Universitetet i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Mastergrad i spesialpedagogikk	Vårsemesteret, 2010 Åpen
Forfatter: Sigve Tjomsland	………………………………………… (signatur forfatter)
Veileder: Elin Kirsti Lie Reikerås	
Tittel på masteroppgaven: Samspillet mellom regnestrategier, representasjoner og regneferdigheter – en kvalitativ studie av tre elever med regnevansker Engelsk tittel: Interaction between arithmetical strategies, representations and arithmetical skills – a qualitative study of three students with arithmetical difficulties	
Emneord: Regnevansker Matematikkvansker Regnestrategier Representasjoner Regneferdigheter	Sidetall: 67s + vedlegg/annet: 8s. Stavanger, 25/5-2010 dato/år

Forord

Gjennom flere års arbeid med matematikksvake, har tanken om at jeg burde ta en mastergrad på området stadig dukket opp. Jeg retter først og fremst en stor takk til min kone Anne. Hun har i lengre tid motivert meg til å studere. Hun har også støttet meg trofast i skriveprosessen.

Jeg vil også takke Janne Fauskanger. Hun var den første som dro meg med i en mer akademisk tilnærming til faget ved å ta meg med som medforfatter og foredragsholder i forbindelse med den tredje nordiske forskerkonferansen om matematikkvansker i Ålborg.

Videre har jeg vært så heldig å få delta i en gruppe som samles om matematikkvansker på Lesesenteret ved Universitetet i Stavanger. Takk til alle som samles der. De har også stadig motivert meg til å starte på mastergradstudiet.

Denne gruppen ledes av Elin Reikerås. Hun har også vært veileder for denne masteroppgaven. Jeg har ikke gjort jobben lett for henne. Spesielt har hun hatt en stor jobb med å kneble læreren i meg samtidig som en forsker skulle sjøsettes. Hun fortjener derfor en ekstra stor takk. Uten hennes hjelp og kyndige veiledning, er det vanskelig å se at denne studien kunne blitt til.

Til sist vil jeg også fremheve alle elvene med matematikkvansker som jeg har vært heldig å få jobbe med. De har villig delt av sine tanker og sin innsikt i hva som er problematisk, hva som er lett og ikke minst hvordan de forstår matematikken. På sitt vis har de kanskje vært mine viktigste læremestre på veien til å få den kompetansen jeg har på området.

Stavanger, Mai 2010

Sigve Tjomsland

Sammendrag

Målsettingen med denne studien er å undersøke hvordan noen sentrale emner innen forskning rundt matematikkvansker kommer til uttrykk hos elver med vansker i faget. Representasjoner relatert til tall og regning, regnestrategier og regneferdigheter er de sentrale faktorene som undersøkes. Også enkelte andre faktorer som for eksempel emosjonelle forhold tas med i betraktningen. Det er av spesiell interesse å undersøke om en kan belyse hvordan disse ulike faktorene gjensidig påvirker hverandre i elevenes utvikling.

Studien bygger på ulike rapporter fra prøver, tester og annen utredning, samt rapporter og notater fra støtteundervisning som ble satt i verk etter testingen, med mer. Dette er i samsvar med en klar målsetting om en skolerelatert tilnærming.

Funnene i studien antyder at det er en sammenheng mellom de ulike faktorene og at disse gjensidig påvirker hverandre. Nye spørsmål reises. Blant annet antyder studiens funn at et fokus på samspillet kan gi nye didaktiske muligheter. Dette bør undersøkes videre.

Innhold

1.0 Innledning

En torsdag i oktober 1990 ble en merkedag i min undervisningskarriere. Jeg skulle starte støtteundervisning i lesing og skriving for to, etter den tidens ordning, femteklassinger. Jeg begynte med å spørre dem om hva de var flinkest til. De to kikket litt på hverandre før gutten kom med følgende utlegning: ”Det er lettere å lese enn å skrive. Hvis vi skriver, er det lettere å svare på spørsmål enn å skrive fortelling. Men det er lettere å skrive fortelling enn å regne. Hvis vi regner, er det lettere med pluss enn med minus. Når vi holder på med minus, er det lettest med tall som er mindre enn fem, fordi hvis vi har for eksempel 6-2, får vi”, - og her teller han seks fingre og ender med å holde høyre hånds tommel opp mens han sier seks, - ”og da går det jo ikke an å ta bort to for det er bare en…”. I det øyeblikket ble en interesse for matematikkvansker tent. Siden har alltid en stor del av lærerstillingen min gått til både test og utredning, hjelp til matematikksvake og forebyggende arbeid i vanlige klasser. Det er derfor en stor glede endelig å få anledning til å fordype seg i emnet også fra et teoretisk og forskningsmessig perspektiv.

Ut fra min bakgrunn som praktiker på området, er det valgt en praktisk og skolerettet tilnærming i studien. Elevene som kommer til skolen, har en sammensatt bakgrunn og de møter i skolesamfunnet en kompleks verden, både sosialt og faglig. I studien er det derfor forsøkt å beholde en bred tilnærming, både teoretisk og i innsamlingen av data. Dette er gjort for å kaste lys over samspillet som kan oppstå mellom de ulike faktorene som er involvert i elevenes matematiske utvikling. Dette kan sies å være studiens hovedsiktemål.

Fra teoriens domene, legges det spesielt vekt på regneferdigheter, regnestrategier og ulike matematiske representasjoner som er relevante for regning og tallbehandling. Også emosjoner, motivasjon og enkelte andre forhold vies plass. Fordi studien er praktisk rettet, er det ikke ønskelig at teorien står alene. Derfor vies det også noe plass til skolens rammer, uttrykt gjennom gjeldende læreplan Kunnskapsløftet (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006) og tilhørende veiledningsmateriell (Niss, 2002; Stedøy-Johansen, Ranestad, Pedersen, Dalvang, & Maugesten, 2010). Et annet aspekt ved både skolens og lærerens, så vel som forskerens rammer, ligger i hvilke redskaper en har til rådighet for å finne ut hva elevene kan. Ulike forskningsmessige design kan kreve spesielle testredskaper. Dette er ikke vektlagt i nevneverdig grad. I stedet er det fokusert på tre testtradisjoner som gjerne brukes av den vanlige lærer så vel som av for forskere. Studiens redskaper har også sin bakgrunn i disse tre testtradisjonene.

Læreplanen er sentral også ut fra det perspektiv at den setter mål og progresjon for elevenes utvikling (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006). Målene i Kunnskapsløftet dekker flere områder av matematikken. Denne studien er imidlertid begrenset til det læreplanen kaller hovedområde tall og algebra. Det vil i praksis si at studien er begrenset til elevenes arbeid med tall og regning. Dette gjenspeiles i studien ved at begrepet regnesvake benyttes heller enn begrepet matematikksvake. Begrepet matematikksvake finnes likevel i studien, hovedsakelig der hvor forskning som benytter dette begrepet, omtales. Også når det er snakk om vansker i faget på et mer generelt nivå, brukes ordet matematikkvansker. Elever som fungerer godt i faget kan, om en benytter terminologi fra veiledningsmateriellet til Kunnskapsløftet, kalles matematisk kompetente (Niss, 2002; Stedøy-Johansen, et al., 2010). Begrepet flytende regnere benyttes også for denne gruppen (Reikerås, 2007b). For øvrig belyses også andre definisjoner og terminologi i presentasjonen av forskningen på området.

Studien er også avgrenset til elever i barneskolen. Det er noen testresultater som skriver seg fra testing utført i småskolen. For øvrig stammer mesteparten av studiens empiri fra slutten av mellomtrinnet.

I tråd med studiens skolenære fokus, benyttes også en definisjon av regnesvake som er knyttet til Kunnskapsløftets mål og progresjon. Elever som har et klart brudd med en forventet jevn progresjon i faget, regnes som regnesvake (Ostad, 1990).

Selv om det er gjort et forsøk på å få en bred tilnærming til området regnevansker, er det viktige forhold som er utelatt. Dette gjelder både individuelle nevrologiske forhold som for eksempel korttids og arbeidsminne, via pedagogiske forhold og over til grunnleggende teoretiske innsikter. Det kunne for eksempel vært nyttig med en dypere drøfting av ulike læringssyn. Mye i studiens materiale er relatert til elevenes tilegnelse av matematiske representasjoner. Slike representasjoner kan i stor grad sies å være kulturelle redskaper til å løse matematiske problemer. En drøfting av sosiokulturelt læringssyn kunne dermed være på sin plass. Når disse og flere forhold er utelatt, skyldes det delvis plasshensyn. Viktigere er det likevel at det innen rammene for studien ville være vanskelig å hente inn empiri til å belyse andre forhold enn det som er valgt.

Studiens empiri er basert på rapporter fra testing og utredning av elever med regnevansker. I tillegg er det tatt med opplysninger fra rapporter fra støtteundervisning, henvisninger til PPT, referater fra møter og lignende i den utstrekning slike opplysninger foreligger. Gjennom mitt arbeid med matematikksvake har jeg møtt mange elever både på egen skole og som veileder for lærere som arbeider med matematikksvake på andre skoler rundt i landet. Elevene i studien er valgt fra denne gruppen med matematikksvake elever. De er heller ikke tilfeldig trukket ut, men valgt bevisst for å få et spesielt utvalg egnet til å belyse studiens problemstillinger (Thagaard, 2009). Dermed må det også understrekes at studiens resultater ikke uten videre kan generaliseres. Det ble likevel gjort funn som kan bidra til å utvide kunnskapsbasen for matematikkvansker.

2.0 Matematikkvansker i forskningsperspektiv

Det er brukt ulike begreper på og definisjoner av matematikkvansker. Dysmatematikk, dyskalkuli, matematikkvansker, spesifikke matematikkvansker og MD, mathematically disabled children, er bare noen få eksempler. (Butterworth, 2003; Johnsen, 2005; Magne, 1998; Ostad, 1999; Thorsen, 2005). De ulike begrepene avspeiler ikke bare ulike preferanser innen språkbruk. Også ulike teoretiske tilnærminger, tradisjoner og definisjoner kan skjule seg bak begrepene (Butterworth, 2005b).

Ulikheter i begrepsbruken avspeiler også nyanser i grad og varighet av problemene (Ostad, 1995). Dersom en bygger forskningen på en enkeltstående måling, som for eksempel ved tverrsnittsundersøkelser, kan en fange opp elever som presterer dårlig under testingen, selv om problemene for noen av disse er av mer tilfeldig og kortvarig karakter (Butterworth, 2005b). Det er også elever som har vansker med matematikk på grunn av fravær, uhensiktsmessig undervisning, lav motivasjon osv (ibid). Dysmatematikk har vært et uttrykk for hele gruppen som gjør det dårlig i matematikk, uavhengig av årsak og varighet (Ostad, 1995). For gruppen av elever som har spesielt store og varige vansker med talloppfatning og regning, er begreper som spesifikke matematikkvansker eller developmental dyscalulia gjerne benyttet (Butterworth, 2005b; Tvedt & Johnsen, 2008).

2.1 Diagnosekriterier

Tradisjonelt har de mest fremtredende diagnosekriteriene for matematikkvansker vært diskrepanskriterier og cut off kriterier, men det finnes også andre forslag. Blant annet er det foreslått en spesifikk definisjon av dyskakuli bygd på en svekkelse i hjernens antallsoppfatningssenter (Butterworth, 2003). Det er også en utvikling mot konsensus om at svake regnestrategier er felles for dem med matematikkvansker (Butterworth, 2003, 2005b; Geary & Hoard, 2003; Reikerås, 2007a). Grunnlaget forskerne bruker for å kategorisere elevene er ofte vanlige standardiserte prøver, men det finnes også studier som benytter mer spesifikke tester (Geary & Hoard, 2003).

2.1.1 Diskrepanskriterier

Diskrepans forutsetter skille mellom forventede og faktiske prestasjoner. Ulike forskere har brukt ulike målestandarder (Ostad, 2007a). En kan for eksempel måle i forhold til alder. Har en prestasjoner som ligger to år etter forventet nivå, regnes en gjerne som matematikksvak etter denne definisjonen (ibid). En kan også måle opp mot prestasjoner i andre fag. Vesentlig svakere prestasjoner i matematikk enn i andre fag, gir da diagnosen spesifikke matematikkvansker. Denne varianten kombineres gjerne med en tredje mulighet, nemlig å måle opp mot elevens IQ. Vesentlig lavere prestasjoner enn en kunne forvente ut fra IQ (Geary & Hoard, 2003), tilsier da at eleven har spesifikke matematikkvansker.

Begrepet spesifikke matematikkvansker benyttes gjerne i forbindelse med slike diskrepanskriterier (Johnsen, 2005; Tvedt & Johnsen, 2008). I forbindelse med disse diskrepanskriterier, må en også diskutere hvilke grenseverdier en skal operere med. En må avklare hvor mye prestasjonene må skille seg fra generelt evnenivå, eller prestasjoner i andre fag. En må også sette en grense for hvor svake prestasjonene må være før en kaller det vansker. Geary og Hoard (2003) foreslår at elevene minst bør ha en IQ over svak gjennomsnittlig og samtidig prestere lavere enn 20-25 percentil på standardiserte tester.

Det diskuteres hvor hensiktsmessige diskrepanskriterier er. Det er ikke vist at problemene denne gruppen elever har, skiller seg vesentlig fra problemene elever som presterer generelt svakt, har. Ostad påpeker for eksempel at de fleste matematikksvake har en kvalitativt forskjellig utvikling fra normalpresterende, uavhengig av evnenivå (Ostad, 2001). Også metodiske vansker med å måle ferdighetene er fremhevet som problematiserende ved bruk av disse kriteriene(Ostad, 2007a).

2.1.2 Cut off kriterier

En annen type kriterier for definering av matematikksvake, baserer seg kun på cut off kriterier. Etter slike kriterier kan alle som sliter i faget, sies å ha matematikkvansker uavhengig av evnenivå. Også her diskuteres det hvor en skal sette cut off grensen. Det er, ut fra ulike hensikter med forskningen, brukt ulike grenser. Grenseverdiene varierer så mye som fra 3 standardavvik under gjennomsnittet til de 46 prosent svakeste (Butterworth, 2005b; Reikerås, 2007a; Zeleke, 2004). I forskningssammenheng er denne variasjonen problematisk da det blir vanskelig å sammenlikne de ulike studiene. Problemet blir ikke mindre av at kriteriene for hvem en skal velge som normalelever i kontrollgruppene varierer tilsvarende (Zeleke, 2004). Longitudinelle studier i matematikk tyder på at en grenseverdi på 10-14% vil fange opp dem som har stabile vansker (Reikerås, 2007a; Zeleke, 2004).

2.1.3 Nevropsykologiske kriterier

Fra nevropsykologisk hold er det i den senere tid fremholdt at begrepet dyskalkuli bør benyttes og at dette begrepet må brukes for å betegne svikt i hjernens systemer for antallsoppfatning (Butterworth, 2005b). Disse sentrene er i første rekke lokalisert i intraparietale sulci og angular gyrus. Developmental dyscalculia er begrepet som brukes for slike matematikkvansker hos elever som ikke har vært utsatt for hjerneskade eller lignende (ibid).

Nevropsykologer har imidlertid interessert seg for matematikkvansker i lengre tid, noe som også preger språkbruken på området (Ostad, 1995). Nevropsykologene har da studert matematikkvansker ut fra svekkelser i flere områder av hjernen. Det kan da være snakk om bl.a. oppmerksomhet, informasjonsbearbeiding, eksekutive funksjoner, prosedurale funksjoner, minne osv (Johnsen, 2005). Det advares også mot at samme symptomer kan ha ulik opprinnelse (ibid). Det er dermed ikke full enighet om at begrepet dyskakuli utelukkende bør benyttes for å betegne matematikkvansker som skyldes svekkelse i antallsoppfatningssenteret (Johnsen, 2005; Noel, Rouselle, & Mussolin, 2005; Tvedt & Johnsen, 2008).

Fra et pedagogisk ståsted skal det også understrekes at svekkelser i ulike deler av hjernen er alvorlige, men at det er et visst håp i det at hjernen har en viss plastisitet. Det vil si at den reagerer på stimulering og at kompenserende strukturer kan oppstå (Ellertsen & Johnsen, 2008; Perry, 2001).

2.1.4 Konsensuskriterier

Selv om det i forskningen er uenighet om kriterier for når en skal regne en elev som matematikksvak, er det likevel tegn på at det vokser frem en enighet om at vedvarende matematikkvansker kommer til uttrykk ved at elevene har vansker med å lære, og å hente frem aritmetiske fakta, som for eksempel tabellkunnskaper (Butterworth, 2005b). Disse elevene preges av umodne tellestrategier og de viser liten utvikling over tid (Geary & Hoard, 2003; Ostad, 1999, 2008). Det er også foreslått at ”motstandsdyktighet” mot å utvikle gode regnestrategier på tross av fokusert og god undervisning kan være et kriterium å bruke (Geary & Hoard, 2003).

Det er også sett etter andre felles trekk ved matematikksvake. Det har blitt søkt etter slike fellestrekk innen flere områder som bl.a. minnefunksjoner, kunnskapslagring, verbal internalisering og elevenes utviklingsløp. Det sees da spesielt på om elevene har forsinket eller kvalitativt forskjellig utvikling (Ostad, 2007a). Konsensusdefinisjonene er med andre ord ikke ferdig utviklede, og det etterlyses mer forskning på området (ibid).

3.0 Matematikkvansker i skolens perspektiv

I det daglige livet rundt på skolene, er en gjerne mindre formell i vurderingen av hvem som er matematikksvake enn man er innen forskningen. Inntrykk fra det daglige arbeid og undervisning, samt uformelle og standardiserte prøver, danner oftest grunnlaget for vurderingen av elevene. En definisjon av matematikkvansker som går på stagnasjon i forhold til en forventet jevn utvikling, passer nok bedre til skolens hverdag (Ostad, 1990).

3.1 Læreplanens mål, hva er det elevene ikke oppnår?

Skolens planverk, Kunnskapsløftet (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006), setter målene for hva elevene skal oppnå, og det er følgelig disse målene de matematikksvake elevene sliter med å nå. I læreplanens språk kalles denne studiens fokus for "hovedområde tall og algebra". På barnetrinnet er det i tillegg hovedområder for geometri, måling og statistikk og sannsynlighet (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006). Læreplanens mål er fordelt på disse hovedområdene.

I tillegg til de faglige målene i læreplanen, er det overordnede mål om at elevene skal oppnå matematisk kompetanse (Stedøy-Johansen, et al., 2010). Det henvises også til en rapport fra det danske utdanningsdepartementet (Niss, 2002). I denne rapporten er matematisk kompetanse beskrevet som bestående av de åtte delkompetansene representasjonskompetanse, symbol og formalismekompetanse, tankegangskompetanse, resonnementskompetanse, kommunikasjonskompetanse, modelleringskompetanse, problemløsingskompetanse og hjelpemiddelkompetanse (Niss, 2002; Stedøy-Johansen, et al., 2010). Dette innebærer en sterk forskyvning fra tekniske øvelser og mekanisk læring over mot forståelse, kommunikasjon og anvendelse på ulike områder av livet (Alseth, 2005). Det er altså en flerfoldig og ambisiøs målsetting med matematikkfaget i skolen. Det er ikke bare tekniske ferdigheter elevene skal oppnå. De skal også forstå, kunne anvende, resonere og kommunisere matematikk i vid forstand og på alle livets områder (ibid).

3.1.1 Konkrete krav innen hovedområdet tall og algebra, -regning

Kunnskapsløftet setter grunnleggende ferdigheter i regning i en særstilling som et fundament for det meste ellers i matematikkfaget (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006). Oppsummert krever planen at elevene skal utvikle telleferdigheter og forståelse for titallsystemet. De skal kunne gruppere og se undergrupper samt uttrykke tallstørrelser på ulike måter. Tallinja trekkes spesielt frem både som en måte å uttrykke tallstørrelser på og til å gjøre beregninger. Tallmønstre nevnes, og innen utløpet av andre klasse skal elevene kunne doble og halvere. En skal også arbeide med overslag og hoderegning gjennom hele barnetrinnet. Disse emnene utvikles i løpet av klassetrinnene slik at elevene skal ha god forståelse og gode algoritmer for å regne både i hodet og skriftlig, inklusive regning med desimaltall og brøk, ved utgangen av syvende klasse.

Regnestrategier nevnes i målene for andre klasse, hvor elevene skal utvikle, og kunne bruke, varierte regnestrategier for addisjon og subtraksjon med tosifrede tall. I fjerde klasse skal de også kunne benytte sammenhengen mellom regneartene så vel som tabellkunnskaper i regneartene. Begrepet tabellkunnskaper som er brukt i planen, samsvarer langt på vei med begrepet retrivalstrategier som er brukt i forskningen.

Fra fjerde klasse skal elevene kunne foreta begrunnede valg av regnearter, og mot slutten av barnetrinnet skal de også kjenne referansesystem og notasjon for regneark og kunne argumentere for sine løsningsforslag. I kortform kan en kanskje si at elevene skal

1. ha god tallforståelse, inkludert god forståelse av titallsystemet
2. ha gode regnestrategier,
3. ha gode regneferdigheter med flersifrede tall og brøk, inklusive evne til å gjøre overslag
4. ha god kjennskap til matematikkens symboler og bruken av disse. Elevene skal også ha gode begrepsmessige og kommunikasjonsmessige ferdigheter, slik at de ikke bare forstår og fleksibelt kan anvende ferdighetene, men også kan kommunisere og argumentere for det de gjør.

