



Universitetet
i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering: Konstruksjoner og Materialer/ Landbaserte konstruksjoner	Vår semesteret, 2013 Åpen
Forfatter: Daniel Berlin Bårdsen	(signatur forfatter)
Fagansvarlig: Jasna Bogunovic Jakobsen Veileder(e): Fuad Nuhic, Aibel AS	
Tittel på masteroppgaven: Konstruksjoner utsatt for vibrasjoner Engelsk tittel: Structures exposed to vibrations	
Studiepoeng: 30	
Emneord: Teoretiske utledninger, Dynamikk, Tvungne svingninger eksperiment, Vibrasjons isolering, FEM, Abaqus Aibel AS	Sidetall: 125 + vedlegg/annet: 41 Stavanger, 28/05/2013 dato/år

Symboler

A – Areal

b – Tverrsnittets bredde

c – Dempningskoeffisient

c_c - Kritisk dempningskoeffisient

DAF – Dynamisk forsterkningsfaktor

e – Eksentrisitet

E – Elastisitetsmodul

f – frekvens i Hz

F – Kraft

F_0 - Amplitude av kraft

F_T - Kraft overført

g – tyngdens akselerasjon

h – Tverrsnittets høyde

Hz – Hertz (sykler pr. sekund)

i – Imaginærenhet

I – Andre arealmoment

k – Stivhetskoeffisient

L – Lengde

m – Masse

m_e - Masse til element

m_{eq} - Ekvivalent masse

N – Formfunksjon

r – Frekvens forhold

t – Tidsvariabel

T – Kinetisk energi

$x(t)$ – Forskyvning som funksjon av tiden

$\dot{x}(t)$ – Hastighet som funksjon av tiden

$\ddot{x}(t)$ – Akselerasjon som funksjon av tiden

u – forskyvning av node i y retning

U – Potensiell energi

V – Volum

δ – Forskyvning

δ_{st} - Statisk forskyvning

η – Taps faktor

θ - Vinkel

ξ - Dempningsforhold

ρ - Densitet

ω – Sirkulær hastighet

ω_n - Egenfrekvens

ω_d - Dempet egenfrekvens

ϕ – Fasevinkel

Forord

Denne rapporten er min masteroppgave for studieretningen Konstruksjoner og materialer ved det tekniske og naturvitenskapelige fakultetet, Universitetet i Stavanger. Oppgaven er gjort i samarbeid med Aibel AS ved deres kontor på Forus.

Målsettingen med denne oppgaven er å danne seg et solid teoretisk grunnlag for å forstå hvordan vibrasjoner oppstår på grunn av dynamiske effekter, for dermed å kunne eliminere dem på best mulig måte.

Jeg vil takke Aibel AS for at jeg fikk skrive oppgaven for dem, og for de gode råd og tips jeg har fått av Fuad Nuhic, Jan Wigaard og Henning Oppedal.

Til slutt vil jeg takke min veileder Jasna Bogunovic Jakobsen for god veiledning underveis i prosessen.

Stavanger, mai 2013

Daniel Berlin Bårdsen

Sammendrag

Denne masteroppgaven omhandler hvordan roterende eksentriske masser kan skape vibrasjoner i konstruksjoner. Oppgaven tar for seg grundige matematiske utledninger for hvordan de aktuelle formlene for dynamisk analyse er oppbygget. Utledningene inneholder de grunnleggende stegene som mange lærebøker ikke inneholder. Formålet med disse utledningene er en grundig innføring i hvordan formlene er oppbygget og dermed få et nærere forhold til dem. Teoretiske utledninger er veldig viktige for å finne ut om formelen tar hensyn til det man trenger at den skal ta hensyn til.

Dynamiske analyser er veldig avhengig av nøyaktighet for at de skal gi tilstrekkelige resultat. Oppgaven har dermed lagt mye fokus på å sammenligne ulike metoder for å finne egenfrekvenser. For å kunne beregne dynamisk respons med høyest mulig nøyaktighet er vi avhengig av at egenfrekvensene blir så nøyaktige som overhodet mulig. Metoder som SDOF metode, Eksakt metode, Elementmetode og simulering i dataprogrammet Abaqus har blitt satt opp mot hverandre.

For å verifisere SDOF metode og Abaqus har det blitt foretatt et eksperiment. Utstyret til eksperimentet er levert av TecQuipment og består av en fritt opplagt bjelke som har en eksentrisk roterende masse på midten av bjelken. Eksperimentets formål er først og fremst å verifisere formlene, men også å gi en praktisk erfaring av fenomenene beating og resonans. Ettersom utstyret har sine begrensninger, har det kun vært mulig å analysere responsen til den første svingeformen.

Abaqus simuleringen av eksperimentet tar for seg sammenligning av modal og direkte metode, der Rayleigh dempning er lagt inn som materialdempning hos direkte metode. Modal metode har fått dempning lagt inn som dempningsforholdet ξ . B21-bjelkeelement og C3D20R-solidelement modeller har blitt satt opp mot hverandre. Alle modellene har en meget fin elementinndeling for å gi best mulig resultater.

Oppgaven tar til slutt for seg hvordan vibrasjoner kan elimineres på best mulig måte. Roterende eksentrisk utstyr bør settes på vibrasjons isolatorer og ikke direkte på konstruksjonen. Vibrasjons isolatorer vil i de fleste tilfeller redusere kraften som blir overført fra roterende eksentrisk utstyr til konstruksjonen. Helt til slutt i oppgaven er det laget et design eksempel på hvordan vibrasjons isolatorer i form av fjærelementer bør monteres. Dette eksempelet har også blitt kjørt i Abaqus.

Innholdsfortegnelse

1	Innledning	8
1.1	Bakgrunn	8
1.2	Problemstilling	9
2	Generell teori	10
2.1	Fri svingninger	10
2.2	Tvungne svingninger	10
2.3	Dempning	11
2.3.1	<i>Viskøs demper</i>	11
2.3.2	<i>Material dempning</i>	12
3	Bevegelsesligningen	14
3.1	Nyttige formler fra dette kapittel 3:	19
4	Bevegelsesligningen med demper:	20
4.1	$\xi < 1$	23
4.2	$\xi = 1$	26
4.3	$\xi > 1$	28
4.4	Nyttige formler fra kapittel 4:	30
5	Respons av et udempet system med harmonisk last	31
5.1	Resonans	35
6	Beating	37
6.1	Beating eksperiment	39
7	Respons av et dempet system med harmonisk last	40
7.1	Nyttige formler fra kapittel 7:	46
8	Rayleighs energimetode	47
8.1	Eksempel: Ekvivalent masse av en fritt opplagt bjelke	48
9	Nummerisk eksempel	52
9.1	Bevegelsesligningen uten demper $\xi = 0$	52
9.2	Bevegelsesligning med demper $\xi < 1$	53
9.3	Bevegelsesligning med demper $\xi = 1$	53
9.4	Bevegelsesligning med demper $\xi > 1$	54
10	Eksakt metode	55
10.1	Eksempel: En fritt opplagt bjelke uten last	61
11	Elementmetoden	65
11.1	Bjelkeelement analyse	66

11.1.1	<i>Stivhet matrise</i>	70
11.1.2	<i>Masse matrise</i>	71
11.2	Eigenfrekvenser	73
11.3	Eksempel: En fritt opplagt bjelke uten last med 2 noder	75
11.4	Eksempel: En fritt opplagt bjelke uten last med 3 noder	77
11.5	Rayleigh-dempning (proporsjonal dempning)	80
12	Sammenligning av egenfrekvensmetoder	82
12.1	SDOF metode	82
12.2	Eksakt metode	82
12.3	Elementmetode med 2 noder	83
12.4	Elementmetode med 3 noder	83
12.5	Konklusjon	85
13	Tvungne svingninger eksperiment	86
13.1	Innledning	86
13.2	Måleusikkerhet	87
13.3	Den eksentriske disken	87
13.4	Film fra eksperimentet	88
13.4.1	<i>Kalkulerte resultater</i>	88
13.4.2	<i>Resultater fra logg</i>	89
13.4.3	<i>Konklusjon</i>	90
13.5	Bjelke med ekstern demper	91
13.5.1	<i>Kalkulerte resultater</i>	91
13.5.2	<i>Konklusjon</i>	94
14	Simulering i Abaqus	95
14.1	Steady state dynamics	95
14.1.1	<i>Steady state dynamics - Modal</i>	96
14.1.2	<i>Steady state dynamics - Direct</i>	96
14.2	Bjelken med 6kg masse	97
14.2.1	<i>Antagelser for modellering</i>	97
14.2.2	<i>Resultater fra analysen med bjelkeelement</i>	99
14.2.3	<i>Resultater fra analysen med solidelement</i>	101
14.3	Bjelken med 6kg masse og demper	103
14.3.1	<i>Antagelser for modellering</i>	103
14.3.2	<i>Resultater fra analyse</i>	104
15	Vibrasjonskontroll	105

15.1	Innledning.....	105
15.2	Vibrasjonskriterier	106
15.3	Ubalansert utstyr	108
15.3.1	<i>Design eksempel fra ISO 1940</i>	108
15.4	Kontroll på naturlig frekvens	110
15.5	Demping	110
15.6	Vibrasjons isolering	112
15.6.1	<i>Passiv isolering</i>	112
15.6.2	<i>Aktiv isolerer</i>	113
15.7	Vibrasjons isolering med stivt fundament	113
15.8	Design eksempel	116
15.8.1	Konklusjon.....	119
16	Konklusjon	120
17	Appendiks A – Regneark	125
18	Appendiks B – Abaqus modeller	146

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Eksentriske roterende masser er årsaken til mye av vibrasjonsproblematikken vi i dag står overfor. Offshore konstruksjoner er et eksempel på dette. Dieselpumper og annet mekanisk utstyr har mange deler som roterer eksentrisk. Når disse delene roterer har de en rotasjonsfrekvens. Denne rotasjonsfrekvensen sammen med den eksentriske massen vil danne en kraft. Disse kreftene trenger ikke være av størrelsesorden store, men allikevel store nok til å skape ubehagelige vibrasjoner.

Alle konstruksjoner har en egenfrekvens, faktisk så har alle konstruksjoner uendelig mange egenfrekvenser. Denne oppgaven vil ta for seg hvordan roterende utstyr skaper vibrasjoner i konstruksjoner. Når roterende utstyr har samme rotasjonsfrekvens som egenfrekvensen til strukturen, skapes tvungne svingninger. Dette kalles også resonans. Skulle dette fenomenet inntreffe vil konstruksjonen bli utsatt for betydelige vibrasjoner, og store deformasjoner om kreftene er store nok.

Skulle disse vibrasjonene bli et problem og nedstegning av roterende eksentrisk utstyr ikke er et alternativ, finnes det likevel løsninger. Setter man inn en eller flere dempere av rett størrelse vil vibrasjons- amplituden avta. Disse demperne absorberer bevegelsesenergien og reduserer vibrasjons- amplituden. Et annet alternativ er å isolere roterende utstyr fra konstruksjonen ved hjelp av fjærer.

Offshoreindustrien har over lengre tid hatt problemer med vibrasjonsproblematikk. Ikke bare er det mekanisk utstyr og struktur som kan ta skade av vibrasjoner, men også mennesker som jobber i områder med mye vibrasjoner. Vibrasjoner kan kjennes godt på kroppen, og er som oftest årsaken til en del støy. Kan vi redusere vibrasjoner vil vi ikke bare avlaste mekanisk utstyr og struktur, men også de menneskene som jobber der.

I enkelte tilteller offshore har vibrasjoner vært årsaken til at både mekanisk utstyr og struktur har feilet. Dette kan få katastrofale følger. Ikke bare er liv og helse satt på spill, men det kan også medføre nedstegning av olje og gassproduksjon. Dette er som regel en meget kostbar affære. Tiltak som å utføre vibrasjonsanalyser i forkant er effektive for å minke vibrasjonsproblematikken. Det finnes et hav av dempere og fjærer som er designet for å minke vibrasjoner. Der det har vært utført skikkelig vibrasjonsanalyse forarbeid har resultatene vært veldig gode.

Arbeidsmiljøundersøkelser viser at 2/3 av offshore- arbeidere må til tider eller ofte bruke hørselsvern på grunn av støy. 1/3 svarer at de til tider kjenner vibrasjoner på kroppen fra maskiner. Støy og vibrasjoner gjør arbeidene slitne, og slitne mennesker gjør feil.

Referanse:

Deler av kapitelet er hentet fra [5] Roterende(vibrerende) utstyr og strukturdesign

1.2 Problemstilling

Målsetningen til denne oppgaven er å analysere effekter av dynamiske responser. De klassiske formlene skal bli satt opp mot hverandre og numeriske analyser.

Oppgaven skal omfatte følgende punkter:

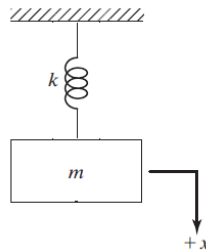
1. Grundige matematiske utledninger av dem kjente formlene.
2. Utføre et eksperiment der en bjelke blir utsatt for tvungne svingninger.
3. Kontrollere hvor godt formlene går overens med eksperimentet.
4. Lage en Abaqus modell som simulerer eksperimentet.
5. Finne en løsning ved hjelp av vibrasjons isolering slik at vibrasjonene blir minimalisert.

2 Generell teori

2.1 Fri svingninger

Hvis et system blir påført en deformasjon og deretter slippes fri, vil det begynne å svinge.

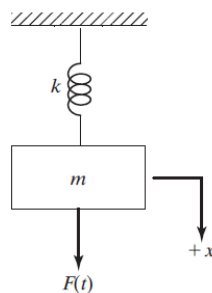
Svingningene vil over tid avta på grunn av at fjæren har indre demping som gradvis absorberer bevegelsesenergien.



Figur 2.1 Frie svingninger av en frihetsgrad system

2.2 Tvungne svingninger

Tvungne svingninger skjer når et system blir påført en eller flere periodisk laster. Ofte går disse periodiske lastene som en sinus eller cosinus funksjon. Disse lastene kan gå med en eller flere frekvenser. Skulle en periodisk last gå med samme frekvens som egenfrekvensen til systemet vil det dannes resonans.

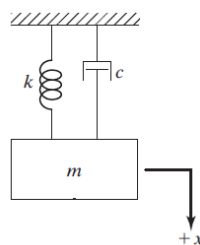


Figur 2.2 Tvungne svingninger av en frihetsgrad system

2.3 Dempning

Demning er et systems evne til å lede bort bevegelsesenergi. I de fleste systemer vil bevegelsesenergien til systemet bli konvertert til enten lyd eller varme. Skulle et system stå i vann kan også bevegelsesenergien bli konvertert til vannbølger. Når bevegelsesenergien avtar, vil også svingeamplituden til systemet avta. En mekanisme der energi fra vibrasjoner blir konvertert til lyd og varme kalles demping. I et system kan en rekke typer forskjellig demping være til stede. Å modellere rett intern demping kan være vanskelig. Indre strukturell demping har forskjellig dempningsforhold for forskjellige naturlige frekvenser. Eksterne viskøse dempere kan tilføre en struktur et mye høyere dempningsforhold, det blir dermed lettere å ha kontroll over dempningsforholdet. Det strukturelle dempningsforholdet er i de fleste tilfeller forholdsvis lavt.

En demper antas verken å ha masse eller elastiske egenskaper. En motkraft fra demperen eksisterer kun hvis systemet er i bevegelse, det vil si at det har en hastighet.

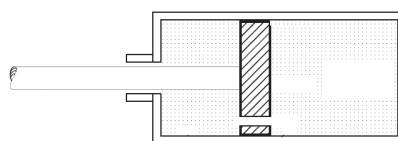


Figur 2.3 Frie svingninger med demper

2.3.1 Viskøs demper

Viskøs demper er en vanlig demper brukt under vibrasjonsanalyse. Ved hjelp av en viskøs demper kan man få god kontroll over dempingen til et system. En viskøs demper består gjerne av en sylinder fylt med olje, vann eller gass. Skulle man få store svingeamplituder i en konstruksjon, kan ofte installasjon av rett dimensjonert viskøs demper/dempere forbedre situasjonen.

En viskøs demper virker slik at et stempel med hull setter trykk på en væske/gass. Væsken/gassen vil da bli presset gjennom hullene på grunn av trykkforskjellen, se Figur 2.4. Dempningskoeffisienten c vil da bestemmes av størrelsen på hullene i forhold til diameteren av stempelet og viskositeten til væsken. Kraften fra denne demperen vil være proporsjonal med hastigheten. Et hverdagslig eksempel på en viskøs demper er en dørdemper. Drar vi døren fort opp, må vi bruke mer kraft enn om vi drar den forsiktig opp.

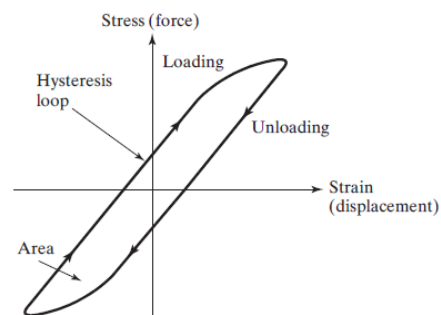


Figur 2.4 Viskøs demper

2.3.2 Material dempning

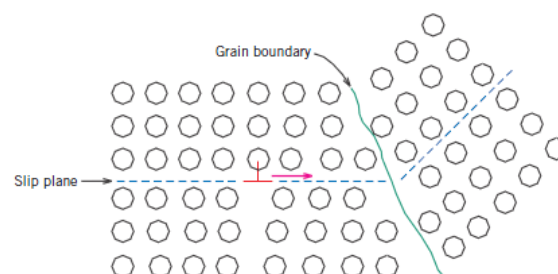
Dempning i et materiale kommer fra materialets indre friksjon. Materialets dempningsforhold for den første svingemoden kan bli funnet eksperimentelt ved å utsette en bjelke/søyle av det aktuelle materialet for en frie svingninger, og deretter å logge hvordan svingeamplitudene avtar over tid.

Idealiserte elastiske materialer vil gi en rett linje, men fordi ingen materialer er perfekt elastiske vil vi få en kurve som vist på Figur 2.5. Energitalpet er likt arealet av hysteresekurven. En forutsetning for å bruke materialdempning på en struktur er at vi holder oss innenfor det elastiske området.



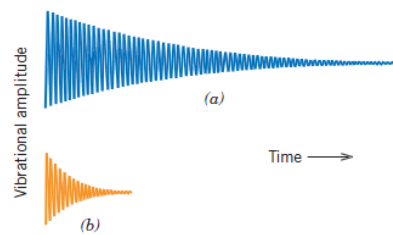
Figur 2.5 Hysteresekurve for metall

Når et materiale blir deformert absorberer materialet energi. Dette skjer på grunn av friksjon mellom interne glideplan.



Figur 2.6 Internt glideplan

Forskjellige materialer har forskjellige dempingsegenskaper. Figur 2.7 sammenligner vanlig konstruksjonsstål (a) mot grått støpejern (b)



Figur 2.7 Dempningsegenskaper

Referanse:

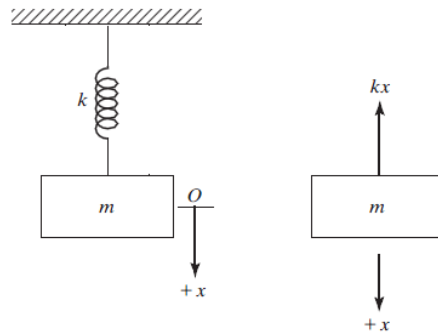
Tekst og figurer er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units

[3] Dynamisk Analyse Av Konstruksjoner

[6] Materials Science And Engineering

3 Bevegelsesligningen



Figur 3.1 SDOF system

På Figur 3.1 er det vist et SDOF(Singel Degree Of Freedom) system. Der m er massen og k er fjærstivheten. Systemet er forenklet slik at all masse er under massen m og all stivhet ligger hos fjærkonstanten k .

$x(t)$, $\dot{x}(t)$ og $\ddot{x}(t)$ er forskyvningen, hastigheten og akselerasjonen til systemet som funksjon av tiden. Relasjonene kan skrives som:

$$x = x(t) \quad \dot{x} = \frac{d}{dt}x(t) \quad \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

Starter med likevekt rundt Figur 3.1

$$\Sigma F = -k \cdot x \tag{Eq.3.1}$$

$$\Sigma F = m \cdot \ddot{x} \tag{Eq.3.2}$$

Kombinerer Eq.3.1 og Eq.3.2:

$$m \cdot \ddot{x} + kx = 0 \tag{Eq.3.3}$$

Eq.3.3 er en annen ordens differensial ligningen. Løser den steg for steg:

Gjetter en løsning for $x(t)$:

$$x(t) = C \cdot e^{s \cdot t} \tag{Eq.3.4}$$

Dobbelt deriverer Eq.3.4:

$$x''(t) = C \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t}$$

Eq.3.5

Setter inn Eq.3.4 og Eq.3.5 inn i Eq.3.3:

$$m \cdot (C \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t}) + k(C \cdot e^{s \cdot t}) = C \cdot e^{s \cdot t} \cdot (m \cdot s^2 + k) = 0$$

Eq.3.6

Forkorter Eq.3.6 til:

$$m \cdot s^2 + k = 0$$

Eq.3.7

Eq.3.7 har løsning:

$$s = \pm i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Definerer egenfrekvens som ω_n

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Eq.3.8

Kompleks form for bevegelsesligningen:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} + C_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t}$$

Eq.3.9

Bruker de matematiske relasjonene:

$$e^{i \cdot \omega_n \cdot t} = \cos(\omega_n \cdot t) + i \sin(\omega_n \cdot t)$$

$$e^{-i \cdot \omega_n \cdot t} = \cos(\omega_n \cdot t) - i \sin(\omega_n \cdot t)$$

Setter inn de matematiske relasjonene i **Eq.3.9**:

$$x(t) = C_1 \cdot (\cos(\omega_n \cdot t) + i \cdot \sin(\omega_n \cdot t)) + C_2 \cdot (\cos(\omega_n \cdot t) - i \cdot \sin(\omega_n \cdot t))$$

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cdot \cos(t \cdot \omega_n) + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin(t \cdot \omega_n)$$

Skriver om **Eq.3.9** til reell løsning:

$$x(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + A_2 \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

Eq.3.10

Modifiserer **Eq.3.10** med (t=0)

$$x(t = 0) = A_1 = x_0$$

$$A_1 = x_0$$

Deriverer **Eq.3.10**:

$$x'(t) = A_2 \cdot \omega_n \cdot \cos(t \cdot \omega_n) - x_0 \cdot \omega_n \cdot \sin(t \cdot \omega_n)$$

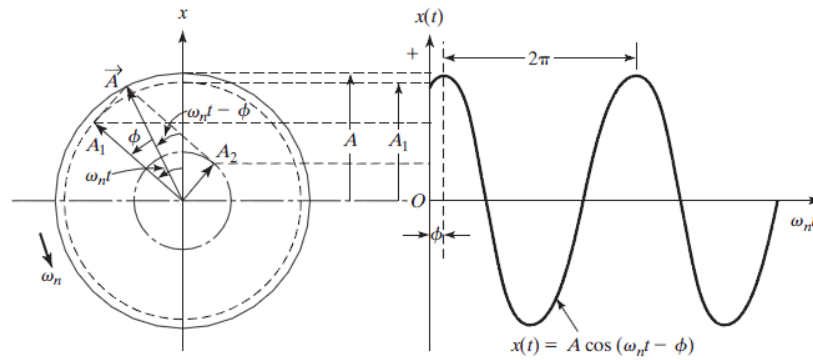
$$x'(t = 0) = A_2 \cdot \omega_n = x'_0$$

$$A_2 = \frac{x'_0}{\omega_n}$$

Setter inn de nye konstantene:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{x'_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

Eq.3.11



Figur 3.2 Harmonisk bevegelse

Eq.3.10 kan skrives som en cosinus funksjon dersom vi legger inn fasevinkelen:

Definerer:

$$A_1 = A \cdot \cos(\varphi)$$

Eq.3.12

$$A_2 = A \cdot \sin(\varphi)$$

Eq.3.13

Fra Figur 3.2 Harmonisk bevegelse

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x'_0}{\omega_n}\right)^2} = \text{Amplitude}$$

Eq.3.14

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x'_0}{\omega_n \cdot x_0}\right) = \text{FaseVinkel}$$

Eq.3.15

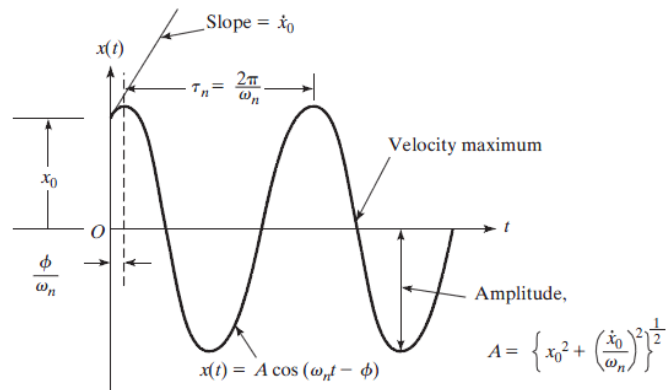
Setter inn Eq.3.12 og Eq.3.13 inn i Eq.3.10:

$$x(t) = A \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + A \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\omega_n \cdot t) = A \cdot \cos(\varphi - t \cdot \omega_n)$$

Nå har vi en cosinus funksjon med fasevinkel

$$x(t) = A \cdot \cos(t \cdot \omega_n - \phi)$$

Eq.3.16



Figur 3.3 Forskyvning, hastighet og svingeperiode

Fra Figur 3.3 Forskyvning, hastighet og svingeperiode definerer vi naturlig svingeperiode, T_n :

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Eq.3.17

Definerer Naturlig frekvens, f_n

$$f_n = \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi}$$

Eq.3.18

Referanse:

Figurer, tekst og deler av matematikk er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units

3.1 Nyttige formler fra dette kapittel 3:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Eq.3.8

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{x'_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

Eq.3.11

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x'_0}{\omega_n}\right)^2} = \text{Amplitude}$$

Eq.3.14

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x'_0}{\omega_n \cdot x_0}\right) = \text{FaseVinkel}$$

Eq.3.15

$$x(t) = A \cdot \cos(t \cdot \omega_n - \varphi)$$

Eq.3.16

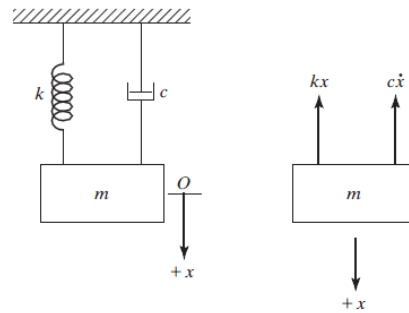
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Eq.3.17

$$f_n = \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi}$$

Eq.3.18

4 Bevegelsesligningen med demper:



Figur 4.1 SDOF system med demper

På Figur 4.1 er det vist et SDOF system. Der m er massen, c er dempningskoeffisienten og k er fjærstivheten. Systemet er forenklet slik at all masse er under massen m , all dempning er lagt i dempningskoeffisienten c og all stivhet ligger hos fjærkonstanten k .

$x(t)$, $\dot{x}(t)$ og $\ddot{x}(t)$ er forskyvningen, hastigheten og akselerasjonen til massen som funksjon av tiden. Relasjonene kan skrives som:

$$x = x(t) \quad \dot{x} = \frac{d}{dt}x(t) \quad \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

Likevekt rundt Figur 4.1:

$$\Sigma F = -c \cdot \dot{x} - k \cdot x$$

$$\Sigma F = m \cdot \ddot{x}$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot \dot{x} - k \cdot x$$

Kommer ut med en andre ordens homogen differensialligning:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + kx = 0$$

Eq.4.1

Løser ligning Eq.4.1 steg for steg:

Gjetter en løsning for $x(t)$:

$$x(t) = C \cdot e^{s \cdot t}$$

$$\dot{x}(t) = C \cdot s \cdot e^{s \cdot t}$$

$$\ddot{x}(t) = C \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t}$$

Setter $x(t)$, $x'(t)$ og $x''(t)$ inn i Eq.4.1:

$$m(Cs^2 \cdot e^{s \cdot t}) + c(Cs \cdot e^{s \cdot t}) + k(C \cdot e^{s \cdot t}) = C \cdot e^{s \cdot t} \cdot (ms^2 + cs + k) = 0$$

Forenkler uttrykket til:

$$m \cdot s^2 + c \cdot s + k = 0$$

Finner røttene til den andre grads ligningen:

$$s_1 = \frac{\sqrt{c^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m} - \frac{c}{2 \cdot m}$$

$$s_2 = -\frac{\sqrt{c^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m} - \frac{c}{2 \cdot m}$$

Forenkler det første leddet til røttene:

$$\frac{\sqrt{c^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{\sqrt{(2 \cdot m)^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - 4 \cdot k \cdot m}{(2 \cdot m)^2}} = \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$s_1 = -\frac{c}{2 \cdot m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Eq.4.2

$$s_2 = -\frac{c}{2 \cdot m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Eq.4.3

Kommer ut med løsningen:

$$x_1(t) = C_1 \cdot e^{s_1 \cdot t}$$

$$x_2(t) = C_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

$x(t)$ er en kombinasjon av $x_1(t)$ og $x_2(t)$:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\left[-\frac{c}{2 \cdot m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \right] \cdot t} + C_2 \cdot e^{\left[-\frac{c}{2 \cdot m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \right] \cdot t} \quad \text{Eq.4.4}$$

Kritisk dempningsforhold skjer kun når røttene s_1 og s_2 er like. Det skjer kun når:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = 0 \quad \text{Eq.4.5}$$

Definerer kritisk dempningskoeffisient som c_c . Løser ligning Eq.4.5 med hensyn på c_c :

$$c_c = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m} = 2 \cdot \sqrt{m^2 \cdot \omega_n^2} = 2 \cdot m \cdot \omega_n$$

$$c_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n$$

Eq.4.6

Definerer dempningsforhold som ξ :

$$\xi = \frac{c}{c_c}$$

Eq.4.7

Bruker Eq.4.6 og Eq.4.7 og forenkler første felles del av røttene s_1 og s_2 :

$$\frac{c}{2 \cdot m} = \frac{c}{2 \cdot m} \cdot \frac{c}{c} = \xi \cdot \omega_n$$

Eq.4.8

Setter Eq.4.7 og Eq.4.8 inn i Eq.4.2 og Eq.4.3 og forenkler røttene s_1 og s_2 :

$$s_1 = \sqrt{(\xi \cdot \omega_n)^2 - \omega_n^2} - \xi \cdot \omega_n = (\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi) \cdot \omega_n$$

Eq.4.9

$$s_2 = -\sqrt{(\xi \cdot \omega_n)^2 - \omega_n^2} - \xi \cdot \omega_n = (-\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi) \cdot \omega_n$$

Eq.4.10

Kommer frem til den bevegelsesligningen med demping:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t} + C_2 \cdot e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t}$$

Eq.4.11

4.1 $\xi < 1$

$\xi < 1$ betyr at systemet er underkritisk dempet. Dette er det vanligste tilfellet for konstruksjoner.

Systemet vil få oscillerende bevegelse, og svingeamplitudene vil avta over tid.

Skriver om ligning Eq.4.11:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{[-\xi + \sqrt{-(-\xi^2 + 1)}] \cdot \omega_n \cdot t} + C_2 \cdot e^{[-\xi - \sqrt{-(-\xi^2 + 1)}] \cdot \omega_n \cdot t}$$

Eq.4.12

Bruker "a" som midlertidig substituering (Konstanten "a" har ingen betydning i slutten av denne utledning):

$$a = -\xi^2 + 1$$

Eq.4.13

Kombinerer Eq.4.12 og 4.13:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{[-\xi + \sqrt{-(a)}] \cdot \omega_n \cdot t} + C_2 \cdot e^{[-\xi - \sqrt{-(a)}] \cdot \omega_n \cdot t}$$

Eq.4.14

Forenkler Eq.4.14:

$$x(t) = e^{-\xi \cdot t \cdot \omega_n} \cdot \left(C_1 \cdot e^{i\sqrt{a} \cdot i \cdot t \cdot \omega_n} + C_2 \cdot e^{-i\sqrt{a} \cdot i \cdot t \cdot \omega_n} \right)$$

Eq.4.15

Forenkler uttrykket inni parentesen av Eq.4.15

$$C_1 \cdot e^{\sqrt{a} \cdot i \cdot t \cdot \omega_n} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot i \cdot t \cdot \omega_n}$$

Eq.4.16

Bruker "b" som midlertidig substituering (Konstanten "b" har ingen betydning i slutten av denne utledning):

$$b = \sqrt{a} \cdot \omega_n \cdot t$$

Eq.4.17

Bruker de matematiske relasjonene:

$$e^{i \cdot b} = \cos(b) + i \cdot \sin(b)$$

$$e^{-i \cdot b} = \cos(b) - i \cdot \sin(b)$$

$$C_1 \cdot e^{i \cdot b} + C_2 \cdot e^{-i \cdot b} = C_1 \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b)) + C_2 \cdot (\cos(b) - i \cdot \sin(b))$$

$$C_1 \cdot e^{i \cdot b} + C_2 \cdot e^{-i \cdot b} = (C_1 + C_2) \cdot \cos(b) + (C_1 - C_2) \cdot i \cdot \sin(b)$$

$$C_1 \cdot e^{i \cdot b} + C_2 \cdot e^{-i \cdot b} = D_1 \cdot \cos(b) + D_2 \cdot \sin(b)$$

$$D_1 \cdot \cos(b) + D_2 \cdot \sin(b) = D_1 \cdot \cos\left(\sqrt{-\xi^2 + 1} \cdot \omega_n \cdot t\right) + D_2 \cdot \sin\left(\sqrt{-\xi^2 + 1} \cdot \omega_n \cdot t\right)$$

Kommer frem til en generell reell løsning:

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(D_1 \cdot \cos\left(\sqrt{-\xi^2 + 1} \cdot \omega_n \cdot t\right) + D_2 \cdot \sin\left(\sqrt{-\xi^2 + 1} \cdot \omega_n \cdot t\right) \right)$$

Eq.4.18

Definerer dempet egenfrekvens som ω_d :

$$\omega_d = \sqrt{-\xi^2 + 1} \cdot \omega_n$$

Eq.4.19

Skriver om ligningen når $t=0$

$$x(0) = x_0 = D_1$$

$$D_1 = x_0$$

Eq.4.20

Kombinerer Eq.4.20 og 4.18:

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(x_0 \cdot \cos\left(\sqrt{-\xi^2 + 1} \cdot \omega_n \cdot t\right) + D_2 \cdot \sin\left(\sqrt{-\xi^2 + 1} \cdot \omega_n \cdot t\right) \right)$$

Eq.4.21

Deriverer Eq.4.21:

$$x(t) = e^{-\xi \cdot t \cdot \omega_n} \cdot \left(C_2 \cdot \omega_n \cdot \cos\left(t \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \xi^2} - \omega_n \cdot x_0 \cdot \sin\left(t \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \right) \dots$$

$$+ -\xi \cdot \omega_n \cdot e^{-\xi \cdot t \cdot \omega_n} \cdot \left(C_2 \cdot \sin\left(t \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}\right) + x_0 \cdot \cos\left(t \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}\right) \right)$$

Definerer $x'(t=0)$ som x'_0

$$x(0) = x_0$$

$$x'(0) = D_2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} - \xi \cdot \omega_n \cdot x_0$$

Løser ligningen med hensyn på D_2

$$D_2 = \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Eq.4.22

Setter inn Eq.4.20, Eq.4.22 og Eq.4.19 inn i Eq.4.18:

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(x_0 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right)$$

Eq.4.23

4.2 $\xi=1$

Når $\xi=1$ har vi to like røtter ($s_1=s_2$). Vi kaller dette for et kritisk dempet system. Systemet vil ikke ha noen oscillerende bevegelse.

