Universitetet i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master i Grunnskolens Matematikkfag	Vårsemesteret, 2010 Åpen/ konfidensiell
Forfatter: Morten Søyland Kristensen	…………………………………………… (signatur forfatter)
Veileder: Raymond Bjuland	
Tittel på masteroppgaven: Kunnskap om elevfeil i matematikk Engelsk tittel: Knowledge of students mathematical based errors	
Emneord: Matematikk, undervisningskunnskap, elevfeil, likhetstegnet	Sidetall: 67 + vedlegg/annet: 89 Stavanger, 27.05.2010

Forord

Dette prosjektet startet først og fremst med en interesse for hvordan elever opplever likhetstegnet. Våren 2009 gjennomførte jeg og Anita Tyskerud et observasjonsprosjekt på 8. trinn. Under denne observasjonen gjennomgikk læreren en algoritme for løsing av likninger. I algoritmen flyttet han ledd fra den ene siden av likhetstegnet til den andre siden av likhetstegnet, slik at ledd med x-er og ledd som bare hadde tall ble samlet på hver sin side. Det ble ikke forklart hvorfor en kunne foreta denne operasjonen. Denne algoritmen kjente jeg igjen fra da jeg selv gikk på ungdomsskolen, og det slo meg at likhetstegnet var et begrep som jeg hadde hatt et lite bevisst forhold til i min egen skolegang. Jeg husker at jeg brukte algoritmen, likte å bruke den, klarte å finne variabelen i likninger ved å bruke den, men skjønte egentlig ikke hvorfor den fungerte. Denne episoden vekket min interesse for hvordan elever forstår denne algoritmen og hvordan de forstår likhetstegnet. Jeg begynte tidlig å orientere masteroppgavearbeidet mitt mot å skrive noe om likhetstegnet.

Gjennom samtaler med mine veiledere, ledet de meg mot å fokusere på hvilken kunnskap lærere har om elevers misoppfatninger, og feil som oppstår på grunnlag av dem. De mente et slikt fokus ville være mer hensiktsmessig enn bare å undersøke elevers forståelse, da det allerede finnes mye forskning rundt eleverforståelse av begreper.

Matematikklærere møter elevfeil daglig i sitt virke. Mye av vårt arbeid går ut på å vurdere elevers skriftlige arbeid og gi tilbakemeldinger relatert til dette. Jeg synes det er interessant å fundere på hvorfor eleven har gjort feil, og prøve å gi en tilbakemelding som kan hjelpe eleven til å unngå feil og utvikle forståelse knyttet til feilområdet. Å få mer innsyn i læreres arbeid rundt elevfeil virket derfor interessant, både fra et personlig undervisningsutgangspunkt og som forskningsfelt.

Etter hvert som jeg begynte å sette meg inn i litteratur om undervisningskunnskap i matematikk slo det meg at dette var et område jeg savnet bevisstgjøring rundt. Jeg har virket som lærer i 7 år, og har ønsket en tydeliggjøring av hva det vil si å være lærer. Jeg føler til tider vi som yrkesgruppe ikke er flinke nok til å formulere hva yrket vårt går ut på, og hva det innebærer å gjøre en god jobb som lærer. Gjennom denne studien håper jeg å kunne gi et lite bidrag til forskning om det å være en god matematikklærer.

Det har vært interessant å møte undervisningsfeltet med forskerbriller på. Å hente data for senere å analysere det, har vært en prosess som har gitt meg en dypere forståelse av min egen rolle som lærer. Å ta med seg momenter fra forskergjerningen til eget klasserom ser jeg også som hensiktsmessig for å utvikle egen undervisning.

Jeg skylder en stor takk til læreren som har vært hovedinformant i denne studien. Han har vært meget velvillig, og stilt seg disponibel for både observasjon og intervju. Transkripsjonen av innsamlet data har resultert i en stor mengde skriftliggjort datamateriale. Den fulle transkripsjonen er tilgjengelig som innbundet hefte eller i elektronisk form. Dette datamaterialet kan fås tilgang til ved å kontakte undertegnete.

Takk til Raymond Bjuland og Reidar Mosvold for god veiledning og støtte underveis!

Sammendrag

Oppgaven handler om hvordan kunnskap om elevfeil er relatert til annen undervisningskunnskap i matematikk. Utgangspunktet for dette er undervisningskunnskaper og undervisningsoppgaver i matematikk definert av forskere ved Universitetet i Michigan. Elevfeil knyttet til misoppfatninger rundt begrepet likhetstegnet brukes for å belyse problemområdet. I studien fokuserer det særlig på en lærers tanker, erfaringer og kommentarer rundt elevfeil i matematikk. Disse responsene har utgangspunkt i virkelige elevfeil og undervisning som presenteres for denne læreren i et intervju. Elevfeilene har opphav i elevoppgaver konstruert med formål å undersøke elevers misoppfatninger knyttet til likhetstegnet. Undervisningen som kommenteres er lærerens egen, observert ett år før intervjuet. Gjennom disse dataene og teori om undervisningskunnskap i matematikk, elevfeil og likhetstegnet, analyseres denne lærerens kunnskap knyttet til elevfeil. Gjennom analysen kommer det frem at kunnskap om elevfeil kan deles i to områder, hvor det ene området er relatert til allmenn fagkunnskap i matematikk, mens det andre området er relatert til spesialisert fagkunnskap i matematikk. Studien viser i at lærere innehar og har bruk for begge disse kunnskapene i. I tillegg viser studien at kunnskap om elevfeil ikke defineres som en undervisningsoppgave i matematikk av Michigan-miljøet, men flere elementer tyder på at den muligens burde det, og dermed innlemmes som en komponent relatert til undervisningskunnskap i matematikk..

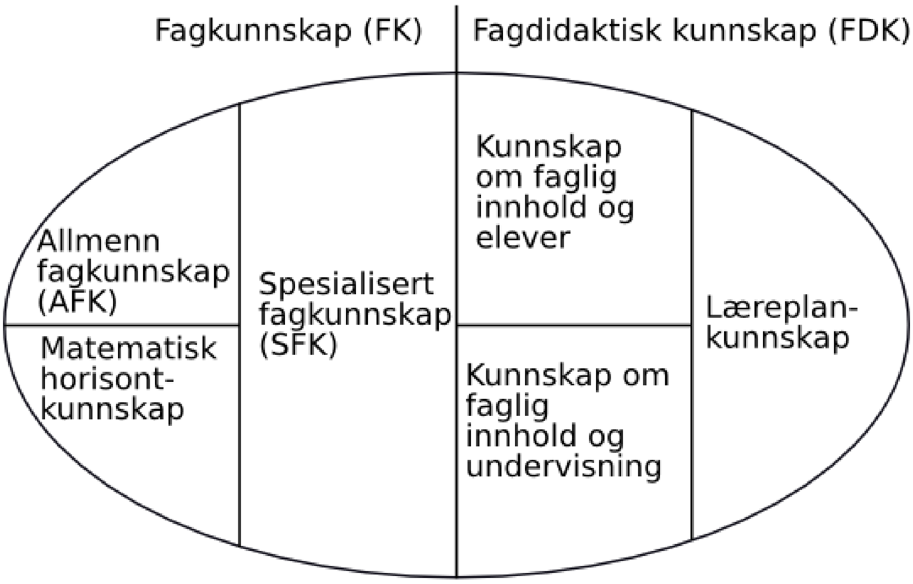
Innholdsfortegnelse

1. Innledning

En stor del av jobben som matematikklærer går med på å undersøke elevers besvarelser av matematikkoppgaver. Matematikkundervisningen er og har vært nært knyttet til hvordan elever løser oppgaver. Å løse skriftlige oppgaver virker å være den mest sentrale arbeidsmåten for elever gjennom skoleløpet – også i dag. Skriftlige oppgaver er gunstige å bruke da de gir læreren et konkret bilde av hvordan elever responderer på matematiske problemer. Ut fra elevers skriftlige arbeid kan læreren vurdere deres kompetanse. Denne målingen viser i første grad om elevene har gjort rett eller feil ut fra de kriteriene læreren mener oppgaveløsningen bør inneholde. Men lærerens kunnskap om elevfeil inneholder mer enn å vurdere om en besvarelse er rett eller gal. Læreren bør også ha kunnskap om hvorfor feilen oppstod og hvordan en skal behandle feilen. Slik kunnskap er relatert til kunnskap om faglig innhold, elever og undervisning. Kunnskap som behøves i undervisningen av matematikk kan defineres som *undervisningskunnskap i matematikk*. Da behandling av elevfeil er en stor del av lærerens kunnskap, vil det være interessant å undersøke hvordan denne kunnskapen relateres til annen undervisningskunnskap i matematikk

Undervisningskunnskap i matematikk er et område hvor det pågår arbeid med å definere hvilke typer kunnskaper matematikklærere behøver for å undervise i matematikk. Shulman (1986) satte i gang et arbeid med å definere hvilke kunnskaper lærere behøver for å undervise relatert til enkeltfag. Han hevdet at lærere ikke bare behøver en ren faglig og pedagogisk kunnskap. Læreren behøver en kombinasjonskunnskap som er faglig relatert, en kunnskap om hvordan en underviser i enkeltfaget. Forskningsmiljøer knyttet til utvikling av lærerundervisning arbeidet videre på grunnlag av Shulmans påstander. Relatert til enkeltfagene startet et arbeid med å definere hvilke kunnskaper og arbeidsmåter læreren burde ha og beherske for å utføre undervisningsjobben sin i det spesifikke fag.

Under oppbyggingen av faglig kompetanse knyttet til denne masterutdanningen ble vi som studenter presentert for Universitetet i Stavanger (UiS) sitt lokale arbeid knyttet til undervisningskunnskap i matematikk. Matematikkmiljøet ved lærerutdanningen, UiS, arbeider med å måle læreres undervisningskunnskap i matematikk. Måleinstrumentene bygger på forskere ved Universitetet i Michigan sitt arbeid knyttet til å definere hvilken type kunnskap en behøver i matematikkundervisningen. På bakgrunn av UiS sitt arbeid knyttet til dette emnet, er det naturlig å orientere seg mot Universitetet i Michigan sitt arbeide med undervisningskunnskap i matematikk. Ball, Thames & Phelps (2008) gir en oversikt over hvilke kunnskapsområder de mener som er relatert til undervisningskunnskap i matematikk. Denne modellen blir også brukt av matematikkmiljøet i lærerutdanningen ved UiS (Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010):



Figur 1: Områder som undervisningskunnskap i matematikk består av (Ball, Thames & Phelps, 2008, s. 403, oversatt av Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010).

Modellen presenterer noen hovedkunnskaper for undervisningskompetanse i matematikk. Imidlertid sier ikke modellen noe om hvordan kunnskap om elevfeil er relatert til disse kategoriene. Kunnskap om elevfeil kan defineres som en smalere kunnskap enn de kunnskapskategoriene som blir presentert i figur 1. Ball et al. (2008) identifiserer også hvilke undervisningsoppgaver en matematikklærer bør beherske. Ingen av disse omhandler elevfeil direkte. Muligens behøver en å definere en undervisningsoppgave knyttet til elevfeil?

1.1. Problemstilling

Gjennom denne studien vil jeg prøve å definere innhold i kunnskap om elevfeil og hvordan denne kunnskapen relaterer seg i forhold til annen undervisningskunnskap i matematikk. Ut fra dette presenterer jeg følgende forskningsspørsmål for denne studien:

Hvordan er kunnskap om elevfeil relatert til andre områder av lærerens undervisningskunnskap i matematikk?

1.2. Case for å belyse problemstillingen:

For å belyse kunnskap om elevfeil behøves et matematisk problemområde hvor elevfeil oppstår, samt informanter som kan si noe om hvordan en bruker kunnskap om elevfeil i praksis. Våren 2009 gjennomførte jeg og en medstudent, Anita Tyskerud et observasjonsprosjekt relatert til læring og undervisning i matematikk.. Vi hadde som oppgave å observere undervisning og læring av matematiske begreper på 8.trinn ved en skole i Rogaland. Fra dette datamaterialet endte vi opp med å forske på problemstillingen ”*Hvordan introduseres og oppfattes begrepet variabel i en likning?”* (Kristensen & Tyskerud, 2009). Det var imidlertid flere andre interessante områder fra det empiriske materialet som kunne danne grunnlag for videre forskning. Jeg ble særlig interessert i hvordan elever oppfatter likhetstegnet. Ut fra egen undervisningspraksis vet jeg at elever ofte har problemer med å bruke likhetstegnet på en fleksibel og riktig måte. Da jeg begynte å lese litteratur om emnet, kom det frem at likhetstegnet er et dårlig forstått symbol/begrep hos elever (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Kieran, 1981, 1990; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006; Wan de Walle, 2007; Prediger 2009). Da både litteratur og egne erfaringer tilsier at forståelse av likhetstegnet er et vanlig matematisk problemområde, samt at min interesse er vekket for dette spesielle problemområdet, virker det hensiktsmessig å undersøke elevfeil knyttet til oppfatninger og bruk av likhetstegnet for å belyse forskningsspørsmålet.

2. Teoretisk utgangspunkt

For å belyse problemområdet behøves teori knyttet til tre hovedområder. Disse er *undervisningskunnskap i matematikk, elevfeil* og *likhetstegnet.* Hensikten med dette er å plassere elevfeil forhold til undervisningskunnskap i matematikk. Likhetstegnet brukes som case for få innblikk i dette forholdet.

2. 1. Undervisningskunnskap i matematikk (UKM)

Hvilken kunnskap behøver så egentlig lærere for å gi god undervisning i matematikk?

Shulman (1986) hevder at lærere trenger en fagspesifikk kunnskap for å gi god undervisning i et fag. Hans artikkel *"Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching"*, er utgangspunkt for en mengde forskning rundt hvilken fagspesifikk kunnskap lærer behøver for å gi god undervisning

Kunnskap om fagemnene er en lite framtredende faktor i lærerutdanninger på 80-tallet. Shulman (ibid) etterlyser kunnskap om hvordan emnekunnskap blir transformert til undervisning, og om hvordan en underviser rundt et spesifikt emne. Han opplever at det har oppstått et skille mellom fag og pedagogikk, og etterlyser en tydeligere kopling mellom disse. Shulman (ibid) skisserer generelle rammer for hvilken kunnskap lærer bør ha for å undervise om et emne. Denne kunnskapen er ikke bare ren fagkunnskap, men en spesialisert kunnskap om faget. Han bruker terminologiene *Content knowledge* eller på norsk *Fagkunnskap, Pedagogical Content Knowledge*, på norsk *Fagdidaktisk kunnskap* og *Curricular knowledge*, på norsk *Kunnskap om læreplan* for å belyse den fagkunnskapen en lærer bør inneha.

Kunnskap om innhold er den kunnskapen om emnet som en lærer allerede besitter. Et fagområde har en syntaks; et sett av regler og strukturer som emnet er ordnet etter for å gi mening. Lærer må ut fra sin kunnskap om dette velge hvordan han framlegger et emne, og hvilke momenter som vektlegges slik at elevene kan forstå emnet. Læreren må ikke bare forstå hvordan noe fungerer, han må også forstå hvorfor det fungerer. En forventer og at en lærer skal forstå hvorfor noen emner er særskilt viktige for forståelse av faget, og andre emner er av mindre betydning.

Fagdidaktisk kunnskap er den kunnskap om emnet som behøves for å gi god undervisning. Dette er ikke nødvendigvis det samme som en ren fagkunnskap. En må finne de mest underviste emnene i et fagområde, de mest hensiktsmessige representasjonene, de mest kraftfulle metodene og forklaringene, slik at emnet blir forståelig for elever. Siden det ikke er noen undervisningsform som er entydig overlegen, bør lærer ha et arsenal av forskjellige innfallsvinkler og metoder, hentet både fra forskning og fra praksis. Lærer må også ha en forståelse av hva som gjør et emne vanskelig eller lett å lære og hvilke oppfatninger og preforståelser elever i forskjellige aldre innehar for å lære noe om et emne. En lærer bør også ha kunnskap om elevers misoppfatninger, slik at han kan ta tak i disse og veilede dem på rett spor.

Kunnskap om læreplan er kunnskapen om hvilket formelt innhold enkeltfagene skal inneholde og hvilke emner elevene skal innom på hvert alderstrinn, hvilket undervisningsmateriale som er tilgjengelig og at et emne kan angripes på forskjellige måter. En må også ha kunnskap om hvordan emnet er plassert i forhold til andre emner i det samme faget, både tidligere og senere i skoleløpet, samt relatere det til emner i andre fag. Enkeltemnet må altså ses i en større kontekst som en komponent for utvikling både i det aktuelle fag og som en komponent for å belyse andre fagområder.

Shulman er i utgangspunktet ikke spesielt fokusert mot matematikk, men følgende sitat viser at han identifiserer kunnskap om elevfeil og misoppfatninger som et viktig kunnskapsområde:

> The study of student misconceptions and their influence on subsequent learning has been among the most fertile topics for cognitive research. We are gathering an ever-growing body of knowledge about the misconceptions of students and about the instructional conditions necessary to overcome and transform those initial conceptions. Such research-based knowledge, an important component of the pedagogical understanding of subject matter, should be included at the heart of our definition of pedagogical knowledge (Shulman, 1986, s. 10).

Når en så beveger seg fra Shulmans generelle føringer for undervisningskunnskap og over til undervisningskunnskap i matematikk; *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* eller *Undervisningskunnskap i matematikk (UKM),* kan det se ut som om kunnskap om misoppfatninger og elevfeil er et noe underdiskutert felt, i alle fall i nyere artikler fra matematikkmiljøet ved Universitetet i Michigan, som lærerutdanningen ved UiS orienterer seg mot.

2.1.1. Michigan – miljøets arbeid knyttet til UKM

Allerede tre år etter Shulmans artikkel presenterer Carpenter et al. (1989) en studie som fokuserer på elevers tenking og hvordan lærere bruker kunnskap om elevers oppfatninger til å forme matematikkundervisningen. En slik tillegning av kunnskap om elever setter krav til læreren som forsker. Å undersøke elevoppfatninger er relatert til diagnostisk kompetanse, hvor diagnostikken får føringer for undervisning.

Ball, Lubienski og Mewborn (2001) mener lærere bør ha kunnskaper om hvordan en møter en elevfeil eller en misoppfatning, og hvilke pedagogiske implikasjoner dette får for matematikkundervisningen. Læreren bør ha en utvidet matematisk kunnskap som kan brukes til å forstå hvordan elevene har tenkt. Slik kunnskap blir sett som en spesialisert kunnskap for lærere. Ball et al. (ibid) er også opptatt av hvordan lærere skal kunne tilegne seg denne type kunnskap, men fokuserer ikke på at læreren skal være forsker. I stedet presenteres en studie av Ma (1999), hvor kinesiske lærere har tilgang til informasjon om hvert enkeltområde innenfor matematikken og hvilke elevproblemer som er vanlige relatert til hvert område. Ball et al. (ibid) etterlyser en slik skjematisert kunnskap for amerikanske lærere, men foreslår altså ikke lærer som forsker som et alternativ.

Ball, Hill og Bass (2005) er innom tanken om det er mulig å innhente kunnskap om elevfeil fra elevene, men ser det som praktisk vanskelig grunnet lite ressurser til å få fatt i enkeltelevens tanker. Det er lærerens kunnskap som skal sette ham i stand til å vurdere hvorfor en feil har oppstått. Denne kunnskapen er sterkt relatert til Shulmans (1986) artikkel.

Ball et al. (2008) trekker tydelige linjer fra Shulmans artikkel og fokuserer særlig på *Pedagogical Content Knowledge* som den kategorien som har vært mest innflytelsesrik for senere forskning. De forklarer begrepet *Undervisningskunnskap i matematikk* som: Den matematiske kunnskap en behøver for å mestre å undervise i matematikk (Ball et al., 2008, s. 395, min oversettelse).

Ball et. al (2008) presenterer en struktur for undervisningskunnskap i matematikk. Denne modellen kan ses på som representativ for Universitetet ved Michigan sitt arbeid knyttet til UKM. Den samme modellen brukes og bearbeides også ved lærerutdanningen i Stavanger. Her følger en mer inngående oversikt, slik at kunnskap om elevfeil og misoppfatninger kan plasseres i forhold til disse kategoriene.

Undervisningskunnskap i matematikk består i følge Ball et al. (2008) av disse kategoriene; *common content knowledge,* på norsk *allmenn fagkunnskap, specialized content knowledge,* eller *spesialisert fagkunnskap, knowledge of content and students,* eller *kunnskap om faglig innhold og elever* og *knowledge of content and teaching* eller *kunnskap om faglig innhold og undervisning.*

Allmenn fagkunnskap er at lærere må kunne det formelle innholdet i fagstoffet de underviser i. De må kunne bruke terminologier og notasjoner som er formelt korrekt og oppdage når elever har feil svar eller når lærebøkene har upresise presentasjoner. Lærere må altså ha den matematiske kunnskapen som de forventer at elevene skal kunne og som er kommuniserbar til allmennheten. Ved allmennheten mener en dog ikke at alle innehar denne kunnskapen, men at det er en kunnskap som en kan bruke i et vidt spekter av situasjoner, og som med andre ord ikke er unik for undervisning.

Spesialisert fagkunnskap er den matematiske kunnskap og matematiske ferdigheter som er unik for undervisning, og som ikke nødvendigvis behøves i andre situasjoner enn ved undervisning. Den spesialiserte fagkunnskapen i matematikk kan defineres gjennom arbeidsoppgaver som er relevante for matematikklæreren i det daglige virket. Disse arbeidsoppgavene forteller hva en lærer bør beherske for å gi god matematikkundervisning.