Innen denne rammen skal altså skolens matematikkundervisning bevege seg for å utvikle matematisk kompetente barn på området tall og algebra. Uttrykket "flytende regnere" er også benyttet (Reikerås, 2007c). Begge uttrykkene betegner at elevene kan bruke regning som et effektivt redskap i møte med matematiske utfordringer både i og utenfor skolen.

Denne studiens siktemål er å prøve å se forskning og skolens hverdag i sammenheng. Kan læreren i det daglige arbeidet på en enkel måte kjenne igjen de forhold forskningen beskriver? Også spørsmålet: Hva i det forskningen beskriver kan gi hint om veien videre for å overvinne matematikkvanskene, blir aktuelt. Skal en se forskning og skole i sammenheng, bør en også kunne tenke den andre veien. Kan en enda gjøre oppdagelser i skolens hverdag som kan påvirke forskningens retning og prioriteringer?

Elevene i skolen vil gjerne fortone seg svært forskjellige. De kan ha ulike sterke og svake sider så vel som ulike interesser og motivasjoner. Deres historie og bakgrunn er gjerne forskjellig, noe som også kan sies om deres matematiske utvikling. Måten elevene håndterer matematikkvansker kan også være ulik. Noen arbeider og arbeider for å bli flinkere, mens andre gir opp og gjør det de kan for å unngå nederlag. Med andre ord må en i skolens hverdag forholde seg til et samspill mellom en rekke ulike faktorer. I det følgende vil en del av disse faktorene belyses ut fra et forskningsmessig perspektiv.

4.0 Forskning relatert til kunnskapsløftets krav innen tall og algebra

4.1 Regneferdigheter

"Utviklingen av barns mestring av tall og regning går langsomt over mange år, og er åpenbart en sammensatt ferdighet" (Tvedt & Johnsen, 2008 s.517). Sagt på en annen måte kan en si at regneferdigheter bygger på flere, grunnleggende faktorer (Ostad, 2007a; Reikerås, 2007c). For å unngå vansker i innlæringen, er det da viktig at læreren tar hensyn til elevenes fundament for den nye læringen (Sjøvoll, 2009; Tolchinsky, 2003).

Det er ulik språkbruk i Kunnskapsløftet og innen forskningen når det gjelder begrepene regnestrategier og regneferdigheter. Regnestrategier kan defineres som ” Oppgavespesifikke strategier som de organiserte, domenespesifikke prosedyrene som aktiveres når eleven står overfor den utfordringen en matematikkoppgave representerer og som retter seg mot det mål å løse oppgaven” (Ostad, 2008 s.18). Begrepet regnstrategier kan ut fra denne definisjonen brukes i forhold til de fleste nivåene innen regning. I Kunnskapsløftet har man valgt å bruke begrepet regnestrategier kun om regning med flersifrede tall. (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006). I forskningen brukes imidlertid begrepet regnestrategier først og fremst i forbindelse med multiplikasjon og addisjon med ensifrede tall og de motsvarende oppgavene innen subtraksjon (Geary & Hoard, 2003; Ostad, 2008). Kunnskapsløftet omtaler dette som ”tabellkunnskap om rekneartane” (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006 s.62). I denne studien benyttes begrepet regneferdigheter i tilknytning til regning med flersifrede tall, mens begrepet regnestrategier benyttes i forbindelse med tabellkunnskap.

Det flere faktorer som må virke sammen for at en elev skal ha så gode regneferdigheter at hun kan kalles flytende regner eller matematisk kompetent. En måte å illustrere dette er ved å sette opp en regneformel. En kan da si at Regning = Regnefakta X Oppgave og problemløsing (Cornoldi 2004 i Reikerås, 2007b). Regnefakta betegner her matematiske fakta en enkelt kan hente frem fra langtidsminnet. I denne sammenheng vil det først og fremst være snakk om automatisert tabellkunnskap innen addisjon, subtraksjon og multiplikasjon. Oppgave og problemløsing refererer både til ulike algoritmer for løsing av oppgaver med flersifrede tall og til evne til praktisk bruk av regning for å løse matematiske problemer i skole og dagligliv for øvrig.

Regning kan ut fra dette sies å være en overordnet ferdighet i forhold til regnestrategier, algoritmer og løsing av matematiske problemer generelt. I forhold til regnestrategier er det viktig at tabellkunnskapen er automatisert slik at elevene i størst mulig grad benytter retrivalstrategier. Dette er viktig fordi at elevene på den måten får frigitt mentale ressurser til å forstå de mer kompliserte og sammensatte oppgavene (Askeland, 2007a; Cornoldi & Lucangeli, 2004; Geary & Hoard, 2003; Reikerås, 2007b; Sjøvoll, 2007).

God regneferdighet er videre avhengig av gode algoritmer. Algoritmer for regning med flersifrede tall, bygger igjen på titallssystemet (Alseth, 2003). Skal en oppnå Kunnskapsløftets krav om matematisk kompetente elever som forstår og kan anvende matematikken fleksibelt (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006; Stedøy-Johansen, et al., 2010), er det viktig at algoritmer ikke behandles kun som prosedyrer som skal pugges og læres utenat (Snorre A. Ostad, 1992a). I stedet bør en knytt bånd mellom algoritmene, titallsystemet og problemene som skal løses slik at en stadig bygger videre på elevens fundament for læring i vid forstand (Fauskanger & Tjomsland, 2007; *Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006; Sjøvoll, 2009).

Den flytende regner må også ha gode oversettelsesferdigheter mellom ulike matematiske problemer, enten disse er presentert på skolen eller i dagliglivet for øvrig, og den matematiske terminologi og symbolbruk (Dowker, 2005).

Begrepet forståelse er allerede benyttet flere ganger, og det er også implisitt påpekt at den flytende regner må ha god forståelse for regningen. Forståelse kan fra et kognitivt synspunkt beskrives som et mentalt nettverk hvor matematiske fakta og informasjon inngår (Snorre A. Ostad, 1992a). Forståelse oppstår i det øyeblikket det knyttes relasjoner mellom disse bitene av informasjon. Jo mer informasjon og jo tydeligere relasjoner mellom de ulike informasjonsbitene, jo bedre forståelse (ibid).

Forståelse kan i denne sammenheng også sees som et sammensatt begrep som referer til Kunnskapsløftets mål om god kjennskap både til symboler og bruken av disse, samt evne til både å kommunisere om og anvende det lærte, det vil si matematisk kompetanse (Alseth, 2005; *Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006; Niss, 2002; Stedøy-Johansen, et al., 2010).

I det følgende vil noen av disse grunnleggende faktorene for det å bli en flytende regner bli behandlet grundigere. Særlig legges det vekt på ulike representasjoner av tall samt regnetegn og skrivemåter. Også regnestrategier omhandles relativt grundig. Enkelte andre grunnleggende faktorer nevnes også.

4.2 Representasjoner

Representasjonene er de redskapene hjernen bruker for å fastholde og behandle et meningsinnhold, og representasjoner er slik sett uløselig knyttet til matematikken (Alseth, 2003; Snorre A. Ostad, 1992a; Tolchinsky, 2003). Det skilles hovedsakelig mellom ytre og indre, eller fysiske og mentale, representasjoner (Alseth, 2003; Snorre A. Ostad, 1992a). Representasjonene kan også ha ulik grad av abstraksjon. Et terningmønster for å representere ”fem”, vil være mer konkret enn tallsymbolet 5 (ibid).

En skal være litt varsom når en karakteriserer representasjonene i indre og ytre representasjoner. Et tenkt ord kan sies å være en indre representasjon, mens et talt ord blir en ytre representasjon. Likeledes vil et skrevet tallsymbol være en ytre representasjon, mens om en ser tallsymbolet for seg mentalt, er det en indre representasjon. Kategorisering av representasjoner er heller ikke denne studiens siktemål. Poenget her er at det samme matematiske innhold kan representeres på flere ulike måter (Sjøvoll, 2009). Antallet to kan for eksempel representeres ved ordet ”to”, ved tallsymbolet 2, ved terningmønsteret for to, ved hjelp av to tellestreker osv.

I tillegg til at det er mange ulike representasjoner for det samme, vil hver matematiske representasjon også oftest kunne representere flere ulike ting. Tallsymbolet 2 vil representere både ordet ”to” og antallet to. Tallsymbolet representerer også en posisjon i en rekke, en mer enn 1 og en færre enn 3 (Tolchinsky, 2003).

Oversettelse mellom disse mentale, språklige, skriftlige og konkrete representasjonene er viktig for å oppnå god og effektiv forståelse (Dowker, 2005). Svikt i evnen til å oversette, kan føre til bl.a. begrenset og kontekstbundet forståelse, svak abstrahering, umodne regnestrategier, mangelfull evne til å sjekke rimeligheten av svar og svekket evne til å kommunisere omkring regningen (ibid). Manglende sammenheng mellom skolens symbolspråk og elevenes virkelighet er da også foreslått som en sentral faktor i utviklingen av matematikkvansker (Sjøvoll, 2009; Tolchinsky, 2003).

Representasjonene kan sees som mer enn symboler, eller tegn, som hjernen bruker som redskaper i tenkingen. Representasjonene en bruker og måten en bruker dem på, vil også kunne være med å forme tanken (Tolchinsky, 2003). Det er tegn som tyder på at det å kjenne et notasjonssystem for tall i seg selv, virker stimulerende og utviklende for barnas tanker (Johansson, 2005b; Tolchinsky, 2003). Dette gjelder både tallordene og de skrevne tallsymbolene.

4.2.1 Utvikling av representasjoner

Utviklingen av et semantisk innhold i de ulike representasjonene, er en prosess hvor flere elementer spiller inn. Det er derfor vanlig å ha delvis forståelse (Alseth, 1998; Dowker, 2005; Ostad, 1995). En kan følgelig ikke uten videre forvente at elevenes representasjoner er på et funksjonelt eller ønskelig nivå. Fra et semiotisk perspektiv, understrekes det likevel at en representasjon som hverken representerer en teoretisk størrelse eller noe ”i virkeligheten”, strengt tatt ikke kan regnes som en representasjon (Tolchinsky, 2003). Tolchinsky bruker Sausseres begreper signifer og signified. Signifier står for representasjonen, for eksempel 5+3=8. Signified betyr konseptet, altså meningsinnholdet i utsagnet. Videre vektlegger hun at "The two sides of the sign are, however, inextricably linked like the two sides of a paper page. In this view, there is no such thing as a signifier without something signified, or a signified without a signifier" (Tolchinsky, 2003 s.6).

Typisk for representasjoner er at de bare representerer en eller noen få egenskaper ved det de representerer (Snorre A. Ostad, 1992b). For at representasjonene skal være gode redskaper for tanken, må de derfor ledsages av kunnskap om konseptet, eller det aspektet ved det representerte, de representerer (Alseth, 2003). Det er også vist at de matematikksvake ikke uten videre klarer å skille ut de rette aspektene ved representasjonene. I stedet får de regnesvake en mer kontekstbundet forståelse ved at de drar med ikkematematisk informasjon i sin tenking. En kan da si at de operer med tunge begreper, i motsetning til flytende regnere som kun forholder seg til den matematiske informasjonen. De flytende regnerne kan da sies å ha lette begreper (Snorre A. Ostad, 1992b).

4.2.2 Innholdet i tallrepresentasjonene

Tall kan ha mange forskjellige aspekter (Butterworth, 2005a; Noel, et al., 2005). Tallsymbolene kan ha en identitesbærende funksjon og for eksempel være benevnelser for adresser eller busser. To mer sentrale aspekter ved tallene kan oppsummeres i to hovedkategorier, nemlig det ordinale og det kardinale aspekt (Dowker, 2005). Det ordinale aspekt representerer i hovedsak tallenes funksjon som rekke eller ordenstall, mens det kardinale aspektet representerer i hovedsak tallenes antallsaspekt (Butterworth, 2005a; Noel, et al., 2005). I det følgende vil noen funn vedrørende barns utvikling av tallrepresentasjoner presenteres.

Det er gjort ulike undersøkelser av hvordan tallrepresentajoner utvikler seg og lagres i hjernen (Noel, et al., 2005). En utvikling fra det konkrete til det symbolske er nødvendig (Dale, 2008; Snorre A. Ostad, 1992b). Det synes også som menneskene, i likhet med flere dyr, er født med en antallsoppfatningssans kalt evne til *subitizing*. Denne gjelder antall opp til 3-5 objekter og er trolig i funksjon allerede tidlig etter fødselen (Butterworth, 2005a). Denne evnen til å oppdage antall, regnes som en grunnleggende disposisjon på linje med det nyfødte barnets disposisjon til å fokusere på språklyder (ibid). En kan da tenke seg at denne medfødte evnen til å sortere ut antall, danner grunnlaget for den videre utviklingen mot mer symbolske og abstrakte representasjoner. Særlig barnas evne til å forholde seg til tallenes kardinale aspekt vil påvirkes av en svikt i hjernens antallsoppfatning (Butterworth, 2005a, 2005b). En svikt i den grunnleggende antallsoppfatningen, vil kunne føre til store problemer med å utvikle matematiske ferdigheter (ibid).

Fra denne naturlige ferdigheten er det imidlertid viktige utviklingstrinn barna må gjennom. Gjennom påvirkning og stimulering i hjemmemiljø og barnehage, og etter hvert formell undervisning, skal det utvikles abstrakte representasjoner, både språklige og symbolbaserte (Alseth, 2003; Ostad, 1990). Abstraksjon er viktig i denne sammenhengen, da barna skal utvikle en dobbel, kanskje trippel abstraksjon i forhold til sin forståelse av tallene (Butterworth, 2005a). Først må de utvikle evne til å skjelne mellom når representasjonen står for kardinale eller ordinale aspekter. For kardinale aspekter må elevene videre abstrahere antall som egenskap ved en gruppe, løsrevet fra størrelse og organisering av gruppen. Deretter må det abstraheres at samme representasjon kan gjelde samme antall ved en hvilken som helst gruppe (ibid).

Ett av områdene det har vært mye diskusjon om blant forskerne, er konservering av mengder etter Piagets definisjon av dette (Tolchinsky, 2003). Det har vært vist at førskolebarn kan konservere mengder dersom de får oppgaven presentert på tilpasset vis, språklig og konseptuelt, langt tidligere enn Piaget foreslår. Tvedt og Johnsen oppsummerer kritikken med at ”Dette tyder på at det tar tid før språket blir et effektivt hjelpemiddel for tallforståelsen” (Tvedt & Johnsen, 2008 s.518). Dette kan nettopp understreke at utviklingen av tallrepresentasjonene går over tid, og at representasjonene ikke er tilstrekkelig funksjonelle før en kan forholde seg til antall så abstrakt som Piaget foreslår (Tolchinsky, 2003). Det er dokumentert sammenheng mellom svake matematikkferdigheter og feil svar på Piagets konserveringsoppgave (Ostad, 1990). Det er også antydet at matematikksvake utvikler assosiasjonene mellom tallsymbolene og antallet symbolene representerer, saktere enn normalfungerende regnere (Geary & Hoard, 2003).

Prosessaspektet understrekes også gjennom studier som viser at barn kan velge for eksempel å tegne fire fingre for å illustrere antallet fire, selv relativt lenge etter at de har lært tallsymbolet 4 (Tolchinsky, 2003).

4.2.2.1 Tidlig telling og tallrepresentasjoner
Gelman og Gallistel har satt opp fem prinsipper for hva barna må forstå angående telling for å utvikle god tallforståelse (referert i Geary &Howard 2003). De vektlegger at barna må utvikle
- forståelse for en til en korrespondanse
- at telleordene må komme i samme rekkefølge hver gang en teller
- kardinalitet i den forstand at det siste tallordet en sier representerer antallet for hele gruppen
- at alle typer gjenstander og fenomener kan telles og
- at det ikke spiller noen rolle i hvilken rekkefølge en teller gjenstandene (ibid).

Undersøkelser tyder på at matematikksvake, selv etter et par års skolegang, ikke fullt ut har forstått telleprinsippene (Geary & Hoard, 2003). Særlig det at det ikke spiller noen rolle i hvilken rekkefølge en teller, synes å være vanskelig for de svake (ibid).
Tidlige telleferdigheter er også viktig med tanke på regneferdighetene, da det er vist at gode tellere raskere utvikler seg til gode regnere enn det svake tellere gjør (Johansson, 2005a).

4.2.2.2 Titallsystemet

Kunnskapsløftet understreker forståelse for titalsystemet (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006). Dette kan være viktig både for å kunne gjøre overslag, forstå både store tall og desimaltall og ikke minst for å kunne vurdere egne svar (Lindland, 2007). Å forstå titallsystemet har blitt kalt "matematikkens lesekode" (Thorsen, 2004). I tillegg bygger algoritmene for regning med flersifrede tall på titallsystemet (Alseth, 2003).

Forskning som er gjort på området, antyder at normalelevene de første årene på skolen har svak forståelse for titallsystemet (Geary & Hoard, 2003; Lindland, 2007). De matematikksvakes forståelse er imidlertid enda verre (Geary & Hoard, 2003). I forskningen er det benyttet flere ulike måter for å teste elevenes forståelse av titallsystemet. I tillegg til ulike oppgaver som går på å lese flersifrede tall, telle videre fra eller telle bakover fra et flersifret tall og lignende (Lindland, 2007), skal to forsøk som tester elevenes forståelse for hva de ulike sifrene representerer, nevnes spesielt.

Det første forsøket som skal beskrives, kan være avslørende i forhold til om elevene er klar over hva de ulike sifrene i flersifrede tall representerer. I forsøket presenteres elevene for 26 klosser. De fleste elevene klarer å telle klossene og skrive rett tall til. Dersom klossene så deles i seks grupper à fire klosser slik at to klosser blir liggende alene, vil mange svare at totallet i 26 representerer de to løse klossene, mens sekstallet representerer de seks gruppene. (Alseth, 2003; Lindland, 2007).

I det andre forsøket benytter en tallet 16. Elevene får i oppgave å finne 16 brikker. Deretter får de i oppgave å bruke brikkene til å vise hva de ulike sifrene i tallet betyr. De som ikke har forstått sifferplassverdisystemet, vil da gjerne ta frem *en* brikke for å illustrere hva ettallet på tierplassen betyr (Lindland, 2007)

For elever som svarer feil på disse oppgavene, er representasjonen trolig ikke godt nok fundamentert i forståelse, og det visuelle inntrykket overstyrer det som er lært. Trening i, og forståelse for gruppering, synes nødvendig for å utvikle god forståelse for titallsystemet (Alseth, 2003).

Typiske misforståelser eller delvise forståelser innen titallsystemet er at de flersifrede tallene kun er merkelapper på mengdene, at elevene likevel må telle en og en fordi de ikke har skjønt gruppering i tiergrupper godt nok, eller at de ikke har god forståelse for sifferet 0 som plassholder (Tolchinsky, 2003). Det er ikke uvanlig at elevene først bare ser på antall sifre. Tall med mange sifre anses som store. Deretter får elevene forståelse for at det første sifferet er viktig. Store, runde tall kan også vurderes som store tall. Hel forståelse for titallsystemet kommer gradvis, og gjerne etter at elevene møter konflikter mellom disse umodne oppfatningene (ibid).

4.2.3. Regnetegn og syntaks

I tillegg til representasjoner for tall, vil de fire regneartenes symboler være svært sentrale de første årene på skolen (Alseth, 2003). Både symbolene hver for seg og syntaksen i regnestykkene kan da settes i fokus.

Regnesymbolene tas i bruk for å representere spesifikke matematiske fenomener (Snorre A Ostad, 1992) . Innen forskningen er det problematisert hvilke likheter og forskjeller det er mellom for eksempel additive og multiplikative strukturer (Alseth, 2003). I skolehverdagen kan en tenke seg en mer praktisk tilnærming hvor elevenes områdespesifikke kunnskaper utvikles til også å omfatte ulike konkretiseringer, eller sagt på en annen måte, hvilke situasjoner de ulike regnetegnene kan representere (Alseth, 1998; Ostad, 2008). Det er altså ikke nok at elevene kun ser regnetegnet som et signal om hvilken prosedyre som skal settes i gang.

Også regneoppgavenes syntaks må læres slik at elevene er fortrolige med hvordan regneoppgavene skrives (Snorre A. Ostad, 1992b). Igjen blir oversettelse mellom representasjoner et sentralt tema. Det er vist at matematikksvake relativt enkelt kan oversette fra en rettlinjet historie i virkeligheten til et enkelt regnestykke (Ostad, 2008). Eksempelvis kan fortellingen ”Per har tre epler og får to epler til, hvor mange epler har han da?” for de fleste lett oversettes til regnestykket 3+2=5. I dette tilfellet er syntaksen i fortellingen og regnestykket sammenfallende. I de tilfellene hvor fortellingens struktur og regnestykkets struktur skiller lag, blir det straks vanskeligere. Fortellingen ”Per og Kari har fem epler. Per har to epler. Hvor mange epler har Kari?” kan tjene som eksempel på slike strukturer. Matematikksvake viser liten utvikling i forståelsen av slike regneoppgaver i løpet av barnetrinnet, mens de normale regnerne har en jevn utvikling i løpet av barnetrinnet (ibid).

4.3 Regnestrategier

Regnestrategier er et annet område av stor betydning for regneferdighetenes utvikling (Butterworth, 2005a; Geary & Hoard, 2003; Ostad, 2008). Innen forskningen er dette området også viet relativt stor oppmerksomhet de senere årene (Ostad, 1999).

