Universitetet i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGÅVE

Studieprogram: Master i matematikkdidaktikk	Vårsemesteret, 2013 Open
Forfattar: Eilen Refvik	………………………………………… (signatur forfattar)

Rettleiar:
Reidar Mosvold

Tittel på masteroppgåva:
Lærarar si oppfatning om deira undervisningskunnskap knyta til ulike representasjonar av brøk.

Engelsk tittel:
Teachers' beliefs about their mathematical knowledge for teaching related to various representations of fractions.

Emneord: Lærarar sine oppfatningar Undervisningskunnskap i matematikk (UKM) Algoritme Representasjon av brøk Illustrasjon	Sidetal: 50 + vedlegg/anna: 72 Stavanger, 8. mai 2013

Forord

Våren 2010 var eg heime i permisjon med born nummer to og fekk nyss i at det var nokre arbeidskameratar som hadde søkt på studiet Master i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger. Det syns eg høyrdes spanande ut. Eg snakka ikkje så mykje med dei andre, men laga meg eit bilete om at dette var eit matematikkurs som skulle gå over tre år nokre kveldar ei gong i blant. Og på det grunnlaget la eg inn ein søknad til studiet – med eit mål om å bli ein endå betre lærar i matematikk. Då eg var tilsett i ei 100 % stilling som adjunkt, forstod eg at eg skulle krysse av for «deltid». Eg er usikker på kor mykje som kan skuldast korleis eg er som person eller grad av ammetåke på dette tidspunktet, men det kan synast rimeleg klart at eg visste lite om kva eg gjekk til.

Etter å ha følgt studiet i to år var eg på veg ut i ein ny permisjon – no med born nummer tre. Eg hadde lagt bak meg to travle år med ein familie i vekst, full jobb og mykje arbeid med studiane på kveldstid. Eg såg då moglegheita til å utnytte den siste permisjonen – med ein mindre ting å tenkje på – til å få fullført studiet. Eg søkte meg over som heiltidsstudent, og denne studien utgjer den avsluttande masteroppgåva mi.

Arbeidet med oppgåva har vore krevjande, men lærerikt. Dei regelfaste møta med den fagleg dyktige og positive rettleiaren min, Reidar Mosvold, har gjort at eg til ei kvar tid har visst godt kva arbeid som måtte gjerast. Dersom det skulle vere noko eg har lurt på utanom møta, har Reidar Mosvold heile tida vore tilgjengeleg for å svare spørsmål og hjelpe meg vidare.

Eg ynskte å oppnå ein større kunnskap om kva for oppfatningar lærarar har kring den undervisningskunnskapen dei treng når det gjeld representasjon av brøk, og håpa samtidig å kunne kaste lys over noko nytt og interessant for dette forskingsfeltet.

Så etter tre år med mykje kveldsarbeid – med langt fleire oppmøte på UiS enn kva eg fyrst hadde ei oppfatning om – vil eg med dette takke for all støtte frå ein snill familie som har latt meg vere i fred på kveldane, forelesarar, kollokviegruppa og Reidar Mosvold.

Eilen Refvik
Universitetet i Stavanger
8. mai 2013

Samandrag

Denne masteroppgåva er eit resultat av ein kvalitativ studie av eksisterande empirisk baserte data frå eit større prosjekt ved Universitetet i Stavanger som fokuserer på lærarar sin undervisningskunnskap i matematikk (UKM) og deira samsvarande oppfatning kring UKM. Dei dataa eg har nytta meg av er teke ut i frå 22 lærarar sine svar på to brøkoppgåver med tilhøyrande skriftlege refleksjonar, i tillegg til transkripsjonar frå seks fokusgruppeintervju med dei same lærarane. Målet mitt var å finne ut kva for oppfatningar lærarar har om den kunnskapen dei treng i undervisninga knyta til ulike representasjonar av brøk.

For å få fatt i desse oppfatningane har eg tolka det lærarane har skrive, uttalt, sagt at dei tenkjer, meinte, handla og gjort, som om det er ein fornuftig samanheng mellom oppfatningane og undervisningspraksisen deira. I analysen av transkripsjonane og dei skriftlege refleksjonane har eg hatt fokus på ulike typar kunnskap om matematikkundervisning. Vidare fokus vart retta mot følgjande tre kategoriar: Oppfatningar kring bruken av algoritmar, kva representasjonar av brøk det kan sjå ut som at lærarane helst nyttar og til slutt korleis lærarane uttaler at dei illustrerer dette for elevane. Desse oppfatningane har eg undersøkt og vidare diskutert opp i mot det som gjeldande læreplan og lærebøker fokuserer på.

Studien syner at lærarane har tydelege oppfatningar om den kunnskapen dei treng i undervisninga knyta til ulike representasjonar av brøk; dei har klare meiningar om verdien av ei innhaldsfokusert matematikkundervisning med vekt på forståing, og ser på læring av matematikk som noko elevane aktivt må konstruere ei forståing av. Lærarane vil unngå at elevane puggar ein algoritme utan å forstå kvifor den kan nyttast, og ynskjer heller å leggje til rette for at elevane skal tore å syne korleis dei tenkjer og korleis dei arbeider seg fram til eit svar. Lærarane ser verdien av at ein lærar skal kunne forstå og tolke eigne elevar si tenking, og å kunne finne ut om ein framgangsmåte gjeld generelt. Lærarane syner ei oppfatning om at det er viktig å kunne arbeide med ulike representasjonar av brøk for å unngå at brøk berre vert knyta til ei representasjonsform. Vidare uttaler dei fleste at dei syns det er viktig å illustrere brøkar for elevane der hovudfunksjonen er å byggje opp under forståinga – både for å kunne sjå for seg storleikane ved hjelp av teikningar på tavla eller konkretar, og for å knyte det opp mot kvardagen for handgripeleg å sjå kva som ligg bak tala.

I fleire utsegner kjem det fram at lærarane sjølv er usikre på ulike representasjonar av brøk. Då er det naturleg at dei vil støtte seg til lærebøkene i undervisninga. Måten ulike emne vert arbeidd med der vil då ha mykje å bety for korleis dette vert presentert for elevane. Etter å ha sett på korleis gonging, deling og brøk vert introdusert og vidare arbeidd med i lærebøkene, så kan det tyde på at forståinga for desse emna heng mykje i saman. Måten lærebøkene syner representasjon av brøk, korleis dei introduserer gonge – og seinare multiplikasjon – kan tyde på at mange elevar kan falle av undervegs og ikkje forstå brøkomgrepet og rekneoperasjonane. I tillegg kan måten lærebøkene arbeider med delings- og målingsdivisjon gjere det vere vanskeleg å hjelpe elevane i den vanskelege overgangen frå gjentatt subtraksjon til å kunne forstå bakgrunnen for algoritmar kring divisjon med brøk.

Innhaldsliste

1.0 Innleiing

Lærarar er ein viktig faktor i forhold til kvaliteten i skulen og for elevane sine prestasjonar. Det har vore vanleg å tenkje at dersom lærarane sjølv er flinke i matematikk, så vil undervisninga deira òg bli god, og elevane vil få eit godt læringsutbytte. Shulman (1986) meinte at undervisning handla om meir enn fagleg kompetente lærarar – han trakk fram deira fagdidaktiske kunnskap (Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010). Forskarar i USA har teke dette vidare og i Noreg er det òg blitt meir fokus på lærarar sin undervisningskunnskap og kva den har å seie for norske elevar sine prestasjonar. Det er gjort ein del forsking på dette og kome mange forslag til kva kunnskap lærarar bør ha (til dømes, Ball & Hill, 2008), men det er ikkje så mange som har sett på kva lærarane sjølv meiner dei må ha av kunnskap.

Lærarar på ungdomstrinnet og i den vidaregåande skulen gir tilbakemeldingar om at elevar slit med brøkrekning på ulike nivå; elevane har lita forståing for både rekneoperasjonane og brøkomgrepet (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Som lærar har eg erfart at mange foreldre seier dei slit med å hjelpe borna sine med leksene når emnet er brøk fordi dei har gløymt korleis dei sjølv gjorde dette. Det er nok mykje som kan spele inn når ein skal arbeide med brøk. Brøk kan verte brukt i mange ulike samanhengar, og det kan vere ein av grunnane til mange slit med emnet (Breiteig & Venheim, 1998). Lærarane har ulik fagdidaktisk kunnskap og ikkje alle vil ha likt syn på matematikk (jf. Beswick, 2012). Vidare vil deira tilnærmingsmåtar til brøk òg vere ulike. For mange vil nok type læreverk spele mykje inn på korleis ein vel å arbeide med brøkemnet, og i tillegg er det ulike måtar å tolke læreplanen på. Mykje av dette kan knytast opp til korleis brøk vert representert i undervisninga.

Lærarane sin bruk av algoritmar, kva representasjonar av brøk dei helst nyttar og korleis dei illustrerer dette for elevane kan nok spele mykje inn for forståinga av brøk. Dei enkelte lærebøkene i matematikk syner ulike idear om korleis brøkemnet skal verte introdusert og vidare korleis det vert lagt opp til at elevane sin brøkkompetanse skal verte utvida. Kunnskapsløftet av 2006 (K 06) skriv lite om korleis representasjon av brøk skal gå føre seg. Multiplikasjon av brøk kjem inn på 7. trinn, og Utdanningsdirektoratet (Udir) syner eit døme i «veiledninger til Kunnskapsløftet» to enkle brøkar som skal multipliserast ved å nytte arealvurdering (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Eg ynskjer å finne ut meir om ulike representasjonar av brøk, og kva lærarar sjølv meiner er viktig å kunne for å arbeide med dette i undervisninga. Forskingsspørsmålet mitt vil difor vere:

> Kva for oppfatningar har lærarar om den kunnskapen dei treng i undervisninga knyta til ulike representasjonar av brøk?

Eg har gjennomført ein kvalitativ analyse av seks fokusgruppeintervju der 22 lærarar har diskutert gruppevis kva kunnskapar dei meiner er viktig for matematikklærarar å ha, i tillegg til skriftlege refleksjonar frå dei same lærarane kring eit oppgåvesett gjeve i starten av eit etterutdanningskurs dei deltok på. Her har eg fokusert på det som vart sagt kring brøkemnet.

For å utføre analysen har eg sett på tre ulike modellar som kvar på sin måte tek opp ulike typar undervisningskunnskap (Niss & Jensen, 2002; Ball, Thames og Phelps, 2008; Rowland & Ruthven, 2010). Denne studien tek utgangspunkt i modellen Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), som er utvikla av ei forskargruppe ved universitetet i Michigan (Ball, Thames og Phelps, 2008) og som er omsett til norsk som modellen om undervisningskunnskap i matematikk (UKM-modellen) av Fauskanger, Bjuland og Mosvold (2010).

Ved å sjå på dei 22 lærarane sine skriftlege og munnlege refleksjonar kring oppgåver med brøk, har eg undersøkt desse oppfatningane og vidare diskutert dei opp i mot det som K 06 og lærebøker fokuserer på. Det er dette som utgjer grunnlaget for analysen min.

Eg vil starte med å klargjere den teoretiske ramma og sentrale omgrep som pregar denne studien. Der vil eg blant anna vil ha ei skildring over kva eg legg i omgrepet oppfatningar, korleis eg forstår undervisningskunnskap i matematikk (UKM) og korleis brøk kan verte representert. Vidare vil eg klargjere for metode og ulike val eg har gjort undervegs, før eg til slutt vil syne resultatet av analysen – med diskusjon og konklusjon frå den.

Alle transkripsjonar og skriftlege refleksjonar er tilgjengelig hjå forfattar. Det datamaterialet som vil verte presentert undervegs, er difor basert på eit nøye utval med utgangspunkt i problemstillinga. Dei utvalde sekvensane vil vidare verte sett lys på ved hjelp av relevant teori.

2.0 Teoretisk ramme og sentrale omgrep

I dette kapittelet vil eg presentere ei oversikt over teoriar og tidlegare forsking som eg meiner er relevant for dette studiet. Dette inneber blant anna ei framstilling over kva eg legg i omgrepet oppfatningar, korleis eg forstår undervisningskunnskap i matematikk (UKM) og korleis brøk kan verte representert.

2.1 Oppfatningar hjå læraren

Det er fleire som har forsøkt å definere kva som ligg i omgrepet oppfatningar (eg nyttar «oppfatningar» der det i den engelsk-språklege faglitteraturen blir brukt «beliefs») i samband med læraren sin undervisningskunnskap i matematikk. Ein definisjon kan vere at oppfatningar er dei filtera ein nytter for å tolke erfaringar ein gjer seg (Pajares, 1992). Oppfatningar kan òg dreie seg om noko som legg føringar for korleis ein handlar. Scheffler (1965, referert i Fauskanger & Mosvold, 2008) meinte at ei oppfatning er sett saman av ei samling av forhold eller faktorar som leier oss til å gjere bestemte handlingar under bestemte forhold. Epistemologisk sett er oppfatningar framfor alt personlege konstruksjonar, medan kunnskap er ein sosial konstruksjon, meinte Op't Eynde, De Corte og Verschaffel (1999). Philipp (2007) har oppsummert mykje av litteraturen kring dette og definerer oppfatningar som:

> Psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true. Beliefs are more cognitive, are felt less intensely, and are harder to change than attitudes. Beliefs might be thought of as lenses that affect one's view of some aspect of the world or as dispositions toward action. Beliefs, unlike knowledge, may be held with varying degrees of conviction and are not consensual. Beliefs are more cognitive than emotions and attitudes (s. 259).

Ein kan då tenkje at oppfatningar er vår subjektive kunnskap, og at den omfattar faktorar kring kjenslene (Pehkonen, 2003). Då må ein vere merksam på at ein ikkje alltid er medveten på oppfatningane sine. Nokon vil òg kan hende prøve å skjule oppfatningane sine, dersom dei ikkje ser ut til å samsvare med andre sine forventningar. Det er difor vanleg at nokon skil mellom djupe oppfatningar og meir overflatiske oppfatningar (Furinghetti & Pehkonen, 2002). Lærarane sine uttalte oppfatningar kan tolkast som deira bevisste overflatiske oppfatningar som dei kan diskutere og fortelje om. Dei djupe oppfatningane deira plar å vere ubevisste og styre den konkrete undervisningspraksisen deira (Pehkonen, 2003).

Det er ofte blitt rapportert om manglande samanheng mellom lærarar sine oppfatningar og deira praksis (Fauskanger & Mosvold, 2008). Skott (2001) såg på dei bevisste oppfatningane. Han såg på dei oppfatningane me kan sjå (slik som prioriteringar, skulefaget matematikk og undervisninga i skulematematikken) og kalla dette «school mathematics images». Han spurte om oppfatningar er eit resultat av praksis heller enn ein stor påverknad på den. I tillegg tok han opp omgrepet «critical incident of practice», der han diskuterte episodane der lærarar kan sjå ut til å gå i mot sine eigne oppfatningar. Leatham (2006) snakka heller om «teachers as inherently sensible rather than inconsistent beings», og hevda at det eksisterer eit fornuftig system hjå dei enkelte individa. Dette tyder på at ein lærar sine utsegner og handlingar er basert på dei ubevisste oppfatningane og førestillingane («perceptions») han har. På grunn av dette eksisterer det heller ingen motsetningar mellom ein lærar sine oppfatningar og undervisningspraksisen hans, og ein samanheng er difor sjølvsagt. Leatham og Peterson (2010) har gjort ei undersøking på kva uttalte oppfatningar eller førestillingar lærarar har om kva som skal til for at matematikkundervisninga skal bli så god som råd der dette synet på oppfatningar er lagt til grunn.

Når eg etterkvart skal sjå på kva for kva for oppfatningar lærarar har om den kunnskapen dei treng i undervisninga knyta til ulike representasjonar av brøk, vil eg støtte meg til Leatham 2006) sitt syn på oppfatningar der eg vil tolke det lærarane skriv, uttaler, seier at dei tenkjer, meiner, handlar og gjer, som om det er ein fornuftig samanheng mellom oppfatningane og undervisningspraksisen deira.

Hjå Beswick (2012) kan me sjå ein tabell der matematikklærarar sine oppfatningar, frå ulike studium, har blitt kategorisert i «oppfatningar om matematikk» («beliefs about the nature of mathematics»), «oppfatningar om matematikkundervisning» («beliefs about mathematics teaching») og «oppfatningar om læring i matematikk» («beliefs about mathematics learning»):

Beliefs about the nature of mathematics (Ernest, 1989)	Beliefs about mathematics teaching (Van Zoest et al. 1994)	Beliefs about mathematics learning (Ernest, 1989)
Instrumentalist	Content focussed with an emphasis on performance	Skill mastery, passive reception of knowledge
Platonist	Content focussed with an emphasis on understanding	Active construction of understanding
Problem solving	Learner focussed	Autonomous exploration of own interests

Figur 1: Kategoriar om lærarar sine oppfatningar (Beswick, 2012, s. 130)

Her er ideen at oppfatningar i same rekke vert sett på som teoretisk konsekvent, og dei i same kolonne vert sett på som noko som utgjer eit samanhengande heile. Eit instrumentelt syn på matematikk («instrumentalist») inneber at ein ser på matematikk som ein vitskap styrt av reglar, fakta og dugleikar ein må lære seg å nytte der ulike emne ikkje sjåast i samanheng med einannan. Ein med eit platonisk syn på matematikk («platonist») vil sjå på matematikk som kunnskap som alltid har lege der – me må berre finne den, og det er av stor interesse å sjå ulike emne i samanheng. Eit konstruktivistisk syn på matematikk («problem solving») vil seie at ein ser på matematikk som ei dynamisk menneskeleg oppfinning, der ein heller framhever prosessen enn resultatet (Ernest, 1989).