Lærerens oppgaver knyttet til undervisning:

- Presentere matematiske ideer
- Respondere på elevenes "hvorfor"-spørsmål
- Finne eksempel for å få frem et bestemt matematisk poeng
- Være klar over hva som involveres når en bestemt fremstilling tas i bruk
- Knytte representasjoner til underliggende ideer og til andre representasjoner
- Knytte emnet en underviser i, til emner fra tidligere år, eller til kommende emner
- Forklare matematiske mål og hensikter til foreldre
- Vurdere og tilpasse det matematiske innholdet i lærebøker
- Endre oppgaver slik at de blir mer eller mindre utfordrende
- Forklare om elevenes påstander er rimelige (ofte raskt)
- Gi, eller evaluere, matematiske forklaringer
- Velge og utvikle gode definisjoner
- Bruke matematisk notasjon og språk, og bedømme bruken

- Stille fruktbare matematiske spørsmål
- Velge ut hensiktsmessige representasjoner
- Undersøke likheter

(Ball et al., 2008, s. 4, oversatt av Fauskanger et al., 2010)

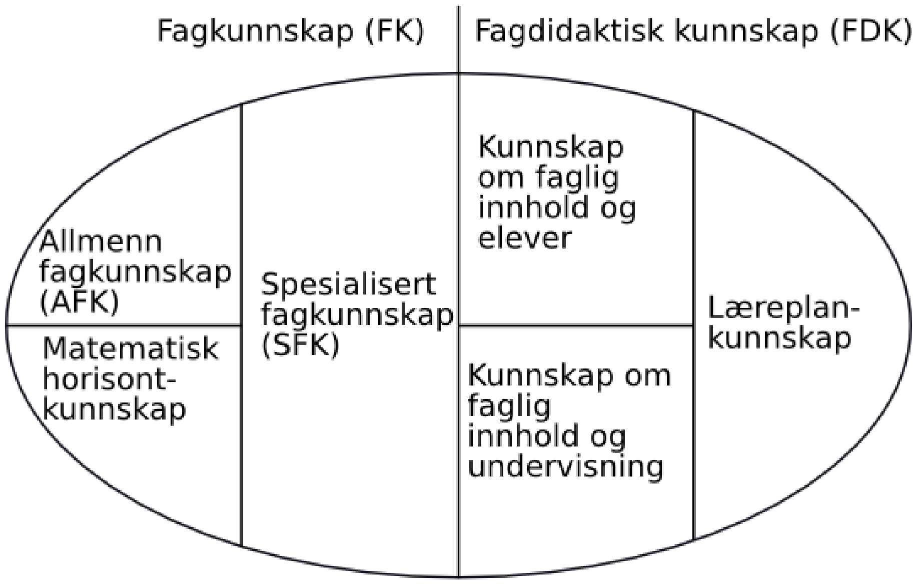
Kunnskap om faglig innhold og elever er kunnskap som kombinerer kunnskap om elever og kunnskap om matematikk. Lærer bør ha kunnskap om hvilke oppfatninger det er sannsynlig at elever vil ha for hvert enkeltemne, hva de vil synes er vanskelig og hva de vil synes er lett og hvordan møte deres ideer og meninger om enkeltemnene. ”Sentralt i disse arbeidsoppgavene er kunnskap om elevene sine vanlige oppfatninger og misoppfatninger innenfor spesifikke matematiske emner” (Ball et. al, 2008, s. 401, min oversettelse). Lærere som har slik kunnskap vil være klare til å møte oppfatninger og misoppfatninger med kjapp respons på en gjennomtenkt måte, uten at en behøver å bruke mye tid på å analysere problemområdet.

Kunnskap om faglig innhold og undervisning er kunnskap om matematisk innhold og om undervisning. En må ha kunnskap om hvordan en kan presentere enkeltemnet og hvilke forskjellige presentasjonsmuligheter en har både når det gjelder metodikk, vektlegging og progresjon. Bakgrunnen for disse valgene bør være kunnskap om hvilke fordeler og ulemper den enkelte presentasjonsmetoden medfører både på kort og lang sikt. Dette fordrer en interaksjon mellom spesifikk matematisk kunnskap og kunnskap om pedagogikk for å belyse hvordan elevenes læring blir påvirket.

Matematisk horisontkunnskap er kunnskap om hvordan stoffet på et nivå av utdanningen er relatert til annet stoff senere i utdanningen, og at en må være bevisst dette ved arbeid rundt enkeltemner.

Om en ser på kategoriene for undervisningskunnskap som blir presentert av Ball et al. (2008), kan det virke som de mener det eksisterer en kunnskap knyttet til enkeltbegreper og elevfeil som lærere bør kunne. Denne kunnskapen må imidlertid oppstå et sted og brukes i undervisningen. Vurdering av elevfeil er ikke direkte listet opp blant lærerens undervisningsoppgaver. Gjennom studien vil jeg undersøke hvordan kunnskap om elevfeil forholder seg til annen undervisningskunnskap presentert av Ball og hennes kolleger.

Det kan da være hensiktsmessig med en skjematisk oversikt over undervisningskunnskap i matematikk for det videre arbeidet:



Figur 2: Områder undervisningskunnskap i matematikk består av (Ball et al., 2008, s. 403, oversatt av Fauskanger et al., 2010).

Den norske versjonen er utarbeidet ved Universitetet i Stavanger. Å oversette områder for undervisningskunnskap og bruke de samme kategoriene i forskjellige land er mulig og hensiktsmessig om en tar høyde for kulturelle ulikheter (Delaney, Ball, Hill, Schilling & Zopf, 2008).

2.2. Elevfeil

For å kunne si noe om hvordan kunnskap om elevfeil forholder seg til annen undervisningskunnskap i matematikk må en ha en forståelse av hva elevfeil er, hva slags kunnskaper en lærer kan ha om elevfeil og hvilke undervisningskunnskaper matematikklærerprofesjonen består av.

Å vurdere elevers besvarelser er tradisjonelt en meget sentral del av læreres oppgaver (Alrø & Skovsmose, 1994). Denne oppfatningen blir også påpekt av Pehkonen (2003), som viser til at både i konvensjonell matematikkundervisning og undervisning knyttet til problemløsning har lærere og elever følgende oppfatninger av hva som er viktig:

- Det er svaret som er viktig. Når man har kommet fram til et svar er problemet løst.
- Man må få fram svaret sitt på rett måte.

- Et svar på et matematisk spørsmål består vanligvis av et tall.
- Hver kontekst er knyttet til en unik prosedyre for å få eller ”komme frem til” et svar.
- Nøkkelen til fremgang i problemløsing er at man vet og husker hva som skal gjøres.

(Thompson, 1989, ref. i Pehkonen, 2003)

Pehkonen (2003)viser til at matematikkundervisning tradisjonelt er bygd opp rundt å definere om noe er rett eller galt, både når det gjelder fremgangsmåte og løsning på et problem. Kriterier for å vurdere en elevfeil har bakgrunn i lærerens ståsted når det gjelder syn på læring og undervisning. Han definerer tre nivå av syn på hva matematikk er og tilhørende kriterier for å vurdere riktige elevbesvarelser:

Hva er matematikk?	**Hva er kriteriene for å vurdere riktige svar:**
- Bruk av aritmetiske ferdigheter i hverdagssituasjoner. - Matematisk kunnskap innebærer mekaniske og prosedyremessige ferdigheter.	- Læreren er autoritet ved vurdering av riktighet. - Korrekte svar er målet for undervisningen.
- Regler styrer alt matematisk arbeid. - Vurdering og forståelse av begrepene og prinsippene som ligger til grunn for reglene.	- Autoriteten når det gjelder om et svar er riktig eller ikke, ligger fremdeles hos eksperten.
- Forståelse av matematikk som et komplekst system av flere begreper, prosedyrer og representasjoner med relasjoner seg imellom.	- Å drive med og jobbe med matematikk er målet med undervisningen. - Det er elevene selv som kontrollerer at svarene er riktige.

Tabell 1: Syn på elevfeil relatert til forståelse av matematikk hos lærere (Pehkonen, 2003).

I denne modellen representerer det nedre nivået et mer konstruktivistisk syn på læring. Et slikt konstruktivistisk syn forutsetter at elevfeil behandles på en annen måte enn et absolutivistisk syn (Alrø og Skovsmose, 1994). Om en holder seg til termene konstruktivistisk og absolutivistisk syn på læring i matematikk, kan en elevfeil brukes på ulike måter ut fra hvilket syn på læring en har.

Absolutivistisk syn på elevfeil er at de oppstår på grunn av at elevene ikke kan matematiske regler og algoritmer godt nok. Om en har absolutivistisk holdning til elevers feil, vurderes disse som feil i forhold til den vedtatte sannhet knyttet til et emne. En slik sannhet er knyttet til formell matematisk forståelse, og den enkelte lærerens forståelse av matematikk. Denne sannheten kan ikke diskuteres, og dermed eksistere bare kategoriene ”rett” og ”galt” (Alrø & Skovsmose, 1994). Ved et slikt syn på læring vil behandlingen av en elevfeil være å presentere ”riktige” løsningsmetoder. Elevens måte å utvikle seg på er å øve mer på løsningsmetoder for konkrete oppgavetyper. Å la elever gjøre mange oppgaver av en spesiell type er en tradisjonell matematisk aktivitet som er seiglivet. Til og med lærere som sier de har et problemløsningsrettet syn på matematikkundervisning har en tendens til å la elever gjøre mange like oppgaver da det er tradisjon for dette i læreryrket (Pehkonen, 2003). I denne tradisjonen er det identifisering av elevfeil som er sentralt og ikke grunnlaget for elevfeilene. Identifiseringen er imidlertid knyttet til lærerens forståelse av fagområdet og hva det skal inneholde. Denne forståelsen er ikke nødvendigvis den samme som allmenn formell forståelse da lærerens forståelse er farget av egen erfaring og oppfatninger rundt et område (Pehkonen, 2003).

Et konstruktivistisk syn på elevfeil er at elevers feil kommer på grunnlag av misoppfatninger eller utilstrekkeligheter knyttet til deler av deres matematiske kunnskap. Matematisk kunnskap ses på som en konstruksjon der komponenter hviler på hverandre og begreper utvikles gradvis (Orton, 2004; Piaget, 1967)). Elevfeil kan her gi lærer kunnskap om bakgrunnen for at feilen oppstod. Ved riktig analysering av denne bakgrunnen kan læreren veilede ut fra det problemet eleven faktisk har, og ikke bare ut fra hvordan en skal løse en konkret oppgave. Slike problemer er ofte knyttet til misoppfatninger.

2.2.1. Misoppfatninger

Misoppfatninger er i følge Brekke (2002) ufullstendige tanker knyttet til et begrep. Han mener det er en viktig forskjell i elevers feil og elevers misoppfatninger. En feil kan oppstå tilfeldig (for eksempel om en ikke er oppmerksom nok eller ikke har lest en oppgave godt nok). Misoppfatninger er ikke tilfeldige og kommer til syne grunnet utilstrekkelig kunnskap knyttet til et emne. Han mener videre at misoppfatninger er en del av barns utvikling og at misoppfatninger og delvis forståelse av begreper ikke er til å unngå. For å rette på disse misoppfatningene må læreren bruke sin kunnskap om enkeltelevens misoppfatninger for å bygge ut begrepsforståelse. Om en ser på utvikling i matematikk som konstruksjon av begrepsforståelse, vil det være ulike forutsetninger for å skape innhold i begreper til ulike tider av intellektuell utvikling, da denne utviklingen foregår stegvis (Piaget 1967). Orton (2004) viser til at Piaget opererte med en finere gradering av intellektuelle nivåer men referer til de intellektuelle nivåene *sensomotorisk, preoperasjonelt, konkret operasjonelt* og *formelt operasjonelt* som hovedområder for matematisk kognitiv utvikling hos barn. Orton (2004) kommenterer videre at barn på samme alder kan befinne seg på veldig ulike nivå.

2.2.2. Diagnostisk kompetanse

Evnen en lærer har til å vurdere hvorfor en elevfeil har oppstått kan uttrykkes som ”diagnostisk kompetanse”. Prediger (2009) ser diagnostisk kompetanse relatert til Undervisningskunnskap i matematikk og definerer diagnostisk kompetanse som: ”Lærerens evne til å analysere og forstå elevens tanker og læreprosess uten umiddelbart å gradere den” (Prediger 2009, s. 4, min oversettelse). Prediger (2009) mener videre at diagnostisk kompetanse setter følgende krav til læreren:

- Interesse i elevens tenking
- Tolkning av forståelse fra et indre synspunkt
- Generell kunnskap om læreprosesser som grunnlag for en dypere forståelse
- Spesifikk kunnskap om det matematiske området, spesielt om oppfatninger knyttet til det

(Prediger 2009, s. 5, min oversettelse)

Diagnostisk kompetanse setter krav til læreren som forsker, slik at han kan finne ut hvordan elevfeilen har oppstått. Orton (2004) peker på viktigheten i å få fatt i elevenes tanker, og det er gjennom analyse av disse en kan utvikle innsyn i deres begrepsforståelse. For å få fatt i elevoppfatninger kan det være hensiktsmessig å legge bort sine egne føringer for hvordan et begrep skal forstås, da disse kan hemme analysen av elevoppfatninger (Arcavi & Isoda, 2007). Kunnskap om elevers utvikling av begreper er allerede omtalt som en viktig del av vurdering av elevfeil. I tillegg må en ha innsikt i det matematiske området hvor misoppfatninger oppstår.

2.2.3. Diagnostiske matematikkoppgaver

Denne studien bruker problemområdet ”likhetstegnet” som matematisk område for å undersøke elevfeil og møte med disse. For å belyse problemområdet konstrueres diagnostiske oppgaver. Kjennetegn ved disse er:

- Å identifisere og framheve misoppfatninger som elevene har utviklet, også uten at det trenger å ha vært noen formell undervisning i det en vil undersøke.
- Å gi læreren informasjon om løsningsstrategier elevene bruker for ulike typer av oppgaver.
- Å rette undervisningen mot å framheve misoppfatninger, for på den måten å overvinne dem og de delvise begrepene.
- Å utvikle elevenes eksisterende løsningsstrategier.
- Å måle hvordan undervisningen har hjulpet elevene til å overvinne misoppfatningene ved å bruke de samme oppgavene både før og etter undervisningssekvensen.

(Brekke, 2002, s. 16)

Diagnostiske oppgaver brukes i denne studien i hovedsak for å fremheve og identifisere misoppfatninger, som kan brukes for å diagnostisere elevoppfatninger.

2.3. Elevfeil på grunnlag av misoppfatninger knyttet til begrepet likhetstegnet

Likhetstegnet er et begrep som er dårlig forstått (Behr et. al, 1980, Kieran, 1981, 1990, Knuth et.al 2006, Wan de Walle, 2007, Prediger 2009) og egner seg derfor godt til å belyse kunnskap om elevfeil. Elevene i denne studien går på 9.trinn. Misoppfatninger kan imidlertid oppstå tidlig i skoleløpet og vedvare. Det er derfor hensiktsmessig å undersøke typisk nisoppfatninger knyttet til likhetstegnet som kan stamme fra hele skoleløpet.

2.3.1 Formell og uformell oppfatning av likhetstegnet

Formell bruk av matematikk er viktig for å kunne kommunisere på en riktig måte når en bruker det matematiske språket. En formell forståelse av likhetstegnet kan være:

> We can see that identity is a very restrictive kind of relationship concerned with actual sameness, that equality points at an attribute which does not change, and that

> equivalence is concerned with a wider relationship where one agrees that for certain purposes it is possible to replace one item by another. Equivalence being the most comprehensive relationship it will also be the most flexible, and therefore the most useful.

(Gattegno, 1974, referert i Kieran, 1981, s. 318)

Gattegno skiller mellom *identitet* som er uforanderlig likhet og *ekvivalens* hvor en i noen henseender kan bytte ut en verdi med en tilsvarende verdi. Kieran (1981) peker imidlertid på at elever har vansker med å bruke likhetstegnet som et slikt ekvivalenstegn.

Symbol for likhet og egenskaper ved likhet har også historisk sett vært problematisk. Først på 1800-tallet ble vår bruk av to parallelle streker for å representere ekvivalens formalisert i det matematiske språket (selv om dette tegnet allerede oppstod på 1500-tallet hos engelskmannen Recorde). Tidligere hadde forskjellige notasjoner eksistert. Flere store matematikere som Kepler, Galileo, Pascal, Cavialeri og Fermat uttrykte ekvivalens retorisk. Tidligere tiders tegn hadde også ofte en tvetydig mening som kunne veksle mellom et tegn som ga et svar og et tegn for ekvivalens (Karjori, 1897; Katz, 1998).

Oppfatning av likhet og likhetstegnet ser ut til å være problemfylt også i dag. Prediger (2009) identifiserer forskjellige eksisterende oppfatninger av likhetstegnet:

1. Operasjonell betydning; operasjonene gir svaret; for eksempel $24 : 6 – 3 = 1$ eller $f`(x)` = (3x^2)` = 6x$

2. Relasjonell mening.
   2a. Symmetrisk aritmetisk identitet, for eksempel $5 + 7 = 7 + 5$ eller $19 = 10^2 - 9^2$
   2b. Formell ekvivalens som beskriver likeverdige uttrykk, for eksempel
   $x^2 + x – 6 = (x- 2)(x+3)$, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
   2c. Betinget likning som karakteriserer ukjente, for eksempel; løs $x^2 = -x + 6$
   2d. Kontekstuelt i formler, for eksempel volumformelen for en kjegle: $V = 1/3\ \pi r^2 \cdot h$ eller Rette trekanter med hypotenuser c og kateter a og b tilfredsstiller $a^2+b^2=c^2$

3. Spesifikasjon, for eksempel $m = ½ (a + b)$ eller $y = 2x + 52$

(Prediger 2009, s. 9, min oversettelse)

2.3.2. Elevers forståelse av likhetstegnet

Et problem ved bruk av likhetstegnet er at en ikke har språklig bevissthet knyttet til bruken av det. Språklig sett uttales ofte likhetstegnet i et aritmetisk uttrykk som ”blir lik” (Brekke, 2000), eller på engelsk ”gives” ”are” ”yields”, ”produces” eller ”make” (Kieran, 1981; Molina & Ambrose, 2008; Carraher & Schlieman 2007). Denne språklige bruken av likhetstegnet frembringer tanker om at likhetstegnet gir et resultat, at det får noe til å skje. Slikt språk knyttet til likhetstegnet blir også brukt av lærere. Det er derfor ikke så overraskende at elever har oppfatninger av hvordan en bruker likhetstegnet, som samsvarer med denne språklige unøyaktigheten.

Når de begynner på skolen har de fleste barn en erfaring med addisjon og subtraksjon, samt betydning av tegnene + og –, samt erfaringer med tegnet =. De ser på tegnene som at ”det skal skje noe”. Om en for eksempel ser på uttrykket 3 + 5 = __, vil elevene si at ”likhetstegnet er det som gir svaret av plusstykket”. Om en da skriver ”3 + 5 = 8”, vil barn oftest lese dette som ”3 pluss 5 blir 8”, altså en lesing av likhetstegnet som om det transformerer leddene på venstresiden til et entydig ”svar” på høyresiden (Kieran, 1981). Barn har ofte behov for å la rekkefølgen av kalkulasjoner følge vanlig leseretning, venstre til høyre (Behr et al. 1980; Brekke, 2000; Van de Walle, 2007; Prediger 2009). Elever på tidlig barneskole vil ofte lese talluttrykk av typen __ = 3 + 4 som ”blank er lik 3 pluss 4”, og så si at ”det er baklengs” for så å endre det til 4 + 3 = __ (Behr et al. 1980).

En konsekvens av at elever relaterer likhet med operasjoner, gjør at de vil ha problemer med å lese aritmetiske setninger som ikke har noen operasjoner, for eksempel 3 = 3. Et slikt uttrykk gir lite mening da elevene forventer en operasjon. (Behr et al. 1980; Kieran, 1981).

Begrepsforståelsen kan stamme fra de instruksjonene som elevene får, og en skulle da tro at når en senere blir eksponert for ekvivalenssetninger hvor en må bruke assosiative og kommutative egenskaper, vil forståelsen utvides. Dette ser imidlertid ikke ut til å være tilfelle. Studier av 6. trinnselever (i USA) viser at de ofte må tilføre operasjoner for å gi en likhet mening. Om en igjen ser på eksempelet 3 + 3, tilfører ofte elevene nye ledd for at den skal gi mening for dem, for eksempel utvidelsen til 6 – 3 = 3, eller at 3-tallet på den ene siden står for resultatet av en operasjon, for eksempel 7 – 4, slik at de da ville utvidet 3 + 3 til 7 – 4 = 3.
6. trinnselevene så ut til å forbinde likhetstegnet med et ”gjør noe” – signal. Elevene i denne studien hadde og problemer med likheter hvor det var flere ledd på hver side, de forventet at

det skulle komme et entydig ”svar” etter/til høyre for likhetstegnet. For eksempelet 4 + 5 = 3 + 6, var en vanlig elevrespons at det skulle være et svar etter likhetstegnet, ikke en ny oppgave (Kieran, 1981). Elever som er mellom 6 og 10 år virket ifølge studien å ha problemer med at et element kan veksles ut med to elementer i en aritmetisk setning, for eksempel at 9 kan veksles til 6 + 3, altså at 6 + 3 er et annet navn for 9 (ibid). Behr et al. (1980) peker også på at elever ofte søker et entydig ”svar” på en av sidene av likhetstegnet og at tallsetninger virker å ha liten betydning for dem så lenge det ikke fremkommer en tydelig operasjon. Carraher & Schlieman (2008) viser imidlertid til at ved tidlig bevisstgjøring av likhetstegnet som et ekvivalenstegn kan den operasjonelle misoppfatningen lukes bort.