Vi har to like røtter når:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = 0$$

Detter gir oss:

$$-\frac{c}{2 \cdot m} = -\sqrt{\frac{k}{m}} = -\omega_n$$

Røttene blir:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

Den homogene differensialligningen har løsningen:

$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\omega_n \cdot t}$$

Eq.4.24

Skriver om Eq.4.24 når $t=0$ som gir x_0 og \dot{x}_0 :

$$x(0) = x_0 = C_1$$

$$C_1 = x_0$$

Eq.4.25

Setter Eq.4.25 inn i Eq.4.24

$$x(t) = (x_0 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\omega_n \cdot t}$$

Eq.4.26

Deriverer Eq.4.26:

$$x(t) = C_2 \cdot e^{-t \cdot \omega_n} - \omega_n \cdot e^{-t \cdot \omega_n} \cdot (x_0 + C_2 \cdot t)$$

$$x(0) = \dot{x}_0 = C_2 - \omega_n \cdot x_0$$

$$C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n \cdot x_0$$

Eq.4.27

Setter Eq.4.25 og Eq.4.27 inn i Eq.4.24

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n \cdot x_0) \cdot t] \cdot e^{-\omega_n \cdot t}$$

Eq.4.28

4.3 $\xi > 1$

$\xi > 1$ betyr at systemet er overdempet. Systemer vil ikke få noen oscillerende bevegelse. Det vil nå ta lenger tid til systemet når sin likevekstposisjon enn når $\xi = 1$.

Vi ser på Eq.4.18

$$x(t) = C_1 \cdot e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t} + C_2 \cdot e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t}$$

Skriver om Eq.4.18 når $t=0$ som gir x_0 og \dot{x}_0 :

$$x(0) = x_0 = C_1 + C_2$$

Eq.4.29

Deriverer Eq.4.18

$$\dot{x}(t) = -C_1 \cdot \omega_n \cdot e^{-t \cdot \omega_n \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) - C_2 \cdot \omega_n \cdot e^{-t \cdot \omega_n \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}'_0 = -C_2 \cdot \omega_n \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) - C_1 \cdot \omega_n \cdot (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

Eq.4.30

Setter Eq.4.29 inn i Eq.4.30 Løser ligningen med hensyn på C_1

$$C_1 = \frac{\dot{x}'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 + \omega_n \cdot x_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Eq.4.31

Setter Eq.4.31 inn i Eq.4.29 Løser ligningen med hensyn på C_2

$$C_2 = -\frac{\dot{x}'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 - \omega_n \cdot x_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Eq.4.32

Setter Eq.4.31 og Eq.4.32 inn i Eq.4.18

$$x(t) = \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 + \omega_n \cdot x_0 \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t} - \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 - \omega_n \cdot x_0 \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t}$$

Eq.4.33

Referanse:

Figurer, tekst og deler av matematikk er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units

4.4 Nyttige formler fra kapittel 4:

$$c_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n$$

Eq.4.6

$$\xi = \frac{c}{c_c}$$

Eq.4.7

$$\omega_d = \sqrt{-\xi^2 + 1} \cdot \omega_n$$

Eq.4.19

$\xi < 1$

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(x_0 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right)$$

Eq.4.23

$\xi = 1$

$$x(t) = [x_0 + (x'_0 + \omega_n \cdot x_0) \cdot t] \cdot e^{-\omega_n \cdot t}$$

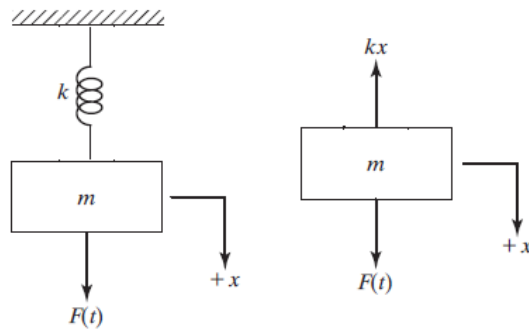
Eq.4.28

$\xi > 1$

$$x(t) = \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 + \omega_n \cdot x_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t} - \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 - \omega_n \cdot x_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t}$$

Eq.4.33

5 Respons av et udempet system med harmonisk last



Figur 5.1 SDOF system med harmonisk last

Likevekt om Figur 5.1

$$m \cdot x'' + k \cdot x = F(t)$$

Velger cosinusfunksjon periodisk last. (Hadde vi valgt sinusfunksjon ville vi fått samme sluttresultat)

$$m \cdot x'' + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Eq.5.1

Eq.5.1 er en andre ordens differensialligning med homogen- og partiell del.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Eq.5.2

Den homogene delen av differensialligning har løsning fra Eq.3.6

$$x_h(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

Løser den partielle delen av differensialligning steg for steg:

Gjetter løsning:

$$x_p(t) = X \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Eq.5.3

Deriverer Eq.5.3:

$$x'_p(t) = -X \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$x''_p(t) = -X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Setter første og andre deriverte inn i Eq.5.1 og løser den med hensyn på X:

$$m \cdot (-X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) + k \cdot (X \cdot \cos(\omega \cdot t)) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$X = \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m}$$

Eq.5.4

Vi har nå en løsning av Eq.5.1 som er en partiell differensialligning. Vi kombinerer det homogene og partikulære bidraget:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Løsning av Eq.5.1 blir:

$$x(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Eq.5.5

Skriver om Eq.5.5 når $t=0$ som gir x_0 og \dot{x}_0 :

$$x(0) = x_0$$

$$x_0 = C_1 + \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m}$$

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m}$$

Eq.5.6

Deriverer Eq.5.5

$$x(t) = C_2 \cdot \omega_n \cdot \cos(t \cdot \omega_n) - C_1 \cdot \omega_n \cdot \sin(t \cdot \omega_n) - \frac{F_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{k - \omega^2 \cdot m}$$

$$x'_0 = C_2 \cdot \omega_n$$

$$C_2 = \frac{x'_0}{\omega_n}$$

Eq.5.7

Setter Eq.5.6 og Eq.5.7 inn i Eq.5.5

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m} \right) \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{x'_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Eq.5.8

Definerer den statiske forskyvningen som:

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$$

Eq.5.9

Definerer "r" som forholdet mellom den sirkulære frekvensen til lasten og egenfrekvensen:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Eq.5.10

Definerer DAF(dynamisk forsterkningsfaktor) som:

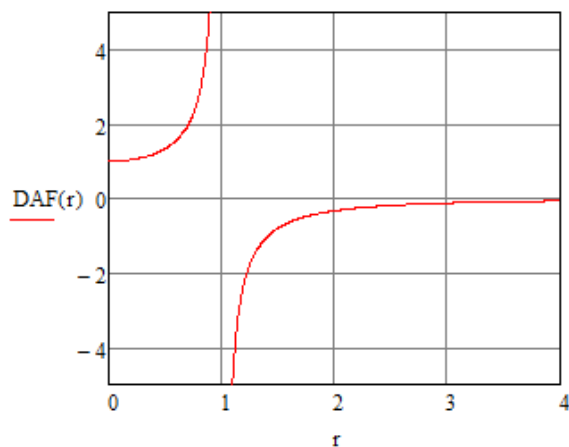
$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{\frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m}}{\frac{F_0}{k}} = \frac{k}{k - \omega^2 \cdot m} = \frac{1}{1 - \omega^2 \cdot \frac{m}{k}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - r^2}$$

Eq.5.11

$$DAF = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - r^2}$$

Eq.5.12

Graf 5.1 viser DAF som funksjon av variabelen "r". Ettersom vi nå analyserer et udempet system vil vi få uendelig stor svingeamplitude når den periodiske lasten svinger med samme frekvens som egenfrekvensen til systemet. Dette fenomenet kalles resonans. Ettersom vi alltid har litt dempning i et system vil aldri uendelig forskyvning inntreffe. Det ligger også i sin natur at vi ikke kan få en uendelig forskyvning av en bjelke/søyle når en bjelke eller søyle alltid har en endelig lengde.



Graf 5.1 DAF(r)

5.1 Resonans

Når $\omega = \omega_n$ har vi fenomenet resonans. Skriver om Eq.5.8 til:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{x'_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m} \cdot (\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_n \cdot t))$$
Eq.5.13

Setter Eq.5.11 inn i Eq.5.13

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{x'_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \delta_{st} \cdot \frac{(\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_n \cdot t))}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}$$
Eq.5.14

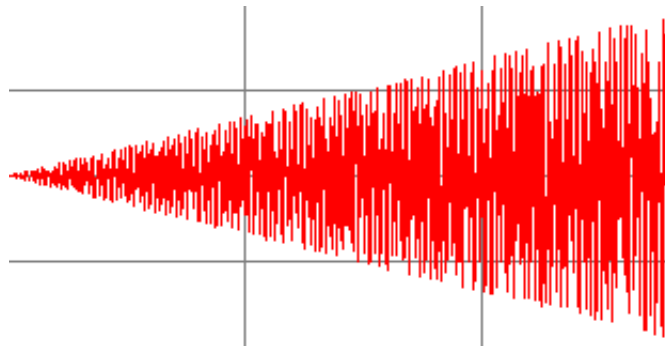
Anvender L'Hospitals regel:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{(\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_n \cdot t))}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} \rightarrow \frac{t \cdot \omega_n \cdot \sin(t \cdot \omega_n)}{2}$$

Og kommer frem til:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{x'_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \delta_{st} \cdot \frac{t \cdot \omega_n \cdot \sin(t \cdot \omega_n)}{2}$$
Eq.5.15

Studerer vi Eq.5.15 ser vi at det tredje ledder vokser med variabelen "t" som er tiden. Det betyr atsvingeamplituden vil vokse med tiden.



Graf 5.2 Resonansrespons

Referanse:

Tekst og deler av matematikk og figurer er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units

6 Beating

Beating skjer når den sirkulære frekvensen til den periodiske lasten går veldig nært egenfrekvensen til systemet.

Ser igjen på Eq.5.13:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{x'_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m} \cdot (\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_n \cdot t))$$
Eq.6.1

Antar at:

$$x_0 = x'_0 = 0$$

Og kommer ut med:

$$x(t) = \frac{F_0}{k - \omega^2 \cdot m} \cdot (\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_n \cdot t))$$
Eq.6.2

Modifiserer Eq.6.2 ved å dele på massen "m":

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} \cdot (\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_n \cdot t)) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot (\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_n \cdot t))$$
Eq.6.3

Anvender den matematiske relasjonen:

$$\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_n \cdot t) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\omega + \omega_n}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega - \omega_n}{2} \cdot t\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\omega + \omega_n}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_n - \omega}{2} \cdot t\right)$$
Eq.6.4

Setter Eq.6.4 inn i Eq.6.3 og får:

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\omega + \omega_n}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_n - \omega}{2} \cdot t\right) \right)$$
Eq.6.5

Hvis:

$$\omega_n > \omega$$

Definerer den positive størrelsen 2ε som

$$\omega_n - \omega = 2 \cdot \varepsilon \quad \text{Eq.6.6}$$

Den sirkulære frekvesen til den periodiske lasten er nesten lik egenfrekvenser, dermed:

$$\omega + \omega_n = 2 \cdot \omega \quad \text{Eq.6.7}$$

Multipliserer Eq.6.6 med Eq.6.7 og får:

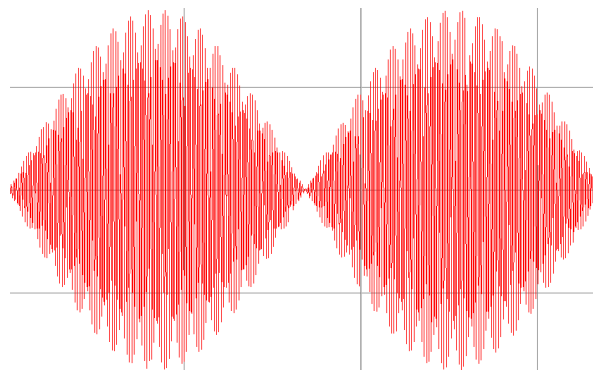
$$\omega_n^2 - \omega^2 = 4 \cdot \varepsilon \cdot \omega \quad \text{Eq.6.8}$$

Kombinerer Eq.6.5 med Eq.6.6 - Eq.6.8 og får:

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2} \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\omega + \omega_n}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_n - \omega}{2} \cdot t\right) \right) = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_n - \omega) \cdot \omega} \cdot \left(\sin(\omega \cdot t) \cdot \sin\left(\frac{\omega_n - \omega}{2} \cdot t\right) \right)$$

Ligningen for beating blir:

$$x(t) = \frac{F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin\left(\frac{\omega_n - \omega}{2} \cdot t\right)}{\omega \cdot (\omega_n - \omega) \cdot m} \quad \text{Eq.6.9}$$



Graf 6.1 Beatingrespons

6.1 Beating eksperiment

Et beating eksperiment har blitt filmet og opplastet på YouTube. Trykk på linken under for å se eksperimentet.

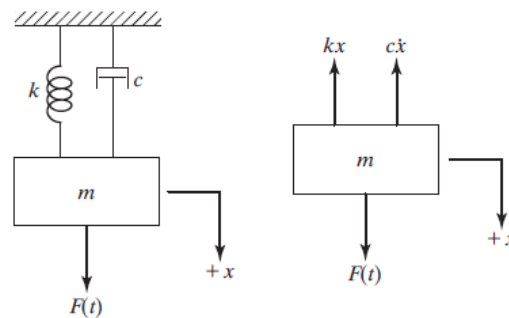
<http://www.youtube.com/watch?v=6ybbwQmSOGc>

Referanse:

Tekst og deler av matematikk er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units

7 Respons av et dempet system med harmonisk last



Figur 7.1 SDOF system med demper og harmonisk last

Likevekt rundt Figur 7.1 gir:

$$m \cdot x'' + c \cdot x' + k \cdot x = F(t) \quad \text{Eq.7.1}$$

Velger cosinusfunksjon periodisk last. (Hadde vi valgt sinusfunksjon ville vi fått samme sluttresultat)

$$m \cdot x'' + c \cdot x' + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{Eq.7.2}$$

Eq.7.2 er en andre ordens differensialligning med homogen- og partiell del.

Gjetter løsning for den partielle delen:

$$x_p(t) = X \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi) \quad \text{Eq.7.3}$$

Deriverer Eq.7.3:

$$x_p'(t) = -X \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi) \quad \text{Eq.7.4}$$

$$x_p''(t) = -X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi) \quad \text{Eq.7.5}$$

Setter Eq.7.4 og Eq.7.5 inn i Eq.7.2:

$$m \left(-X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi) \right) + c \cdot (-X \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)) + k \cdot (X \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi)) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Eq.7.6

Forenkler Eq.7.6:

$$X \cdot \left[(k - m \cdot \omega^2) \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi) - c \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi) \right] = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Eq.7.7

Anvender de matematiske relasjonene:

$$\cos(\omega \cdot t - \phi) = \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\phi) + \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\phi)$$

$$\sin(\omega \cdot t - \phi) = \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\phi) - \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\phi)$$

Setter de matematiske relasjonene inn i Eq.7.7

$$X \cdot \left[(k - m \cdot \omega^2) \cdot (\cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\phi) + \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\phi)) - c \cdot \omega \cdot (\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\phi) - \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\phi)) \right] = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + 0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Vi får to ligninger:

$$X \cdot \left[(k - m \cdot \omega^2) \cdot \cos(\phi) + c \cdot \omega \cdot \sin(\phi) \right] = F_0$$

Eq.7.8

$$X \cdot \left[(k - m \cdot \omega^2) \cdot \sin(\phi) - c \cdot \omega \cdot \cos(\phi) \right] = 0$$

Eq.7.9

Ser først på Eq.7.9

$$(k - m \cdot \omega^2) \cdot \sin(\phi) = c \cdot \omega \cdot \cos(\phi)$$

$$\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{c \cdot \omega}{(k - m \cdot \omega^2)}$$

$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot c}{k - m \cdot \omega^2}\right)$$

Eq.7.10

$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot c}{k - m \cdot \omega^2}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}\right)$$

Φ er fasevinkelen:

$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}\right)$$

Eq.7.11

Kvadrerer og legger sammen Eq.7.8 og Eq.7.9.

$$\left[X \cdot \left[(k - m \omega^2) \cdot \cos(\phi) + c \cdot \omega \cdot \sin(\phi) \right] \right]^2 + \left[X \cdot \left[(k - m \omega^2) \cdot \sin(\phi) - c \cdot \omega \cdot \cos(\phi) \right] \right]^2 = X^2 \cdot (\omega^4 \cdot m^2 + \omega^2 \cdot c^2 - 2 \cdot \omega^2 \cdot k \cdot m + k^2)$$

Kommer frem til:

$$X^2 \cdot (\omega^4 \cdot m^2 + \omega^2 \cdot c^2 - 2 \cdot \omega^2 \cdot k \cdot m + k^2) = F_0^2$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{\omega^4 \cdot m^2 + \omega^2 \cdot c^2 - 2 \cdot \omega^2 \cdot k \cdot m + k^2}}$$

Forkorter og kommer frem til amplituden X:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + (\omega \cdot c)^2}}$$

Eq.7.12

Deler Eq.7.12 med stivheten k:

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\frac{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + (\omega \cdot c)^2}{k^2}}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(\frac{k - \omega^2 \cdot m}{k}\right)^2 + \left(\frac{\omega \cdot c}{k}\right)^2}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega \cdot c}{k}\right)^2}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}}$$

Kommer ut med et forenklet uttrykk for amplituden X

$$X = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \quad \text{Eq.7.12}$$

Definerer DAF(dynamisk forsterkningsfaktor):

$$DAF = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \quad \text{Eq.7.13}$$

Vi kan konkludere med at dersom $r \ll 1$ har vi en stivhetskrollert svingning(kvasistatisk). Dersom $r=1$ har vi en dempningskrollert svingning(resonans). Hvis $r \gg 1$ så har vi en massekrollert svingning.

Differensialligningen har løsning:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad \text{Eq.7.14}$$

Setter Eq.7.12 og Eq.7.11 inn i Eq.7.3 som gir det partikulære bidraget. Deretter tar vi det homogene bidraget fra Eq.4.18.

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t)) + \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}\right)\right) \quad \text{Eq.7.15}$$

Skriver om Eq.7.15 når $t=0$ som gir x_0 og \dot{x}_0 :

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$x(0) = C_1 + \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot r^2} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \xi^2 \cdot r^2}{(r^2 - 1)^2} + 1}}$$

Løser ligningen med hensyn på C_1 :

$$C_1 = x_0 - \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot r^2} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \xi^2 \cdot r^2}{(r^2 - 1)^2} + 1}}$$

Eq.7.16

Deriverer Eq.7.15 som gir oss:

$$\begin{aligned} x(t) = & e^{-\xi \cdot t \cdot \omega_n} \cdot (C_2 \cdot \omega_d \cdot \cos(t \cdot \omega_d) - C_1 \cdot \omega_d \cdot \sin(t \cdot \omega_d)) \dots \\ & + -\xi \cdot \omega_n \cdot e^{-\xi \cdot t \cdot \omega_n} \cdot (C_1 \cdot \cos(t \cdot \omega_d) + C_2 \cdot \sin(t \cdot \omega_d)) - \frac{\omega \cdot \delta_{st} \cdot \sin\left(\text{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot r}{r^2 - 1}\right) + \omega \cdot t\right)}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot r^2}} \end{aligned}$$

$$x(0) = C_2 \cdot \omega_d - C_1 \cdot \xi \cdot \omega_n - \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot r \cdot \delta_{st}}{(r^2 - 1) \cdot \sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot r^2} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \xi^2 \cdot r^2}{(r^2 - 1)^2} + 1}}$$

Løser ligninger med hensyn på C_2

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 + C_1 \cdot \xi \cdot \omega_n + \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot r \cdot \delta_{st}}{(r^2 - 1) \cdot \sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot r^2} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot \xi^2 \cdot r^2}{(r^2 - 1)^2} + 1}}{\omega_d}$$

Eq.7.17

Setter Eq.7.16 inn i Eq.7.17

$$C_2 = \frac{x'_0 + \left[x_0 - \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4\xi^2 \cdot r^2}} \cdot \frac{4\xi^2 \cdot r^2}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4\xi^2 \cdot r^2}} + 1 \right] \cdot \xi \cdot \omega_n + \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot r \cdot \delta_{st}}{(r^2 - 1) \cdot \sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4\xi^2 \cdot r^2}} \cdot \frac{4\xi^2 \cdot r^2}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + 4\xi^2 \cdot r^2}}}{\omega_d}$$

Eq.7.18

Definerer substitusjonen "sub" som:

$$\text{sub} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2} \cdot \sqrt{\frac{(2 \cdot \xi \cdot r)^2}{(r^2 - 1)^2} + 1}}$$

Eq.7.19

Vi har nå en løsning av differensialligningen som både tar hensyn til det homogene og det partielle bidraget:

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \left[(x_0 - \text{sub}) \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{x'_0 + (x_0 - \text{sub}) \cdot \xi \cdot \omega_n + \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot r \cdot \text{sub}}{(r^2 - 1)}}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right] \dots$$

$$+ \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}\right)\right)$$

Eq.7.20

Ligningen overfor tar som sagt hensyn til det homogene bidraget. Når vi treffer resonansfrekvens vil det homogene bidraget sammen med det partikulære bidraget gi en større svingeamplitude enn hva det partikulære har alene. Det homogene bidraget vil dø ut med tiden og vi vil sitte igjen med det partikulære. Ligningen er nyttig dersom det stilles krav til ekstra høy nøyaktighet under våre beregninger.

Referanse:

Figurer, tekst og deler av matematikk er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units

[3] Dynamisk Analyse Av Konstruksjoner

NB:Eq.7.15 til Eq.7.20 er utledet av oppgaveskriver og har dermed ingen referanse

7.1 Nyttige formler fra kapittel 7:

$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}\right)$$

Eq.7.11

$$\operatorname{DAF} = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}}$$

Eq.7.13

$$\operatorname{sub} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2} \cdot \sqrt{\frac{(2 \cdot \xi \cdot r)^2}{(r^2 - 1)^2} + 1}}$$

Eq.7.19

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \left[(x_0 - \operatorname{sub}) \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{x'_0 + (x_0 - \operatorname{sub}) \cdot \xi \cdot \omega_n + \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot r \cdot \operatorname{sub}}{(r^2 - 1)}}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right] \dots$$

$$+ \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}\right)\right)$$

Eq.7.20

8 Rayleighs energimetode

Rayleighs metode er basert på prinsippet om bevaring av energi. Et system er konservativt hvis ikke noe energi går tapt på grunn av friksjon eller energispredning. Hvis noe arbeid er gjort på systemet av ytre krefter, blir den totale energien i systemet bevart konstant. Ettersom energien av et vibrerende system er delvis potensial og delvis kinetisk, forblir summen av disse to energiene konstante. Den kinetiske energien T er lagret i massen på grunn av dens hastighet, og den potensielle energien U er lagret i fjæren på grunn av elastiske deformasjon. Prinsippet for konservering:

$$T + U = \text{Konstant}$$

Dette betyr at:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

Formelen for kinetisk energi er gitt som:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$$

Formelen for potensiell energi lagret i en fjær er gitt som:

$$U = \frac{1}{2} m \cdot x^2$$

Dette gir oss:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \cdot x^2 \right) = 0$$

Og

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

8.1 Eksempel: Ekvivalent masse av en fritt opplagt bjelke



Figur 8.1 Fritt opplagt bjelke med punktlast

Momentformelen for en fritt opplagt bjelke med punktlast på midten er gitt som:

$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$$

Eq.8.1

Ligningen for den elastiske kurve er en annen ordens differensialligning

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

Eq.8.2

Den deriverte av forskyvning er rotasjonsvinkel

$$EI \cdot \frac{d}{dx} y(x) = \int M(x) dx$$

Eq.8.3

Integrerer Eq.8.1 og kommer ut med:

$$EI \cdot \theta(x) = \frac{P}{4} x^2 + c_1$$

Eq.8.4

Bruker den første randbetingelsen:

$$EI \cdot \theta\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + c_1 = 0$$

Løser ut den første konstanten:

$$c_1 = -\frac{P \cdot L^2}{16}$$

Eq.8.5

Forskyvningen er den integrerte av rotasjonsvinkelen:

$$EI \cdot \frac{d}{dx} y(x) = \frac{P}{4} x^2 - \frac{P}{16} \cdot L^2$$

$$EI \cdot y(x) = \int \left(\frac{P}{4} x^2 - \frac{P}{16} \cdot L^2 \right) dx$$

$$EI \cdot y(x) = \frac{P \cdot x^3}{12} - \frac{L^2 \cdot P \cdot x}{16} + c_2$$

Benytter den andre randbetingelsen:

$$y(0) = 0 \quad c_2 = 0$$

Kommer ut med uttrykket for forskyvning:

$$EI \cdot y(x) = \frac{P \cdot x^3}{12} - \frac{L^2 \cdot P \cdot x}{16}$$

Eq.8.6

Finner forskyvningen på midten av den fritt opplagte bjelken

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{L^3 \cdot P}{48}$$

Utrykket for maks forskyvning blir:

$$y_{\max} = -\frac{L^3 \cdot P}{48 \cdot EI}$$

Eq.8.7

Kombinerer Eq.8.6 med Eq.8.7:

$$y(x) = \frac{y_{\max} \cdot (3 \cdot L^2 \cdot x - 4 \cdot x^3)}{L^3}$$

Eq.8.8

Den maksimale kinetiske energien til bjelken er gitt ved Eq.8.9, hvor "m" er den totale massen til bjelken.

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{m}{L} \cdot (y'(x))^2 dx \quad \text{Eq.8.9}$$

Deriverer Eq.8.9 med hensyn på tiden, og kommer ut med:

$$y'(x) = \frac{y'_{\max} \cdot (3 \cdot L^2 \cdot x - 4 \cdot x^3)}{L^3} \quad \text{Eq.8.10}$$

Vi kan integrere fra 0 til L/2 dersom vi deler massen på halve bjelkelengden:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \left[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{m}{\left(\frac{L}{2}\right)} \cdot (y'(x))^2 dx \right]$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{m}{\left(\frac{L}{2}\right)} \cdot (y'(x))^2 dx \right] \rightarrow \frac{17 \cdot m \cdot y'_{\max}{}^2}{70}$$

Kommer ut med uttrykket for den totale kinetiske energien:

$$T_{\max} = \frac{17 \cdot m \cdot y'_{\max}{}^2}{70} \quad \text{Eq.8.11}$$

Den totale kinetiske energien kan også skrives som:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \cdot m_{\text{eq}} \cdot y'_{\max}{}^2 \quad \text{Eq.8.12}$$

Setter Eq.8.11 lik Eq.8.12 og løser ligningen med hensyn på den ekvivalente massen:

$$\frac{1}{2} \cdot m_{\text{eq}} \cdot y'_{\text{max}}^2 = \frac{17 \cdot m \cdot y'_{\text{max}}^2}{70} \text{ solve , } m_{\text{eq}} \rightarrow \frac{17 \cdot m}{35}$$

Uttrykket for den ekvivalente massen til en fritt opplagt bjelke med punktlast:

$$m_{\text{eq}} = \frac{17 \cdot m}{35}$$

Eq.8.13

Som er nummerisk veldig likt:

$$m_{\text{eq}} = 0.5 \cdot m$$

Eq.8.14

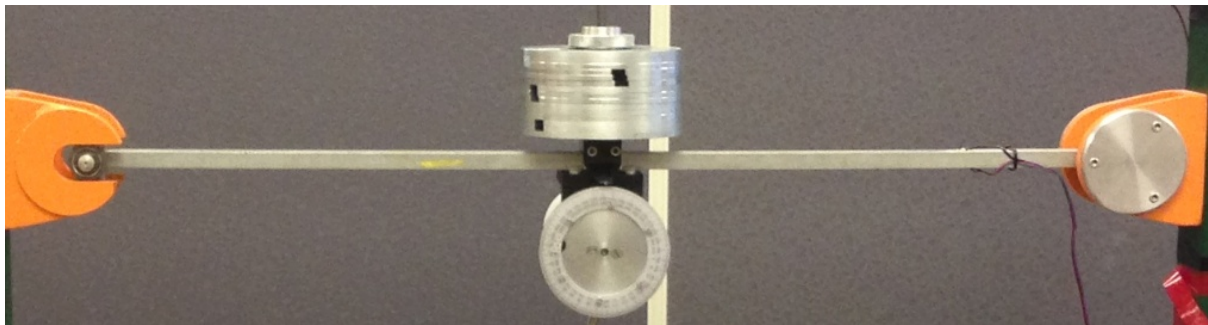
Referanse:

Tekst og deler av matematikk er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units

NB:Eq.8.1 til Eq.8.13 er utledet av oppgaveskriver og har dermed ingen referanse.

9 Nummerisk eksempel



Bilde 9.1 Fritt opplagt bjelke med konsentrert masse på midten

Vi ser på massen/motoren på Bilde 9.1 som konsentrert masse på midten.

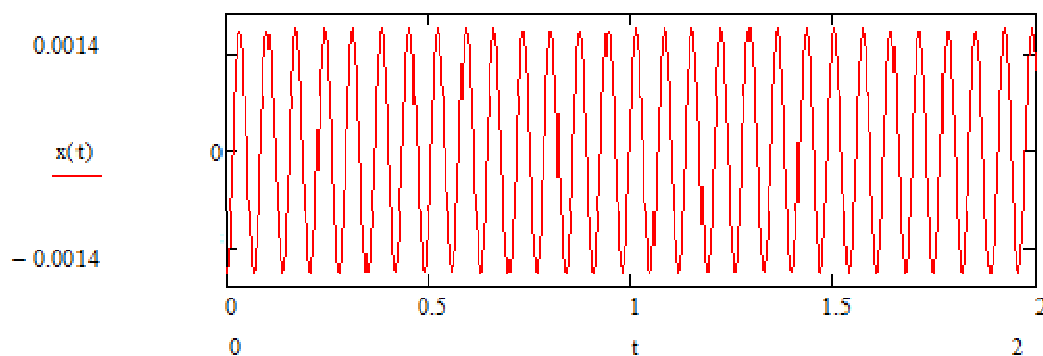
Se regnearket ”9 Nummerisk eksempel” i Appendiks A.

Den fritt opplagte bjelken står med en statisk nedbøyning. Tyngdekraften gjør at bjelken har potensiell energi lagret. Hvis vi tenker oss at vi tar bort tyngdekraften vil bjelken begynne å vibrere. For en bjelke uten dempning vil bjelken vibrere med samme amplitude i uendelig tid. For en bjelke med dempning vil amplituden avta med tiden.