2.1.1 Oppfatningar og kunnskap

Det har lenge vore ein diskusjon kring det å skilje oppfatningar frå kunnskap. Dersom ein skal endre undervisninga i eit fag på nasjonal basis, er det ikkje nok å endre læreplan og lærebøker. Det vil òg vere naudsynt å endre eller modifisere lærarane sine oppfatningar av matematikk, læring og undervisning i matematikk, og så vidare. Mange lærarar støtter seg til éi eller nokre få lærebøker i undervisninga, og dei treng rettleiing for å endre sin undervisningspraksis (Lloyd, 2002, referert i Fauskanger & Mosvold, 2008). Vanskane som kan vere involvert i eit eventuelt ynskje om endring av lærararopptreden er ofte nært relatert til kva lærarar trur og kva dei kan – eller deira oppfatningar og kunnskapar – meinte Thompson (1992). Furinghetti og Pehkonen (2002) argumenterte for at oppfatningar skulle bli rekna som ein del av lærarar sin personlege kunnskap, og Kuntze (2012) nytta omgrepet «professional knowledge» der oppfatningar var innlemma. Leatham (2006) skreiv:

> Of all the things we believe, there are some things that we «just believe» and other things that we «more than believe – we know». Those things we «more than believe» we refer to as *knowledge* and those things we «just believe» we refer to as beliefs. Thus beliefs and knowledge can profitably be viewed as complementary subsets of the set of things we believe. It is in this sense that *belief* is used in the sensible system of framework (s. 92).

Han såg då at oppfatning og kunnskap kan vere to ting som heng saman og utfyller einannan. Philipp (2007) derimot, meinte at oppfatningar var nært relatert til kunnskap, men at det burde vere eit skilje mellom omgrepa.

I denne studien vil eg følgje Philipp (2007) sitt syn på oppfatning og kunnskap og skilje mellom desse. Eg vil fokusere på lærarane sine oppfatningar om den kunnskapen dei treng i undervisninga knyta til ulike representasjonar av brøk, og vil sjå på det som ein del av lærarane sin personlege epistemologi.

2.1.2 Oppfatningar om kunnskap

Lærarar sin personlege epistemologi vert relatert til oppfatning om kunnskap – ofte omtalt som epistemologiske oppfatningar (Hofer, 2002). Schommer-Aikins, Bird og Bakken (2010) meinte at lærarar sine personlege epistemologiske oppfatningar har mykje å seie for elevar si læring på alle nivå. Schuck (1999) såg at mange lærarar ikkje hadde tru på solid personleg kunnskap i matematikk som utsegnskraftig for deira evne til å undervise bra; mange lærarar trudde til og med at det heller var bra å ha lite matematisk kunnskap. Epistemologiske oppfatningar vert av nokon definert på same måte som epistemiske oppfatningar – som oppfatningar om kunnskap (til dømes, Buehl, 2008; Cady & Rearden, 2007).

I denne studien vil eg støtte meg til uttrykket epistemologiske oppfatningar i forhold til lærarar sine oppfatningar om UKM, og epistemiske oppfatningar i forhold til lærarar sine meir spesifikke oppfatningar kring kunnskap (det som er i hovudet) og kunne (korleis ein nytter det) om til dømes brøk.

2.1.3 Lærarar og deira profesjonskunnskap

Det har vore vanleg å tenkje at dersom lærarane sjølv er flinke i matematikk, så vil undervisninga deira òg bli god, og elevane vil få eit godt læringsutbytte. Shulman (1986) meinte at undervisning handla om meir enn fagleg kompetente lærarar. Gjennom studia sine såg han at lærarar måtte kunne faget sitt, både fakta og omgrep innafor eit område, men også kvifor desse faktaa og omgrepa er som dei er, og korleis kunnskap innafor området er generert og strukturert. Men utover rein fagkunnskap, meinte han at læraren måtte ha kunnskap om undervisning i eit fag og om korleis ulike emne er organisert, både innafor eit skuleår og i eit lengre tidsperspektiv. Shulman (1986) kalla denne kunnskapen «pedagogical content knowledge». På norsk vert den ofte omsett som fagdidaktisk kunnskap (Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010). Dette omgrepet vil eg nytte vidare i studien min.

2.2 Rammeverk

«The Knowledge Quartet», som på norsk vert omtala som kunnskapskvartetten, utvikla av Rowland med fleire (Rowland & Ruthven, 2010, kapittel 12) og Niss sine seks «kompetencer» (Niss & Jensen, 2002), vert ofte nytta som teoretisk rammeverk i denne type analyse som eg skal gjere.

Rowland med fleire tok utgangspunkt i Shulman (1986) sine kategoriar for kunnskap; fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap. Kunnskapskvartetten kan vere eit hjelpemiddel både for å identifisere lærarar sine matematikkunnskapar i undervisningssituasjonar og som eit refleksjonsverktøy for utviklingsarbeid (Kleve, 2010) – med dimensjonane; «grunnlag» («foundation»), «omdanning» («transformation»), «samanheng» («connection») og «beredskap» («contingency»). «Grunnlag» viser til den fagkunnskapen læraren sit inne med (Rowland & Ruthven, 2010). Denne fagkunnskapen må «omdannast» og verte re-presentert for elevane i form av likskapar, illustrasjonar, døme, forklaringar, demonstrasjonar (Kleve, 2010) og val av representasjonar, der ein heile tida må ta vare på heilskapen i faget og lærestoffet, og ser «samanhengar» mellom dei ulike emna på tvers av klassetrinn. I tillegg må ein heile tida vere førebudd/i beredskap og ha evne til å ta i mot uplanlagde innspel og å kunne respondere på dei (Rowland & Ruthven, 2010).

Kleve (2010) nytta denne modellen i sin studie der ho undersøkte korleis lærarar vekslar mellom kunnskapane sine i matematikk og matematikkdidaktikk i undervisninga.

I det danske prosjektet «Kompetanse Og Matematikklæring» (KOM-prosjektet) stilte Niss (Niss & Jensen, 2002) to viktige spørsmål. I tillegg til det matematisk faglege spørsmålet om kva for ein matematisk kompetanse den gode matematikklæraren bør ha, stilte han eit fagdidaktisk-/pedagogisk spørsmål: Kva vil det seie å vere ein god matematikklærar? Ut frå det fagdidaktiske spørsmålet skisserte han opp ein modell med seks didaktiske og pedagogiske kompetansar:

- Læreplankompetanse – å kunne vurdere og utforme læreplanar
- Undervisningskompetanse – å kunne planlegge, leggje til rette og gjennomføre undervisning
- Læringsavdekkingskompetanse – å kunne avdekke og fortolke elevane si læring
- Evalueringskompetanse – å kunne avdekke, vurdere og karakterisere elevane sine faglege utbytte og kompetansar
- Samarbeidskompetanse – å kunne samarbeide med kollegaer og andre om undervisninga og rammene rundt undervisninga
- Profesjonell utviklingskompetanse – å kunne utvikle kompetansen sin som matematikklærar (Niss & Jensen, 2002).

Denne modellen, i tillegg til to andre, nytta Hundeland (2009) i si doktoravhandling då han forska på kva lærarar i den vidaregåande skulen la vekt på i si matematikkundervisning.

Eg har derimot valt å ta utgangspunkt i modellen om undervisningskunnskap i matematikk, UKM-modellen (Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010), som rammeverk. Då eg har sett på 22 lærarar sine skriftlege og munnlege refleksjonar kring oppgåver med brøk som er skreddarsydd for å kunne analysere lærarar sin UKM, vona eg at UKM-modellen kunne vere den mest passande i arbeidet med å identifisere dei ulike typar hindringar som lærarane uttrykker i forhold til manglande kunnskap – og vidare kva oppfatningar dei har om den kunnskapen dei treng i undervisninga knyta til ulike representasjonar av brøk.

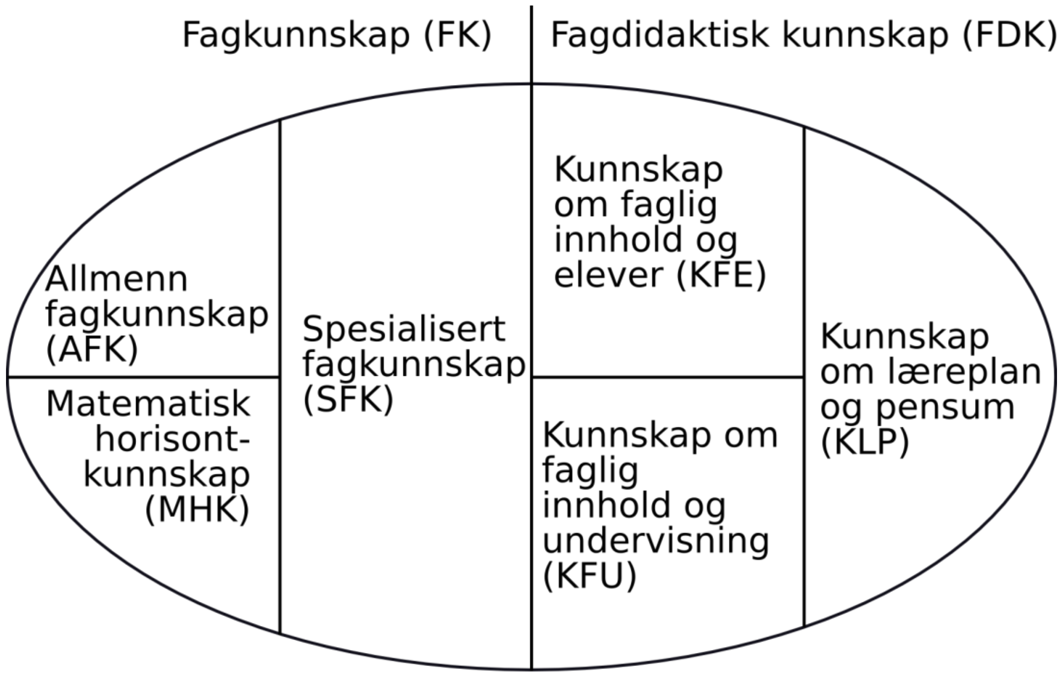
2.2.1 UKM-modellen

Ball, Hill og Bass (2005) bygde òg vidare på Shulman (1986) sine teoriar og prøvde å identifisere og spesifisere den matematiske kunnskapen dei meinte var naudsynt for ein lærar. Dei skilde då mellom matematisk og fagdidaktisk kunnskap, og kalla dette «mathematical knowledge for teaching» (MKT). Dette fokuset på kunnskap, som er naudsynt for å gjere ein undervisningsjobb, kan ein på norsk kalle for matematikklærarar sine kunnskapar eller lærarar sin «undervisningskunnskap i matematikk» (UKM) (Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010).

Forskargruppa ved University of Michigan, med Ball, Thames og Phelps (2008) i spissen, vidareutvikla Shulman (1986) sin opphavlege modell. Som ein del av denne vidareutviklinga identifiserte dei ulike utfordringar i undervisningsarbeidet i matematikk («task of teaching»):

- Presentere matematiske idear
- Respondere på elevane sine «kvifor»-spørsmål
- Finne eksempel for å få fram eit bestemt matematisk poeng
- Vere klar over kva som vert involvert når ei bestemt framstilling vert teken i bruk
- Knyte representasjonar til underliggande idear og til andre representasjonar
- Knyte emnet ein underviser i, til emne frå tidligare år, eller til komande emne
- Forklare matematiske mål og føremål til foreldre
- Vurdere og tilpasse det matematiske innhaldet i lærebøker
- Endre oppgåver slik at dei vert meir eller mindre utfordrande
- Forklare om elevane sine påstandar er rimelege (ofte raskt)
- Gi, eller evaluere, matematiske forklaringar
- Velje og utvikle gode definisjonar
- Bruke matematisk notasjon og språk, og vurdere bruken
- Stille fruktbare matematiske spørsmål
- Velje ut føremålstenlege representasjonar
- Undersøke likskapar (Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010, s. 104)

Den same forskargruppa laga ein modell for å analysere lærarar sin matematiske undervisningskunnskap, og denne modellen vert delt inn i seks ulike (kunnskaps-) område. UKM-modellen er ei norsk omsetjing av den. Med utgangspunkt i modellen vert ulike typar hindringar som lærarar uttrykker i forhold til manglande kunnskap identifisert:



Figur 2: Område undervisningskunnskap i matematikk består av (Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010, s. 105).

Kunnskapsområda i matematikkundervisning vart då, på fagkunnskapssida, delt i «allmenn fagkunnskap» («common content knowledge»), «spesialisert fagkunnskap» («specialized content knowledge») og «matematisk horisontkunnskap» («knowledge at the mathematical horizon»). Fagdidaktisk kunnskap på andre sida, der vidareformidling av kunnskap er i fokus, er blitt delt inn i «kunnskap om fagleg innhald og elevar« («knowledge of content and students»), «kunnskap om fagleg innhald og undervisning» («knowledge of content and teaching») og «kunnskap om læreplan og pensum» («knowledge of curriculum»). «Allmenn fagkunnskap» i matematikk er kunnskap som blir brukt i undervisningsarbeidet på same måte som kunnskapen blir brukt i andre yrker der ein òg har bruk for matematikk. «Spesialisert fagkunnskap» krev ikkje noko kunnskap om elevane eller undervisninga, men ein med spesialisert fagkunnskap vil kunne sjå etter mønster i elevar sine feilsvar og finne ut om ein framgangsmåte gjeld generelt. Her er læraren si faglege forståing heilt naudsynt (Fauskanger, 2012). «Matematisk horisontkunnskap» dreier seg om korleis matematiske emne i læreplanar bygg på einannan og heng saman (Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010), og er viktig for at lærarar skal kunne forstå og tolke eigne elevar si tenking, og planlegge vidare utfordringar til elevane (Fauskanger, 2012). «Kunnskap om fagleg innhald og elevar» fokuserer på elevane si matematiske tenking, kunnskap og læring av matematikk (Fauskanger & Mosvold, 2013a). Å kjenne til kva for feil av mange moglege det er mest sannsynleg at elevane gjer, kan vere eit døme på dette (Kleve, 2010). «Kunnskap om fagleg innhald og undervisning» refererer til læraren sin kunnskap kring planlegginga av timane (Fauskanger & Mosvold, 2013a) og å kunne vurdere fordeler og ulemper ved ulike tilnærmingsmåtar og døme innafor eit emne (Kleve, 2010). «Kunnskap om læreplan og pensum» inkluderer kunnskapen om det trinnet (årstrinn/klassetrinn) dei ulike emna vanlegvis vert undervist, og vidare om måtar å teste at elevane har fått denne kunnskapen, måla i læreplanen med meir (Fauskanger & Mosvold, 2013a).

2.2.2 Fleirvalsoppgåver

Forskarane i Michigan har laga fleire hundre fleirvalsoppgåver som er skreddarsydd for å kunne analysere lærarar sin UKM (til dømes, Ball, Hill & Bass, 2005). Nokre av oppgåvene krev fleire avkryssingssvar der ein kallar kvar deloppgåve for «item». I til dømes dei frigjevne itemsa til Ball og Hill (2008) er det 35 oppgåver, eller 64 items, kategorisert i tre typar; «elementary content knowledge», «elementary knowledge of students and content», and «middle school content knowledge». Når eg i denne studien snakkar om «oppgåvene» siktar eg til nummeret i settet med oppgåver dei deltakande lærarane arbeidde med i etterutdanninga – oppgåve 8 og 9. Medan «items» vil vere dei ulike deloppgåvene i dei to oppgåvene (sjå døme på slike oppgåver med items i kapittel 3.2).

Formatet med fleirvalsoppgåver i MKT-itemsa, er blitt kritisert av nokon då mange av itemsa er såpass lukka og ikkje klarer å måle «matematisk horisontkunnskap» og «kunnskap om læreplan og pensum» i tilstrekkeleg grad (Fauskanger & Mosvold, 2012). Schoenfeld (2007) har vore ein leiande kritikar. Han har kritisert mangelen av klare underliggjande rammeverk og bruken av formatet med fleirvalsoppgåver i MKT-itemsa. Han meinte at formatet med fleirvalsoppgåver kunne komplisere itemsa og difor gjere det vanskelegare for testdeltakarane. Han ynskte meir opne oppgåver som ville vere enklare for lærarar. I studien til Fauskanger, Mosvold, Bjuland og Jakobsen (2011) kom det fram at ein del lærarar syns at formatet med fleirvalsoppgåver, der alle føreslegne løysingar lett kunne bli oppfatta som like/riktige, var meir komplisert enn med samanliknbare opne items. Dette kan jamførast med det Schoenfeld (2007) argumenterte for. På same tid kan vanskane med å finne fram til riktig løysing vere ein indikasjon på at intensjonen med itemsa fungerer. Ein del av deltakarane uttrykte at dei mislikte at formatet med fleisvalsoppgåvene pressa dei til å velje mellom alternativ som var sette opp på førehand, og ville heller rekne på og reflektere over itemsa sjølv for å finne den riktige løysinga. Nokre lærarar kunne heller ikkje finne «sine alternativ» blant dei føreslegne løysingane. Når, i tillegg, itemsa i desse målingane stort sett er relatert til undervisning i USA der dei er meir vane med formatet med fleirvalsoppgåver (Mosvold, Fauskanger, Jakobsen & Melhus, 2009) kan det vere eit teikn på at opne, eller meir kulturelt-, tilpassa oppgåver kunne vore betre (Fauskanger, Mosvold, Bjuland & Jakobsen, 2011). Eit forslag frå Fauskanger, Mosvold, Bjuland og Jakobsen (2011) var då å gjere itemsa meir opne ved å halde på formatet med fleirvalsoppgåver og leggje til kommentarfelt som lar lærarane forklare kva dei tenkjer undervegs, eller å lage nye items der fokuset er på tilpassing av den kulturelle konteksten.

Deltakarane i denne studien har vore gjennom items av ein slik type med kommentarfelt, i tillegg til fokusgruppeintervju.