Eldre elever (10 – 13 år) har mindre behov for å ha et entydig svar på den ene siden av likhetstegnet. Det kan være at de ser på det som et svar, men har ikke behov for å bytte ut for eksempel 6 + 3 med 9 for å forsikre seg om dette. Fra 13-årsalderen virker det som om elevene ikke har dette behovet for at det skal være et entydig resultat på den ene siden av en aritmetisk setning, men elevene er fremdeles i en overgangsfase mellom å se likhetstegnet som et ekvivalenstegn eller et operasjonelt tegn som gir et svar (Kieran, 1981).

Også eldre elever bruker likhetstegnet som et operasjonstegn og det brukes ikke konsistent for symbol for ekvivalens. Kiearan (1981) viser to eksempler på bruk av likhetstegnet som antyder at elever også i tenårene har problemer med å bruke likhetstegnet matematisk riktig.:

$$2x + 3 = 5 + x$$

$$2x + 3 - 3 = 5 + x - 3$$

$$2x = 5 + x - x - 3$$

$$2x - x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

Figur 3: (Kieran, 1981, s. 323): Likhetstegnet blir brukt som operator for å løse likning. Imidlertid blir ikke samme operasjon foretatt på hver side av likhetstegnet for hver ny linje. Dermed forekommer falske likheter underveis for x = 2

$$x + 3 = 7$$
$$= 7 - 3$$
$$= 4$$

Figur 4: (Kieran, 1981, s. 323): Likhetstegnet brukes for å løse likning. Leddet med x fjernes, og eleven lar verdien av x fremkomme som et ”svar” til høyre for likhetstegnet.

Kieran (1981) konkluderer med at elever tidlig ser på likhetstegnet som et tegn som skiller spørsmålet og svaret. Denne oppfatningen tar de med seg videre i skoleløpet og selv om de etter hvert klarer å jobbe med uttrykk med flere operasjoner på hver side av likhetstegnet, virker det som om det er lite fokus på at likhetstegnet formelt viser at det er ekvivalens mellom høyre og venstre side av det. Til og med på videregående og høyere utdanning ser det ut som om studentene ofte mangler dette fokuset og bruker likhetstegnet som et operatorsymbol. På bakgrunn av blant annet dette viser Kieran (2007) til viktigheten av tidlig å bevisstgjøre elever på formell matematisk betydning av begreper knyttet til tall og algebra.

Den operasjonelle forståelsen av likhetstegnet kan også ha blitt påvirket av kalkulatorens inntog i matematikkundervisningen. På kalkulatoren fremkommer delsvar underveis når aritmetiske uttrykk blir regnet ut. Ved å trykke på er-lik-knappen kalkuleres alle operasjonene og en får opp et entydig ”svar” på displayet. (Brekke, 2000; Chazan, Yerushalmy & Leikin, 2008). Chazan et al. (2008) viser også til at det blir viktigere og viktigere å få en relasjonell forståelse av likhetstegnet da mer bruk av tekniske hjelpemidler i undervisningen er med på å representere algebraiske uttrykk og likninger som kontinuerlige funksjoner, hvor variablene ikke nødvendigvis bare står for et bestemt tall.

Knuth et al. (2006) studerte amerikanske 6., 7. og 8.trinnselevers evne til å se på likhetstegnet som et prosesstegn eller et relasjonstegn. Det viste seg at det ikke var en signifikant utvikling av forståelse av likhetstegnet mellom aldersgruppene, noe som tyder på at elevers prosess- eller relasjonsforståelse ikke nødvendigvis endres med alderen. De undersøkte så disse elevene sine resultater i standardiserte matematikktester, og fant ut at det var en relasjon mellom forståelse av likhetstegnet og resultater på testene. Det viste seg at de elevene som hadde en relasjonsforståelse av likhetstegnet scoret signifikant bedre enn de elevene som hadde en prosessforståelse av det. Da disse elevene ikke hadde signifikant bedre score i standardiserte tester i lesing eller språk, tyder det på at elevers likhetstegnforståelse er relatert til matematisk evne og ikke til evner i lesing og språk eller til alder. Videre ble elevenes evner til å løse algebraiske likninger undersøkt. Det viste seg at det var en signifikant sammenheng mellom det å løse slike likninger korrekt og hvilken forståelse av likhetstegnet elevene har. Elever med relasjonsforståelse av likhetstegnet hadde en signifikant høyere score. Knuth et al. (2006) konkluderer med at det er en signifikant sammenheng mellom elevers forståelse av likhetstegnet og deres resultater i matematikk, samt mellom forståelse av likhetstegnet og deres evner til å løse algebraiske likninger. Dette tyder på at det er viktig å gi elever en relasjonsforståelse av likhetstegnet i motsetning til en operasjonell forståelse.

3. Metode

Denne studien har som hovedmål å undersøke hvordan kunnskap om elevfeil og misoppfatninger i matematikk brukes i undervisning, og hvordan denne kunnskapen forholder seg til annen undervisningskunnskap i matematikk. For å belyse dette emnet behøves informanter som er villige til å vurdere sin egen praksis. For å innhente data fra slike informanter behøves deres tillit og en grundig undersøkelse om deres valg og vurderinger knyttet til egen undervisningspraksis. En slik undersøkelse er ikke bare knyttet til måling av definerte variabler, men mer et innsyn i meninger og vurderinger. Dette innsynet blir preget av relasjonen mellom informant og forsker, samt konteksten informanten opplever forskningen i (Kvale, 2009). Det er ønskelig å bruke en spesifikk lærer som informant. Denne læreren oppleves som reflektert og kunnskapsrik med lang erfaring knyttet til matematikkundervisning og med god innsikt i fagfeltet. I tillegg er han brukt som informant ved en tidligere studie (Kristensen & Tyskerud, 2009). Observasjoner foretatt i den tidligere studien er med på å danne grunnlag for problemstillingen i denne studien. For å belyse denne problemstillingen vil det være hensiktsmessig å bruke den samme informanten.

3.1. Forskningsdesign

Å forske på få personer gjør at disse blir mer eksponert som individer i forskningsarbeidet. Emnet som forskes på er relatert til meninger og valg den enkelte lærer tar. Disse valgene er delvis personlige da læreplanen av 2006 (K06) legger opp til at det er enkeltlærer, skole og kommunes oppgave å finne virkemidler og arbeidsmåter for å oppnå målene i de enkelte fagene (K06). En forskning på enkeltindividers utvikling av undervisning kan derfor belyse lokal læreplanlegging. Slik forskning er sensitiv da valg ofte vil tas ut fra et personlig eller lokalt grunnlag. Det kan derfor virke hensiktsmessig å orientere seg inn mot en kvalitativ forskningsmetode. Ifølge Thagaard (2009, s. 12) ”egner slike metoder seg godt til å studere personlige og sensitive emner, som kan omfatte private forhold i personers liv. Når forskningsspørsmålene betinger et tillitsforhold mellom forsker og informant, kan kvalitative metoder være særlig velegnet”.

Thagaard (2009) presenterer fire kvalitative fremgangsmåter for å samle inn data. Disse er: 1. observasjon, 2. intervju, 3. analyse av foreliggende tekster og visuelle uttrykksformer og 4. analyse av audio- og videoopptak. For å finne hensiktsmessige verktøy for å belyse problemstillingen undersøkes innholdet i disse kvalitative fremgangsmåtene: Observasjon egner seg til å gi informasjon om personers atferd og hvordan personer forholder seg til hverandre. Observasjon gir også et godt grunnlag for å forstå den sosiale sammenhengen personene inngår i (Thagaard, 2009). Intervju egner seg godt til å gi informasjon om personers opplevelser, synspunkter og selvforståelse. Intervjuobjektene kan fortelle om hvordan de tolker en hendelse og hvordan de forstår erfaringer (Thagaard, 2009; Kvale, 2009). Analyse av foreliggende tekster benyttes ofte som supplement til observasjon og intervju. Både offentlige og private dokumenter representerer relevante kilder for samfunnsvitenskapelige analyser. Analyse av visuelle uttrykksformer kan være analyse av filmer, tv-programmer, bilder eller foto (Thagaard, 2009). Lyd og videoopptak gir grunnlag for analyse av hendelser og interaksjon mellom personer uten at forskeren har tatt initiativ til hendelsene. Forskerens innflytelse over disse dataene er først og fremst når de transformeres til tekst. Dette er materiale som egner seg for diskurs og konversasjonsanalyse (Thagaard, 2009).

3.2. Datainnsamling

Denne studien er først og fremst rettet mot å finne enkeltindividets tanker og synspunkter om undervisning. Derfor er intervju en hensiktsmessig datainnsamlingsmetode. En del av grunnlaget for intervjuet er observasjon og lyd/videoopptak innhentet i et tidligere forskningsarbeid (Kristensen & Tyskerud, 2009), samt elevoppgaver og elevintervju foretatt i forkant av lærerintervjuet. Data som er innhentet presenteres kronologisk i tabell 1:

Data nr.	Tid for datainnsamling:	Data:	Tema:
1	Februar/mars 2009	Observasjon og lyd/videoopptak av undervisning, 8.trinn.	Undervisning knyttet til algebra for 8.trinn.
2	Februar 2010	Skriftlige elevoppgaver, 22 elever, 9.trinn.	Oppgaver knyttet til bruk av likhetstegnet i aritmetikk og algebra.
3	Februar 2010	Elevintervju, 4 elever, 9.trinn, lydopptak.	Elevers respons på sine løsninger knyttet til elevoppgavene.
4	Mars 2010	Lærerintervju, 1 lærer, lydopptak.	Lærers respons og tanker rundt elevfeil og undervisning. Grunnlag for intervjuet var data fra nr. 1, 2 og 3.

Tabell 2: Oversikt over data brukt i studien.

Datainnsamlingen kan, som vist i tabell 1 deles opp i fire hoveddeler:

Den første delen er audio- og videoopptak foretatt våren 2009. Tema for undervisningen i denne perioden var algebra og løsning av likninger. I dette materialet finnes innhold som er grunnlag for arbeid inn mot denne studien. Gjennom dette datamaterialet får en innblikk i undervisningen til læreren.

Den andre delen er elevoppgaver foretatt i februar 2010. Innhold i elevoppgaver er formet for å belyse elevers forståelse og prestasjoner knyttet til problemområdet likhetstegnet.

Den tredje delen er elevintervju av 4 elever. Elevintervjuene er valgt ut fra elevers oppgaveløsninger, samt teori om problemområdet.

Den fjerde delen er lærerintervju foretatt i mars 2010. Her intervjues nøkkelinformanten. Intervjuspørsmålene er konstruert ut fra problemstillingen samt analyse av data fra de tre første datainnsamlingene.

3.3. Utvalg

Utvalget for 2009-studien (ibid) ble foretatt ved at veiledere til emnet "Læring og undervisning i matematikk 2"ved UiS tok kontakt med universitetets praksislærere om de var villige til å bidra som informanter. Læreren som er nøkkelinformant i denne studien svarte positivt på denne forespørselen. Vi hadde dermed ikke innvirkning på utvalget (Kristensen & Tyskerud, 2009). Dette utvalget kan defineres som et tilgjengelighetsutvalg (Thagaard, 2009; Kvale, 2009). Ulempen med et slikt utvalg kan være at de personene som sier seg villige til å delta, er personer med god selvtillit knyttet til fagområdet sitt og dermed positive til å bli forsket på. Dette kan føre til en skjevhet i hvor representative disse er for sin gruppe av mulige forskningsobjekter. Det er mulig at en slik respondent vil være mindre sannsynlig for å havne i konfliktfylte situasjoner i yrket sitt da han antakeligvis opplever å mestre yrket sitt godt. Dette er et aspekt som kan være verd å merke seg ved vurdering av resultater (Thagaard, 2009). Om utvalget for 2009-studien er delvis tilfeldig og tatt ut fra tilgjengelighet, er utvalget for 2010-studien strategisk valgt (ibid). Grunnet ønske om å se nærmere på forskningsfunn fra 2009-studien, var det ønskelig å hente mer empirisk materiale fra den samme læreren og de samme elevene som deltok i denne studien. Utvalget for datainnsamling i denne studien i 2010 er derfor basert på deltakere fra 2009-studien. Ønsket om å forske videre med den samme læreren som nøkkelinformant er grunnlagt i forskers interesse for hans tanker om undervisning. Han oppleves som en god representant for å få innsyn i matematikkfaget da han både virker kunnskapsrik, reflektert og har lang og bred erfaring. I tillegg har jeg som forsker allerede opprettet en fortrolighet med informant, og vil derfor forhåpentligvis få et mer reelt innblikk i hans tanker. Når det gjelder utvelgelse av enkeltelever for intervju omtales dette sener i masteroppgaven.

3.3.1. Skolen

Informasjon om skolen er hentet fra samtaler med undervisningsinspektør. Både våren 2009 og 2010 har ungdomsskolen ca. 330 elever fordelt på 4 klasser pr. trinn, og ca. 40 ansatte lærere. Skolen har en pedagogisk plattform hvor tydelig klasseromsledelse og differensiering i alle fag står i fokus. Innenfor matematikkfaget jobbet de lenge etter en stegmodell hvor enkeltelevene gjorde seg ferdig med ett tema før de startet på neste. Erfaringer fra lærerne sett i sammenheng med elevenes eksamensresultater tilsier at dette har vært en god modell å bruke. Da det ikke var noen form for felles gjennomgang ved bruk av denne metoden, fikk enkelte elever en negativ opplevelse siden metoden stilte store krav til individuelt arbeid. Siden Kunnskapsløftet ble innført, har skolen gått over til spiralprinsippet, og prøvd å følge opp differensiering i faget ved å undervise med nivådeling.. Elever fra samme trinn har kunnet velge mellom tre ulike nivå/farger; lavt/blå, middels/grønn og høyt/rød. Undervisningen har foregått i grupper på tvers av klassene, hvor elevene selv velger hvilken farge de vil jobbe med. Hvilken gruppe elevene skal jobbe med, varierer fra tema til tema. Nivådelingen har vært gjennomført både i klasseromsundervisning og ved oppgaveløsning. Det er flest elever på middels nivå, og noen færre på lavt og høyt. Modellen opphørte på grunn av forskningsprosjekt, da det var enklere å få tillatelse for filming i en samlet klasse. All undervisning foregikk derfor klassevis og vi observerte og samlet inn data fra en klasse. Modellen med nivådeling ble avsluttet ved inngangen til skoleåret 2009/10 grunnet manglende ressurser. Undervisningen har dermed fra og med høsten 2009 vært organisert i tradisjonelt samlede klasser.

3.3.2. Elever

Ved begge datainnsamlingene bestod klassen av 22 elever, noenlunde jevnt fordelt etter kjønn. Elevene hadde ulike faglige forutsetninger, slik det pleier å være i en vanlig klasse. Ifølge læreren var imidlertid elevene stort sett faglig sterke. Ved datainnsamlingene var elevene henholdsvis på 8.trinn og 9.trinn. Klassen har også deltatt i pilotprosjekt til nasjonale prøver i matematikk som en del av grunnlaget for å nivåjustere disse testene. Elevene satt en og en på rekker i klasserommet. Klassen opplevdes som disiplinert og positiv. Det var lite uro. I transkripsjonen har elevene fått fiktive navn for å bevare anonymiteten. Ved datainnsamlingen i 2010 var alle elevene med på prosjektet. Et utvalg på 4 elever for elevintervju er valgt på grunnlag av innholdet i elevoppgaver. Utvalget ble tatt ut fra elever som hadde oppgaveløsninger som kunne relateres til misoppfatninger knyttet til likhetstegnet, samt en elev som svarte riktig på alle oppgavene. Dette er altså et strategisk utvalg for å belyse aspekter knyttet til deres oppgaveløsninger. Mer om begrunnelse for dette utvalget i punkt 3.7.

3.3.3. Lærer

Informasjon om lærer er hentet fra samtaler, e-post og intervju. Læreren er mann, 49 år, og har jobbet med undervisning i matematikk i 26 av sine 27 år som lærer. Han er inspektør på skolen. Ved datainnsamlingen i 2010 virket han som rektor siden ordinær rektor var i permisjon. Han hadde da bare undervisning i en 9.klasse, den samme klassen som var medvirkende i 2009-studien. I transkripsjonen av undervisning omtales lærer som "Jens". I transkripsjonen av lærerintervju omtales læreren som "lærer". Han har tidligere jobbet som rektor ved en annen skole. Læreren har 4-årig lærerutdanning med fordypning i matematikk, som den gang utgjorde 10 vekttall eller 30 studiepoeng. Han er også deltakende i kommunens matematikkgruppe for undervisning. Denne gruppen vurderer, diskuterer og bestemmer hvilke matematikkverk som skolene i kommunen skal kjøpe inn og bruke. Læreren omtaler seg selv som en tradisjonell lærer som bruker mye tavleundervisning. Han sier han er lite praktisk orientert innen faget, og en del tid går med til å vise fremgangsmåter på tavla. Dermed blir undervisningen mindre utforskende. Han fortalte at han bruker mye tid til individuell elevveiledning. 5-10 min i oppstarten av hver time brukes til felles gjennomgang, mens resten av timen går med til individuell jobbing hvor læreren går rundt og hjelper elevene og ser på hvordan de løser oppgaver. Dersom det er mange elever som har problemer med den samme oppgaven, pleier han å samle elevene og gå igjennom oppgaven felles på tavla. Læreren virket å være engasjert i undervisningen

3.4. Observasjon av undervisning

Observasjon av undervisning våren 2009 foregikk gjennom 4 undervisningsøkter à 45 minutt. Temaet for undervisningsøktene var algebra og likninger. Observasjonene ble gjennomført på ulike dager i løpet av to uker, og data ble samlet gjennom lyd- og videoopptak. Fokuset i observasjonen var lærerens undervisning.

Observasjon kan brukes til å telle kvantitative variabler eller finne meningsbærende enkeltelementer. Mehan (1979) er opptatt av å finne meningen bak hendelser i klasserommet og ikke bare telle kvantitative variabler som utsagn, gestikulering og elevrespons. Han mener at å telle slike variabler, som det tidligere har vært tradisjon for i klasseromsforskning, gir et for snevert bilde av virkeligheten. For å forstå kompleksiteten i klasserommet, trenger man et mer helhetlig bilde og en grundig beskrivelse av hva som faktisk foregår i klasserommet. Mehan fokuserer på en etnografisk forskningsmetode som beskriver og analyserer hendelser i klasserommet. Det positive med audio og videoopptak er at materialet er tilgjengelig hele tiden. Man mister ikke opprinnelige data, de gir omfattende datamengde dersom man observerer et klasserom over tid, og forsker kan analysere interaksjonen i klasserommet på flere nivå siden episoder kan settes inn i en sammenheng.

I denne studien brukes dette materialet for å identifisere sammenhenger mellom lærerens begrunnelser for innhold i undervisning og den reelle undervisningen. Observasjonen av undervisning brukes både i konstruksjon av lærerintervju, da lærer blir bedt om å kommentere konkrete undervisningssituasjoner, samt i etterkant av lærerintervju, da det søkes etter sammenhenger mellom lærers holdninger og vurderinger i forhold til hans undervisning.

Bruk av videoopptak i kombinasjon med intervju bidrar til å utlevere flere sider av informanten enn intervju alene. Dette kan være positivt da en oppdager momenter en ellers ikke ville oppdaget. En må imidlertid være observant på at informanten kan utlevere flere sider av seg selv enn ønsket da videoopptak stort sett får med seg alt han/hun gjør. For å forsikre seg om at dataene er i samsvar med informantens grenser om selvutlevering kan denne få tilgang til videoopptakene i etterkant av filmingen, for om mulig å trekke seg fra studien (Thagaard, 2009). Læreren i denne studien fikk dette tilbudet, men valgte ikke å se gjennom videoopptakene.

3.4.1. Forskeren som deltaker og observatør

Vi ønsket å påvirke undervisningssituasjonen minst mulig slik at observasjonene er mest mulig forenlige med en normal situasjon. Undervisningen i observasjonsperioden foregikk som normalt ut fra årsplanen til klassen. Vi opplevde at vi hadde liten innvirkning på elever og lærer ved å befinne oss i klasserommet (Kristensen & Tyskerud, 2009). Lærer fungerer som praksislærer og elevene opplever jevnlig å ha fremmede folk i klasserommet. Lærer fortalte at han var litt bedre forberedt enn vanlig, men at undervisningen foregikk som normalt. Elevene var opptatt av kameraet i starten, men glemte dette fort. Etter ca. 10 minutter av den første timen virket det ikke som om kameraet affiserte dem. Forsker hadde ellers innvirkning på innhenting av data ved valg av hvor fokuset for kameraet skulle være til enhver tid.

3.5. Elevoppgaver

Jeg har valgt å belyse lærers kunnskaper om elevfeil og misoppfatninger knyttet til elevers bruk og forståelse av likhetstegnet. På grunnlag av dette ble det konstruert elevoppgaver med formål å generere reelle elevfeil knyttet til problemområdet. I lærerintervjuet brukes elevoppgavene som utgangspunkt for samtale om hvilke elevfeil og misoppfatninger som kan oppstå ut fra disse konkrete oppgavene. I tillegg ble det presentert reelle elevfeil som et utgangspunkt for lærerens analyse. Disse elevfeilene er av en slik art at forsker vurderer dem som relatert til misoppfatninger knyttet til likhetstegnet. Ifølge Grevholm (2007) er oppgaver og tester en nyttig kilde for å vurdere elevers tenkemåter og eventuelle misoppfatninger.

3.5.1. Konstruksjon av elevoppgaver

Elevoppgavene er konstruert for å undersøke hvordan elever responderer når deres forståelse av likhetstegnet blir utfordret. Oppgavene 1, 2, 3 og 4 er laget på grunnlag av teori om elevers misoppfatninger knyttet til likhetstegnet. I tillegg er oppgave 5 konstruert for å undersøke hvordan elever løser en førstegradslikning. Bakgrunnen for dette er måten lærer presenterte en metode for likningsløsning for elevene sine. Denne metoden eller algoritmen kunne oppleves som utfordrende når det gjelder forståelse av likhetstegnet som et ekvivalenstegn. De fleste oppgavene er konstruert innenfor tallområde med en og tosifrede heltall, som bør være enkelt for ungdomsskoleelever. Dette for å øke sannsynligheten for at feilene som oppstår kan relateres til forståelse av likhetstegnet og ikke til problemer innenfor tallområdet.