9.1 Bevegelsesligningen uten demper $\xi=0$

Fra Eq.3.7:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{x'_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

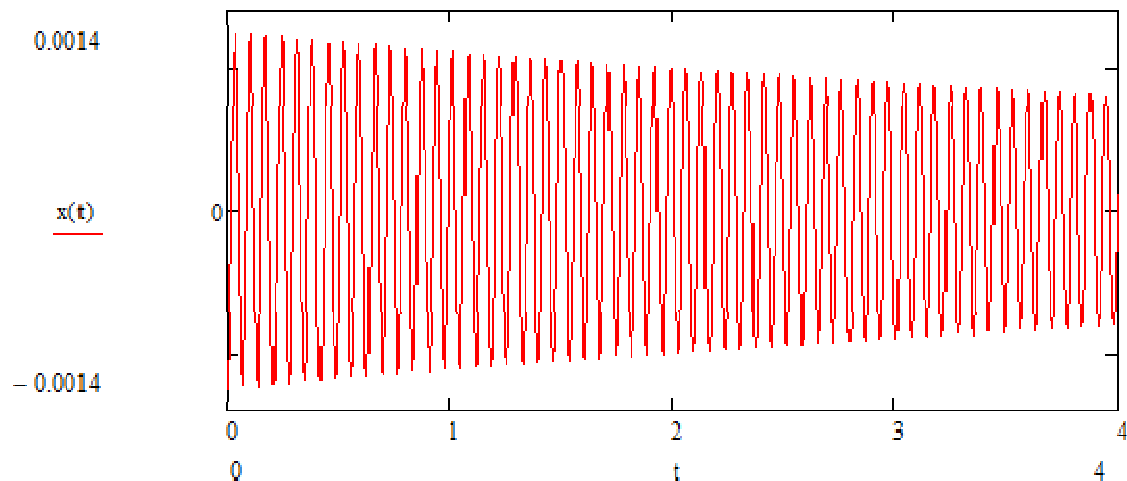


Graf 9.1 Udempet svingninger

9.2 Bevegelsesligning med demper $\xi < 1$

Fra Eq.4.23:

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(x_0 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right)$$

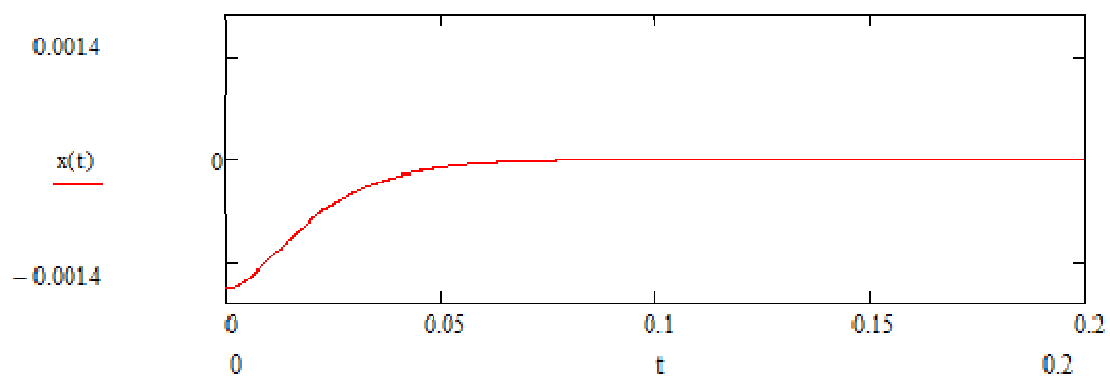


Graf 9.2 Underdempet svingninger

9.3 Bevegelsesligning med demper $\xi = 1$

Fra Eq.4.28:

$$x(t) = [x_0 + (x'_0 + \omega_n \cdot x_0) \cdot t] \cdot e^{-\omega_n \cdot t}$$

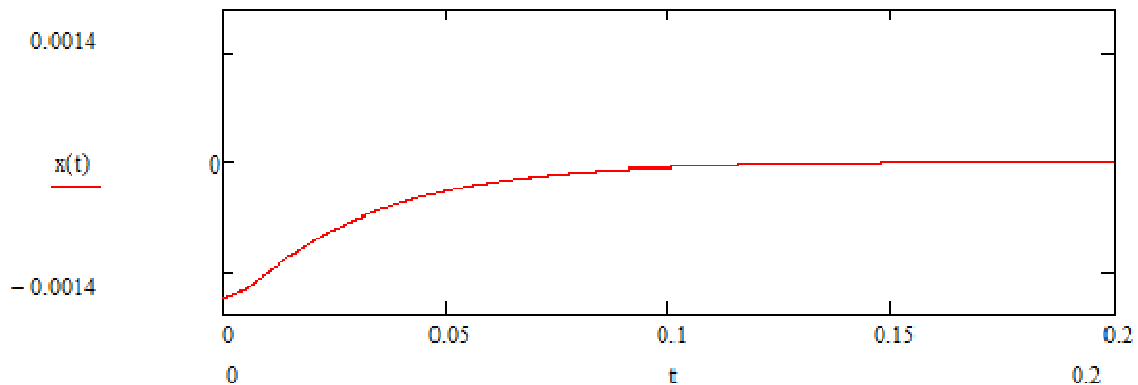


Graf 9.3 Kritisk dempet svingninger

9.4 Bevegelsesligning med demper $\xi > 1$

Fra Eq.4.31:

$$x(t) = \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 + \omega_n \cdot x_0 \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t} - \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 - \omega_n \cdot x_0 \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t}$$



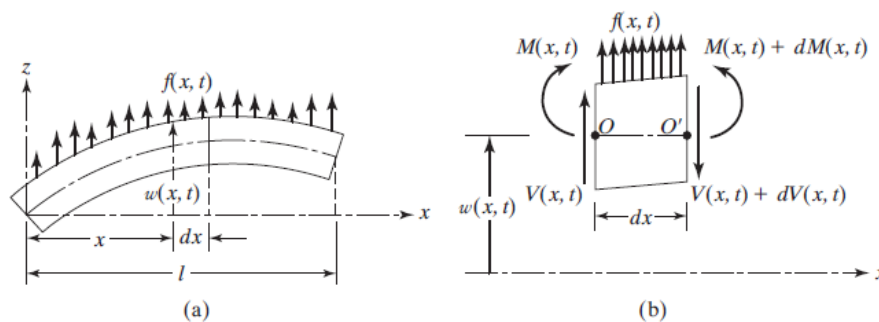
Graf 9.4 Overdempet svingninger

Kommentar:

Er $\xi > 1$ vil dempetiden fra maks forskyvning til likevektsposisjon ta lengre tid enn hvis $\xi = 1$. I mange tilfeller vil man at svingingene skal være over så fort som mulig, men det kan også være andre forhold som ligger til rette for at svingeperioden skal ta lengre tid.

10 Eksakt metode

Til nå har vi betraktet en bjelke/søyle som et SDOF(Singel Degree Of Freedom) system. En bjelke/søyle er egentlig ikke SDOF, men et kontinuerlig system. Et kontinuerlig system vil ha uendelig mange frihetsgrader. Eksakt metode tar hensyn til at alle punkt i bjelken/søyler kan vibrere, og vi får dermed en analyse med høyere nøyaktighet enn en SDOF analyse. Skal vi anvende eksakt metode må vi ha randbetingelsene til bjelken/søyle for å gjøre analysen.



Figur 10.1 Bjelke utsatt for bøyning

Vi starter med Newtons andre lov:

$$\Sigma F = m \cdot a$$

$$m \cdot a = \rho \cdot V \cdot a = \rho \cdot A(x) \cdot dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Eq.10.1

$$\Sigma F_z = m \cdot a = \rho \cdot A(x) \cdot dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Eq.10.2

Dermed summerer vi kreftene i z-retning og setter dem lik Eq.10.2:

$$f(x, t) \cdot dx + V(x, t) - (V(x, t) + dV(x, t)) = \rho \cdot A(x) \cdot dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Eq.10.3

Forenkler Eq.10.3:

$$f(x, t) \cdot dx - dV(x, t) = \rho \cdot A(x) \cdot dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad \text{Eq.10.4}$$

Dermed bruker vi de matematiske relasjonene:

$$\frac{dV(x, t)}{dx} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \quad dV(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \cdot dx \quad \text{Eq.10.5}$$

Setter Eq.10.5 inn i Eq.10.4 og kommer ut med:

$$f(x, t) - \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = \rho \cdot A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad \text{Eq.10.6}$$

Deretter tar vi momentet om punktet O og setter det lik null:

$$\Sigma M_O = 0$$

$$M(x, t) + (V(x, t) + dV(x, t)) \cdot dx - (M(x, t) + dM(x, t)) - f(x, t) \cdot \frac{dx^2}{2} = 0 \quad \text{Eq.10.7}$$

Forenkler Eq.10.7:

$$(V(x, t) + dV(x, t)) \cdot dx - dM(x, t) - f(x, t) \cdot \frac{dx^2}{2} = 0 \quad \text{Eq.10.8}$$

Anvender den matematiske relasjonen:

$$\frac{dM(x, t)}{dx} = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad dM(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \cdot dx \quad \text{Eq.10.9}$$

Ved å benytte oss av Eq.10.5 og Eq.10.9 kommer vi frem til:

$$\left(V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dx - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \cdot dx - f(x, t) \cdot \frac{dx^2}{2} = 0 \quad \text{Eq.10.10}$$

Deretter deler vi **Eq.10.10** med dx på begge sider av ligningen

$$\left(V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial \cdot x} \cdot dx \right) - \frac{\partial M(x,t)}{\partial \cdot x} - f(x,t) \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

Eq.10.11

Vi vet at dersom man deriverer moment ligningen får man skjærkraft- ligningen:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial \cdot x^2} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial \cdot x}$$

Eq.10.12

Setter **Eq.10.12** inn i **Eq.10.6** og kommer ut med:

$$f(x,t) \cdot dx - \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial \cdot x^2} \cdot dx = \rho \cdot A(x) \cdot dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \cdot t^2}$$

Eq.10.13

Deler **Eq.10.13** med dx på begge sider av ligningen og gjør om på rekkefølgen:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial \cdot x^2} + \rho \cdot A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \cdot t^2} = f(x,t)$$

Eq.10.14

Ligningen for den elastiske kurve:

$$M(x,t) = E \cdot I(x) \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \cdot x^2}$$

Eq.10.15

Setter **Eq.10.15** inn i **Eq.10.14** og kommer ut med:

$$\frac{\partial^2}{\partial \cdot x^2} \left(E \cdot I(x) \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \cdot x^2} \right) + \rho \cdot A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \cdot t^2} = f(x,t)$$

Eq.10.16

Skriver om til:

$$E \cdot I(x) \cdot \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial \cdot x^4} + \rho \cdot A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial \cdot t^2} = f(x,t)$$

Eq.10.17

Om bjelken/søyler har konstant tverrsnitt og den får vibrere fritt kan vi skrive Eq.10.17 om til:

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4}{\partial \cdot x^4} w(x,t) + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2}{\partial \cdot t^2} w(x,t) = 0 \quad \text{Eq.10.18}$$

Deler Eq.10.18 med $\rho \cdot A$ på begge siden av ligningen:

$$\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \cdot x^4} w(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial \cdot t^2} w(x,t) = 0 \quad \text{Eq.10.19}$$

Substituerer:

$$c^2 = \frac{E \cdot I}{\rho \cdot A} \quad \text{Eq.10.20}$$

Setter Eq.10.20 inn i Eq.10.19 og kommer ut med:

$$c^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial \cdot x^4} w(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial \cdot t^2} w(x,t) = 0 \quad \text{Eq.10.21}$$

Når tiden $t=0$

$$w(x, t = 0) = x_0(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \cdot t}(x, t = 0) = x'_0(x)$$

Benytter metoden "Separasjon av variable" til å løse Eq.10.21:

$$w(x, t) = W(x) \cdot T(t) \quad \text{Eq.10.22}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \cdot x^4} w(x,t) = \frac{d^4 \cdot W(x)}{dx^4} \cdot T(t) \quad \text{Eq.10.23}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) = \frac{d^2 \cdot T(t)}{dt^2} \cdot W(x)$$

Eq.10.24

Setter Eq.10.23 og Eq.10.24 inn i Eq.10.21 og kommer ut med:

$$\frac{c^2}{W(x)} \cdot \frac{d^4 \cdot W(x)}{dx^4} + \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2 \cdot T(t)}{dt^2} = 0$$

Eq.10.25

$$\frac{c^2}{W(x)} \cdot \frac{d^4 \cdot W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2 \cdot T(t)}{dt^2} = \omega^2$$

Eq.10.26

Eq.10.26 kan skrives som to ligninger:

$$\frac{d^4 \cdot W(x)}{dx^4} = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot W(x)$$

Eq.10.27

Og

$$\frac{d^2 \cdot T(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot T(t) = 0$$

Eq.10.28

Starter med å løse Eq.10.27:

Substituerer:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2}{E \cdot I}$$

Eq.10.29

Setter Eq.10.29 inn i Eq.10.27 og kommer ut med:

$$\frac{d^4 \cdot W(x)}{dx^4} - \beta^4 \cdot W(x) = 0$$

$$W(x) = C \cdot e^{s \cdot x}$$

$$\frac{d^4}{dx^4} W(x) = C \cdot s^4 \cdot e^{s \cdot x}$$

$$C \cdot s^4 \cdot e^{s \cdot x} - \beta^4 \cdot C \cdot e^{s \cdot x} = 0$$

$$s^4 - \beta^4 = 0$$

$$s_1 = \beta \quad s_2 = -\beta \quad s_3 = i \cdot \beta \quad s_4 = -i \cdot \beta$$

Vi har nå et uttrykk for $W(x)$

$$W(x) = C_1 \cdot e^{\beta \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\beta \cdot x} + C_3 \cdot e^{i \cdot \beta \cdot x} + C_4 \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot x}$$

Eq.10.30

Benytter de matematiske relasjonene:

$$e^{i \cdot \beta \cdot x} = \cos(\beta \cdot x) + i \cdot \sin(\beta \cdot x) \quad e^{-i \cdot \beta \cdot x} = \cos(\beta \cdot x) - i \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

Eq.10.31

$$e^{\beta \cdot x} = \cosh(\beta \cdot x) + \sinh(\beta \cdot x) \quad e^{-\beta \cdot x} = \cosh(\beta \cdot x) - \sinh(\beta \cdot x)$$

Eq.10.32

Setter Eq.10.31 og Eq.10.32 inn i Eq.10.30 og kommer ut med:

$$C_1 \cdot (\cosh(\beta \cdot x) + \sinh(\beta \cdot x)) + C_2 \cdot (\cosh(\beta \cdot x) - \sinh(\beta \cdot x)) = (C_1 + C_2) \cdot \cosh(\beta \cdot x) + (C_1 - C_2) \cdot \sinh(\beta \cdot x)$$

$$C_3 \cdot (\cos(\beta \cdot x) + i \cdot \sin(\beta \cdot x)) + C_4 \cdot (\cos(\beta \cdot x) - i \cdot \sin(\beta \cdot x)) = (C_3 + C_4) \cdot \cos(\beta \cdot x) + (C_3 - C_4) \cdot i \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

$$W(x) = (C_1 + C_2) \cdot \cosh(\beta \cdot x) + (C_1 - C_2) \cdot \sinh(\beta \cdot x) + (C_3 + C_4) \cdot \cos(\beta \cdot x) + (C_3 - C_4) \cdot i \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

Kommer dermed frem til:

$$W(x) = C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x) + C_3 \cdot \cosh(\beta \cdot x) + C_4 \cdot \sinh(\beta \cdot x)$$

Eq.10.33

NB "Eq.10.33": Her er C_1 , C_2 , C_3 og C_4 ikke de samme konstantene som C_1 , C_2 , C_3 og C_4 i den utledende kalkulasjonen ovenfor!

Løser Eq.10.28:

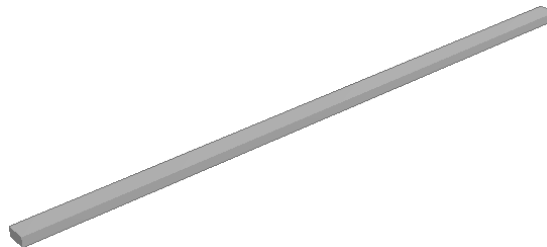
$$\frac{d^2 \cdot T(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot T(t) = 0$$

Dette er en andre ordens homogen differensialligning, denne løses på samme måte som bevegelsesligningen uten demper i kapittel 3 løses.

$$T(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Eq.10.34

10.1 Eksempel: En fritt opplagt bjelke uten last



Figur 10.2 Fritt opplagt bjelke uten last

Starter med randbetingelsene for forskyvning:

$$W(0) = 0 \quad W(L) = 0$$

Bruker Eq.10.33:

$$W(x) = C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x) + C_3 \cdot \cosh(\beta \cdot x) + C_4 \cdot \sinh(\beta \cdot x)$$

$$W(0) = C_1 + C_3$$

$$C_1 + C_3 = 0$$

$$C_3 = -C_1$$

Eq.10.35

Setter Eq.10.35 inn i Eq.10.33 og kommer ut med:

$$W(x) = C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x) - C_1 \cdot \cosh(\beta \cdot x) + C_4 \cdot \sinh(\beta \cdot x)$$

Eq.10.36

$$W(L) = C_1 \cdot \cos(L \cdot \beta) + C_2 \cdot \sin(L \cdot \beta) - C_1 \cdot \cosh(L \cdot \beta) + C_4 \cdot \sinh(L \cdot \beta)$$

$$C_1 \cdot \cos(L \cdot \beta) + C_2 \cdot \sin(L \cdot \beta) - C_1 \cdot \cosh(L \cdot \beta) + C_4 \cdot \sinh(L \cdot \beta) = 0$$

Eq.10.37

Fortsetter med randbetingelsen for momentet:

$$EI \frac{d^2}{dx^2} W(x) = M(x)$$

$$M(0) = 0 \quad M(L) = 0$$

Deriverer Eq.10.36:

$$\frac{d^2}{dx^2} W(x) = C_4 \cdot \beta^2 \cdot \sinh(\beta \cdot x) - C_2 \cdot \beta^2 \cdot \sin(\beta \cdot x) - C_1 \cdot \beta^2 \cdot \cosh(\beta \cdot x) - C_1 \cdot \beta^2 \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

Kommer ut med:

$$W''(x) = C_4 \cdot \beta^2 \cdot \sinh(\beta \cdot x) - C_2 \cdot \beta^2 \cdot \sin(\beta \cdot x) - C_1 \cdot \beta^2 \cdot \cosh(\beta \cdot x) - C_1 \cdot \beta^2 \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

Eq.10.38

$$W''(0) = -2 \cdot C_1 \cdot \beta^2$$

$$-2 \cdot C_1 \cdot \beta^2 = 0$$

$$C_1 = 0$$

Eq.10.39

Setter Eq.10.39 inn i Eq.10.38 og kommer ut med:

$$W''(x) = C_4 \beta^2 \cdot \sinh(\beta \cdot x) - C_2 \beta^2 \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

Eq.10.40

$$W''(L) = C_4 \beta^2 \cdot \sinh(L \cdot \beta) - C_2 \beta^2 \cdot \sin(L \cdot \beta)$$

$$C_4 \beta^2 \cdot \sinh(L \cdot \beta) - C_2 \beta^2 \cdot \sin(L \cdot \beta) = 0$$

Eq.10.41

Setter Eq.10.39 inn i Eq.10.37 og løser ligningen med hensyn på C_2 :

$$C_2 \cdot \sin(L \cdot \beta) + C_4 \cdot \sinh(L \cdot \beta) = 0 \text{ solve } C_4 \rightarrow -\frac{C_2 \cdot \sin(L \cdot \beta)}{\sinh(L \cdot \beta)}$$

$$C_4 = -\frac{C_2 \cdot \sin(L \cdot \beta)}{\sinh(L \cdot \beta)}$$

Eq.10.42

Setter Eq.10.42 inn i Eq.10.41 og kommer ut med:

$$-\frac{C_2 \cdot \sin(L \cdot \beta)}{\sinh(L \cdot \beta)} \cdot \beta^2 \cdot \sinh(L \cdot \beta) - C_2 \beta^2 \cdot \sin(L \cdot \beta) = 0$$

Eq.10.43

Eq.10.43 kan skrives som:

$$-2 \cdot C_2 \cdot \beta^2 \cdot \sin(L \cdot \beta) = 0$$

$$\sin(L \cdot \beta) = \sin(n\pi)$$

$$L \cdot \beta = n\pi$$

$$\beta = \frac{n \cdot \pi}{L}$$

Eq.10.44

Setter Eq.10.44 inn i Eq.10.29 og kommer ut med:

$$\omega = \left(\frac{n \cdot \pi}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A}}$$

Eq.10.45

Referanse:

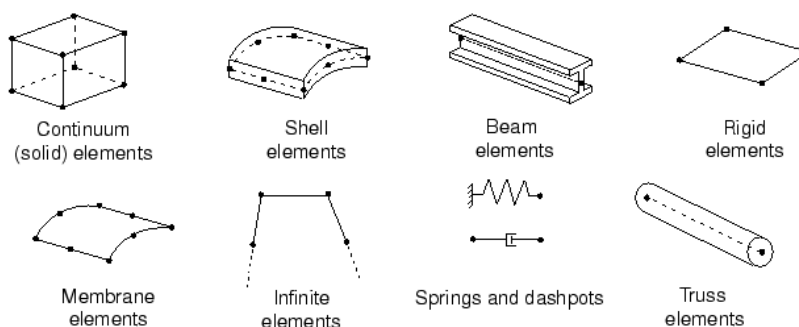
Figurer, tekst og deler av matematikk er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units

NB:Eq.10.35 til Eq.10.45 er utledet av oppgaveskriver og har dermed ingen referanse.

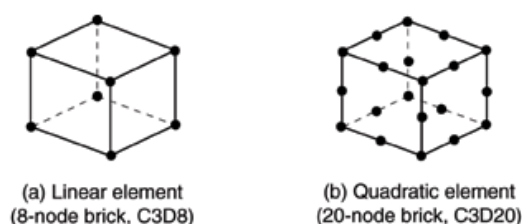
11 Elementmetoden

Elementmetoden er en numerisk metode som blir brukt til å regne ut løsninger til både enkle og avanserte strukturer. Metoden er nøyaktig, men ikke eksakt. Hvor godt vårt resultat vil overensstemme med det eksakte resultatet er bestemt av hvor fin elementinndeling vi bruker. Elementmetoden kan brukes til å finne løsninger til kompliserte strukturer så lenge vi kan angi randbetingelsene. Elementvalget og elementinndelingen blir valgt på grunnlag av hvor nøyaktige resultat vi trenger i vår analyse. Elementene vi har tilgjengelig er:



Figur 11.1 Elementer

I en egenfrekvensanalyse til en stor konstruksjon er fininndelte bjelkeelement og skallelement ofte gode nok. Skal man derimot sjekke egenfrekvensen til turbinbladene i en gassturbin, bør man gå for Solidelementer. Jo flere noder vi har i vår analyse, jo mer nøyaktig svar vil man få. Et bjelkeelement har kun 2 noder, en i hver ende. Et kvadratisk solid element har minst 8 noder, et i hvert hjørne. Dagens mest brukte solidelement har også noder lang kantene.



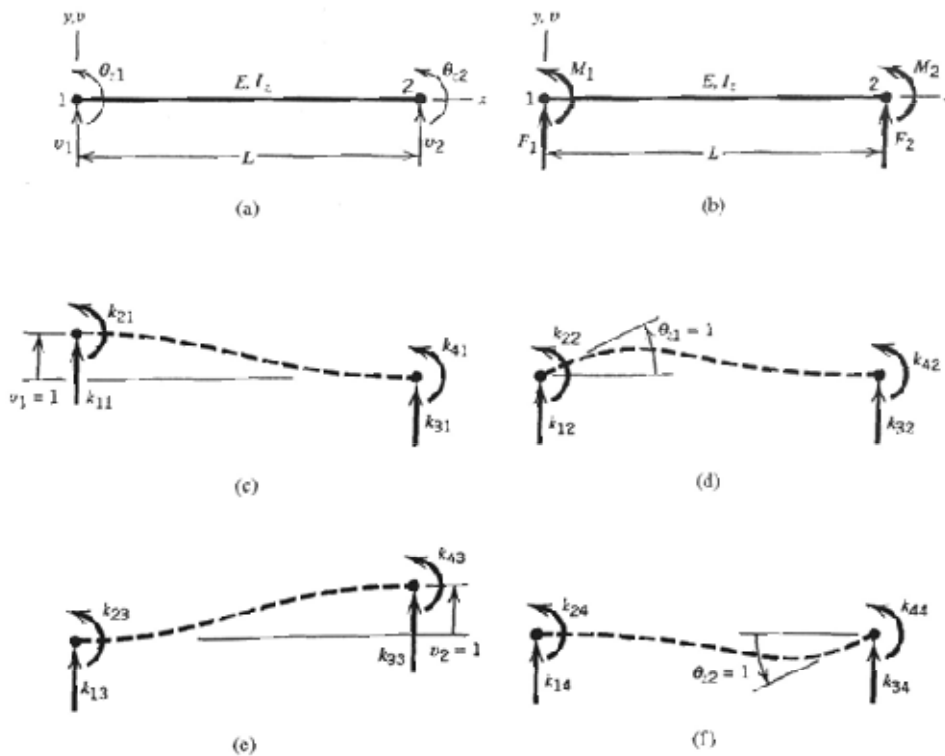
Figur 11.2 Solid elementer

Ettersom elementmetoden er en numerisk analyse er det også en farlig metode dersom man ikke har erfaring med programvaren. Man bør derfor sjekke programvaren opp mot enkle handkalkulasjoner for å kontrollere at man har kontrollen over programvaren.

Videre i dette kapitlet vil vi se på de teoretiske utledningene til bjelkeelementet. Det vil også bli gitt to eksempler av en bjelke. En bjelke med 2 noder, og en bjelke med 3 noder. Dette eksemplet gir en indikasjon på hvor viktig fininndelingen til en bjelke er.

11.1 Bjelkeelement analyse

Under denne analysen legger vi elementær (Euler-Bernoulli) bjelketeori som grunnlag. Det medbringer at vi ignorerer virkningen av skjærdeformasjon. Analysen er en 2D analyse der nodene kun kan bevege seg i y-retning og rotere om z-aksen etter Figur 11.3.



Figur 11.3 Formfunksjoner

Vi har 4 ukjente formfunksjoner. Vi kan anvende numerisk matematikk til å finne disse funksjonene.

Definerer forskyvningsfunksjonen $u(x)$:

$$u(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Eq.11.1

Deriverer forskyvningsfunksjonen for å finne rotasjonsfunksjonen:

$$\frac{d}{dx}u(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

Vi kommer frem til rotasjonsfunksjonen:

$$\theta(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

Eq.11.2

For et bjelkeelement i planet som kun er belastet i y-retning og/eller utsatt for moment i z-retning har vi 2 forskyvningspunkter og 2 rotasjonspunkter. Vi setter dette opp på matriseform:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 3x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 3x^2 & 2x & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Eq.11.3

Setter opp randbetingelse på matriseform:

$$\begin{pmatrix} u(x=0) \\ \theta(x=0) \\ u(x=L) \\ \theta(x=L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Eq.11.4

Vi kan finne konstantene a, b, c og d ved å løse matrisen med hensyn på disse konstantene:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Eq.11.5

Finner den første form funksjonen $N_1(x)$, se (c)Figur 11.3

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$N_1(x) = \frac{2 \cdot x^3}{L^3} - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + 1$$

Eq.11.6

Finner den andre form funksjonen $N_2(x)$, se (d) Figur 11.3

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N_2(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$N_2(x) = x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Eq.11.7

Finner den tredje form funksjonen $N_3(x)$, se (e) Figur 11.3

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N_3(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$N_3(x) = \frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}$$

Eq.11.8

Finner den fjerde form funksjonen $N_4(x)$, se (f) Figur 11.3

$$N_4(x)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$N_4(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

Eq.11.9

Vi kan representere deformasjon som:

$$v(x) = N \cdot u$$

Eq.11.10

Hvor N er:

$$N = \begin{pmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{pmatrix}$$

Eq.11.11

Og u er:

$$u = \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Eq.11.12

Setter Eq.11.11 og Eq.11.12 inn i Eq.11.10 og kommer ut med:

$$v(x) = \begin{pmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Eq.11.13

Tøyning-forskyvnings matrisen B er gitt som den dobbelt deriverte av N:

$$N = \left(\frac{2 \cdot x^3}{L^3} - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + 1 \quad x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \quad \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} N = \left(\frac{12 \cdot x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6 \cdot x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12 \cdot x}{L^3} \quad \frac{6 \cdot x}{L^2} - \frac{2}{L} \right)$$

$$B = \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right)$$

Eq.11.14

11.1.1 Stivhet matrise

Stivhetsmatrisen til et bjelkeelement er gitt som:

$$k = \int_0^L B^T \cdot EI \cdot B \, dx$$

Eq.11.15

Skulle elastisitetmodulen og tverrsnittet være konstant, så blir EI konstant. Vi kan dermed skrive

Eq.11.15 som:

$$k = EI \cdot \int_0^L B^T \cdot B \, dx$$

Eq.11.16

Setter Eq.11.14 inn i Eq.11.15:

$$k = EI \cdot \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) dx$$

Når vi integrerer fra 0 til L får vi:

$$k = EI \int_0^L B^T \cdot B \, dx = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix}$$

Dette kan vi skrive som:

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6\cdot L & -12 & 6\cdot L \\ 6\cdot L & 4\cdot L^2 & -6\cdot L & 2\cdot L^2 \\ -12 & -6\cdot L & 12 & -6\cdot L \\ 6\cdot L & 2\cdot L^2 & -6\cdot L & 4\cdot L^2 \end{pmatrix}$$

Eq.11.17

11.1.2 Masse matrise

Fra kinetisk energi kan vi utlede:

(Her er v forskyvning og ikke hastighet)

$$K = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{v})^2$$

Eq.11.18

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \dot{v}^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \dot{v}^T \cdot \dot{v} dV$$

Eq.11.19

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \dot{v}^T \cdot \dot{v} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot (\mathbf{N} \cdot \dot{v})^T \cdot (\mathbf{N} \cdot \dot{v}) dV = \frac{1}{2} \dot{v}^T \int_V \rho \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} dV \cdot \dot{v}$$

$$m = \int_V \rho \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} dV = \int_0^L \rho \cdot A \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} dx$$

Eq.11.20

Hvis et bjelkeelement har konstant tverrsnitt og konstant densitet så vil den totale massen til bjelkeelementet være:

$$m = \rho \cdot A \cdot L$$

Fra Eq.11.20 er massematrisen til et bjelkeelement gitt som:

$$m = \int_0^L \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \rho \cdot A dx$$

Dette kan vi skrive om til:

Der m_e er massen til bjelkeelementet

$$m = \int_0^L N^T \cdot N \cdot \frac{m_e}{L} dx$$

Eq.11.21

Massen og lengden til bjelkeelementet er konstant, dermed kan vi skrive Eq.11.21 som:

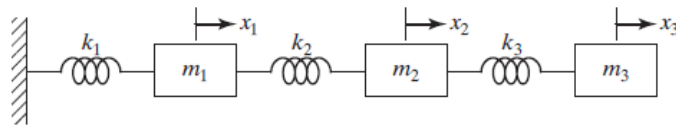
$$m = \frac{m_e}{L} \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{pmatrix} dx$$

Når vi integrerer fra 0 til L får vi:

$$m = \frac{m}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Eq.11.22

11.2 Egenfrekvenser



Figur 11.4 Fjær-masse system

Vi skriver bevegelsesligningen fra Eq.3.3 som vektor og matriseform:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{0}$$

Eq.11.23

Dette er et udempet system som svinger fritt. Vi gjetter at systemet har løsning:

$$x_i = X_i T(t)$$

Eq.11.24

X_i er en konstant amplitude, og T er en tidsfunksjon \vec{X} er vektoren som representerer svingeform:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Eq.11.25

Setter Eq.11.24 inn i Eq.11.23

$$[m]X_i \ddot{T}(t) + [k]X_i T(t) = \vec{0}$$

Eq.11.26

Eq.11.26 kan skrives på skalar form med n separable funksjoner

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} X_j) \cdot T''(t) + \sum_{j=1}^n (k_{ij} X_j) \cdot T(t) = 0$$

Eq.11.27

Som kan skrives som relasjonen:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{\sum_{j=1}^n (k_{ij} \cdot X_j)}{\sum_{j=1}^n (m_{ij} \cdot X_j)}$$

Eq.11.28

Venstre side av ligningen er uavhengig av indeksen i , men høyre side er uavhengig av tiden. Dermed må begge siden være lik en konstant. Vi antar at denne konstanten er ω^2

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 \cdot m_{ij}) \cdot X_j = 0$$

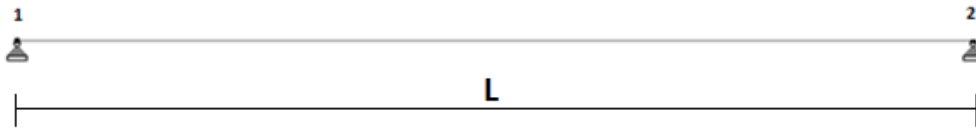
Eq.11.29

Som også kan skrives som:

$$(k - \omega^2 \cdot m)X = 0$$

Eq.11.30

11.3 Eksempel: En fritt opplagt bjelke uten last med 2 noder



Figur 11.5 Fritt opplagt bjelke med 2 noder

Fra Eq.11.30 vet vi at:

$$(k - \omega^2 \cdot m) \cdot u = 0$$

Der k, m og u er på matriseform

For en fritt opplagt bjelke er $v_1=0$ og $v_2=0$

Fra Eq.11.17 vil stivhetsmatrisen bli til:

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.11.31}$$

Fra Eq.11.22 vil massematrisen bli til:

$$m = \frac{m_e}{420} \begin{pmatrix} 4L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 4L^2 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.11.32}$$

Dette gir:

$$\left[\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{pmatrix} - \omega^2 \cdot \left[\frac{m_e}{420} \begin{pmatrix} 4L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 4L^2 \end{pmatrix} \right] \right] \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.11.33}$$