2.3 Representasjon av brøk

I Kunnskapsløftet av 2006 (K 06) kan ein lese at:

> Hovudområdet tal og algebra handlar om å utvikle talforståing og innsikt i korleis tal og talbehandling inngår i system og mønster. Med tal kan ein kvantifisere mengder og storleikar. Tal omfattar både heile tal, brøk, desimaltal og prosent (Utdanningsdirektoratet, 2006).

K 06 seier elles lite om korleis representasjonen av brøk skal gå føre seg – altså korleis ein kan eller bør nytte brøkomgrepet i lag med elevane. Multiplikasjon med brøk kjem inn på 7. trinn. Det nærmaste ein kjem eit forslag til representasjon av brøk er eit døme i «veiledninger til Kunnskapsløftet» der to enkle brøkar multipliserast ved å bruke arealbetraktning (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Brøk kan definerast på ulike vis. Til dømes:

- «Vi arbeider oss frem til en god forståelse mellom begrepene divisjon og brøk: Brøken 3/8 er svaret på divisjonen 3:8. Generelt: En brøk a/b er svaret på divisjonsoppgaven a:b» (Breiteig & Venheim, 1998, s. 211).
- «Når vi deler opp noe i deler, kan vi skrive hver del som en brøk. 1/2 og 1/4 er eksempler på brøker» (Bakke & Bakke, 2006, s. 58)

Samstundes som brøk kjem fram ved divisjon, prosessen 4:7, representerer det i tillegg svaret på delingstykket, objektet 4/7. Dette betyr ein akkommodasjon av elevane sine tidlegare tankemønster og omgrep kring tal, noko som krev tid til å modnast for dei fleste av elevane. Akkurat som ved desimaltal og prosent kan det vere ulike måtar å representere brøk på (Kleve, 2010).

Brøkomgrepet vert brukt i mange ulike samanhengar, og det kan vere ein av grunnane til at ein del elevar slit med emnet. Til dømes:

- «Brøk som del av eit heile»; 2/3 er to tredeler i forhold til ein – ein heilskap – som til dømes ei rute, ei sirkelflate eller ein liter.
- «Eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal».
- «Ei samanlikning mellom ein del og eit heile»; 2/3 av kulene er svarte, eller 2/3 av klassen nyttar skulebussen.
- «Svaret på ei divisjonsoppgåve».
- «Ein måte å samanlikne to mengder eller to mål på»; A har 2/3 så mange som B, eller bil A er 2/3 så lang som bil B (Breiteig & Venheim, 1998)

Når ein skal rekne med brøk kan ein tolke brøk anten som ein talstorleik eller eit mål, eller som ein operator. Brøk som eit mål relaterer brøken til ein heilskap. Heilskapen kan vere ein fysisk storleik som eit areal (sirkel, kvadrat, rektangel) eller ein del av ei tallinje. Operatoraspektet av brøk tyder ei samanlikning mellom to tal – det eine er ein brøkdel av det andre. Multiplikasjon og divisjon er ofte lettare å tolke meiningsfylt når ein ser brøk som operator (Breiteig & Venheim, 1998).

Tanken bak at elevane vert introdusert for brøk på småskuletrinnet, der dei nyttar brøk i daglegdagse situasjonar, og ved å gi elevane eit solid grunnlag for forståinga av brøkomgrepet, er for å unngå at brøkrekning blir mekanisk og drillprega og at elevane etter kvart seier at brøk er vanskeleg og noko dei ikkje forstår. Dersom elevane forstår kva dei gjer, vil introduksjonen av brøk og variablar på høgare trinn bli lettare (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Ein studie av Novillis (1976) viste at modellar av brøk som ein del av ein heilskap eller samanlikning av grupper, var lettare for born å forstå enn som eit punkt på tallinja. Novillis viste til arbeid med brøkar som ikkje var større enn éin. I motsetning til del av ein heilskap eller samanlikning av grupper, vil ikkje tallinja som modell få fram at ein brøk kan sjåast på som eit konkret objekt (Kleve, 2010). Derimot kan tallinja konkretisere uekte brøkar meir naturleg meinte Dickson, Brown og Gibson (1984). I følgje Anghileri (2000) vert det ofte fokusert mykje på å kunne identifisere brøk som del av ein heilskap. Dette kom ho med forslag om å unngå. Ho hevda at for å lukkast med brøk er ein avhengig av å vere i stand til å sjå brøken både som eit tal og som eit forhold som kan vere et resultat av ein rekneoperasjon. Til dømes representerer 3/4 eit tal mellom 1/2 og 1 på tallinja, og tre deler av fire når heilskapen er delt i fire. I tillegg er 3/4 eit resultat av ein rekneoperasjon. Dersom ein kan sjå brøken som eit resultat av ein rekneoperasjon kan ein òg kunne forstå at 3/4, 6/8 og 15/20 representerer same tal og vidare kunne identifisere 3⁄4 med 0,75 og med 75 %. Askew (2000, referert i Kleve, 2010) hevda at dersom ein i hovudsak fokuserer på brøk som del av ein heil slik at det blir ein slags sosial konvensjon, kan dette hindre moglegheitene for utviklinga av eit solid brøkomgrep. Som eit døme nytta han eit rektangel delt i fem delar der tre av dei var skravert. Storparten av lærarar og elevar ville sannsynlegvis sagt at rektangelet illustrerte brøken 3/5 eller nokon kanskje 2/5. Svært få ville nok svart 1 2/3, 2 1⁄2, 1 1⁄2 eller 2/3.

Forsking har vist at mange elevar lærer operasjonar med brøkar gjennom prosedyreorientert, minnebasert undervisning, der mange av dei sit att med lita forståing for slike operasjonar (Son & Senk, 2010). Det har vore ynskjeleg å få eit meir balansert fokus på både omgrep og framgangsmåtar. Multiplikasjon av heile tall vert ofte presentert som gjentatte addisjonar, til dømes $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$. Men forskarar har sett at elevar med slike additive slutningar kan få problem når det kjem til arbeid med multiplikasjon av brøkar. Til dømes peikte Mack (1998) på at mange situasjonar med brøk inneber å ta ein del av en del av en heil, til dømes, 1/3 x 2/5, som betyr «ta ein tredjedel av to femtedelar». I ein slik situasjon har elevar med additive slutningar ingen meiningsfull tolking. Ho kom med forslag om at elevane bør verte oppmuntra til å utvide forståinga si av multiplikasjon frå gjentatte addisjonar til å finne delar av delar der ein startar instruksjonen med oppdeling av ein heilskap og deretter utvidar til å finne ein brøkdel av ein storleik (til dømes, 2/3 av 12) og vidare for å ta ein del av ein del av ein heil (til dømes, 1/4 av 4/5). Òg Thompson og Saldanha (2003) indikerte at ein ved å sjå på multiplikasjon som å dele opp ein storleik i mindre delar, ikkje berre løyser problemet hjå elevane som har ei oppfatning om multiplikasjon som gjentatt addisjon, men kan danne grunnlaget for å forstå brøken m/n som m gonger 1/n.

Andre forskarar har ei alternativ tilnærming. Basert på undervisningseksperiment rapporterte Son og Senk (2010) om at barn sine tankar om heile tal ikkje nødvendigvis forstyrrar forståinga deira av brøk. Faktisk føreslo Fischbein, Deri, Nello og Marino (1985, referert i Son & Senk, 2010) og Burns (2000) å nytte gjentatt addisjon som den grunnleggjande idéen ved multiplikasjon. Dei typar einingar og operasjonar barn konstruerer i heiltalrekka si kan lette omorganisering av brøkordningar. Dette argumentet kan òg vere aktuelt for å utvikle forståing for divisjon av brøkar. Divisjon av heile tal kan verte presentert som gjentatt subtraksjon, ofte omtalt som målingsdivisjon. Til dømes kan uttrykket 12 ÷ 4 verte tolka som «kor mange grupper av 4 er i 12?», eller uttrykket 6 ÷ 3/4 «me har 6 kg sjokolade som skal leggjast i boksar som kvar tek 3/4 kg. Kor mange boksar kan me fylle?». Men divisjon kan òg verte representert som ei deling eller det me omtaler som delingsdivisjon. Til dømes kan 12 ÷ 4 tyde «dersom 12 ting vert delt likt med 4 barn, kor mange ting får kvart barn?», eller 2/3 ÷ 4 «fire gutar delte 2/3 av ein pizza, kor mykje pizza fekk dei kvar?» (Son & Senk, 2010).

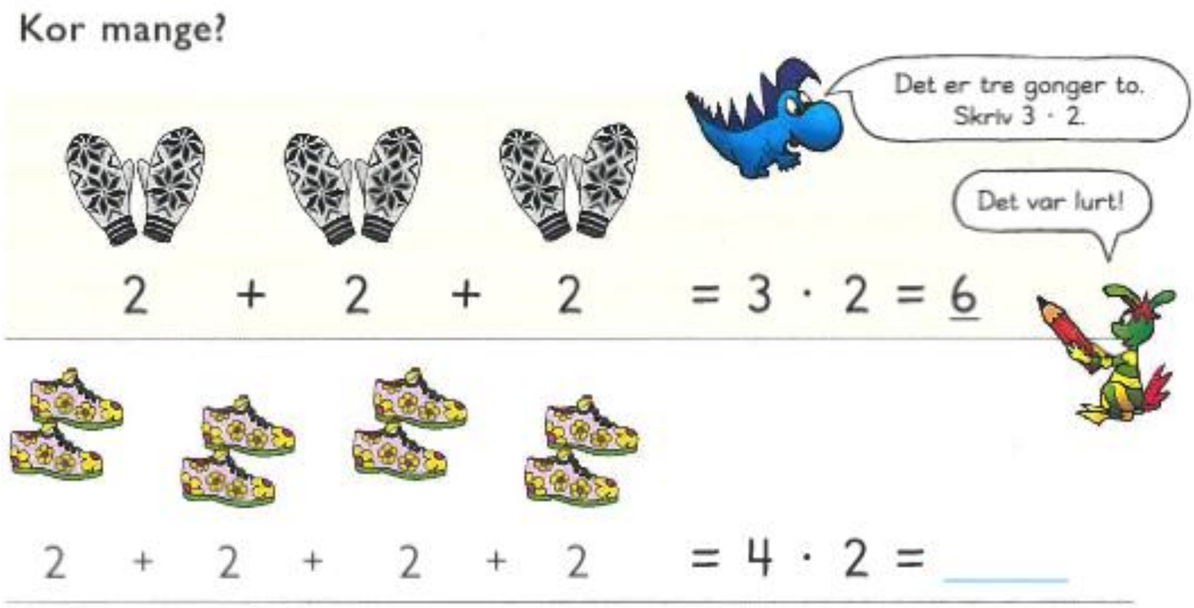
Mange lærebøker for elementære matematikkmetodekurs i USA (til dømes, Van de Walle, 2001, referert i Son & Senk, 2010) gir retningslinjene for å utvikle rekning med brøk: (1) start med en enkel kontekstuell oppgåve, (2) få fram samanhengen mellom rekning med brøk og rekning med heile tal, (3) oppmuntre elevane til å bruke si eiga tenking, og (4) utforske kvar av operasjonane ved å nytte ulike representasjonar og modellar fleksibelt. Meir spesifikt, råder Van de Walle (2001, referert i Son & Senk, 2010) at arealmodellar (til dømes rektangel), lengdemodellar (til dømes tallinjer), og mengdemodellar (til dømes kuler) bør nyttast på alle klassetrinn for å utvikle brøkuttrykk tilstrekkeleg fordi «a change in the modell usually marks a significant change in the activity from the viwpoint of the children» (s. 209) (Son & Senk, 2010).

Det er blitt gjort ein del forsking på kva undervisningskunnskap lærarar bør ha når det gjeld representasjon av brøk (til dømes, Ball, 1990). I denne studien ynskjer eg å finne ut kva lærarane sjølv meiner dei bør ha av kunnskap knyta til undervisning av ulike representasjonar av brøk. Oppgåvene lærarane uttaler seg om er divisjon med brøk. Det er det eg i all hovudsak kjem til å ta for meg i denne studien.

2.3.1 Representasjon av brøk i norske lærebøker

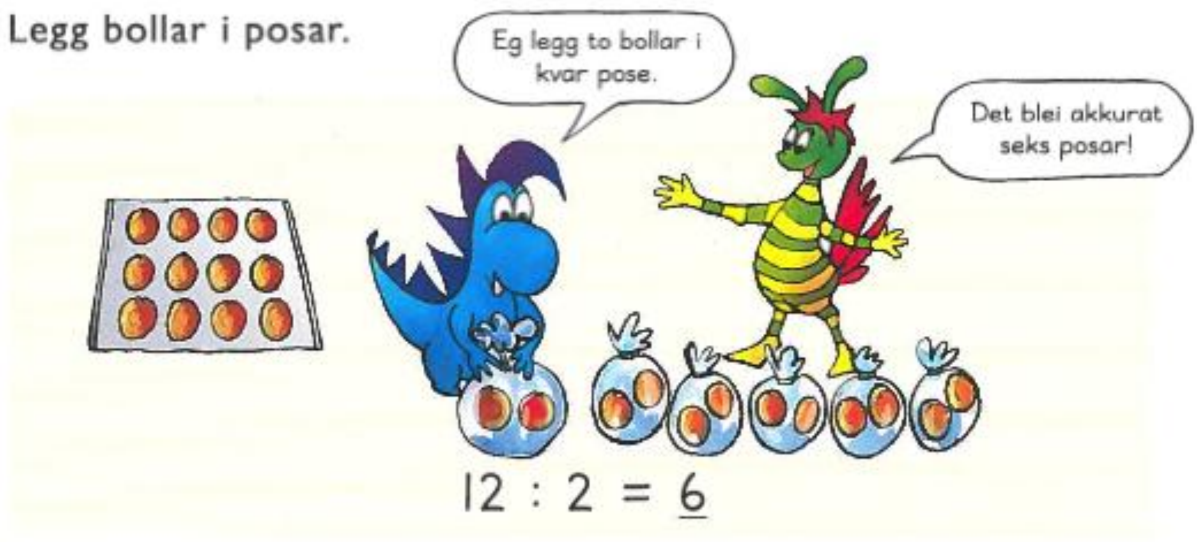
Etter å ha sett gjennom eit utval norske lærebøker i matematikk (Multi, Grunntal, Abakus, Tetra og Sinus), frå 1. trinn i grunnskulen og opp til 3. klasse i den vidaregåande skulen, har eg danna meg eit bilete av korleis elevane vert introdusert for gonging (frå 5. trinn omtalt som multiplikasjon), deling (frå 5. trinn omtalt som divisjon) og brøk, og vidare korleis desse lærebokforfattarane legg opp til at elevane sin brøkkompetanse vert utvida.

Gonging vert introdusert for fyrste gong på hausten på 3. trinn – som gjentatt addisjon:



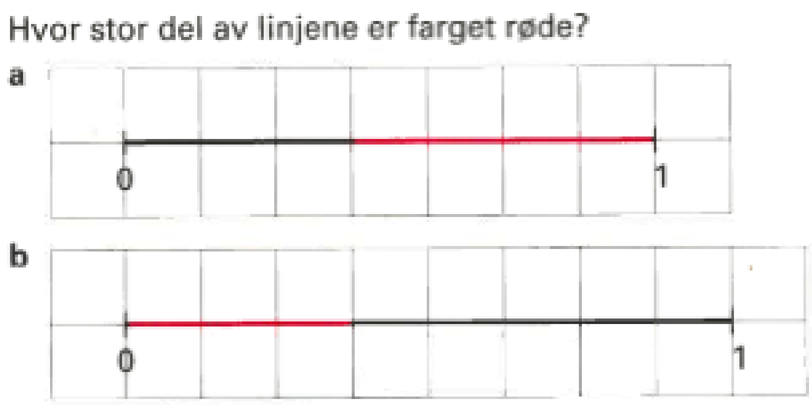
Figur 3: Døme på introduksjon av gonging (Alseth, Arnås, Kirkegaard & Røsseland, 2011, s. 97).

Emnet deling vert framstilt ved hjelp av delingsdivisjon – typisk åtte kakestykke som skal fordelast på fire fat – og målingsdivisjon:



Figur 4: Døme på målingsdivisjon på 3. trinn (Alseth et al., 2011, s. 111)

Det er ikkje før på våren på 3. trinn at brøkomgrepet for fyrste gong vert nytta – i samband med deling av kaker og liknande, og namnsetjing på delane; 1/2, 1/3 med meir, og å fargeleggje ein todel av til dømes ein pizza som er delt i fire, ei kake delt i tolv og liknande. På 4. trinn er det framleis lagt opp til at elevane skal arbeide med gonging som gjentatt addisjon, og elles arbeide med delings- og målingsdivisjon. Fram til 4. trinn blir brøk representert som «ein del av eit heile» og «ei samanlikning mellom ein del og eit heile». Men på våren på 4. trinn vert elevane presentert for representasjonen av brøk som «eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal»:



Figur 5: Døme på representasjon av brøk som «eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal» på 4. trinn (Bakke & Bakke, 2006, s. 64).