En kan se regnestrategier som en undergruppe av representasjoner. For eksempel kan tabellstykket 3+5=8 sees som en representasjon av åtte. For å gi emnet den plass det fortjener ut fra foreliggende forskning, behandles regnestrategier her likevel separat.

4.3.1 Utvikling av regnestrategier

Også utvikling av regnestrategier er en prosess som går over tid. Normale regnere utvikler regnestrategiene gradvis i løpet av skoletiden (Ostad, 2007b). Ved skolestart er det vanlig å benytte ulike tellestrategier for de fleste oppgavene. Etter hvert vil elevene utvikle flere og mer hensiktsmessige måter å telle på.

De ulike tellevariantene er kategorisert etter det en antar er en normal utvikling av ferdighetene (Ostad, 2008). De første tellestrategiene regnes som å telle alt og så telle alt om igjen. Skal en elev for eksempel regne 3+4, vil han kunne telle tre fingre på den ene hånda og fire fingre på den andre. For å finne svaret vil han så telle de tre fingrene om igjen og fortsette til syv på den andre hånda. Etter hvert er det nok å telle en gang. Å begynne å telle fra 3, er videre en mer effektiv måte å telle på. Denne måten kan effektiviseres ytterligere ved at eleven teller fra 4 i stedet for fra 3. Det finnes også ulike varianter hvor elevene tegner tellestreker o.l, prikker på tallsymbolene eller kun teller verbalt (ibid).

Elevene vil etter hvert begynne å huske flere og flere kombinasjoner av ulike tall, slik at de kan hente svarene direkte fra langtidsminnet uten å bruke nevneverdig mental kapasitet for å finne svaret. Elevene kan også tenke ut fra kombinasjoner de husker. 6+7 kan regnes som 6+6+1. Dette kalles dekomposisjon. Når det brukes tellestrategier for å finne svar på oppgavene, kalles det back up strategier (Dowker, 2005; Geary & Hoard, 2003; Ostad, 2008). Fremhentingsstrategier kalles retrivalstrategier (ibid). I kunnskapsløftet kalles retrivalstrategiene for ”tabellkunnskapar om rekneartane” (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006 s.62).

Den flytende regner er kjennetegnet ved at hun mestrer flere strategier og effektivt bruker strategiene tilpasset oppgaven som skal løses (Ostad, 2007b). For matematikksvake er det imidlertid vist at disse karakteriseres ved at de benytter få og umodne strategier (Geary & Hoard, 2003; Ostad, 2007b). Geary og Hoard (2003) definerer fremgang i matematikk som utvikling av bedre og mer modne regnestrategier, mens svake regnestrategier er et kjennetegn for de matematikksvake. Jamfør det som er skrevet ovenfor angående definisjoner av matematikkvansker.

Ostad har funnet at de matematikksvake praktisk talt ikke har utvikling i sine regnestrategier i løpet av barneskoletiden (Ostad, 2007b, 2008), mens Geary og Hoard finner en svak, men klar, utvikling også for matematikksvake (Geary & Hoard, 2003). Felles er imidlertid det syn at matematikksvake har store problemer med retrivalstrategiene slik at de i stor grad er avhengige av ulike back up strategier (Butterworth, 2005b; Dowker, 2005; Geary & Hoard, 2003; Ostad, 1999, 2007b, 2008).

4.3.2 Ulike regnestrategier og deres logiske grunnlag

Det er også diskutert hvorvidt bac up og retrivalstrategier bygger på ulike deler av tallenes betydning. (Dowker, 2005; Johansson, 2005b). Back up, eller tellestrategiene, vil kunne sies å bygge på tallenes ordinale aspekt, mens retrivalstrategiene bygger på tallenes kardinale aspekt. Ensidig bruk av tellestrategier vil da kunne virke tilbake på representasjonene og hemme utviklingen av elevenes kardinale forståelse (Dowker, 2005). Ved tenking hovedsakelig ut fra tallenes ordinale aspekt, vil ferdigheter innen gruppering stimuleres lite. Ferdigheter innen gruppering, inklusive undergrupper, sees da som en viktig del av fundamentet for å utvikle retrival-strategier. Heller ikke tier og hundrergrupper, som titallsystemet er bygd opp av, blir nevneverdig stimulert om en kun tenker ordinalt (Alseth, 1998, 2003; Butterworth, 2005a).

4. 4. Samvirke mellom representasjoner og regnestrategier

Innen forskningen omkring matematikkvansker, har fokus vært lagt både på fysiske og mentale representasjoner og de tankemessige prosessene som en kan utføre ut fra representasjonene (Ostad, 1999). Semiotisk forskning har i hovedsak fokusert på representasjonene, mens forskningen rundt regnestrategier i større grad har fokusert på prosessene. Særlig forholdet mellom kunnskapsorganisering og strategivalg, og strategivalg og tidsbruk er vektlagt i denne sammenheng (Ostad, 1999, 2007a). Selv om det forskningsmessige fokuset kan være rettet mot ulike deler av helheten, understrekes likevel sammenhengen mellom representasjonene og den type prosesser regnestrategier er (ibid). Det er også vist at det er en direkte sammenheng mellom elevenes strategibruk og kvaliteten på matematikkunnskapene (Ostad, 2008).

Det finnes forskning som kaster lys over relasjonen mellom regnestrategier og representasjoner. For eksempel er det gjort pedagogiske forsøk med eksplisitt opplæring i strategibruk, men det er ikke rapportert entydig positive resultater av slik trening (Ostad, 1999). Det synes imidlertid klart at strategiopplæring må knyttes til elevenes områdespesifikke kunnskaper, det vil si til deres forståelse av regnearten de arbeider med (ibid). Elevene bør altså både se sammenhengen med andre regnearter og ulike konkretiseringer og anvendelser av regnearten (Ostad, 2008). Representasjonene knyttet til strategiene må med andre ord være hensiktsmessige for å oppnå fremgang.

Forståelse og metakognisjon kan dermed sies å ha betydning for utviklingen av retrivalstrategiene. Det er vanskelig for elever å huske det de ikke forstår (Tvedt & Johnsen, 2008). Videre sier Tvedt og Johnsen at ”bedre forståelse er nødvendig for at de skal ha fremgang” s.552 og på side 534: ”De har vansker med å huske språklig materiale, *særlig lite meningsbærende ord* (forfatters uthevinger) som skal huskes i en bestemt rekkefølge. Dette viser seg først og fremst som vansker med å huske multiplikasjonstabellen og andre tallfakta, i noe mindre grad som vansker med fremgangsmåter i regning og lignende.”(ibid). Ostad (1999 s.9) understreker det samme når han sier at: ”kan altså noen elever hente frem (retrive) utsagnet 5+3=8 som en meningsbærende enhet”. Han understreker videre at ensidig strategiinstruksjon har liten verdi dersom ikke instruksjonen støttes av metakognisjon (ibid). Å la arbeid med regnestrategier styrkes av samvirke mellom språklige og andre representasjoner med et solid semantisk innhold, synes altså å være nødvendig.

Elevene med svake regnestrategier skiller seg fra dem som følger en normal utvikling også når det gjelder bruk av indre eller privat tale (Ostad, 2007b). Det er vist at elever som har problemer med å utvikle retrivalstrategier i liten grad benytter indre privat tale som fremhentingsredskap mens de regner (Ostad, 2007b). Det er gjort forsøk med opplegg hvor en systematisk trener elevene til å bruke slik indre tale, og det kan se ut som slik trening kan gi en positiv effekt (Askeland, 2007b; Ostad, 2008).

4.5 Emosjoner og motivajon

Et annet område av betydning for elevenes matematiske utvikling, er elevens motivasjonelle og følelsesmessige forhold til faget. Matematikkvansker er ofte fulgt av spesifikk angst i forhold til faget (Butterworth, 2005a, 2005b; Grègoire & Desoete, 2009). Angst kan også virke hemmende på bl.a. minnefunksjoner og dermed hemme den matematiske utviklingen (Butterworth, 2005b). Langtidseffekten av angst i forbindelse med matematikk er imidlertid ikke klarlagt (ibid). Da emosjoner kommer som et resultat av en vurdering av situasjonen (Lazarus, 2006b), er det rimelig å anta at matematikkangst oftere er et resultat av matematikkvansker enn en årsak til vanskene (Butterworth, 2005b). Stadige opplevelser av nederlag vil fort kunne gi negative følelser for faget og redusere motivasjonen. Dette kan føre til at elevene velger mestringsstrategier i retning av å overleve med færrest mulig negative følelser heller enn å arbeide med å bli flinkere faglig (Lazarus, 2006b).

Manglende tiltro til egne svar kan ha en begrensende effekt på barnas strategiutvikling. Dette spiller imidlertid ikke en stor rolle for de fleste (Geary & Hoard, 2003). Viktigere er det trolig at overdreven bruk av en strategi kan gjøre eleven så vant med å bruke denne strategien at de ikke kommer på, eller finner motivasjon til, å utvikle nye strategier (Ostad, 2008). Det er også funn som tyder på at utstrakt bruk av tellestrategier direkte hemmer utviklingen av retrivalstrategier (Dowker, 2005).

Det er også påpekt at innsikt i elevens oppfatning av hva som er viktig i klassens læringsmiljø kan være vesentlig (Kaplan, Middleton, Urdan, & Midgley, 2002). Er det flest mulig rette svar som skal til for å virke flink, eller er det å tenke og forstå som vektlegges? Er det kun rette svar som vektlegges, kan en svak regner like gjerne ta valg for å unngå å avsløre manglende ferdigheter som å prøve å bli flinkere. Likeledes er det lett å gi opp dersom lærer legger stor vekt på å forstå og mestre uten å gi den nødvendige hjelp for å oppnå forståelsen. Vekt på forståelse gir likevel vanligvis både best motivasjon og best faglige resultater (ibid).

4.6 Andre forhold som kan ha innvirkning på den matematiske utvikling

Det kan tenkes en hel rekke andre forhold som også spiller inn i forhold til elevenes matematiske utvikling. Dårlig undervisning, brudd i undervisningen som ved flytting, atferdsvansker og andre sosiale forhold, fravær, hjemmeforhold og andre ytre faktorer kan hemme læring (Butterworth, 2005a).

Også andre nevrologiske forhold, som diskutert under avsnitt 2.1.3, kan ha betydning for elevenes matematiske utvikling. Det er for eksempel funnet tydelig korrelasjon mellom ulike minnefunksjoner og matematikkvansker. Det er likevel ikke funnet at slike svekkelser er årsak til matematikkvansker (Ostad, 2007a).

5.0 Ulike tilgjengelige testtradisjoner

I beskrivelsen av ulike testtradisjoner, er det valgt en praktisk tilnærming. Ved diagnostisering av matematikkvansker vil eleven som regel først møte vanlige ferdighetsprøver i klassen, administrert av læreren. Elever som får dårlige resultater på slike prøver så vel som i det daglige arbeidet, vekker bekymring og sendes gjerne videre til spesialpedagogisk testing. Dette kan utføres av skolens eget støtteapparat alene eller i samarbeid med PPT, som gjerne kalles andrelinjetjeneste. Elever som ikke drar nytte av hjelp som settes inn etter spesialpedagogisk testing, kan så henvises til videre testing av medisinsk eller nevropsykologisk personale i tredjelinjetjenesten. I studien er den samme inndelingen benyttet.

5.1 Ferdighetsprøver

I tråd med fagets sterke skriftlige tradisjoner, er det meste av test og utredningsmateriell av skriftlig karakter. Mye er også utformet med tanke på bruk i gruppe eller klasse. Elevene møter gjerne oftest ferdighetstester som er utformet av elevenes egne lærere. Størrelse og omfang kan variere, det samme kan hyppigheten av slike prøver.

Det finnes også prøvemateriell som ikke er utformet lokalt. Enkelte læreverk har tilbudt kapittelprøver og liknende. Det finnes også standardiserte ferdighetsprøver som skolene kan bestille. Slike prøver vil kunne gi en pekepinn på skolens og enkeltelevers nivå. Standardiserte prøver tester gjerne flere områder av matematikken i tillegg til regneferdighetene. PP-tjenestens Materiellservice sin M-prøver er eksempler på slike prøver (Tornes, 1997). Også de nasjonale prøvene er standardisert slik at de kan antyde ferdighetsnivåer.

De nasjonale prøvene har innslag av diagnostiske spørsmål. Diagnostiske spørsmål er spørsmål laget spesifikt for å avsløre vanlige misoppfatninger og delvise forståelser (Brekke, 1995). Prøveserien Kartlegging av matematikkforståelse som ble utarbeidet av Nasjonalt Læremiddelsenter på nittitallet, er et eksempel på diagnostiske prøver utviklet for bruk i hele klasser (ibid).

Tradisjonelt har ferdighetstester blitt brukt for å teste resultatene av undervisningen (Slemmen, 2009). Slike tester kan like gjerne benyttes som førtester for å finne grunnlaget for undervisningen en skal gi. Det er viktig da ikke bare å se etter rette svar, men også søke å finne elevenes forståelse i videre forstand (Alseth, 1998; Brekke, 1995; Slemmen, 2009).

5.2 Spesialpedagogisk testing

En kan neppe si at det er utviklet en felles tradisjon for spesialpedagogisk testing innen matematikkfaget. Skriftligheten nevnt ovenfor har likevel langt på vei også preget spesialpedagogisk testing. I tidlig strategiobservasjon ble for eksempel strategiene utledet av tiden brukt på de skriftlige oppgavene (Ostad, 1999). Standardiserte tester er gjerne også brukt i spesialpedagogisk testing ved at prøvene er blitt benyttet individuelt og supplert med observasjon og samtale om tankemønstre så vel som analyse av feiltyper (Tvedt & Johnsen, 2008). For spesialpedagogisk bruk er observasjon og samtale ønskelig, da en ved slik testing gjerne ønsker å gå dypere inn i elevenes kognitive prosesser (ibid).

Det synes som det er en utvikling mot større vektlegging av språklig tilbakemelding og kommunikasjon innen spesialpedagogisk testing. Test av representasjonskompetanse, symbol og formalismekompetanse, tankegangskompetanse (begrepsinnhold), resonnementskompetanse og kommunikasjonskompetanse synes også vanskelig uten vektlegging av det språklige. Innen representasjonskompetanse vil språklige representasjoner spille en stor rolle (Alseth, 2003). Det samme vil kunne sies om symbol og formalismekompetanse. Nettopp oversetting mellom representasjonene er sentralt for utviklingen av regneferdighetene, og en kan også dra nytte av dette i spesialpedagogisk testing (Dowker, 2005).

Også innen testing av regnestrategier er det utvikling i retning av større grad av muntlighet i testingen (Ostad, 1999, 2008). Ostads arbeider, som det er henvist til her, er i stor grad knyttet til strategiobservasjoner hvor elevene muntlig beskriver sine løsningsstrategier. Dette materiellet hjelper til å observere elevenes regnestrategier når det gjelder tabellstykker i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon, samt enkle tekststykker og ferdig oppstilte stykker i form av ligninger. Oppgavene er ikke standardisert, men de gjør metodikken som er benyttet i forskningen tilgjengelig for et bredere publikum.

Samme trend finner en også innen andre felt som bl.a. dynamisk testing (Aastrup, 2009; Haywood & Tzuriel, 2002). Dynamisk testing er en betegnelse på testmetodikk utviklet etter samme filosofi som dynamisk evnetesting. Dynamisk evnetesting er utviklet som alternativ til tradisjonelle IQ-tester (ibid) (se kap. 5.3). Slik testing bygger på Vygotskys teorier om den nære utviklingssone (Aastrup, 2009). Poenget er at elevene ikke bare møter oppgaver som skal løses. De får også hjelp til å løse oppgavene hvis de trenger det. Dynamisk testing er ment å kunne gi innblikk i elevens læreforutsetninger i vid forstand slik at det også skal være relativt enkelt å veilede eleven videre faglig og pedagogisk etter testen (ibid). Aastrups (2009) og Lundes (1997) testmateriell er eksempler på slikt testmateriell.

5.3 Medisinsk, nevropsykologisk testtradisjon

Det har i lang tid vært flere nevropsykologiske testformer, bl.a. EEG, CT, MR og PET (Skjeldal & Gjærum, 2008). Disse testformene måler aktivitet i hjernens ulike deler direkte ved hjelp av ulike målbare forhold som elektrisk aktivitet, blodgjennomstrømming osv. I tillegg finnes det et vell av ulike tester for mer indirekte testing av ulike funksjoner og produksjonssystemer i hjernen (Gjærum & Ellertsen, 2008). Slike tester kan vanligvis ikke utføres av vanlige lærere. En må innhente hjelp fra andrelinjetjenesten eller enda mer spesialiserte deler av hjelpeapparatet. Slik testing vil da normalt forbeholdes alvorlige tilfeller hvor skolen opplever at den kommer til kort. Dersom ikke elevens vansker er oppdaget i barnehagealder, vil slik testing gjerne komme relativt sent i skoleløpet. Målet med slik testing er delvis å finne årsaker, delvis å finne hvilke krav en kan stille til eleven, foruten det å finne funksjonsprofiler (Gjærum & Ellertsen, 2008). Funksjonsprofiler kan være nyttige for å finne elevens sterke sider slik at lærer lettere kan bygge videre på de områder eleven er sterk, og eventuelt gi kompenserende hjelpemidler eller undervisning der eleven er svak (Johnsen, 2005). Det er imidlertid diskusjoner om nytte og riktighet ved enkelte av disse testene og profilene (Tzuriel, 2000).

Det diskuteres om evnetesting ved hjelp av tradisjonelle IQ tester gir et riktig grunnlag for å predikere elevenes læringsmuligheter (Haywood & Tzuriel, 2002; Tzuriel, 2000). Det fremheves da for eksempel at tradisjonelle tester måler det som allerede er lært, og at dette ikke gir predikasjonsgrunnlag for videre læring. Dette synet bygger på at tradisjonelle tester ikke sier noe om hvilke pedagogiske situasjoner eleven har gått gjennom og hvilke ressurser eleven har hatt til rådighet (ibid). I stedet foreslås det fra dette hold å bruke dynamisk testing for å predikere læringspotensialet. Ved dynamisk testing blir eleven i testsituasjonen presentert ikke bare for oppgaver som skal løses, men også hjelp til å løse oppgavene. På denne måten mener man å bedre kunne si noe om elevens læringspotensial (ibid).

I og med at lærere må innhente hjelp utenfra for en tradisjonell nevropsykologisk testing, vil disse testene, om de tester aldri så viktige og grunnleggende forhold ved elevene, sjelden ha en dominerende plass i skolens hverdag.

De senere årene er det likevel kommet testmateriell for nevropsykologiske forhold som vanlige lærere kan bruke. I forhold til matematikkfaget finnes det en engelsk test som heter Dyscalculia Screener (Butterworth, 2003). Denne testen er ment å teste hjernens antallsoppfatningsevne. Denne antallsoppfatningsevnen er trolig en viktig grunnlagsfaktor for å utvikle regneferdighetene (Butterworth, 2005a, 2005b). En kan da tenke seg at antallsoppfatningsevnen er av særlig verdi når det gjelder å utvikle forståelse for tallenes kardinale aspekt. Testen foreligger som et dataprogram, og den er relativt enkel å bruke. Resultatet av testen kan skrives ut umiddelbart etter testen uten at testleder trenger å bruke noe tid på å vurdere de ulike delresultatene. Testen er imidlertid ikke oversatt og standardisert på norsk enda.

6.0 Problemstilling

Selv om det er ulike teoretiske tilnærminger og ulike tradisjoner for innhenting av informasjon om elevenes matematiske vansker, møter en i litteraturen gjerne en bevissthet om at matematikkvansker er et område det har blitt forsket lite på. Forskningen er imidlertid i utvikling og en vet etter hvert en god del om på området (Butterworth, 2005a). Det er likevel et stykke igjen før en har en full oversikt over alle aspekter ved matematikkvansker (Geary & Hoard, 2003).

Ovenfor er det gjort rede for flere sentrale emner innen forskningen rundt matematikkvansker. Hver for seg belyser de viktige faktorer om kan ha innflytelse på en elevs utvikling på området. Det understrekes også at det er sammenheng mellom de ulike områdene (Ostad, 2007a; Reikerås, 2007b). Ut fra ulike teoretiske utgangspunkt vektlegges likevel ofte hovedsakelig ett område om gangen. Forskningen som er gjort, kan også ha en tendens til å ha blitt gjort på forskningens premisser (Ostad, 1995).   Dermed kan det være en distanse mellom forskningens verden og det som daglig utspiller seg rundt i de mange klasserom og skoler. Denne studiens siktemål er å se ulike forskningsresultater i sammenheng med hverandre og i sammenheng med hverdagen i skolen.

Ut fra dette konkretiseres følgende forskningsspørsmål:
Hvordan kommer samspillet mellom representasjoner relatert til tall og regning, regnestrategier og regneferdigheter til uttrykk hos elever med regnevansker?

7.0 Metode

7.1 Design

Det er ulike syn på hvilke krav en skal stille til vitenskapelig produsert kunnskap (Gilje & Grimen, 2007). Tradisjonelt har synet vært at forskeren skal være uavhengig og distansert slik at han på fritt grunnlag kan vurdere funnene kritisk. Mot dette synet står blant annet vitenskapsteoretiske og sosiologiske syn som hevder at den frie ubundne forsker er en myte og at nærhet til fagfeltet en forsker på like gjerne kan være et gode som en fare (Halvorsen, 2009). Aksjonsforskning og praktikerforskning bygger på dette synet (ibid).