Oppgave 1

Oppgave 1 (vedlegg 1) består av talluttrykk som mangler et ledd eller en faktor. Dette manglende leddet kan defineres som en variabel, men fremstår som et tomt felt, eksempelvis 1 + ___ = 3, eller ___ = 2 • 2. Elevene skal fylle inn det manglende leddet eller faktoren der streken er. Alle uttrykkene har et entydig og enslig ledd på enten venstre eller høyre side av likhetstegnet. På den andre siden av likhetstegnet er det 2 eller flere ledd/faktorer. Oppgavene måler om elevene klarer å balansere disse uttrykkene og bruke likhetstegnet som et ekvivalenstegn samt om de oppfatter a + b = c på samme måte som c = a + b. Elever oppfatter ofte et enkelt ledd på høyre eller venstre side av likhetstegnet som et ”svar”, og ser på likhetstegnet som et tegn som frembringer dette ”svaret” (Behr et al., 1980; Kieran, 1981, 1990, 2007; Molina & Ambrose, 2008). På grunn av vanlig leseretning, venstre til høyre, kobler elevene dette ”svaret” til å skulle stå til høyre for likhetstegnet, slik at ”spørsmålet” a + b gir ”svaret” = c. Ved å endre leseretning slik at ”svaret” er til venstre for likhetstegnet mister tallsetningen mening for en del elever (Carraher og Schlieman, 2007). Oppgave 1 inneholder seksten deloppgaver, der alle fire regnearter er representert.

Oppgave 2

Oppgave 2 (vedlegg 1) består også av talluttrykk som mangler et ledd eller en faktor. Som i oppgave 1 fremstår dette manglende leddet som en variabel eller et tomt felt. Elevene skal finne det manglende leddet. Disse uttrykkene har flere ledd på begge sider av likhetstegnet, eksempelvis 2 +2 = ___ + 1 eller 2 • ___ = 3 + 5. Oppgavene måler hvorvidt elevene klarer å balansere disse uttrykkene og dermed bruke likhetstegnet som et ekvivalenstegn selv om det ikke er noe entydig ”svar” hverken på venstre eller høyre side av likhetstegnet i disse oppgavene. Uten et entydig ”svar” fremstår disse talluttrykkene uten mening for enkelte studenter (Behr et al., 1980; Kieran, 1981, 1990). En vanlig misoppfatning er at elever regner aritmetisk ut summen av leddene til venstre for likhetstegnet, og lar denne summen være det første leddet til høyre for likhetstegnet, da de forventer at denne posisjonen er reservert for ”svaret”. Dermed glemmer de at flere ledd til høyre for likhetstegnet skaper en uekte likhet (Kieran, 2007). Oppgave 2 inneholder syv deloppgaver, der alle fire regnearter er representert.

Oppgave 3

Oppgave 3 (vedlegg 1) består av bokstavuttrykk, en mer algebraisk representasjon enn oppgave 1 og oppgave 2 som er aritmetiske uttrykk. Ved å bruke bokstavuttrykk i stedet for tall viser elevene om de kan bruke likhetstegnet som et ekvivalenstegn for andre verdier enn rene tall. Oppgavene er konstruert på samme måte som oppgavene i oppgave 1 og oppgave 2, med de samme problemstillingene og utgangspunktene for misoppfatninger. Oppgave 3 inneholder fem deloppgaver. Oppgavene inneholder bare addisjon og subtraksjon da alle ledd inneholder bokstavrepresentasjoner, og denne studien i hovedsak forholder seg til førstegradsuttrykk av variabler.

Oppgave 4

Oppgave 4 (vedlegg 1) inneholder et matematisk problem som en tekstoppgave. Elevenes oppgave er å transformere problemet fra tekst til et matematisk uttrykk og finne løsningen via dette matematiske uttrykket. Problemet er hentet direkte fra Kieran (1981). Tekstproblemet kan transformeres til et talluttrykk som inneholder flere ledd. Ved dårlig forståelse av likhetstegnets funksjon kan talluttrykket fremstå som en falsk likhet. Å transformere mellom virkelighetsnære problem og algebra- og tallproblem er i tillegg en viktig ferdighet ifølge Kieran (2007).

Oppgave 5

Oppgave 5 (vedlegg 1) inneholder en førstegradslikning hvor elevene skal finne verdien til variabelen. Metodikk og algoritmer for å løse likninger utfordrer elevers forståelse av likhetstegnet (Knuth et al., 2006). Elevenes løsningsmåter vil vise om de behersker og bruker algoritme for likningsløsning. Resultatet av denne oppgaven blir presentert for lærer i lærerintervjuet.

3.5.2. Gjennomføring av elevoppgaver:

Forsker hadde 45 minutt til rådighet for å la elevene gjennomføre oppgavene. Elevene hadde ikke fått informasjon om oppgavenes tema eller innhold i forkant. Forsker introduserte oppgavene i klassen. Elevene fikk beskjed om å svare på oppgavene så godt de kunne. Klassens lærer var ikke til stede ved gjennomføringen. Dette var et bevisst valg for at han ikke skulle påvirke elevenes prestasjoner. Elevene jobbet rolig hver for seg. Når de mente de hadde svart så godt de kunne, leverte elevene oppgavesettet til forsker og jobbet videre med sin arbeidsplan. Forsker observerte at en elev unnlot å svare på oppgavene. De andre elevene virket å gjøre en god innsats. Tidsmessig virket det som de fleste elevene hadde god tid til å besvare oppgavene innenfor de 45 tildelte minuttene.

3.5.3. Analyse av elevoppgaver for bruk i elev- og lærerintervju.

Elevoppgavene er grunnlag for hvilke elevfeil som ble presentert for lærer i lærerintervjuet. Analysen av elevfeil hadde følgende fokus:

- Identifisere like feiltyper (fra to eller flere elever). Om flere elever har den samme feilen er det mer sannsynlig at den representerer en generell feil eller misoppfatning.
- Identifisere feiltyper som kan relateres til misoppfatninger knyttet til likhetstegnet.

Ut fra disse to kriteriene ble elevfeil valgt for analyse av lærer i intervjuet. Analyseprosessen kan ses i detalj i vedlegg 2.

3.6. Kvalitativt intervju

Det finnes flere intervjuformer. For eksempel kvantitativ spørreundersøkelser hvor et antall personer spørres om på forhånd definerte variabler. Det finnes allment godtatte regler for størrelse av utvalg, utforming av spørsmål og svaralternativer, koding av svar og statistiske analysemodeller for slike undersøkelser. I motsatt ende av intervjuskalaen finnes kvalitative intervjuer som preges av få metodologiske konvensjoner og dermed må mange metodologiske beslutninger fattes mens intervjuet pågår. Det kvalitative intervjuet blir derfor ofte kalt ustrukturert eller ustandardisert (Kvale, 2009).

Det kvalitative forskningsintervjuet foregår omtrent som en vanlig samtale, men med et bestemt formål. Intervjuer har grunnspørsmål som presenteres. Disse grunnspørsmålene er et tematisk rammeverk for innhold i intervjuet. Det kvalitative intervjuet preges imidlertid av muligheten for å etterfølge intervjuobjektets responser for å hente informasjon om emner som kan relateres til temaet, men som nødvendigvis ikke er relatert til de konkrete intervjuspørsmålene. Det er intervjuerens personlige egenskaper som faglig kunnskap, relasjon til intervjuobjektet og årvåkenhet for enkeltsituasjonenes muligheter som bestemmer i hvilken grad intervjueren klarer å etterfølge interessante responser for innbringing av informasjon (ibid). Kvale skisserer spørsmålstyper og intervjuresponser som den kvalitative forskeren har i arsenalet sitt. Spørsmålstyper er; introduksjonsspørsmål, oppfølgingsspørsmål, inngående spørsmål, spesifiserende spørsmål, direkte spørsmål, indirekte spørsmål, strukturerende spørsmål, taushet og fortolkende spørsmål (ibid). Kvale presenterer også hvilke kvalifikasjoner forskeren bør ha for å få tak i god informasjon fra intervjuet; han bør være kunnskapsrik, strukturerende, klar, vennlig, følsom, åpen, styrende, kritisk, ha god hukommelse og være tolkende (ibid). Forskerens personlige egenskaper vil være viktig for å få til et godt intervju, men god forberedelse og personlig bevisstgjøring av muligheter i intervjusituasjonen vil påvirke resultatet.

3.7. Elevintervju

Grunnlag for elevintervjuet er å sjekke om elevenes oppfatninger samsvarer med teori knyttet til problemområdet, samt lærerens vurderinger knyttet til elevers problemer innenfor bruk av likhetstegnet. Hensikten med å innhente elevers syn er å validere innholdet i lærerens og forskerens vurderinger og analyser av elevoppgaver. Elevene som ble plukket ut for intervju, ble plukket ut på forskjellig grunnlag. Elev 1 ble plukket ut fordi hans oppgaveløsninger var helt riktige. En elev med tilsynelatende kontroll på stoffet vil være egnet for å utforske forståelse knyttet til likhetstegnet, da særlig relatert til algoritme for å løse likninger. Elev 2, 3 og 4 ble valgt ut fordi de hadde oppgavefeil som virket interessante. Det må nevnes at grunnet lite tidsressurser for å innhente elevdata (elevoppgaver og elevintervju), ble disse foretatt med en dags mellomrom. Det var derfor liten tid til å analysere elevoppgavene før intervjuene. Feilene som genererte valg av elever er derfor ikke alle like interessante senere i studien. Elevintervjuene var delvis strukturerte, og hovedområdene som ble presentert var:

- Oppfatning av likhetstegnet
- Tanker knyttet til egne elevfeil
- Løsning av likning

Intervjuguide til elevintervjuene er i vedlegg 3.

3.7.1. Gjennomføring av elevintervju:

Elevintervjuene ble foretatt to dager etter gjennomføring av elevoppgaver. De fire elevene som ble valgt ut som informanter ble hver for seg trukket til side av læreren deres og spurt om de var villige til å delta på intervju. Alle fire var villige til dette. Intervjuene foregikk på et grupperom hvor bare forsker og elev var til stede. I intervjusituasjonen satt forsker og intervjuobjekt ovenfor hverandre på hver sin side av et lite bord. Forsker fokuserte på å ufarliggjøre intervjuene for å gjøre elevene tryggest mulig. Elevene opplevdes som seriøse og saklige i sin respons til intervjuerens spørsmål. Intervjuene ble tatt opp på lydfil. Elevene fikk også en oppgave som de skulle skrive på et ark samtidig som de snakket seg gjennom denne oppgaven.

3.8. Lærerintervju

Hensikten med intervjuet var å få innblikk i lærerens syn på egen undervisningspraksis i matematikk, og da særlig relatert til hans vurdering av elevfeil og misoppfatninger knyttet til begrepet likhetstegnet. Ved inngangen til lærerintervjuet var forskningsspørsmålet fremdeles i endring, noe som er vanlig ved kvalitativ forskning (Thagaard, 2009). Forskeren hadde derfor to hovedområder han ville belyse gjennom lærerintervjuet. Den ene var hvilken kunnskap læreren hadde om elevers oppfatning og misoppfatninger knyttet til likhetstegnet. Den andre var hvordan lærer brukte kunnskap om elevfeil i sin undervisning. Gjennom analyse av lærerens undervisning, elevenes oppgaver og elevintervju, var intervjuer innom disse områdene i løpet av intervjuet:

- Behandling av elevfeil.
- Elevers oppfatning av likhetstegnet.
- Sannsynlige elevfeil fra oppgavesettet og bakgrunnen for disse.
- Vurdering av opphavet til konkrete elevfeil.
- Elevers oppfatninger og misoppfatninger som bakgrunn for presentasjon av nytt stoff.

3.8.1. Gjennomføring av lærerintervju

Intervjuet ble gjennomført ca. 3 uker etter gjennomføring av elevoppgaver og elevintervju. Intervjuet varte i 46 minutter. I forkant av intervjuet (1 uke før) hadde lærer mottatt en blank versjon av elevoppgaver samt noen momenter han ble bedt om å tenke lett gjennom til intervjuet. Intervjuet foregikk på lærerens kontor. Til stede var intervjuer og lærer. Intervjuer og lærer satt på hver sin side av et bord, lydopptaker ble plassert for opptak på bordet. Intervjuer tok ikke notater mens intervjuet pågikk da han fryktet at dette ville forstyrre fokuset overfor informanten. Intervjuer stilte spørsmål relatert til emnene lærer hadde mottatt i forkant, samt oppfølgingsspørsmål. Stort sett stilte intervjuer korte spørsmål, og innformanten svarte med lange, utfyllende svar. Ofte gikk disse svarene ut over spørsmålets rammer og fortalte om emner som ikke bare omhandlet det konkrete spørsmålet, men også det faglige området relatert til spørsmålet. Intervjuer opplevde at både intervjuer og informant virket litt nervøse i oppstarten av intervjuet. Denne nervøsiteten la seg imidlertid fort. Informanten virket engasjert og villig til å uttale seg. Han reflekterte mye rundt sin egen rolle og virket ikke redd for å utlevere seg selv.

3.9. Praktiske valg vedrørende innhenting av data

Forskeren må ta praktiske valg vedrørende plassering av lyd og videoopptaker, samt form for transkripsjon Disse valgene kan påvirke data vedrørende innhold og transformasjon fra lyd og video til tekst (Thagaard, 2009; Kvale, 2009; Silverman, 2010).

3.9.1. Lydopptak

Både i elevintervjuene og lærerintervjuet ble lydopptaker plassert på bordet mellom intervjuer og intervjuobjekt. Lydopptakeren fikk med seg alt som ble sagt og lydopptakene var klare og tydelige. Ulempen med å bare bruke lydopptak er at en ikke får med seg intervjuobjektets henvisning til skriftlig materiale. Intervjuer prøvde derfor å klargjøre disse situasjonene så godt han kunne ved å kommentere henvisningene utførlig.

4 undervisningstimer ble tatt opp på lydfil. Lydopptaker ble plassert ved kateteret, slik at mest mulig av lærerens fellesundervisning ble registrert. Svakheten ved dette er at lydbåndet ikke registrerte lærerens elevveiledning når denne foregikk langt unna båndopptaker. Lydopptakeren fanget godt opp lærerens fellesundervisning, men hadde større problemer med ytringer fra elever som satt langt fra kateteret. Ved arbeidsøkter hvor lærer gikk rundt og veiledet elever fikk lydopptakeren delvis med seg veiledning i nærheten av kateteret, men lite eller ingenting av veiledning som foregikk lenger unna.

3.9.2. Videoopptak

4 undervisningstimer ble filmet. Kameraet ble plassert bakerst i høyre hjørne av klasserommet. Fokusområde for filming var lærer og hans undervisning. Ved felles informasjon befant lærer seg stort sett ved tavlen. Kameraet fokuserte da på ham og tavlen. Elevaktivitet falt i disse sekvensene ut av kameraets fokus. Ved elevarbeid hvor lærer går rundt i klasserommet og veileder skifter kameraet fokus mellom lærer og elever som befant seg i nærheten av lærer. Filmingen av lærers fellesgjennomgang viser både hans gestikulering, skriving på tavle og muntlige forklaringer. Øktene hvor elevene jobbet med oppgaver gir

mindre informasjon da kameraet i liten grad klarer å fange opp innholdet i veiledningssamtaler mellom elev og lærer. En elev hadde reservert seg fra å bli filmet. Denne eleven ble strategisk plassert i bakerste venstre hjørne av klasserommet, lengst unna hovedfokuset for filming. Fører av kameraet var bevisst på å unngå å filme denne eleven.

3.9.3. Transkripsjon

Forsker har innvirkning på innholdet i transkripsjonen ved at han velger transkripsjonsnøkkel. Transkripsjonen farger innholdet ved overføring fra lyd og video til tekst (Kvale, 2009; Silverman, 2010; Thagaard, 2009). Hensikten med transkripsjonen av intervjuene var å få tak i lærer og elevers kommentarer knyttet til emnene som ble tatt opp, og ikke samspillet mellom intervjuobjekt og intervjuer. Det er derfor ikke tatt med tegn for avbrytelser, pauser eller stemmeleie. Nødvendige kommentarer er vedlagt i et kommentarfelt. Disse kommentarene har opphav i intervjuers hukommelse om visuelle elementer som ble kommentert eller presentert underveis i intervjuet, eksempelvis henvisninger til konkrete elevoppgaver. Se ellers transkripsjonsnøkkel (vedlegg 5).

Transkripsjon av lyd og videoopptak av lærerens undervisning ble gjort våren 2009 (Kristensen & Tyskerud, 2009). I prosjektbeskrivelsen fra 2009-prosjektet skulle lyd og bildefiler slettes i etterkant av prosjektet. Tilgjengelig data fra observasjonen er derfor transkripsjonene fra den gang. For data innsamlet i 2009 refereres derfor til Kristensen og Tyskeruds (2009 redegjørelse for transkripsjon og transkripsjonsnøkkel (vedlegg 5):

> Vi har valgt å bruke transkripsjonsnøkkelen som vist på vedlegg. Alle timene var meget monologorienterte, hvor det stort sett var læreren som snakket. Samtalene mellom lærer og elev var veldig tydelige. Det var ingen avbrytelser eller på noen som helst måte vanskelig å skille mellom hvem som snakket, så derfor har vi valgt å ha en ny rad for hver stemme som snakker stort sett igjennom hele transkriberingen, i stedet for å bruke nøkkel med pauser, overlapping eller lavprat (Kristensen & Tyskerud, 2009).

Transkripsjonene av lærerintervju, elevintervju og observasjon av undervisning er tilgjengelig i eget hefte.

3.10. Etiske implikasjoner

Etiske avgjørelser må tas gjennom hele forskningsprosessen. Forsker må være bevisst den personlige interaksjonen som skjer i intervjusituasjonen. Denne interaksjonen påvirker intervjuobjektet og kunnskapen som produseres i intervjuet påvirker vårt syn på menneskets situasjon (Kvale, 2009). For å sikre informanters trygghet og at studien skal være etisk forsvarlig er flere tiltak iverksatt. Prosjektbeskrivelse ble godkjent av Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD) før prosjektet ble iverksatt. Læreren som er nøkkelinformant ble forespurt om å delta i studien. Han ble også grovt informert om studiens innhold og formål. Elevene som er informanter fikk skriv med seg hjem. Foresatte måtte godkjenne at hver enkelt elev kunne delta i studien. Elever og lærer fikk beskjed om at de på ethvert tidspunkt kunne trekke seg fra studien, og at denne bestemmelsen var opp til dem selv.. I etterkant av forrige studie fikk læreren tilgang til forskningsoppgaven (Kristensen & Tyskerud, 2009). Ved å være villig til å delta i en ny studie, tyder dette på at han er komfortabel med relasjonen til forsker samt å være i fokus for ny forskning. Læreren fikk tilbud om å se gjennom det transkriberte materialet i etterkant av intervjuet. Han ønsket ikke det, men ville heller motta et ferdig eksemplar av masteroppgaven.

3.11. Analysemodell

Transkripsjon av video og lydopptak til skriftlig form er med på å strukturere data. Dermed blir det lettere å få oversikt over innholdet i dataene (Kvale, 2009). I transkripsjonsprosessen foretar forskeren valg ved å tematisere transkripsjonen. Tematiseringen er gjort på grunnlag av forskerens fokus på analysen, og kan dermed ses på som første del av analyse (Thagaard, 2009). Tematisering av observasjon er på grunnlag av innhold i undervisningen. Elevintervjuene er tematisert etter grunnlag for valg av enkelteleven. Lærerintervjuet er tematisert ut fra kategoriene som intervjuer tok opp under intervjuet. Tematisering og analyse av innhold er hermeneutisk basert. Det er forsker som gir innholdet mening. En annen person kan gi innholdet en annen mening (Gilje & Grimen, 1993).

3.11.1. Skjematisk oversikt over data med tematisering:

Data:	Tema:	Transkripsjonsskjema nr.:
Observasjon, time 1	Regnerekkefølge ved ulike regnearter i algebraiske og -	1
Observasjon, time 2	Variabelbegrepet og bokstaver som representasjon for en verdi.	2
Observasjon, time 3	Sammentrekking av uttrykk med flere ledd og overgang mellom bokstavuttrykk og likninger.	3
Observasjon, time 4	Løsning av likninger.	4
Elevoppgaver	Oppgaver som utfordrer elevene sin bruk av likhetstegnet.	Vedlegg 1
Elevintervju 1	100 % riktig besvarelse av elevoppgavene – refleksjoner rundt disse besvarelsene.	5
Elevintervju 2	Vurdering av likhetstegnet og kommentarer til oppgave 5. Feil knyttet til oppgave 1p,	6
Elevintervju 3	Vurdering av likhetstegnet og kommentarer til oppgave 5. Feil knyttet til oppgave 1p og 2a	7
Elevintervju 4	vurdering av likhetstegnet og kommentarer til oppgave 5. Feil knyttet til oppgave 4	8
Lærerintervju	Elevfeil, likhetstegnet og trinnvis forståelsesutvikling, gjennomgang av oppgavesettet, vurdering av egen praksis, presentasjon av nytt stoff, kommentarer til likningsløsningsalgoritme	9

Tabell 3: Tematisert data for bruk i studien

3.12. Ad hoc meningsgenerering

Ved analyse av stoffet leter forsker etter mening relatert til teori og erfaring. Ved *ad hoc meningsgenerering* (Kvale, 2009) bruker ikke forsker standardmetoder for å analysere datamaterialet. Analyseringen skjer ved å bruke forskjellige teknikker. Forskeren leser gjennom materialet i sin helhet for å danne seg et generelt inntrykk for så å trekke ut enkeltelementer for dypere analyse, slik at en kan få frem sammenhenger og strukturer som er av betydning for forskningsprosjektet (ibid). Analyseelementer i ad hoc meningsgenerering er blant annet å se etter mønstre, plausibilitet og klyngedannelse, å telle, sammenligne og dele opp i variabler. Gjennom å identifisere forhold mellom slike elementer kan en skape en logisk beviskjede belyst av teori for å generere mening og finne sammenhenger (ibid).