På 5. trinn er det endå meir arbeid med delings- og målingsdivisjon der brøk framleis vert representert som «ein del av eit heile», «ei samanlikning mellom ein del og eit heile», og av og til «eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal». Her kjem òg rekning med brøk inn der elevane skal leggje saman og trekkjer brøkar frå kvarandre – typisk illustrert med pizza eller liknande, og elevane vert vidare presentert for «når vi får meir enn ein heil». Elles er det er framleis gjentatt addisjon, og delings- og målingsdivisjon det vert arbeidd med. Dette held dei fram med på 6. trinn. På 7. trinn vert det lagt opp til å rekne meir med brøk; å addere og subtrahere brøkar med ulike nemnarar og å finne likeverdige brøkar. Vidare vert elevane førebudd på multiplikasjon av brøk – representert som gjentatt addisjon. Når dei kjem til multiplikasjon med tosifra tal, vert dette presentert med algoritmar – utan noko særs forklaring på kvifor dette fungerer. Når elevane så skal multiplisere to brøkar i Pedersen, Pedersen og Skoogh (2005a), vert gongeteiknet no omtalt som «av» i staden for «gonge» – utan noko forklaring på denne overgangen. På dette trinnet vert det framleis lagt mest vekt på representasjon av brøk som «ein del av eit heile» og «ei samanlikning mellom ein del og eit heile». Representasjonen av brøk som «ein måte å samanlikne to mengder eller to mål på» dukkar opp på våren på 7. trinn i Pedersen, Pedersen og Skoogh (2005b) der det er oppgåver av typen der elevane skal finne 1/4 av 440 m – utan noko link til at ein kan ta 1/4 * 440. Når det seinare i same boka vert synt divisjon med brøk formulert som ei oppgåve med målingsdivisjon, er det ikkje noko forklaring på kva som blir gjort utanom å syne tre ulike måtar å løyse oppgåva på.

I arbeidet med multiplikasjon av brøk på 8. trinn, i Hagen, Carsson, Hake og Öberg (2006), startar boka med dømet 1/2 * 1/2 = 1/4 med teksten «halvparten av ein halv er ein firedel». Heller ikkje her vert det klargjort overgangen frå å omtale *-teiknet som «gonge» til «av». I introduksjonen av divisjon med brøk vert det førebudd til algoritmen der ein snur den siste brøken og multipliserer oppe og nede. Dei skriv at «å dele 1/3 i 8 delar er det same som å rekne ut kor mykje 1/8 er av 1/3» og vidare «å dividere med ein brøk er det same som å multiplisere med den omvendte brøken» – utan nokon form for illustrasjon. Denne «regelen» vert repetert på 9. og 10. trinn.

Elevane vert òg i den vidaregåande skulen, i til dømes Oldervoll, Orskaug, Vaaje og Hanisch (2006), minna om regelen: «Når vi skal dividere med en brøk, multipliserer vi med den omvendte brøken».

3.0 Metode

For å undersøkje kva for oppfatningar lærarar har om den kunnskapen dei treng i undervisninga knyta til ulike representasjonar av brøk, har eg måtte gjere ein del val undervegs i studien. Dette omfattar val av type forskingsdesign, teoretisk rammeverk, data og type dataanalyse.

3.1 Deltakarar og forskingsdesign

Denne studien er ein del av eit større prosjekt ved Universitetet i Stavanger som fokuserer på lærarar sin UKM og deira samsvarande oppfatning kring UKM (til dømes, Fauskanger, 2012). I denne oppgåva har eg teke utgangspunkt i eksisterande empirisk baserte data frå dette prosjektet. Dataa eg har nytta meg av, består av 22 lærarar sine svar på åtte UKM-items fordelt på to oppgåver med tilhøyrande skriftlege refleksjonar, i tillegg til transkripsjonar frå seks fokusgruppeintervju med dei same lærarane. Arbeidserfaringa som lærarar varierte frå mindre enn fem år til meir enn 20 år, og deira formelle utdanning i matematikk(undervisning) varierte frå 0 til 60 studiepoeng. Ti av desse lærarane arbeidde på 1. – 4. trinn, fem på 5. – 7. trinn og tre på 8. – 10. trinn. Fire lærarar underviste ikkje i matematikk på dette tidspunktet.

Ut frå Johannessen, Tufte og Christoffersen (2010) sine termar har denne undersøkinga eit kvalitativt forskingsdesign. Denne metoden er kjenneteikna av fråveret av éin analytisk hovudretning og kan difor verte gjennomført på fleire ulike måtar. Ein må velje korleis data skal samlast inn, og val gjort på eit trinn i prosessen vil binde og avgrense moglegheiter på seinare trinn. Eg vil no difor skildre aller fasar i forskingsprosessen.

3.2 Instrument

Eit fokusgruppeintervju er ein planlagt diskusjon der ein legg til rette for at ei utvalt gruppe av deltakarar kan dele sine idear og synspunkt (Wilkinson, 2004). Dei seks fokusgruppeintervjua eg har sett på har fire eller fem deltakarar i kvart intervju. Johannessen, Tufte og Christoffersen (2010) omtaler grupper med tre til fem deltakarar som minigrupper. Fordelen med litt mindre grupper kan vere at når deltakarane har mykje å bidra med på eit bestemt tema, eller har lang erfaring med det temaet som skal diskuterast, er det ynskjeleg å høyre mest mogleg frå kvar deltakar. I ei lita gruppe vil kvar deltakar få meir taletid enn i ei stor gruppe. Det kan i tillegg vere lettare å ta ordet i ei lita enn i ei stor gruppe. Deltakarane i eit fokusgruppeintervju kan diskutere vidare ut frå einannan sine svar. Mosvold og Fauskanger (2012) har gjennom tidlegare arbeid sett at fokusgruppeintervju basert på UKM-oppgaver inviterer lærarar til å reflektere kring den kunnskapen dei finn relevant og ikkje (Fauskanger, 2012). Dette tyder på at det skal vere mogleg å studere lærarar sine oppfatningar kring den kunnskapen dei treng når det kjem til representasjon av brøk gjennom fokusgruppeintervju basert på UKM-oppgåver.

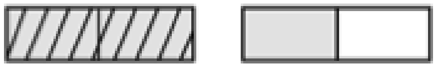
UKM-items vert vanlegvis nytta i ein testsituasjon. Det spesielle med desse dataa eg har nytta meg av er at i motsetning til dei fleste UKM-studiane arbeidde dei deltakande lærarane her med itemsa og dei skriftlege refleksjonane heime, og hadde då moglegheit til å diskutere desse med andre (Fauskanger & Mosvold, 2012). Det er då viktig å vurdere både fordelane og ulempene det kan føre med seg; jf. diskusjonen kring fleirvalsoppgåver der nokon har kritisert formatet og kome med forslag om å opne opp.

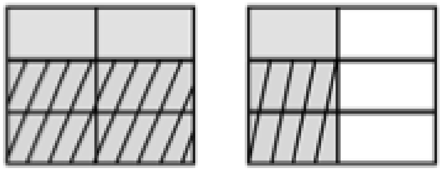
Dei deltakande lærarane skulle vurdere i kor stor grad oppgåvene dei arbeidde med i etterutdanninga spegla viktig matematikkfaglig/matematikkdidaktisk innhald på det trinnet dei underviste. Vidare skulle dei reflektere over om oppgåvene spegla viktig kunnskap for seg sjølv som lærarar og kome med kommentar om kva elevane kan/bør kunne for å løyse oppgåver av dei ulike typane.

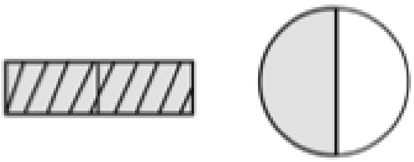
Oppgåvene er tekne ut frå eit testsett som ikkje er publisert og eg vil difor berre kunne gi ei beskriving av kva dei går ut på, og elles vise til nokre frigjevne items (Ball & Hill, 2008). Oppgåvene dreier seg om ulike måtar å konkretisere eller «kontekstualisere» på. Den eine, oppgåve 8, er at ein nyttar figurar for å representere ei utrekning, og den andre, oppgåve 9, er at ein nyttar rekneforteljingar for å representere eller vise og forklare ei utrekning. Begge oppgåvene dreier seg om divisjon med brøk. Strukturen og fokus i spørsmålsstillingane på oppgåvene kan jamførast med dei frigjevne itemsa, men innhaldet er ikkje det same:

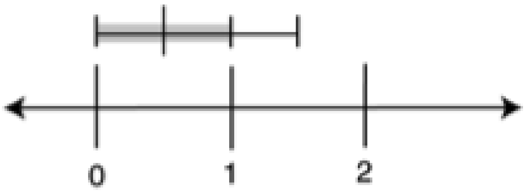
6. At a professional development workshop, teachers were learning about different ways to represent multiplication of fractions problems. The leader also helped them to become aware of examples that do <u>not</u> represent multiplication of fractions appropriately.

Which model below <u>cannot</u> be used to show that $1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$? (Mark ONE answer.)

A) 

B) 

C) 

D) 

7. Which of the following story problems could be used to illustrate $1\frac{1}{4}$ divided by $\frac{1}{2}$? (Mark YES, NO, or I'M NOT SURE for each possibility.)

	Yes	No	I'm not sure
a) You want to split $1\frac{1}{4}$ pies evenly between two families. How much should each family get?	1	2	3
b) You have $1.25 and may soon double your money. How much money would you end up with?	1	2	3
c) You are making some homemade taffy and the recipe calls for $1\frac{1}{4}$ cups of butter. How many sticks of butter (each stick = $\frac{1}{2}$ cup) will you need?	1	2	3

Døme frå dei frigjevne itemsa (Ball & Hill, 2008, s. 7 og 8).

Når eg seinare skal presentere resultata frå analysen vil eg vise til kva for eit fokusgruppeintervju og kva for eit nummer utsegna i transkripsjonane er henta frå. Til dømes:

190 Oda: Men, før det så sikrer vi jo at det står liksom i bunn≈

191 Gerd: ≈Ja≈

192 Oda: ≈når de har sett på, og ser de mestrer (…) (FGI-2).

Her refererer eg til fokusgruppeintervju nummer to, utsegn nummer 190, 191 og 192.

Dei skriftlege refleksjonane er samla i eit Excel-dokument og eg vil difor referere til utsegnene etter kor dei kan lesast i rad og kolonne. Til dømes:

> Ja, helt klart. Divisjon av brøk kommer inn på slutten av 7. klasse og er et område der de fleste elever (og sannsynligvis mange lærere) sliter. Forstår ikke hva oppgaven betyr (hva det spørres om) en gang. Viktig at lærer er trygg på dette, slik at en unngår snarveien med å presentere algoritmen med en gang. Algoritmen er grei, men forståelsen må på plass først (…) (Skriftlege refleksjonar, O-19).

Dette tyder at den skriftlege refleksjonen kan lesast i kolonne O og rad 19 i Excel-dokumentet.

3.3 Gjennomføring

Dei 22 lærarane (9 menn og 13 damer) deltok i eit modulbasert etterutdanningskurs i matematikk ved Universitetet i Stavanger. Kurset gjekk over tre semester med start hausten 2011 der kvar modul ga 10 studiepoeng. Ti UKM-oppgåver, utvida med kommentarfelt, vart levert ut som eit arbeidskrav etter den fyrste dagen i den fyrste modulen. Arbeidet med oppgåvene og refleksjonane rundt desse føregjekk i månadene før fokusgruppeintervjuet vart gjennomført (jf. Colussi, 2007, referert i Fauskanger & Mosvold, 2013b) mot slutten av det fyrste semesteret, i november 2011.

Stipendiat Janne Fauskanger, som var ein av kurshaldarane, tok utgangspunkt i svar og skriftlege refleksjonar frå UKM-oppgåvene då ho laga intervjuguiden (sjå vedlegg 2) – for å kunne gå i djupa. Hennar utgangspunkt for å gjennomføre intervjua var interessa kring kva epistemologiske oppfatningar lærarar har om kunnskap som er viktig for dei sjølv og deira refleksjonar rundt dette. Det vart gjort lydopptak frå intervjua som vart og transkribert etterpå (sjå vedlegg 1).

3.4 Analyse av data

Eg har utført ein tradisjonell innhaldsanalyse («conventional content analysis») av transkripsjonane og dei skriftlege refleksjonane på ordnivå. Ein slik type analyse vert vanlegvis nytta for å skildre eit fenomen (Hsieh & Shannon, 2005), i dette tilfelle oppfatningar hjå lærarar kring den kunnskapen dei treng når det gjeld representasjon av brøk i undervisninga. Dette er eit område der det er avgrensa mengder litteratur, og då kan ein slik analyse passe bra. Hsieh og Shannon (2005) si beskriving av korleis ein innhaldsanalyse kan verte gjort går ut på at ein startar med å lese gjennom alle data, på same måte som ein ville lese ein roman, for å få eit inntrykk av innhaldet. Deretter går ein i gang med å lese alle data ord for ord å utleie kodar. Denne kodeprosessen startar med å markere ord frå teksten som synast å få fram dei viktigaste tankane. Vidare kan ein notere seg dei fyrste inntrykka og tankane for ein tidleg analyse, før ein til slutt set ut merkelappar og sorterer i kategoriar.

Med dette som utgangspunkt starta eg å lese alle data frå fokusgruppeintervjua og dei skriftlege refleksjonane for å få ei kjensle av heilskap. Deretter gjekk eg gjennom dataa og markerte ord som fekk fram det viktigaste som vart sagt kring undervisning-, forståing- og representasjon av brøk. Eg samla dei markerte orda alfabetisk i dataprogrammet Excel, ei kolonne per intervju, og ei samla for alle intervjua. Eit utval av desse orda, dei eg syns sa mest om ulike kunnskapar kring brøk, tok eg med meg inn i dataprogrammet Yoshikoder (Lowe, 2012) og såg på kvart av dei seks fokusgruppeintervjua på kva som vart sagt kring dei ulike orda. Her noterte eg ned ulike tankar og inntrykk kring undervisning-, forståing- og representasjon av brøk – som seinare vart endra til algoritme, representasjon av brøk og illustrasjon, og som no fungerte som merkelappar. Etter å ha gått gjennom alle data og fargekoda ut frå dei tre hovudkategoriane, samla eg dei farga utsegnene i tre dokument og vidare sorterte dei i underkategoriar. Underkategoriane vart laga med utgangspunkt i det som vart sagt eller skrive av informantane med unntak av dei under «representasjon av brøk». Her sat eg opp underkategoriane ut i frå Breiteig og Venheim (1998) sine inndelingar om kva brøk kan vere. Dette gjorde eg for å kunne sjå korleis lærarane ser på brøkomgrepet og for vidare å kunne sjå dette i samanheng med korleis lærarane nyttar ulike representasjonar av brøk med elevane.

Til slutt såg kategoriseringa ut som følgjar;

1. Lærarane sine oppfatningar kring den undervisningskunnskapen dei treng i arbeidet med algoritmar i brøkemnet
    - Forståing før algoritme
    - Algoritme som støtte for eleven si forståing
    - «Algorimefella»
    - Generelle tankar om «standardalgoritme»

2. Lærarane sine oppfatningar kring den undervisningskunnskapen dei treng når det gjeld ulike representasjonar av brøk
    - Brøk som del av eit heile
    - Eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal
    - Ei samanlikning mellom ein del og eit heile
    - Svaret på ei divisjonsoppgåve
    - Ein måte å samanlikne to mengder eller to mål på
3. Lærarane sine oppfatningar kring den undervisningskunnskapen dei treng når det gjeld å lette elevane si forståing av brøk
    - Illustrasjon/teikning/figur/modell
    - Kvardag
    - Konkretar
    - Tekstoppgåver
    - Rekneforteljingar

Eg har valt ut dei utsegna der lærarane seier konkret kva som er viktig å kunne – helst med døme. Dersom dei berre seier «det er viktig å kunne målingsdivisjon» har eg ikkje teke dei med.

Ein del av det som vert sagt kring bruken av reglar har eg òg teke med i kategorien om algoritmar. Dette har eg gjort av di eg tolkar at mykje av det som vert sagt der har sterk samanheng med algoritme å gjere.

Då kategoriseringa var gjort og eg så smått var i gang med analysen, såg eg meir og meir kva eg ville ta fatt i. Etter at eg hadde valt ut utsegna som skulle vere med vidare i resultatkapitlet såg eg eit behov for å lage ein ekstra kategori der lærarane uttaler at dei tykkjer itemsa var vanskelege. Dette hadde eg lyst å sjå nærmare på i forhold til kva eg ynskte å ta opp i diskusjonen. Likeeins var det enkelte av underkatergoriane eg såg at eg ikkje kom til å ta med vidare til drøfting i resultat- og diskusjonskapitla. Dette gjaldt til dømes for kategorien «Lærarane sine oppfatningar kring den undervisningskunnskapen dei treng når det gjeld å lette elevane si forståing av brøk». Då eg ser på rekneforteljing og tekstoppgåver som ein måte å setje oppgåver i kontekst, valde eg å la heile denne kategorien dreie seg om illustrasjonar – der illustrasjon, teikning, figur, modell og konkretar vart jamstilte.

3.5 Etiske refleksjonar

Då eg ikkje har delteke i prosessen frå dei ti UKM-oppgåvene vart levert ut som eit arbeidskrav, utarbeiding av intervjuguiden til fokusgruppeintervjua, sjølve intervjua og transkripsjonane av dei, så er det klart at eg har hatt eit anna utgangspunkt for å arbeide med desse dataa. Ved å nytte eit datamateriale andre har samla inn krev at eg syner respekt overfor både dei som har samla inn dataa og informantane.

I Johannessen, Tufte og Christoffersen (2010) vert det anbefalt at den som har samla inn dataa òg er den som bør analysere og fortolke dei, av di teoriar, hypotesar og forskaren si føreforståing er viktige utgangspunkt for analysen. Kvalitative data talar ikkje for seg sjølv – dei må fortolkast. Analyseprosessen startar allereie i transkriberingsarbeidet der forskaren sjølv transkriberer datamaterialet. Då eg har gått inn i eksisterande data som er ferdig transkribert og dermed gått glipp av denne prosessen, må eg vere observant på at eg kan ha mista litt av det gode grunnlaget for analysen. Ulempa kan vere at «dei riktige» spørsmåla for min studie kanskje aldri vart stilt, at eg må vere observant på faren for å «vri» på spørsmåla og svara. På den andre sida kan det kanskje vere ein fordel at datainnsamlinga og transkripsjonane ikkje er prega av kva svar eg ynskjer å oppnå, den vert no berre sett på frå ein annan ståstad.