Definerer

$$\lambda = \omega^2 \quad \text{Eq.11.34}$$

Deretter tar vi ut determinanten fra Eq.11.33 og setter den lik 0.

$$\left| \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 4 \cdot L^2 & 2 \cdot L^2 \\ 2 \cdot L^2 & 4 \cdot L^2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \frac{m_e}{420} \begin{pmatrix} 4 \cdot L^2 & -3 \cdot L^2 \\ -3 \cdot L^2 & 4 \cdot L^2 \end{pmatrix} \right| = \frac{302400EI^2 - 2640EI \cdot L^3 \cdot \lambda \cdot m_e + L^6 \cdot \lambda^2 \cdot m_e^2}{25200L^2}$$

Løser ligningen med hensyn på λ :

$$\frac{302400EI^2 - 2640EI \cdot L^3 \cdot \lambda \cdot m_e + L^6 \cdot \lambda^2 \cdot m_e^2}{25200L^2} = 0$$

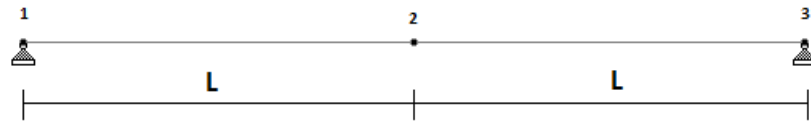
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{120.0EI}{L^3 \cdot m_e} \\ \frac{2520.0EI}{L^3 \cdot m_e} \end{pmatrix}$$

Fra Eq.11.34

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{120.0EI}{L^3 \cdot m_e}} \quad \text{Eq.11.35}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2520.0EI}{L^3 \cdot m_e}} \quad \text{Eq.11.36}$$

11.4 Eksempel: En fritt opplagt bjelke uten last med 3 noder



Figur 11.6 Fritt opplagt bjelke med 3 noder

Fra Eq.11.30 vet vi at:

$$(k - \omega^2 \cdot m) \cdot u = 0$$

Der k, m og u er på matriseform

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Eq.11.37

$$m = \frac{m_e}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L & 0 & 0 \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13L & 312 & 0 & 54 & -13L \\ -13L & -3L^2 & 0 & 8L^2 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13L & 156 & -22L \\ 0 & 0 & -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Eq.11.38

For en fritt opplagt bjelke er $v_1=0$ og $v_3=0$

Fra Eq.11.17 vil stivhetsmatrisen bli til:

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 24 & 0 & 6L \\ 2L^2 & 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Eq.11.39

Fra Eq.11.22 vil massematrisen bli til:

$$m = \frac{m_e}{420} \begin{pmatrix} 4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 \\ 13L & 312 & 0 & -13L \\ -3L^2 & 0 & 8L^2 & -3L^2 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Eq.11.40

Dette gir oss:

$$\left[\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 24 & 0 & 6L \\ 2L^2 & 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \frac{m_e}{420} \begin{pmatrix} 4L^2 & 13L & -3L^2 & 0 \\ 13L & 312 & 0 & -13L \\ -3L^2 & 0 & 8L^2 & -3L^2 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 4L^2 \end{pmatrix} \right]$$

=

$$\frac{18289152000EI^4 - 3164313600EI^3 \cdot L^3 \cdot \lambda \cdot m_e + 30222720EI^2 \cdot L^6 \cdot \lambda^2 \cdot m_e^2 - 44256EI \cdot L^9 \cdot \lambda^3 \cdot m_e^3 + 13 \cdot L^{12} \cdot \lambda^4 \cdot m_e^4}{31752000L^6}$$

Vi setter determinanten lik 0:

$$\frac{18289152000EI^4 - 3164313600EI^3 \cdot L^3 \cdot \lambda \cdot m_e + 30222720EI^2 \cdot L^6 \cdot \lambda^2 \cdot m_e^2 - 44256EI \cdot L^9 \cdot \lambda^3 \cdot m_e^3 + 13 \cdot L^{12} \cdot \lambda^4 \cdot m_e^4}{31752000L^6} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{120EI}{L^3 \cdot m_e} \\ \frac{2520EI}{L^3 \cdot m_e} \\ \frac{4968EI \cdot L^3 \cdot m_e + 48\sqrt{10371}EI \cdot L^3 \cdot m_e}{13 \cdot L^6 \cdot m_e^2} \\ \frac{4968EI \cdot L^3 \cdot m_e - 48\sqrt{10371}EI \cdot L^3 \cdot m_e}{13 \cdot L^6 \cdot m_e^2} \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{120EI}{L^3 \cdot m_e}}$$

Eq.11.41

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2520EI}{L^3 \cdot m_e}}$$

Eq.11.42

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{4968EI \cdot L^3 \cdot m_e + 48\sqrt{10371}EI \cdot L^3 \cdot m_e}{13 \cdot L^6 \cdot m_e^2}}$$

Eq.11.43

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{4968EI \cdot L^3 \cdot m_e - 48\sqrt{10371}EI \cdot L^3 \cdot m_e}{13 \cdot L^6 \cdot m_e^2}}$$

Eq.11.44

11.5 Rayleigh-dempning (proporsjonal dempning)

Ettersom dempningsforholdet ikke er det samme for lavere svingemoder som for høyere svingemoder er proporsjonal dempning nyttig. Vi trenger dempningsforholdet til to svingemoder for å bruke denne metoden.

Dersom vi har en fordelt dempningskraft c proporsjonalt med hastigheten til hvert massepunkt m , kan vi skrive en ligning der dempning er proporsjonalt med masse:

(c , m og k er her på matriseform)

$$c = \alpha \cdot m$$

Eq.11.45

Vi antar at dempning c er proporsjonal med tøyningshastigheten i hvert punkt og dermed proporsjonal med stivheten k :

$$c = \beta \cdot k$$

Eq.11.46

Koblingen mellom disse effektene kan skrives som:

$$c = \alpha \cdot m + \beta \cdot k$$

Eq.11.47

Eq.11.47 har løsning:

$$\xi = \frac{c_i}{2 \cdot m_i \cdot \omega_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \cdot \omega_i \right)$$

Eq.11.48

α demper ut de lavere svingeformene, mens β demper ut de høyere svingeformene. Vi kan finne α og β dersom vi kjenner dempningsforholdet til 2 egenfrekvenser.

$$\alpha = \frac{2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot (\xi_1 \cdot \omega_2 - \xi_2 \cdot \omega_1)$$

Eq.11.49

$$\beta = \frac{2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\xi_2 \cdot \omega_2 - \xi_1 \cdot \omega_1)$$

Eq.11.50

Referanse:

Figurer, tekst og deler av matematikk er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units

[3] Dynamisk Analyse Av Konstruksjoner

[4] Abaqus 6.11 Documentation

[8] Concepts and Applications of Finite Element Analysis

[9] Elements for Turbine Engine Blade Frequency Analysis

NB:Eq.11.1 til Eq.11.9 er utledet av oppgaveskriver og har dermed ingen referanse.

12 Sammenligning av egenfrekvensmetoder

Til nå har vi sett på tre forskjellige metoder å finne egenfrekvesen til en struktur på. Vi har studert SDOF metode, eksakt metode og elementmetode. I dette kapitlet setter vi de forskjellige metodene opp mot hverandre og sammenligner resultatene.

En B21-bjelkeelement og C3D20R-solidelement Abaqus modell har også blitt laget for sammenligning. Begge modellene har en meget fin elementinndeling.

Vi bruker den samme bjelken som ble brukt i det numeriske eksempelet i kapittel 9, men denne gangen ser vi kun på massen til bjelken.

Se regnearket ”12 Sammenligning av egenfrekvenser” i APPENDIKS A

Abaqus input filen til ”B21-bjelkeelement” kan bli funnet i APPENDIKS B

Abaqus input filen til ”C3D20R-solidelement” er stor og kan bli funnet med vedlagt CD.

12.1 SDOF metode

Fra kapittel 3 har vi [Eq.3.4](#):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

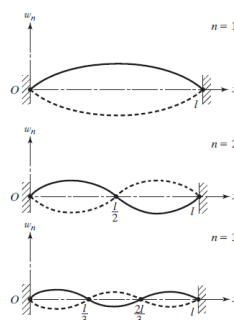
Denne formelen gir oss egenfrekvensen til den første svingeformen

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k}{m_{eq}}} = 277.635 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

[Eq.12.1](#)

12.2 Eksakt metode

Fra eksakt metode vil vi finne de 4 første svingeformene



Figur 12.1 En fritt opplagt bjelkes 3 første svingeformer

Fra Eq.10.45 har vi:

$$\omega = \left(\frac{n \cdot \pi}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A}}$$

Som gir oss:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} := \left(\frac{n \cdot \pi}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}} = \begin{pmatrix} 275.641 \\ 1102.565 \\ 2480.771 \\ 4410.26 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Eq.12.2

12.3 Elementmetode med 2 noder

Ettersom vi har 2 noder har vi muligheten til å finne egenfrekvesen til de 2 første svingeformene

Fra Eq.11.35 og Eq.11.36 får vi:

$$m_e = m_{\text{bjelke}}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{120.0E \cdot I}{L^3 \cdot m_e}} \\ \sqrt{\frac{2520.0E \cdot I}{L^3 \cdot m_e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 305.939 \\ 1401.989 \end{pmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Eq.12.3

12.4 Elementmetode med 3 noder

Ettersom vi har 3 noder har vi muligheten til å finne egenfrekvesen til de 4 første svingeformene.

Her har vi delt bjelken inn i 2 bjelkeelementer. Vi må dermed definere lengde og masse for hvert bjelkeelement. Bjelkeelementene har lik lengde og lik masse, vi definerer følgende:

$$L = 407\text{mm} \quad m_e = \frac{1}{2} m_{\text{bjelke}}$$

Fra Eq.11.41 til Eq.11.44 får vi:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{c} \sqrt{\frac{4968E \cdot I \cdot L^3 \cdot m_e - 48\sqrt{10371}E \cdot I \cdot L^3 \cdot m_e}{13L^6 \cdot m_e^2}} \\ \sqrt{\frac{120E \cdot I}{L^3 \cdot m_e}} \\ \sqrt{\frac{4968E \cdot I \cdot L^3 \cdot m_e + 48\sqrt{10371}E \cdot I \cdot L^3 \cdot m_e}{13L^6 \cdot m_e^2}} \\ \sqrt{\frac{2520E \cdot I}{L^3 \cdot m_e}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 276.729 \\ 1223.757 \\ 3076.013 \\ 5607.958 \end{pmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Eq.12.3

12.5 Konklusjon

”SDOF metode” gir gode resultater for den første svingeformen.

Eksakt metode gir som navnet skulle tilsi gode resultater. Analysen har en svakhet ved at den ikke tar hensyn til skjær deformasjon. Hvis seksjon dimensjonene er små i forhold til lengden, har effekten av skjær deformasjon liten betydning.

”Elementmetode 2 noder” gir oss et svakt resultat den første egenfrekvensen. Resultatet for den andre svingeformen er ikke brukende.

”Elementmetode 3 noder” gir gode resultater for de to første egenfrekvensene, men klarer ikke å følge med på nummer tre og fire.

Jo flere noder vi legger inn i vår elementmetode modell, jo nærmere vil vi komme svarene fra eksakt metode. Å legge inn mange noder er et meget tidskrevende arbeid, derfor blir elementmetode programvare brukt til dette arbeidet.

Abaqus sitt B21-bjelkeelement og C3D20R-solidelement tar hensyn til skjær deformasjon. Selv om vi har en fin elementinndeling ligger det likevel en liten usikkerhet rundt denne analysen på grunn av at den er nummerisk.

Skjær deformasjonen har i seg selv lite å si for de første svingeformene, men er av stor betydning for de høyere svingeformene. Skulle de høyere svingeformene ha behov for dempere, er det viktig å få disse analysene så nøyaktige som mulig. Ettersom vårt tverrsnitt har liten høyde i forhold til lengde kan skjær deformasjon neglisjeres.

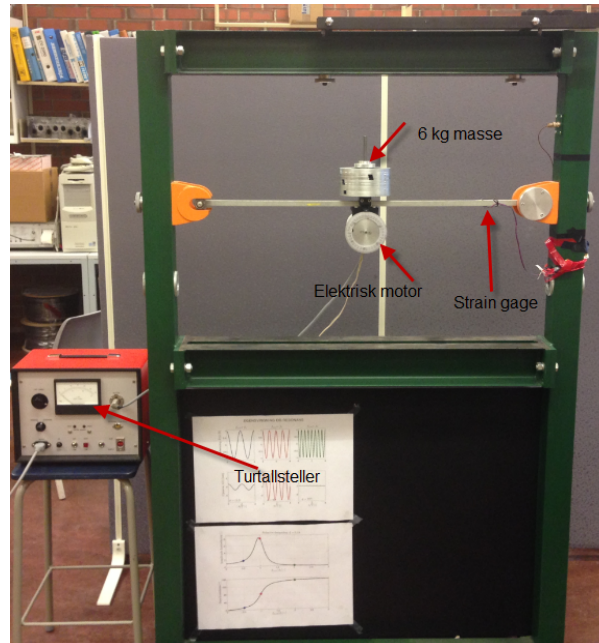
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
SDOF	277,64	-	-	-
Eksakt metode	275,64	1102,57	2480,77	4410,26
Elementmetode 2 noder	305,94	1401,99	-	-
Elementmetode 3 noder	276,73	1123,76	3076,01	5607,96
B21-bjelkeelement	275,54	1101,1	2472,7	4386,5
C3D20R-solidelement	282,16	1125,2	2517,7	4432,6

Tabell 12.1 Egenfrekvens resultater

13 Tvungne svingninger eksperiment

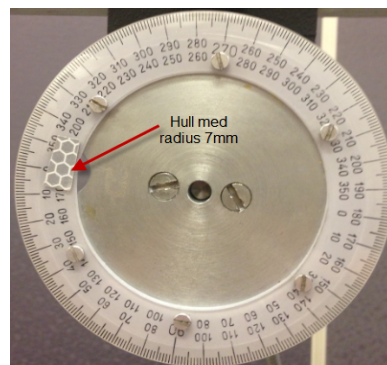
13.1 Innledning

Dette kapitlet inneholder et eksperiment der en fritt opplagt bjelke blir utsatt for tvungne svingninger. Eksperimentet er viktig for å sette teorien og Abaqus på prøve. Handkalkulasjoner vil bli satt opp mot de målte verdiene fra eksperimentet.



Bilde 13.1 Utstyr til eksperimentet

Bilde 13.1 viser utstyr levert av TecQuipment. Det er en fritt opplagt bjelke som har en 6 kg masse og en elektrisk motor plassert på midten av bjelken. Den elektriske motoren har en disk festet til seg. Disken har et hull som gjør at den roterer med eksentrisk masse.



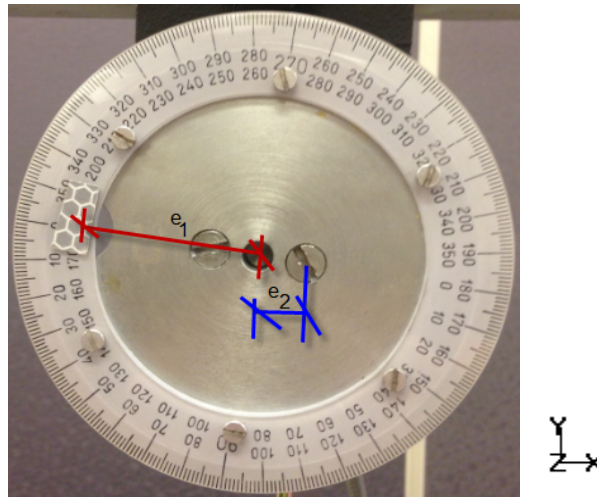
Bilde 13.2 Disk med hull

Når disken roterer med den samme frekvens som den naturlige frekvensen til bjelken vil resonans dannes. Forskyvningen på midten av bjelken har blitt logget med "strain-gages".

13.2 Måleusikkerhet

Nøyaktighet er viktig under eksperimentet. Usikkerheten har blitt eliminert på beste mulige måte ved å demontere utstyr for å veie og måle det. Den analoge turtallstilleren har blitt testet opp mot en digital lasermåler. Det gjennomsnittelige forholdet mellom den analoge og den digitale måleren ble funnet til å være 98.5 %.

13.3 Den eksentriske disken



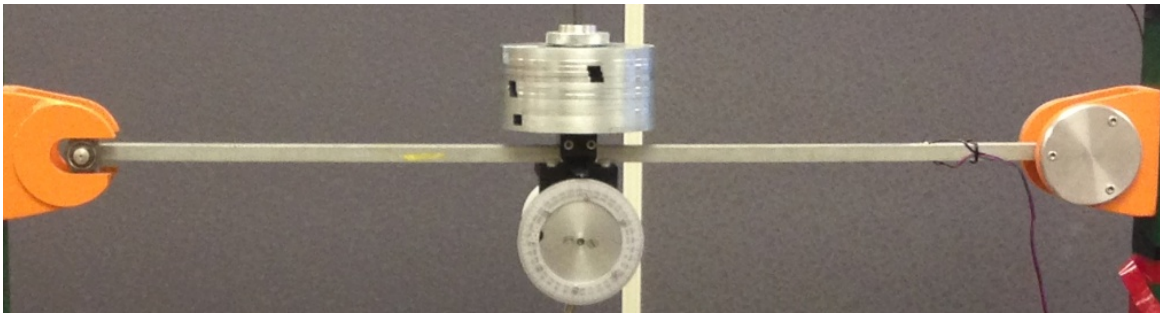
Bilde 13.3 Diskens tyngdepunkt

Når disken spinner vil den eksentriske massen bli utsatt for sentripetalakselerasjon. Kraft er avhengig av rotasjonsfrekvens disken spinner med.

$$F_0(\omega) = m_{\text{disk}} \cdot e_2 \cdot \omega^2$$

Eq.13.1

13.4 Film fra eksperimentet



Bilde 13.4 Bjelke med 6 kg masse

Eksperimenter har blitt filmet og opplastet på YouTube. Trykk på linken under for å se eksperimentet:

<http://youtu.be/DSDYGfIbc3o>

NB: På grunn av at svingeperioden her er veldig høy (se Eq.3.17) så klarer ikke kamera å fange de raske bevegelsene og det kan se ut som beating. Vi treffer **ikke** beating frekvens men resonansfrekvens. (Observatør under eksperimentet ser resonans frekvens)

13.4.1 Kalkulerte resultater

Fra regnearket "13.4.1 Kalkulerte resultater" i appendiks A får vi følgende resultater:

Den naturlige frekvensen fra Eq.3.10 gir:

$$f_n = 8.591 \cdot \frac{100}{\text{min}}$$

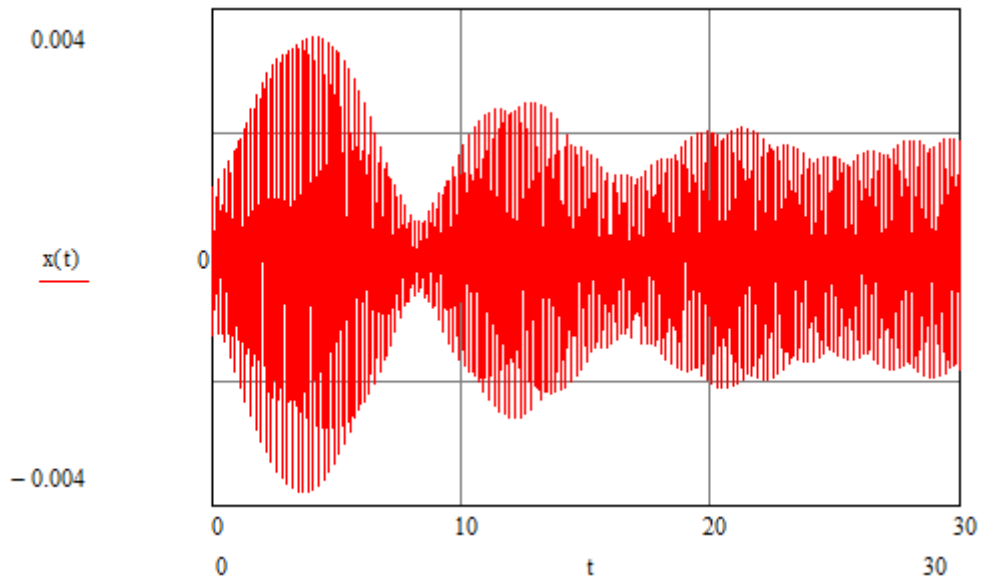
Den maksimale forskyvningen ved resonans fra Eq.7.13 der $r=1$ gir:

$$\frac{\delta_{st}}{2\xi} = 12.296 \text{ mm}$$

Den maksimale forskyvningen ved resonans fra Eq.7.13 der $r=0.992$ gir:

$$\frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} = 1.809 \text{ mm}$$

Dersom vi plotter grafene fra Eq.7.20 får vi følgende grafer:

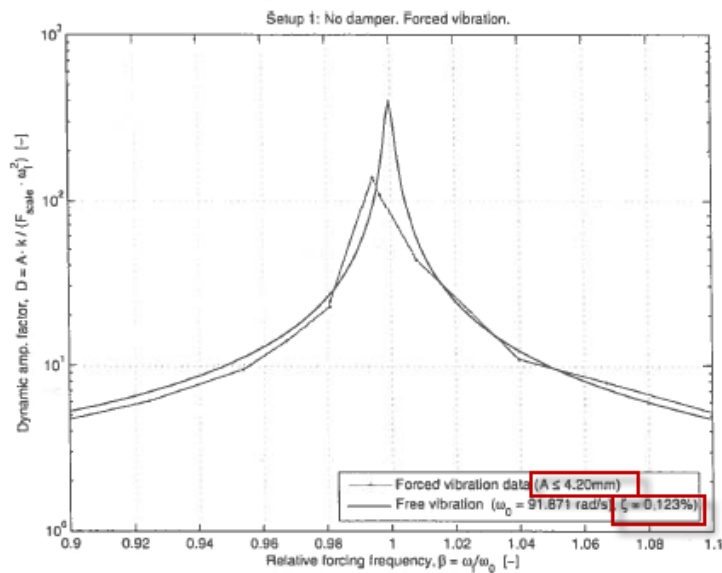


Graf 13.1 Graf fra Eq.7.20

Der den maksimale forskyvningen fra Graf 13.1 ble funnet til å være 3.8mm

13.4.2 Resultater fra logg

Grafen under er loggen fra eksperimentet:



Graf 13.2 Graf fra eksperimentet

Den maksimale forskyvningen ble logget til 4.2mm

Dempningsforholdet ble funnet til å være $\zeta=0.123\%$

13.4.3 Konklusjon

Vi treffer resonansfrekvensen til den første svingeformen med en veldig god nøyaktighet når vi bruker SDOF metode.

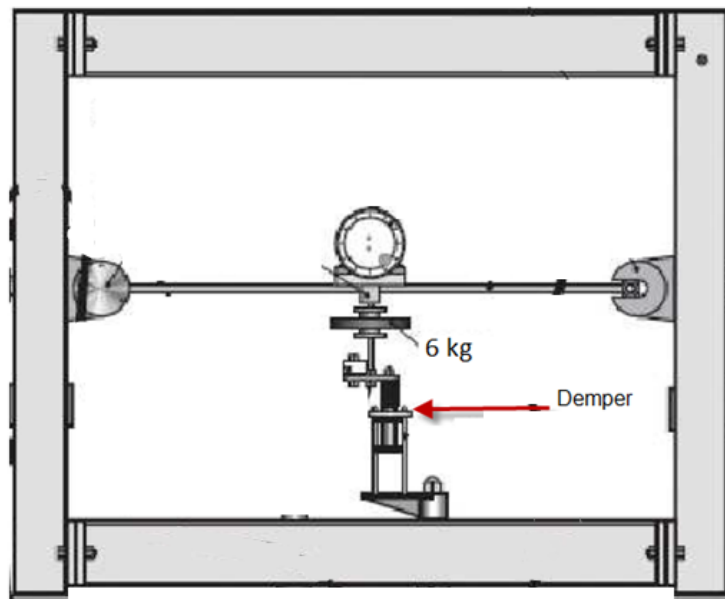
Forskyvningene ble kalkulert til å være:

	Eq.7.13 (r=1)	Eq.7.13 (r=0.992)	Eq.7.20	Eksperiment
Maks forskyvning	12.296mm	1,809mm	3.8mm	4.2mm

Tabell 13.1 Resultater

Resultatet fra Eq.7.13 (r=1) var ikke mulig å oppnå. Det målte resultatet er ca 1/3 av dette. Ettersom vi har en liten usikkerhet i variabelen "r" som gir veldig stort utslag på er det vanskelig å kalkulere nøyaktig den maksimale forskyvningen. Dempningsforholdet ξ er også veldig lavt, noe som gjør denne analysen vanskelig.

13.5 Bjelke med ekstern demper



Figur 13.1 Bjelke med 6 kg masse og ekstern demper

13.5.1 Kalkulerte resultater

Fra regnearket "13.5.1 Kalkulerte resultater" i appendiks A får vi følgende resultater:

Den naturlige frekvensen fra Eq.3.10 gir:

$$f_n = 8.591 \frac{100}{\text{min}}$$

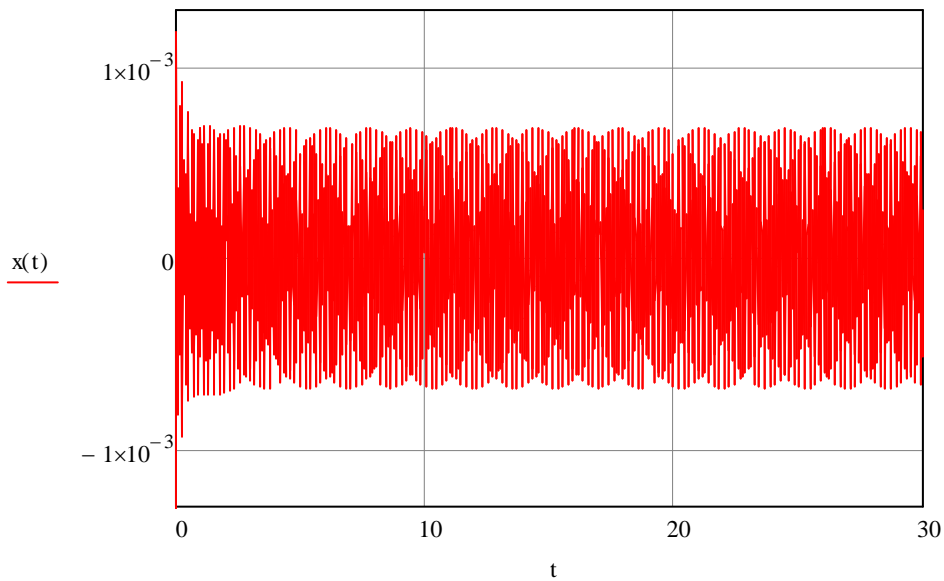
Den maksimale forskyvningen ved resonans fra Eq.7.13 der $r=1$ gir:

$$\frac{\delta_{st}}{2\xi} = 0.726 \text{ mm}$$

Den maksimale forskyvningen ved resonans fra Eq.7.13 der $r=1.005$ gir:

$$\frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}} = 0.68 \text{ mm}$$

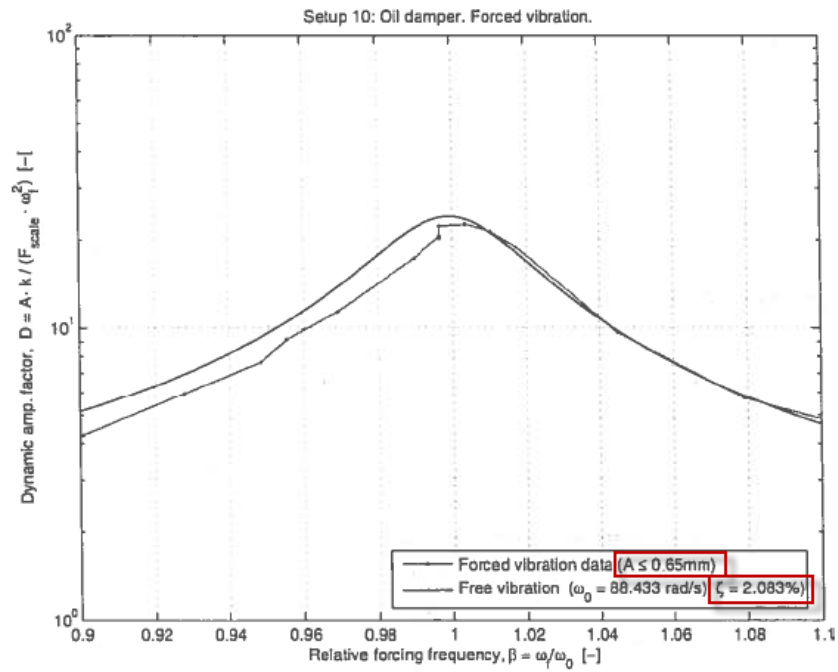
Dersom i plotter grafene fra Eq.7.20 får vi følgende grafer:



Graf 13.3 Graf fra Eq.7.20

Den maksimale forskyvningen fra Graf 13.3 ble funnet til å være 1.3mm.(Dette er den statiske forskyvningen bjelken har før vi treffer resonans frekvensen)

Grafen under er loggen fra eksperimentet:



Graf 13.4 Graf fra eksperimentet

Den maksimale forskyvningen ble logget til 0.65mm

Dempningsforholdet ble funnet til å være $\zeta=2.083\%$

13.5.2 Konklusjon

Vi treffer resonansfrekvensen til den første svingeformen med en veldig god nøyaktighet når vi bruker SDOF metode.

Forskyvningene ble kalkulert til å være:

	Eq.7.13 ($r=1$)	Eq.7.13 ($r=0.992$)	Eq.7.20	Eksperiment
Maks forskyvning	0.726mm	0.68mm	1.3mm	0.65mm

Tabell 13.2 Resultater

Ettersom vi øker dempningsforholdet drastisk med en ekstern demper blir det lettere å kalkulere den maksime forskyvningen. Avvikene fra Eq.7.13 er ikke lenger så store. Eq.7.20 tar hensyn til randbetingelsen x_0 som gjør at den maksimale forskyvningen blir den statiske forskyvningen.

Referanse:

Graf 13.2 og Graf 13.4 er hentet fra:

[7] Transversal vibration of beam with damping

14 Simulering i Abaqus

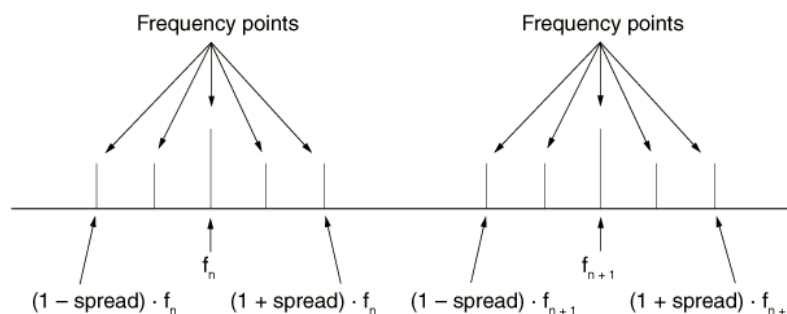
Abaqus er et av verdens største og mest brukte FEM(Finite Element Method) programvare. Man har utallige muligheter i Abaqus, og ofte er det kun brukerens kunnskap som skaper begrensningene. Det kan være veldig nyttig å prøvekjøre programmet med en modell vi allerede har mye informasjon om. Dette kapitlet vil ta for seg en kort introduksjon hvordan programmet virker og simulering av eksperimentene i kapitel 13 med og uten ekstern demper.

14.1 Steady state dynamics

Steady state dynamics er et step i Abaqus som gir oss den dynamiske responsen av et system.

Metoden gir responsen til systemet under en frekvens. Vi legger inn amplituden til den harmoniske kraften og metoden gir oss forskyvningen fra kraften etter hvor nære vi er egenfrekvensene til systemet. Metoden regner ut både realdelen og den imaginære delen. Realdelen gir komponenten av responsen som er i fase med eksitasjonen, mens den imaginære delen gir komponenten som er $\pi/2$ ut av fase. Ved å angi magnitute som resultat tar Abaqus hensyn til begge komponentene.

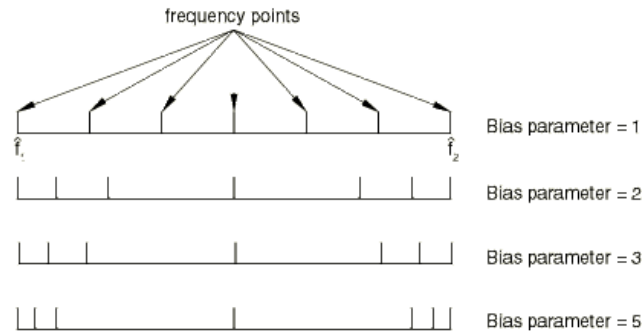
Vi velger selv hvilke område vi vil at Abaqus skal kjøre frekvens "sweep" over. For å oppnå høy nøyaktighet gjelder det å velge et tilstrekkelig antall av "number of points"



Figur 14.1 Number of points

Fra Figur 14.1 er f_n den naturlige frekvensen. Rundt egenfrekvensen gjelder det å ha mest mulig "Frequency points" for å få en runde og fine grafer. Ved å velge et høyt antall "Number of points" vil forskyvningen som hører til resonansfrekvensen gå mot en bestemt verdi. Ved å velge et for lavt antall "Number of points" kan resultatet bli veldig galt.