For denne studien brukes ad hoc meningsgenerering for å finne relasjoner og sammenhenger knyttet til teori om undervisningskunnskap i matematikk, elevfeil og likhetstegnet, samt data fra observasjon av undervisning, elevoppgaver, elevintervju og lærerintervju.

4. Presentasjon og analyse av data

For å se på lærerens kunnskaper og behandling av elevfeil presenteres data som belyser dette fra det generelle til det spesielle: Læreren som er i fokus i denne studien er en del av et kollegium og en skole som har en skolekultur. Denne skolekulturen gir et bakteppe for hvordan matematikklærere ved denne skolen behandler elevfeil. Det er derfor naturlig å se på de andre lærerne ved skolen sitt møte med elevfeil som en påvirkende faktor for denne lærerens undervisning. Videre er det denne lærerens personlige møte med elevfeil som belyses. Først hans generelle møte med elevfeil, deretter vurderer han spesifikke elevfeil knyttet til oppfatning av likhetstegnet. Til slutt belyses hvordan lærer bruker sin kunnskap om elevfeil til å ta beslutninger som får konsekvenser for hans undervisningspraksis. Disse områdene belyses ved å presentere empirisk materiale som brukes til å analysere disse kategoriene

- Lærerens inntrykk av hvordan skolen møter elevfeil i matematikk
- Hvordan møter enkeltlæreren elevfeil i matematikk
- Vurdering av elevproblemer knyttet til et matematisk konsept
- Kunnskap hentet fra konkrete elevfeil
- Forming av undervisningspraksis ut fra kunnskap om elevfeil

4.1. Lærerens inntrykk av hvordan skolen møter elevfeil i matematikk

Enhver lærer som er del av en skole påvirkes av denne skolens kultur. Skolekultur eller skolekode kan defineres som det grunnsyn som eksisterer ved skolen når det gjelder normer, verdier og maktforhold. Bakgrunnen for skolekultur er enkeltpersoner eller grupper ved skolen sin kunnskap, historie og bakgrunn (Bø & Helle, 2003). Når det gjelder denne skolens kultur for møte med elevfeil i matematikk, har informanten et godt grunnlag for å vurdere dette da han fungerer som rektor og inspektør. På spørsmål om hvordan lærere ved skolen møter elevfeil, gir informanten følgende respons/forklaring i intervjuet:

38. Lærer:	Vi registrerer feil som sagt. Retter og så lager du retteskjemaer og så ser du hvilke oppgaver som elevene gjør mest feil på.
39. Intervjuer:	Ja.

40. Lærer:	Altså dem som går igjen og så ser vi også på feiltyper som går igjen.
41. Intervjuer:	Ja
42. Lærer:	Men vi tenker veldig lite om hvorfor de gjør det.
43. Intervjuer:	Ok men om du ser det er en spesiell type feil som går igjen da. Hva gjør dere for å bøte på den eller hjelpe elever som har den typen feil?
44. Lærer:	Vi eh jeg tror at det som flesteparten gjør at de tar opp disse oppgavene og går gjennom disse oppgavene på tavlen
45. Intervjuer:	Mhm.
46. Lærer:	Men jeg tror ikke vi går mye inn og ser på hva eller på hvilken måte de gjør feil. Altså vi fokuserer på hvordan de skulle ha gjort.
47. Intervjuer:	Mhm.
48. Lærer:	Altså hvordan de skulle ha gjort riktig og hvordan de burde ha tenkt men vi går ikke inn og ser på den feiltekningen de har gjort.

I følge informanten registrerer lærerne ved skolen elevfeil ved å fokusere på hvilke oppgaver som inneholder flest feil (38) og hvilke feiltyper som er hyppige (40). Lærerne er imidlertid ikke fokusert på hvorfor elevene gjør feil (42). Elevfeil behandles ved å gjennomgå feilen i fellesskap (44), der fokuset er på hvordan en skulle løst oppgaven korrekt (45-46). Feiltenkning hos elevene er ikke i fokus (48).

Det virker som om lærerne ved skolen stort sett bruker en formell matematisk kompetanse (Ball et al., 2008) til å behandle elevfeil. De registrer at noe er feil, og gir tilbakemeling til elevene ved å presentere den formelt riktige måten å løse oppgaven på. Om flere elever har samme problem, presenteres den riktige løsningen felles. Bruk av spesialisert matematisk kompetanse hvor en prøver å finne ut hvorfor eleven har gjort feil (ibid) er ut fra disse opplysningene ikke i bruk ved registrering av elevfeil. Det ser derfor ut til å være en kultur ved skolen for å presentere riktig løsningsmåte, ikke vurdere hvilke misoppfatninger elever har knyttet til enkeltbegreper. Det er imidlertid viktig å understreke at dette er en enkelt informants opplevelse av situasjonen. Begrenset data gjør det vanskelig å si for mye om hvordan andre lærere ved skolen opplever sitt møte med elevfeil.

4.2. Hvordan møter enkeltlæreren elevfeil i matematikk?

Videre er det interessant å studere hvordan den intervjuete læreren behandler elevfeil. Hans behandling av disse elevfeilene påvirkes av hvilke rammer han arbeider etter, samt hans erfaring og kunnskap om elevfeil. Ved spørsmål om hvordan han vil behandle elevfeil svarere han følgende:

308. Lærer:	Nå er vi jo oppi en diskusjon om hvorvidt en skal ta opp på tavlen feil. For de lærer av de feilene og. For de elevene som da ikke hadde gjort det feil, enkelte av dem ville jo ha husket det som en gjorde der. Var det slik det var fordi lærer viste et eller annet? Men hadde en hatt medlærer eller tolærer i flere timer enn det en har så kunne en jo tatt ut de fem elevene som har gjort den feilen. Det tror jeg hadde vært mer nyttig.
309. Intervjuer:	Så ofte er det ressurser som bestemmer hvilken måte en veileder elever på?
310, Lærer:	Det er nok det.

Lærer mener det er unødvendig å diskutere elevfeil i plenum, da elever muligens kan reprodusere feil som blir presentert på tavlen. Men om en hadde ressurser til det, kunne de elevene som hadde samme type feil fått kurs som en gruppe (308). Han mener at ressurser er med å bestemme hvilken måte en veileder på (309-310).

Rammefaktorer påvirker hvilken undervisning en kan legge opp til (Bø & Helle, 2003). Målet må være å få best mulig undervisning for flest mulig elever ut fra de rammene en har. Lærerens valg av å ikke presentere elevfeil kan begrunnes ut fra et ønske om å tilfredsstille flest mulig elever faglig. Om han hadde mulighet for det, ville det være ønskelig å veilede de som hadde feil som en gruppe. Han sier imidlertid ikke noe om hvordan han ville utført denne veiledningen. Ville en slik veiledning vært fokusert på den riktige måten å løse oppgaver av den typen som elevene hadde feil besvarelse på, eller ville han diagnostisert misoppfatningene? Da flere matematiske begreper er hierarkisk oppbygd er det mulig at elevfeil oppstår grunnet feiloppfatninger tidlig i oppbygningen av forståelse (Orton, 2004). Ved å finne ut hvor i forståelseshierarkiet elevfeilen har sitt utspring, vil en kunne veilede eleven ut fra hvor han er faglig, og ikke ut fra hvor en skulle ønske han var. Eleven kan da få en mer dyptgående faglig forståelse. Ved å presentere rett løsningsmåte, vil muligens eleven kunne løse liknende oppgaver, men møte problemer om oppgavetypene endres.

Når det gjelder hvordan elever responderer på å jobbe med sine egne feil mener lærer følgende:

313. Lærer:	Og så en annen ting er at elevene er veldig lite motivert etter at de har hatt prøven er de dessverre veldig lite motivert for å gå gjennom og lære av feilene. Det er et annet minus. Hvor mye lærer elevene av en gjennomgang av en prøve? Og der er jeg kanskje et ytterpunkt her på skolen hvor jeg kanskje går gjennom lite etter prøven. Jeg prøver heller å fokusere på gjennomgang i begynnelsen av timene for de elevene som er fornøyd og har fått det til. De er jo fornøyd og de er opptatt av å komme videre så jeg lager som regel en fasit med framgangsmåte og oppstilling og med tekst og benevning og hele pakken skikkelig ført og går gjennom litte grann av de vanskeligste tingene felles og så får elevene da ut fasit. Men de elevene som ikke klarte det på prøven de vil jo falle gjennom på en gjennomgang og. I hvert fall mange av dem så for mange er det bortkastet tid.
314. Intervjuer:	Å fokusere på feiloppfatninger og slikt?
315. Lærer:	Ja.

Læreren forteller her at elever ikke er motivert til å se på eller jobbe med sine egne feil. De ser på feil som noe som er gjort og ikke noe en kan lære av. Lærer er imidlertid fokusert på at feiloppfatninger er noe som gir seg uttrykk på en prøve. Han nevner ikke feiloppfatninger som oppdages mens elevene jobber med matematikken i en vanlig undervisningstime. Når han holder seg til prøveterminologien, forteller han at hans måte å gå gjennom riktige og feil oppgaver på er å dele ut en fasit, slik at elevene kan undersøke feilene sine selv. Uansett mener lærer at å studere og gjennomgå feil i oppgaver er bortkastet for de som trenger det, da de svakeste, som antakelig har flest feil vil ha lite utbytte av en slik gjennomgang (313-315).

Motivasjon for å lære er selvsagt en viktig faktor når en velger arbeidsmåter i et fag. Feil og fokus på feiloppfatninger kan skape negativ motivasjon. Negativ motivasjon er når en søker bort fra eller unngår et område (Bø & Helle, 2003). Det kan da synes at for å behandle feiloppfatninger må inngangsmåten være en annen enn å presentere elevene for deres egne feiloppgaver. Ut fra dette utsagnet bør en bruke elevfeil på en annen måte for å finne ut av deres feiloppfatninger.

Lærer forteller videre i intervjuet hvordan han bruker feilsvar i sin undervisning:

316. Lærer:	Men det slike feiloppfatninger kan være viktige for er det å fokusere på at når jeg vet at det er en del feiloppfatninger på det området at når jeg skal ha gjennomgang så må jeg fokusere veldig på den rette måten
317. Intervjuer:	Så du tar det med deg videre?
318. Lærer:	Ja jeg tar det med videre på den måten at jeg fokuserer på at her må jeg bruke litt ekstra tid for at mange gjør den typen oppgaver feil

Ved å registrere elevfeil former lærer sin egen undervisning. Han fokuserer ekstra på områder hvor han har erfart at feil ofte forekommer (316). Slike områder behandles ved å sette av tid i undervisningen for å fokusere på fremgangsmåte for å løse problemer knyttet til problemområdet (318).

Ball et al. (2008) peker på at lærere bør kunne vurdere om elevers forklaringer er rimelige. Ved slik kunnskap kan lærer respondere kjapt på problemer når de oppstår. Denne læreren sier at han ikke veileder elevene opp mot feilene deres, men registrerer feiloppfatninger til senere presentasjon av det samme stoffet. Kjennskapen til det faglige innholdet og elevene blir dermed bakt inn i læreren sin kunnskap om faglig innhold og undervisning. Han bruker dermed ikke elevfeil først og fremst som et redskap for å veilede enkelteleven, men heller et redskap for å forme undervisningen sin. Om en skal plassere kunnskap om elevfeil i relasjon til UKM- kategoriene ”kunnskap om faglig innhold og elever” og ”kunnskap om faglig innhold og undervisning” (ibid), kan det derfor virke som om kunnskap om elevfeil eksisterer i et område mellom disse kategoriene.

Det vil derfor være hensiktsmessig å se på lærerens kunnskap om elevfeil belyst av et konkret matematisk begrep. Som tidligere nevnt brukes elevoppfatninger knyttet til likhetstegnet som et eksempel. Gjennom dette eksempelet testes tesen om å plassere kunnskap om elevfeil mellom de nevnte UKM- kategoriene.

4.3. Vurdering av elevproblemer knyttet til et begrep

For å ha kunnskap om et område bør lærer både ha tanker om hvilke generelle problemer elever pleier ha knyttet til dette området (Ball et al., 2008), hvilke problemer elever vil møte i konkrete oppgaver/problemstillinger hentet fra området (ibid) og tanker om hvordan elever tenker når de har foretatt en feil knyttet til problemområdet (Prediger, 2009). Disse kategoriene knyttet til feiloppfatninger belyses gjennom intervju og læreres kommentarer til oppgavesettet med problemstillinger knyttet til likhetstegnet. Han kommenterer også konkrete elevfeil.

Først spørres lærer om hvordan han tror elever oppfatter likhetstegnet:

118. Intervjuer: Når de kommer fra barneskolen har du en oppfatning av at elevene har en mangelfull forståelse eller oppfatning av hvordan likhetstegnet brukes?

119. Lærer: Jeg vil vel tro at de fleste mener at det som står på høyre side av likhetstegnet er svaret.

:

:

129. Lærer: Og derfor er det viktig å få elevene til å skjønne at selv om det står et likhetstegn så trenger ikke det som står på den ene eller andre siden å være svaret med en gang.

Lærer viser til at elevene stort sett har en oppfatning av likhetstegnet som et operasjonstegn, et tegn som gir et svar (118-119). Han mener at elevenes må utvikle sitt begrepsapparat knyttet til likhetstegnet slik at de også kan brukes til å balansere uttrykk som har flere ledd på hver side (129).

Elever opplever ofte likhetstegnet som et prosesstegn som får noe til å skje (Behr et al., 1980; Kieran 1981, 1990, 2007; Knuth et al., 2006; Molina & Ambrose, 2008; Van de Walle, 2007). Likhetstegnet er også et dårlig forstått symbol (Behr et al., 1980; Kieran 1981, 1990) og elever forståelse av likhetstegnet endres nødvendigvis ikke med alderen (Kieran, 1981; Knuth et al., 2006). På den annen side utvikles forståelse av begreper gradvis (Orton, 2003; Piaget, 1967), slik at det er rimelig å forvente at elever har ulike oppfatninger knyttet til likhetstegnet i ungdomskolealder.

Intervju av fire elever viser også at det er ulik oppfatning blant disse av hva som er likhetstegnets oppgave. To av elevene mener likhetstegnet gir et svar, mens de andre to elevene mener at likhetstegnet viser at det skal være like mye på hver side av det.

Eksempel på forskjellig oppfatning av likhetstegnet blant elever, først en ekvivalensforståelse:

Elevintervju 1:

1. Intervjuer:	Da har jeg først et spørsmål til deg. Om du kan forklare hva likhetstegnet betyr i et mattestykke?
2. Elev 1:	At det skal være like mye på hver side av det på en måte.
3. Intervjuer:	Det skal være like mye på hver side?
4. Elev 1:	Av hver verdi på en måte.

Intervjuer stiller eleven spørsmål om likhetstegnets funksjon (1, 3). Eleven viser at han ser likhetstegnet som et ekvivalenstegn (2, 4).

Og så en prosessforståelse:

Elevintervju 2:

1. Intervjuer:	Hei. Jeg har noen spørsmål som er knyttet til de oppgavene dere gjorde på mandag. Og de klarte du stort sett veldig bra. Men aller først har jeg et spørsmål som gjelder likhetstegnet. Om du kan forklare hva likhetstegnet gjør i et mattestykke?
2. Elev 2:	Likhetstegnet?
3. Intervjuer:	Ja. Et slikt likhetstegn som vi har der.
4. Elev 2:	Ja. Etter det står svaret.

Intervjuer stiller eleven spørsmål om likhetstegnets funksjon (1), eleven er litt usikker på hva intervjuer henviser til (2). Intervjuer presiserer ved å peke på et likhetstegn i et talluttrykk (3). Eleven tilkjennegir en prosessforståelse av likhetstegnet (4).

Da lærer er bevisst på at likhetstegnet kan oppfattes på ulike måter og dette ser ut til å kunne bekreftes av elevintervjuene er det interessant å se hvilken type feil han ser for seg elevene vil gjøre når det gjelder konkrete oppgaver:

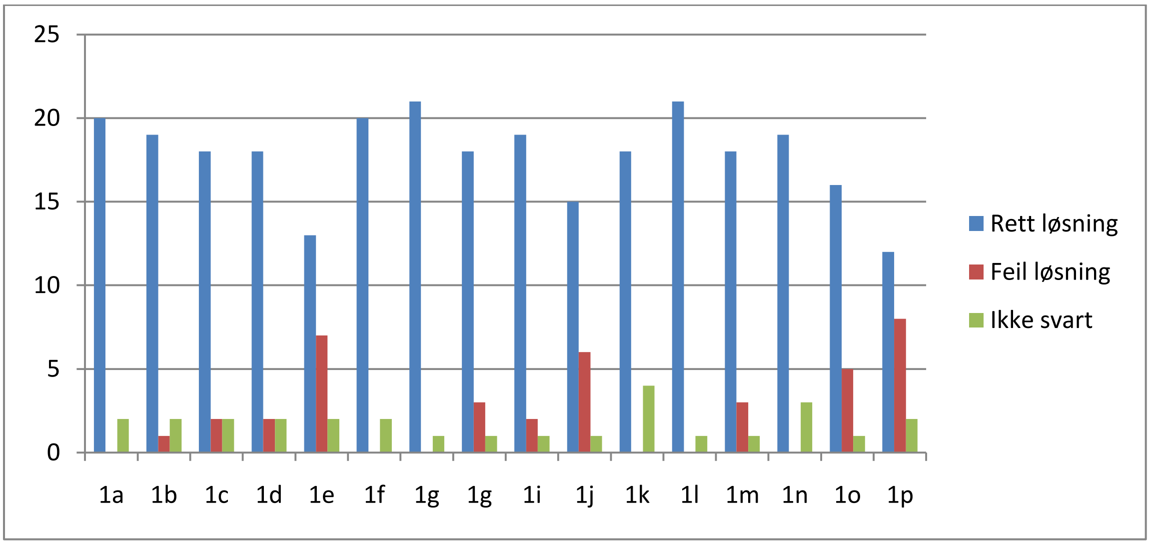
156. Intervjuer:	Nå skal vi se litt på det oppgavesettet.
157. Lærer:	Ja.
158. Intervjuer:	Ja og der var det jo forskjellige oppgaver med forskjellig antall ledd og forskjellige regneoperasjoner på hver side av likhetstegnet.
159. Lærer:	Mhm.
160. Intervjuer:	Er det noen som kanskje pekte seg ut som elevene ville ha problemer med?
161. Lærer:	Det som elevene generelt vil gjøre mer feil på er når likhetstegnet eller svaret står på venstre side. Bare en sånn enkel ting.

Lærer blir orientert om innholdet i elevoppgavene. Dette innholdet er knyttet til elevers oppfatning vedrørende likhetstegnet (156-159). Ved spørsmål om elevproblemer knyttet til disse oppgavene (160) mener lærer at enkelte elever har problemer med oppgaver som har bare ett ledd på venstre side av likhetstegnet. Disse elevene oppfatter likhetstegnet som noe som gir et svar. De er tydeligvis vant med at dette ”svaret” kommer til høyre for likhetstegnet og får problemer når de møter oppgaver av annen form (161).

Lærerens antakelse stemmer godt overens med funn fra tidligere forskning (Behr et al. 1980; Kieran, 1981, 1990;) som viser at elever har problemer når ”svaret” ikke kommer etter likhetstegnet.

Oppgave 1 i oppgavesettet inneholdt oppgaver med et ledd eller et entydig ”svar” på den ene siden av likhetstegnet og flere ledd eller faktorer på den andre siden av likhetstegnet. Elevenes besvarelser fordelte seg slik (Figur 5):

Oppgave 1: Sett rett tall på strekene:	
a) 77 + 77 = _____	i) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = _____
b) _____ = 120 – 60	j) _________ = 1999 + 21999
c) 27 = _____ + 12	k) _____ : 4 = 7
d) _____ – 32 = 35	l) 100 + _____ = 172
e) 146 – 77 = _____	m) _____ = 6 – 5 + 4 – 3
f) 5 · _____ = 30	n) 24 = ____ · 6
g) 20 – 15 + 10 – 5 = _____	o) 200 = _____ – 100
h) _____ = 17 + 18 + 19	p) 10 = 20 : _____



Figur 5: Oversikt over besvarelser i oppgave 1. 22 elever gjennomførte oppgavene. Søylene viser hvor mange elever som hadde rett løsning, feil løsning eller ingen løsning for hver av oppgavene. Oppgavene er nummerert fra 1a til 1p.

Denne oppgaven (Figur 3) inneholdt 16 deloppgaver. 8 var med entydig ”svar” på høyre side av likhetstegnet, 8 var med entydig ”svar” på venstre side av likhetstegnet. Om en ser på de 4 oppgavene med færrest rette besvarelser, har 3 av disse det entydige ”svaret” på venstre side av likhetstegnet. Blant de 4 oppgavene med flest riktige besvarelser hadde alle det entydige ”svaret” på høyre side av likhetstegnet. Dette utslaget er ikke testet for signifikans, og grunnlaget for elevfeil kan ligge i andre faktorer i oppgaven. Likevel kan dette være en indikasjon på at for noen elever er oppgaver av typen c = a + b vanskeligere enn oppgaver av typen a + b = c. Dette viser at en bør være bevisst en slik oppfatning knyttet til dette begrepet.

