-7.97	-28.41	17.94	0.08	
					c <sub>2</sub>	-0.0041	-0.0344	0.1638	-0.0039	-0.0028	-0.0072	0.0385	-0.0002
					c <sub>1</sub>	-0.3668	3.0294	0.0040	-0.1118	0.0208	-0.3436	-1.5172	0.0392
					c <sub>0</sub>	0.1439	-3.4781	4.2271	2.3987	0.3247	1.3822	0.1633	-0.5460

\* wind speeds with derivatives not included in the polynomial fit

## For D13

Table C3.8. Bridge with 20 m between the two box-girder sections, angle of incidence 0°, Frequency ratio of 1.8, no walking/cycle path, no guide vanes.

U [m/s]	U/(n,b) [-]	U/(n <sub>q</sub> b) [-]	$\sigma_{rh}$ [%]	$\sigma_{\phi}$ [°]	H <sub>1</sub> *	H <sub>2</sub> *	H <sub>3</sub> *	H <sub>4</sub> *	A <sub>1</sub> *	A <sub>2</sub> *	A <sub>3</sub> *	A <sub>4</sub> *	
0.97*	7.59	4.3	2.4	0.24	-10.7	3.9	17.17	-4.32	3.4	-7.9	-4.28	0.06	
2.25	17.72	9.95	3.95	0.39	-22.59	4.84	26.81	1.62	3.79	-15.82	-1.55	10.07	
3.31	25.77	14.65	6.55	0.75	-18.31	9.15	44.12	-7.72	-7.59	-8.85	-0.77	12.35	
4.32	33.4	19.11	7.66	1.27	-23.91	9.57	67.39	-12.39	-10.72	-1.45	-2.59	11.48	
5.26	40.75	23.11	8.23	1.84	-43.39	10.81	96.22	-13.41	-19.94	-7.73	-5.54	12.86	
6.18	48.55	26.9	10.5	1.61	-31.79	22.66	121.09	-7.21	8.62	-3.39	-16.21	22.59	
7.09*	56.31	30.62	12.96	2.35	-51.74	18.74	167.88	-11.6	-5.02	-3.48	-18.67	39.02	
8.03*	60.46	34.59	16.59	2.64	-48.68	21.6	187.7	-33.29	13.79	2.09	-27.97	15.2	
					c <sub>2</sub>	0.0083	0.0226	0.1178	0.0036	0.0051	0.0454	-0.0402	0.0004
					c <sub>1</sub>	-1.1308	0.0998	1.3426	-0.4372	-0.2753	-1.2219	0.6044	0.3650
					c <sub>0</sub>	-0.4153	0.6477	0.2836	1.9230	1.6755	-1.7604	-0.9030	1.0355

\*wind speeds with derivatives not included in the polynomial fit

Table C5.4. Bridge with 20 m between the two box-girder sections, angle of incidence 0°, frequency ratio of 1.3, no walking/cycle path, guide vanes included.

U [m/s]	U/(n,b) [-]	U/(n <sub>q</sub> b) [-]	$\sigma_{rh}$ [%]	$\sigma_{\phi}$ [°]	H <sub>1</sub> *	H <sub>2</sub> *	H <sub>3</sub> *	H <sub>4</sub> *	A <sub>1</sub> *	A <sub>2</sub> *	A <sub>3</sub> *	A <sub>4</sub> *	
1.39*	16.56	12.41	3.63	0.37	-17.31	22.24	43.98	-4.71	-5.3	-23.64	-26.52	2.86	
2.47	29.44	21.81	7.18	0.48	-19.86	33.25	92.37	-3.1	-1.39	-27.35	-34.87	3.97	
3.48	40.3	30.84	7.86	0.51	-28.99	21.44	171.6	-28.15	-4.21	-27.12	-26.73	9.88	
4.4	50.11	38.6	10.45	0.42	-42.07	56.52	210.68	-31.37	1.49	-49.16	-45.89	1.28	
5.33	61.02	46.59	11.35	0.39	-66.41	35.05	403.16	-43.58	5.57	-47.60	-32.52	10.59	
6.36	72.01	53.96	16.34	0.4	-53.68	201.51	447.87	-34.25	2.69	-139.54	-80.83	0.78	
7.15	79.6	62.61	20.63	0.46	-79.08	76.32	798.82	-40.75	-2.9	-157.57	-49.76	-0.52	
8.21	87.58	73.97	26.25	0.57	-81.91	40.13	816.83	-51.29	-5.45	-159.82	-33.74	-3.75	
9.06	101.98	84.17	31.74	0.6	-84.86	120.71	940.17	-58.25	-2.34	-113.92	48.01	3.16	
					c <sub>2</sub>	0.0004	-0.0128	0.0896	0.0004	-0.0010	0.0034	0.0392	-0.0020
					c <sub>1</sub>	-0.9636	2.3909	4.8589	-0.6300	0.0861	-2.3128	-3.2142	0.1722
					c <sub>0</sub>	3.3795	-9.8447	-35.0403	2.5589	-1.3091	16.6338	12.1639	1.1391

\* wind speeds with derivatives not included in the polynomial fit

$$P\{U_r\} = c_2 U_r^2 + c_1 U_r + c_0 \quad U_r = U/(nb)$$