Praktikerforskning er ikke en bestemt metode, snarere en tilnærming som kan romme både kvantitative og kvalitative metoder. Poenget er at forskeren forsker på et område hvor han til vanlig er praktiker. En som forlater sitt vante yrke for en periode, for å for eksempel ta mastergrad eller doktorgrad innen sitt felt, regnes gjerne som å drive praktikerforskning. Et av kravene som stilles for at en skal kunne kalle forskningen praktikerforskning, er at forskeren forsker på et område hvor han selv har innflytelse gjennom sitt vanlige arbeid (ibid). I så måte regnes denne studien som praktikerforskning, da studien er en tekstanalytisk studie bygd på rapporter forskeren selv har skrevet, eller som er skrevet under veiledning av denne.

Et kvalitativt forskningsdesign ble valgt. Det er flere grunner til dette. En grunn er at gruppen som er testet med alle studiens tre tester *(se nedenfor)* ikke er stor nok til å utføre kvantitativ forskning. Utvalget må altså bli et spesielt utvalg, og kan som sådan ikke uten videre brukes til å generalisere (Thagaard, 2009). Videre er det de spesielle behovene som oppstår hos enkeltelever i samspillet mellom nevrologiske og kognitive funksjoner og elevenes ferdigheter som er studiens fokus. Et kvalitativt design er gunstig når det nettopp er det spesielle heller en generelle en vil belyse (Repstad, 1993).

Selv om det innen kvalitativ forskning er et ideal å ha så stor nærhet til forskningsobjektet som mulig (Repstad, 1993), kan det innen praktikerforskning være en utfordring å få tilstrekkelig avstand til at en kan vurdere eget arbeid kritisk (Sagatun, 2009). I og med at rapportene er skrevet for et varierende antall år siden, er avstand til studieobjektet ivaretatt ved avstand i tid, så vel som kompetansemessig ved at det ligger et mastergradsstudie i spesialpedagogikk mellom rapportene og denne studien.

7.2 Utvalg

Utvalget er relativt lite, kun tre elever. Disse er valgt innen en gruppe på ca 25 elever med regnevansker som er testet med alle studiens tester. Ingen av de tre elevene scorer over gjennomsnittet på noen av testene. Alle elevene scorer svakt på minst to av testene og det er ulik fordeling på elevenes sterke og svake sider. Elevene er så forskjellige at de representerer ulike, om ikke ytterpunkter, så i alle fall posisjoner innen gruppen elever med regnevansker. En av elevene hadde førstegangskontakt med forsker i tredje klasse. Forøvrig er hovedinnsatsen gjort i 6. og 7. klasse.

7.3 Data og databehandling

Det er skriftlige kilder som utgjør datagrunnlaget for studien. Hovedsakelig baserer studien seg på rapporter fra kartlegging, tester og utredning av de tre elevene. Også rapporter fra tiltak som er satt i gang er vektlagt. I varierende grad er også andre skriftlige kilder som rapporter fra PPT, møtereferater og lignende med i datagrunnlaget.

Skriftlig materiale kan tolkes på ulikt vis og ulike nivåer (Gilje & Grimen, 2007). I denne sammenhengen brukes det skriftlige materialet først og fremst til å finne ut mest mulig om hva hver elev mestrer og hvordan deres matematiske utvikling går. Dermed er det hva forfatteren mente å kommunisere som blir viktigst å få innsikt i. I tråd med denne målsettingen velges først og fremst et aktørkriterie for tolkingen av tekstene (ibid).

For å få innsikt i forfatterens hensikter, er det viktig å påpeke enkelte forhold i tekstenes kontekst. Tekstene ble ikke skrevet med forskning som siktemål. De er derfor ikke så systematisk oppbygd som en kunne ønske. I stedet er de skrevet for å i varierende grad kommunisere med foreldre, PPT, skolenes ledelse og lærere. Tekstene kan derfor sees både som argumenter for ekstra hjelp i faget og antydninger om hva denne hjelpen bør bestå i, så vel som dokumentasjon på at skolen «gjør jobben». Enkelte av tekstene er også skrevet i forbindelse med veiledning av lærere, så de kan i tillegg bære preg av å være del av kompetanseheving innen faget.

Videre er det nødvendig å påpeke et par av forutsetningene som lå til grunn for de spesialpedagogiske testene. Det første er at testene er utført med kun pedagogiske hensyn for øye. De er derfor ikke så omfattende som de godt kunne vært. Hensynet til at elevene skal slippe ytterligere nederlagsfølelse, sammen med en ide om at hvis de grunnleggende ferdigheter ikke er på plass, er heller ikke det som skal bygge på det grunnleggende av tilfredsstillende karakter, har begrenset omfanget.

En annen grunnleggende forutsetning for de spesialpedagogiske testene er at forståelse for titallsystemet er en grunnleggende ferdighet (Thorsen, 2004). Også regnestrategienes betydning

(Ostad, 2008) og tankegangen rundt matematisk kompetanse (Niss, 2002; Stedøy-Johansen, et al., 2010) ligger til grunn. Fra området matematisk kompetanse er særlig representasjons-, resonnements- og tankegangskompetanse vektlagt. Regnestrategiene er vektlagt både for sin egen del og som indikator på at elevens grunnlag for matematiske resonnementer.

7.4 Analysenivåer og analyseredskaper

I analysen av datamaterialet gis det først en presentasjon av hver elev for seg. Dette gjøres for at elevenes sterke og svake sider skal komme frem slik at leseren kan få et best mulig inntrykk av elevene i studien. Dette vurderes som viktig for å gi en så transparent fremstilling at leseren selv kan følge studiens argumentasjon og vurderinger (Thagaard, 2009). Dermed blir det også lettere å sikre studiens reliabilitet (ibid).

Etter denne innledende presentasjonen av elevene, følger en tematisk oppsummering av funnene (Thagaard, 2009). Oppsummeringene er så langt råd er utformet i tabells eller matrises form for å lette oversikten. Enkelte utfyllende kommentarer finnes i tilknytning til tabellene. Temaene for oppsummeringen av dataene samsvarer i stor grad med den inndeling som allerede er foretatt i det skriftlige grunnlagsmaterialet. Dette er i tråd med det valgte aktørperspektivet nevnt ovenfor.

På et prinsipielt grunnlag kan det i kvalitative studier være vanskelig å skille analyse og tolking av dataene (Repstad, 1993; Thagaard, 2009). På denne bakgrunn slås den videre analyse og tolking av dataene sammen i studiens drøftingsdel.

7.5 Datainnhenting

Data ble innhentet etter elevers og foresattes samtykke. Velvillig hjelp og tilgang til arkivene på de aktuelle skolene frambrakte dokumentene uten nevneverdige problemer.

7.6 Etikk

De etiske problemstillingene i forbindelse med denne studien går hovedsakelig på å sikre informantenes anonymitet. Dette er gjort ved at skolenes navn og årstall for tester og rapporter ikke beskrives. Rapportene legges heller ikke ved som vedlegg, da flere av dem har design som lett kunne avsløre hvilke skoler elevene gikk på. I stedet er det valgt å presentere elevene grundig i presentasjonen av data. Elevene er gitt fiktive navn og kjønnstilhørighet. Studien er godkjent av NSD og tillatelse er innhentet fra berørte parter.

7.7 Redskaper

Studien bygger på innhentet informasjon om elevenes matematiske utvikling. Selv om det finnes et varierende tilfang av rapporter fra støtteundervisning o.l, bygger studien i hovedsak på resultatene fra tre ulike tester, en ferdighetsprøve, en spesialpedagogisk test og en nevrologisk test.

Ferdighetstesten ble tatt om våren og fungerte dermed i stor grad som en ettertest for å måle resultatet av elevenes undervisning. Den spesialpedagogiske og den nevrologiske testen ble derimot først og fremst brukt som en førtest (Slemmen, 2009) for å finne grunnlaget for den støtteundervisning elevene skulle få. Disse testene ble også brukt som grunnlag for henvisning til PPT.

7.7.1 Ferdighetstesting

I denne studien er PP- tjenestens materiellservicesine M-prøver valgt (Tornes, 1997). Prøvene er ikke tatt i forbindelse med spesialpedagogisk testing og utredning, men som del av skolenes rutinemessige screening av alle elevene.

Prøvene er ikke oppdatert etter gjeldende læreplan, men dette vurderes som et mindre problem i denne sammenhengen, da elevene i utvalget i alle fall delvis har gått på skole før kunnskapsløftet trådte i kraft. Videre dekker prøven de sentrale emnene innen tall og regning slik at resultatene er relevante for studien. I tillegg til rene tall og regneoppgaver uten tekst, er det spørsmål om geomteri, måling og en del tekstoppgaver. På resultatskjemaet får en delresultater for talloppfatning, titallsystem, regneartene, relasjoner, utsagn/likninger, form/mønstre/geometri, behandling av data, regneferdighet/problemløsing og måling og enheter. Resultatene på denne testen omfatter dermed mer enn det som faller inn i denne studiens rammer. Det vil påpekes spesielt der hvor det er rapportert om avvik mellom regneferdigheter og generelle matematikkferdigheter.

Standardiseringen er utført slik at lærer i rettearbeidet får markert de 10% svakeste og gruppen fra 10-20% svakeste innen hver av de nevnte kategoriene. Testen er videre delt i to. Del en omfatter i hovedsak regning og tallforståelse. Del to omfatter hovedsakelig geometriske emner, databehandling, måling og problemløsing og praktisk regning. Det gis en prøveklasse for hver av deltestene og en samlet for hele testen. Prøveklassen er identisk med staninescore. Prøveklasse 1 er dermed svakest, prøveklasse 9 er best. Prøveklasse 1 representerer de 4% svakeste og prøveklasse 2 de neste 7% svakeste slik at en som oppnår prøveklasse 2 er blant de 11% svakeste etter standardiseringen (Tornes, 1997). Testen skiller dermed ut de svakeste innen hvert emne samt at også de flinkeste graderes uten takeffekt. Dermed blir det relativt lett å se elevenes sterke og svake sider. Fordi prøvene er standardisert for hvert år, kan en også følge elevenes utvikling over tid.

Testene er navngitt etter klassetrinnet de er beregnet for. M2 er dermed beregnet for 2. klasse osv. Det er ikke systematisk bruk av diagnostiske spørsmål i M-prøvene. Resultatene gir dermed et tradisjonelt prøveresultat som viser hva eleven har klart å få rett svar på. Retteskjema som kunne vist hvilke emner elevene klarer bra eller dårligere er ikke tatt vare på. Det er vanligvis samlet prøveklasse som oppbevares i lengre tid.

7.7.2 Spesialpedagogisk testing

Den spesialpedagogiske testingen brukt i studien er en lokalt utviklet variant med vekt på elevenes kognitive funksjoner (vedlegg 1). Den er fleksibel og interaktiv, som et semistrukturert intervju (Thagaard, 2009), idet testleder forfølger elevenes svar i samtale og videre oppgaver for å få innsikt i elevenes forståelse og tenking. Testen blir dermed utført forskjellig for hver elev, etter elevens respons. Det er også innslag av elementer fra dynamisk testing, da en gjerne gir hint og hjelp i samtalen rundt de ulike delprøvene. Som et minimum testes som regel elevenes regnestrategier, forståelse for titallsystemet, regneferdigheter med flersifrede tall og forståelse for regnetegn og regnestykkenes syntaks.

7.7.2.1 Regnestrategier

Regnestrategiene testes ved hjelp av oppgaveark med til sammen 64 tabellstykker, et ark for hver av regneartene addisjon, subtraksjon og multiplikasjon (vedlegg 2,3 og 4). For hver regneart får elevene regne så mange oppgaver de klarer på tre minutter. Svarene skrives rett på oppgavearket. Etter regneøkten samtaler testleder og elev om de ulike regnestrategiene som er brukt. En kan også spørre om oppgaver som ikke er gjort, dersom få oppgaver er gjort. I tillegg til oversikt over regnestrategiene får en da også en generell innsikt i elevenes tidsbruk, det vil si hvor funksjonelle strategiene er.

Regnestrategiene vurderes i samsvar med Ostads retningslinjer (Ostad, 2008), men testmetodikken som er benyttet her skiller seg fra Ostads metodikk på to områder. For det første regner elevene i stor grad ferdig før en samtaler om strategiene som ble benyttet. For det andre tester Ostads opplegg ikke regnestrategier for addisjon av to like tall. Å benytte kunnskap om addisjon av to like tall kalles tvillingtallstrategi (Solem & Reikerås, 2008). Ostad tester heller ikke de såkalte tiervennene, det vil si tallkombinasjoner som gir ti som svar ved addisjon (ibid). Både tvillingtall og tiervenner brukes gjerne som utgangspunkt for dekomposisjon (ibid). Slike oppgaver er med i testmaterialet både for å se om elevene kan anvende retrivalstrategier på slike oppgaver i seg selv, og for å se om elevene klarer å bruke slik kunnskap til dekomposisjon.

7.7.2.2 Forståelse for titallsystemet

Videre testes forståelse for titallsystemet ved at elevene blir bedt om å sette ulike siffer sammen til så store og små tall som mulig (vedlegg 1). Sifrene 1,2,6 og 9 benyttes gjerne. Elevene spørres så om de kan lese tallene og hvorfor det ene tallet er stort og det andre lite når de er satt sammen av de samme sifrene. Spørsmål om elevene vet og kan plassere enerplass, tierplass osv følger så. Det spørres også om elevene vet hva ordene enerplass, tier plass og hundrerplass betyr. Det siste spørsmålet er gjerne hvor mye eleven ville hatt i lønn. En bruker da det minste tallet, her 1269. Eleven spørres da hva han vil ha i lønn etter for eksempel å ha måket snø. Eleven må da velge ett av sifrene i tallet 1269. En spør også hvorfor eleven vil ha det han velger. En elev som velger sifferet 1 fordi det står på tusenplassen og representerer ikke 1 men 1000, ansees som å ha god forståelse for titallsystemet. Elever som velger sifferet 9 fordi det er mest, ansees som å ha dårligere forståelse. Dette avslører vanligvis godt om eleven vet og er fortrolig med at sifrene representerer forskjellig verdi etter hvilken plass de står på.

7.7.2.3 Regning med flersifrede tall

Samtale om regning med flersifrede tall hører også ofte med. Elevene regner da noen få oppgaver med stigende vanskegrad (vedlegg 5). Testleder observerer og samtaler med elevene om hvorfor de gjør de ulike operasjonene. Forståelsen bak ferdighetene i regning med flersifrede tall kommer da til syne.

7.7.2.4 Regnetegn og syntaks

Samtale om hva de ulike regnetegnene betyr, hører med, sammen med oppgaver hvor elevene skal lage fortellinger til ferdig regnede stykker (vedlegg 1). Sagt på en annen måte, elevene må oversette fra de skrevne matematiske symbolene til en fortelling regneoppgaven kunne ha representert. På den måten får en innsikt i denne delen av elevenes representasjoner og i hvor stor grad elevene er i stand til å benytte matematikkens symboler og skrivemåter i praktiske situasjoner.

7.7.3 Nevrologisk test

Den nevropsykologisk baserte testen brukt i denne studien, er Brian Butterworths Dyscalculia Screener (Butterworth 2003). Testen er PC-basert og vurderer reaksjonstiden for enkle oppgaver i forbindelse med tall og antallsbehandling. Det er to såkalte kapasitetstester som skal avsløre dykalkuli. Den første er en test hvor eleven skal avgjøre om det er samsvar mellom antall prikker og et tall som vises samtidig med prikkene. Den andre går på å avgjøre hvilket tall som er «størst», det vil si hvilket som representerer størst antall. Tallene presenteres to og to, men de kommer i ulik fysisk størrelse. Det kan altså komme f.eks. et stort firetall og et lite femtall. Foruten dette er det en test av reaksjonstid, noe som er nødvendig for å kalibrere målingen av resultatene. Det er også en test hvor elevene skal avgjøre om enkle addisjonsstykker (ensifret + ensifret tall) er rette. For eldre elever er det en tilsvarende oppgave med multiplikasjon. Disse testene kalles ferdighetstester. For best konsentrasjon og sikreste resultater anbefales det at testen tas av en og en elev i skjermede omgivelser.

Testen er automatisk i den forstand at testresultatene og eventuell diagnose presenteres uten lærers medvirkning og vurdering. Resultatene presenteres som søylediagrammer hvor reaksjonstid målt etter staninescore er skalen, og en kort kommentar beskriver om vanskene skyldes nevrologiske vansker i antallsoppfatningssenteret, det vil si dyskalkuli, eller ikke. Elever som får staninescore 1 eller 2 på minst en av kapasitetstestene, diagnostiseres med dyskalkuli (Butterworth, 2003).

Testen er produsert i England og foreligger ikke i norsk oversettelse. Dermed er det visse problemer med bruk i Norge. I forhold til elevene var det ikke store vansker med instruksjon. Oppgavene er klare og enkle, så det er lett å skjønne hva en skal gjøre. En større svakhet er det at testen ikke har norsk standardisering. På den bakgrunn må resultatene behandles med varsomhet og kun tas som indikasjoner.

7.7.4. Tilleggsopplysninger

I tillegg foreligger det varierende tilleggsinformasjon som henvisningspapirer til PPT, sakkyndige utredninger, referater fra ulike møter med foresatte, rapporter fra støtteundervisning, lærers notater fra undervisningen osv. Denne ekstra informasjonen samsvarer i stor grad med resultatene fra de tre testene. Av denne grunn, og fordi slikt materiale foreligger i svært ulikt omfang, vil det legges mindre vekt på dette. I den grad informasjon fra andre kilder enn de tre testene benyttes, vil dette påpekes eksplisitt.

Da alle tre også har flyttet minst en gang i løpet av grunnskolen, varierer det hvor langt tilbake det har vært mulig å samle data om elevene.

8.0 Presentasjon og analyse av datamaterialet

Utvalget består av tre elever som alle ble testet og arbeidet med hovedsakelig i 6. og/eller 7. klasse. En elev fikk spesialpedagogisk utredning i 3. klasse, uten at spesialpedagogiske tiltak ble iverksatt på det tidspunktet. Nevnte tester er utført for alle elevene.

I det følgende presenteres opplysningene om elevene personsentrert, før en tematisk analyse følger etterpå.

8.1 Presentasjon av elevene

8.1.1 Arne

Arne kom flyttende i 4. klasse. Det varr ikke rapportert problemer i matematikk på dette stadiet. Han hadde derimot ganske store lesevansker. Fra henvisningspapirer og møtereferater kan en se at skolen tok tak i dette og utredet ham blant annet med LOGOS to ganger. Han viste her svake så vel som uvanlig varierende resultater, dog ikke av dyslektisk karakter. Det ble derfor stilt spørsmål ved hans oppmerksomhet. PPT foretok en WISC-test som ikke bekreftet oppmerksomhetsvansker, men derimot antydet en moderat svakhet i kodingen. Det vil si at symboler og symbolbruk kan være vanskelig for ham.

Skolen Arne flyttet til drev ganske omfattende individuell tilpassing gjennom bruk av den såkalte Nylundmodellen (Fauskanger & Tjomsland, 2007). Ved bruk av denne metodikken, forsøker en å tilpasse lærestoffet etter hva elevene til enhver tid trenger å lære, og det skal benyttes varierte arbeidsmetoder. På tross av slik tilpassing falt guttens prestasjoner i matematikk og det ble tydeligere og tydeligere at han også slet med matematikkfaget. I referater fra møter med mor, kommer det frem at Arne ikke hadde hatt problemer med matematikk tidligere. Hun opplyste imidlertid også om at det er både dysleksi og dyskalkuli i nær familie. Det fremgår imidlertid ikke hvilke kriterier som er lagt til grunn for disse diagnosene.

I desember 6. klasse ble det foretatt en spesialpedagogisk testing av elevens matematikkferdigheter. Rapporten fra denne testingen viser at han hadde svært svake regnestrategier. Ved addisjon benyttet han kun retrivalstrategier ved addisjon av to like tall til og med 5+5. Han kunne også addere med ti og med elleve uten å telle. Innen subtraksjon visste han at 10-5=5. Ut fra dette klarte han også å resonere at 10-6=4. 5-4=1 klarte han også. Forøvrig brukte han tellestrategier på alle oppgavene innen addisjon og subtraksjon.

Multiplikasjon slet han også med. Han visste at 5*5=25 og han hadde automatisert de fleste oppgavene i 2-gangen. Ut fra det han visste om 2-gangen, klarte han å telle ut noen svar i 3-gangen. Han kunne også rekketelle med fem om gangen slik at han klarte å finne svar i 5-gangen. Forøvrig hadde han meget store problemer med å finne svar på multiplikasjonsoppgaver.

Det må sies at han konserverte mengder etter Piagets definisjon av dette (Tolchinsky, 2003), men prosessen var likevel ikke enkel for ham. Han visste at han måtte telle klossene for å se om det var like mange, men han virket likevel usikker på egne telleferdigheter og talte mange ganger før han svarte. Tellingen var nølende, selv om det ikke var snakk om mer enn syv klosser i hver rekke. Selv om tellingen tok en del tid, forsøkte han ikke å omgruppere klossene for å finne raskere svar på spørsmålet.

Han klarte å lese firesifrede tall, og han kunne navngi sifferplassenes navn. Han hadde likevel ingen forståelse for hva plassnavnene betyr, langt mindre at sifrene har ulik verdi etter hvilken plass de står på.

Han hadde lite eller ingen forståelse for desimaltall og brøk. Arnes svar på hva som er mest av 1/3 og ¼ kan være symptomatisk for forståelsen. Han svarte nemlig at de to brøkene er like mye, for hvis han tenkte pizza, ville han få et stykke uansett.