Johannessen, Tufte og Christoffersen (2010) har òg skrive at ein forskar skal vere observant på dei meir eller mindre klare oppfatningane han har med seg inn på førehand om det han ynskjer å undersøke. Den «bagasjen» forskaren tek med seg, kan vere basert på eigne erfaringar og oppfatningar eller på forskingsbasert kunnskap. Vidare i utveljinga av kva data som skal nyttast og presenterast vil informasjon verte tillagt meining ut frå desse førehandsoppfatningane og kva forskaren legg mest vekt på.

I ein slik type forskingsdesign som eg har nytta, kvalitativ, så vil ein del av resultata ikkje kunne generaliserast. Det vil òg gjelde for denne studien, men ut frå problemstillinga mi så er heller ikkje det poenget. Problemstillinga mi søkjer eit beskrivande svar, og det ville eg ikkje fått med ei kvantitativ tilnærming. Då er det viktigare for meg å kunne vise til at dei resultata eg har funne er pålitelege. Dei regelfaste møta med rettleiar, mykje lesing av litteratur frå tidlegare forsking i tillegg til at eg har treft medstudentar for å diskutere moglege kategoriar og kategoriseringa, gjer at eg meiner at studien er påliteleg.

4.0 Resultat

Kva oppfatningar lærarar har kring den undervisningskunnskapen dei treng når det gjeld representasjon av brøk kom fram både i dei skriftlege refleksjonane og i alle seks fokusgruppeintervjua. Gjennom arbeidet med analysen identifiserte eg tre kategoriar, og eg ynskjer no å presentere resultatet av analysane diskutere problemstillinga mi i forhold til dei tre kategoriane.

Fyrst vil eg presentere dei resultata eg fann om kva oppfatningar lærarane har kring bruken av algoritmar, deretter vil eg syne kva representasjonar av brøk det kan sjå ut som at lærarane helst nyttar og til slutt korleis lærarane uttaler at dei illustrerer dette for elevane.

Undervegs i analysearbeidet kom eg over fleire utsegn der lærarane uttaler at dei syns at nokon av itemsa var vanskelege. Nokre av desse utsegna vil eg difor ta med der det vil vere naturleg ut i frå samanhengen.

4.1 Algoritme

I både fokusgruppeintervjua og dei skriftlege refleksjonane kom det opp tankar kring bruken av algoritmar – både generelt og meir spesifikt om brøkemnet. Dei fleste synte ei oppfatning om at tidspunktet for ein eventuell introduksjon av algoritme hadde mykje å bety. Fleire av utsegna kan støtte opp tanken om betydinga av at læraren legg til rette for at elevane si forståing må vere på plass før ein eventuelt introduserer ein algoritme. Følgjande døme er frå dei skriftlege refleksjonane og er teke ut i frå eit svar på spørsmålet om i kor stor grad lærarane syns at den type oppgåver med ulike representasjonar, slik som «oppgåve 8», speglar viktig kunnskap for dei som lærarar. Det er Inge som underviser på mellomtrinnet som skriv:

> Ja, helt klart. Divisjon av brøk kommer inn på slutten av 7. klasse og er et område der de fleste elever (og sannsynligvis mange lærere) sliter. Forstår ikke hva oppgaven betyr (hva det spørres om) en gang. Viktig at lærer er trygg på dette, slik at en unngår snarveien med å presentere algoritmen med en gang. Algoritmen er grei, men forståelsen må på plass først (…) (Skriftlege refleksjonar, O-19).

Med over 10 års erfaring som lærar, skriv Inge her om kor viktig han syns slike type oppgåver med ulike representasjonar er. Han skriv òg om divisjon av brøk som kjem inn på slutten av 7. klasse. Då har elevane arbeidd med brøk meir eller mindre i fire år. Inge har erfart at mange elevar ikkje forstår kva oppgåvene tyder, eller kva det eigentleg vert spurt om. Dette kan jamførast med tidlegare forsking der det er vist at mange elevar lærer operasjonar med brøkar gjennom prosedyreorientert, minnebasert undervisning, og at mange av dei sit att med lita forståing for slike operasjonar (Son & Senk, 2010). Inge ser då verdien av ein lærar som er trygg på emnet og som kan leggje til rette for elevane si forståing før han presenterer algoritmen. Det kan jamførast med kunnskapsområdet spesialisert fagkunnskap i UKM-modellen, der læraren si faglege forståing er heilt naudsynt (Fauskanger, 2012).

Også i fokusgruppeintervjua er det utsegner som støtter denne oppfatninga. Det neste dømet er henta frå fokusgruppeintervju nummer to der det er ein samtale kring når det kan passe å introdusere ein algoritme. Det er Oda og Gerd som båe to underviser på småskuletrinnet, som deler oppfatninga om at forståinga må stå i botn hjå elevane før ein eventuell algoritme kan presenterast:

190 Oda: Men, før det så sikrer vi jo at det står liksom i bunn≈
191 Gerd: ≈Ja≈
192 Oda: ≈når de har sett på, og ser de mestrer (…) (FGI-2).

Dette synet kan jamførast med Beswick (2012) si kategorisering av dei ulike oppfatningane til lærarar, og desse lærarane kan seiast å ha eit platonisk syn på matematikken. Dei syner ei oppfatning om ei innhaldsfokusert matematikkundervisning med vekt på forståing og ser på læring av matematikken som noko elevane aktivt må konstruere ei forståing av. Denne oppfatninga er i tråd med det Utdanningsdirektoratet (2006) skriv om å gi elevane eit solid grunnlag for forståinga av brøkomgrepet.

Fleire lærarar uttaler at dersom ein introduserer algoritmen før forståinga er på plass, så kan det føre til at elevane blandar reglane. I fokusgruppeintervju nummer to snakka gruppa litt generelt kring algoritmar og reglar, og det er i samband med det at Brit uttaler:

> 254 Brit: ≈(…) ja, så (…) går kanskje sånne regler litt på bekostning av forståelse, at de ikke helt forstår eh, det som er bak regelen. At de lærer en regel og så lærer de kanskje en til og så er det sånn «nei, hvordan var det nå?» og så blander de reglene og så, ja (FGI-2).

Brit har over 21 år erfaring som lærar og har sett følgjene der elevane har lært seg fleire reglar før dei er klar, og etter kvart vil begynne å blande desse av di forståinga ikkje ligg til grunn. Denne oppfatninga vert støtta av Utdanningsdirektoratet (2006) som skriv at med forståing i botn kan ein unngå at brøkrekning blir mekanisk og drillprega, og at introduksjonen av brøk og variablar på høgare trinn blir lettare.

Også i dei skriftlege refleksjonane på spørsmål om denne typen items, som i oppgåve 8, speglar viktig matematikkfagleg/matematikkdidaktisk innhald på det trinnet lærarane sjølv underviser på, er dette eit tema. Til dømes skriv Kjell:

> (…) Ved divisjon med brøk som divisor har noen elever lett for å bruke instrumentell forståelse (multiplisere med den omvendte brøken). Men ikke vite hvorfor. Derfor surres det lett til «hva gjør jeg nå? gange? dele? rett vei? på hodet?» (Skriftlege refleksjonar, N-13).

Kjell underviser på ungdomstrinnet, og etter over 21 år som lærar har han sett at nokon elevar nyttar algoritmar utan å forstå kva bakgrunnen for dei ulike operasjonane er. Dette refererer han til som instrumentell forståing. Dette omgrepet kan jamførast med Beswick (2012) si beskriving av lærarar med eit instrumentelt syn på matematikk, der elevane si læring av matematikk fort kan bli prega av pugging av algoritmar utan fokus på forståing. Kjell ser ulempene med å ha eit slikt syn på matematikk, og han ser også problemet med blanding av reglar dersom forståinga ikkje ligg i botn.

Når så algoritmane eventuelt skal takast fram er diskusjonen om i kor stor grad lærarane bør halde seg til ein «standardalgoritme». Dei fleste uttaler at dei syns det er viktig å leggje til rette for at elevane får innblikk i ulike måtar å løyse problem på. Det neste dømet er henta frå fokusgruppeintervju nummer ein der Janne spør om lærarane syns det er viktig å kunne fleire algoritmar:

> 178 Janne: Er det viktig for dere å kunne de?
>
> 179 Flere: Ja (FGI-1).

Dette kan jamførast med kunnskapsområdet spesialisert fagkunnskap i UKM-modellen, der læraren kan finne ut om ein framgangsmåte gjeld generelt (Fauskanger, 2012).

Også i fokusgruppeintervju nummer to syner lærarane ei oppfatning om at det er viktig å kunne fleire algoritmar. Her er det samtale kring elevar sine forslag til tenkjemåtar og korleis ein tek tak i dei:

> 16 Gro: ≈Og så synes jeg også at når du får den diskusjonen med elevene, at de «ja, jeg tenker sånn, og hvordan tenker du?» og så at de på en måte, og så viser jeg hvordan jeg tenker og at vi får den (…)≈
>
> 17 Oda: ≈(…) det er liksom ikke svaret jeg er ute etter heller men at de tenker og vi har den samtalen, at de tørr, om de kommer frem til det når de ikke er sikre og de vet «ja, men jeg tenker sånn og…» (FGI-2).

Gro som òg til dagleg underviser på småskuletrinnet, trekk fram dei gongene der ho klarer å få ein diskusjon i klassen om ulike tenkjemåtar. Både Gro og Oda har arbeidd i skulen meir enn 10 år, og Oda legg til at det i slike tilfelle for henne ikkje plent er viktig å få fram svaret, men heller fokuserer på at elevane skal tore å syne korleis dei tenkjer og korleis dei arbeider seg fram til eit svar. Dette kan her jamførast med Beswick (2012) si beskriving av eit konstruktivistisk syn på matematikk der ein heller framhever prosessen enn resultatet, og Van de Walle (2001, referert i Son & Senk, 2010) som i sine retningslinjer for å utvikle rekning med brøk, blant anna ynskjer at lærarane skal oppmuntre elevane til å bruke si eiga tenking.

Det er ikkje alltid at slike «korleis tenker du»-samtalar kan resultere i ein algoritme, men her kan idéen vere at dersom læraren sit inne med fleire algoritmar, så vil dei kanskje òg vere i stand til å kunne kople dei opp i mot dei mange forslaga til løysingsmetodar som kan kome opp i ein klasse.

I fokusgruppeintervju nummer tre der det vert diskutert kva lærarar treng av kunnskap om ulike algoritmar, vert dette støtta opp av Eli. Ho har arbeidd på småskuletrinnet i over fem år, og uttaler at ho syns at lærarar må kunne fleire algoritmar, eller i alle fall vete at det fins fleire måtar å løyse oppgåver på:

> 197 Eli: (…) Og så må du kunne litt forskjellige, du må jo det, i alle fall vite at det finnes flere måter å gjøre det på≈ (FGI-3).

Dette kan igjen jamførast med UKM-modellen med kunnskapsområda spesialisert fagkunnskap, der læraren kan finne ut om ein framgangsmåte gjeld generelt, i tillegg til horisontkunnskap der læraren skal kunne forstå og tolke eigne elevar si tenking (Fauskanger, 2012).

Når alt kjem til alt kan det sjå ut som om dei fleste lærarane ynskjer at elevane skal oppdage ein felles algoritme – ofte omtalt som «standardalgoritme». Dette kan illustrerast med eit døme frå fokusgruppeintervju nummer to der samtalen dreier seg om elevar som nyttar ulike algoritmar:

> 186 Janne: (…) Men, der vi ikke har fine tall og lave tall da, hva skal vi da gjøre?
> 187 Brit: Jeg tenker at det er da vi begynner med det som vi kaller for standard-algoritmer, altså lærer de det, fordi det fungerer, vet vi≈
> 188 Gro: ≈Med alle sammen≈
> 189 Brit: ≈med alle tall, både… (FGI-2).

Brit syner her ei oppfatning om at lærarane – etter at elevane har forstått rekneoperasjonane for dei lågare tala – kan lære i frå seg «standardalgoritmane» som ein veit fungerer. Gro er samd, og dei legg til at dei her snakkar om dei algoritmane ein er sikker på fungerer med alle tal. Som me òg såg ovanfor i utsegna til Inge kring tidspunktet for ein eventuell introduksjon av algoritme, der han skreiv «Algoritmen er grei, men forståelsen må på plass først». Det synast ganske klart her at ved å skrive «algoritmen» i bestemt form siktar Inge til ei spesifikk algoritme.

Etter samtalen kring elevar som nyttar ulike algoritmar, i fokusgruppeintervju nummer to, syner Brit og Gro ei oppfatning om at elevane skal kjenne at dei kjem fram til dei ulike «standardalgoritmane» sjølv – eller i lag med lærarane – ved hjelp av oppgåver, aktivitetar og døme:

296 Gro: Ja, men de må likevel få lov til å kjenne at det er litt deres, at vi kom frem til dette≈

297 Brit: ≈Det tror jeg er viktig, ikke bare presentere det men at de kanskje gjennom oppgaver, aktiviteter≈

298 Gro: ≈Ja≈

299 Brit: ≈kan finne ut av det≈

300 Gro: ≈Ja, litt eksempel på tavla som viser litt forskjellige ting≈

301 Gerd: ≈«Ja hvor har du sett dette før? Hva tenker du på når du ser dette?», ja og så har noen gjerne sett noe liknende og så (ukjent tekst) (FGI-2).

Gerd seier seg samd med det Gro og Brit uttaler, og syner i tillegg ei oppfatning kring verdien av å få elevane til å tenkje på kva dei har av kunnskapar frå før, og sjå relasjonane mellom desse (jf. relasjonsforståing). Dette kan jamførast med Fauskanger, Bjuland og Mosvold (2010) si beskriving av lærarar sin matematiske horisontkunnskap i UKM-modellen der det dreier seg om korleis matematiske emne i læreplanen bygg på einannan og heng saman, og som er viktig for at lærarar skal kunne forstå og tolke eigne elevar si tenking, og planlegge vidare utfordringar til elevane (Fauskanger, 2012).

4.2 Representasjon

Fleire av lærarane i fokusgruppeintervjua og dei skriftlege refleksjonane uttaler korleis dei arbeider med brøk. Eg vel å sjå på måten dei seier eller skriv om korleis dei arbeider med representasjonar av brøk for elevane, også er det dei meiner er den riktige måten å gjere det på. Dei ulike representasjonane som vert teke opp her, vil eg knyte opp til Breiteig og Venheim (1998) sine fem inndelingar om kva brøk kan vere; «brøk som del av eit heile», «eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal», «ei samanlikning mellom ein del og eit heile», «svaret på ei divisjonsoppgåve» og «ein måte å samanlikne to mengder eller to mål på».

Dei fleste av dei deltakande lærarane syner ei oppfatning om at det er viktig å kunne arbeide med ulike representasjonar av brøk med elevane. Til dømes på spørsmål om kva elevane treng å lære meir om, har Oda, i sine skriftlege refleksjonar, svart:

> (…) Det er viktig med ulike representasjonsformer slik at brøk ikke berre vert knytta til ei av desse. Brøk som del av ein figur, som del av mengde, som tal på tallinja osv. Forståinga av kva dette dreier seg om er avgjerande for seinare å kunna rekna med brøk (Skriftlege refleksjonar, U-14).

Oda legg her vekt på verdien av å arbeide med ulike representasjonsformer for å unngå at brøk berre vert knyta til ei av desse. Dette kan jamførast med Askew (2000, referert i Kleve 2010) som òg hevda at dersom ein i hovudsak berre fokuserer på ein representasjon av brøk slik at det blir ein slags sosial konvensjon, kan hindre elevane sine moglegheiter for utviklinga av eit solid brøkomgrep. Oda syner òg matematisk horisontkunnskap (jf. Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010) ved å leggje vekt på kor avgjerande elevane si forståing av ulike representasjonsformer av brøk er for seinare å kunne arbeide med emnet. Ho trekk fram representasjonar som «ein del av eit heile», «ei samanlikning mellom ein del og eit heile» og «eit punkt på tallinja mellom to heile tal».

Etter å ha gått igjennom data frå alle seks fokusgruppeintervjua og dei skriftlege refleksjonane frå dei 22 deltakarane er det berre i denne utsegna til Oda at det vert nemnt noko som helst om representasjon av brøk som eit punkt på tallinja. Det er likevel ikkje knytt noko døme til denne utsegna, noko som ikkje fortel korleis Oda eventuelt nyttar dette i klasserommet.

Brøk representert som «eit punkt på tallinja mellom to heile tal» og «ein måte å samanlikne to mengder eller to mål på» kan sjå ut til å få lite fokus i lærebøkene (jf. mitt gjennomsyn av ulike lærebøker). Heller ikkje representasjonen «ein måte å samanlikne to mengder eller to mål på» er nemnt meir enn ei gong i datamaterialet. Det er Gro som på spørsmål om kva elevane treng å lære meir om, i sine skriftlege refleksjonar, svarer:

> Dei treng å læra om at brøk kan sjås på som operatør som for eksempel trefemdeler av 1000 (Skriftlege refleksjonar, U-17).

Gro syner ei oppfatning om at elevane må lære å kunne uttrykkje kor mykje noko er i forhold til noko anna. Dette legg òg Breiteig og Venheim (1998) vekt på i forhold til å kunne rekne med brøk – om ein skal tolke brøk anten som ein talstorleik eller eit mål, eller som ein operator – og påstår at multiplikasjon og divisjon ofte er lettare å tolke meiningsfylt når ein ser brøk som operator.

Dei representasjonane av brøk som oftast vart dregne fram – både i fokusgruppeintervjua og i dei skriftlege refleksjonane – er brøk som «ein del av eit heile», eller som «ei samanlikning av ein del og eit heile». Dette kan illustrerast med dømet frå dei skriftlege refleksjonane der Inga svarer på spørsmål om oppgåve 9 spegla viktig matematikkfaglig/matematikkdidaktisk innhald på det trinnet ho underviser:

> (…) Vi lærer om brøker som deler av en helhet, og hvordan for eksempel finne ut hvor mange ¼ deler det er i 1 (…) (Skriftlege refleksjonar, V-5).