Abaqus har en funksjon som heter "Use eigenfrequencies to subdivide each frequency range". Ved å velge denne funksjonen vil "Frequency points" legge seg rundt egenfrekvensene til systemet. Vi kan da redusere antall "Number of points" som vil redusere kalkulasjonstiden betydelig. For bruk av denne funksjonen må Abaqus først finne egenfrekvensene.



Figur 14.2 Bias

Når vi har angitt et frekvens intervall er bias parameteren (se Figur 14.2) nyttig for hvordan vi vil spre "Number of points" i vår analyse. Ved å velge bias parameter >1 vil "Frequency points" spre seg langs endene av intervallet. Velger vi bias parameter <1 vil "Frequency points" bli spredt ved senter av intervallet.

14.1.1 Steady state dynamics - Modal

Steady state dynamics – modal brukes til å regne ut den dynamiske responsen til et system som er utsatt for en harmonisk last. Metoden beregner responsen basert på egenfrekvensene og krever dermed at egenfrekvensene blir funnet før analysen kan kjøre. Metoden er mindre nøyaktig enn direct men bruker også mindre regnetid. Vi bestemmer selv hvilke frekvenser man vil at Abaqus skal kjøre en lineær frekvens "sweep" over. Dempningen blir definert som global dempning. Forskjellige dempningsforhold for forskjellige frekvensområder kan oppgis. Metoden tar ikke hensyn til dashpot elementer. Det er dermed ikke mulig å kjøre denne analyse med eksterne dempere.

14.1.2 Steady state dynamics - Direct

Steady state dynamics – direct brukes også til å finne den dynamiske responsen til et system som er utsatt for harmonisk last. Metoden kalkulerer responsen direkte i form av de fysiske frihetsgradene til modellen. Metoden krever altså ikke at vi finner egenfrekvensene først. Vi kan velge om man vil dele inn frekvensområde som er av interesse på en logaritmisk eller lineær skala. Materialdempning blir definert som Rayleigh dempning. Vi har muligheten til å legge inn dashpot elementer, og dermed også muligheten til å kjøre en analyse med eksterne dempere.

14.2 Bjelken med 6kg masse

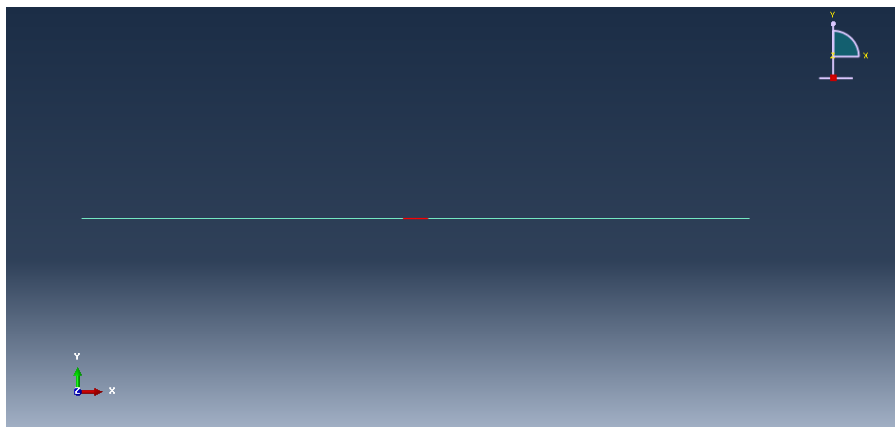
Se regnearket "14 Simulering i Abaqus" i Appendiks A

Abaqus input filen til "Bjelken med 6kg masse - Wire" kan bli funnet i Appendiks B

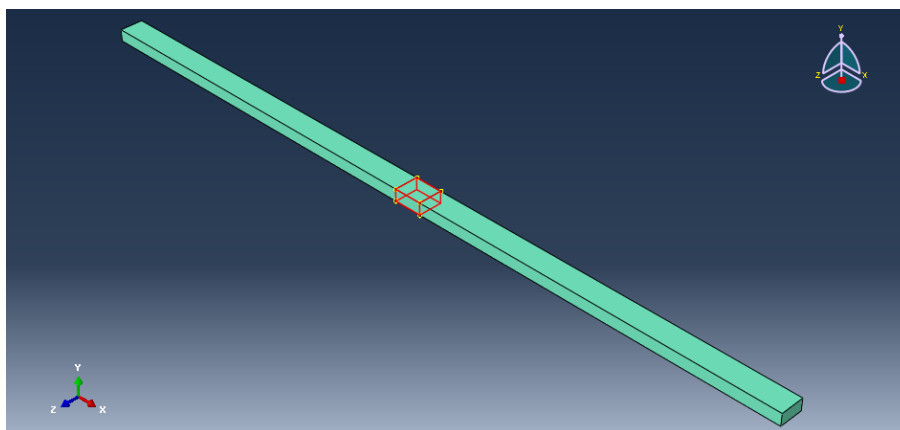
Abaqus input filen til "Bjelken med 6kg masse - Solid" er stor og kan bli funnet med vedlagt CD.

14.2.1 Antagelser for modellering

Massen av motoren/stål-platene har blitt lagt inn som ekstra densitet i det området på bjelken massen virker.

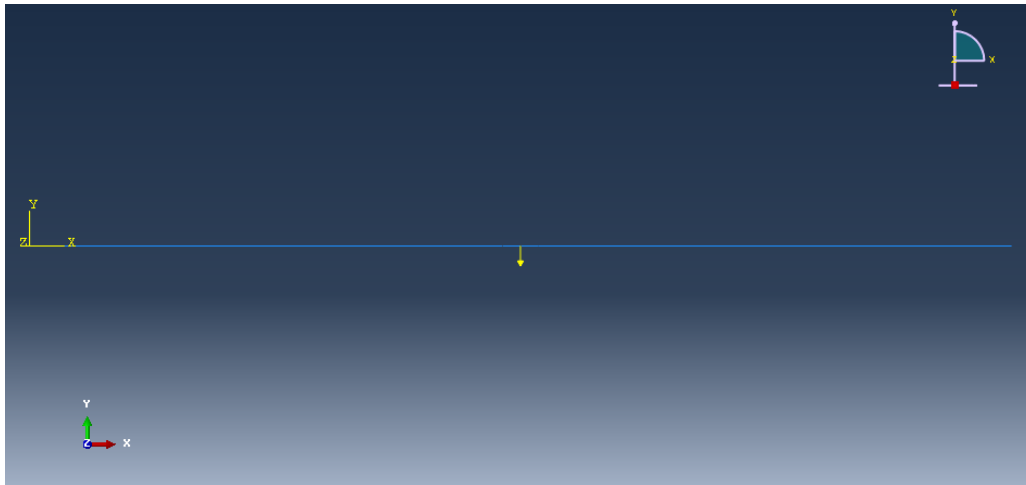


Figur 14.3 Densitetsøkning, bjelkeelement

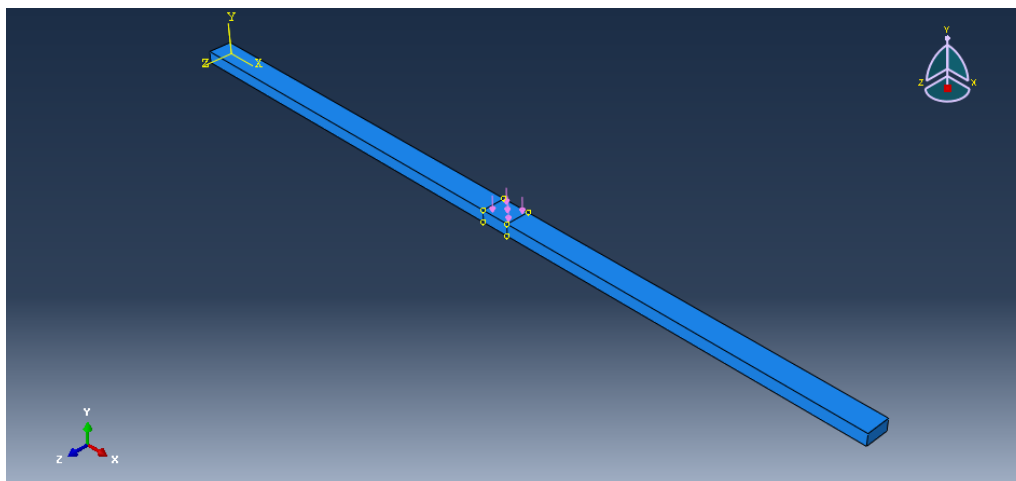


Figur 14.4 Densitetsøkning, solidelement

Ettersom bjelken er mange ganger stivere i sin aksiale retning enn rundt sin svake akse vil kraften fra den dynamiske lasten kun bli dekomponert kun til den svake akse. Bjelkeelement modellen har fått lasten som punktlast og solidelement modellen har fått lasten som trykklast.



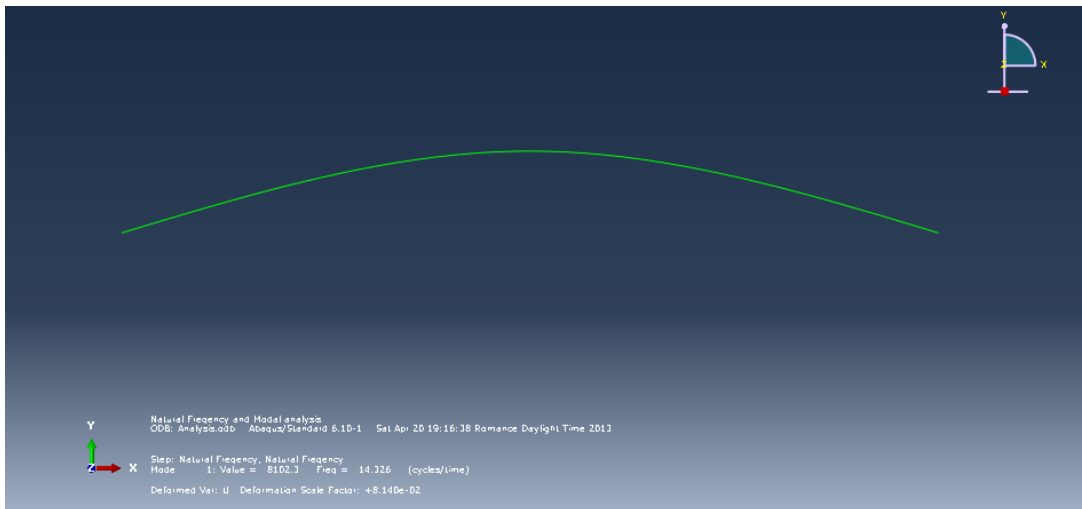
Figur 14.5 Bjelkeelement modell med punktlast



Figur 14.6 Solidelementmodell med trykklast

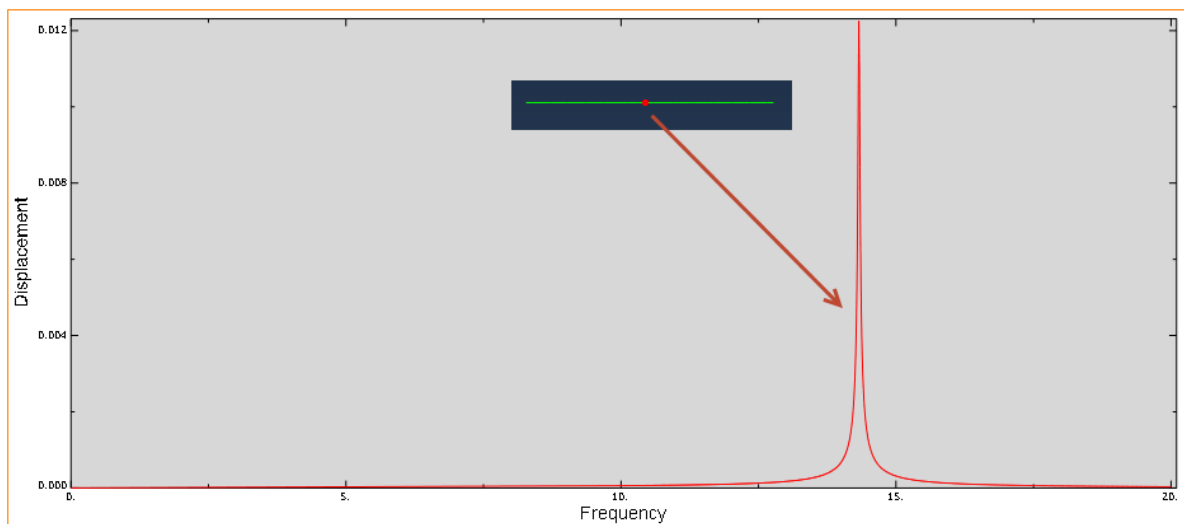
14.2.2 Resultater fra analysen med bjelkeelement

Første svingeform ble kalkulert til å ha en naturlig frekvens på 14.326Hz



Figur 14.7 Første svingeform

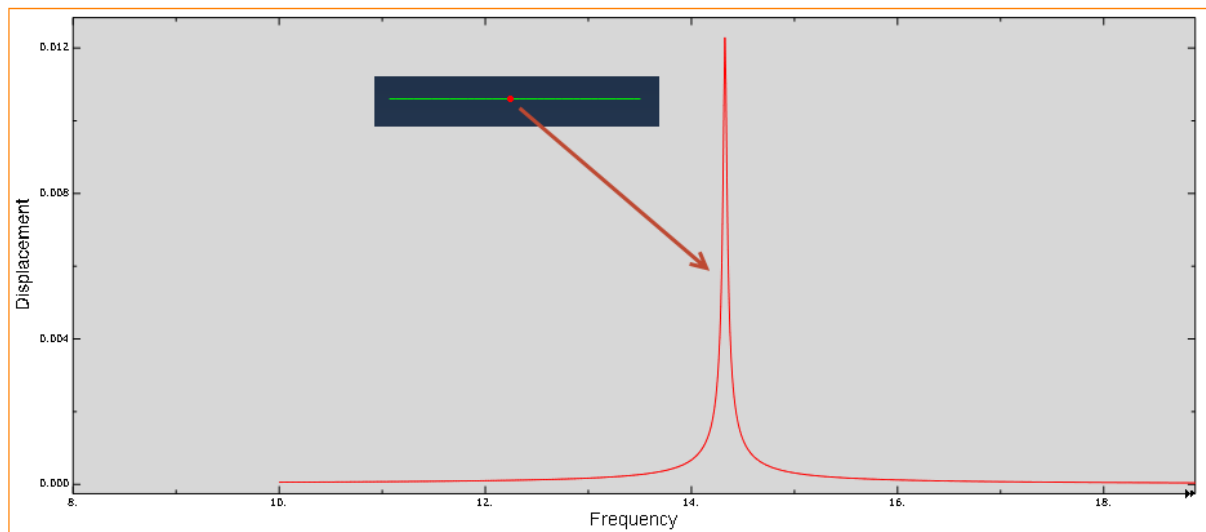
Abaqus kjørte en steady-state dynamics modal analyse og analyserte 1000 "Number of points" mellom 10Hz og 20Hz. Bias = 1.



Graf 14.1 Resultater fra steady-state dynamics modal analyse

Den maksimale forskyvningen fra Graf 14.1 ble funnet til å være 12.25mm.

Abaqus kjørte en steady-state dynamics direct analyse og analyserte 1000 "Number of points" mellom 10Hz og 20Hz. Bias = 1.



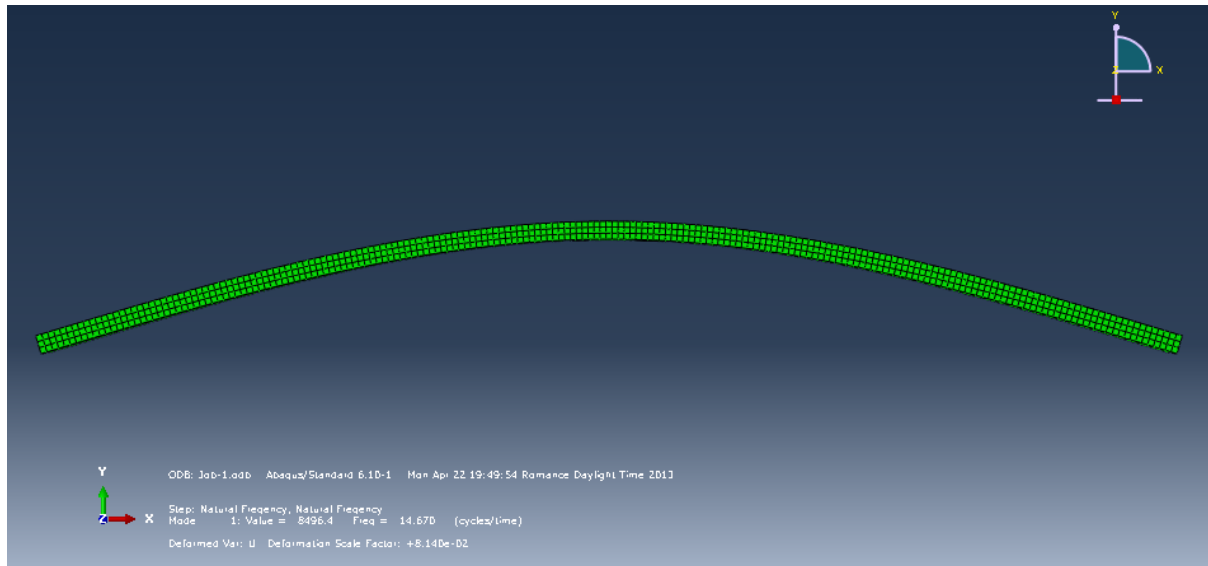
Graf 14.2 Resultater fra steady-state dynamics direct analyse

Den maksimale forskyvningen fra Graf 14.2 ble funnet til å være 12.29mm.

Se Tabell 13.1 for resultater av handkalkulasjoner.

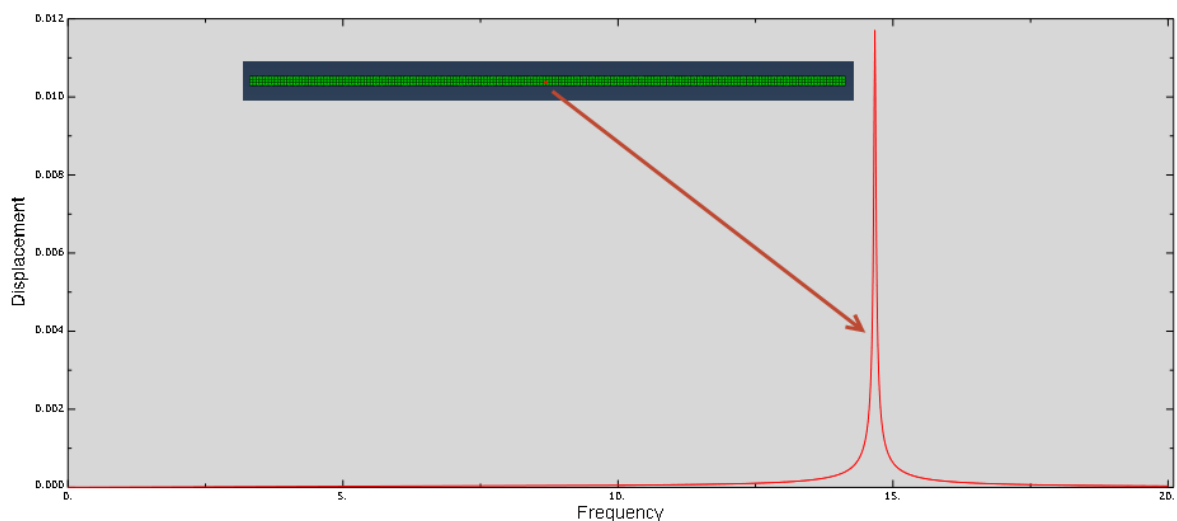
14.2.3 Resultater fra analysen med solidelement

Første svingform ble kalkulert til å ha en naturlig frekvens på 14.670Hz



Figur 14.8 Første svingform

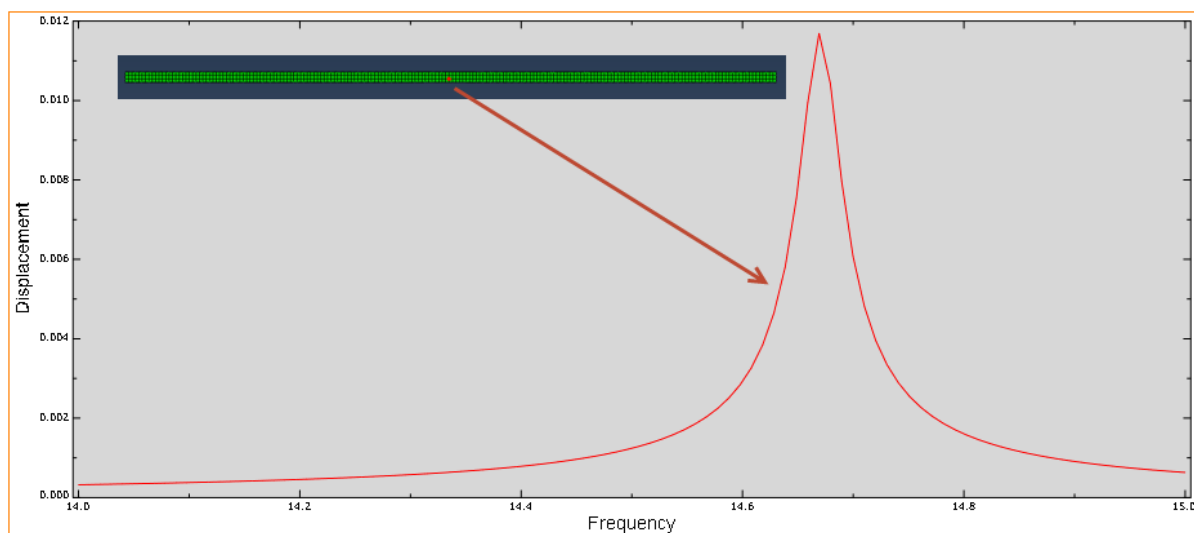
Abaqus kjørte en steady-state dynamics modal analyse og analyserte 500 "Number of points" mellom 10Hz og 20Hz. Bias = 1.



Graf 14.3 Resultater fra steady-state dynamics modal analyse

Den maksimale forskyvningen fra Graf 14.3 ble funnet til å være 11.70mm

Abaqus kjørte en steady-state dynamics direct analyse og analyserte 100 "Number of points" mellom 14Hz og 15Hz. Bias = 1. En steady state dynamics direct analyse er en svært tidskrevende analyse og krever mye prosessorkapasitet. Datamaskinen som ble brukt er kraftig og av nyere dato, den brukte likevel 30 minutter på denne analysen.



Graf 14.4 Resultater fra steady-state dynamics direct analyse

Den maksimale forskyvningen fra Graf 14.4 ble funnet til å være 11.69mm

For steady-state dynamics direct analyser med solidelementer og fin elementinndeling er funksjonen "Use eigenfrequencies to subdivide each frequency range" svært nyttig. Den vil med et lavt antall "Number of points" gi nøyaktige resultater og tidsbesparelsen er betydelig.

Se Tabell 13.1 for resultater av handkalkulasjoner.

14.3 Bjelken med 6kg masse og demper

Se regnearket ” 14 Simulering i Abaqus” i Appendiks A

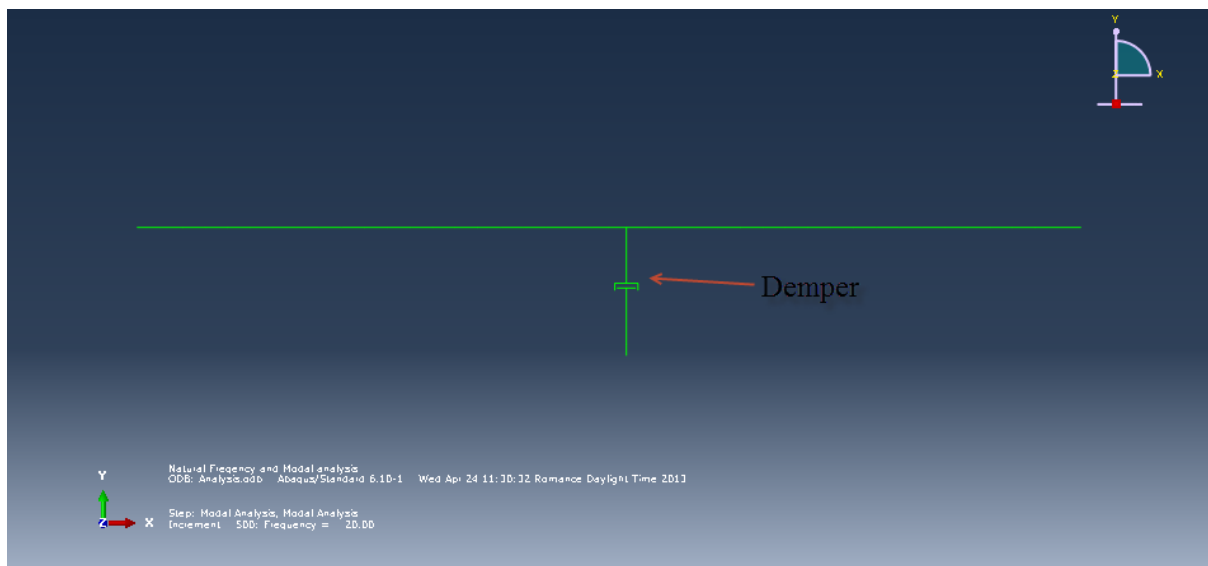
Abaqus input filen til ” Bjelken med 6kg masse og demper - Wire” kan bli funnet i Appendiks B

14.3.1 Antagelser for modellering

Massen av motoren/stålplatene har blitt lagt inn som ekstra densitet i det området på bjelken massen virker. Se Figur 14.3

Demperen ble lagt inn i samme punkt som den ble lagt inn under eksperimentet. Den viskøse dempningskonstanten fra regnearket ” 14 Simulering i Abaqus” ble funnet til å være 35.734Ns/m.

Kraften fra den dynamiske lasten ble lagt inn på samme måte som for bjelkeelement modellen uten demper. Se Figur 14.5.

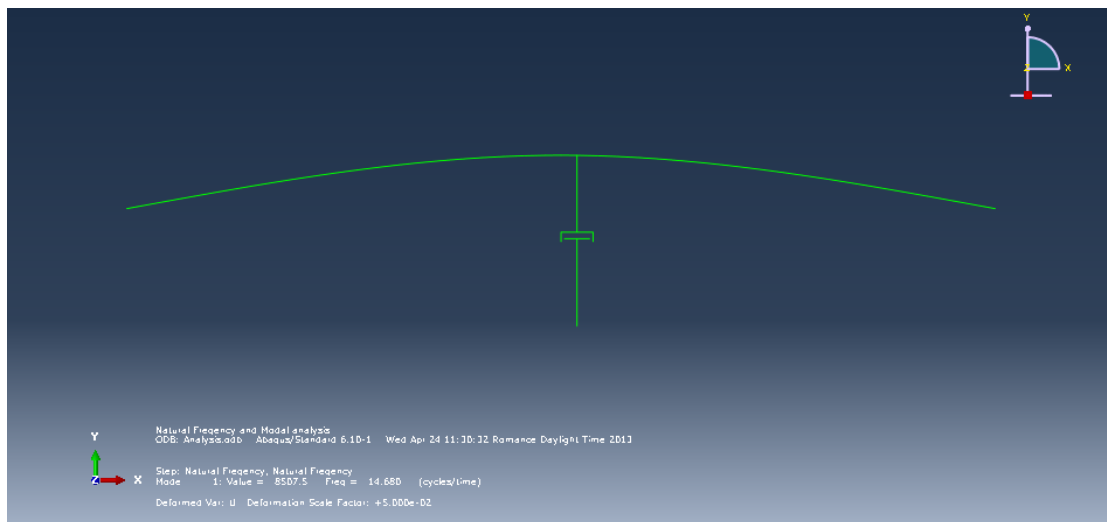


Figur 14.9 Bjelkeelementmodell med ekstern demper

14.3.2 Resultater fra analyse

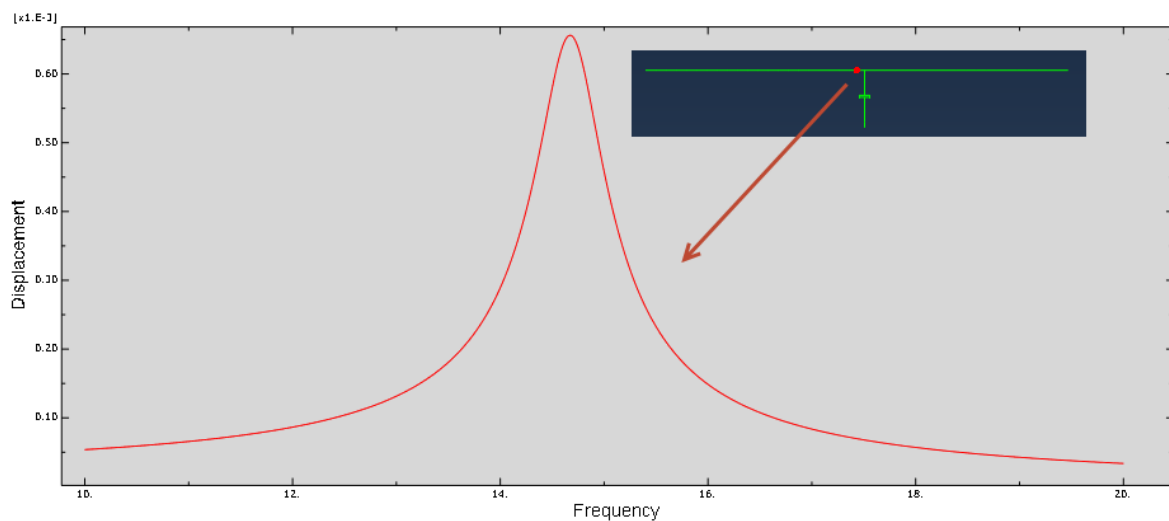
Første svingform ble kalkulert til å ha en naturlig frekvens på 14.68Hz.

Kommentar: Denne egenfrekvensen er høyere enn egenfrekvensen uten demper(14.326Hz). En demper skal i teorien ikke tilføre systemet masse eller stivhet.



Figur 14.10 Første svingform

Abaqus kjørte en steady-state dynamics direct analyse og analyserte 1000 punkter mellom 10Hz og 20Hz.



Graf 14.5 Resultater fra steady-state dynamics direct analyse

Den maksimale forskyvningen fra Graf 14.5 ble funnet til å være 0.67mm

Se Tabell 13.2 for resultater av handkalkulasjoner.

15 Vibrasjonskontroll

15.1 Innledning

Vi har til nå studert hvordan vibrasjoner i et system oppstår. Nå skal vi se på hvordan det er mulig å eliminere disse vibrasjonene. Før vi starter med slike analyser er det viktig å ha klart for seg hvor mye vi tillater at noe vibrerer. Vibrasjoner kan bli eliminert ved følgende måter:

- Balanser ubalansert utstyr.
- Kjør motorene/kompressorene med frekvenser slik at vibrasjonene avtar.
- Om punktet ovenfor ikke er mulig, forandre egenfrekvensen
- Installer noe som absorberer bevegelsesenergi, som for eksempel en demper.
- Plasser det roterende utstyret på en isolator.

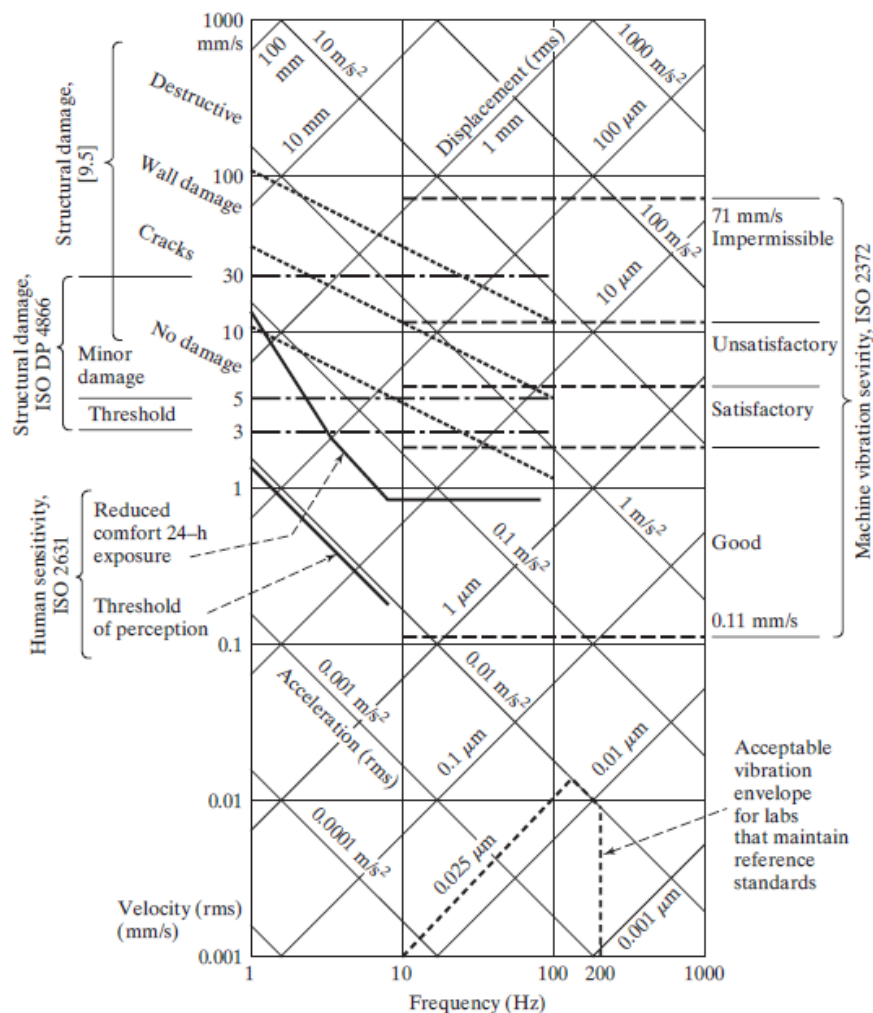
Vibrasjoner fører ofte til sprekkdannelser, løsning av bolter, utmatting av struktur og dyrt vedlikehold av maskiner. Mennesker som blir utsatt for vibrasjoner kan føle ubehag på grunn av støy, eller fordi de kjenner vibrasjonene gjennom kroppen. Dette går ut over menneskelige prestasjoner og effektivitet. Å bygge en teoretisk modell av en stor struktur der man tar hensyn til alle mulige resonanser som kan oppstå er meget tidskrevende og i noen tilfeller umulig. Eksempelet i kapittel 13 er et godt eksempel på hvor lite det skal til for at noe begynner å vibrere kraftig nær resonans frekvens. Som eksemplet også viser, er det mulig å redusere denne svingeamplituden kraftig med å sette inn en demper.