Han virket også usikker på tall generelt, og han visste ikke dato eller årstall for fødselsdagen. Dette på tross av at han visste at han hadde bursdag den måneden han ble testet.
Det mest påfallende var likevel at han ikke brukte ett eneste ord som relaterte til antall eller mengde. Han snakket kun om «hakk opp og hakk ned». Han så f.eks. at 5-4=1 fordi «fem er ett hakk over fire.» Dette ble tolket som at han i uvanlig stor grad tenkte ut fra tallenes ordinale aspekt.

Regnetegn og skrivemåter hadde han liten forståelse for, og han klarte ikke å knytte regnestykker sammen med virkeligheten. Etter å ha fått eksempler klarte han å lage fortellinger til addisjons og subtraksjonsstykker, men dette var umulig innen multiplikasjon, selv etter eksempler. Forståelsen for regneoppgavenes symbolbruk og syntaks var med andre ord svak.

Han ble videre testet med Dyscalculia Screener. Rapporten fra denne testen viser at han fikk staninescore 3 på reaksjonstidstesten. På kapasitetstestene fikk han staninescore 1 på sammenlikning av prikker og tall og 3 på sammenlikning av tall. Dermed fikk han diagnosen dyskalkuli. På addisjons og multiplikasjonstesten fikk han henholdsvis score 2 og 1. Det var her så mange feil at maskinen regner med at han har gjettet svarene. Siden testen ikke er standardisert i

Norge, er det nok å slå fast at han hadde meget svak antallsoppfatning.

I 5. klasse oppnådde Arne prøveklasse 3 på M5. I 6.klasse fikk han kun prøveklasse 2 på M6.

Arne virket trygg på strategiene han brukte. Rapporten fra støtteundervisningen gir også inntrykk av at han var ved godt mot. Han syntes det var interessant med hjelp, og han virket tilfreds med tilbudet og motivert for videre arbeid.

Han mottok noe spesialundervisning i faget på slutten av 6. klasse og videre utover i 7. Det ble her arbeidet med talloppfatning, regnestrategier og begrepsforståelse. Skolen hans har imidlertid tatt noe lett på rapporteringen, slik at omfang og resultat er noe usikkert. Det synes likevel som han har hatt en viss fremgang, selv om det går tydelig frem av rapportene at han hadde meget store vansker med å tenke ut fra tallenes kardinale aspekt. I alle fall ble hans regnestrategier innen addisjon og subtraksjon rapportert i bedring ved utgangen av syvende klasse, mens han ennå slet med multiplikasjon og divisjon.

8.1.2 Bjarne

Bjarne kom flyttende til sin nye skole til skolestart i 6. klasse. Han hadde da slitt med matematikkvansker lenge, og han var allerede henvist PPT i sin forrige kommune. PPT hadde imidlertid ikke startet utredningen. Han hadde også mottatt støtteundervisning i matematikk ved sin forrige skole, men det er uklart hva denne støtten bestod i. Fra lærers notater går det frem at, i følge eleven selv, bestod støtten i å sitte med ”ei gammal kjerring” og løse addisjons og subtraksjonsstykker med ensifrede tall ved hjelp av å telle klosser. Det er imidlertid klart at støtteundervisningen hadde skapt uvilje mot ytterligere støtte i faget.

Den nye skolen startet egen utredning allerede i september 6. klasse. Det forelå da ingen resultater fra M-prøvene eller andre prøver. Skolen foretok en spesialpedagogisk utredning. Rapporten viser at Bjarne brukte retrivalstrategier ved addisjon av de fleste tvillingtall. Addisjon av typen +1 og enkelte stykker med +2 klarte han også uten å telle. Forøvrig talte han alle stykker innen addisjon og subtraksjon.

Han hadde ikke blitt undervist i multiplikasjon.

Han kunne sette sammen sifre for å lage så store og så små tall som mulig. Han kunne også lese firesifrede tall og plassere ener, tier, hundrer og tusenplass rett. Han så likevel ikke noen mening med disse ordene, og han visste ikke at sifrene får forskjellig verdi etter plassering.

Han hadde altså svak forståelse for heltall. Desimaltall og brøk ble derfor ikke testet ved testtidspunktet. Rapportene fra støtteundervisning viser at han hadde svært liten kunnskap om denne type representasjoner slik at han måtte undervises helt fra bunnen i disse emnene.

Han klarte å regne addisjon og subtraksjon av flersifrede tall med veksling, selv om han var noe usikker på veksling ved subtraksjon. Han klarte å plassere stykkene rett under hverandre når det ikke var like mange sifre, men han oppgav at han var usikker på dette og gjorde ofte feil.

Det var også tydelig at han kun hadde oppnådd en mekanisk og fragmentert forståelse av matematikken. Forståelsen for regnetegn og syntaks var svak, noe som fremkom ved at han ikke klarte å lage fortellinger til ferdig regnede regneoppgaver. Også på et generelt plan var det svært vanskelig å knytte matematikk og virkelighet sammen. Det var liten eller ingen forståelse for sammenhengen mellom ulike matematiske emner og regnearter. Han kunne lite om dato, måneder og årstider. Også høyre og venstre var vanskelig. Seinere utredning fra PPT bekrefter dette inntrykket. PPT konkluderer også med behov for spesialundervisning i matematikk etter Opplæringslovas § 5.1

Svært påfallende var uviljen mot faget matematikk generelt og støtteundervisning spesielt. Av rapportene for støtteundervisningen går det frem at han ikke ville komme hverken til testing eller de første støttetimene. Det oppgis her at timetallet for støtteundervisning er omtrentlig anslått, fordi «han i starten ikke klarte for lange og hyppige økter».

Bjarne ble også testet med Dyscalculia Screener. Rapporten herfra viser noe svak antallsoppfatning, staninescore 3 på sammenlikning av prikker og tall mens sammenlikningen av tallene gav staninescore 5. Dette gir ikke dyskalkulidiagnose etter programmets engelske standardisering. Han fikk staninescore 3 på addisjonstesten og 2 på multiplikasjonstesten. Det var imidlertid så mange feil at svarene vurderes som gjetting. I og med at han ikke hadde lært multiplikasjon, var det først og fremst her han gjettet.

I 6. klasse ble Bjarne under tvil testet med M-prøven. Han fikk da prøveklasse 1 på M6. Høsten i 7. klasse ble han testet om igjen med prøven for 3. klasse, M3. Her fikk han staninescore 4.

Rapportene knyttet til støtteundervisningen i matematikk viser at han fikk en støttetime pr uke etter at han ble testet høsten i 6. klasse og T-timer og IOP i matematikk i 7. klasse. Det fremgår også at det var en lang prosess å bygge bedre forståelse for matematikken. Det første året gikk til å fjerne den verste motviljen mot faget, samt å lære enkle regnestrategier av typen «jeg vet at 3+3=6, da må 3+4 bli 7», her som et uttrykk både for å bedre regnestrategiene og for å styrke tallrepresentasjoner bygd på antallsoppfatning. Rapportene viser imidlertid at dette var vanskelig for Bjarne, da han hadde svært liten trening i å se at mengder kunne deles i undergrupper. I løpet av 7. klasse klarte han å se sammenhenger mellom addisjon og subtraksjon, bruke varierte regnestrategier og utvikle rimelig forståelse for titallsystemet, inklusive desimaltall med inntil to desimaler. 2-gangen var automatisert sammen med deler av 5-gangen. Han mestret også å se sammenhenger mellom matematikkens språk og symboler og virkeligheten. Følgelig var det f.eks. ikke lenger problemer knyttet til det å lage fortellinger til regnestykker.

8.1.3 Camilla

Camillas foreldre forteller at hun gikk i en liten klasse de første årene av skoletiden. Bevarte portofolie- målark viser at læreren vektla å lære elevene gode regnestrategier og god forståelse for titallsystemet. Portofolie-målarkene skal ha blitt brukt for å følge elevenes utvikling. Denne portofoliebaserte tilpasningen av undervisningen synes, ut fra målarkene, henvisningsgrunn til spesialpedagogisk testing og foreldrenes utsagn bevart i møtereferater, å ha vært relativt omfattende. Henvisningsgrunnen som blir oppgitt ved henvisning til spesialpedagogisk testing ved juletider i tredje klasse, var at læreren var bekymret for Camillas utvikling. De andre i klassen skulle begynne med multiplikasjon, men Camilla kunne ennå ikke regne addisjon med tosifrede tall.

Rapporten fra den spesialpedagogiske testingen viser at hun i tredje klasse konserverte mengder, hun talte til 100 uten problemer og hun kunne telle baklengs. Hun så med en gang hva som var store og små tall i tallområdet 0-100, men begreper som ener og tierplass var hun usikker på. Også forståelse for regnetegn og andre matematiske representasjoner var svake.

Det var et påfallende problem med regnestrategiene. Under observasjon av regnearbeidet under testen, så testleder tydelig at hun talte mange stykker på fingrene. Hun skjulte imidlertid fingrene under bordet for at det ikke skulle synes. På spørsmål om hvilke regnestrategier som ble brukt, gav hun svar basert på dekomposisjon og retrival. Eksempelvis svarte hun at 5+3=8 fordi 5+5=10. 5+3 er to færre, altså 8. Camilla ble konfrontert med at hun talte mens hun regnet, men oppgav en helt annen tenkemåte da hun ble spurt etterpå. Hun svarte da at hun talte for at det skulle bli rett. Det synes altså som hun hadde lært andre regnestrategier enn rene back up strategier, men at hun ikke stolte på disse.

På portofolie- målarkene fra fjerde klasse er det notert at Camilla har lært gangetabellene, men at hun ikke forstår dem. Det bemerkes også at læringen er et resultat av pugging og at det er gjort et meget stort arbeid i hjemmet for å oppnå dette.

Camilla er den eneste som har full samling resultater fra M-prøvene. De viste i tredje klasse en stigende tendens. Testleder og lærer konkluderte da med at Camilla trolig hadde vært sein til å utvikle antallsoppfatningen som grunnlag for forståelse i matematikken, men at hun nå var i fin utvikling.

Referat fra møte med foreldrene viser at verken Camilla eller foreldrene på det stadiet ville ha ekstra hjelp. De mente at hun gikk i en liten klasse og fikk et godt nok tilpasset opplegg der. Foreldrene rapporterte likevel at Camilla kunne være litt svingende i humøret og «gå i lås» dersom hun ikke fikk det til. Da kunne hun også miste det hun hadde lært allerede.

M-prøvene viste imidlertid fallende tendens igjen i 5. klasse. Staninescorene for de ulike prøvene er som følger:
M-2: Prøveklasse 3
M-3: Prøveklasse 4
M-4: Prøveklasse 4
M-5: Prøveklasse 2
M-6: Prøveklasse 2
M-7: Prøveklasse 2.
Det bemerkes at hun i 7. klasse etter et par måneder med støtteundervisning gikk opp til prøveklasse 3 på delprøve en, som først og fremst måler talloppfatning og regning.

Ved flytting ved starten av 6. klasse, kom Camilla til en stor klasse. Det går frem av referater av møter med foresatte at hun ikke ville ha ekstra hjelp ved flyttingen, av frykt for å skille seg ut og bli stigmatisert. På tross av at det også på denne skolen ble benyttet portofoliemetodikk og ut fra dette gitt tilpasning i undervisningen, økte Camillas problemer i matematikk i omfang. Hun slet nå med de fleste emner i matematikk. Kun symmetri og andre «kunstneriske» emner gikk godt. Dette klarte hun til gjengjeld meget bra.

Etter jul i 7. klasse var hun moden for å motta hjelp. Det ble da ikke utført noen ny utførlig spesialpedagogisk test, men det fremgår av notater og møtereferater at hun hadde beholdt sine tellestrategier. Tellestrategiene kan heller ikke karakteriseres som effektive, spesielt innen subtraksjon. 14-6 syntes hun for eksempel var svært vanskelig, og hun skrev stykket med sifrene under hverandre og utførte veksling for å finne svar på denne oppgaven. Forståelse for titallsystemet og for regnetegn og syntaks var også fortsatt mangelfull. Det samme var regneferdighetene innen alle fire regningsarter. Hun kunne bare regne addisjon og subtraksjon med flersifrede tall dersom det var like mange sifre i tallene.

Det rapporteres også at Camilla hadde store problemer med alle typer tekststykker i 7. klasse. Hun klarte heller ikke å lage fortellinger til ferdig regnede addisjons og subtraksjonsstykker uten mye strev og litt hjelp. Multiplikasjonsstykker klarte hun ikke å lage fortellinger til, selv etter at eksempler ble gitt.

Det er også rapportert at Camilla hadde en tendens til å skrive opp oppgavene rett, men bruke feil regneart likevel. Det synes altså som regnetegnene hadde svak signaleffekt også for hvilken prosedyre som skulle settes i gang.

Hun hadde også liten tro på egne ferdigheter i forhold til matematikk og likte ikke faget.

Dyscalculia Screener ble brukt og hun ble henvist PPT for å få mulighet for hjelp på ungdomsskolen. Resulatet fra Dyscalculia Screeneren viste staninescore 5, altså gjennomsnittlig, på begge de to kapasitetstestene. Addisjonstesten gav resultat på 4 mens multiplikasjonstesten gav 2. Antallsoppfatningsevnen var altså god, men multiplikasjonstabellene hun pugget i fjerde klasse ser ut til å være glemt i stor grad.

Fra og med mars i 7. klasse rapporteres det at hun fikk en time støtteundervisning i matematikk i uka. Hun fikk også et spesielt lekseopplegg som skulle stimulere forståelse, begrepsutvikling og nye regnestrategier. Foreldrene ble også instruert i dette for å kunne hjelpe til.
Rapporten for støtteundervisning våren i 7. klasse, sammen med notater fra undervisningen, viste store fremskritt innen regnestrategier og forståelse. Camilla trengte bare en undervisningstime for å bli trygg på regnestrategier av typen «3+3=6, altså må 3+4=7». Utvikling av forståelse for regnestykkenes representasjoner gikk også fort. Det ble også arbeidet med både desimaltall og brøk med godt resultat. Det synes som dette var starten på en god prosess. Eleven går i skrivende stund i 8. klasse, og foreldrene informerte i forbindelse med datainnsamlingen at hun fikk karakteren 4 i matematikk til jul, uten at den tilbudte ekstrahjelpen ble mottatt.

8.2 Analyse av resultatene
Elevene i utvalget er allerede presentert individuelt. Analysen som følger er i hovedsak tematisk organisert (Thagaard, 2009). Matriser og tabeller er benyttet for å lette oversikten over funnene.

Matriser og tabeller kan likevel ikke romme alle nyanser. Det følger derfor utfyllende kommentarer etter enkelte matriser.

Tabell 1. Resultater fra M-prøvene

Klassetrinn	Prøve	Arne	Bjarne	Camilla	
2. klasse	M2			3	
3. klasse	M3			4	
4. klasse	M4			4	
5. klasse	M5	3		2	
6. klasse	M6	2	1	2	
7. klasse	M7		4*	2	*Ble prøvd med M3

Camilla og Arne har altså en fallende tendens i resultatene ut over på mellomtrinnet. I småskolen hadde de akseptable resultater. Camilla hadde resultater opp mot gjennomsnittet, mens Arnes mor opplyser at Arne ikke har hatt problemer med matematikk tidligere. Bjarne har hele tiden slitt, og etter et år med støtteundervisning scorer han fremdeles i syvende klasse dårligere enn en gjennomsnittlig tredjeklassing.

Tabell 2. Regneferdigheter vist ved spesialpedagogisk testing

Arne	Addisjons og subtraksjonsferdighetene ble ikke testet. Ut fra resultater på M-prøvene mestret han trolig dette bra. Kunne ikke multiplikasjon med flersifrede tall
Bjarne	Kunne regne addisjon og subtraksjon med flersifrede tall med veksling, også når det var ulike antall sifre. Hadde ingen ferdigheter innen multiplikasjon
Camilla	Kunne regne addisjon og subtraksjon med flersifrede tall med veksling, men visste ikke hva hun skulle gjøre når det var ulike antall sifre. Kunne ikke multiplikasjon med flersifrede tall

Sammenliknet med forventningene i sjette og syvende klasse, scorer alle tre svakt også på regneferdighetene. Sammenholdt med resultatene fra M-prøvene, ser vi likevel at Arne og Camilla har hatt tilfredsstillende regneferdigheter mot slutten av småskolen. Det er først målt mot mellomtrinnets krav at disse to for alvor faller gjennom når det gjelder regneferdigheter.

For Bjarne foreligger det få opplysninger fra 1. til 5 klasse. Det at han har fått støtteundervisning og at han er blitt henvist PPT tyder på at han har vist svake regneferdigheter hele tiden. Ved starten av 6. klasse var han likevel i stand til å regne addisjon og subtraksjon med flersifrede tall, med veksling og låning, og med ulikt antall sifre i tallene, da han ble testet for dette i en rolig setting uten press.

Det skal påpekes et forhold ved Camillas og Bjarnes ferdigheter. Ved starten av 6. klasse hadde Bjarne ferdigheter innen addisjon og subtraksjon, som overgikk dem Camilla hadde ved juletider i 7. klasse. Camilla var nemlig kun i stand til å regne slike stykker dersom det var like mange sifre i tallene. Bjarne gjorde det likevel vesentlig dårligere på M-prøven enn Camilla.

Tabell 3. Oversikt over regnestrategier målt i sjette og syvende klasse

Arne	Addisjon:	Retrival av to like tall t.o.m 5+5. Forøvrig Back up
	Subtraksjon:	Vet at 10-5=5 og dekomposisjon gir 10-6=4. Forøvrig Back up
	Multiplikasjon:	Kan 2gangen og 5x5=25. Teller svar i 3 gangen som dekomposisjon. For øvrig Back up
Bjarne	Addisjon:	Retrival av to like tall t.o.m 9+9. Forøvrig Back up
	Subtraksjon:	Kjente igjen 8-4 mens han forklarte. Kun Back up i testen
	Multiplikasjon:	Hadde ikke blitt undervist i multiplikasjon
Camilla	Addisjon:	Retrival av to like tall t.o.m 9+9. For øvrig Back up
	Subtraksjon:	Kun Back up
	Multiplikasjon:	Ikke testet. Kunne tabellene i 4. klasse, men forstod dem ikke.

Camilla skiller seg likevel ut når det gjelder regnestrategier. Ved testing i 3. klasse foretrakk hun å telle, selv om hun var i stand til å gi retrival og dekomposisjonssvar for de fleste stykkene. Hun var ikke sikker på at hun regnet rett dersom hun ikke talte. Ved arbeidet i 7. klasse, ser det ut som hennes retrival og dekomposisjonsferdigheter er gått tilbake til fordel for tellestrategier. Rapporten fra støtteundervisningen viser at hun plukket opp retrival og dekomposisjon meget raskt da hun skjønte poenget med å tenke på denne måten.

Arne skiller seg ut på en annen måte når det gjelder regnestrategier. Han snakket nemlig utelukkende om hakk opp og ned, det vil si hvor mange hopp det var på tallinja. Denne strategien virket han derimot bevisst og trygg på. Det rapporteres at han ikke brukte et eneste ord som refererte til antall eller mengde under hele testperioden. Han forholdt seg kun til tallene som posisjoner i en rekke. Det synes altså som han kun forholdt seg til tallenes ordinale aspekt.

Tabell 4. Telleferdigheter målt ved spesialpedagogisk testing

Arne	Kan tellerekka godt Svak når det gjelder å telle gjenstander
Bjarne	Teller godt med en, to og fem om gangen Teller svakere med tre og fire om gangen
Camilla	Talte greit allerede i tredje klasse

Camilla konserverte mengder etter Piagets definisjon i 3. klasse. Arne og Bjarne var også trygge på dette ved testtidspunktet i 6. klasse.

Tabell 5. Forståelse for titallsystemet

Arne	Kunne lese til og med firesifrede tall Kunne lage store og små tall Kunne navnene på ener, tier, hundrer og tusenplass Kunne plassere sifferplassnavnene Visste ikke at sifrene får verdi etter plassen de står på Ingen tegn til at han brukte kunnskap om titallssystemet i regning
Bjarne	Kunne lese til og med firesifrede tall Kunne lage store og små tall Kunne navnene på ener, tier, hundrer og tusenplass Kunne plassere sifferplassnavnene Visste ikke at sifrene får verdi etter plassen de står på Ingen tegn til at han brukte kunnskap om titallssystemet i regning
Camilla	Kunne lese til og med firesifrede tall Kunne lage store og små tall Kunne navnene på ener, tier, hundrer og tusenplass Usikker på hvilket plassnavn som hørte til hvilken plass Visste ikke at sifrene får verdi etter plassen de står på Ingen tegn til at hun brukte kunnskap om titallssystemet i regning

Ingen av elevene hadde noe videre forståelse for verken desimaltall eller brøk.

Tabell 6. Regnetegn og syntaks målt ved spesialpedagogisk testing

Arne	Klarte å oversette fra addisjons og subtraksjonsstykker til fortelling etter at eksempler ble gitt
Bjarne	Klarte ikke å oversette fra addisjons og subtraksjonsstykker til fortelling, selv etter at eksempler ble gitt
Camilla	Klarte å oversette fra addisjons og subtraksjonsstykker til fortelling med mye strev og litt hjelp Hadde problemer med alle typer tekststykker i syvende klasse

Ingen av dem klarte å oversette fra multiplikasjonsstykker til fortelling, selv etter at eksempler ble gitt.