Inga arbeider på småskuletrinnet og uttaler at elevane hennar lærer om brøkar som «ein del av eit heile». Dette kan ha samband med korleis lærebøkene syner representasjonar av brøk. Det er tydeleg at brøk i lærebøkene helst vert representert som «ein del av eit heile» og som «ei samanlikning mellom ein del og eit heile» (jf. mitt gjennomsyn av ulike lærebøker).

På det spørsmål om oppgåve 8 speglar viktig matematikkfaglig/matematikkdidaktisk innhald på det trinnet dei underviser skriv til dømes Laura:

> Me deler ikkje med brøk i småskulen. Deling vert blant anna illustrert med at ei mengd blir delt på eit gitt antal (…) (Skriftlege refleksjonar, N-27).

Laura er lærar på småskule- og mellomtrinnet og denne utsegna syner at ho i sitt arbeid med brøk på småskulen blant anna nyttar representasjon av brøk som «ei samanlikning mellom ein del og eit heile». Dette kan jamførast Breiteig og Venheim (1998) der ein tolkar brøk som ein talstorleik eller eit mål når ein skal rekne med brøk. Brøk som eit mål vil då relatere brøken til ein heilskap.

At det kan synast som om lærarane helst arbeider med representasjon av brøk som «ein del av eit heile» eller som «ei samanlikning av ein del og eit heile», kan henge i saman med kva lærebøkene legg vekt på i deira arbeid med brøk. Då verken læreplan eller lærebøker seier spesielt mykje om korleis representasjon av brøk kan gå føre seg, eller syner nok døme på dei ulike representasjonane, så er det kanskje ikkje så rart at mange lærarar kan synast å halde fast ved brøk som «ein del av eit heile», eller som «ei samanlikning av ein del og eit heile». Dette er likevel noko Anghileri (2000) kom med forslag om å unngå, og framheva verdien av å vere i stand til å sjå brøken både som eit tal og som eit forhold som kan vere et resultat av ein rekneoperasjon. Askew (2000, referert i Kleve 2010) meinte at dersom lærarane berre hadde hovudfokus på representasjon av brøk som «ein del av eit heile», kunne det hindre elevane sine moglegheiter for utviklinga av eit solid brøkomgrep.

4.3 Illustrasjon

På same måte som med representasjon, vel eg å sjå på måten lærarane uttaler at dei illustrerer brøk for elevane, også er det dei meiner er det riktige.

Dei fleste uttaler at dei syns det er viktig å illustrere brøkar for elevane der hovudfunksjonen er å byggje opp under forståinga. Eit døme som kan få fram dette er Klara sitt svar i dei skriftlege refleksjonane på spørsmålet om oppgåve 8 speglar viktig kunnskap for henne som lærar:

> Ja, det er viktig i alle sammenhenger som lærer at de oppgaver en gir, og det konkretiseringsmateriellet en velger å benytte seg av, støtter opp om hverandre og kan hjelpe elevene til bedre forståelse (...) (Skriftlege refleksjonar, O-8).

Denne oppfatninga kan jamførast i Van de Walle (2001, referert i Son & Senk, 2010) sine retningslinjer for å utvikle rekning med brøk der han blant anna framhevar å nytte ulike representasjonar og modellar fleksibelt for å utvikle brøkuttrykk tilstrekkeleg. Klara er lærar på småskuletrinnet og skriv her om verdien av å nytte konkretiseringsmateriell i samband med løysing av oppgåver.

I fokusgruppeintervju nummer fem, i ein samtale kring verdien av å nytte figurar i undervisninga, seier Doris:

> 216 Doris: (…) At det ikke bare blir tall men at det blir i en kontekst, og det er jo også noe med å sette det i deres egen hverdag, at hvorfor kan vi bruke det? (…) (FGI-5).

Doris, som er lærar på småskule- og mellomtrinnet, syner her ei oppfatning om at illustrasjonar i undervisninga kan syne elevane at tala kan ha ei meining i deira eigen kvardag. Dette kan jamførast med Utdanningsdirektoratet (2006) som skriv om det viktige arbeidet med brøk i daglegdagse situasjonar på småskuletrinnet, og det solide grunnlaget for forståinga av brøkomgrepet det gir elevane.

Fleire lærarar deler Klara og Doris si oppfatning og går meir i djupa på kva for metodar som kan eigne seg til å byggje opp under elevane si forståing. I fokusgruppeintervju nummer ein samtala gruppa om det å forsøkje å gjere ting meir konkret for elevane. Dømet nedfor syner Mia og Jane sine utsegner kring verdien av å nytte illustrasjonar for byggje opp under forståinga.

187 Mia: (…) Fordi det gjør det liksom litt praktisk for ungene at du kan knytte det opp til deres hverdag, at de kan kjenne seg igjen i ting, at de forstår at det ikke bare er noen tall (…).

188 Jane: ≈Og tegninger de kan formidle mye selv altså. Vi tegner veldig selv når vi skal forstå ting. Og… For å ha det konkret. Spesielt med brøkene (…).

189 Mia: ≈Men de må jo være funksjonelle tenker jeg. At de må vise deg noe mer enn, altså de må hjelpe deg≈ (FGI-1).

Både Mia og Jane har mange års erfaring frå småskultrinnet. I desse utsegnene deira vert det lagt vekt på verdien av å knyte matematikken opp til elevane sin kvardag for å sjå konkret kva som ligg bak tala, og heile poenget med å nytte illustrasjonar er for å hjelpe elevane i si forståing. Denne oppfatninga er i tråd med det som Utdanningsdirektoratet (2006) skriv om å gi elevane eit solid grunnlag for forståinga av brøkomgrepet ved til dømes å nytte brøk i daglegdagse situasjonar, og at dersom elevane forstår kva dei gjer, vil introduksjonen av brøk og variablar på høgare trinn bli lettare.

Dei fleste lærarane uttaler at dei ofte nyttar illustrasjonar på tavla. Eit døme på kva ein slik illustrasjon kan vere, kan takast ut frå Inga sitt svar frå dei skriftlege refleksjonane på spørsmål om itemsa frå oppgåve 9 spegla viktig matematikkfaglig/matematikkdidaktisk innhald på det trinnet ho underviser:

> (…) Vi deler pizzaer i stykker, vi deler sjokoladeplater i biter, bretter papir for å finne ut hvor mange deler det er i en hel (…) (Skriftlege refleksjonar, V-5).

Dette er ein illustrasjon som kjem under representasjon av brøk som «ein del av eit heile». Det kan synast logisk at når dei fleste lærarane held seg til representasjon av brøk som «ein del av eit heile» eller som «ei samanlikning av ein del og eit heile», så vil òg illustrasjonane dei syner for elevane verte prega av det.

Mange av lærarane sine argument for å nytte illustrasjonar er, som oppfatningane vist ovanfor, at elevane skal kunne sjå for seg storleikane ved hjelp av konkretar eller teikningar på tavla, og for å knyte det opp mot kvardagen. Her kjem òg rekneforteljing og tekstoppgåver inn. Då eg ser på rekneforteljing og tekstoppgåver som ein måte å setje oppgåver i kontekst, vil eg ikkje ta med meir om dette i analysen min.

Både i fokusgruppeintervjua og i dei skriftlege refleksjonane er det utsegner som kan tyde på at mange av lærarane syns at itemsa frå oppgåvene med brøk var vanskelege. I fokusgruppeintervju nummer seks samtala gruppa om i kor stor grad lærarane nytta figurar i undervisninga med brøk. Ola har si erfaring frå lærar på ungdomstrinnet, og utsegna hans derifrå er eit døme på dette:

> 168 Ola: (…) jeg har brukt hele høsten på målingsdivisjon jeg, for å få til dette her med to-en så måtte jeg det. Så sliter sliter jeg litt mer med den siste, den var litt for overraskende (FGI-6).

Ola siktar her til to av itemsa frå oppgåve 8 der ein skal vurdere om ulike figurar kan nyttast som modell for reknestykka der både divenden og divisoren er brøk, og her tyder det på at Ola har oppdaga at ein i slike tilfelle kan tenkje i retning målingsdivisjon.

Dømet med Ola kan tyde på at lærarane er usikre på dei ulike måtane å representere brøk på. Dette kan jamførast med Son og Senk (2010) som ynskjer å få eit større balansert fokus på både omgrep og framgangsmåtar. På same måte som å nytte gjentatt addisjon som den grunnleggjande ideen ved multiplikasjon, føreslo Fischbein, Deri, Nello og Marino (1985, referert i Son & Senk, 2010) og Burns (2000) at det også kan vere aktuelt for å utvikle forståing for divisjon av brøkar – ved målings- og delingsdivisjon.

5.0 Diskusjon

Etter å ha sett på kva oppfatningar lærarane har kring bruken av algoritmar, kva representasjonar av brøk dei nyttar og korleis dei presenterer dette for elevane, vil eg no undersøke desse oppfatningane og vidare diskutere dette opp i mot det som læreplan og lærebøker fokuserer på.

5.1 Algoritme

Når det gjeld lærarane sitt syn på algoritmar så støttar fleire av utsegnene opp tanken om betydinga av at læraren legg til rette for at elevane får eit solid grunnlag for forståinga av brøkomgrepet, og at denne forståinga må vere på plass før ein eventuelt introduserer ein algoritme. Lærarane har ei klar uttale om å unngå at elevane puggar ein algoritme utan å forstå kvifor den kan nyttast, og ser at elevane fort kan blande reglar dersom forståinga ikkje ligg i botn.

I diskusjonane kring om lærarane bør halde seg til ein «standardalgoritme» uttaler dei fleste at dei syns det er viktig å leggje til rette for at elevane får prøve å arbeide seg fram til eit svar og å sjå ulike måtar å løyse problem på, og framhever så verdien av at lærarar kjenner til fleire algoritmar. I arbeidet med dette uttaler lærarane at det ikkje plent er viktig å få fram svaret, men at ein heller fokuserer på at elevane skal tore å syne korleis dei tenkjer og korleis dei arbeider seg fram til eit svar.

Likevel kan det sjå ut som om mange ynskjer at elevane skal oppdage den «standardalgoritmen» som læraren eller læreboka ofte nyttar – og som dei kan vere sikre på fungerer for alle tal.

I følgje Beswick (2012) og hans kategorisering av dei ulike oppfatningane til lærarar, kan lærarane her seiast å ha eit platonisk syn på matematikken. Dei syner ei oppfatning om ei innhaldsfokusert matematikkundervisning med vekt på forståing, og ser på læring av matematikk som noko elevane aktivt må konstruere ei forståing av. Denne oppfatninga er i tråd med det Utdanningsdirektoratet (2006) skriv om å gi elevane eit solid grunnlag for forståinga av brøkomgrepet. At lærarane vil unngå at elevane puggar ein algoritme utan å forstå kvifor den kan nyttast, kan støttast opp av resultat frå tidlegare forsking der det kom fram at mange elevar som har lært operasjonar med brøkar gjennom prosedyreorientert, minnebasert undervisning sit att med lita forståing for slike operasjonar (Son & Senk, 2010).

Ved å leggje til rette for at elevane skal tore å syne korleis dei tenkjer og korleis dei arbeider seg fram til eit svar støttar lærarane opp om Van de Walle (2001, referert i Son & Senk, 2010) si tidlegare forsking der han i sine retningslinjer for å utvikle rekning med brøk, blant anna ynskjer at lærarane skal oppmuntre elevane til å bruke si eiga tenking. Lærarane syner både horisontkunnskap, der læraren skal kunne forstå og tolke eigne elevar si tenking, og spesialisert fagkunnskap der læraren kan finne ut om ein framgangsmåte gjeld generelt (Fauskanger, 2012).

Ved eit tilfelle kan det sjå ut som om lærarane både syner eit platonisk og eit konstruktivistisk syn på matematikk (jf. Beswick, 2012). Det er Oda og Gerd som syner eit platonisk syn på matematikk ved å dele oppfatninga om at forståinga må stå i botn hjå elevane før ein eventuell algoritme kan presenterast. Men seinare i intervjuet uttaler Oda – då i samtale med Gerd – at det i slike tilfelle for henne ikkje plent er viktig å få fram svaret, men heller fokuserer på at elevane skal tore å syne korleis dei tenkjer og korleis dei arbeider seg fram til eit svar. Ei slik oppfatning kan jamførast med eit konstruktivistisk syn på matematikk der ein heller framhever prosessen enn resultatet (jf. Beswick (2012). Her vil eg støtte meg til Leatham (2006) sitt syn på oppfatningar om at det lærarane skriv, uttaler, seier at dei tenkjer, meiner, handlar og gjer, at det er ein fornuftig samanheng mellom oppfatningane og undervisningspraksisen deira. Dette kan kanskje henge i saman med at mange lærarar har eit konstruktivistisk syn på matematikk der elevane er i fokus og der matematikken kan sjåast på som ei dynamisk menneskeleg oppfinning. Men då mange lærarar kjenner seg utrygge kring enkelte emne, eller i dette tilfelle representasjonar av brøk, kan det kanskje verke hemmande og føre til at synet deira kan framstå som platonisk der matematikk er kunnskap som alltid har lege der og som elevane må finne, jf. ynsket om at elevane skal oppdage den «standardalgoritmen» som læraren eller læreboka ofte nyttar, som dei kan vere sikre på fungerer for alle tal og der lærarane kanskje då ynskjer å ha «kontroll» på kva elevane kjem fram til. Dersom lærarane hadde vore meir trygge på å nytte fleire ulike representasjonar av brøk, så ville dei kan hende heller ikkje vore så redde for om elevane nytta sine eigne reglar som grunnlag for forståinga si.

Etter å ha sett på korleis gonging, deling og brøk vert introdusert og vidare arbeidd med i lærebøkene, så kan ein tanke vere at forståinga for desse emna heng mykje i saman. Dersom lærarane støtter seg mykje til lærebøkene (jf. Lloyd, 2002, referert i Fauskanger & Mosvold, 2008), kan fort måten ulike emne vert arbeidd med der ha mykje å bety for korleis dette vert presentert for elevane.

Gonging – og seinare multiplikasjon – av heile tall vert i alle lærebøkene presentert som gjentatte addisjonar. På 5. trinn då elevane skal arbeide med rekning med brøk, vert dei førebudd på multiplikasjon av brøk – representert som gjentatt addisjon, og i følgje Mack (2000) kan dette vere ei årsak til at elevane slit med å multiplisere brøkar. Når elevane skal multiplisere to brøkar vert gongeteiknet i lærebøkene brått omtalt som «av». Til dømes i oppgåver av typen 1/3 x 2/5, der ein skal tenkje «ta ein tredjedel av to femtedelar», vil kanskje ikkje elevar med additive slutningar ha noko meiningsfull tolking. I introduksjonen av divisjon med brøk vert det førebudd til algoritmen der ein «snur den siste brøken og multipliserer oppe og nede». Hagen et al. (2006) skriv at «å dele 1/3 i 8 delar er det same som å rekne ut kor mykje 1/8 er av 1/3» og vidare «å dividere med ein brøk er det same som å multiplisere med den omvendte brøken» – utan nokon form for illustrasjon eller forklaring. Denne «algoritmen» vert repetert ut ungdomstrinnet og i den vidaregåande skulen; «Når vi skal dividere med en brøk, multipliserer vi med den omvendte brøken» (Oldervoll et al., 2006). Dette kan vere grunn for manglande forståing for arbeid med brøk hjå elevane.

Emnet deling vert ofte framstilt i lærebøkene ved hjelp av delings- og målingsdivisjon. Son og Senk (2010) rapporterte om tidlegare forsking der det var kome forslag om å nytte gjentatt addisjon som den grunnleggjande ideen ved multiplikasjon, og dei typar einingar og operasjonar barn konstruerer i heiltalrekka si kan lette omorganisering av brøkordningar. Dette argumentet kan òg vere aktuelt for å utvikle forståing for divisjon av brøkar der divisjon av heile tal kan verte presentert som gjentatt subtraksjon, ofte omtalt som målingsdivisjon. I mitt utval av lærebøker såg eg ingen oppgåver av typen delings- eller målingsdivisjon som var meir avanserte enn 6 ÷ 3/4 eller 2/3 ÷ 4, altså ingen oppgåver av denne typen som tek for seg oppgåver der både dividenden og divisor er i brøkform, til dømes 6/7 ÷ 3/5. Med slike oppgåver kunne det kanskje passe fint å gå vidare til divisjon med brøk med ideen «kor mange mengder av ´det siste talet` får du av ´det første?`», og då hjelpe elevane i den vanskelege overgangen frå gjentatt subtraksjon til å kunne forstå bakgrunnen for ulike algoritmar.

5.2 Representasjon

Lærarane deler oppfatninga om at det er viktig å kunne arbeide med ulike representasjonar av brøk med elevane – dei fleste for å unngå at brøk berre vert knyta til ei representasjonsform, og nokre få for å kunne tolke brøk både som ein talstorleik eller eit mål og som ein operator.

Dei representasjonane av brøk som oftast vart dregne fram i lærarane sine eigne døme – både i fokusgruppeintervjua og i dei skriftlege refleksjonane – er likevel brøk som «ein del av eit heile» eller som «ei samanlikning av ein del og eit heile».

Oppfatninga om at det er viktig å kunne arbeide med ulike representasjonar av brøk med elevane kan jamførast med Askew (2000, referert i Kleve 2010) som hevda at dersom ein i hovudsak berre fokuserer på ein representasjon av brøk slik at det blir ein slags sosial konvensjon, kan hindre elevane sine moglegheiter for utviklinga av eit solid brøkomgrep.