Dette er et eksempel på typiske elevfeil knyttet til et emne. Elevfeil har ofte grunnlag i misoppfatninger. Misoppfatninger defineres som ufullstendige tanker knyttet til et begrep (Brekke, 2002). En slik kunnskap kan relateres til kunnskap om faglig innhold og elever (Ball et al., 2008).

Senere i intervjuet kommenterer lærer hvordan han bruker denne kunnskapen i praksis:

171. Lærer:	Ja og disse oppgavene hvor det mangler liksom noe de er nok verre. Nå var det nok ikke den jeg tenkte på det var vel en her på. Ja der her kommer noen sånne oppgaver.

172. Intervjuer: Ja

173. Lærer: For eksempel der hvor de må regne ut svaret på den ene siden først.

174. Intervjuer: Du referer til oppgave 2b?

175. Lærer: Ja oppgave 2b hvor det står 100 – 10 det er 90 så gjør dem altså en regneoperasjon der og finner svaret på det og så må de bruke det svaret her etterpå

176. Intervjuer: Ja

177. Lærer: Der blir det to ting

178. Intervjuer: Ja så når det er flere ledd på hver side så er det problematisk?

179. Lærer: Ja og det var noe av det første vi startet med i fjor i 8.klasse hvor vi måtte regne ut en side for å finne hva venstre side den andre siden skulle være lik for å finne da den delen som manglet der og det er det ganske mange som ikke klarer.

Dette sitatet kommer i en kontekst hvor intervjuet omhandler elevers møte med talluttrykk som inneholder flere ledd på hver side av likhetstegnet. Oppgave 2b som lærer referer til er 55 + ___ = 100 – 10 (175). Han mener elevene har problemer når det er flere ledd på hver side av likhetstegnet. De må da foreta to operasjoner; trekke sammen leddene på den ene siden før de kan finne ut hvilke ledd som mangler på den andre siden av likhetstegnet (173, 175). Lærer fokuserte tidlig i 8. klasse på at elevene skulle regne ut hver side av likhetstegnet for seg, da han opplever at dette er et problemområde (179).

Gjennom kunnskap om elevproblemer former læreren således undervisningen sin. Det er selvsagt flere faktorer som former en lærers undervisning. Fra et konstruktivistisk synspunkt er det nødvendig å forstå og ha kunnskap om elevene sine erfaringer og oppfatninger knyttet til et emne, da læring bygger på eksisterende oppfatninger og erfaringer (Prediger, 2009). Om en bruker Piagets teorier om assimilasjon, definert som *en utfordring tilpasses et allerede eksisterende skjema* og akkomodasjon, definert som *et skjema bygges om, utvides og tilpasses dermed den gitte utfordringen* (Piaget, 1967)*)* kan en si at lærer bruker sin kunnskap om elevfeil for å tilpasse sin undervisning slik at den passer til elevers skjema og forståelser når de kommer fra barneskolen til ungdomsskolen.

En sekvens fra lærerens undervisning våren 2009 (observasjonstime 2) viser at kunnskap om elevers oppfatninger er noe som læreren virkelig bruker i praksis:

2. Lærer:	Står det noe? Stod det noe på høyre side av likhetstegnet i den, den og den oppgave, hva står det for noe til høyre for likhetstegnet her Trine?
3. Trine:	Ingenting
4. Lærer:	Ingenting, ingenting, og svaret det skrev vi til høyre, sånn som dere er vant til fra matte før, at svaret står til høyre for et likhetstegn. I en ligning så er det alltid sånn at det står noe til høyre for likhetstegnet

Undervisningssekvensen er del av undervisning knyttet til løsning av likninger. Elevene har tidligere jobbet med å trekke sammen bokstavuttrykk. Disse bokstavuttrykkene har bestått av flere ledd på venstre side av likhetstegnet. Elevenes oppgave var å samle disse leddene som et entydig ”svar” på høyre side av likhetstegnet. Det er i denne konteksten lærer spør om de stod noe til venstre for oppgavene som omhandlet sammentrekking av bokstavuttrykk (2). Lærer utvider her skjemaet til elevene om bruk av likhetstegnet. Dette skjemaet inneholder ifølge lærers utsagn (4) en elevforståelse av likhetstegnet som noe som gir et svar. Han utvider her denne elevforståelsen med å si at det alltid er noe til høyre for likhetstegnet i en likning.

Denne undervisningssekvensen foregikk omtrent et år før intervjuet. Det kan derfor virke som det er en tydelig sammenheng mellom lærers utsagn og praksis, da han både i intervjuutsagn og i praksis viser at han er klar over elevers oppfatning av et begrep.

Om en så bruker kunnskap om elevers feiloppfatninger for å utvikle sin egen undervisning, er det interessant å studere noen konkrete eksempler for å utforske hvordan en kan tilegne seg kunnskap om feil.

4.4. Kunnskap hentet fra konkrete elevfeil

Ifølge Shulman (1986) har lærere behov for en gradvis voksende kunnskapsbase om elevoppfatninger og elevfeil. En slik base vil gjøre en lærer egnet til å respondere på elevfeil, eller som det kan tyde på her, bruke elevfeil for å forme sin egen undervisning. Gjennom å studere elevfeil er det mulig å sette seg inn i elevers tankemønster og dermed bevisstgjøre seg enkeltmomenter rundt elevers forståelse.

To slike elevfeil presenteres for læreren, der fokus er på å finne ut hvordan feilene oppstod. Feilene er hentet fra reelle elevoppgaver løst av elever i lærerens klasse som lærer underviser ved. Lærer har tidligere ikke blitt presentert for elevfeilene. Elevfeilene er valgt ut fra intervjuers analyse. Hensikten med analysen var å finne oppgaver med feiltyper som flere elever hadde, slik at feilene kan representere flere elever og dermed kunne sies å representere en generell misoppfatning. I tilegg er det valgt elevfeil som tolkes å ha sammenheng med misoppfatninger knyttet til likhetstegnet.

Elevfeil i 1p:

Oppgave 1 p: "sett rett tall på streken": 10 = 20 : ____
Elevfeilen som fem elever hadde: 10 = 20 : 200

Dialogen viser hvordan læreren vurderer elevfeilen:

268. Intervjuer: Jeg hadde to elevfeil her som gikk litt igjen

269. Lærer: Ja de må jeg høre

270: Intervjuer: Da har jeg først oppgave 1p. Der står det 10 = 20 : ___ og så var det mange som hadde svart 10 = 20 : 200. Kan du tenke deg hvordan de har tenkt der?

271: Lærer: Nei de har vel antakelig tenkt det at det er motsatt det at 200 delt på 20 er 10.

272. Intervjuer: Ja at de har endret leseretning rett og slett?

273. Lærer:	Ja det tror jeg rett og slett de har gjort og det kan være elever som sliter litt med lesing for eksempel for den oppgaven her er egentlig en oppgave som er blant de enkleste. 20 delt på 2 er nå 10.
274. Intervjuer:	Så tallområdet er enkelt?
275. Lærer:	Ja tallområdet. Og så er det at det står motsatt veg men jeg kan ikke skjønne annet en at det er 20 delt på 200 som de har tenkt motsatt. 200 delt på 20 er lik 10 svaret står på venstre side
276. Intervjuer:	Og da ser de også etter et svar etter likhetstegnet?
277. Lærer:	Ja

Lærer vurderer det som om elevene har tenk motsatt leseretning, og at de leser at ”svaret” står på venstre side av likhetstegnet. Dette tyder på at de fokuserer først på den siden av likhetstegnet som har et entydig ”svar” (271). De leser tallene på den andre siden av likhetstegnet i retning av ”svaret”. Altså at 200 : 20 = 10 kan snus og skrives som 10 = 20 : 200 (275). Han mener også at det kan være elever som sliter med lesing som gjør slike feil (273), men denne påstanden er muligens influert av intervjuers kommentar om leseretning (272). Han mener bestemt at feilen har oppstått på grunn av dette fokuset om å lese seg mot et ”svar” og ikke har grunnlag i andre faktorer. Dette begrunner han med at tallområdet i oppgaven er enkelt (273-275).

Denne typen elevfeil tyder på problemer relatert til den kommutative lov, som sier at a + b = b + a og a • b = b • a. Denne loven gjelder imidlertid ikke ved divisjon og subtraksjon. Ved en slik feil er det sannsynlig at elevens begrepsapparat knyttet til denne loven ikke er tilstrekkelig utviklet. Samtidig er det sannsynlig at eleven er fokusert på likhetstegnet som et prosesstegn som gir et ”svar” (Behr, 1980; Kieran, 1981, 1990, 2007; Knuth et al., 2006; Molina & Ambrose, 2008), og leser oppgaven i retning av ”svaret” som i dette tilfellet befant seg på venstre side av likhetstegnet, og derfor skapte problemer. Ut fra denne feilen kan lærer trekke slutninger om at noen elever kan ha problemer med den kommutative lov og med likhetstegnet som et ekvivalenstegn.

Elevfeil i oppgave 2a:

Oppgave 2a er som følger: ”sett rett tall på streken”: 10 – 7 = ___ + 2
Elevfeilen som fire elever hadde: 10 – 7 = 3 + 2

Dialogen viser lærerens vurdering av opphavet til elevfeilen.

285. Intervjuer:	Så har jeg en til. Det var oppgave 2a der det står 10 – 7 = ____ + 2. Og så når de har svart har de skrevet 10 – 7 = 3 + 2
286. Lærer:	Ja og det skjønner jeg godt hvorfor de har gjort de har tatt det svaret der og satt det bak likhetstegnet og brukt det videre
287. Intervjuer:	Ja så de har tatt 10 minus 7 er lik 3 rett og slett?
288. Lærer:	Det tror jeg

Lærer vurderer det som om elevene leser regneuttrykket rett frem slik at de isolert ser at 10 – 7 = 3, men glemmer at det er et ledd til på høyre side av likhetstegnet (286). Lærer svarer kjapt og er sikker på at det er i denne misoppfatningen feilen ligger (288).

Denne elevfeilen virker å være relatert til elevers oppfatning av likhetstegnet som et prosesstegn som gir et ”svar”, og ikke et ekvivalenstegn som viser at to uttrykk eller verdier er likeverdige (Behr et al. 1980; Kieran, 1981, 1990; Knuth et al., 2006; Molina & Ambrose, 2008; Prediger, 2009). Med manglende ekvivalensforståelse plasserer eleven ”svaret” av leddene til venstre for likhetstegnet til høyre for likhetstegnet. De har dermed utført en operasjon hvor likhetstegnet har gitt et svar. Da høyre side av likhetstegnet har to ledd skaper dette ”svaret” en falsk likhet, da verdien av venstre og høyre side ikke er like store. Denne feiltypen kan også relateres til elevers bruk av kalkulator (Brekke, 2000; Chazan et al., 2008), da likhetstegnet i kalkulatoren fungerer som et prosesstegn som gir et svar. Likhetsknappen på kalkulator tar bare hensyn til tidligere oppgitte verdier, ikke kommende. Likhetsknappen gir også et entydig ”svar” i form av et tall, ikke uttrykk inneholdende flere ledd. Dette er et eksempel på hvordan en kan trekke ut kunnskap både knyttet til et begrep (likhetstegnet) og til et arbeidsverktøy (kalkulator) ut fra en elevfeil.

Analyse av elevfeil kan ha to fokus. Det ene er et elevfokus, slik at en kan bruke elevfeilen for å gradere eleven eller som et grunnlag for å veilede eleven videre. Det andre er fokus på det matematiske innholdet og feiltenkning knyttet til feilen. Et slikt fokus vil plassere elevfeilen som en del av kunnskapen en har om et matematisk begrep. Denne kunnskapen er bare brukbar for undervisning og derfor en spesialisert fagkunnskap.

De to konkrete eksemplene viser hvordan en kan analysere og trekke spesialisert matematisk kunnskap ut fra elevfeil. En slik analyse krever en viss bevissthet rundt feilene og ikke bare fokus på rett eller galt. Det kan være vanskelig å verifisere om ens analyse av elevfeil er korrekt. Feilen har muligens oppstått på annet grunnlag enn det en tror som lærer. Intervjuet avslører ikke noe om denne lærerens grunnlag for vurderinger knyttet til elevfeilene.

4.5. Forming av undervisningspraksis ut fra kunnskap om elevfeil

Gjennom vurdering av elevoppgaver har læreren vist at han kan ha formeninger om hvilke typer elevfeil som vil oppstå. Denne formeningen skapes ut fra erfaring og kunnskap om elevvansker, og han viste gjennom vurdering av de konkrete elevfeilene hvordan en kan dra slik kunnskap ut fra disse. Denne kunnskapen er imidlertid ikke noe verd om den ikke brukes i praksis. Læreren har tidligere nevnt at han bruker elevfeil i hovedsak til å forme egen praksis og ikke til å veilede enkelteleven. Den følgende sekvensen er utdrag fra lærerens undervisning 2009.

Denne sekvensen er del av undervisning i algebra. I forkant av sekvensen har elevene både jobbet med å trekke sammen bokstavuttrykk, samt å definere variabelen x.

Observasjon, time 4:

2. Lærer:	Og nå skal vi faktisk skrive ned regler først og så skal vi bruke dem etterpå. Det er en grunn til at jeg gjør det, men den tar jeg ikke med dere i dag. Alle ledd, altså alle ledd, det kan være for eksempel 2X eller -8 eller 5 tredjedeler eller hva det nå måtte være. Alle ledd i ligningen med X, altså alle ledd som har en X i seg skal flyttes over på venstre side av likhetstegnet.
3. Martin, elev:	Jammen er vi nødt til å ha de på venstre?

4. Lærer:	Og så kommer du da med sånne glupe spørsmål, og de trenger ikke det. Men vi skriver det nå. Det er helt fornuftig Spørsmål Martin, men vi holder oss til den regelen der nå i starten. Alle ledd med x skal flyttes over på venstre side av likhetstegnet. Og det er likhetstegnet som er sjefen i en ligning, så det må vi ha helt klart for oss. Jeg skal vise hvordan vi gjør det etterpå.
5. Lærer:	Det er alle ledd med x i. Alle ledd uten x skal flyttes over på høyre side av likhetstegnet. Dette som vi nå har gjort i punkt A og B kaller vi å ordne ligningen. Vi systematiserer alle ledda, og får alle ledd med x på venstre og vi får alle ledd som ikke har x på høyre side. Når vi gjør det, når vi gjør det, så er det en ting vi må passe på og det er at hvis noe flyttes fra høyre til venstre eller fra venstre til høyre, altså hvis noe bytter side, så må vi bytte tegn foran leddet, altså bytte fortegn. Hvis det står pluss 3 og det går over på høyre side, så blir det minus 3. Og hvis det står 2x på høyre side, og vi flytter det over på venstre, så blir det minus 2x. Skal også vise det på et eksempel etterpå. Ved skifte av side, skifter vi fortegn, ved skifte av side, skifter vi fortegn.

:

:

9. Lærer:	Punkt D. Når vi har gjort det, og fått alle X-ene på venstre, alle talla på høyre og byttet tegn, hvis vi har byttet side, så trekker vi sammen på hver side. Det vil si vi legger sammen eller trekker fra hvis det er minus, vi trekker sammen alle X-ene på venstre side. V.S. Vi trekker sammen alle X-ene på venstre side. Vi trekker sammen alle talla på høyre side. For mange av dere er dette gresk foreløpig, men det blir etter hvert kanskje helt norsk, i alle fall nynorsk. Trekker sammen alle X-ene på venstre og alle talla på høyre, og til slutt finner vi en X, altså svaret. Det er framgangsmåten. Hvis dere følger den for alle ligninger, så vil dere etter denne timen i dag klare å løse utrolig mange ligninger i matten. Men da må dere følge den oppskriften. Det blir som å lage en middag det. Hvis dere glemmer å lage saus eller hvis dere ikke koker grønnsaker, altså hvis dere glemmer en ting i middagen, så blir det

> ingen middag, den blir ikke komplett og det blir det ikke her heller om dere kutter ut en ting. Om jeg dropper det første her, så blir det galt. Følg den oppskriften! Og nå skal vi vise noen eksempler.

Sekvensen starter med at reglene presenteres uten at elevene har fått prøve dem ut i praksis eller har erfaringer med hvorfor de vil fungere. Det blir derfor en meget programmert innlæring (i motsetning til oppdagende), noe som lærer også er observant på. Han begynner oppramsingen av regler med å fortelle at alle ledd inneholdende tall skal samles på høyre side av likhetstegnet og alle ledd inneholdende x-er skal flyttes over til venstre side av likhetstegnet (2). Når så en elev prøver å utvide skjemaet for likningsløsning ved å spørre et relevant spørsmål om en det er likegyldig hvilken side en samler x-er og tall på (3), leder læreren fokuset bort fra dette spørsmålet. Han vender fokuset mot viktigheten av å bruke likhetstegnet som en sjef i likningen som styrer hvordan en skal finne rett variabel (4). Videre viser han hvordan han ordner ledd som bare inneholder tall på høyre side av likhetstegnet og ledd som inneholder x-er på høyre side av likhetstegnet. Om en flytter et ledd fra en side av likhetstegnet til den andre, må en bytte fortegn. Han gir ingen forklaring av hvorfor en kan gjøre denne operasjonen men fokuserer på at den innprentes da han gjentar ”ved skifte av side bytter vi fortegn” to ganger (5).

Til slutt viser han at en kan trekke sammen x-ene på venstre side av likhetstegnet og tallene på høyre side av likhetstegnet. På denne måten får han fram et entydig tall på høyre side av likhetstegnet og en sum av x-leddene på venstre side av likhetstegnet. Dette gjøres for å finne verdien til variabelen x. Han sier ikke noe om hvordan en finner denne variabelen, men elevene har tidligere jobbet med å finne x i uttrykk som ax = b ved å dividere med a på begge sider av likhetstegnet. Læren formidler videre at dette er en oppskrift som alltid vil fungere om en følger den (9).

Disse setningene er reglene han presenterer på tavla og som elevene skal skrive ned:

A) Alle ledd med x skal flyttes over på venstre side av likhetstegnet.

B) Alle ledd uten x skal flyttes over på høyre side av likhetstegnet.

C) Ved skifte av side, skifter vi fortegn.

D) Vi trekker sammen alle x-ene på venstre side, vi trekker sammen alle tallene på høyre side.

E) Til slutt finner vi en x, altså svaret.

Læreren presenterer her en veldig automatisert måte å løse likninger på. En diskusjon rundt undervisningsformer og ulemper/fordeler ved en slik presentasjon tas ikke her, men da lærer presenterer en så rigid form for å løse likninger kan en spørre seg hvilke elementer av hans kunnskap som har ført til denne presentasjonen. Dette er særlig interessant da han har sagt at han lar kunnskap om elevfeil påvirke undervisningen hans. Presentasjonen hans av ”regler for likningsløsning” inneholder et element der han presenterer at ledd kan flyttes over likhetstegnet om en bytter fortegn. Da dette elementet ikke forklares eller problematiseres kan det forsterke oppfatningen av likhetstegnet som et prosesstegn som får noe til å skje. Om en hadde presentert likningsløsningsmetodikk med at en alltid kan gjøre den samme operasjonen på begge sider av likhetstegnet, ville det antakeligvis ha styrket forståelsen av likhetstegnet som et ekvivalenstegn. Nå skjer det motsatte. Ved å spørre lærer om grunnlag for å presentere denne likningsløsningsmetodikken, vil det være interessant å se om kunnskap om elevfeil er med på å forme undervisningen.

Denne sekvensen er del av lærerens kommentarer om hvorfor han velger å presentere elevene for denne måten å løse likninger på:

373. Intervjuer:	Og alle som hadde løst den likningen rett hadde løst det på den måten der og flere av de som ikke hadde fått det helt til og hadde løst det på den måten de som kanskje hadde en liten regnefeil. Så nesten alle som svarte husket den metoden der.
374. Lærer:	Ja.
375. Intervjuer:	Du gikk jo veldig grundig gjennom dette her. Når de flytter noe over likhetstegnet.
376. Lærer:	Haha. Du oppdaget den?
377. Intervjuer:	Ja og så intervjuet jeg elevene om de forstod hva som skjedde da en flytter over.
378. Lærer:	Nei.

:

:

386: Lærer: Ja og da sier jeg og der er jeg litt over på gyngende grunn for jeg vet at andre lærere er opptatt av at du skal ta bort den treeren men jeg får litt dilemma når jeg kommer til større ting så jeg sier at vi flytter over og jeg lærer dem regelen. Tallene skal over på høyre side og hvis du bytter noe fra venstre til høyre så skal du skifte tegn.

387. Intervjuer: Ja for det er jo veldig interessant siden de løste dette så perfekt nesten alle så det er helt tydelig at dette er en metode som fungerer da.

388. Lærer: Den gjør det men hvis du spør hvorfor den femeren der har blitt positiv så får du ikke et annet svar enn at det er fordi at de har bytta side. Men det kan hende at det er nok. Og så er det de elevene som da er helt der oppe det er fordi den femeren om en skal ha bort den må jeg legge til en femmer der og det er likning og da må jeg legge til en femmer på motsatt side. Men det tror jeg ikke mange vil kunne ta.

389. Intervjuer: Jeg hadde han ene eleven din som du sa var veldig sterk og han kunne heller ikke helt forklare hvorfor det fungerte slik men han kunne bruke kvadratrot på hver side og sa at en kunne gjør det samme på hver side kunne han si men han kunne ikke helt forklare hvorfor en kunne flytte over.