Tabell 7. Emosjonelle og andre forhold rapportert på ulikt vis

Arne	Relativt motivert og velvillig til matematikken Generelt uoppmerksom på tall. Visste ikke dato for bursdag selv om han visste han hadde bursdag den måneden han ble testet
Bjarne	Veldig umotivert og uvillig. Generelt uoppmerksom på tall. Kunne ikke dato, årstider og måneder. Kunne heller ikke forskjell på høyre og venstre.
Camilla	Noe oppgitt og med liten tro på egne evner.

Det ble ikke testet eller spurt direkte om motivasjon og følelsesmessig forhold til faget. Opplysningene i tabellen er tolkninger av ulike relevante opplysninger i det skriftlige materialet. Opplysningene om at Bjarne ikke ville komme til støtteundervisning og at han ikke klarte for lange økter i starten, er eksempler på opplysninger som er grunnlag for tabell 7.

Tabell 8. Dyscalculia Screener

	Arne	Bjarne	Camilla
Reaksjonstid	3	3	4
Prikker til tall	**1**	**3**	**5**
Tall mot tall	**3**	**5**	**5**
Addisjon	2	3	4
Multiplikasjon	1	2	2

Ut fra resultatene endte Arne opp med en dyskalkulidiagnose på grunn av de svake resultatene på oppgaven fra prikk til tall. Bjarne får litt svak antallsoppfatning mens Camilla slår ut med helt gjennomsnittlige resultater på antallsoppfatningen.

Tabell 9. Rapportert utvikling etter at tiltak ble satt i verk

Arne	Lite opplysninger Det var vanskelig for ham å begynne å tenke ut fra tallenes kardinale aspekt. Slet fremdeles, spesielt med multiplikasjon og divisjon ved slutten av syvende klasse.
Bjarne	Relativt god fremgang etter at den verste motviljen var overvunnet. Våren i syvende klasse rapporteres det at han ofte jobbet bra i matematikk. Den grunnleggende forståelsen var også i bedring. Gangetabell var likevel lite automatisert.
Camilla	Påfallende rask fremgang.

Tabell 10. Samletabell for de viktigste funnene

	Arne	Bjarne	Camilla
Ferdigheter i småskolen	Tilfredsstillende	Svake	Tilfredsstillende
Ferdigheter mellomtrinn	Svake	Veldig svake	Svake
Antallsoppfatning	Svak	Noe svak	God
Representasjoner	Svake	Svake	Svake
Regnestrategier	Svake	Svake	Svake
Utvikling etter tiltak	Svak	God	Svært god
Emosjonell tilstand	God	Svært dårlig	Dårlig

Mot slutten av mellomtrinnet og før tiltak settes inn, er elevene altså likest når det gjelder regnestrategier og representasjoner. Også ferdighetene de viser på M-prøvene jevnes ut, selv om særlig Bjarne scorer dårligere enn de andre to.

Det er størst forskjell mellom elevene når det gjelder emosjonell tilstand, antallsoppfatning og utvikling. Samsvaret mellom antallsoppfatning og utvikling synes å være tydelig.

9.0 Drøftinger

Elevenes resultater antyder at de har ulike sterke og svake sider. Det ser også ut som om de har hatt forskjellige veier inn i sine matematikkvansker. Videre synes det tydelig at de ulike testredskapene som er brukt tester ulike aspekter av elevenes matematiske kompetanse

9.1 Drøfting av resultater fra ferdighetsprøvene

Vanlige ferdighetsprøver, som for eksempel de som er brukt i denne studien, tester først og fremst elevenes kunnskapsmengde, ikke kvaliteten på kunnskapen (Ostad, 1999). Studiens ferdighetsprøve gir seg heller ikke ut for å være noe annet enn en screeningprøve på elevenes matematiske ferdigheter i en prøvesituasjon (Tornes, 1997). Verken Arne eller Camilla hadde gjort det dårlig ferdighetsmessig i småskolen. Camilla var sein i gang med sin matematiske læringskurve, men hun oppnådde staninescorene 3,4 og 4 i henholdvis andre, tredje og fjerde klasse. For begge er det imidlertid fallende tendens og relativt svake resultater på mellomtrinnet. Dermed antyder denne studien at det går an å prestere rimelig bra på ferdighetsprøver i småskolen og likevel være en risikoelev med tanke på utvikling av matematikkvansker.

Dette kan skyldes forhold ved prøvene og hva som testes. På mellomtrinnet får M-prøvene et stadig større innslag av regning med desimaltall, brøk og prosent. Det blir også mer kompliserte likninger, og problemformuleringene i tekstoppgavene blir også mer sammensatte. Også innen geometri, måling og databehandling blir det større innslag av oppgaver som krever regning. Det blir også større innslag av regning med flersifrede tall, noe som kan antas å stille større krav til fart og effektivitet i regnestrategibruken. En tester altså andre områder av matematikken, samtidig som regneoppgavene blir mer krevende (Tornes, 1997).

Etter målstrukturene i læreplanen, skal undervisning, og følgelig testing, på mellomtrinnet sentreres om mer avanserte matematiske konsepter (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006). Disse utledes av og bygger på, de mer grunnleggende konseptene elevene arbeider med i småskolen. En kan da tenke seg at elever kan tilegne seg enkle prosedyrer som gir rett svar på småskolens utfordringer, men at disse prosedyrene ikke er godt nok fundert i forståelse for de matematiske konseptene. Elevene kan da mangle fundament for å videreutvikle forståelse og ferdigheter i forhold til mellomtrinnets mer sammensatte og abstrakte konsepter (Sjøvoll, 2009). Dette synes fremtredende blant studiens elever. Dette kan være en av årsakene til at elevene har matematikkvansker definert som brudd i forventet jevn utvikling (Ostad, 1990). I og med at to av elevene gjorde det relativt godt på ferdighetstestene i småskolen, samtidig som de hadde meget uhensiktsmessige representasjoner og regnestrategier, kan funnene tolkes om at det ikke nødvendigvis er elevens ferdigheter som er det viktigste fundamentet for den videre læringen. Det synes som representasjonenes og regnestrategienes kvaliteter spilte større rolle i disse elvenes fundament for videre læring og utvikling. Manglende ferdigheter i småskolen antydes likevel som en stor risikofaktor for den matematiske utviklingen. Bjarnes manglende ferdigheter de første årene, fulgte ham også inn på mellomtrinnet og gav ham ekstra problemer der.

9.2 Drøfting av resultater fra spesialpedagogisk testing

Den spesialpedagogiske testingen viser to tydelige fellestrekk blant elevene i utvalget. Alle hadde svake regnestrategier. Alle hadde også svak forståelse og ferdigheter i forhold til de ulike matematiske representasjonene de forholder seg til på skolen. Det synes også som det er sammenheng mellom disse områdene. I det følgende drøftes dette nøyere.

9.2.1 Regnestrategier

Regnestrategier er et av områdene hvor det er sammenfall mellom de tre elevenes resultater. Alle tre bruker i hovedsak back-up-strategier. Innen addisjon er det innslag av retrivalstrategier ved addisjon av tvillingtall. Camilla og Bjarne benyttet retrival til og med 9+9, mens Arne bare klarte å hente frem svar på addisjon av to like til og med 5+5. Det er verdt å merke seg at målt med Ostads metodikk (Ostad, 2008) ville disse elevene ikke fått noen resultater registrert som retrivalstrategi i det hele tatt.

Vurdert etter konsensusdefinisjonen om at matematikksvake har dårlige regnstrategier, er det altså ingen tvil om at disse elevene er matematikksvake (Butterworth, 2005a; Geary & Hoard, 2003). Fellestrekket dårlige regnestrategier er da også et av to områder hvor det er sterkest sammenfall mellom de tre elevene. Studiens funn er dermed i tråd med teorien om dårlige regnestrategier som fellestrekk ved matematikksvake.

Geary og Howard (2003) foreslår motstandsdyktighet mot å lære retrivalstrategier som kriterium for å diagnostiseres som matematikksvak. I så måte er Camilla et godt eksempel i denne studien. Hun foretrakk back-upstrategier selv om hun langt på vei mestret både retrival og dekomposisjon i tredje klasse. Hun kan dermed være en representant for dem Geary og Hoard (2003) beskriver som relativt få, som holder fast på back-upstrategier på grunn av usikkerhet. Også for Bjarne og Arne var det en stor jobb å utvikle retrivalstrategier. Det må også bemerkes at utviklingen kom etter systematisk arbeid med metakognisjon og forståelse (Ostad, 1999). Rapportene viser at både arbeid med kardinal forståelse av tallene og forbedret innhold i andre matematiske representasjoner for øvrig, måtte til.

Arne var den i utvalget som i størst grad støttet seg til ordinal forståelse av tallrepresentasjonene. Han brukte ikke ord relatert til antall i det hele tatt. Han snakket kun om hakk opp og ned på tallinja. Også Bjarne og Camilla forholdt seg imidlertid i stor grad til tallenes ordinale aspekter. I arbeidet med Bjarne viste det seg at han hadde problemer med å utvikle kardinal forståelse. Særlig det å se for seg et antall delt i undergrupper, som for eksempel 5=3+2, var vanskelig for ham. Camilla så ut til å være bedre rustet til å forholde seg kardinalt til tallene. Både resultatene på Dyscaclulia Screener og rapporten fra støtteundervisningen antyder dette. Det ser altså ut som hun bare i mindre grad brukte denne forståelsen i regning. Trolig stolte hun ikke på sin kardinale forståelse slik at hun i praktisk arbeid foretrakk telling. Dette kan ha ført til at hennes kardinale forståelse var lite aktivert i regningen.

Både Arne og Camilla hadde mottatt undervisning i multiplikasjon. Bjarne mottok slik undervisning etter testingen, men han hadde samme vansker som de to andre, nemlig påfallende problemer med å tilegne seg og automatisere multiplikasjonstabellene. Det synes som om studiens elever, som ikke var i gang med å utvikle retrivalstrategier i addisjon og subtraksjon, også fikk vanskeligheter med å automatisere multiplikasjonstabellene.

Det at studiens elever hadde så dårlige regnestrategier, kan ha flere forklaringer. Det er for eksempel påvist korrelasjon mellom svekkelser i minnefunksjoner og matematikkvansker (Ostad, 2007a). Overlæring og automatisering av addisjons, subtraksjons og multiplikasjonstabeller vil være avhengig av minnefunksjonene. Det synes da naturlig at svekkelser i disse funksjonene vil være en risikofaktor i utviklingen av gode regnestrategier. Det foreligger imidlertid ingen ting i rapportene om testing av minnefunksjonene. Det at Bjarne hadde problemer med å automatisere multiplikasjonstabellene selv etter at tiltak var satt i verk, kan likevel tyde på at han hadde vansker med minnet.

En annen innfallsvinkel til det at elevene hadde vansker med å huske tabellene, kan finnes i Camillas lærers kommentar om at hun ikke forstod multiplikasjonstabellene. En kan her antyde en sammenheng med representasjonenes kvalitet. Dersom en forutsetter at back-up strategiene bygger på tallenes ordinale aspekt (Dowker, 2005; Johansson, 2005b), synes dette sannsynlig. Begynnerundervisning i multiplikasjon bygger i stor grad på en definisjon av multiplikasjon som gjentatt addisjon, det vil si samme mengde gjentatt flere ganger. Med andre ord bygger begynnerundervisningen i multiplikasjon på tallenes kardinale aspekt. Siden det å huske ting en ikke forstår, er vanskelig (Tvedt & Johnsen, 2008), kan det dermed oppstå ekstra problemer med å automatisere multiplikasjonstabeller for elevene som i hovedsak har forholdt seg til tallenes ordinale aspekt. Dette er i tråd med Dowkers (2005) antakelse om at overdreven bruk av back-upstrategier direkte hemmer utviklingen av nye og bedre regnstrategier. Disse elevene som i så stor grad bruker tellestrategier, utsettes for en nokså ensidig ordinal stimulering, noe som over tid trolig vil kunne hemme og begrense den kardinale forståelsen som er nødvendig for videre utvikling.

Selv om det er svakere belegg i studiens empiri, er det likevel funn nok til at en kan anføre forhold ved tallenes ordinale og kardinale aspekt som medvirkende årsak til svake regnestrategier også innen addisjon og subtraksjon. Ser en Arnes språkbruk som kun var relatert til tallenes ordinale aspekt, sammen med hans svake resultater på Dyscalculia Screener, antyder studiens funn at svak kardinal forståelse kan gjøre det vanskelig å utvikle retrivalstrategier, som i stor grad bygger på nettopp kardinal forståelse (Dowker, 2005; Johansson, 2005b).

Det er resultater i studien som gjør at argumentet om manglende forståelse som medvirkende årsak til at en ikke klarer å huske tabellene, kan utvides ytterligere. I forhold til multiplikasjon, kunne ingen av elevene lage en fortelling som passet til en enkel multiplikasjonsoppgave. Dette tyder på at multiplikasjonsoppgaver ikke var representasjoner med hensiktsmessig innhold for elevene. Med andre ord var trolig forståelsen for multiplikasjon lav, noe som gjorde det vanskeligere å huske (Tvedt & Johnsen, 2008).

Elevene klarte heller ikke å lage fortellinger til addisjonsoppgaver (se kap. 9.2.2). Samme argument som i forrige avsnitt, kan da benyttes også i forhold til addisjon. Manglende forståelse for representasjonene kan da anføres som medvirkende årsak til at det er vanskelig å utvikle retrivalstrategier innen addisjon også.

Det at representasjoner som 3+5=8 eller 3x4=12 ikke hadde et hensiktsmessig og meningsfullt innhold for elevene, kan også kaste noe lys over det faktum at de stort sett talte svarene i stedet for å bruke indre tale som fremhentingsredskap. Å bruke indre tale for å hente frem at 3x4=12, vil innebære at elevene må bruke "lite meningsbærende ord" (Tvedt & Johnsen, 2008 s.534) for å hente frem svaret. Det kan stilles spørsmål ved om elevene i en presset situasjon med vanskelig regning frivillig velger å bruke lite meningsbærende ord for å løse oppgavene. Det kan for elevene fremstå som mer fornuftig å gå for det sikre i en slik situasjon. Telling kan med andre ord oppfattes som en mer logisk måte for å finne svar. Ut fra et slikt perspektiv kan en spørre om det er det å bevisstgjøres og trenes i å bruke indre stemme som gir effekt (Askeland, 2007a; Ostad, 2008), eller om det er forbedret undervisning med større vekt på verbale representasjoner i forbindelse med denne treningen som er viktigst.

En kan også anta at det at elevene mot slutten av barneskolen var så innarbeidet i vanen med å telle svar på regnestykker, kunne gi problemer med å automatisere multiplikasjonstabellene (Ostad, 2008). Automatisering av tabeller kan være en ny tilnærming til regningen, som elevene ikke uten videre er klar for.

Her er bare noen få årsaker til svake regnestrategier drøftet. Det kan tenkes andre årsaker også, men studiens empiri gir lite fundament for drøfting av andre sammenhenger

9.2.2. Innholdet i representasjonene

Funnene som ble gjort tyder på at elevene hadde svakt og uhensiktsmessig innhold i representasjonene som ble undersøkt. Det synes også som de hadde enkelte kunnskaper, men at disse var isolerte og i liten grad satt i sammenheng med annen kunnskap, slik det kreves for å utvikle forståelse (Snorre A. Ostad, 1992a).

Elevene i studien var så gamle at det er lite i materialet som kan belyse deres utvikling av mengdekonservering eller andre aspekter av tidlig utvikling av tallforståelse. Arnes svake telleferdigheter i 6. klasse er det eneste tegnet på svakheter i den tidlige utviklingen. Han hadde nemlig ikke gode telleferdigheter for telling av objekter da han ble testet. Han talte rett, men det gikk så seint, og han viste så stor usikkerhet, at telleferdighetene vurderes å være svake for alderen. Mest påfallende var det at han behandlet tellerekka effektivt og raskt når han talte svar på regnestykker. Skulle han telle objekter, fikk han imidlertid store problemer. Det synes altså som han hadde lært tellerekka verbalt, men at han hadde dårlige ferdigheter i praktisk telling. Det er vanlig for elever med matematikkvansker å ikke ha full forståelse for telling (Geary & Hoard, 2003).

Elevenes telleferdigheter var for øvrig av varierende kvalitet. Telleferdighetene er viktige både for å utvikle kardinal forståelse for tallene og for å bli en flytende regner (Geary & Hoard, 2003; Johansson, 2005a). Camilla rapporteres å telle bra allerede i 3. klasse. Bjarne ble testet for telleferdigheter på PPT-kontoret. Derfra rapporteres det om greie telleferdigheter, også når det gjelder rekketelling med to og fem om gangen. Å telle med tre og fire om gangen var verre. Et viktig forhold fremgår likevel ikke i rapportene vedrørende telling for Bjarne og Camilla. Det sies nemlig ikke om de kun er testet i forhold til tellerekka verbalt, eller om de også måtte telle objekter. Det var spesielt ved telling av objekter at Arne viste svakheter.

Det er samsvar mellom Arnes dårlige telleferdigheter og resultatene på Dyscalculia Screener. Dette kan skyldes at Dyscalculia Screener nettopp tester hvor raskt elevene er i stand til å oppfatte antallet i en mengde. Det kan også være dypere sammenhenger. Dersom et barn blir født med redusert evne til subitizing (Butterworth, 2005a), kan det naturlige fokus på antall i oppveksten reduseres eller mangle helt. Barnet får dermed mindre trening i å telle og vurdere antall. Det er da lett å ende opp med de svakere telleferdighetene Geary og Hoard (2003) beskriver. Geary og Hoard påpeker spesielt at de svake har vansker med å skjønne at rekkefølgen objektene blir talt ikke har betydning (ibid). En slik prosedyremessig forståelse av telling kan sees som naturlig om en ikke har en grunnleggende medfødt evne til antallsoppfatning.

Også forståelse for titallsystemet er sentralt for utviklingen av flytende regnere (Alseth, 2003). Testresultatene viser at elevene hadde svak forståelse for dette. Ingen av elevene hadde innsikt i kjernepunktene i et plassverdisystem som titallsystemet er. De kunne vurdere hva som er store og små tall når det er snakk om heltall, men de hadde vanskeligheter med å forklare hvorfor 9721 er ”stort” mens 1279 er mindre. De visste heller ikke hva plassnavnene ener, tier og hundreplass innebar. En slik intuitiv og delvis forståelse (Tolchinsky, 2003), gir trolig lite hjelp til videre arbeid og utvikling (Alseth, 2003). Dette bekreftes også i elevenes forståelse for regning med flersifrede tall. De var usikre, oppgav at de ofte gjorde feil og de hadde ingen støtte i kunnskap om titallsystemet i regningen. Algoritmene virket tvert imot lært på et rent prosedyremessig grunnlag, noe som ikke bidrar til å utvikle forståelse og trygge ferdigheter (Snorre A. Ostad, 1992a). Camilla var svakest i forståelsen av titallsystemet. I og med at hun ikke kunne regne når tallene hadde ulikt antall sifre, var hun også svakest i regneferdighetene.

Elevene hadde altså dårlig forståelse for heltall. Det er også et tydelig funn i studien at de hadde svært mangelfull forståelse for, og ferdigheter innen, desimaltall og brøk. Dette kan sees i tråd med det som er skrevet om at elevenes fundament for videre læring må tas hensyn til (Sjøvoll, 2009). Studiens funn antyder da at det ikke bare er elevenes ferdigheter som må regnes inn i deres fundament for videre læring. Også representasjonenes kvalitet må tas hensyn til.

Det var særlig vanskelig for Arne og Bjarne å utvikle kardinal forståelse når det gjelder oppdeling av grupper i undergrupper. Disse ferdighetene er sentrale når det gjelder effektiv bruk av retrivalstrategier (Dowker, 2005; Johansson, 2005b). Som nevnt hadde elevene i utvalget også store svakheter i forståelsen av titallsystemet. Også titallsystemet bygger på gruppering, her i tiergrupper, hundrergrupper osv. En kan da spørre om evne til gruppering er en grunnleggende felles faktor for utvikling både av forståelse for titallsystemet og gode regnestrategier. Denne studien har for lite utvalg til å si noe endelig om dette, men sammenfallene i resultatene på disse områdene kan tyde på at det er sammenhenger som bør undersøkes nøyere.

Elevenes utstrakte bruk av back-up-strategier, kan også være en medvirkende årsak til deres lite hensiktsmessige innhold i tallrepresentasjonene. Gjentatt fokusering på tallenes ordinale aspekt, kan hemme utviklingen av kardinal forståelse (Dowker, 2005).

Regneoppgaver som for eksempel 3+5=8 kan også sees som representasjoner. Elevenes forståelse for slike representasjoner var også påfallende svak. Ingen av dem klarte i utgangspunktet å oversette mellom enkle regneoppgaver, som nevnte oppgave, og fortellinger uten hjelp. Det var også problemer med tekstoppgaver. Det synes dermed ikke som regneoppgavene var funksjonelle innholdsmettede representasjoner for elevene i utvalget. Elevene kunne bruke regnetegnene som et signal om hvilken prosedyre som skulle settes i gang. De fikk dermed langt på vei produsert svar, i alle fall innen addisjon og subtraksjon. Ut fra studiens funn, kan en vanskelig si at regneoppgavene representerte noe mer for dem. For Camilla var det også et problem at hun ikke en gang var sikker på hvilken prosedyre som skulle settes i verk. Hun kunne gjerne regne subtraksjonsoppgaver som addisjon, selv om hun hadde skrevet subtraksjonstegnet i føringen av stykket.