15.2 Vibrasjonskriterier

De aksepterte nivåene er beskrevet som et SDOF system som blir utsatt for harmoniske vibrasjoner. Grensene er beskrevet på grafen nedenfor, kalt vibrasjons momograf. Grafen viser forskyvning, hastighet og akselerasjon som funksjon av frekvens av vibrasjon.

Grafen nedenfor tar hensyn til:

- Sensitivt utstyr
- Menneskelig komfort
- Maskinsensitivitet
- Strukturskade



Graf 15.1 Vibrasjons kriterier

Fra Eq.7.12 har vi

$$X = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Harmonisk bevegelse kan beskrives som:

$$x(t) = X \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Eq.15.1

Ved å derivere Eq.15.1 en og to ganger får vi:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega \cdot X \cdot \cos(\omega \cdot t) = 2\pi \cdot f \cdot X \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Og

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -4\pi^2 \cdot f^2 \cdot X \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Disse ligningene har sine maksimalverdier som gir:

$$v_{maks} = 2\pi f \cdot X$$

Eq.15.2

Og

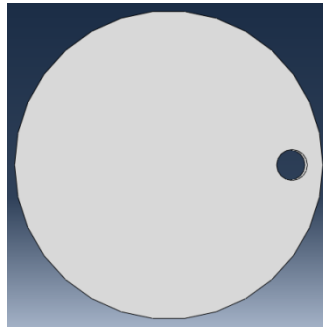
$$a_{maks} = 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot X$$

Eq.15.3

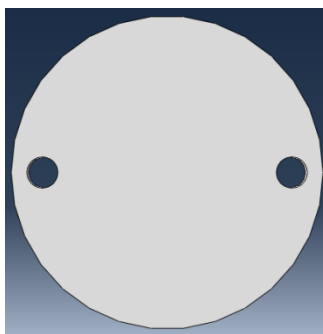
Om vi bruker eksperimentet i kapittel 13 som eksempel så ble bjelken utsatt for en rotasjonsfrekvens lik sin egenfrekvens på 14.32Hz. Bjelken uten demper hadde da en kalkulert maksimal forskyvning på ≈ 12 mm. Vi var da langt oppe i det destruktive området. Når en ekstern demper ble lagt inn ble den maksimale kalkulerte forskyvningen redusert til ≈ 0.67 mm. Bjelkepåkjenningen ble da redusert til å være i grenseland til det destruktive området.

15.3 Ubalansert utstyr

Et godt eksempel på ubalansert utstyr er den eksentriske disken i kapittel 13. Den har et hull som gjør at massesenteret forskyves. For å balansere ubalansert utstyr kan det være nyttig å legge til, eller fjerne masse fra det som roterer eksentrisk. I tilfellet med den eksentriske disken kunne en løsning være å bore et tilsvarende hull 180 grader fra der det eksisterende hullet befinner seg



Figur 15.1 Ubalansert disk



Figur 15.2 Balansert disk

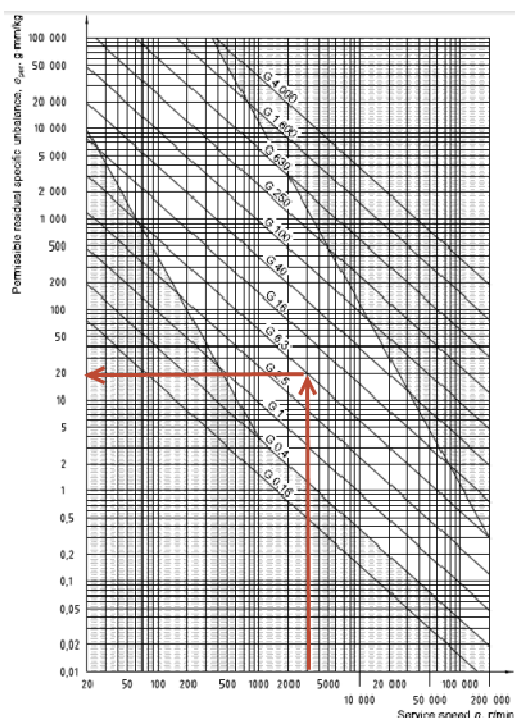
ISO 1940 har retningslinjer for hvor stor grad av ubalanse roterende utstyr kan ha. Denne standarden er nyttig for dimensjonerings formål. Ved informasjon om maskintype, masse av det som roterer og rotasjonshastighet vil standarden gi oss maksimal tillatt eksentrisitet. Maskinleverandører er dermed lovpålagt å designe maskiner som ikke går utover disse kravene. Dette er svært nyttig for design av konstruksjoner der vibrasjoner skal elimineres på best mulig måte.

15.3.1 Design eksempel fra ISO 1940

Vi tar den elektriske motoren i kapittel 13 som eksempel. Ettersom dette er en elektrisk motor med skaft lengde < 80 mm går den under kategori G 6.3.

Den har en maksimal hastighet på 50Hz=3000rpm.

Machinery types: General examples	Balance quality grade G	Magnitude $a_{per} \cdot r_2$ mm/s
Crankshaft drives for large slow marine diesel engines (piston speed below 9 m/s), inherently unbalanced	G 4000	4 000
Crankshaft drives for large slow marine diesel engines (piston speed below 9 m/s), inherently balanced	G 1800	1 800
Crankshaft drives, inherently unbalanced, elastically mounted	G 630	630
Crankshaft drives, inherently unbalanced, rigidly mounted	G 250	250
Complete reciprocating engines for cars, trucks and locomotives	G 100	100
Cars: wheels, wheel rims, wheel sets, drive shafts	G 40	40
Crankshaft drives, inherently balanced, elastically mounted		
Agricultural machinery	G 18	18
Crankshaft drives, inherently balanced, rigidly mounted		
Crushing machines		
Drive shafts (cardan shafts, propeller shafts)		
Aircraft gas turbines	G 6,3	6,3
Centrifuges (separators, decanters)		
Electric motors and generators (of at least 80 mm shaft height), of maximum rated speeds up to 950 r/min		
Electric motors of shaft heights smaller than 80 mm		
Fans		
Gears		
Machinery, general		
Machine-tools		
Paper machines		
Process plant machines		
Pumps		
Turbo-chargers		
Water turbines		
Compressors	G 2,5	2,5
Computer drives		
Electric motors and generators (of at least 80 mm shaft height), of maximum rated speeds above 950 r/min		
Gas turbines and steam turbines		
Machine-tool drives		
Textile machines		
Audio and video drives	G 1	1
Grinding machine drives		
Gyroscopes	G 0,4	0,4
Spindles and drives of high-precision systems		



Figur 15.3 Veiledning for ubalansert utstyr

Fra regnearket ” 13.4.1 Kalkulerte resultater” i Appendiks A og Bilde 13.3 har vi:

$$m_{\text{disk}} = 0.404\text{kg} \quad e_2 = 0.726\text{mm}$$

$$m_{\text{disk}} \cdot e_2 = 293.229\text{gram} \cdot \text{mm}$$

Fra Figur 15.3 leser vi av 20gram*mm/kg.

$$e_{\text{per}} = 20\text{gram} \cdot \frac{\text{mm}}{\text{kg}} \quad e_{\text{per}} \cdot m_{\text{disk}} = 8.08\text{gram} \cdot \text{mm}$$

Vi konkluderer med:

$$m_{\text{disk}} \cdot e_2 > e_{\text{per}} \cdot m_{\text{disk}}$$

Disken på Bilde 13.3 er ikke godkjent i henhold til ISO 1940.

15.4 Kontroll på naturlig frekvens

Som kjent fra eksperimentet i kapittel 13 oppstår resonans når noe med eksentrisk masse roterer med samme frekvensen som egenfrekvensen til konstruksjonen. Dersom man bygger en struktur som man vet skal inneholde eksentrisk utstyr av noe slag, kan det være nyttig å designe strukturen slik at vi vet at egenfrekvensene til strukturen ikke er de samme frekvensene som arbeidsfrekvensene til det utstyret som har eksentriske deler. Fra Eq.3.4 vet man at egenfrekvensen kan forandres enten med å forandre massen, eller å forandre stivheten.

Dersom vi har en eksisterende struktur som får problemer grunnet resonanser fra eksentrisk utstyr, er det lettest å forandre stivheten til strukturen. Det kan gjøres i form av å ta bort eller legge til bjelker/søyler/plater. Gjør vi dette så vil også massen forandres, så da er det viktig å se til at forandringen vi gjør forandrer egenfrekvensen mye. Å legge til masse kan i mange tilfeller være upraktisk. Alle strukturer har sin gitte kapasitet, så for eksempel å legge inn store mengder med betong som ikke har noe bæremessig formål kan stjele store mengder av kapasiteten til den eksisterende strukturen.

15.5 Demping

Alle systemer har en eller annen form for demping, enten i form av intern, ekstern eller begge deler. Fra Eq.7.13 ser man at ved resonans der $r=1$ må man ha et dempningsforhold ulikt 0. Hvis dempningsforhold går mot 0 vil den maksimale svingeamplituden gå mot uendelig, noe som er fysisk umulig ettersom alle konstruksjonsdeler har en endelig lengde. Ettersom vi har uendelig mange svingeformer og i mange tilfeller mange eksentriske deler som beveger seg med variable hastigheter, er det ofte umulig å designe seg fullstendig bort fra alle resonanser.

Dempningsforholdet til en struktur kan økes ved å bruke grått støpejern, laminert eller sandwich materialer. Dette kan være aktuelt dersom dempningsforholdet må økes og det ikke er mulig å installere noen form for ekstern demper. Boltede strukturer har et høyere dempningsforhold enn sveiste strukturer. Dette er på grunn av at boltede strukturer har mulighet for glidning i innfestningen. Boltede innfestningen har også mindre stivhet enn sveiste strukturer, dette bør tas hensyn til dersom et boltet strukturelt dempningsforhold blir brukt.

Fra Eq.7.13 når $r=1$ har vi:

$$X = \frac{\delta_{st}}{2\xi} = \frac{F_0}{k \cdot 2\xi} = \frac{F_0}{k \cdot \eta} = \frac{F_0}{a \cdot E \cdot \eta}$$

Eq.15.4

Der $k=aE$ og a er en konstant.

Viskøselastiske materialer har høyere taps faktor og dermed høyere intern dempning. Materialer som disse blir brukt som eksterne dempere der de blir utsatt for skjær eller tøyning. En ulempe med disse materialene som må tas i betraktning er at egenskapene deres forandres med temperatur, frekvenser og tøyning. På grunn av at stress er proporsjonalt med deformasjon vil materialene med den høyeste taps faktor bli utsatt for minst stress.

Materiale	Tapskoeffisient (η)
Polystyren	2.0
Hard gummi	1.0
Fibermatter med matriks	0.1
Kork	0.13-0.17
Aluminium	$1 \cdot e^{-4}$
Jern og stål	$2-6 \cdot e^{-10}$

Tabell 15.1 Tapskoeffisienter

Type Konstruksjon	Tilsvarende viskøs dempning Dempningsforhold (%)
Sveiste konstruksjoner	1-4
Boltede konstruksjoner	3-10
Stål ramme	5-6

Tabell 15.2 Dempningsforhold

15.6 Vibrasjons isolering

Vibrasjons isolatorer er produkter som har som formål å redusere uønskede vibrasjoner. En isolator blir plassert mellom vibrasjonskilden og det man vil isolere. Vibrasjons isolering kan bli brukt i to situasjoner. Den første er når vi isolerer basen for eksentriske krefter. Et eksempel på dette kan være en motor som står på en konstruksjon. Den andre er når vi isolerer vibrasjoner fra basen til sensitive systemer. Et eksempel på dette kan være å isolere måleutstyr for vibrasjoner fra omgivelsene. Hensikten med isolering er å redusere og kontrollere den dynamiske responsen. Høyfrekvente vibrasjoner med gjerne små svingeamplituder vil også gå ut over menneskelig komfort. Vi skiller mellom passiv og aktiv isolering.

15.6.1 Passiv isolering

En passiv isolator består teoretisk av et fjærelement og et demperelement. Eksempler på passive isolatorer kan være fjærer, kork og gummi. Et hverdagslig eksempel er gummi pads som blir lagt mellom en vaskemaskin og gulvet vaskemaskinen står på.



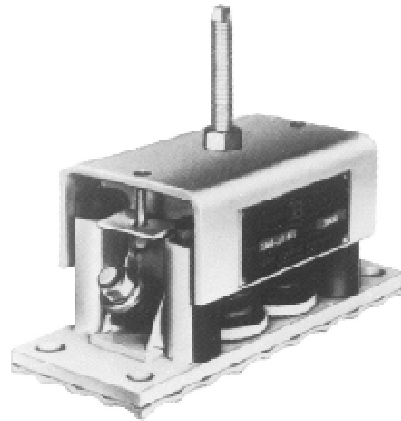
Figur 15.4 Gummi pad



Figur 15.5 Fjær

15.6.2 Aktiv isolerer

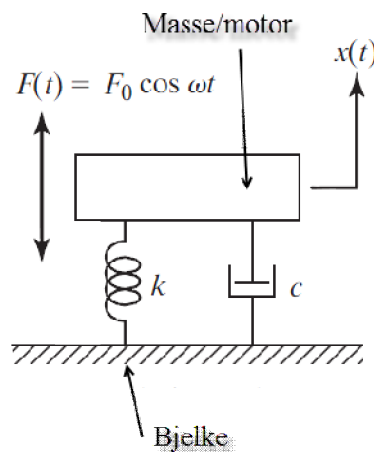
Aktiv isolering er en type isolering som trenger elektrisitet for å fungere. Systemet har en akselerasjonsmåler som registrerer vibrasjoner. Systemet justerer seg deretter for å minimere vibrasjonene



Figur 15.6 Aktiv isolerer

15.7 Vibrasjons isolering med stivt fundament

Ekspérimentet i kapittel 13 er et fint eksempel på et system som er festet til et stivt fundament. En motor og en masse er skrudd godt fast til en bjelke. Hvis vi tenker oss at vi skrur løs massen og motoren, legger et fjær- og dempingselement mellom massen/motoren og bjelken, så vil bjelken bli isolert fra massen/motoren.



Figur 15.7 Vibrasjons isolering

Fra Eq.7.2 har vi:

$$m \cdot x'' + c \cdot x' + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Fra Eq.7.15 vet vi at det homogene bidraget fra ligningen vil dø ut over tid, og at det er det partielle bidraget som er gjeldende.

Fra Eq.7.3, Eq.7.12 og Eq.7.10 har vi:

$$x(t) = X \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi)$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + (\omega \cdot c)^2}}$$

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{\omega \cdot c}{k - m \cdot \omega^2}\right)$$

Kreftene blir ført fra massen/motoren og ned til bjelken gjennom fjæren og demperen. Vi kan skrive denne kraften som:

$$F_t(t) = k \cdot x(t) + c \cdot x'(t)$$

Eq.15.5

Hvis vi setter Eq.7.3 inn i Eq.15.5 får vi:

$$F_t(t) = k \cdot (X \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi)) - c \cdot X \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)$$

Eq.15.6

Størrelsesordenen på kraften finner vi ved å anvende Pythagoras' læresetning og enhetssetningen:

$$F_T = X \cdot \sqrt{k^2 + (\omega \cdot c)^2}$$

Eq.15.7

Ved å kombinere Eq.7.12 og Eq.15.7 får vi:

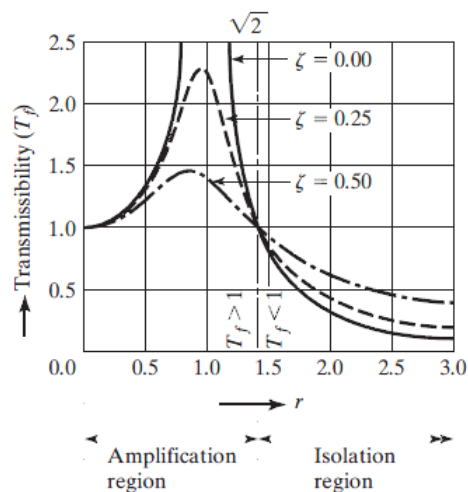
$$F_T = \frac{F_0 \sqrt{k^2 + (\omega \cdot c)^2}}{\sqrt{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + (\omega \cdot c)^2}}$$

Eq.15.8

Herfra definerer vi overførbarhetsforholdet til isolatoren, T_f :

$$T_f = \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 + (\omega \cdot c)^2}}{\sqrt{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + (\omega \cdot c)^2}} = \frac{1 + (2\xi \cdot r)^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi \cdot r)^2}}$$

Eq.15.9



Graf 15.2 Variasjon av overførbarhetsforhold

Graf 15.2 forteller oss at en isolator bare vil være effektiv dersom $r > \sqrt{2}$. For alle verdier av r der montering av en fjær hjelper, vil et høyt dempningsforhold transportere mer kraft til basen.

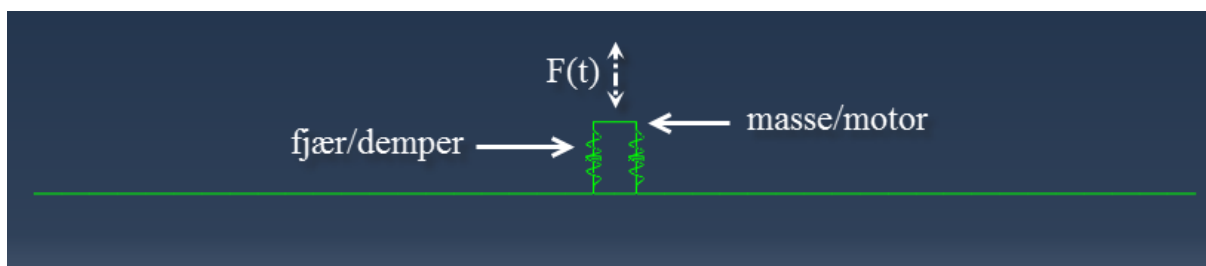
Når en maskin starter opp vil den kjøre på mange frekvenser. Det er en stor mulighet for at den også vil treffe resonansfrekvens til isolatoren. Da vil tilstedeværelsen av et tilstrekkelig dempningsforhold være særdeles viktig. Vi må dermed finne et dempningsforhold som tilfredsstillende både amplifikasjons- og isoleringssonen

15.8 Design eksempel

Se regnearket "15.8 Design eksempel" i Appendiks A

Abaqus input filen til "Vibrasjons isolering" kan bli funnet i Appendiks B

I dette eksempelet isolerer vi motoren/massen fra bjelken i kapittel 13. Vi legger inn 2 fjærer mellom bjelken og motoren/massen. Vi antar at fjærene har samme dempningsforhold som bjelken. Fra eksperimentet i kapittel 13 traff vi resonansfrekvens når motoren gikk med frekvens 14.319Hz. Vi antar at motoren vil gå lineært fra 0 til 50Hz. Der 50Hz er arbeidsfrekvensen til motoren. Nå må vi finne 2 fjærer slik at vi isolerer bjelken fra massen/motoren.

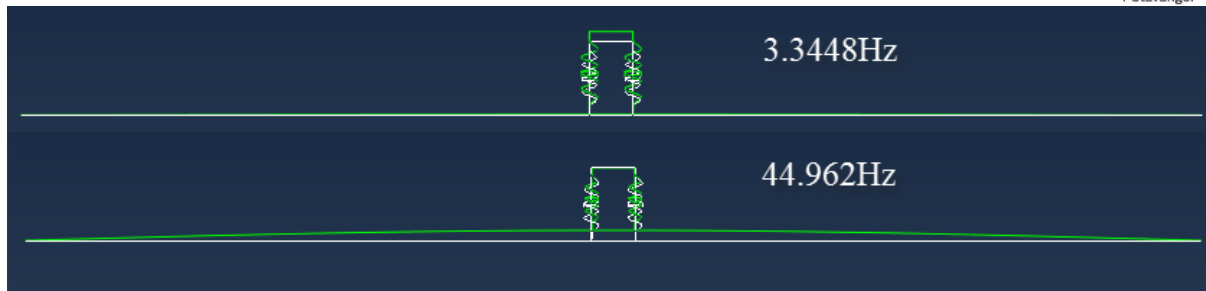


Figur 15.8 Bjelke isolert fra masse/motor

Bjelken og fjærene vil fungere som et system. Vi må finne 2 fjærer som tilfredsstillende at det vil gå resonans i fjærene, og at det vil gå resonans i bjelken under oppstart. Målet er at fjærene ikke skal gå til bunns og at bjelken skal ha lavere svingeamplitude under resonans enn under eksperimentet i kapittel 13. Poenget er at isoleringen skal komme bjelken til gode.

Vi har valgt fjærer med høyde 50mm og fjærstivhet 2kN/m.

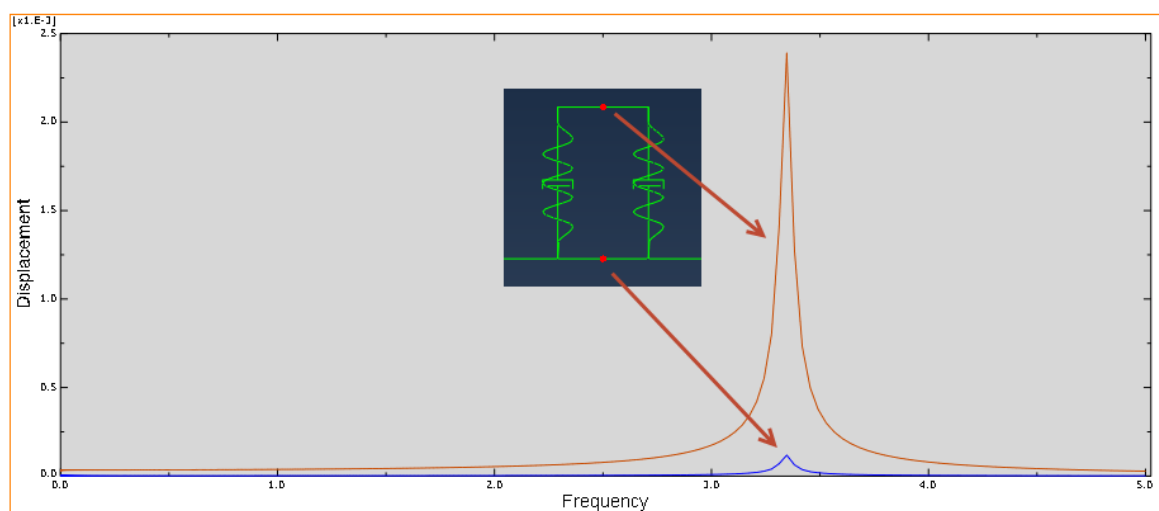
Se Figur 15.9. Abaqus kalkulerte de naturlige frekvensene til de aktuelle svingeformene. Hvit er systemets opprinnelige posisjons og grønn er systemet i bevegelse.



Figur 15.9 Aktuelle naturlige frekvenser

Analysen som ble kjørt er en steady-state dynamics direct analyse. Rayleigh dempning er blitt lagt inn som materialdempning i bjelken. Fjærene har fått et dashpot-element tilsvarende materialdempningen til fjærene.

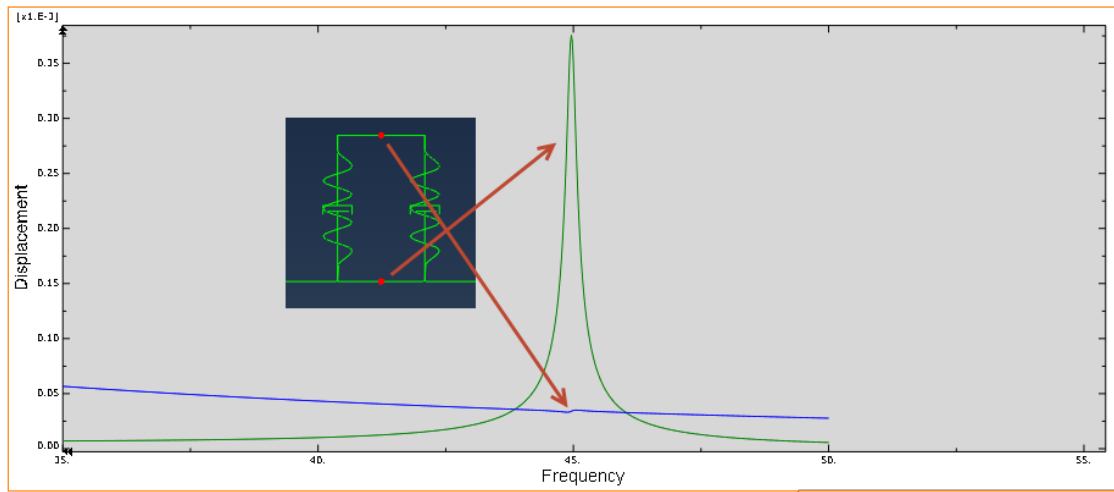
Abaqus kjørte en steady-state dynamics direct analyse og analyserte 8000 "Number of points" mellom 0Hz og 5Hz. Bias = 1



Graf 15.3 Motorfrekvens 3.3448Hz

Fra Graf 15.3 vil det markerte punktet til fjæren vil forskyve seg 2.39mm under resonansrespons. (Bjelken som fjærene er festet til vil forskyve seg 0.12mm)

Abaqus kjørte en steady-state dynamics direct analyse og analyserte 4000 "Number of points" mellom 10Hz og 50Hz. Bias = 1.



Graf 15.4 Motorfrekvens: 44.962Hz

Den maksimale forskyvningen til bjelken fra Graf 15.4 ble funnet til å være 0.38mm.

15.8.1 Konklusjon

	Resonans i fjærer[3.3448Hz]	Resonans i bjelke [44.962Hz]	Bjelke under operasjon [50Hz]
F_0	0.13N	23.402N	28.941N
F_T	2.239N	0.138N	0.138N
Forskyvning pga dynamisk respons	2.39mm	0.38mm	≈ 0 mm

Tabell 15.3 Resultater

Fra eksperimentet i kapittel 13 traff vi resonansfrekvens når motoren gikk med frekvens 14.319Hz. Den maksimale forskyvningen fra dynamiske respons ble kalkulert til å være ≈ 12 mm. Ved å legge inn fjærer for å isolere bjelken fra motoren/massen har vi redusert den maksimale forskyvningen fra dynamisk respons til 0.38mm. Fra kapittel 13 ble det også prøvd å legge inn en ekstern demper, den maksimale forskyvningen ble da kalkulert til å være ≈ 0.67 mm. Nå skal det sies at den maksimale forskyvningen kunne blitt redusert ved å øke størrelsen på demperen.

Det er mange faktorer som kan spille inn, deriblant økonomiske. Spørsmålet er om man skal isolere vibrasjonene på stedet eller legge inn eksterne dempere rundt omkring på strukturen. Under design-eksempelet brukte vi fjærer ved forholdsvis lav fjærstivhet for at det skulle gå resonans i fjærene når motoren gikk med forholdsvis lav hastighet(Fra Eq.13.1 vet vi at den sirkulære hastigheten er i annen potens). Fjærene ble på denne måten optimalisert til sitt formål.

For å sjekke at fjærene virket ble fjærstivheten multiplisert med 10^6 . Abaqus ga oss nesten identisk numerisk verdi(14.282Hz) for den naturlige frekvensen til den første svingeformen.(Eksperimentet første svingeform hadde en naturlig frekvens på 14.319Hz)

Vibrasjons isolering vil virke. Det er derfor nødvendig å isolere maskiner med eksentriske deler fra strukturen den står på.

Referanse:

Tekst og deler av matematikk og figurer er hentet fra:

[1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units, 2011

[2] Mechanical Vibrations

[10] ISO 1940 Mechanical vibration

16 Konklusjon

Hovedfokuset i denne oppgaven har vært forståelse av de matematiske formlene som beskriver egenfrekvenser og dynamiske responser. Gjennom mange og grundige matematiske utledninger har vi kommet frem til de kjente og brukte formlene som står i lærebøkene. Matematikken er ingeniørenes språk. Det er ved matematiske utledninger sammen med eksperimenter vi godtar de allerede godt etablerte formlene. Matematiske utledninger er selvsagt ikke noe vi ingeniører går og tenker på til daglig, men de er svært nyttige å studere for å finne ut om formlene tar hensyn til det vi trenger at de tar hensyn til. Det kan for eksempel legges til at ingen av formlene som har blitt utledet tar hensyn til skjær deformasjon, men at B21 og C3D20R elementet til Abaqus gjør det.

Vi har sammenlignet SDOF metode, Eksakt metode, Element metode og simulering i Abaqus. En modell ble laget der hver enkelt metode skulle gi oss egenfrekvensen til de fire første svingeformene. SDOF metode kunne selvfølgelig kun gi oss egenfrekvensen til den første svingeformen, men det skal sies at der treffer den også veldig godt. Eksakt metode ga oss de fire første egenfrekvensene med høy nøyaktighet. Men det skal legges til at bjelken som ble analysert var lang i forhold til høyde, og dermed blir effekten av skjær deformasjon neglisjerbar. Elementmetoden som var utledet for hånd ga en klar indikasjon på hvor viktig det er å ha en fininndelt elementinndeling (mesh) når man gjør dynamiske analyser. Dette var også hele formålet med den analysen. Abaqus modellene med B21-bjelkeelement og C3D20R-solidelement tar hensyn til skjær deformasjon, og har også en meget fininndelt elementinndeling. Analysen er numerisk, og det må tas med i betraktningen. Abaqus modellene og Eksakt metode ga best overensstemmelse for de fire første svingeformene.

Når det kommer til eksperimentet uten ekstern demper ga SDOF metode og alle Abaqus modellene nesten identisk numeriske svar. B21-bjelkeelement og C3D20R-solidelement, sammen med direct og modal analyse ga alle nesten identiske svar. Den målte forskyvningen fra "strain-gage" var 1/3 av den kalkulerte forskyvningen. Selv om materialdempningen til modellen ble eksternt målt, ligger det likevel en usikkerhet rundt denne.

Eksperimentet med ekstern demper ble det laget en SDOF metode analyse og en Abaqus direct modell. Abaqus modellen hadde materialdempning i form av Rayleigh dempning og et dashpot element tilsvarende den eksterne demperen. Her ga både SDOF metode og Abaqus modellen veldig gode overensstemmelse med eksperimentet. Vi kan konkludere med at når vi øker dempningsforholdet drastisk som vi gjør med eksterne demper, så vil vi få mer kontroll over den kalkulerte forskyvningen.

For å minske vibrasjoner er det nyttig å installere vibrasjons isolatorer under roterende eksentrisk utstyr. Her gjelder det å velge isolatorer som har et dempningsforhold som gjør at minst mulig kraft blir overført til underlaget, men også et dempningsforhold som er tilstrekkelig når det går resonans i selve isolatoren. Det ble laget et design eksempel der to fjærer ble lagt mellom en masse/motor og en bjelke. Her ble det valgt fjærer med lav fjærstivhet slik at det skulle gå resonans i fjærene når motoren gikk med lav frekvens. Disse fjærene minimerer også den overførte kraften fra motoren. Når motoren gikk med hastigheten som skulle gi resonans i bjelken ble den kalkulert forskyvningen kun 3 % av forskyvningen som ble kalkulert når det gikk resonans i bjelken uten fjærer. Vi konkluderer med at dersom vi kan installere vibrasjons isolatorer som ikke går til bunns selv på grunn av resonans under oppstart så vil vibrasjons isolatorer redusere vibrasjoner betraktelig.