At lærarane helst berre dreg fram arbeid med brøk som «ein del av eit heile», eller som «ei samanlikning av ein del og eit heile», kan igjen ha samband med at mange lærarar uttaler at dei kjenner seg lite trygge på dei ulike itemsa med representasjonane av brøk. Dette kan, igjen, henge i saman med korleis lærebøkene vel å arbeide med representasjonar av brøk.

I mitt utval av norske lærebøker er det tydeleg at det vert mest arbeidd med brøk representert som «ein del av eit heile» og «ei samanlikning mellom ein del og eit heile». Representasjonen av brøk som «eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal» og «ein måte å samanlikne to mengder eller to mål på» vert presentert litt i lærebøkene på nokon trinn, men ut i frå kva lærarane i denne studien uttaler, så er det ikkje noko det vert særleg lagt vekt på i undervisninga. Om dette kan skuldast lærarane eller lærebøkene er vanskeleg å seie.

Den fyrste gongen elevane vert presentert for brøk i lærebøkene er i samband med oppgåver som å «dele kaka likt mellom kvar» – representert ved «brøk som ein del av eit heile», og vidare å fargeleggje ein todel av til dømes ei kake delt i tolv – representert ved brøk som «ei samanlikning mellom ein del og eit heile». Då verken læreplan eller lærebøker skriv spesielt mykje om korleis representasjon av brøk kan gå føre seg, eller syner nok døme på dei ulike representasjonane, så er det kanskje ikkje så rart at mange lærarar nyttar lærebøkene og då kan synast å halde fast ved brøk representert som «ein del av eit heile», eller som «ei samanlikning av ein del og eit heile». Faren med dette kan igjen jamførast med Askew (2000, referert i Kleve 2010) som hevda at dersom ein i hovudsak fokuserer på brøk som del av ein heil slik at det blir ein slags sosial konvensjon, kan dette hindre moglegheitene for utviklinga av eit solid brøkomgrep. Anghileri (2000) kom òg med forslag om å unngå å fokusere mykje på å kunne identifisere brøk som del av ein heilskap, og framheva verdien av å vere i stand til å sjå brøken både som eit tal og som eit forhold som kan vere et resultat av ein rekneoperasjon. Dette legg òg Breiteig og Venheim (1998) vekt på i forhold til å kunne rekne med brøk – om ein skal tolke brøk anten som ein talstorleik eller eit mål, eller som ein operator – og påstår at multiplikasjon og divisjon ofte er lettare å tolke meiningsfylt når ein ser brøk som operator.

5.3 Illustrasjon

Dei fleste uttaler at dei syns det er viktig å illustrere brøkar for elevane der hovudfunksjonen er å byggje opp under forståinga – både for å kunne sjå for seg storleikane ved hjelp av teikningar på tavla eller konkretar, og for å knyte det opp mot kvardagen for handgripeleg å sjå kva som ligg bak tala. På same tid uttaler mange lærarar at dei syns at brøkitemsa frå UKM-oppgåvene var vanskelege. I døma lærarane sjølv dreg fram, kan det tyde på at dei helst nytter representasjonane «brøk som del av ein heil» og brøk som «ei samanlikning mellom ein del og eit heile» i illustrasjonane sine.

Oppfatninga om viktigheita av å illustrere brøkar for elevane, kan jamførast med Van de Walle (2001, referert i Son & Senk, 2010) sine retningslinjer for å utvikle rekning med brøk der han blant anna framhevar å nytte ulike representasjonar og modellar fleksibelt for å utvikle brøkuttrykk tilstrekkeleg. Utdanningsdirektoratet (2006) skriv òg om det viktige arbeidet med brøk i daglegdagse situasjonar på småskuletrinnet, og det solide grunnlaget for forståinga av brøkomgrepet det gir elevane. Van de Walle (2001, referert i Son & Senk, 2010), kom òg med råd om at arealmodellar (til dømes rektangel), lengdemodellar (til dømes tallinjer), og mengdemodellar (til dømes kuler) bør nyttast på alle klassetrinn for å utvikle brøkuttrykk tilstrekkeleg fordi «a change in the modell usually marks a significant change in the activity from the viwpoint of the children» (s. 209) (Son & Senk, 2010).

I mitt utval av norske lærebøker, der det tydeleg vert mest arbeidd med brøk representert som «ein del av eit heile» og «ei samanlikning mellom ein del og eit heile», er det òg desse to representasjonane av brøk som stort sett vert illustrert.

Representasjon av brøk som «eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal» var langt mindre representert i lærebøkene enn både «brøk som ein del av eit heile» og brøk som «ei samanlikning mellom ein del og eit heile». På 5. trinn, i til dømes Alseth, Nordberg og Røsseland (2010), når dei kjem til emnet desimaltal, er det merkbart meir arbeid med tallinja enn med emnet brøk. Ein studie av Novillis (1976) viste at modellar av brøk som ein del av ein heilskap eller samanlikning av grupper, var lettare for born å forstå enn som eit punkt på tallinja. Novillis viste til arbeid med brøkar som ikkje var større enn éin. I motsetning til del av ein heilskap eller samanlikning av grupper, vil ikkje tallinja som modell få fram at ein brøk kan sjåast på som eit konkret objekt (Kleve, 2010). Derimot kan tallinja konkretisere uekte brøkar meir naturleg meinte Dickson, Brown og Gibson (1984). Dersom lærarane støtter seg mykje til lærebøkene, kan det tyde på at elevane ikkje i tilstrekkeleg grad får arbeidd med brøk representert som «eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal».

At lærarane helst berre nyttar representasjonane «brøk som del av ein heil» og brøk som «ei samanlikning mellom ein del og eit heile» i illustrasjonane sine, kan igjen skuldast at mange av lærarane uttaler at dei er utrygge på dei ulike representasjonane av brøk – i tillegg til lærebøkene sin måte å illustrere dei ulike representasjonane av brøk, og K 06 si manglande føring på korleis representasjon av brøk kan gå føre seg.

6.0 Konklusjon

I min søken etter å finne eit svar på kva for oppfatningar lærarar har om den kunnskapen dei treng i undervisninga knyta til ulike representasjonar av brøk, har eg i denne studien sett på lærarar sine oppfatningar kring bruken av algoritmar, kva representasjonar av brøk det kan sjå ut som at lærarane helst nyttar og til slutt korleis lærarane uttaler at dei illustrerer dette for elevane. Ved å sjå på 22 lærarar sine skriftlege og munnlege refleksjonar kring oppgåver med brøk, har eg undersøkt desse oppfatningane og vidare diskutert dei opp i mot det som K 06 og lærebøker fokuserer på.

Lærarane i denne studien viser hovudsakleg eit platonisk syn på matematikken (jf. Beswick, 2012). Dei syner ei oppfatning om ei innhaldsfokusert matematikkundervisning med vekt på forståing, og ser på læring av matematikk som noko elevane aktivt må konstruere ei forståing av. Denne oppfatninga er i tråd med det Utdanningsdirektoratet (2006) skriv om å gi elevane eit solid grunnlag for forståinga av brøkomgrepet. Lærarane vil unngå at elevane puggar ein algoritme utan å forstå kvifor den kan nyttast, men ynskjer heller å leggje til rette for at elevane skal tore å syne korleis dei tenkjer og korleis dei arbeider seg fram til eit svar. Lærarane syner både horisontkunnskap der læraren skal kunne forstå og tolke eigne elevar si tenking, og spesialisert fagkunnskap der læraren kan finne ut om ein framgangsmåte gjeld generelt (Fauskanger, 2012).

Etterkvart ynskjer lærarane at elevane skal oppdage den «standardalgoritmen» som læraren eller læreboka ofte nyttar, og som dei kan vere sikre på fungerer for alle tal. Dette kan kanskje knytast i saman med at det i fleire utsegner kjem fram at lærarane sjølv er usikre på ulike representasjonar av brøk, og at dei kanskje då ynskjer å ha «kontroll» på kva elevane kjem fram til sjølv.

Lærarane syner ei oppfatning om at det er viktig å kunne arbeide med ulike representasjonar av brøk for å unngå at brøk berre vert knyta til ei representasjonsform (jf. Askew, 2000, referert i Kleve 2010). Vidare uttaler dei fleste at dei syns det er viktig å illustrere brøkar for elevane der hovudfunksjonen er å byggje opp under forståinga – både for å kunne sjå for seg storleikane ved hjelp av teikningar på tavla eller konkretar, og for å knyte det opp mot kvardagen for handgripeleg å sjå kva som ligg bak tala (jf. Van de Walle, 2001, referert i Son & Senk, 2010). Dei fleste lærarane uttaler likevel at dei helst nyttar representasjon av brøk som «ein del av eit heile» eller som «ei samanlikning av ein del og eit heile» i arbeidet med- og illustrasjonar av brøk.

I samband med at det i fleire utsegner kjem fram at lærarane sjølv er usikre på ulike representasjonar av brøk, er det naturleg at dei vil støtte seg til lærebøkene i undervisninga (jf. Lloyd, 2002, referert i Fauskanger & Mosvold, 2008). Då kan måten ulike emne vert arbeidd med der ha mykje å bety for korleis dette vert presentert for elevane. Etter å ha sett på korleis gonging, deling og brøk vert introdusert og vidare arbeidd med i lærebøkene, så kan ein tanke vere at forståinga for desse emna heng mykje i saman.

I mitt utval av norske lærebøker er det tydeleg at det vert mest arbeidd med brøk representert som «ein del av eit heile» og brøk som «ei samanlikning mellom ein del og eit heile». Representasjonen av brøk som «eit punkt på tallinja som ligg mellom to heile tal» og «ein måte å samanlikne to mengder eller to mål på» vert presentert litt i lærebøkene på nokon trinn, men ut i frå kva lærarane i denne studien uttaler, så er det ikkje noko det vert særleg lagt vekt på i undervisninga. Dei to sistnemnde representasjonane av brøk vert trekt fram som viktige for elevane si forståing av brøk i studiar av både Dickson, Brown og Gibson (1984) og Breiteig og Venheim (1998).

Gonging – og seinare multiplikasjon – av heile tall vert i alle lærebøkene presentert som gjentatte addisjonar. På 5. trinn då elevane skal rekne med brøk, vert dei førebudd på multiplikasjon av brøk – representert som gjentatt addisjon. På 7. trinn vert «gongeteiknet» i lærebøkene brått omtalt som «av» utan noko særs sikring på om elevane er med på denne «overgangen». I følgje Mack (2000) kan dette vere ei årsak til at elevane seinare slit når dei skal til å arbeide med multiplikasjon med to brøkar. Til dømes i oppgåver av typen 1/3 x 2/5, der ein skal tenkje «ta ein tredjedel av to femtedelar», vil kanskje ikkje elevar med additive slutningar ha noko meiningsfull tolking. Hagen et al. (2006) introduserer divisjon med brøk med å skrive «å dele 1/3 i 8 delar er det same som å rekne ut kor mykje 1/8 er av 1/3» og vidare «å dividere med ein brøk er det same som å multiplisere med den omvendte brøken» – utan nokon form for illustrasjon eller forklaring. Denne «regelen» vert repetert ut ungdomstrinnet og i den vidaregåande skulen. Det er grunn til å tru at faren for at mange elevar kan falle av undervegs og ikkje forstå rekneoperasjonane, er stor.

Emnet deling vert ofte framstilt i lærebøkene ved hjelp av delings- og målingsdivisjon der målingsdivisjon ofte vert presentert som gjentatt subtraksjon (Son & Senk, 2010). I mitt utval av lærebøker såg eg ingen oppgåver av typen delings- eller målingsdivisjon som var meir avanserte enn 6 ÷ 3/4 eller 2/3 ÷ 4, altså ingen oppgåver av denne typen som tek for seg oppgåver der både dividenden og divisor er i brøkform, til dømes 6/7 ÷ 3/5. Då kan det vere vanskeleg å hjelpe elevane i den vanskelege overgangen frå gjentatt subtraksjon til å kunne forstå bakgrunnen for ulike algoritmar.

6.1 Implikasjonar

Lærarane har tydelege oppfatningar om den kunnskapen dei treng i undervisninga knyta til ulike representasjonar av brøk; dei har klare meiningar om verdien av ei innhaldsfokusert matematikkundervisning med vekt på forståing, og ser på læring av matematikk som noko elevane aktivt må konstruere ei forståing av. Lærarane vil unngå at elevane puggar ein algoritme utan å forstå kvifor den kan nyttast, og ynskjer heller å leggje til rette for at elevane skal tore å syne korleis dei tenkjer og korleis dei arbeider seg fram til eit svar. Med dette syner lærarane både horisontkunnskap der læraren skal kunne forstå og tolke eigne elevar si tenking, og spesialisert fagkunnskap der læraren kan finne ut om ein framgangsmåte gjeld generelt (Fauskanger, 2012). Lærarane syner ei oppfatning om at det er viktig å kunne arbeide med ulike representasjonar av brøk for å unngå at brøk berre vert knyta til ei representasjonsform (jf. Askew, 2000, referert i Kleve 2010). Vidare uttaler dei fleste at dei syns det er viktig å illustrere brøkar for elevane der hovudfunksjonen er å byggje opp under forståinga – både for å kunne sjå for seg storleikane ved hjelp av teikningar på tavla eller konkretar, og for å knyte det opp mot kvardagen for handgripeleg å sjå kva som ligg bak tala.

6.1.1 Implikasjonar for vidare forsking

I denne studien har eg hatt fokus på kva oppfatning lærarar har om deira UKM knyta til ulike representasjonar av brøk. Allereie i formuleringa av problemstillinga låg det i korta at eg ville ta utgangspunkt i eit kvalitativ forskingsdesign. Med denne typen design har eg kunne gå i djupa på det eg ville undersøke, men det betyr òg at eg ikkje har hatt moglegheit til å femne om så mykje anna. Undervegs i dette arbeidet har eg òg sett at det er andre område som kunne vore interessante å forske meir på. Sjølv om konteksten handlar om etter- og vidareutdanning så ser eg òg at dette kan gjelde generelt om lærarar sine oppfatning kring deira UKM.

Det gjeld spesielt det som har med funna mine kring dei mange utsegnene der lærarane uttrykker at dei sjølv er usikre på ulike representasjonar av brøk. Her kunne det vore interessant å gå meir i djupa og sett på kva årsaker det kan vere til dette, og sett på kva behov det er for meir arbeid med dette.

Eit anna område det kunne vore interessant å gå endå meir i djupa på er å forske meir på korleis introduksjonane av gonging, deling og brøk vert introdusert og vidare arbeidd med i fleire ulike lærebøker, då det i denne studien kan tyde på at forståinga for desse emna heng mykje i saman. Det vert stilt store krav til læraren sin «matematiske horisontkunnskap» (jf. Fauskanger, Bjuland & Mosvold, 2010) i eit slikt emne som brøk som stadig vert bygd på, og der lærarane må planlegge vidare utfordringar til elevane. Då vil det ha mykje å bety i kor stor grad den enkelte lærar vel å støtte seg til lærebøkene.

6.1.2 Implikasjonar for vidare undervisning

Då dei fleste lærarane uttaler at dei helst nytter seg av representasjon av brøk som «ein del av eit heile» og «ei samanlikning mellom ein del og eit heile» kan det tyde på at det er behov for meir kunnskap om korleis lærarar arbeider med representasjonar av brøk på ulike måtar med elevane.

Mange lærarar uttrykker at dei er usikre på ulike representasjonar av brøk. Då har eg leia tanken inn på at sjansen er stor for at mange av dei vil støtte seg til korleis læreverka legg opp til at det skal arbeidast med brøk (jf. Lloyd, 2002, referert i Fauskanger & Mosvold, 2008). Måten lærebøkene syner representasjon av brøk, korleis dei introduserer gonge – og seinare multiplikasjon – kan tyde på at mange elevar kan falle av undervegs og ikkje forstå brøkomgrepet og rekneoperasjonane. I tillegg kan måten lærebøkene arbeider med delings- og målingsdivisjon gjere det vere vanskeleg å hjelpe elevane i den vanskelege overgangen frå gjentatt subtraksjon til å kunne forstå bakgrunnen for algoritmar kring divisjon med brøk. Dette gjer at det kunne vore interessant å oppfordra lærarane til å lausrive seg meir i frå lærebøkene og fokusere endå meir på matematisk horisontkunnskap der ein tenkjer på korleis dei ulike matematiske emna – med fokus på brøk – bygg på einannan og heng i saman, og då planlegge vidare utfordringar til elevane.

Litteraturliste

Alseth, B., Nordberg, G. & Røsseland, M. (2010). *Multi 5b: Parallellbok.* Oslo: Gyldendal Undervisning.

Alseth, B., Arnås, A.-C., Kirkegaard, H. & Røsseland, M. (2011). *Multi 3a: Grunnbok* (2. utg.) [Oslo]: Gyldendal Undervisning.

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense*. Continuum.

Bakke, B. & Bakke, I. N. (2006). *Grunntal 4b: Matematikk for barnetrinnet.* Drammen: Elektronisk Undervisningsforlag AS.

Ball, D. L. (1990). *Halves, pieces, and twoths: Constructing representational contexts in teaching fractions*. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education, Michigan State University.

Ball, D.L., Hill, H.C. & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach third Grade, and How Can We Decide? *American Educator* (Fall 2005), s. 14-17; 20-22; 43-46.

Ball, D. L., & Hill, H. C. (2008). *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) measures. Mathematics released items 2008*. Ann Arbor: University of Michigan.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 127-147.

Breiteig, T & Venheim, R. (1998). *Matematikk for lærere 1*. (3. Utg.) Oslo: Tano.

Buehl, M. M. (2008). Assessing the multidimensionality of students' epistemic beliefs across diverse cultures knowing, knowledge and beliefs. I M. S. Khine (Red.), *Knowing, knowledge and beliefs: Epistemological studies across diverse cultures* (s. 65-112). Netherland: Springer.

Burns, M. (2000). *About teaching mathematics: A K-8 resource*. Math Solutions Publications, Marilyn Burns Education Associates, 150 Gate 5 Road, Suite 101, Sausalito, CA 94965.