390. Lærer: Nei.

391. Intervjuer: Så du har inntrykk av at de som får behov for det

392. Lærer: De tar det nok etter hvert.

Intervjuer presentere lærer for data fra elevenes løsning av likning og trekker frem lærerens undervisning knyttet til likningsløsning. Intervjuer påpeker at sammenhengen mellom hvordan elevene løste likningen i oppgavesettet og lærerens presentasjon av likningsløsninger er tydelig (373). Lærer kommenterer at dette var et ventet resultat (374). Intervjuer spør om operasjonen med å flytte ledd over likhetstegnet samtidig som en bytter fortegn (375), noe som lærer kommenterer på en slik måte at dette er en måte som han er klar over ikke er formell presentasjon (376). Intervjuer lurer på om lærer tror elevene forstår hvorfor denne måten fungerer (377). Lærer er bevisst på elevene ikke kan forklare hvorfor overflyttingsmetoden fungerer (378). Han kommenterer at han ignorerer andre lærere sin presentasjon om dette emnet, og velger å presentere sin egen (384-386). Læreren er også klar over at elevene sannsynligvis ikke vil kunne forklare hvorfor overflyttingsoperasjonen vil fungere (387), noe som intervjuer bekrefter ut fra elevintervjuene (388). Lærer mener imidlertid at elever som får behov for en bedre og videre oppfatning vil tilegne seg den etter hvert (390-391).

Om en ser nærmere på lærers kommentarer til dette temaet, viser det seg at han bruker kunnskap om elevfeil for å forme undervisningen sin. I dette eksempelet lar han imidlertid elevfeil knyttet til oversikt i utregninger dominere over elevfeil knyttet til likhetstegnet som prosesstegn. Han nevner at elevene ofte roter det til om de skal trekke fra eller legge til ledd på hver side av likhetstegnet. Dermed velger han oversikt og algoritme foran forståelse. Slike dilemmaer er nok ofte en del av en lærers hverdag, en må dermed være klar over fordeler og ulemper ved å bruke ulike presentasjonsformer (Ball et al., 2008). Om de elevene som har misoppfatninger knyttet til likhetstegnet som ekvivalenstegn blir påvirket av denne presentasjonen er usikkert, men lærer mener at de som vil ha behov for forståelse vil tilegne seg denne ved tiden. Elevers oppfatninger er imidlertid vanskelige å endre om en ikke går bevisst inn for det (Brekke, 2002) og slike misoppfatninger vedvarer ofte til voksen alder (ibid).

Av de fire elevene som ble intervjuet kunne ingen forklare hvorfor overflyttingsalgoritmen fungerer. Denne ufullstendige forståelsen hindret imidlertid ikke elevene i å løse likninger med stor grad av suksess. I elevoppgavene løste 20 av de 21 elevene som hadde svart på oppgave 5, en likningsløsningsoppgave, ved å bruke denne metodikken. De som ikke fant rett variabel gjorde dette grunnet feil utregning og ikke på grunn av problemer med å bruke algoritmen. Elevene hadde ikke jobbet spesielt med likninger på nesten et år, så det er tydelig at denne algoritmen hadde gjort et kraftfullt inntrykk og fungerte som et godt verktøy for å løse oppstilte førstegradslikninger. Lærerens vurdering om å presentere algoritmen virker altså hensiktsmessig

Læreren bruker kunnskap om misoppfatninger for å forme og bevisstgjøre seg sin undervisning. Imidlertid eksisterer det elevfeil som ikke er knyttet opp mot misoppfatninger.

Hvilke feil som skal være dominante for å forme undervisning er selvsagt opp til lærer å vurdere. Imidlertid virker det som om elevfeil er en viktig komponent for å forme undervisning. Vurdering av elevfeil vil derfor være en arbeidsoppgave i lærergjerningen for å utvikle kunnskap om elevers misoppfatninger samt elevers evne til å bruke en representasjon på en effektiv måte.

5. Diskusjon

Behandling og møte med elevfeil i matematikk er en stor del av lærerens hverdag. I denne studien har utgangspunktet i hovedsak vært skriftlige elevfeil. Slike elevfeil er når en skriftlig matematisk oppgave er besvart på en utilstrekkelig eller feil måte. For å finne ut hvordan kunnskap om elevfeil relaterer seg til annen undervisningskunnskap i matematikk må en først definere hva kunnskap om elevfeil er. Slik jeg ser det kan kunnskap om elevfeil deles inn i to områder: Den første er å gjenkjenne at en matematisk representasjon er ufullstendig eller ukorrekt. Ufullstendighet og ukorrekthet relateres her i forhold til allmenn objektiv matematisk kunnskap. Å kunne gjenkjenne en feil ut fra disse kriteriene definerer jeg som en allmenn matematisk fagkunnskap (Ball et al., 2008). Den andre delen er å forstå hvorfor eleven har gjort feil, det å inneha en diagnostisk kompetanse (Brekke, 2002; Prediger, 2009). Dette relaterer jeg til spesialisert matematisk kunnskap (Ball et al., 2008).

5. 1. Kunnskap om elevfeil i matematikk – allmenn matematisk kunnskap

En behøver hverken kunnskap om elever eller om undervisning for å konstatere at en elevbesvarelse er utilstrekkelig eller feil. Tradisjonelt har denne måten å vurdere elevfeil på vært den viktigste, da lærers oppgave i vurdering av elevers skriftlige arbeid har vært å gradere om de kan eller ikke kan (Allrø & Skovsmose, 1994; Pehkonen, 2003). Slik kunnskap er imidlertid ikke spesialisert fagkunnskap. Studien tyder på at denne type kunnskap er den sentrale for den aktuelle læreren. Det viktigste er at elevene kommer frem til rett løsning eller svar. Å komme frem til rett løsning på oppgaver er tradisjonelt den viktigste faktoren for å måle om en lykkes i matematikk. Dette gjelder både for lærere og elever (ibid). Å måle om en elev gjør rett eller galt setter i hovedsak krav til lærerens formelle matematiske kompetanse, eller allmenne fagkunnskap (Ball et al., 2008). Studien viser at dette er lærerens første respons for å møte elevfeil. Han sier at elevene blir presentert for rett løsning; enten via gjennomgang av feilen på tavlen (noe denne læreren sier han gjør sjelden i forhold til andre lærere), eller via utdeling av fasit som inneholder rett løsning og fremgangsmåte.

5.2. Kunnskap om elevfeil – spesialisert matematisk kunnskap

Studien viser at lærere også innehar en annen type kunnskap relatert til elevfeil. Denne kunnskapen kan kalles en *diagnostisk matematisk kunnskap* (Brekke, 2002; Prediger, 2009), hvor læreren vurderer fra hvor elevfeil har sitt utspring. Læreren viste hvordan han gjennom to oppgaveeksempler vurderte på hvilket grunnlag elevene hadde gitt en feil besvarelse. Denne vurderingen var noe mer enn bare å identifisere at besvarelsene var feil. Slik kunnskap er særlig nødvendig i yrker som kan relateres til undervisning. Diagnostisk matematisk kunnskap kan derfor knyttes til spesialisert fagkunnskap (Ball et al., 2008). Den diagnostiske kunnskapen setter krav til lærers vurdering om elevers misoppfatninger og grunnlaget for feil de gjør. En slik kunnskap om misoppfatninger stiller krav til kunnskap om elever, deres utvikling av begreper, samt kunnskap om enkeltområder innen matematikkfaget. Om en bruker likhetstegnet som eksempel, er det altså ikke tilstrekkelig for lærer å vurdere om likhetstegnet er brukt på en formelt riktig måte. Han må også vurdere hvorfor det eventuelt ikke er brukt på en formelt riktig måte. Denne kunnskapen kan brukes både i pre- og postfasen vedrørende elevers arbeide rundt et emne. Studien viser at læreren har konkrete meninger om hvilke typer problemer elever vil få med oppgaver før han har blitt presentert for elevenes løsninger. Dette er en prekunnskap som viser at lærer må ha kunnskap om faglig innhold og elever. I postfasen – når elever allerede har begått oppgavefeil, vurderer lærer på hvilket grunnlag disse feilene har oppstått. Denne vurderingen kan således innlemmes i lærerens kunnskap om elevfeil og gi ham et bedre og dypere grunnlag for vurdering i prefasen neste gang tilsvarende oppgavetyper dukker opp.

5.3. Kunnskap om elevfeil relatert til kunnskap om faglig innhold og elever

Studien tyder på at kunnskap om elevfeil er relatert til både allmenn og spesialisert fagkunnskap i matematikk. Kunnskap om elevfeil kan også relateres til UKM- kategorien kunnskap om faglig innhold og elever (ibid). Både den spesialiserte og allmenne fagkunnskapen om elevfeil i matematikk inneholder elementer av kunnskap om faglig innhold og elever. Den allmennfaglige kunnskapen kan fortelle noe om hvilken type oppgaver det er sannsynlig at elever vil få problemer med, men den kan ikke si noe om hvordan problemene har oppstått.

Om en bruker spesialisert fagkunnskap vil en imidlertid ikke bare vite hvilket område problemene oppstår i, men også hvilken type problemer det er snakk om og hvordan det er sannsynlig at elevene har tenkt når de har feilsvar. Kunnskap om hvordan elever utvikler begrepsforståelse (Orton, 2007; Piaget, 1967) er nært knyttet til kunnskap om faglig innhold og elever. Hva læreren bruker denne kunnskapen til er imidlertid relatert til kunnskap om faglig innhold og undervisning.

5.4. Kunnskap om elevfeil relatert til faglig innhold og undervisning

Studien kan tyde på at lærere bruker kunnskap om elevfeil til å forme undervisningen sin. Denne kunnskapen er avhengig av både spesialisert og allmenn fagkunnskap i matematikk. På den ene siden er læreren opptatt av å lære elever en formalisert og korrekt måte å løse matematikkproblemer på. Om læreren vet at et område av matematikken er belastet med hyppige elevfeil, kan han bruke denne allmenne kunnskapen om elever og faglig innhold til å vekte undervisningen sin slik at problemområdene blir grundigere behandlet tidsmessig.

Spesialisert fagkunnskap om elevfeil gir ikke bare konsekvenser for hvor mye en vekter undervisning knyttet til et bestemt område. Slik kunnskap gir også konsekvenser for hvordan en underviser. Om en bruker eksempelet rundt innføring av likningsløsningsalgoritme har læreren tatt et klart valg, og dette valget har et diagnostisk grunnlag. Imidlertid er ikke dette diagnostiske grunnlaget relatert til misoppfatninger knyttet til forståelse av begrepet likhetstegnet. Læreren virker å være klar over at hans presentasjon kan påvirke elevers oppfatning av likhetstegnet. Likevel er det en annen diagnostisk vurdering som veier tyngre, og det er vurderingen av at elever ikke takler mange ledd som kan legges til eller trekkes fra, da de ofte mister oversikten over problemet. Læreren lar her et hierarki av vurderinger knyttet til elevfeil bestemme presentasjonsform. I dette hierarkiet er faren for misoppfatninger mindre verd enn faren for å miste oversikten.

Om hierarkiet av typer elevfeil er likt for alle lærere vites ikke, men intervjuobjektets kommentarer om at andre læreres presentasjon av algoritme for å løse likninger er annerledes, kan tyde på at forskjellige lærere bruker kunnskap om elevfeil på forskjellige måter. Imidlertid kan det innvendes at også andre faktorer påvirker undervisningen, slik som egen skoleerfaring/utdanning, læreplan, skolens ledelse, rammefaktorer knyttet til materiell og elever pr. lærer o.s.v. Studien viser at lærere tar konsekvenser av elevfeil inn i egen undervisning og at de har spesialiserte fagkunnskaper om elevfeil. Hvordan disse kunnskapen oppstår, finnes det lite informasjon om i studien. Det kan virke ut fra intervjuet at læreren ikke er særlig opptatt av å høre på elevers forklaring om hvorfor de har gjort feil. Likevel har han kunnskaper om elevfeil som stemmer godt overens med teori om elevers misoppfatninger knyttet til likhetstegnet (Behr et al., 1980; Kieran, 1981, 1990). Studien svarer dessverre ikke på hvordan han har tilegnet seg denne kunnskapen.

5.5. Kunnskap om elevfeil – hvordan er disse relatert til Michigan-miljøet sin definisjon av undervisningsoppgaver for matematikklærere?

Michigan-miljøet fokuserer mye på den spesialiserte kunnskapen til lærere (Ball et al., 2001, 2005, 2008). Som jeg har pekt på tidligere i diskusjonen er spesialisert undervisningskunnskap nært knyttet til diagnostisk kunnskap i matematikk. Michigan-miljøet belyser også hvordan lærer må bruke sin spesialiserte kunnskap for å finne grunnlaget for elevfeil (ibid). Imidlertid blir ikke denne kunnskapen listet opp blant lærerens undervisningsoppgaver som er;

- Presentere matematiske ideer
- Respondere på elevenes "hvorfor"-spørsmål
- Finne eksempel for å få frem et bestemt matematisk poeng
- Være klar over hva som involveres når en bestemt fremstilling tas i bruk
- Knytte representasjoner til underliggende ideer og til andre representasjoner
- Knytte emnet en underviser i, til emner fra tidligere år, eller til kommende emner
- Forklare matematiske mål og hensikter til foreldre
- Vurdere og tilpasse det matematiske innholdet i lærebøker
- Endre oppgaver slik at de blir mer eller mindre utfordrende
- Forklare om elevenes påstander er rimelige (ofte raskt)
- Gi, eller evaluere, matematiske forklaringer
- Velge og utvikle gode definisjoner
- Bruke matematisk notasjon og språk, og bedømme bruken
- Stille fruktbare matematiske spørsmål
- Velge ut hensiktsmessige representasjoner
- Undersøke likheter

(Ball et al., 2008, s. 4, oversatt av Fauskanger et al., 2010)

Undervisningsoppgaven ”Gi, eller evaluere, matematiske forklaringer” kan relateres til vurdering av elevfeil da evaluering av en besvarelse er sentralt i kunnskap knyttet til elevfeil. En slik evaluering er også sentral for å ”Forklare om elevenes påstander er rimelige”. Om disse to kategoriene er dekkende for lærers kunnskaper om elevfeil, er imidlertid usikkert. Jeg savner en kategori for hvordan lærer trekker kunnskap fra elevers misoppfatninger. Som vist i studien gjøres dette av læreren som var informant. Han konverterer til og med denne kunnskapen til undervisning. Når han underviser ut fra et slikt grunnlag representerer han en annen undervisningsoppgave; ”Være klar over hva som involveres når en bestemt fremstilling tas i bruk”. Kunnskap om elevfeil, og ikke minst kunnskap hentet fra elevfeil kunne muligens vært en kategori knyttet til undervisningsoppgaver i matematikk?

6. Konklusjon

Gjennom studien min har jeg prøvd å belyse hvordan kunnskap om elevfeil er relatert til annen undervisningskunnskap i matematikk.

Kunnskap om elevfeil er en egenskap som antakeligvis alle lærere ser som en del av sin yrkeskunnskap. Da matematikk er et fagområde som er preget av regler bygget på grunnsteiner/aksiomer, er feil enkelt å identifisere i forhold til en allmenn fagkunnskap i matematikk. Studien viser imidlertid at kunnskap om elevfeil kan innebære noe mer enn bare å gradere en elevs besvarelse som ”rett” eller ”gal”.

Hvordan kunnskap om elevfeil relateres til annen undervisningskunnskap i matematikk avhenger av hvilket syn en har på elevfeil. Studien min viser at lærere kan behandle elevfeil ut fra to utgangspunkter. Om elevfeil brukes til å gradere elevbesvarelser som rett eller galt besvart, vil en slik undervisningskunnskap bare være en allmenn fagkunnskap i matematikk. Ved et mer konstruktivistisk syn på elevfeil må imidlertid denne kunnskapen relateres til spesialisert fagkunnskap i matematikk. Det er denne spesialiserte fagkunnskapen som etter mitt syn gjør matematikklærere til matematikklærere. De har en annen kunnskap relatert til faget enn menigmann har. Ved å belyse enkeltområder, som elevfeil, knyttet til denne spesialiserte fagkunnskapen vil en kunne skape en tydeligere forståelse av hva det vil si å være matematikklærer.

Studien viser også at kunnskap om et begrepsområde som likhetstegnet kan erverves gjennom litteratur. Det er relasjon mellom informantens vurderinger av elevfeil og forskning om misoppfatninger knyttet til likhetstegnet. I tillegg vil lærers egenskaper som forsker være viktig for å tilegne seg kunnskap om elevfeil. Det er tilegningen av kunnskap og hvilken måte dette skal gjøres på som jeg i hovedsak savner som en definert undervisningsoppgave i matematikk hos Michigan-miljøet.

Elevfeil vil fortsette å være en viktig del av hva en matematikklærer møter i løpet av undervisningshverdagen. Å utarbeide kunnskap knyttet til elevfeil virker derfor som et hensiktsmessig fokus ved utdanning og videreutdanning av lærere.

6.1. Forslag til videre forskning

Om en tenker seg at diagnostisk kompetanse er en viktig del av kunnskapen om elevfeil i matematikk, frembringer studien et sentralt spørsmål: Hvordan utvikler læreren diagnostisk kompetanse? Læreren i studien hadde tydeligvis en slik kompetanse, men hadde han fått kunnskap om elevers misoppfatninger fra egen erfaring eller fra litteraturen? Om han hadde den fra egen erfaring; hvordan tilegnet han seg kunnskapen? Gjennom elevsamtaler, noe Ball et al., (2005) mener er for tidkrevende, eller gjennom annen uidentifisert aktivitet? Hans kunnskaper om elevfeil stemmer i alle fall godt med forskning om elevers misoppfatninger knyttet til likhetstegnet. Det kan derfor virke hensiktsmessig å designe informasjon knyttet til misoppfatninger rundt enkeltbegreper, for bruk i lærerutdanning, noe også Ball et al., (2001) foreslår. Selv om denne studien er sentrert rundt en lærer, kan den indikere at det hadde vært interessant å forske nærere på hvilken kunnskap om elevfeil norske lærere har, og hvordan denne kunnskapen oppstår. Å komponere informasjonsenheter om elevers misoppfatninger knyttet til enkeltbegreper ville også vært en interessant forskningsoppgave.

7. Litteraturliste

Allrø, H., & Skovsmose, O. (1994). *On the right track*. Institute for electronic Systems, Aalborg University

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 111-129

Ball, D. L., Lubienski S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers Mathematical Knowledge. *Handbook of research on teaching*. (433-456). New York: Machmillian

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching – Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator* (Fall 2005), 14-17+20-22+43-46

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching - What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-16

Brekke, G., Grønmo, L.S., & Rosèn, B. (2000). *Kartlegging av matematikkforståelse - Veiledning til algebra F, H og J.* Nasjonalt læremiddelsenter (NSL)

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståelse – Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Læringssenteret (LS)

Bø, I., & Helle, L. (2003). *Pedagogisk ordbok - Praktisk oppslagsverk i pedagogikk, psykologi og sosiologi.* Oslo: Universitetsforlaget

Cajori, F. (1897). *A History of Mathematical Notations V1: Notations in Elementary Mathematics.* Milton Keynes: Lightning Source UK Ltd.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C-P., & Loef, M. (1989). Using Knowledge of Children`s Mathematics Thinking in Classroom Teaching: An Experimental Study. *American Educational Research Journal*, 26(4), 499-531

Carraher, D. W., & Schlieman, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. I *Handbook of research in mathematics education*. (669-705) Greenwich: Information Age Publishing

Chazan, D., Yerushalmy, M., & Leikin, R. (2008). An analytic conception of equation and teachers` views of school algebra. *The journal of Mathematical Behavior,* 27, 87-100

Delaney, S., Ball, D. L., Hill, H. C., Schilling, S. G., & Zopf, D. (2008) "Mathematical knowledge for teaching": adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of MathematicsTeacher Education,* 11(3), 171-197

Fauskanger, J., Bjuland, R., & Mosvold, R. (2010). *"Eg kan jo multiplikasjon, men ka ska eg gjørr?" - det utfordrende undervisningsarbeidet i matematikk*. Upublisert manuskript.

Gilje, N., & Grime, H. (1993). *Samfunnsvitenskapenes forutsetninger – Innføring i samfunnsvitenskapenes vitenskapsfilosofi.* Oslo: Universitetsforlaget AS

Grevholm, B. (2007). Om å bruke testdata i undervisning og læring av matematikk. I Jaworski, J., & Fuglestad, A.B. (Red.), *Læringsfellesskap i matematikk,* Caspar Forlag AS

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics – an introduction*. USA: Addison-Wesley Educational Publishers

KD (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet. Midlertidig utgave juni 2006*. Oslo: Kunnskapsdepartementet

Kieran, C. (1981). *Concepts associated with the equality symbol.* Dordrecht, Holland and Boston: D. Reidel Publishing

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. *ICMI Study Series: Mathematics and cognition,* 96 – 112, London: Cambridge University Press

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school trough college levels – building meaning for symbols and their manipulation. I Lester, F. K. (Red.), *Second handbook of research on mathematics and learning,* 707-762, Charlotte: Information Age Publishing

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education 2006,* 37(4), 297-312

Kristensen, M. S.; Tyskerud, A. (2009). *Hvordan introduseres og oppfattes begrepet variabel i en likning?* Upublisert manuskript

Kvale, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Mehan, H. (1979). *Learning lessons.* Massachusetts: Harvard University Press

Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Third graders`developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30,* 61-80

Orton, A. (2004). *Learning mathematics – Issues, theory and classroom practice*. London: Continuum

Pehkonen, E. (2003), Lærere og elevers oppfatninger som en skjult faktor i matematikkundervisningen. I Grevholm, B. (Red.), *Matematikk for skolen.* Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS

Piaget, J. (1967). *The child`s conception of the world.* New Jersey: Littlefield, Adams & Co

Prediger, S. (2009). *How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of the equal sign,* Springer Science+Business Media B.V. 2009, publisert online 27.august 2009

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14

Silverman, D. (2010). *Doing qualitative research*. London: SAGE Publications Ltd.