Figurer

Figur 2.1 Frie svingninger av en frihetsgrad system	10
Figur 2.2 Tvungne svingninger av en frihetsgrad system.....	10
Figur 2.3 Frie svingninger med demper.....	11
Figur 2.4 Viskøs demper.....	11
Figur 2.5 Hysteresekurve for metall.....	12
Figur 2.6 Internt glideplan	12
Figur 2.7 Dempningsegenskaper.....	13
Figur 3.1 SDOF system	14
Figur 3.2 Harmonisk bevegelse.....	17
Figur 3.3 Forskyvning, hastighet og svingeperiode	18
Figur 4.1 SDOF system med demper	20
Figur 5.1 SDOF system med harmonisk last	31
Figur 7.1 SDOF system med demper og harmonisk last	40
Figur 8.1 Fritt opplagt bjelke med punktlast.....	48
Figur 10.1 Bjelke utsatt for bøyning.....	55
Figur 10.2 Fritt opplagt bjelke uten last.....	61
Figur 11.1 Elementer	65
Figur 11.2 Solid elementer.....	65
Figur 11.3 Formfunksjoner	66
Figur 11.4 Fjær-masse system.....	73
Figur 11.5 Fritt opplagt bjelke med 2 noder	75
Figur 11.6 Fritt opplagt bjelke med 3 noder	77
Figur 12.1 En fritt opplagt bjelkes 3 første svingeformer.....	82
Figur 13.1 Bjelke med 6 kg masse og ekstern demper	91
Figur 14.1 Number of points.....	95
Figur 14.2 Bias.....	96
Figur 14.3 Densitetsøkning, bjelkeelement.....	97
Figur 14.4 Densitetsøkning, solidelement	97
Figur 14.5 Bjelkeelement modell med punktlast.....	98
Figur 14.6 Solidelementmodell med trykklast	98
Figur 14.7 Første svingeform.....	99
Figur 14.8 Første svingeform.....	101
Figur 14.9 Bjelkeelementmodell med ekstern demper	103
Figur 14.10 Første svingeform.....	104
Figur 15.1 Ubalansert disk.....	108
Figur 15.2 Balansert disk.....	108
Figur 15.3 Veiledning for ubalansert utstyr	109
Figur 15.4 Gummi pad.....	112
Figur 15.5 Fjær.....	112
Figur 15.6 Aktiv isolerer.....	113
Figur 15.7 Vibrasjons isolering.....	113
	122

Figur 15.8 Bjelke isolert fra masse/motor.....	116
Figur 15.9 Aktuelle naturlige frekvenser.....	117

Tabeller

Tabell 12.1 Egenfrekvens resultater	85
Tabell 13.1 Resultater.....	90
Tabell 13.2 Resultater.....	94
Tabell 15.1 Tapskoeffisienter	111
Tabell 15.2 Dempningsforhold	111
Tabell 15.3 Resultater.....	119

Grafer

Graf 5.1 DAF(r)	34
Graf 5.2 Resonansrespons.....	36
Graf 6.1 Beatingrespons	38
Graf 9.1 Udempet svingninger	52
Graf 9.2 Underdempet svingninger	53
Graf 9.3 Kritisk dempet svingninger	53
Graf 9.4 Overdempet svingninger	54
Graf 13.1 Graf fra Eq.7.20.....	89
Graf 13.2 Graf fra eksperimentet	89
Graf 13.3 Graf fra Eq.7.20.....	92
Graf 13.4 Graf fra eksperimentet	93
Graf 14.1 Resultater fra steady-state dynamics modal analyse.....	99
Graf 14.2 Resultater fra steady-state dynamics direct analyse.....	100
Graf 14.3 Resultater fra steady-state dynamics modal analyse.....	101
Graf 14.4 Resultater fra steady-state dynamics direct analyse.....	102
Graf 14.5 Resultater fra steady-state dynamics direct analyse.....	104
Graf 15.1 Vibrasjons kriterier	106
Graf 15.2 Variasjon av overførbarhetsforhold	115
Graf 15.3 Motorfrekvens 3.3448Hz	117
Graf 15.4 Motorfrekvens: 44.962Hz	118

Bilder

Bilde 9.1 Fritt opplagt bjelke med konsentrert masse på midten	52
Bilde 13.1 Utstyr til eksperimentet.....	86
Bilde 13.2 Disk med hull	86
Bilde 13.3 Diskens tyngdepunkt	87
Bilde 13.4 Bjelke med 6 kg masse	88

Referanser

- [1] Mechanical Vibrations, Fifth Edition in SI Units, 2011, Singiresu S.Rao
- [2] Mechanical Vibrations, 1984, J.P Den Hartog
- [3] Dynamisk Analyse Av Konstruksjoner, 1979, Langen, Sigbjørnsson
- [4] Abaqus 6.11 Documentation, Tilgjengelig fra <http://abaqus.ethz.ch:2080/v6.11/> (Brukt fra januar til mai 2013)
- [5] Roterende(vibreende) utstyr og strukturdesign, Jan Wigaard, 2009, Tilgjengelig fra http://www.stalforbund.com/NFS_7okt_2009.pdf (Lastet ned 5. februar 2013)
- [6] Materials Science And Engineering, 2010, William D. Callister Jr, David G. RethWisch
- [7] Transversal vibration of beam with damping, Terje Andersen, Lorents Reinås
- [8] Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4th Edition, 2001, Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, Robert J. Witt
- [9] Elements for Turbine Engine Blade Frequency Analysis, Tilgjengelig fra <http://web.mssoftware.com/support/library/conf/auc97/p02097.pdf> (Lastet ned 24. januar 2013)
- [10] ISO 1940 Mechanical vibration - Balance quality requirements for rotors in a constant (rigid) state -- Part 1: Specification and verification of balance tolerances, 2003

17 Appendiks A – Regneark

Bjelke geometri:

$$h := 12.7\text{mm} \quad b := 25.4\text{mm} \quad \underline{L} := 814\text{mm}$$

Material egenskaper:

$$E := 200\text{GPa} \quad \rho := 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \xi := 0.00123$$

Bjelke egenskaper:

$$I := \frac{1}{12} b \cdot h^3 = 4.336 \times 10^3 \cdot \text{mm}^4 \quad k := \frac{48 \cdot E \cdot I}{L^3} = 77.172 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Masse:

$$m_{\text{vektskiver}} := 6\text{kg} \quad m_{\text{motor}} := 2.533\text{kg} \quad m_{\text{bjelke}} := h \cdot b \cdot L \cdot \rho = 2.061\text{kg}$$

Fra Eq.8.14:

$$m_{\text{eq}} := \frac{17}{35} \cdot m_{\text{bjelke}} = 1.001\text{kg}$$

$$m_{\text{total}} := m_{\text{vektskiver}} + m_{\text{motor}} + m_{\text{eq}} = 9.534\text{kg}$$

Egenfrekvens og naturlig frekvens (SDOF):

Fra Eq.3.8:

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k}{m_{\text{total}}}} = 89.968 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Fra Eq.3.18:

$$f_n := \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi} = 14.319 \cdot \text{Hz}$$

Fra Eq.4.19:

$$\omega_d := \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_n = 89.968 \frac{1}{\text{s}} \quad f_d := \frac{\omega_d}{2\pi} = 14.319 \cdot \text{Hz}$$

Statisk nedbøyning:

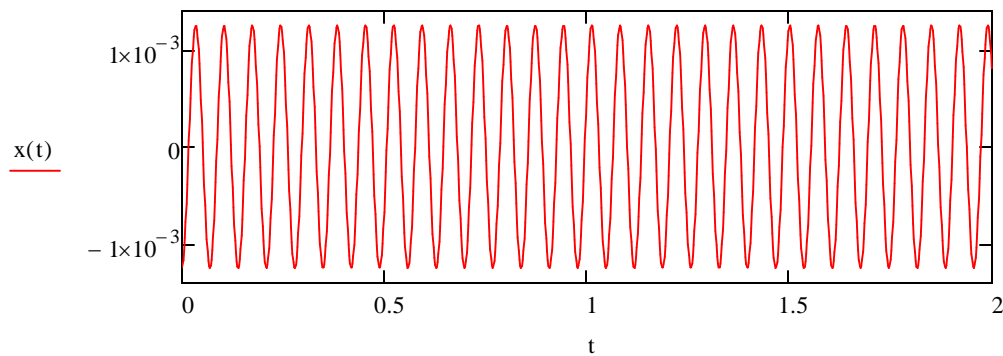
$$F := (m_{\text{vektskiver}} + m_{\text{motor}}) \cdot g = 83.68 \text{ N} \quad w := \rho \cdot g \cdot b \cdot h = 24.833 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$x_0 := -\frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} - \frac{5}{384} \cdot \frac{w \cdot L^4}{E \cdot I} = -1.248 \cdot \text{mm}$$

$$x'_0 := 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Fra Eq.3.11:

$$x(t) := x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{x'_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$$

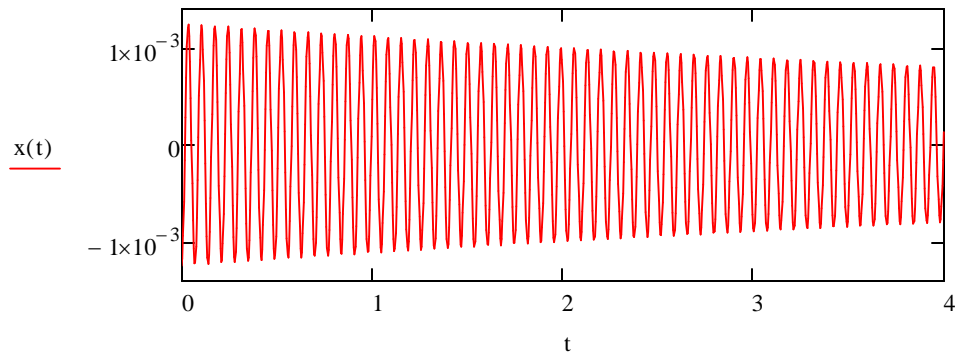


Fra Eq.4.23:

$$\xi := 0.00123$$

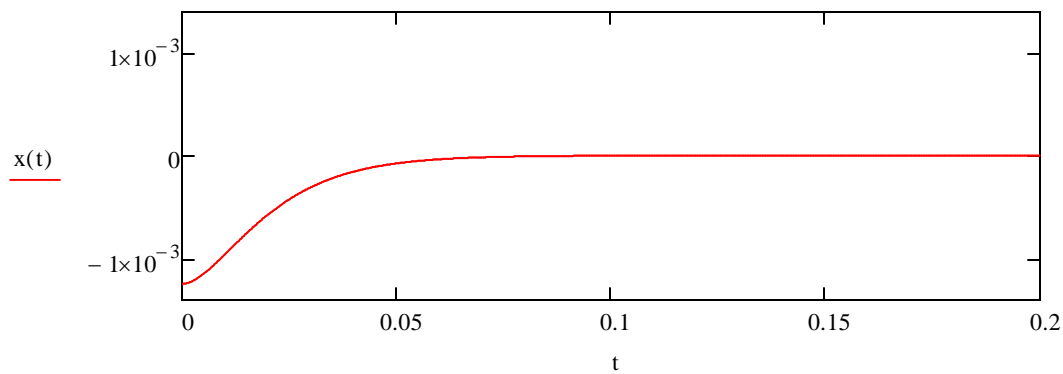
$$\omega_d := \sqrt{-\xi^2 + 1} \cdot \omega_n$$

$$x(t) := e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left(x_0 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right)$$



Fra Eq.4.28:

$$\underline{x}(t) := [x_0 + (x'_0 + \omega_n \cdot x_0) \cdot t] \cdot e^{-\omega_n \cdot t}$$



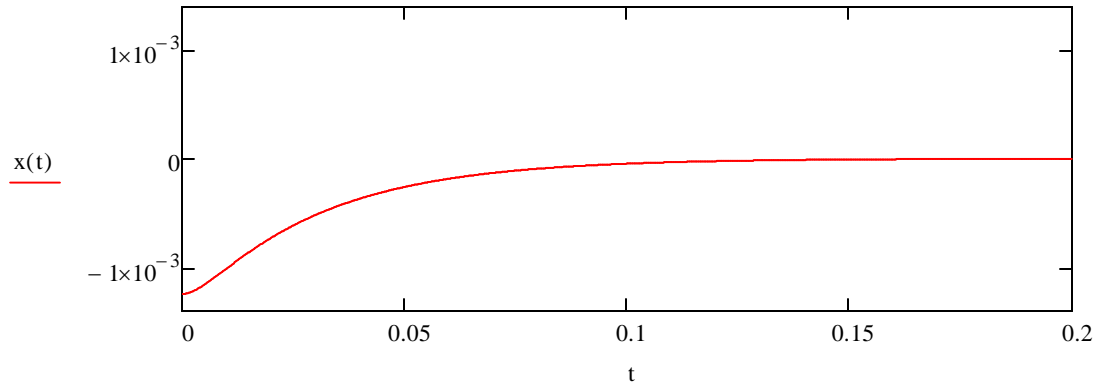
Fra Eq.4.33:

$$\underline{\xi} := 1.5$$

$$\underline{x}(t) := \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 + \omega_n \cdot x_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t} - \frac{x'_0 + \xi \cdot \omega_n \cdot x_0 - \omega_n \cdot x_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}{2 \cdot \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \omega_n \cdot t}$$

Mathcad regneark

9 Nummerisk eksempel



Bjelke data:

$$h := 12.7\text{mm} \quad b := 25.4\text{mm} \quad L := 814\text{mm} \quad A := b \cdot h$$

$$E := 200\text{GPa} \quad \rho := 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$I := \frac{1}{12} b \cdot h^3 = 4335.744 \cdot \text{mm}^4 \quad k := \frac{48 \cdot E \cdot I}{L^3} = 77.172 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Masse data:

$$m_{\text{bjelke}} := h \cdot b \cdot L \cdot \rho = 2.061 \text{ kg}$$

Fra Eq.8.14:

$$m_{\text{eq}} := \frac{17}{35} \cdot m_{\text{bjelke}} = 1.001 \text{ kg}$$

Egenfrekvens (SDOF metode)

Fra Eq.3.8:

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k}{m_{\text{eq}}}} = 277.635 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Egenfrekvens (Eksakt metode)

Fra Eq.10.45:

$$n := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \omega := \left(\frac{n \cdot \pi}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}} = \begin{pmatrix} 275.641 \\ 1102.565 \\ 2480.771 \\ 4410.26 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Egenfrekvens (Element metode)

Fra Eq.11.35 og Eq.11.36:

$$m_e := m_{\text{bjelke}}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{120.0 \cdot E \cdot I}{L^3 \cdot m_e}} \\ \sqrt{\frac{2520.0 \cdot E \cdot I}{L^3 \cdot m_e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 305.939 \\ 1401.989 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Fra Eq.11.41 til Eq.11.44:

$$L := 407 \text{ mm} \quad m_e := \frac{m_{\text{bjelke}}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{4968 \cdot E \cdot I \cdot L^3 \cdot m_e - 48 \cdot \sqrt{10371} \cdot E \cdot I \cdot L^3 \cdot m_e}{13 \cdot L^6 \cdot m_e^2}} \cdot \sqrt{\frac{120 \cdot E \cdot I}{L^3 \cdot m_e}} \\ \sqrt{\frac{4968 \cdot E \cdot I \cdot L^3 \cdot m_e + 48 \cdot \sqrt{10371} \cdot E \cdot I \cdot L^3 \cdot m_e}{13 \cdot L^6 \cdot m_e^2}} \cdot \sqrt{\frac{2520 \cdot E \cdot I}{L^3 \cdot m_e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 276.729 \\ 1223.757 \\ 3076.013 \\ 5607.958 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Disk data:

$$r_{\text{disk}} := 50.8\text{mm} \quad e_1 := 37.5\text{mm} \quad t_{\text{disk}} := 6.35\text{mm} \quad r_{\text{hull}} := 7\text{mm}$$

$$m_{\text{disk}} := 0.404\text{kg}$$

Tyngdepunkt av disken:

$$x = \frac{1}{A_t} \cdot \sum A_i \cdot x_i$$

$$x := \frac{1}{\pi(r_{\text{disk}}^2 - r_{\text{hull}}^2)} \cdot \left[(\pi \cdot r_{\text{disk}}^2) \cdot r_{\text{disk}} - (\pi \cdot r_{\text{hull}}^2) \cdot (r_{\text{disk}} + e_1) \right] = 50.074 \cdot \text{mm}$$

$$e_2 := r_{\text{disk}} - x = 0.726 \cdot \text{mm}$$

Bjelke data:

$$h := 12.7\text{mm} \quad b := 25.4\text{mm} \quad \overset{\text{mm}}{L} := 814\text{mm} \quad I := \frac{1}{12} b \cdot h^3 = 4.336 \times 10^3 \cdot \text{mm}^4$$

$$E := 200\text{GPa} \quad \xi := 0.00123 \quad \rho := 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$k := \frac{48 \cdot E \cdot I}{L^3} = 77.172 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Masse data:

$$m_{\text{stål.plater}} := 6\text{kg} \quad m_{\text{motor}} := 2.533\text{kg} \quad m_{\text{bjelke}} := h \cdot b \cdot L \cdot \rho = 2.061\text{kg}$$

Fra Eq.8.14:

$$m_{\text{eq}} := \frac{17}{35} \cdot m_{\text{bjelke}} = 1.001\text{kg}$$

$$m_{\text{total}} := m_{\text{stål.plater}} + m_{\text{motor}} + m_{\text{eq}} = 9.534\text{kg}$$

Egenfrekvens og naturlig frekvens (SDOF):

Fra Eq.3.8:

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k}{m_{\text{total}}}} = 89.968 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Fra Eq.3.18:

$$f_n := \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi} = 14.319 \cdot \text{Hz} \quad f_n = 8.591 \cdot \frac{100}{\text{min}}$$

Fra Eq.4.19:

$$\omega_d := \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_n = 89.968 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad f_d := \frac{\omega_d}{2\pi} = 14.319 \cdot \text{Hz}$$

Statisk forskyvning og starthastighet:

$$F := (m_{\text{stål,plater}} + m_{\text{motor}}) \cdot g = 83.68 \text{ N} \quad w := \rho \cdot g \cdot b \cdot h = 24.833 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$x_0 := -\frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} - \frac{5}{384} \cdot \frac{w \cdot L^4}{E \cdot I} = -1.248 \cdot \text{mm}$$

$$x'_0 := 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Disk frekvens

$$\omega := 8.52 \cdot \left(\frac{100}{60\text{s}} \cdot 2\pi \right) = 89.221 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad f := \frac{\omega}{2\pi} = 14.2 \cdot \text{Hz}$$

Eksentrisk masse utsatt for sentripetalakselerasjon:

Fra Eq.13.1:

$$F_0 := m_{\text{disk}} \cdot e_2 \cdot \omega^2 = 2.334 \cdot \text{N}$$

Statisk forskyvning:

$$\delta_{\text{st}} := \frac{F_0}{k} = 0.03 \cdot \text{mm}$$

Dynamisk respons:

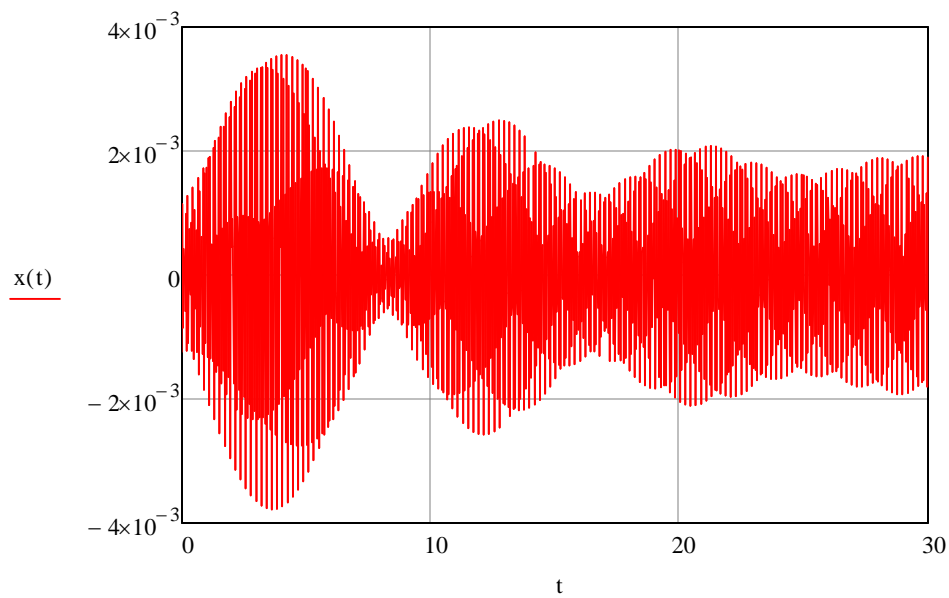
Fra Eq.7.13:

$$\frac{\delta_{\text{st}}}{2\xi} = 12.296 \cdot \text{mm} \quad r := \frac{\omega}{\omega_n} = 0.992 \quad \frac{\delta_{\text{st}}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} = 1.809 \cdot \text{mm}$$

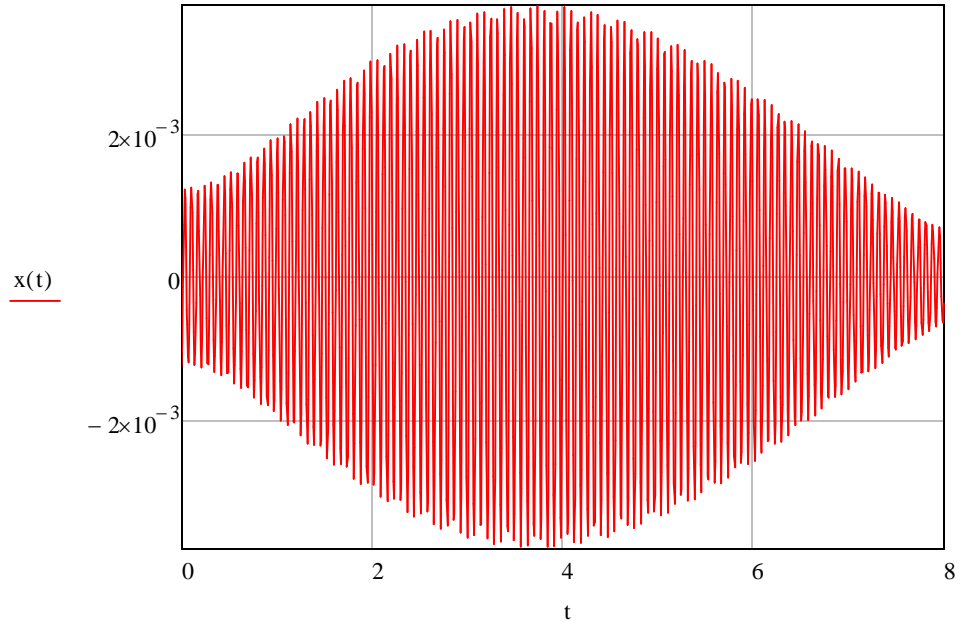
Fra Eq.7.20:

$$\text{sub} := \frac{\delta_{\text{st}}}{\sqrt{\left(\frac{(r^2 - 1)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}{(r^2 - 1)^2} + 1\right)}} = 1.79 \cdot \text{mm}$$

$$\ddot{x}(t) := \left[e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left[(x_0 - \text{sub}) \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{x'_0 + (x_0 - \text{sub}) \cdot \xi \cdot \omega_n + \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot r \cdot \text{sub}}{(r^2 - 1)}}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right] \dots \right. \\ \left. + \frac{\delta_{\text{st}}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1 - r^2}\right)\right) \right]$$



13.4.1 Kalkulerte resultater



Disk data:

$$r_{\text{disk}} := 50.8\text{mm} \quad e_1 := 37.5\text{mm} \quad t_{\text{disk}} := 6.35\text{mm} \quad r_{\text{hull}} := 7\text{mm}$$

$$m_{\text{disk}} := 0.404\text{kg}$$

Tyngdepunkt av disken:

$$x = \frac{1}{A_t} \cdot \sum A_i \cdot x_i$$

$$x := \frac{1}{\pi(r_{\text{disk}}^2 - r_{\text{hull}}^2)} \cdot \left[(\pi \cdot r_{\text{disk}}^2) \cdot r_{\text{disk}} - (\pi \cdot r_{\text{hull}}^2) \cdot (r_{\text{disk}} + e_1) \right] = 50.074 \cdot \text{mm}$$

$$e_2 := r_{\text{disk}} - x = 0.726 \cdot \text{mm}$$

Bjelke data:

$$h := 12.7\text{mm} \quad b := 25.4\text{mm} \quad \overset{\text{mm}}{L} := 814\text{mm} \quad I := \frac{1}{12} b \cdot h^3 = 4.336 \times 10^3 \cdot \text{mm}^4$$

$$E := 200\text{GPa} \quad \xi := 0.02083 \quad \rho := 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$k := \frac{48 \cdot E \cdot I}{L^3} = 77.172 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Masse data:

$$m_{\text{stål.plater}} := 6\text{kg} \quad m_{\text{motor}} := 2.533\text{kg} \quad m_{\text{bjelke}} := h \cdot b \cdot L \cdot \rho = 2.061\text{kg}$$

Fra Eq.8.14:

$$m_{\text{eq}} := \frac{17}{35} \cdot m_{\text{bjelke}} = 1.001\text{kg}$$

$$m_{\text{total}} := m_{\text{stål.plater}} + m_{\text{motor}} + m_{\text{eq}} = 9.534\text{kg}$$

Egenfrekvens og naturlig frekvens (SDOF):

Fra Eq.3.8:

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k}{m_{\text{total}}}} = 89.968 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Fra Eq.3.18:

$$f_n := \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi} = 14.319 \cdot \text{Hz} \quad f_n = 8.591 \cdot \frac{100}{\text{min}}$$

Fra Eq.4.19:

$$\omega_d := \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_n = 89.949 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad f_d := \frac{\omega_d}{2\pi} = 14.316 \cdot \text{Hz}$$

Statisk forskyvning og starthastighet:

$$F := (m_{\text{stål,plater}} + m_{\text{motor}}) \cdot g = 83.68 \text{ N} \quad w := \rho \cdot g \cdot b \cdot h = 24.833 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$x_0 := -\frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} - \frac{5}{384} \cdot \frac{w \cdot L^4}{E \cdot I} = -1.248 \cdot \text{mm}$$

$$x'_0 := 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Disk frekvens

$$\omega := 8.52 \cdot \left(\frac{100}{60\text{s}} \cdot 2\pi \right) = 89.221 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad f := \frac{\omega}{2\pi} = 14.2 \cdot \text{Hz}$$

Eksentrisk masse utsatt for sentripetalakselerasjon:

Fra Eq.13.1:

$$F_0 := m_{\text{disk}} \cdot e_2 \cdot \omega^2 = 2.334 \cdot \text{N}$$

Statisk forskyvning:

$$\delta_{\text{st}} := \frac{F_0}{k} = 0.03 \cdot \text{mm}$$

Dynamisk respons:

Fra Eq.7.13:

$$\frac{\delta_{st}}{2\xi} = 0.726 \cdot \text{mm} \quad r := \frac{\omega}{\omega_n} = 0.992 \quad \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} = 0.68 \cdot \text{mm}$$

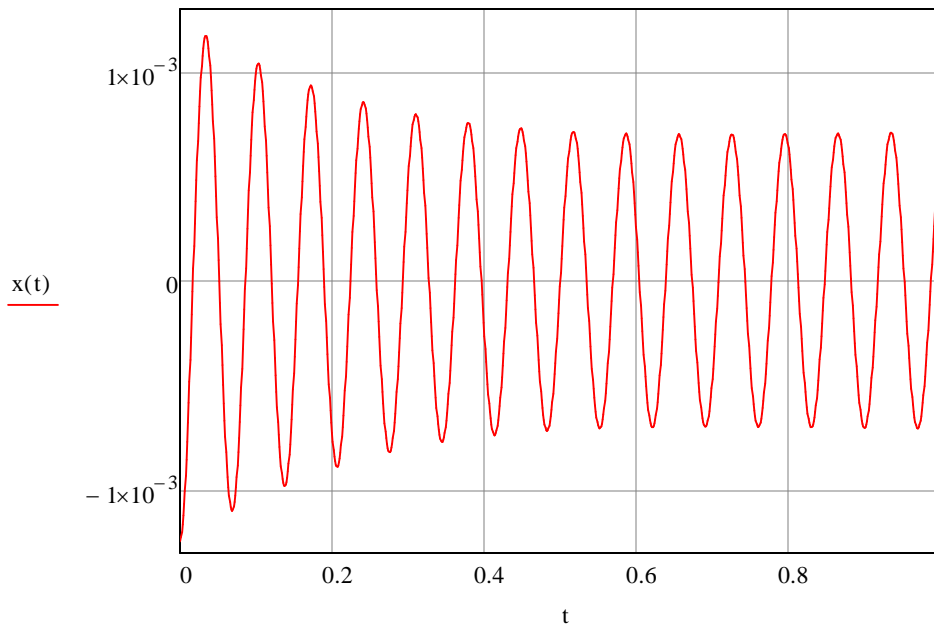
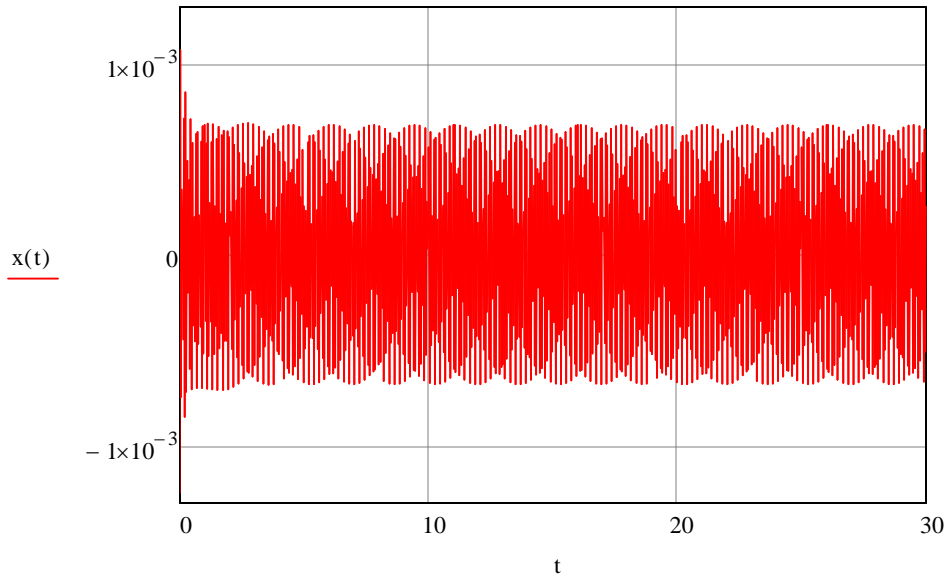
Fra Eq.7.20:

$$\text{sub} := \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2} \cdot \sqrt{\frac{(2 \cdot \xi \cdot r)^2}{(r^2 - 1)^2} + 1}} = 0.253 \cdot \text{mm}$$

$$\underline{\underline{x}}(t) := \left[\begin{array}{l} e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left[(x_0 - \text{sub}) \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{x'_0 + (x_0 - \text{sub}) \cdot \xi \cdot \omega_n + \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot r \cdot \text{sub}}{(r^2 - 1)}}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right] \dots \\ + \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \xi \cdot r}{1-r^2}\right)\right) \end{array} \right]$$

Mathcad regneark

13.5.1 Kalkulerete resultater



Densitetsøkning

$$\rho := 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$b := 25.4\text{mm} \quad h := 12.7\text{mm} \quad L_{\text{belastet.område}} := 30\text{mm}$$

$$V := b \cdot h \cdot L_{\text{belastet.område}} = 9.677 \times 10^3 \text{mm}^3$$

$$m_{\text{stål.plater}} := 6\text{kg} \quad m_{\text{motor}} := 2.533\text{kg}$$

$$\text{Load} := \rho \cdot V + m_{\text{stål.plater}} + m_{\text{motor}}$$

$$\rho_{\text{load.area}} := \frac{\text{Load}}{V} = 8.896 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Rayleigh dempning

Egenfrekvensene er hentet ut fra natural frequency resultatene i Abaqus

Fra [Eq. 11.49](#) og [Eq. 11.50](#)

Rayleigh demping til bjelke-element analyse:

$$\omega_1 := 14.326 \cdot 2\pi \text{ Hz} \quad \omega_2 := 169.90 \cdot 2\pi \text{ Hz}$$

Ettersom vi kun har dempningsforholdet til den første svingeformen og vi kun er interessert i den, setter vi det andre dempningsforholdet lik det første.

$$\xi_1 := 0.00123 \quad \xi_2 := \xi_1$$

$$\alpha := \frac{2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot (\xi_1 \cdot \omega_2 - \xi_2 \cdot \omega_1) = 0.204 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\beta := \frac{2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot (\xi_2 \cdot \omega_2 - \xi_1 \cdot \omega_1) = 2.125 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Rayleigh demping til solid-element analyse:

$$\omega_1 := 14.670 \cdot 2\pi \text{ Hz} \quad \omega_2 := 173.35 \cdot 2\pi \text{ Hz}$$

$$\alpha := \frac{2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot (\xi_1 \cdot \omega_2 - \xi_2 \cdot \omega_1) = 0.209 \frac{1}{s}$$

$$\beta := \frac{2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot (\xi_2 \cdot \omega_2 - \xi_1 \cdot \omega_1) = 2.082 \times 10^{-6} s$$

Viskøs dempningskoeffisient

Materialdempning

$$\xi_{\text{material}} := 0.00123$$

Dempningsforhold fra materialdempning og viskøs demper

$$\xi_{\text{ViskøsDemperOgMaterial}} := 0.02083$$

$$\frac{\xi_{\text{material}}}{\xi_{\text{ViskøsDemperOgMaterial}}} = 5.905\%$$

Materialdempningen utgjør en veldig liten andel av det totale dempningsforholdet, Vi bryr oss dermed ikke med å fjerne materialdempningen fra dempningsforholdet.

$$\omega_n := 89.968 \frac{\text{rad}}{s} \quad \xi := 0.02083 \quad m_{\text{total}} := 9.534 \text{ kg}$$