Sammenhengen mellom forståelse og minne (Tvedt & Johnsen, 2008), kan også tyde på at det er sammenheng mellom elevenes innhold i representasjonene og regnestrategiene. I og med at ingen av elevene klarte å gi et meningsinnhold til enkle representasjoner som 3+5=8, reises spørsmålet om hvor stor innflytelse manglende forståelsesmessig innhold i representasjoner av denne typen, har for utviklingen av retrivalstrategier. Studien gir ikke tilstrekkelige holdepunkter til å belyse dette ytterligere.

Svake representasjoner fremstår som like sterkt fellestrekk mellom elevene som dårlige regnestrategier. Dette kan også sees som et kjernepunkt i studien. Tolchinsky (2003) fremhevet at en representasjon uten noe å representere ikke kan regnes som representasjoner i det hele tatt. En kan ikke, ut fra studiens funn, si at elevene ikke hadde innhold i representasjonene. Notasjonssystemene de kjente til kan også hatt en positiv effekt på elevenes tenking (Johansson, 2005b; Tolchinsky, 2003). En kan likevel slå fast at utvalgets tre elever hadde et påfallende magert meningsinnhold i de matematiske representasjonene de brukte. Dermed kan en også si at de hadde dårlige redskaper å hjelpe seg med når de skulle tenke, forstå og utføre matematiske operasjoner. Hvilken rolle slike dårlige redskaper for tanken, som begrenset forståelse for representasjonene kan anses som (Tolchinsky, 2003), har for disse elevenes matematiske utvikling, er vanskelig å måle ut fra studiens materiale. En klar hemmende effekt synes likevel sannsynlig både i forhold til utviklingen av regnestrategier som diskutert ovenfor, for utviklingen av regneferdigheter og for den matematiske kompetansen generelt.

9.3 Drøfting av resultater fra Dyscalculia Screener

Dyscalculi Screener- programmet har en spesifikk tilnærming til matematikkvanskene. Dette programmet er laget for å avdekke svakheter i elevenes forutsetninger for å lære matematikk, nærmere bestemt ved å teste hjernens evne til å oppfatte antall. Resultatene fra Screeneren gir dermed viktig informasjon inn i totalbildet av elevene.

Oppgavene prikker mot tall og tall mot tall er ment å være testens kapasitetsoppgaver (Butterworth, 2003). Det vil si at disse skal avsløre eventuell dyskalkuli. Det er da påfallende at begge elevene som scoret svakest på denne testen, hadde til dels store sprik mellom resultatene på disse deltestene. Hvor vanlig slike sprik i resultatene er, eller hva slike sprik betyr, fremgår ikke av testens manual. Dette drøftes derfor ikke ut over det å konstatere at to av elevene scoret betydelig bedre under sammenlikning av tall enn under sammenlikning av prikker og tall.

Videre scorer alle tre tydelig bedre på kapasitetsdelen enn på regnedelen. Dette kan tyde på at de ikke får utnyttet sitt potensial i særlig grad.

Også innen regnedelen er det en tydelig tendens i retning av at disse tre norske elevene scorer relativt sett bedre på addisjonsdelen enn på multiplikasjonsdelen. Det må likevel bemerkes at både Arne og Bjarne gjør så mange feil på regnedelen at programmet vurderer svarene som ren gjetting. Dette er tydeligst for Arne, men klart også for Bjarne. For Bjarne skyldes dette i stor grad at han ikke hadde lært multiplikasjon og derfor måtte gjette på denne deltesten. Arne hadde mange feil på begge ferdighetstestene.

Rapportene fra støtteundervisningen som ble gitt, viser at Camilla som hadde gode resultater på denne testen, hadde en rask utvikling da hun ble undervist i å tenke ut fra tallenes kardinale aspekt. Bjarne, og spesielt Arne, hadde mye større problemer med dette. Også farten i utviklingen generelt etter at tiltak ble satt i verk, synes å samsvare med resultatene på denne testen. Det samme kan sies om elevenes telleferdigheter. Telleferdighetene er igjen en viktig grunnlagsfaktor både for å utvikle tallforståelse (Geary & Hoard, 2003) og for å bli gode regnere (Johansson, 2005b). I studien synes det altså som det er sammenheng mellom elevenes antallsoppfatning målt ved denne testen, og deres matematiske utvikling.

Det kan være at det at Camillas lærer la stor vekt på å lære elevene gode regnestrategier de første årene, er en medvirkende årsak til Camillas raske utvikling. Det kan også tenkes andre forklaringer på disse forskjellene. Det ville være interessant med videre undersøkelser for å kartlegge hvilke sammenhenger det er mellom Dyscalculia Screenerens resultater og norske elevers utvikling.

9.4 Emosjonelle og andre forhold

Under den spesialpedagogiske testingen kom det fram at motivasjon og følelser hang sammen med ferdigheter og prestasjoner for alle elevene. Følgelig gav Bjarne, som hadde de svakeste resultatene på ferdighetstestene, uttrykk for mest negative følelser og lavest motivasjon. Ved testing og også ved starten av tiltakene, var han direkte motvillig. Han lurte seg også unna dersom han kunne. Camilla var til en viss grad preget av nederlagsfølelse, mens Arne som hadde best resultater på ferdighetstestene gav uttrykk for at han hadde lyst på hjelp og at hjelpen var interessant. Denne sammenhengen synes naturlig, da elevene mot slutten av mellomtrinnet har gått relativt lenge på skolen. De har da slitt med matematikken i lengre tid, mer jo svakere ferdighetene er. Dermed kan deres følelsesmessige og motivasjonelle status påvirkes i negativ retning (Kaplan, et al., 2002; Lazarus, 2006a; Sjøvoll, 2007).

Camillas og Bjarnes resultater kan tyde på at svake ferdigheter ikke bare påvirker emosjonene, men at emosjoner og motivasjon også påvirker ferdighetene. Bjarne hadde i realiteten bedre regneferdigheter innen addisjon og subtraksjon enn Camilla. Camilla hadde mer tro på seg selv og gjorde det bedre på ferdighetstesten.

Elevene hadde generelt lav tiltro til egne ferdigheter. Elevenes selvtillit samsvarte til en viss grad med motivasjonen og følelsene. Således var Arne den med best tiltro til egne ferdigheter. Han virket sterk og tydelig i sine strategier, og han virket også sikker på hva han kunne og hvordan han tenkte. Bjarne og Camilla ville heller si at de ikke kunne noe, og de uttrykte usikkerhet på flere områder. Camilla er likevel i en særstilling her. Det synes som hun var usikker på sine retrival og dekomposisjonsstrategier i så stor grad at hun valgte å holde fast på tellestrategiene.

9.5 Drøfting av funn fra andre kilder og elevenes videre utvikling

Arne og Bjarne synes generelt svake også på andre forhold knyttet til tall og tallbruk. Arne ble testet den måneden han hadde bursdag. Han visste dette, men han var likevel ikke i stand til å huske datoen for bursdagen. Også Bjarne hadde problemer med dato. Han kunne heller ikke månedene og årstidene. Han hadde også problemer med høyre og venstre. Det er ikke noe i materialet som kan knytte disse funnene direkte til elevenes regneferdigheter. Funnene antyder likevel generelt svak oppmerksomhet rundt tallrepresentasjoner.

Ut fra de foreliggende rapportene etter tiltakene som ble satt i verk, synes det som de tre har hatt svært ulik progresjon etter testingen. Camilla, som hadde gode resultater på antallsoppfatning på Dyscalculia Screener, og hadde arbeidet med regnestrategier de første årene på skolen, brukte ikke stort mer enn en time på å i vesentlig grad, endre regnestrategier til dekomposisjon og retrival. Hun responderte også veldig godt på tanken om å slutte å tenke ordinalt og heller tenke kardinalt. Den gode utviklingen skal også ha vart ved slik at hun klarer seg bra på ungdomsskolen.

Bjarne trengte derimot nesten et år for å lære det samme som Camilla lærte på en time. Fra dette punktet, hvor han både hadde ryddet bort den verste motviljen mot faget og lært "å tenke på alle på en gang" og se for seg hvordan antallene kan deles i undergrupper, gikk utviklingen relativt raskt. Symbolenes betydning og oversettelse mellom ulike representasjoner kom på plass, og han hadde jevn utvikling både i det kognitive og det ferdighetsmessige.

For Arne er det lite skriftlig materiale fra tiden etter testen. Det fremgår heller ikke hvor tett oppfølging han fikk i 7. klasse. Det fremgår likevel at det å begynne å tenke kardinalt var svært vanskelig for ham. Inntrykket er at han hadde svakest fremgang etter at tiltak ble satt i verk.

At Bjarne hadde saktere utvikling enn Camilla, kan delvis forklares ut fra hans motvilje mot faget. Den saktere utviklingen samsvarer også med resultatene på Dyscalculia Screener. Arne hadde god motivasjon, men svakest resultater på Dyscalculia screeneren. Han hadde trolig også svakest utvikling etter testingen. Dette antyder at antallsoppfatning som målt med denne engelske testen, kan være en viktig grunnleggende faktor for elevenes utvikling.

9.6 Drøfting av prøvene

Det er flere forhold ved studiens redskaper som bør påpekes. Delvis kan det være snakk om feilkilder, delvis kan det være snakk om forhold som påvirker fremtidig bruk av testene.

M-prøven er en velprøvd standardisert test (Tornes, 1997). Det bør tas forbehold om at prøven ikke er oppdatert etter gjeldende læreplan. Innholdet i regnedelen av prøven kan likevel vurderes som relativt dekkende for dagens planer. En viss feilmargin kan det likevel ligge her. Elevene i utvalget har gått på skole delvis etter gamle og delvis etter nye planer. Det er usikkert hvordan dette har virket inn på undervisningen.

Minst en, og trolig to, av studiens elever oppnådde relativt gode resultater på denne prøven på barnetrinnet. Resultatene tyder på at selv om ferdighetsprøver gir nødvendig informasjon om elevene, bør en ikke stole på en prøve som M-prøvene alene for å avdekke matematikkvansker i småskolen.

Den spesialpedagogiske testingen fanger opp alle de tre elevene. Funnene fra testingen av regnestrategier plasserer alle klart i gruppen av elever med matematikkvansker etter konsensusdefinisjonen om at matematikksvake har problemer med retrivalstrategiene. Slik sett synes slik spesialpedagogisk testing å være den tryggeste måten om en vil være sikker på å fange opp alle risikoelevene. Det finnes måter å organisere undervisningen for å kunne få regelmessige diagnostiske samtaler, som ved spesialpedagogisk testing, innbakt i det daglige arbeidet (se for eksempel Fauskanger & Tjomsland, 2007). Organiserer en slik at det blir vanskeligere med slike regelmessige samtaler, vil en måtte stole mer på prøver og screeningtester for å finne hvilke elever som bør testes grundigere. Diagnostiske spørsmål, skriftlig eller verbalt, bør en trolig uansett regne med å måtte bruke for å fange opp alle risikoelevene tidlig.

Det må likevel påpekes at studiens redskaper for å finne elevenes regnestrategier skiller seg noe fra det som er benyttet ellers i forskningen (Ostad, 2008). Det å la elevene regne i tre minutt før en spør hvilken strategi som ble brukt, gir tilleggsinformasjon om bl.a. elevenes tempo i regningen. Også deres systematikk i hvordan de nærmer seg oppgavene kan studeres. Elevens svar på strategivalg fjerner seg likevel i tid fra da oppgaven ble løst. Dette kan være en feilkilde. Erfaring med denne måten å teste på, tilsier likevel at det sjelden oppstår vesentlige feil. Et unntak er Camilla som nokså konsekvent oppgav andre svar på hvilke regnestrategier som ble brukt enn det som ble observert. Observasjon av regneprosessen fikk i det tilfellet heller frem nyttig informasjon om hennes forhold til matematikken.

Som nevnt tidligere, kan også forståelse for titallsystemet testes på ulikt vis. Bjarne ble testet på to ulike måter, noe som førte til en liten uenighet mellom PPT og skolen når det gjelder ham. PPT melder i sin rapport fra sommeren mellom 6. og 7. klasse at han ikke forstår titallsystemet. Skolen har da rapportert at han forstår dette. Dette skyldes trolig ulik testmetodikk, da skolen så etter elevens deklarative kunnskaper om at sifrene betyr forskjellig på de ulike plassene. PPT brukte derimot elevens evne til å skrive flersifrede tall på utvidet form som kriterium på om titallsystemet var forstått. I og med at Bjarne hadde svak forståelse for representasjonene addisjonsstykker, var trolig ikke dette den beste måten å teste på. Å teste en svak representasjon ved hjelp av en annen svak representasjon kan tenkes å gi rom for misforståelser og feilkilder. Bjarne var på dette tidspunktet ikke kjent med utvidet form, noe som førte til at PPT konkluderte med at han ikke forstod titallsystemet.

Dyscalculia screener er den nyeste testformen i studien. En har derfor relativt begrenset erfaring med denne testformen. På tross av interessante sammenhenger diskutert ovenfor, er det mulige feilkilder også ved denne testen.

Elevenes resultater på de ulike deltestene viser relativt store sprik. Dette kan tilsi at det er behov for en norsk standardisering av dette programmet. Det samme kan en utlede av vissheten om at elevenes undervisning vil påvirke deres utvikling (Askeland, 2007a). Eventuelle forskjeller i norsk og engelsk undervisningstradisjon vil da kunne påvirke standardiseringen.

Det må også påpekes at heller ikke denne testen alene ville ha fanget opp alle de tre matematikksvake i denne studien.

En annen mulig feilkilde ligger i det at studien først og fremst baserer seg på skriftlig materiale fra vanlige lærere. Studien er dermed begrenset av de involvertes testferdigheter og vurderinger. Det kunne fra et forskningssynspunkt vært ønskelig med en bredere og enda mer lik testing av de tre elevene. Testingen studien bygger på vurderes likevel til å ligge godt nok innenfor de testtradisjoner og forskning som finnes på området.

9.7 Avsluttende drøftinger

Strategier og regneferdigheter kan sees som prosesser som bygger på representasjoner (Ostad, 1999). Forståelse (Tvedt & Johnsen, 2008) og metakognisjon (Ostad, 1999) er fremhevet som nødvendig for at matematikksvake skal oppnå fremgang i faget. Forståelse og metakognisjon kan knyttes til nettopp de matematiske representasjonene og det nettverk av kunnskap gode representasjoner kan bygge (Snorre A. Ostad, 1992a).

I denne studien var svake representasjoner like felles og karakteristisk som dårlige regnestrategier. Studien gir ikke et endelig svar på om dårlige regnestrategier skyldes dårlige representasjoner, om dårlige representasjoner skyldes dårlige regnestrategier eller om disse faktorene opptrer parallelt, men uavhengig av hverandre. Et sterkt samvirke og gjensidig påvirkning mellom representasjoner og regnestrategier er likevel sannsynliggjort. Særlig svakheter i forståelse av regneoppgaver som representasjoner, og kardinal forståelse inkludert forståelse for titallsystemet, synes sammen med svake regnestrategier å være fremtredende. Ut fra studiens funn kan det argumenteres for at representasjonenes kvalitet er blant de sentrale forutsetningene for utvikling av regnestrategier og regneferdigheter. Videre tyder funnene på at representasjonenes kvalitet kan avhenge av flere forskjellige forhold, blant annet nevrologiske forhold som testet med Dyscalculia Screener. Det er også funn som tyder på at overdreven bruk av back-up-strategier kan begrense utviklingen av innholdet i representasjonene.

Regneferdighetenes samspill med regnestrategier og representasjoner kommer til uttrykk på ulikt vis. For det første kan regneferdigheter med flersifrede tall også defineres som regnestrategier (*Læreplanverket for Kunnskapsløftet*, 2006; Ostad, 2008) som bygger på representasjoner (Ostad, 1999). I teoridelen er det også argumentert for at svake regnestrategier er felles for elever med svake ferdigheter i matematikk (Butterworth, 2005b). Også regneformelen Regning = regnefakta X oppgave og problemløsing (Cornoldi & Lucangeli, 2004) understreker samspillet ytterligere. Det er også påpekt at algoritmer for regning med flersifrete tall bygger på forståelse for titallsystemet (Alseth, 2003). Kunnskapsløftet krever matematisk kompetente elever som forstår og kan anvende det de lærer (Alseth, 2005; Stedøy-Johansen, et al., 2010). En kan med andre ord ikke bare drive teknisk drill av algoritmer (Snorre A. Ostad, 1992a). Regneferdighetene må spille sammen med hensiktsmessige representasjoner og regnestrategier (Tolchinsky, 2003). Studiens elever led klart under manglende samspill på dette området.

Studien viser også en indirekte årsak til at regneferdighetene spiller sammen med regnestrategier og representasjoner. Det var, som påpekt, en klar sammenheng mellom elevenes regneferdigheter og deres emosjonelle og motivasjonelle status. Svake regneferdigheter vil dermed kunne virke tilbake og gi svakere motivasjon som igjen kan gi redusert læring av strategier og representasjoner.

Studiens utvalg representerer trolig ulike veier inn i situasjonen med dårlige representasjoner. Det er sannsynlig at Arnes svake kardinale forståelse langt på vei skyldes hans svakhet i antallsoppfatningssenteret i hjernen. Camilla hadde derimot god antallsoppfatning målt med Dyscalculia Screener. Hun hadde også en lærer som la vekt på å undervise i regnestrategier. Her ser det ut som hennes valg om å bruke back-upstrategier, sammen med svakt innhold i andre matematiske representasjoner, er medvirkende årsak til at kardinal forståelse var lite utviklet.

Når elevene er i en situasjon hvor de har svake representasjoner og regnestrategier, synes det altså som samspillet mellom disse er en sentral faktor som hemmer utviklingen av regneferdighetene. Dette reiser nye spørsmål. Det ville være interessant å få belyst dette samspillet ved mer omfattende studier. Både samspillets betydning for elevenes utvikling så vel som kunnskap om mulighetene for intervensjon og hjelp som ligger i dette samspillet, bør belyses.

En større og mer systematisk studie ville være ønskelig. Mer standardisert testmetodikk for den spesialpedagogiske testingen, testing av minnefunksjoner og andre forhold, større utvalg og ikke minst et longitudinelt design, vil trolig kunne gi bedre innsikt i spørsmålene denne studien reiser.

Aastrup, S. (2009). *Dynamisk kartleggingsprøve i matematikk: for elever fra 4.-10. trinn og elever i videregående skole*. Levanger: Trøndelag kompetansesenter.
Alseth, B. (1998). *Matematikk på småskoletrinnet*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.
Alseth, B. (2003). *Tegn og matematikk En semiotisk analyse av elevers utvikling av matematisk forståelse*. Oslo: Høgskolen i Oslo, Avdeling for lærerutdanning.
Alseth, B. (2005). Hva er grunnleggende ferdighet i matematikk? *Tangenten, 4*.
Askeland, M. (2007a). Strategieopplæring i multiplikasjon: Erfaringer fra metodisk opplegg med indre tale som pedagogisk virkemiddel *Mathematics teaching and inclusion: Procedings of the 3rd Nordic Research Conference on Spesial Needs Education in MAthematics* (pp. s. 31-42). Aalborg: Department of Admission Courses, Aalborg University.
Askeland, M. (2007b). Strategiopplæring i multiplikasjon: erfaringer fra metodisk opplegg med indre tale som pedagogisk virkemiddel *Mathematics teaching and inclusion: proceedings of the 3rd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics* (pp. S. 31-42). Aalborg: Department of Admission Courses, Aalborg University.
Brekke, G. (1995). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: NAsjonalt læremiddelsenter.
Butterworth, B. (2003). *Dyscalculia Screener*. London: nferNelson Publishing company Limited.
Butterworth, B. (2005a). The development of arithmetical abilities. *Journal of child psychology and psychiatry, 46:1*, 3-18.
Butterworth, B. (2005b). Developmental dyscalculia. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology press.
Cornoldi, C., & Lucangeli, D. (2004). Aritmetic education and learning disabilities in Italy. *Journal of learning disabilities, 37*(1).
Dale, E. L. (2008). *Fellesskolen: skolefaglig læring for alle*. [Oslo]: Cappelen akademisk.
Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic: implications for psychology, neuroscience and education*. Hove: Psychology Press.
Ellertsen, B., & Johnsen, I. M. B. (2008). Nevropsykologisk teori og empiri. In B. Gjærum & B. Ellertsen (Eds.), *Hjerne og atferd,- Utviklingsforstyrrelser hos barn og ungdom i et nevrobiologisk perspektiv... et skritt videre*. Oslo: Gyldendal Akademik.
Fauskanger, J., & Tjomsland, S. (2007). Å se den enkelte: Tilpasset opplæring i matematikk ved Nylund skole i Stavanger. In L. Ø. Johansen (Ed.), *Mathematics teaching and inclusion: Proceedings of the 3rd Nordic Research Conference on Spesial Needs Education in Mathematics* (pp. s. 87-103). Aalborg: Department of Admission Courses, Aalborg University.
Geary, D. C., & Hoard, M. K. (2003). Learning Disabilities in Basic Mathematics: Deficits in Memory and Cognition. In J. M. Royer (Ed.), *Mathematical Cognition*. Greenwich: Information Age Publishing.
Gilje, N., & Grimen, H. (2007). *Samfunnsvitenskapenes forutsetninger: innføring i samfunnsvitenskapenes vitenskapsfilosofi*. Oslo: Universitetsforlaget.
Gjærum, B., & Ellertsen, B. (2008). Nevropsykologisk undersøkelse av barn og ungdom *Hjerne og atferd: utviklingsforstyrrelser hos barn og ungdom i et nevrobiologisk perspektiv -et skritt videre* (pp. s. 171-205). Oslo: Gyldendal Akademisk.
Grègoire, J., & Desoete, A. (2009). MAthematical disabilities - An underestimated topic? *Journal of psychoeducational assessment, 27*(3).
Halvorsen, A. (2009). Praktikerforskning - legitimt og nyttig bidrag i kunnskapsutvikling. In A. Halvorsen, H. C. G. Johnsen & P. Repstad (Eds.), *Å forske blant sine egne, Universitet og region - nærhet og uavhengighet* (pp. S. 109-129). Kristiansand: Høyskoleforlaget.
Haywood, C. H., & Tzuriel, D. (2002). Applications and challenges in dynamic assessment. *Peabody Journal of Education, 77(2)*, 40-63.
Johansson, B. S. (2005a). Numbrt-word sequence skill and arithmetic performance. *Scandinavian Journal of Psychology, 46*, 157-167.
Johansson, B. S. (2005b). Numeral writing skill and elementary arithmetic mental calculations.