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse – en innføring i kvalitativ metode*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS

Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. Boston: Allyn and Bacon

Widerberg, K. (2005). *Historien om et kvalitativt forskningsprosjekt*, Oslo: Universitetsforlaget.

8. Vedlegg

8.1. Vedlegg 1 – elevoppgaver

Oppgaver 8. februar 2010

Navn:________________________________

Oppgave 1: Sett rett tall på strekene:	
q) 77 + 77 = _____	y) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = _____
r) _____ = 120 – 60	z) _________ = 1999 + 21999
s) 27 = _____ + 12	æ) _____ : 4 = 7
t) _____ – 32 = 35	ø) 100 + _____ = 172
u) 146 – 77 = _____	å) _____ = 6 – 5 + 4 – 3
v) 5 · _____ = 30	aa) 24 = ____ · 6
w) 20 – 15 + 10 – 5 = _____	bb) 200 = _____ – 100
x) _____ = 17 + 18 + 19	cc) 10 = 20 : _____

Oppgave 2: Sett rett tall på strekene:	**Oppgave 3 : Sett rett bokstavuttrykk på strekene:**
a) 10 – 7 = _____ + 2	a) 2a + 3a = _____
b) 55 + _____ = 100 – 10	b) _____ = 2x + 2x
c) _____ – 17 = 7 + 10	c) 10b – 6b = _____ + 2b
d) 100 – 50 = _____ : 2	d) 7a + _____ = b + b + 7a
e) _____ · 6 = 18 + 18	e) _____ - 5b = 2a + 2a + 5b - _____
f) 13 + 13 = 10 + _____	
g) 11 + 20 – 6 = 4 + _____ – 2	

Oppgave 4:

Lag et regnestykke ut av denne teksten. Løs regnestykket. Du behøver ikke bruke tekst i regnestykket.

I en skog blir det plantet 425 nye trær.
Noen år senere blir 217 trær hogd ned.
Skogen inneholder da 1063 trær.
Hvor mange trær var det i skogen før de nye trærne ble plantet?

Skriv her:

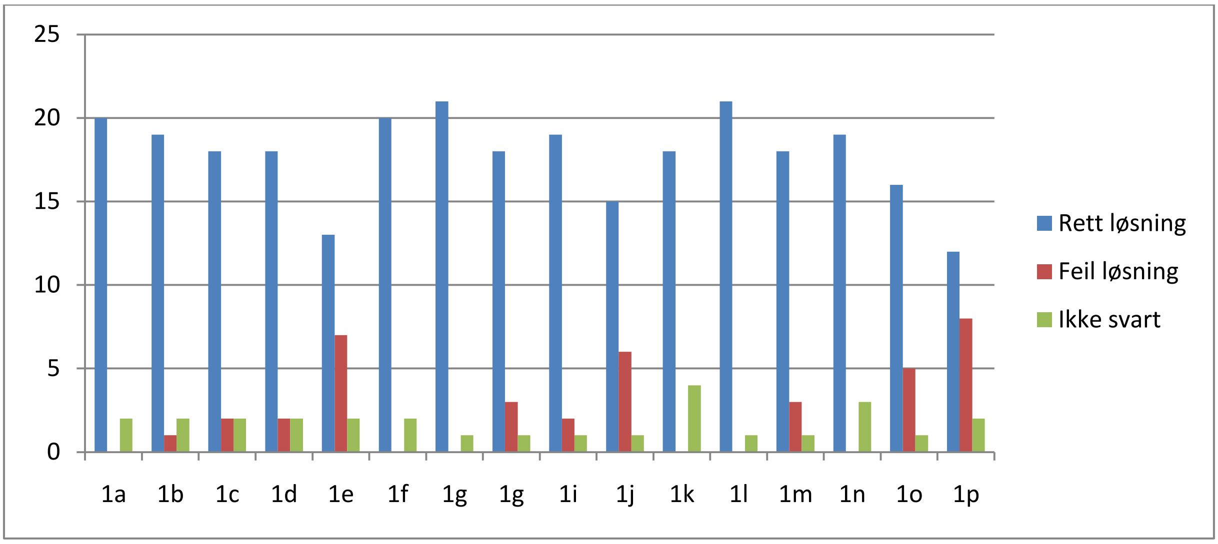
Oppgave 5: Løs likningen. Vis utregning:

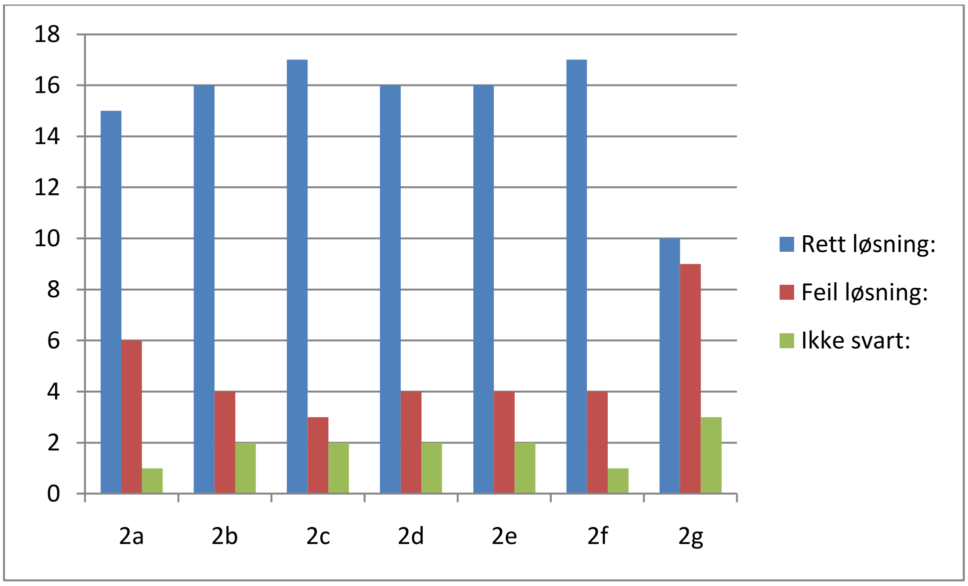
Finn verdien av x:

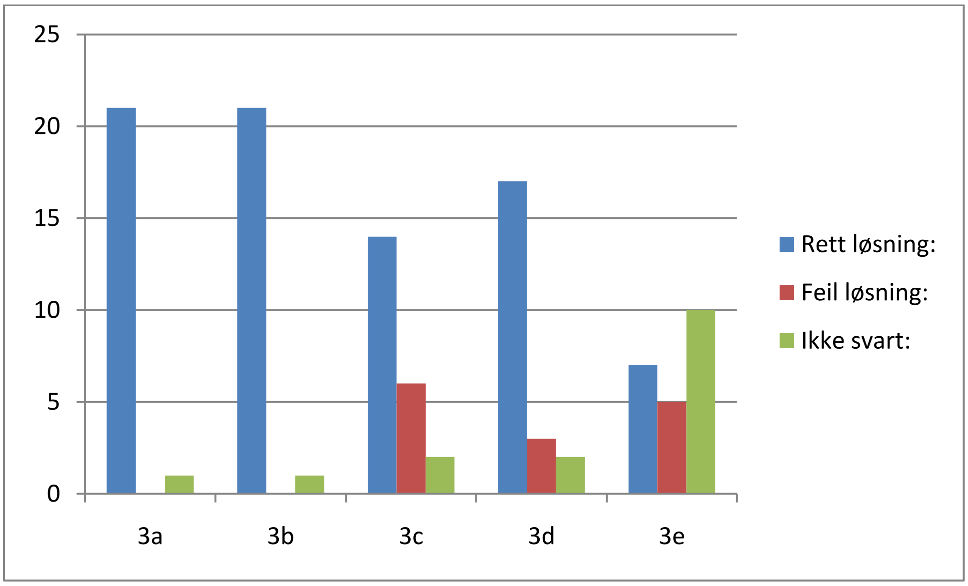
$$x + 3x - 5 = 2x + 7$$

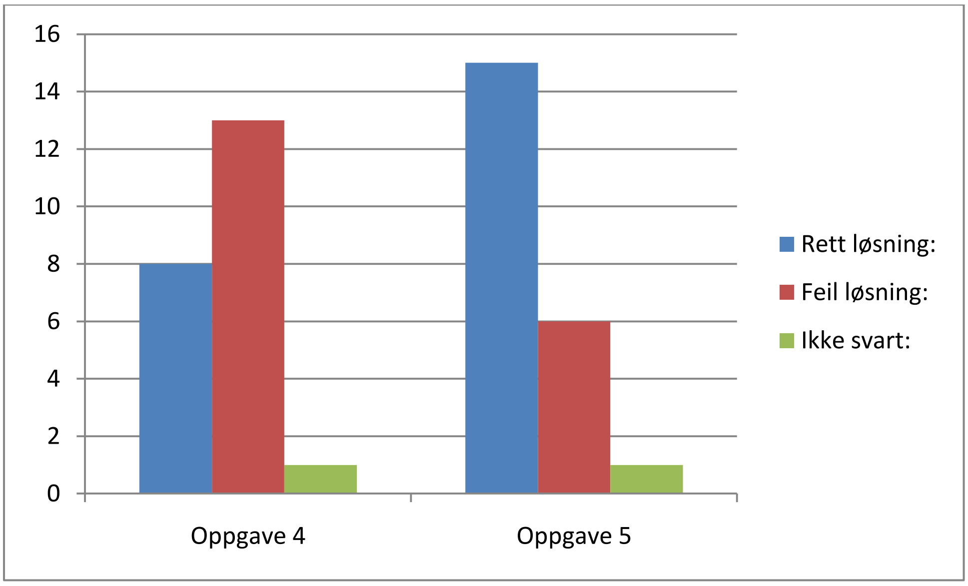
8.2. Vedlegg 2 – analyse av elevoppgaver

Utvelgelse av elevoppgaver for analyse:









Hensikten med elevoppgavene var å finne reelle elevfeil som kunne relateres til likhetstegnet. Først ble oppgaver som hadde minst 5 feilsvar identifisert. Oppgavene som oppfyller dette kriteriet er: 1e, 1j, 1o, 1p, 2a, 2g, 3c, 3e, 4 og 5. Videre gjennomgang av disse oppgavene har som hensikt å identifisere oppgaver med feil som kan knyttes til oppfatning av likhetstegnet. Det siste kriteriet er å finne oppgaver hvor 2 eller flere elever hadde samme feil, slik at feilen kan defineres som en generell feil.

Oppgave 1e: 146 – 77 = ___

Vurdering: Feilsvar relateres til problemer med tierovergang.

Oppgave 1j: ____ = 1999 + 21999

Vurdering: Feilsvar relateres til problemer med tierovergang og posisjonssystem.

Oppgave 1o: 200 = ___ - 100

Vurdering: Feilsvar som kan relatere til forståelse av likhetstegnet.
4 elever hadde svart 200 = 100 – 100.
Feilen vurderes som at elevene leser 200 – 100 blir 100. De bruker operasjonen som subtraksjonstegnet formidler, finner differansen mellom de to tallene som er i oppgaven og ignorerer likhetstegnet som ekvivalenstegn.

Oppgave 1p: 10 = 20 : ___

Vurdering: Feilsvar som kan knyttes til forståelse av likhetstegnet.
Fem elever hadde svart 10 = 20 : 200
Denne feilen vurderes som om elevene er fokusert på at venstre side av likhetstegnet har et entydig "svar". Likhetstegnet brukes som et prosesstegn da elevene leser fra venstre mot høyre; "*to hundre delt på tjue blir ti.*"

Oppgave 2a: 10 – 7 = ___ + 2

Vurdering: Eksisterer feilsvar som kan knyttes til forståelse av likhetstegnet.
Fire elever hadde svart 10 – 7 = 3 + 2
Denne feilen vurderes som at elevene bruker likhetstegnet som et prosesstegn. De noterer "svaret" av 10 – 7 etter likhetstegnet, og ignorerer at det er et ledd til på høyre side av likhetstegnet

Oppgave 2g: 11 + 20 – 6 = 4 + ___ – 2

Vurdering: Feilsvar som tyder på manglende evne til å holde styr på flere ledd ved balansering av uttrykket.

Oppgave 3c: 10b – 6b = ___ + 2b

Vurdering: Eksisterer feilsvar som kan knyttes til forståelsen av likhetstegnet.
Fire elever hadde svart 10b – 6b = 4b + 2b.
Denne feilen vurderes som at elevene bruker likhetstegnet som et prosesstegn. De noterer ”svaret” av 10b – 6b etter likhetstegnet, og ignorerer at det er et ledd til på høyre side av likhetstegnet

Oppgave 3e: ___ - 5b = 2a + 2a + 5b – ___

Vurdering: Feilsvar knyttet til problemer med å holde styr på flere ledd for å balansere uttrykket. Eksisterer feil som kan knyttes til feiloppfatning av likhetstegnet, men ingen av disse like.

Oppgave 4:”I en skog blir det plantet 425 nye trær. Noen år senere blir 217 trær hogd ned. Skogen inneholder da 1063 trær. Hvor mange trær var det i skogen før de nye trærne ble plantet?”

Vurdering: Feilsvar tyder først og fremst på problemer med å transformere tekst til rett matematikkuttrykk, samt å bestemme hvilke verdier som skal adderes eller subtraheresr.

Oppgave 5: Finn verdien av x: x + 3x – 5 = 2x + 7

Vurdering: Feilsvar relateres stort sett til feil i addering eller ved divisjon. Alle elevene som gjorde oppgaven løste den ved å bruke overflyttingsalgoritmen

Oppgavene tyder på at flere elever har problemer med å bruke likhetstegnet som et ekvivalenstegn. Flere av feilene kan relateres til at elevene ser likhetstegnet som et prosesstegn, et tegn som får noe til å skje Denne vurderingen underbygges av elevintervjuene hvor to av de fire intervjuete elevene mener at likhetstegnets oppgave er å gi et svar.

8.3. Vedlegg 3 – intervjuguide for elevintervjuene

Intervju 1 – elev 1

- Hva betyr likhetstegnet i et mattestykke?

- Kan du løse denne likningen? Det er den samme likningen som du løste helt riktig på mandag. Fortell hvordan du tenker og hva du gjør underveis.

- På oppgave 4 (viser oppgaven) gjør du det samme som du gjorde underveis når du løste likningen: Du flytter tall over likhetstegnet, og så skifter du fortegn. Hvorfor kan du gjøre dette?

Intervju 2 – elev 2

- Hva betyr likhetstegnet i et mattestykke?

- Kan du løse denne likningen? Det er den samme likningen som du løste helt riktig på mandag. Fortell hvordan du tenker og hva du gjør underveis.

- Hvorfor kan du flytte over likhetstegnet og skifte fortegn?

- På oppgave 4 (viser oppgaven) skriver du 1063 + 217 = 1280 – 425 = 855. Forstår godt hvorfor du har gjort det, og du har kommet frem til rett svar. Kan du bruke likhetstegnet på denne måten? Hvorfor/hvorfor ikke?

- Oppgave 1o skriver du 200 = 100 - 100. Stemmer dette? Hvordan tenkte du?

- Oppgave 1p skriver du 10 = 20 : 200. Stemmer dette? Hvordan tenkte du?

Intervju 3 – elev 3

- Hva betyr likhetstegnet i et mattestykke?
- Kan du løse denne likningen? Det er den samme likningen som du løste helt riktig på mandag. Fortell hvordan du tenker og hva du gjør underveis.
- Hvorfor kan du flytte et tall over likhetstegnet og skifte fortegn?
- Oppgave 1p skriver du 10 = 20 : 200. Kan du forklare hvordan du tenker?
- Oppgave 4; kan du se på utregningen? Er det noen annen måte du kunne gjort det på?

Intervju 4 – elev 3

- Hva betyr likhetstegnet i et mattestykke?
- Kan du løse denne likningen? Det er den samme likningen som du løste på mandag. Fortell hvordan du tenker og hva du gjør underveis.
- Hvorfor kan du flytte et tall over likhetstegnet og skifte fortegn?
- Oppgave 2g løser du med 11 + 20 – 6 = 4 + <u>11</u> – 2. Kan du se om det stemmer. Hvordan tenker du om likhetstegnet? Hva gjør det?

8.4. Vedlegg 4 – intervjuguide for lærerintervjuet

Lærerintervju:

Bakgrunnen for dette intervjuet er at jeg ønsker å finne ut mer om hvilke matematiske kunnskaper en lærer behøver for undervisning. Du virker som en kompetent og erfaren lærer, med god innsikt i matematikkfaget. Er derfor interessant å høre om noen av dine betraktninger og arbeidsmåter i matematikk.

Vi har en del data om undervisnings og utdanningsbakgrunnen din fra tidligere intervju, så bruker ikke tid på det her.

Jeg har en del spørsmål, hvor noen er relatert til oppgavene elevene gjorde for 3 uker siden, og noen er relatert til observasjonen av undervisningen din forrige vår.

Del 1: Elevfeil

Hvordan registrerer du/skolen elevproblemer/misoppfatninger i matematikk?

Hva slags tiltak iverksettes for å hjelpe elever som har utilstrekkelig forståelse?

I denne studien har jeg fokusert særlig på hvordan elevene oppfatter likhetstegnet. I fjor når du gjennomgikk løsning for likning uttalte du at ”nå skal det ikke bare være svaret som kommer etter likhetstegnet, slik dere er vant til”. Har du en oppfatting av at elevene har mangelfull oppfatning av hvordan dette symbolet fungerer?

Hva slags misoppfatninger eksisterer på dette området når dere overtar elevene? Blir disse misoppfatningene oppfanget, eller regner dere med at elevene har dem fra tidligere i skoleløpet?

Hvilke av oppgavene fra oppgavesettet ser du for deg at elevene vil få problemer med (læreren har fått se på disse på forhånd). Hvilke typer feil/misoppfatninger tror du de vil ha?

Presenterer statistikk over oppgavene elevene løste, ser om det er overraskende feil (vedlegg 1)

Her er to eksempler på feil som mange hadde ved løsning av oppgavesettet (viser vedlegg 2):

10 = 20 : ____

10 = 20 : 200

Og

10 – 7 = ___ + 2

10 – 7 = 3 + 2

Hvordan tror du elevene har tenkt?

Hvordan ville du hjulpet elever med slike konkrete feil? Ville du hjulpet forskjellige elever på forskjellige måter?

Del 2: Presentasjon av stoff:

Når du presentere nytt stoff;

Hva styrer innholdet i presentasjonen? (læreplan, lærebok, tidligere erfaring, egen skolegang, kollegaveiledning)

Hvordan presenterer du nytt stoff i matematikk?

Har du forskjellige metoder fra emne til emne, eller er det stort sett lik metode?

Presenter du det samme stoffet på lik måte for ulike grupper av elever?

Da dere arbeidet med likninger i fjor hadde du en veldig tydelig progresjon i hvordan du presenterte dette. Først trakk dere sammen bokstavuttrykk, deretter presenterte du hvordan en variabel kan stå for flere forskjellige verdier, for så å gå grundig gjennom en algoritme for å finne variabelen i en likning. I denne algoritmen for å løse likning fokuserte du på å få samlet x-ene på venstresiden og tallene på høyresiden av likhetstegnet. Du forklarte ikke hvorfor du kunne gjøre det, men algoritmen fungerer jo. Elevene sine likningsbesvarelser i oppgavesettet. tyder og på at denne metoden fungerer veldig bra for dem, selv om de intervjuene ikke kunne forklare matematisk hvorfor de kunne foreta denne overflyttingen. De fulgte metoden, og hele 15 av 22 fant rett variabel Hvilke fordeler ser du ved å lære elevene en slik delvis sannhet? Finnes det ulemper og utfordringer ved en slik innlæring?

Når er det riktig å lære en algoritme, når er det riktig å få en grunnforståelse?

Når du så underviser i det emnet som i eksempelet her, hvor har du denne undervisningsprogresjonen og innholdet i undervisningen fra?

8.5. Vedlegg 5 - transkripsjonsnøkler

Transkripsjonsnøkkel for intervjuer:

Transkripsjonsnøkkelen angir innhold for hver del av transkriberingsskjemaet.

Dag: Angir hvilken dato intervjuet ble foretatt. .

Nr.	Tid	Hvem	Diskurs	Kommentar
Angir hvilket element i observasjonssekvensen som blir gjengitt. Elementene følger kronologisk	Viser hvor langt ut i observasjonssekvensen det gjengitte observasjonselementet starter.	Viser hvem som sier eller gjør noe i observasjonselementet. Lærer kalles L.	Gjengir eksakt hva som blir sagt i observasjonselementet.	Om det er noe som ikke fremkommer av diskursen eller gestikuleringen som er verd å ha med seg, kommenteres det her. Dette gjelder også gestikulering, skriftlige forklaringer og henvisninger til skriftlig materiale

Transkripsjonsnøkkel for observasjon av undervisning:

Transkripsjonsnøkkelen angir innhold for hver del av transkriberingsskjemaet.

Dag: Angir hvilken dato observasjonen ble foretatt. Time: Angir hvilken time som ble observert.

Nr.	Tid	Hvem	Diskurs	Gestikulering	Kommentar
Angir hvilket element i observasjonssekvensen som blir gjengitt. Elementene følger kronologisk	Viser hvor langt ut i observasjonssekvensen det gjengitte observasjonselementet starter.	Viser hvem som sier eller gjør noe i observasjonselementet. Om det er udefinerbare elever som snakker, kalles de E1, E2…. Etter hvilken rekkefølge de opptrer. Om det definerte elever, kalles disse ved fiktive navn. Lærer kalles L.	Gjengir eksakt hva som blir sagt i observasjonselementet.	Gjengir interessant gestikulering. Herunder skriving på tavle og innholdet til hva som blir skrevet på tavla.	Om det er noe som ikke fremkommer av diskursen eller gestikuleringen som er verd å ha med seg, kommenteres det her. Dette kan f.eks være å formidle en stemning eller et toneleie.