Kombinerer [Eq.4.6](#) og [Eq.4.7](#)

$$c := 2 \cdot m_{\text{total}} \cdot \omega_n \cdot \xi = 35.734 \cdot \frac{\text{N} \cdot s}{m}$$

Disk data:

$$r_{\text{disk}} := 50.8\text{mm} \quad e_1 := 37.5\text{mm} \quad t_{\text{disk}} := 6.35\text{mm} \quad r_{\text{hull}} := 7\text{mm}$$

$$m_{\text{disk}} := 0.404\text{kg}$$

Tyngdepunkt av disken:

$$x = \frac{1}{A_t} \cdot \sum A_i \cdot x_i$$

$$x := \frac{1}{\pi(r_{\text{disk}}^2 - r_{\text{hull}}^2)} \cdot \left[(\pi \cdot r_{\text{disk}}^2) \cdot r_{\text{disk}} - (\pi \cdot r_{\text{hull}}^2) \cdot (r_{\text{disk}} + e_1) \right] = 50.074 \cdot \text{mm}$$

$$e_2 := r_{\text{disk}} - x = 0.726 \cdot \text{mm}$$

Masse data:

$$m_{\text{stål,plater}} := 6\text{kg} \quad m_{\text{motor}} := 2.533\text{kg}$$

Fjærer under resonans:**Disk frekvens**

$$\omega := 3.3448 \cdot 2\pi \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 21.016 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Eksentrisk masse utsatt for sentripetalakselerasjon:

Fra Eq.13.1:

$$F_0 := m_{\text{disk}} \cdot e_2 \cdot \omega^2 = 0.13 \cdot \text{N}$$

Isolator egenskaper

$$k_{\text{fjær}} := 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad h_{\text{fjær}} := 50\text{mm} \quad \xi_{\text{fjær}} := 0.00123$$

Fra Eq.3.8:

$$\omega_{\text{n.fjær}} := \sqrt{\frac{k_{\text{fjær}}}{m_{\text{stål,plater}} + m_{\text{motor}}}} = 21.651 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$c_c := 2 \cdot (m_{\text{stål,plater}} + m_{\text{motor}}) \cdot \omega_n \cdot \text{fjær}$$

Kombinerer Eq.4.6 og Eq.4.7

$$\xi_{\text{fjær}} := \xi_{\text{fjær}} \cdot c_c = 0.454 \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$$

$$\text{fjær}_{\text{sjekk1}} := \frac{(m_{\text{stål,plater}} + m_{\text{motor}}) \cdot g}{k_{\text{fjær}}} = 20.92 \cdot \text{mm}$$

Abaqus kalkulerte den totalte forskyvningen til fjæren under resonansrespons til å være 2.39mm.

$$\text{fjær}_{\text{sjekk2}} := 2.39 \text{mm}$$

Vi antar fjæren sammenpresset er 1/3 av sin opprinnelige høyde.

$$\text{fjær}_{\text{sjekk}} := \text{if} \left(\frac{2h_{\text{fjær}}}{3} \geq \text{fjær}_{\text{sjekk1}} + \text{fjær}_{\text{sjekk2}}, \text{"OK"}, \text{"IKKE OK"} \right)$$

fjær_{sjekk} = "OK"

$$r := \frac{\omega}{\omega_n \cdot \text{fjær}} = 0.971$$

$$F_T := F_0 \sqrt{\frac{1 + (2\xi_{\text{fjær}} \cdot r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi_{\text{fjær}} \cdot r)^2}} = 2.239 \text{ N}$$

Bjelke under resonans:

Disk frekvens

$$\omega := 44.962 \cdot 2\pi \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 282.505 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Eksentrisk masse utsatt for sentripetalakselerasjon:

$$F_0 := m_{\text{disk}} \cdot e_2 \cdot \omega^2 = 23.402 \cdot \text{N}$$

Isolator kalkulasjoner

$$\text{fjær}_{\text{sjekk1}} := \frac{(m_{\text{stål,plater}} + m_{\text{motor}}) \cdot g + F_0}{k_{\text{fjær}}} = 26.771 \cdot \text{mm}$$

$$f_{\text{fjær_sjekk}} := \text{if} \left(\frac{2h_{\text{fjær}}}{3} \geq f_{\text{fjær_sjekk1}}, \text{"OK"}, \text{"IKKE OK"} \right)$$

fjær_sjekk = "OK"

$$r := \frac{\omega}{\omega_{n.\text{fjær}}} = 13.048$$

$$F_{\text{T}} := F_0 \sqrt{\frac{1 + (2\xi_{\text{fjær}} \cdot r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi_{\text{fjær}} \cdot r)^2}} = 0.138 \text{ N}$$

Bjelke under operasjons:

Disk frekvens

$$\omega := 50 \cdot 2\pi \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 314.159 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Eksentrisk masse utsatt for sentripetalakselerasjon:

$$F_0 := m_{\text{disk}} \cdot e_2 \cdot \omega^2 = 28.941 \cdot \text{N}$$

Isolator kalkulasjoner

$$f_{\text{fjær_sjekk}} := \frac{(m_{\text{stål.plater}} + m_{\text{motor}}) \cdot g + F_0}{k_{\text{fjær}}} = 28.155 \cdot \text{mm}$$

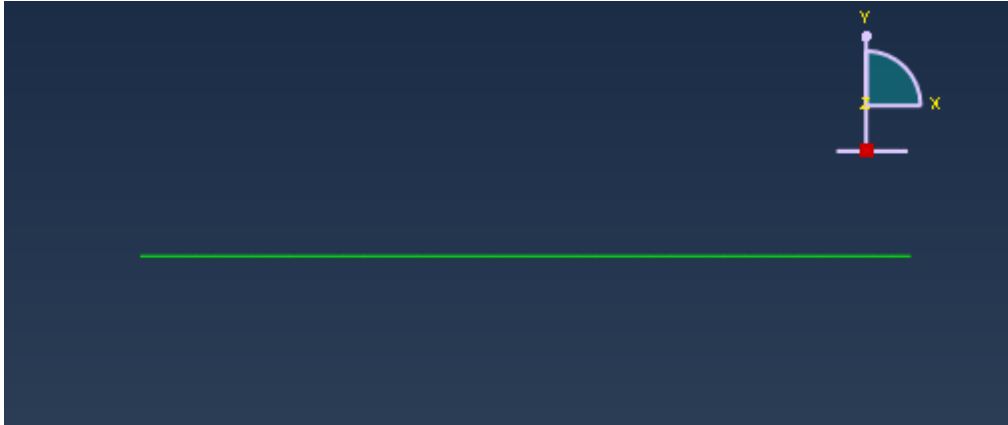
$$f_{\text{fjær_sjekk}} := \text{if} \left(\frac{2h_{\text{fjær}}}{3} \geq f_{\text{fjær_sjekk1}}, \text{"OK"}, \text{"IKKE OK"} \right)$$

fjær_sjekk = "OK"

$$r := \frac{\omega}{\omega_{n.\text{fjær}}} = 14.51$$

$$F_{\text{T}} := F_0 \sqrt{\frac{1 + (2\xi_{\text{fjær}} \cdot r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi_{\text{fjær}} \cdot r)^2}} = 0.138 \text{ N}$$

B21-bjelkeelement



*Heading
Natural Frequency and Modal analysis
** Job name: Analysis Model name: Model -1
** Generated by: Abaqus/CAE 6.10-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**

** PARTS

**
*Part, name=LabBeam

*Node

1,	0.,	0.
2,	0.391999999,	0.
3,	0.407000005,	0.
4,	0.421999991,	0.
5,	0.814000001,	0.
6,	0.0196000002,	0.
7,	0.0392000005,	0.
8,	0.0588000007,	0.
9,	0.0784000009,	0.
10,	0.0979999974,	0.
11,	0.1176000001,	0.
12,	0.137199998,	0.
13,	0.1568000002,	0.
14,	0.1764000006,	0.
15,	0.195999995,	0.
16,	0.215599999,	0.
17,	0.235200003,	0.
18,	0.254799992,	0.
19,	0.274399996,	0.
20,	0.294,	0.
21,	0.3136000004,	0.
22,	0.3332000008,	0.
23,	0.3528000012,	0.
24,	0.3723999986,	0.
25,	0.441599995,	0.
26,	0.461199999,	0.
27,	0.4808000003,	0.
28,	0.5004000007,	0.
29,	0.5199999981,	0.
30,	0.5396000015,	0.
31,	0.5591999989,	0.
32,	0.5788000023,	0.
33,	0.5983999997,	0.
34,	0.6179999971,	0.
35,	0.6376000005,	0.
36,	0.6571999979,	0.
37,	0.6768000013,	0.
38,	0.6963999987,	0.
39,	0.7160000021,	0.
40,	0.7355999995,	0.
41,	0.7552000028,	0.
42,	0.7748000003,	0.
43,	0.7943999977,	0.

*Element, type=B21

1,	1,	6
2,	6,	7
3,	7,	8
4,	8,	9
5,	9,	10
6,	10,	11
7,	11,	12
8,	12,	13
9,	13,	14
10,	14,	15
11,	15,	16
12,	16,	17
13,	17,	18
14,	18,	19
15,	19,	20
16,	20,	21
17,	21,	22

```

18, 22, 23
19, 23, 24
20, 24, 2
21, 2, 3
22, 3, 4
23, 4, 25
24, 25, 26
25, 26, 27
26, 27, 28
27, 28, 29
28, 29, 30
29, 30, 31
30, 31, 32
31, 32, 33
32, 33, 34
33, 34, 35
34, 35, 36
35, 36, 37
36, 37, 38
37, 38, 39
38, 39, 40
39, 40, 41
40, 41, 42
41, 42, 43
42, 43, 5
*Nset, nset=_PickedSet2, internal
  1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17
  18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33
  34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43
*El set, el set=_PickedSet2, internal
  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
  17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
  35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42
*Nset, nset=_PickedSet3, internal
  2, 3
*El set, el set=_PickedSet3, internal
  21,
*Nset, nset=_PickedSet4, internal
  3, 4
*El set, el set=_PickedSet4, internal
  22,
*Nset, nset=_PickedSet6, internal, generate
  1, 43, 1
*El set, el set=_PickedSet6, internal, generate
  1, 42, 1
*Nset, nset=_PickedSet7, internal, generate
  1, 43, 1
*El set, el set=_PickedSet7, internal, generate
  1, 42, 1
*Nset, nset=_PickedSet8, internal, generate
  1, 43, 1
*El set, el set=_PickedSet8, internal, generate
  1, 42, 1
*Nset, nset=_PickedSet9, internal, generate
  1, 43, 1
*El set, el set=_PickedSet9, internal, generate
  1, 42, 1
*Nset, nset=_PickedSet10, internal, generate
  1, 43, 1
*El set, el set=_PickedSet10, internal, generate
  1, 42, 1
*Orientation, name=Ori -2
1., 0., 0., 0., 1., 0.
3, 0.
** Section: LabBeam Profile: LabSection
*Beam Section, el set=_PickedSet8, material =Steel, temperature=GRADIENTS,
section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
*End Part
**

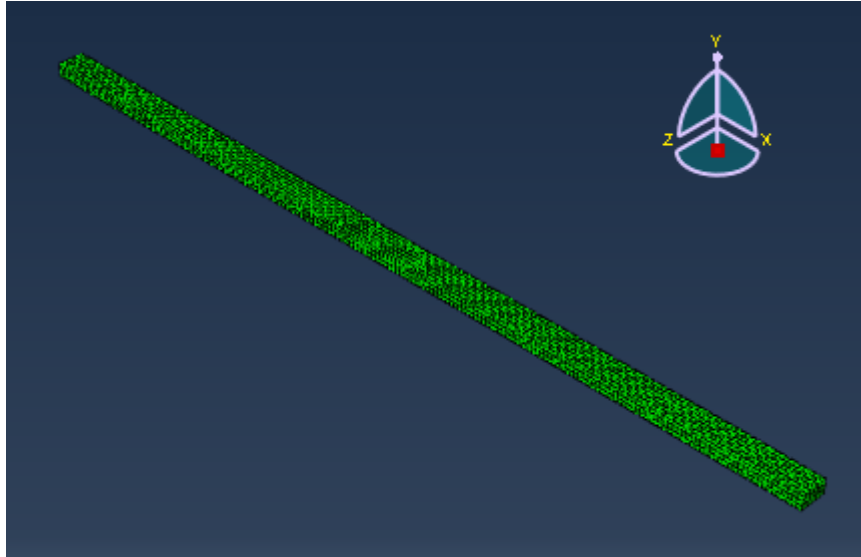
```

```

**
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=LabBeam-1, part=LabBeam
*End Instance
**
*Nset, nset=_PickedSet4, internal, instance=LabBeam-1
1,
*Nset, nset=_PickedSet5, internal, instance=LabBeam-1
5,
*End Assembly
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Steel
*Density
7850.,
*Elastic
2e+11, 0.3
** -----
**
** STEP: Natural Frequency
**
*Step, name="Natural Frequency", perturbation
Natural Frequency
*Frequency, eigensolver=Lanczos, acoustic coupling=on,
normalization=displacement
4, , , ,
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: LS Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet4, 1, 1
_PickedSet4, 2, 2
** Name: RS Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet5, 2, 2
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
*End Step

```

C3D20R-solidelement



Denne input filen er stor og ligger kun på vedlagt CD

Bjelken med 6kg masse – Wire



*Heading
Natural Frequency and Modal analysis
** Job name: Analysis Model name: Model -1
** Generated by: Abaqus/CAE 6.10-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**

** PARTS

**
*Part, name=LabBeam

*Node

1,	0.,	0.
2,	0.391999999,	0.
3,	0.407000005,	0.
4,	0.421999991,	0.
5,	0.814000001,	0.
6,	0.0196000002,	0.
7,	0.0392000005,	0.
8,	0.0588000007,	0.
9,	0.0784000009,	0.
10,	0.0979999974,	0.
11,	0.1176000001,	0.
12,	0.137199998,	0.
13,	0.1568000002,	0.
14,	0.1764000006,	0.
15,	0.195999995,	0.
16,	0.215599999,	0.
17,	0.235200003,	0.
18,	0.254799992,	0.
19,	0.274399996,	0.
20,	0.294,	0.
21,	0.3136000004,	0.
22,	0.3332000008,	0.
23,	0.3528000012,	0.
24,	0.3723999986,	0.
25,	0.441599995,	0.
26,	0.461199999,	0.
27,	0.4808000003,	0.
28,	0.5004000007,	0.
29,	0.5199999981,	0.
30,	0.5396000015,	0.
31,	0.5591999989,	0.
32,	0.5788000023,	0.
33,	0.598399997,	0.
34,	0.6179999971,	0.
35,	0.6376000005,	0.
36,	0.6571999979,	0.
37,	0.6768000013,	0.
38,	0.6963999987,	0.
39,	0.7160000021,	0.
40,	0.735599995,	0.
41,	0.7552000028,	0.
42,	0.7748000003,	0.
43,	0.7943999977,	0.

*Element, type=B21

1,	1,	6
2,	6,	7
3,	7,	8
4,	8,	9
5,	9,	10
6,	10,	11
7,	11,	12
8,	12,	13
9,	13,	14
10,	14,	15
11,	15,	16
12,	16,	17
13,	17,	18
14,	18,	19
15,	19,	20
16,	20,	21
17,	21,	22


```

18, 22, 23
19, 23, 24
20, 24, 2
21, 2, 3
22, 3, 4
23, 4, 25
24, 25, 26
25, 26, 27
26, 27, 28
27, 28, 29
28, 29, 30
29, 30, 31
30, 31, 32
31, 32, 33
32, 33, 34
33, 34, 35
34, 35, 36
35, 36, 37
36, 37, 38
37, 38, 39
38, 39, 40
39, 40, 41
40, 41, 42
41, 42, 43
42, 43, 5
*Nset, nset=_PickedSet2, internal
  1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17
  18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33
  34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43
*Elset, elset=_PickedSet2, internal
  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
  17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
  35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42
*Nset, nset=_PickedSet3, internal
  2, 3
*Elset, elset=_PickedSet3, internal
  21,
*Nset, nset=_PickedSet4, internal
  3, 4
*Elset, elset=_PickedSet4, internal
  22,
*Nset, nset=_PickedSet6, internal, generate
  1, 43, 1
*Elset, elset=_PickedSet6, internal, generate
  1, 42, 1
*Nset, nset=_PickedSet7, internal, generate
  1, 43, 1
*Elset, elset=_PickedSet7, internal, generate
  1, 42, 1
*Orientation, name=Ori -1
1., 0., 0., 0., 1., 0.
3, 0.
** Section: LabBeam Profile: LabSection
*Beam Section, elset=_PickedSet2, material=Steel, temperature=GRADIENTS,
section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
** Section: LabBeam with equip Profile: LabSection
*Beam Section, elset=_PickedSet3, material="Steel with equip",
temperature=GRADIENTS, section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
** Section: LabBeam with equip Profile: LabSection
*Beam Section, elset=_PickedSet4, material="Steel with equip",
temperature=GRADIENTS, section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
*End Part
**
**
** ASSEMBLY

```

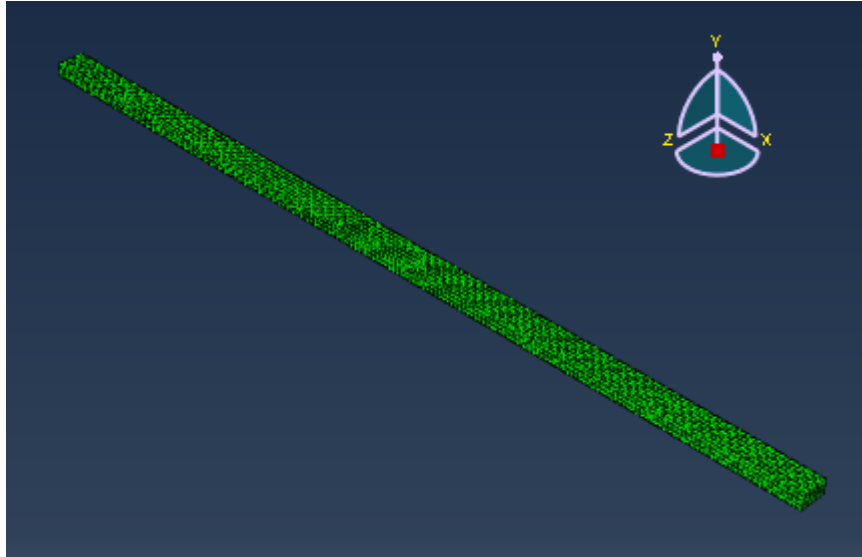
```

**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=LabBeam-1, part=LabBeam
*End Instance
**
*Nset, nset=_PickedSet6, internal, instance=LabBeam-1
3,
*Nset, nset=_PickedSet7, internal, instance=LabBeam-1
1,
*Nset, nset=_PickedSet8, internal, instance=LabBeam-1
5,
*Nset, nset=_PickedSet9, internal, instance=LabBeam-1
3,
*End Assembly
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Steel
*Damping, alpha=0.204, beta=2.125e-06
*Density
7850.,
*Elastic
2e+11, 0.3
*Material, name="Steel with equip"
*Damping, alpha=0.204, beta=2.125e-06
*Density
889600.,
*Elastic
2e+11, 0.3
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: LS Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet7, 1, 1
_PickedSet7, 2, 2
** Name: RS Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet8, 2, 2
**
-----
**
** STEP: Natural Frequency
**
*Step, name="Natural Frequency", perturbation
Natural Frequency
*Frequency, eigensolver=Lanczos, acoustic coupling=on,
normalization=displacement
8, , , , ,
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
*End Step
**
-----
**
** STEP: Direct Analysis
**
*Step, name="Direct Analysis", perturbation
*Steady State Dynamics, direct, friction damping=NO
10., 20., 1000, 1.
**
** LOADS
**
** Name: Periodic Load1 Type: Concentrated force
*Load, load case=1
_PickedSet9, 2, -2.334

```

```
**
** OUTPUT REQUESTS
**
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-3
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-2
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
** -----
**
** STEP: Modal Analysis
**
*Step, name="Modal Analysis", perturbation
*Steady State Dynamics, interval=RANGE
10., 20., 1000, 1.
*Modal Damping
1, 1, 0.00123
**
** LOADS
**
** Name: Periodic Load2   Type: Concentrated force
*Cl load, load case=1
_PickedSet6, 2, -2.334
**
** OUTPUT REQUESTS
**
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-2
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
```

Bjelken med 6kg masse – Solid



Denne input filen er stor og ligger kun på vedlagt CD

Bjelken med 6kg masse og demper - Wire



*Heading
 Natural Frequency and Modal analysis
 ** Job name: Analysis Model name: Model -1
 ** Generated by: Abaqus/CAE 6.10-1
 *Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
 **

** PARTS

**
 *Part, name=LabBeam

*Node

1,	0.,	0.
2,	0.391999999,	0.
3,	0.407000005,	0.
4,	0.421999991,	0.
5,	0.814000001,	0.
6,	0.421999991,	-0.100000001
7,	0.421999991,	-0.109999999
8,	0.0196000002,	0.
9,	0.0392000005,	0.
10,	0.0588000007,	0.
11,	0.0784000009,	0.
12,	0.0979999974,	0.
13,	0.117600001,	0.
14,	0.137199998,	0.
15,	0.156800002,	0.
16,	0.176400006,	0.
17,	0.195999995,	0.
18,	0.215599999,	0.
19,	0.235200003,	0.
20,	0.254799992,	0.
21,	0.274399996,	0.
22,	0.294,	0.
23,	0.313600004,	0.
24,	0.333200008,	0.
25,	0.352800012,	0.
26,	0.372399986,	0.
27,	0.441599995,	0.
28,	0.461199999,	0.
29,	0.480800003,	0.
30,	0.500400007,	0.
31,	0.519999981,	0.
32,	0.539600015,	0.
33,	0.559199989,	0.
34,	0.578800023,	0.
35,	0.598399997,	0.
36,	0.617999971,	0.
37,	0.637600005,	0.
38,	0.657199979,	0.
39,	0.676800013,	0.
40,	0.696399987,	0.
41,	0.716000021,	0.
42,	0.735599995,	0.
43,	0.755200028,	0.
44,	0.774800003,	0.
45,	0.794399977,	0.

*Element, type=B21

1,	1,	8
2,	8,	9
3,	9,	10
4,	10,	11
5,	11,	12
6,	12,	13
7,	13,	14
8,	14,	15
9,	15,	16
10,	16,	17
11,	17,	18
12,	18,	19
13,	19,	20
14,	20,	21
15,	21,	22

```

16, 22, 23
17, 23, 24
18, 24, 25
19, 25, 26
20, 26, 2
21, 2, 3
22, 3, 4
23, 4, 27
24, 27, 28
25, 28, 29
26, 29, 30
27, 30, 31
28, 31, 32
29, 32, 33
30, 33, 34
31, 34, 35
32, 35, 36
33, 36, 37
34, 37, 38
35, 38, 39
36, 39, 40
37, 40, 41
38, 41, 42
39, 42, 43
40, 43, 44
41, 44, 45
42, 45, 5
43, 6, 7
*Nset, nset=_PickedSet2, internal
  1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19
  20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35
  36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45
*El set, el set=_PickedSet2, internal
  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
  17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
  35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42
*Nset, nset=_PickedSet3, internal
  2, 3
*El set, el set=_PickedSet3, internal
  21,
*Nset, nset=_PickedSet4, internal
  3, 4
*El set, el set=_PickedSet4, internal
  22,
*Nset, nset=_PickedSet6, internal
  1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
  19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
  35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45
*El set, el set=_PickedSet6, internal, generate
  1, 42, 1
*Nset, nset=_PickedSet7, internal
  1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
  19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
  35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45
*El set, el set=_PickedSet7, internal, generate
  1, 42, 1
*Nset, nset=_PickedSet15, internal
  4,
*Nset, nset=_PickedSet16, internal
  6,
*Nset, nset=_PickedSet17, internal, generate
  1, 45, 1
*El set, el set=_PickedSet17, internal, generate
  1, 43, 1
*Nset, nset=_PickedSet18, internal, generate
  1, 45, 1
*El set, el set=_PickedSet18, internal, generate
  1, 43, 1
*Nset, nset=_PickedSet19, internal
  6, 7
*El set, el set=_PickedSet19, internal

```

```

43,
*Orientation, name=Ori-3
1., 0., 0., 0., 1., 0.
3, 0.
** Section: LabBeam Profile: LabSection
*Beam Section, elset=_PickedSet2, material=Steel, temperature=GRADIENTS,
section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
** Section: LabBeam with equip Profile: LabSection
*Beam Section, elset=_PickedSet3, material="Steel with equip",
temperature=GRADIENTS, section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
** Section: LabBeam with equip Profile: LabSection
*Beam Section, elset=_PickedSet4, material="Steel with equip",
temperature=GRADIENTS, section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
** Section: LabBeam Profile: LabSection
*Beam Section, elset=_PickedSet19, material=Steel, temperature=GRADIENTS,
section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
*Element, type=DashpotA, elset=Springs/Dashpots-1-dashpot
44, 4, 6
*Dashpot, elset=Springs/Dashpots-1-dashpot

36.594
*End Part
**
**
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=LabBeam-1, part=LabBeam
*End Instance
**
*Nset, nset=_PickedSet11, internal, instance=LabBeam-1
3,
*Nset, nset=_PickedSet14, internal, instance=LabBeam-1
1,
*Nset, nset=_PickedSet15, internal, instance=LabBeam-1
5,
*Nset, nset=_PickedSet16, internal, instance=LabBeam-1
7,
*End Assembly
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Steel
*Damping, alpha=0.204, beta=2.125e-06
*Density
7850.,
*Elastic
2.1e+11, 0.3
*Material, name="Steel with equip"
*Damping, alpha=0.204, beta=2.125e-06
*Density
889600.,
*Elastic
2.1e+11, 0.3
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: LS Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet14, 1, 1
_PickedSet14, 2, 2
** Name: RS Type: Displacement/Rotation

```



```

*Boundary
_PickedSet15, 2, 2
** Name: Spring support Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet16, 1, 1
_PickedSet16, 2, 2
** -----
**
** STEP: Natural Frequency
**
*Step, name="Natural Frequency", perturbation
Natural Frequency
*Frequency, eigensolver=Lanczos, acoustic coupling=on,
normalization=displacement
1, , , ,
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
*End Step
** -----
**
** STEP: Direct Analysis
**
*Step, name="Direct Analysis", perturbation
Direct Analysis
*Steady State Dynamics, direct, friction damping=NO
10., 20., 1000, 1.
**
** LOADS
**
** Name: Periodic Load Type: Concentrated force
*Load, load case=1
_PickedSet11, 2, -2.334
**
** OUTPUT REQUESTS
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-2
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step

```

Vibrasjons isolering



*Heading
 Natural Frequency and Modal analysis
 ** Job name: Analysis Model name: Model -1
 ** Generated by: Abaqus/CAE 6.10-1
 *Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
 **

** PARTS

**
 *Part, name=LabBeam

*Node

1,	0.,	0.
2,	0.391999999,	0.
3,	0.407000005,	0.
4,	0.421999991,	0.
5,	0.814000001,	0.
6,	0.391999999,	0.0500000007
7,	0.407000005,	0.0500000007
8,	0.421999991,	0.0500000007
9,	0.0196000002,	0.
10,	0.0392000005,	0.
11,	0.0588000007,	0.
12,	0.0784000009,	0.
13,	0.0979999974,	0.
14,	0.117600001,	0.
15,	0.137199998,	0.
16,	0.156800002,	0.
17,	0.176400006,	0.
18,	0.195999995,	0.
19,	0.215599999,	0.
20,	0.235200003,	0.
21,	0.254799992,	0.
22,	0.274399996,	0.
23,	0.294,	0.
24,	0.313600004,	0.
25,	0.333200008,	0.
26,	0.352800012,	0.
27,	0.372399986,	0.
28,	0.441599995,	0.
29,	0.461199999,	0.
30,	0.480800003,	0.
31,	0.500400007,	0.
32,	0.519999981,	0.
33,	0.539600015,	0.
34,	0.559199989,	0.
35,	0.578800023,	0.
36,	0.598399997,	0.
37,	0.617999971,	0.
38,	0.637600005,	0.
39,	0.657199979,	0.
40,	0.676800013,	0.
41,	0.696399987,	0.
42,	0.716000021,	0.
43,	0.735599995,	0.
44,	0.755200028,	0.
45,	0.774800003,	0.
46,	0.794399977,	0.

*Element, type=B21

1,	1,	9
2,	9,	10
3,	10,	11
4,	11,	12
5,	12,	13
6,	13,	14
7,	14,	15
8,	15,	16
9,	16,	17
10,	17,	18
11,	18,	19
12,	19,	20
13,	20,	21
14,	21,	22

```

15, 22, 23
16, 23, 24
17, 24, 25
18, 25, 26
19, 26, 27
20, 27, 2
21, 2, 3
22, 3, 4
23, 4, 28
24, 28, 29
25, 29, 30
26, 30, 31
27, 31, 32
28, 32, 33
29, 33, 34
30, 34, 35
31, 35, 36
32, 36, 37
33, 37, 38
34, 38, 39
35, 39, 40
36, 40, 41
37, 41, 42
38, 42, 43
39, 43, 44
40, 44, 45
41, 45, 46
42, 46, 5
43, 6, 7
44, 7, 8
*Nset, nset=_PickedSet2, internal
  1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
  21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36
  37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46
*El set, el set=_PickedSet2, internal
  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
  17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
  35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42
*Nset, nset=_PickedSet6, internal
  1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19
  20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35
  36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46
*El set, el set=_PickedSet6, internal, generate
  1, 42, 1
*Nset, nset=_PickedSet7, internal
  1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19
  20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35
  36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46
*El set, el set=_PickedSet7, internal, generate
  1, 42, 1
*Nset, nset=_PickedSet8, internal
  6,
*Nset, nset=_PickedSet9, internal
  2,
*Nset, nset=_PickedSet10, internal
  8,
*Nset, nset=_PickedSet11, internal
  4,
*Nset, nset=_PickedSet12, internal, generate
  6, 8, 1
*El set, el set=_PickedSet12, internal
  43, 44
*Nset, nset=_PickedSet13, internal, generate
  2, 4, 1
*El set, el set=_PickedSet13, internal
  21, 22
*Nset, nset=_PickedSet14, internal, generate
  1, 46, 1
*El set, el set=_PickedSet14, internal, generate
  1, 44, 1
*Nset, nset=_PickedSet15, internal, generate

```

```

1, 46, 1
*El set, el set=_PickedSet15, internal, generate
1, 44, 1
*Orientation, name=Ori-2
1., 0., 0., 0., 1., 0.
3, 0.
** Section: LabBeam Profile: LabSection
*Beam Section, el set=_PickedSet2, material=Steel, temperature=GRADIENTS,
section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
** Section: LabBeam Profile: LabSection
*Beam Section, el set=_PickedSet13, material=Steel, temperature=GRADIENTS,
section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
** Section: LabBeam with equip Profile: LabSection
*Beam Section, el set=_PickedSet12, material="Steel with equip",
temperature=GRADIENTS, section=RECT
0.0254, 0.0127
0., 0., -1.
*Element, type=SpringA, el set=Spring1-spring
45, 6, 2
*Element, type=DashpotA, el set=Spring1-dashpot
46, 6, 2
*Spring, el set=Spring1-spring

2000.
*Dashpot, el set=Spring1-dashpot

0.454
*Element, type=SpringA, el set=Spring2-spring
47, 8, 4
*Element, type=DashpotA, el set=Spring2-dashpot
48, 8, 4
*Spring, el set=Spring2-spring

2000.
*Dashpot, el set=Spring2-dashpot

0.454
*End Part
**
**
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=LabBeam-1, part=LabBeam
*End Instance
**
*Nset, nset=_PickedSet10, internal, instance=LabBeam-1
1,
*Nset, nset=_PickedSet11, internal, instance=LabBeam-1
5,
*Nset, nset=_PickedSet12, internal, instance=LabBeam-1
6,
*Nset, nset=_PickedSet13, internal, instance=LabBeam-1
7,
*Nset, nset=_PickedSet14, internal, instance=LabBeam-1
7,
*End Assembly
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Steel
*Damping, alpha=0.204, beta=2.125e-06
*Density
7850.,
*Elastic
2e+11, 0.3

```

```

*Material, name="Steel with equip"
*Damping, alpha=0.204, beta=2.125e-06
*Density
889600.,
*Elastic
2e+11, 0.3
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: LS Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet10, 1, 1
_PickedSet10, 2, 2
** Name: RS Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet11, 2, 2
** Name: StableSpring Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet12, 1, 1
** -----
**
** STEP: Natural Frequency
**
*Step, name="Natural Frequency", perturbation
Natural Frequency
*Frequency, eigensolver=Lanczos, acoustic coupling=on,
normalization=displacement
4, , , ,
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
*End Step
** -----
**
** STEP: Direct Analysis fjær
**
*Step, name="Direct Analysis fjær", perturbation
*Steady State Dynamics, direct, friction damping=NO
0., 5., 8000, 1.
**
** LOADS
**
** Name: Periodic Load1 Type: Concentrated force
*Load, load case=1
_PickedSet13, 2, -0.13
**
** OUTPUT REQUESTS
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-2
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
** -----
**
** STEP: Direct Analysis bjelke
**
*Step, name="Direct Analysis bjelke", perturbation
*Steady State Dynamics, direct, friction damping=NO
10., 50., 4000, 1.
**
** LOADS

```

```
**
** Name: Periodic load2   Type: Concentrated force
*Clod, load case=1
_PickedSet14, 2, -23.402
**
** OUTPUT REQUESTS
**
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-2
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
```