Scandinavian Journal of Educational research, 49, No 1, 3-25.
Johnsen, F. (2005). *Spesifikke matematikkvansker*. Levanger: Kompetansesenteret.
Kaplan, A., Middleton, M., Urdan, T., & Midgley, C. (2002). Achievement goals and goal structures. In C. Midgley (Ed.), *Goals, goal structures and patterns of adaptive learning* (pp. 21-53). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
Lazarus, R. S. (2006a). *Stress og følelser - en ny syntese*. København: Akademisk forlag.
Lazarus, R. S. (2006b). *Stress og følelser - en ny synteste*. København: Akademisk forlag.
Lindland, E. (2007). Elevers kunnskap om posisjonssystemet sett i relasjon til om de har eller ikke har vansker i lesing og/eller matematikk. In L. Ø. Johansen (Ed.), *Mathematics teaching and incusion* (pp. 197-209). Aalborg: Department of admission Courses Aalborg University.
Lunde, O. (1997). *Kartlegging og undervisning ved lærevansker i matematikk - Bob Kåres vei gjennom matematikken*. Klepp: Info Vest Forlag.
Læreplanverket for Kunnskapsløftet (2006). v publiseringen. sdirektoratet.
Magne, O. (1998). *Att lyckas med matematik i grundskolan*. Lund: Studentlitteratur.
Niss, M. (2002). Kompetencer og matematiklæring Retrieved 06.01, 2010, from http://pub.uvm.dk/2002/kom/
Noel, M.-P., Rouselle, L., & Mussolin, C. (2005). Magnitude representations in children: Its development and dysfunction. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 179-198). New York: Psychology Press.
Ostad, S. A. (1990). Hvorfor har barn matematikkvansker? Streiftog i et ukjent område. In T. Ogden & R. Solheim (Eds.), *Spesialpedagogikk, Perspektiver. Fetsskrift til Hans-Jørgen Gjessings 70-årsdag 1.APRIL 1990*. oSLO: Universitetsforlaget.
Ostad, S. A. (1992). Bærekraftige matematikkunnskaper- En funksjon av ferdighet eller forståelse? *Norsk Pedagogisk tidsskrift, 6*, 320.326.
Ostad, S. A. (1992a). Bærekraftige matematikkunnskaper - En funksjon av ferdighet eller forståelse. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift, 6*, s. 320-326.
Ostad, S. A. (1992b). Fra det konkrete til det symbolske, Matematikkopplæring i representasjonsanalytisk perspektiv. *Nordisk tidsskrift for spesialpedagogikk, 4*, 208-214.
Ostad, S. A. (1995). Matematikkvansker, ulike kategoriseringsmåter. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift, 1*, 26-34.
Ostad, S. A. (1999). *Elever med matematikkvansker: studier av kunnskapsutviklingen i strategisk perspektiv*. [Oslo]: Unipub.
Ostad, S. A. (2001). Matematikkvansker, et resultat av forsinket eller kvalitativ forskjellig utvikling? *Spesialpedagogikk, 1*.
Ostad, S. A. (2007a). Dysmatematikk: Et multifaktorelt fenomen med karakteristiske kjennetegn. *Psykologisk Pædagogisk Rådgivning, 4 (44)*, 294-304.
Ostad, S. A. (2007b). Private speach and strategy-use patterns, Bidirectional comparison of children with and without mathematical difficulties in an developmental perspective. *Journal of learning disabilities, 40*, 2-14.
Ostad, S. A. (2008). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring: med fokus på elever med matematikkvansker*. Trondheim: Læreboka forl.
Perry, B. D. (2001). The neurodevelopmental impact of violence in childhood. In D. Schetky & E. P. Benedek (Eds.), *Textbook of child and adolescent forensic psychiatry*. Wasshington: American Psychiatric Press inc.
Reikerås, E. K. L. (2007a). *Aspects of arithmetical performance related to reading performance: a comparison of children with different levels of achievement in mathematics and reading at different age levels.* UiS, Stavanger.
Reikerås, E. K. L. (2007b). Utvikling av regneferdighet hos elever på ulike ferdighetsnivå i lesing og matematikk *Mathematics teaching and inclusion: Proceedings of the 3rd Nordic research Conference on Special Needs Education in MAthematics* (pp. 219-226). Aalborg: Department of Admission Courses, Aalborg University.
Reikerås, E. K. L. (2007c). Utvikling av regneferdigheter hos elever på ulike ferdighetsnivå i lesing

og matematikk *Mathematics teaching and inclusion: proceedings of the 3rd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics* (pp. S. 219-226). Aalborg: Department of Admission Courses, Aalborg University.
Repstad, P. (1993). *Mellom nærhet og distanse: kvalitative metoder i samfunnsfag*. Oslo: Universitetsforl.
Sagatun, S. (2009). Aksjonsforskning som arbeidsmåte i prosjektarbeid. In A. Halvorsen, H. C. G. Johnsen & P. Repstad (Eds.), *Å forske blant sine egne Universitet og region - nærhet og uavhengighet* (pp. S. 148-163). Kristiansand: Høyskoleforlaget.
Sjøvoll, J. (2007). Tilpasset matematikkopplæring - Kognitive prosesser som grunnlag for matematikkopplæringa. *Psykologisk Pædagogisk Rådgivimg, 4 (44)*, 324-335.
Sjøvoll, J. (2009). Tilpasset matematikkopplæring. In T. Risberg (Ed.), *Praktisk Pedagogikk, en studentaktiv lærerutdanning* (pp. 71-85). Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.
Skjeldal, O. H., & Gjærum, B. (2008). Den Barnenevrologiske undersøkelsen *Hjerne og atferd: utviklingsforstyrrelser hos barn og ungdom i et nevrobiologisk perspektiv -et skritt videre* (pp. s. 153-170). Oslo: Gyldendal Akademisk.
Slemmen, T. (2009). *Vurdering for læring i klasserommet*. Oslo: Gyldendal akademisk.
Solem, I. H., & Reikerås, E. K. L. (2008). *Det matematiske barnet*. [Landås]: Caspar forl.
Stedøy-Johansen, I., Ranestad, K., Pedersen, V., Dalvang, T., & Maugesten, M. (2010). Veiledning til læreplan i matematikk. *Veiledninger* Retrieved 06.01, 2010, from http://www.skolenettet.no/Web/Veiledninger/Templates/Pages/Article.aspx?id=58829&epslanguage=NO
Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode*. Bergen: Fagbokforl.
Thorsen, V. H. (2004). *Fra "skoletaper" til vinner: en kvalitativ studie av skolehistoriene til tidligere "skoletapere" som har lykkes i skolesystemet i voksen alder.* V.H. Thorsen, Stavanger.
Thorsen, V. H. (2005). *Fra "skoletaper" til vinner: en studie av tidligere "skoletapere" som har lykkes med læring i voksen alder*. Tønsberg: Forl. aldring og helse.
Tolchinsky, L. (2003). *The cradle of culture and what children know about writingand numbers before being taught*. Mahwah, N.J.: L. Erlbaum Associates.
Tornes, J. (1997). Kartleggingsprøve Matematikk for mellomtrinnet. Jaren: PP-tjenestens materiellservice.
Tvedt, B., & Johnsen, F. (2008). Matematikkvansker *Hjerne og atferd: utviklingsforstyrrelser hos barn og ungdom i et nevrobiologisk perspektiv -et skritt videre* (pp. s. 515-559). Oslo: Gyldendal Akademisk.
Tzuriel, D. (2000). Dynamic Assessment of young children: Educational and intervention perspectives. *Educational Psychologi Rewiew, 12, no 4*, 385-435.
Zeleke, S. (2004). Learning Disabilities in Mathematics: A Review of the Issues and Children's Performance Across Mathematical Tests. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26 number 4*.

VEDLEGG 1. TESTMANUAL FOR SPESIALPEDAGOGISK TESTING

Testmanualen er ment å brukes tilsvarende en intervjuguide i et semistrukturert intervju. Elevenes første svar følges opp slik at en får en best mulig innsikt i deres tenkemåter, strategier og ferdigheter. Varianter av spørsmålet ”hvordan tenkte du nå?” brukes som regel i oppfølgerspørsmålene for å få elevene til å utdype sin forståelse. Om nødvendig kan en også i enkelte tilfeller gi andre svar enn det elevene kommer med, og be elevene vurdere hvorfor det ene svaret er bra, mens det andre ikke er det. En kan da gjerne bruke spørsmålsstillinger fra tradisjonen rundt diagnostisk testing.

Det understrekes at en i testsituasjonen er interessert i det eleven kan og hvordan eleven tenker. Det er dermed ikke mulig å svare rett eller galt i denne testen. Ønsker en å gi eleven oppmuntringer underveis, kan en rose dem for gode forklaringer når de forklarer sine tanker og strategier. En kan gjerne avslutte testen med å gi respons på at eleven har forklart godt hvordan han tenker, og at testleder nå vet mye som eleven kan og er flink til. Dette kan så speiles tilbake til eleven. Det understrekes også at målet med testen er å best mulig kunne gi passe vanskelig undervisning i fortsettelsen, slik at eleven kan lære så mye som mulig.

Elevenes kunnskapsnivå skal tas på alvor i den forstand at en ikke bruker mye tid på å teste ting eleven ikke kan. Det hender eleven sier ”dette kan jeg ikke”. En kan da prate litt om hva som er vanskelig med emnet, hva eleven forstår og ikke forstår. En kan også gi noen tips som i dynamisk testing, men en skal ikke presse på for hardt. Elevens opplevelse av å ikke forstå er nok til at vi kan anta at videre pedagogiske tiltak er nødvendige.

DATO

Eleven bes gjerne først om å skrive navn og dato på et ark de får for å ha noe å notere på. Også elevens fødselsdato bør skrives på. En får da en antydning om eleven har lært å bruke tall i slike sammenhenger. En kan også se på motorikk og eventuelt rettskriving i navnet for å få et bredere inntrykk av eleven.

REGNESTRATEGIER

Elevene presenteres for et oppgaveark om gangen (vedlegg 2,3 og 4). En behandler hvert ark helt ferdig før neste ark påbegynnes.

Elevene forespeiles på forhånd at det er mange oppgaver, men at de trolig ikke rekker å gjøre alle. De får nemlig bare lov å regne en viss tid, vanligvis tre minutter. Videre sier testleder i instruksjonen at det er viktig å regne så mange oppgaver en klarer. Hvis noen oppgaver oppleves vanskelige, kan en derfor hoppe over dem. Testleder kan eventuelt spørre hvordan eleven ville regnet en eller to av oppgavene som ikke ble regnet, i etterkant. Dersom eleven regner få oppgaver, er det ofte lurt å be eleven regne noen oppgaver ekstra for å få belyst ulike løsningsstrategier best mulig. En plukker da ut oppgaver av typen nevnt nedenfor.

Elevene forespeiles også at de etter regningen vil bli spurt hvordan de tenkte mens de regnet, og at tenkemåtene er det viktigste å få tak i denne testen.

Testleder observerer eleven under oppgaveløsningen. Oppgaver som ser ut til å volde ekstra bry, oppgaver som går fortere enn de andre og lignende, er det viktig å spørre om etter at de tre minuttene er gått. Også elevens oppførsel observeres. En ser gjerne at fingrene benyttes, ofte skjult, eller andre relevante forhold.

En trenger ikke spørre elevene om strategiene på alle oppgavene. En spør gjerne om regnemåten på tiervenner (eks 7+3) og tvillingtall (eks 4+4), to nesten like (eks 4+3). En spør også om enkelte oppgaver som ikke er så lette å finne svar på ved dekomposisjon. Oppgaver en observerte særskilte forhold ved under regningen, bør en også spørre om. En avslutter spørrerunden når en opplever at eleven har fått gitt uttrykk for det utvalg av regnestrategier som benyttes til vanlig.

TELLING OG TITALLSYSTEMET

På mellomtrinnet klarer de fleste å telle mer eller mindre bra. En sjekk av dette kan likevel være lurt, særlig fordi elevene på dette trinnet ofte kan tellerekka, mens telling av objekter ikke alltid er like enkelt. Å teste mengdekonservering etter Piagets metodikk er da en enkel måte for å sjekke to ting samtidig. Etter teorien skulle mellomtrinnselever konservere mengder. Det er likevel en del som fremdeles stusser på denne oppgaven. Dette vil eventuelt være en nyttig observasjon. Like viktig er det at denne testen enkelt viser elevenes telleferdigheter i forhold til objekter. Observasjon av om de teller raskt og trygt, eller om de er usikre, gir innblikk i telleferdighetene. Ytterligere oppgaver kan være nødvendig om en ser usikkerhet.

Ved test av forståelse for titallsystemet, innretter en spørsmålsstillingen for å se om elevene har oppfattet sifferplassverdisystemets kjerne, nemlig at sifrene får forskjellig verdi etter hvilken plass de er på.

Elever på mellomtrinnet får oppgitt sifrene 1,2,6 og 9 i tilfeldig rekkefølge. Den første oppgaven

blir å sette sifrene sammen til et så stort tall som mulig, 9621. Elevene bes om å lese tallet de har skrevet.
Videre bes eleven om å lage et så lite tall som mulig. Også dette leses høyt av eleven. Testleder spør så hvorfor det første tallet er stort, mens det andre er mindre.

Videre fokuserer en på det minste tallet. En spør da om eleven har hørt om, og eventuelt kan plassere, tierplass, enerplass, tusenplass og hundrerplass, i uryddig orden. Ikke start med enerplass. En er her ikke ute etter å se hva eleven klarer under maksimale forhold, men hvor dypt forståelsen stikker. For elever som klarer dette, kan en gjerne også spørre om elevene har noen formening om hvorfor det er viktig å kunne disse navnene.

Til slutt setter en gjerne opp en liten lek hvor en sier at eleven har måkt snø eller klipt plenen for testlederen. Eleven skal få lønn, men må velge lønn selv. En peker da på de ulike sifrene i det minste tallet, som en nå har arbeidet ganske grundig med, og spør hva en vil ha i lønn og hvorfor. Dette avslører vanligvis godt om elevene har forstått sifferplassenes verdi. Elever som vil ha ni fra enerplassen fordi dette er mest, har gjerne ikke forstått titallssystemet godt nok. Elever som vil ha en fra tusenplassen fordi dette ettallet betyr tusen og det er mest, har bedre forståelse. Det finnes også elever som vil ha to eller seks. Disse svarer gjerne at de vet at en på tusenplassen er mest, men at det ikke var så mye snø så det er nok med for eksempel seksti. Disse kan også sies å ha god forståelse.

Elever som mestrer dette bra, kan også få spørsmål om desimaltall og brøk.

REGNEFERDIGHETER
For regneferdigheter benyttes vedlegg 5 for elever på mellomtrinnet. Det er ikke nødvendig at elevene regner alle oppgavene. Be eleven regne den vanskeligste oppgaven han tror han klarer innen hver regneart. Dette gir et inntrykk av elevens selvtillit. Den videre spørsmålsstilling er da avhengig om eleven klarer å løse oppgaven eller ikke. Noen velger for enkle oppgaver, mens andre velger for vanskelige. En kan be eleven regne en enklere eller vanskeligere oppgave dersom en trenger mer informasjon.

Det er viktig også å spørre om hvorfor eleven gjør det han gjør, hva minnetall betyr, hvorfor en skriver 1 som minnetall i addisjon, mens en skriver 10 ved veksling i subtraksjon osv. En kan også foreslå å føre oppgavene på en annen måte for å se hvor trygg eleven er på føringen. Målet er både å se hvor vankelige oppgaver eleven mestrer og å se i hvor stor grad algoritmene er fundert i forståelse.

SYMBOLBRUK OG SYNTAKS

Etter at tallsymbolene er testet gjennom å teste titallsystemet, testes regnetegn og syntaks i regneoppgaver. En spør da hva de ulike regnetegnene +, -, *, : og = betyr. Elevene er ofte ikke så reflekterte når en spør slik. Derfor går vi videre og lager enkle regneoppgaver innen addisjon, subtraksjon og multiplikasjon og ber eleven lage en fortelling som passer til. Dersom eleven ikke mestrer dette, kan en gi eksempler. Jo mer varierte og selvstendige fortellinger elevene klarer å lage, jo bedre vurderes besvarelsene.

En kan også be elevene løse enkle matematiske problemer fra dagliglivet dersom en ønsker enda bedre innsikt i elevenes forståelse av regneoperasjonene.

VEDLEGG 2. OPPGAVEARK FOR REGNESTRATEGIER, ADDISJON

3+3=	5+15=	3+15=
16+5=	10+6=	6+11=
3+17=	4+3=	4+11=
13+4=	8+10=	9+8=
6+14=	4+ 4=	12+4=
3+12=	14+3=	3+5=
8+7=	7+7=	12+8=
4+9=	5+4=	3+17=
8+5=	7+5=	5+6=
9+7=	8+3=	3+9=
8+4=	4+6=	12+5=
10+10=	14+5=	11+9=
5+9=	16+4=	10+3=
11+3=	10+5=	5+11=
7+10=	4+7=	15+4=
6+6=	7+6=	9+10=
11+7=	8+6=	10+4=
8+8=	16+3=	12+6=
11+8=	6+13=	6+3=
5+5=	7+3=	6+9=
9+9=	13+7=	
13+3=	4+14=	

Totalt 64 RETT: TID:

NAMN:

VEDLEGG 3. OPPGAVEARK FOR REGNESTRATEGIER, SUBTRAKSJON

20-3=	12-9=	15-3=	10-9=
9-3=	20-4=	5-4=	17-6=
13-4=	8-3=	15-6=	9-6=
14-8=	14-9=	10-5=	15-7=
10-6=	10-7=	7-3=	20-6=
13-5=	16-4=	8-5=	5-3=
16-8=	11-8=	15-8=	11-7=
20-7=	15-9=	7-5=	9-8=
8-4=	20-8=	17-4=	11-6=
16-7=	9-4=	10-8=	9-7=
11-9=	10-4=	19-10=	20-10=
13-6=	17-8=	20-9=	6-3=
8-6=	6-5=	4-3=	11-5=
16-9=	13-7=	18-10=	12-6=
20-5=	11-3=	10-3=	
14-7=			
8-7=			
13-8=			
7-6=			
12-3=			

TOTALT 64

NAMN: ____________________

RETT: ____________________

TID: ____________________

VEDLEGG 4. OPPGAVEARK FOR REGNESTRATEGIER, MULTIPLIKASJON

Navn: ____ Dato: T Nr B 30

Multiplikasjonstabellen

6 · 2 = ___	3 · 7 = ___	6 · 3 = ___	4 · 4 = ___
4 · 8 = ___	7 · 6 = ___	3 · 9 = ___	7 · 9 = ___
7 · 3 = ___	2 · 2 = ___	7 · 2 = ___	2 · 8 = ___
3 · 6 = ___	4 · 5 = ___	2 · 3 = ___	8 · 5 = ___
8 · 2 = ___	8 · 3 = ___	5 · 7 = ___	5 · 2 = ___
5 · 5 = ___	6 · 4 = ___	8 · 4 = ___	9 · 5 = ___
2 · 4 = ___	3 · 3 = ___	4 · 3 = ___	3 · 2 = ___
9 · 9 = ___	9 · 2 = ___	7 · 5 = ___	6 · 5 = ___
8 · 6 = ___	5 · 3 = ___	3 · 4 = ___	5 · 8 = ___
6 · 7 = ___	8 · 7 = ___	9 · 7 = ___	4 · 6 = ___
3 · 8 = ___	9 · 6 = ___	4 · 9 = ___	7 · 4 = ___
9 · 4 = ___	2 · 5 = ___	8 · 8 = ___	2 · 6 = ___
5 · 9 = ___	6 · 8 = ___	2 · 9 = ___	8 · 9 = ___
2 · 7 = ___	7 · 7 = ___	6 · 6 = ___	3 · 5 = ___
7 · 8 = ___	5 · 6 = ___	9 · 3 = ___	6 · 9 = ___
4 · 2 = ___	4 · 7 = ___	5 · 4 = ___	9 · 8 = ___

VEDLEGG 5. OPPGAVEARK FOR REGNEFERDIGHETER

OPPGAVE 1 A) 356+232= B) 5698+329= C) 458269+9684=	1a	1b	1c
OPPGAVE 2 A) 356-232= B) 5698-329= C) 450060-9684=	2a	2b	2c
OPPGAVE 3 A) 22*3= B) 36*8= C) 46*57=	3a	3b	3c
OPPGAVE 4 A) 8:2= B) 9:3= C) 245:5=	4a	4b	4c