Cady, J. A., & Rearden, K. (2007). Pre-service teachers' beliefs about knowledge, mathematics, and science. *School Science and Mathematics, 107*(6), 237-245.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research*: The Alden Press Ltd, Oxford.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. I P. Ernest (Red.), *Mathematics teaching: The state of the art* (s. 249-253). New York, NY: Falmer.

Fauskanger, J. (2012). "For norske lærere har stort sett en algoritme" – om undervisningskunnskap i matematikk. I F. Rønning, R. Diesen, H. Hoveid & I. Pareliussen (Red.), *FoU i Praksis 2011. Rapport fra konferanse om praksisrettet FoU i lærerutdanning* (s. 129-141). Trondheim: Tapir Akademisk Forlag.

Fauskanger, J., Bjuland, R. & Mosvold R. (2010) "Eg kan jo multiplikasjon, men ka ska eg gjørr?" – Det utfordrende undervisningsarbeidet i matematikk. I T. Løkensgard Hoel, G. Engvik, & B. Hanssen (Red.), *Ny som lærer - sjansespill og samspill* (s. 99-114). Trondheim: Tapir Akademisk Forlag.

Fauskanger, J. & Mosvold, R. (2008). Kunnskaper og oppfatninger – implikasjoner for etterutdanning. *Norsk Pedagogisk Tidsskrift, 92*(3), 187-197.

Fauskanger, J & Mosvold, R. (2012). “Wrong, but still right” – Teachers reflecting on MKT items. I L.R. Van Zoest, J.J. Lo, & J.L. Kratky (Red.), *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Navigating transitions along continuums* (s. 423-429). Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Fauskanger, J. & Mosvold, R. (2013a). Studying teachers’ epistemic beliefs by using focused discussions based on MKT items. Paper accepted for presentation at the 2013 CERME conference.

Fauskanger, J. and Mosvold, R. (2013b) «Det ligger jo i bunn for alt» – om læreres oppfatning av undervisningskunnskap knyttet til posisjonssystemet. In: I. Pareliussen, B. B. Moen, A. Reinertsen, T. Solhaug: *FoU i praksis 2012 conference proceedings* (s. xxx-xxx). Tapir akademisk forlag Trondheim.

Fauskanger, J., Mosvold, R., Bjuland, R. & Jakobsen, A. (2011). Does the format matter? How the multiple-choice format might complicate the MKT items. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16*(4), 45-67.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Red.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (s. 39-57). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K.-B. & Öberg, B. (2006). *Tetra 8: Matematikk for ungdomstrinnet.* Det norske samlaget.

Hofer, B. K. (2002). Personal epistemology as a psychological and educational construct: An introduction. I B. K. Hofer & P. R. Pintrich (Red.), *Personal epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (s. 3-14). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research*, *15*(9), 1277-1288.

Hundeland, P. S. (2009). *Matematikklærerens kompetanse: en studie om hva lærerne på videregående trinn vektlegger i sin matematikkundervisning*. Universitetet i Agder, Fakultet for teknologi og realfag.

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode*. Oslo: Abstrakt forlag.

Kleve, B. (2010). Brøkundervisning på barnetrinnet-aspekter av en lærers matematikkunnskap. *Acta Didactica Norge*, *4*(1), Art-5.

Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: global, content domain-related and situation-specific components. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 273-292.

Leatham K. R. (2006). Viewing Mathematics Teachers' Beliefs as Sensible Systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 91-102.

Leatham, K. R., & Peterson, B. E. (2010). Secondary mathematics cooperating teachers' perceptions of the purpose of student teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(2), 99-119.

Lowe, W. (2012). Yoshikoder (ver. 0.6.4) [Dataprogram]. Henta frå http://www.yoshikoder.org/ (2013, 7. mars).

Mack, N. K. (1998). Building a foundation for understanding the multiplication of fractions. *Teaching Children Mathematics*, *5*(1), 34-38.

Mosvold, R., & Fauskanger, J. (2012). *Teachers' knowledge of mathematical definitions: What they need to know and what they think they need to know*. Paper presentert på The Annual Meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, Canada.

Mosvold, R., Fauskanger, J., Jakobsen, A. & Melhus, K. (2009). Translating test items into Norwegian – without getting lost in translation? *Nordic Studies in Mathematics Education*, *14*(4), 101-123.

Niss, M. & Jensen, T. H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring - ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark (rapport nr. 18 – 2002).* København: Undervisningsministeriets forlag. Henta 20. mars 2013, frå: http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf

Novillis, C. F. (1976). An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 131-144.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A. & Hanisch, F. (2006). *Sinus matematikk 1P: Grunnbok.* Oslo: Cappelens Forlag.

Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (1999). Balancing between Cognition and Affect: Students' Mathematics-Related Beliefs and Their Emotions during Problem-Solving. I *Conference on Mathematics Beliefs and Their Impact on Teaching and Learning of Mathematics, Mathematical Research Institute, Oberwolfach, Germany*.

Pedersen, B. B., Pedersen, P. I. & Skoogh, L. (2005a). *Abakus Grunnbok 7a: Matematikk for barnetrinnet.* Aschehoug.

Pedersen, B. B., Pedersen, P. I. & Skoogh, L. (2005b). *Abakus Grunnbok 7b: Matematikk for barnetrinnet.* Aschehoug.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, *62*(3), 307-332.

Pehkonen, E. (2003). Lærere og elevers oppfatninger som en skjult faktor i matematikkundervisningen. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 154-181). Bergen: Fagbokforlaget.

Philipp, R. A. (2007). *Mathematics teachers' beliefs and affect*. I F. K. Lester (Red.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (s. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.). (2010). *Mathematical knowledge in teaching* (Vol. 50). Springer.

Schoenfeld, A. H. (2007). The Complexities of Assessing Teacher Knowledge. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives, 5*(2), 198-204.

Schommer-Aikins, M., Bird, M., & Bakken, L. (2010). Manifestations of an epistemological belief system in preschool to grade twelve classrooms. I L. D. Bendixen & F. C. Feucht (Red.), *Personal epistemology in the classroom* (s. 31-54). New York, NY: Cambridge University Press.

Schuck, S. (1999). Teaching mathematics: A brightly wrapped but empty gift box. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 109-123.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Skott, J. (2001). The Emerging Practices of a Novice Teacher: The Roles of His School Mathematics Images. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(1), 3-28.

Son, J. W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 117-142.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. I J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards in school mathematics* (s. 95–113). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Udir. (2012, 3. desember). Veiledninger til Kunnskapsløftet. Henta frå: http://www.udir.no/Lareplaner/Veiledninger-til-LK06/Matematikk2/Matematikk/Eksempler-fra-hovedomradet-i-tall-og-algebra/

Wilkinson, S. (2004). *Focus group research*. I D. Silverman (Red.), Qualitative research: Theory, method 354 and practice (s. 177-199). London: SAGE Publications.

Vedlegg

Vedlegg nr 1 - Transkripsjonsnøkkel

Transkripsjonsnøkkel

Funksjon	Tegn	Beskrivelse
Overlapp	[tekst] [tekst]	Blir brukt når to personer sier noe samtidig
Overtakelse	tekst≈ ≈tekst	Indikerer når en person overtar og fortsetter å snakke uten at det er pause imellom
Pause (≥ 1 s)	(ns) der n = antall sekunder Eks. (6s)	Pauser i antall sekunder
Kort pause (< 1 s)	(.)	Pauser på under et sekund
Konklusjon	.	Som punktum
Spørsmål	?	Indikerer et spørsmål
Forlengelse	: eller :: for lengre	Indikerer at ordet forlenges
Lav prat	°tekst°	Indikerer at det blir snakket lavt
Ukjent tekst	(ukjent tekst)	Indikerer når det som blir sagt er helt ugjenkjennelig og blir ikke transkribert
Forsterkning	<u>tekst</u>	Indikerer at ord eller setninger blir forsterket

Vedlegg nr 2 - intervjuguide

Intervjuguide tilknyttet UKM-oppgavene
Arbeidet med oppgavene er gjennomført som arbeidskrav på studiet.

Husk:
- Gruppeinndeling (6 grupper) er satt sammen ut fra både geografi (har samlet lærere som kommer fra samme skole og samme område i en gruppe), trinn (en gruppe ren småskole, en ren ungdomstrinn og resten med blanding av småskole- og mellomtrinn).
- De vil bli invitert til UiS, og da får de noe å bite i/drikke når de kommer. Men, de vil også få tilbud om at jeg kan komme ut på skolene, og da vil jeg ikke tilby noe å spise og drikke. Jeg vil spørre dem om å ha drikke tilgjengelig.
- Ha drikke og blanke ark/skrivesaker tilgjengelig under intervjuet
- Gi dem en bok/bokpakke/gavekort etter endt FGI.

Plan for intervjuet
1. Utdypet presentasjon av studien
2. Intervju med utgangspunkt i oppgavene (45 minutt til 1 time)

Presentasjon av studien
Et viktig poeng som fremheves i forskningen på tilknyttet læreres UKM, er at den som skal drive med etterutdanning, må vite mye om lærerne som deltar i etterutdanningen, spesielt om hva disse lærerne kan og hva de kan mindre om. Når etterutdanning av matematikklærere skal planlegges og gjennomføres, er det altså viktig å ha kjennskap til den kunnskapen lærerne har fra før.
En utfordring blir da å utvikle metoder og instrumenter som gjør det mulig for lærerutdannere å få innsikt i læreres undervisningskunnskap. Ved University of Michigan i USA har forskere utviklet et slikt instrument, og en sentral del av studien min er utfordringer knyttet til å tilpasse dette instrumentet til en norsk kontekst. Oppgavene dere har arbeidet med som arbeidskrav (multiple-choice oppgavene) er fra dette instrumentet.

En annen viktig del er spørsmålet om hvordan instrumentet kan brukes når etterutdanning av lærere skal planlegges og gjennomføres være sentralt, og det er her jeg trenger hjelp av dere.
Mine spørsmål i denne sammenheng stilles for å få innsikt i:

- Hvilke oppgaver du mener inkluderer lærerkunnskap som er mest/minst relevant for deg som lærer – og hvorfor, og
- Hvordan du tenker oppgavene eventuelt kan brukes når etterutdanning av lærere skal planlegges og gjennomføres.

(Forskningsspørsmål: Hva er lærernes (epistemiske) oppfatninger om den kunnskapen de trenger i sin undervisning? (What are teachers' (epistemic) beliefs about the mathematical knowledge that is needed for teaching (MKT)?))

Introduksjon etter arbeid med intervjusettet med UKM-oppgaver
Vi har oversatt og forsøkt å tilpasse slike oppgaver til norske forhold. Det var noen av disse oppgavene dere allerede har arbeidet med. Jeg har valgt oppgaver fra området tall, siden det er det mest omfattende i vår læreplan for grunnskolen.
Før dere går i gang, vil jeg gjerne gjenta noen viktige punkter:

1. Oppgavene har fokus på lærernes undervisningskunnskap.
2. Oppgavene er av typen multiple-choice, men vi har lagt inn noen åpne spørsmål i tillegg.
3. Spørsmålene er utviklet slik at svarene dere gir kan hjelpe oss å få bedre innsikt i hva vi skal fokusere på i vår fremtidige etterutdanning. Oppgavene er også utviklet i den hensikt at de skal differensiere, det vil si at noen er lette, mens andre er vanskelige. Det er rett og slett ikke meningen at alle lærere skal få til alt.
4. Dataene fra denne studien er selvfølgelig konfidensielle/anonyme

Intervju med utgangspunkt i UKM-oppgavene

Oppgaver dere også har levert skriftlig – (vil gjerne at vi diskuterer dem også her)

1. Hvilken kunnskap er viktig for å drive god matematikkundervisning? (Hvorfor? Gi eksempler! Alle emner?)
2. Hvilken kunnskap har lærere som er unik for lærerprofesjonen? (Hvorfor? Begrunn og utdyp)

Spørsmål tilknyttet oppgavene dere har levert skriftlig

1. Jeg er interessert i å høre deres kommentarer etter å ha arbeidet dere gjennom disse oppgavene hjemme.
    i. Var det noe i oppgavene som dere synes er viktig for matematikklærere å kunne?
        1. Lærte dere noe av noen av arbeidet med oppgavene som dere ser på som viktig tilknyttet det å undervise i matematikk?
    ii. Gir noen av oppgavene et bilde på noe dere ser på som viktig tilknyttet egen matematikkundervisning?

- Kan du utdype det du sier?
- Kan du gi meg et eksempel på hva du mener?
- Kan du si mer om det?
- Nå har vi hørt ulike synspunkter på .... Noen andre som vil si noe om dette?

2. Er multiplikasjon eller subtraksjon mest aktuelt på trinnet hvor dere underviser? (En av oppgavene velges ut til diskusjon)
    i. En oppgave (oppgave 6) omhandler ulike algoritmer for tosifret multiplikasjon. Anta at du skal undervise i emnet. Hvilke(n) algoritme(r) tror du dine elever ville brukt? Hvilke(n) algoritme(r) ville du vektlagt? Hvorfor?
    ii. En av oppgavene (oppgave 3) omhandler ulike algoritmer for tresifret subtraksjon. Anta at du skal undervise i emnet. Hvilke(n) algoritme(r) tror du dine elever ville brukt? Hvilke(n) algoritme(r) ville du vektlagt? Hvorfor?

- Kan du utdype det du sier?
- Kan du gi meg et eksempel på hva du mener?
- Kan du si mer om det?
- Nå har vi hørt ulike synspunkter på …. Noen andre som vil si noe om dette?
- Hva med dere andre?
- Jeg ser at noen av dere nikker, kan dere si hvorfor?
- Jeg vil gjerne høre andre syn på saken. Er det noen andre som ser på dette på en annen måte?
- Representerer oppgaven(e) viktig kunnskap for deg som lærer?

3. I mange av de skriftlige tilbakemeldingene fra dere lærere tilknyttet oppgave 1 ble posisjonssystemet fremhevet som viktig kunnskap for elevene.
    i. Er dere enige? Hvorfor/hvorfor ikke?
    ii. Hva ved posisjonssystemet er det viktig at elevene kan? Hvorfor?
    iii. Hva er det viktig at dere som lærere kan tilknyttet arbeidet med posisjonssystemet? Hvorfor?

- Kan du utdype det du sier?
- Kan du gi meg et eksempel på hva du mener?
- Kan du si mer om det?
- Nå har vi hørt ulike synspunkter på …. Noen andre som vil si noe om dette?
- Hva med dere andre?
- Jeg ser at noen av dere nikker, kan dere si hvorfor?
- Jeg vil gjerne høre andre syn på saken. Er det noen andre som ser på dette på en annen måte?
- Representerer oppgaven(e) viktig kunnskap for deg som lærer?

4. Definisjoner og regler. En oppgave (oppgave 5) fokuserte på definisjonen av primtall. En annen (oppgave 7) på regler. I tilknytning til disse oppgavene var dere lærere uenige om hvor vidt regler og definisjoner er viktig i grunnskolens matematikkundervisning.
   i. Hva mener dere? Hvorfor er regler og definisjoner viktig, evt. hvorfor ikke? Knytt gjerne diskusjonen til konkrete eksempler relevante på trinnet hvor dere underviser.
   ii. Hva er forskjellen på definisjoner og regler (om dere mener det er noen)?

- Kan du utdype det du sier?
- Kan du gi meg et eksempel på hva du mener?
- Kan du si mer om det?
- Nå har vi hørt ulike synspunkter på .... Noen andre som vil si noe om dette?
- Hva med dere andre?
- Jeg ser at noen av dere nikker, kan dere si hvorfor?
- Jeg vil gjerne høre andre syn på saken. Er det noen andre som ser på dette på en annen måte?
- Representerer oppgaven(e) viktig kunnskap for deg som lærer?

5. Oppgave 8 og 9 omhandlet bruk av figurer (representasjon) og regnefortellinger (kontekstualisering) tilknyttet brøkregning. I tilknytning til disse oppgavene understreket mange av lærerne at både figurer og regnefortellinger er viktig tilknyttet alle fire regneartene, så vel heltallig regning som brøkregning.
   i. Er dere enige? Hvorfor er dette viktig, evt. hvorfor ikke?
   ii. Hva er det viktig at dere som lærere kan tilknyttet arbeidet med representasjon og kontekstualisering? Hvorfor?

- Kan du utdype det du sier?
- Kan du gi meg et eksempel på hva du mener?
- Kan du si mer om det?
- Nå har vi hørt ulike synspunkter på …. Noen andre som vil si noe om dette?

6. Oppsummering tilknyttet alle 10 oppgavene.
    i. Hvilke(n) type(r) kunnskap krever oppgavene at dere har? (Matematisk, didaktisk, …)
    ii. Mener dere oppgavene speiler kunnskap det er viktig for dere som lærere å ha? (Hvorfor/hvorfor ikke? Eksemplifiser ved å se på noen oppgaver spesielt. Gi eksempler fra klasserommet for å illustrere...)
    iii. Var det noe i oppgavene som dere synes er viktig for matematikklærere å kunne?
        1. Lærte dere noe relevant for egen undervisning da dere arbeidet med oppgavene? (Hva? Tilknyttet hvilken oppgave? Hvorfor er det relevant?)
    iv. Hva mener dere er basiskunnskap for å få til oppgavene? (Hvorfor mener dere det?/Hva mener dere med det? Eksemplifiser ved å se på noen oppgaver spesielt. Gi eksempler fra klasserommet for å illustrere...)
    v. Mener dere oppgavene speiler viktig matematikkfaglig innhold på det trinnet dere underviser? (Hvorfor/hvorfor ikke? Eksemplifiser ved å se på noen oppgaver spesielt. Gi eksempler fra klasserommet for å illustrere...)
    vi. Mener dere oppgavene speiler viktig matematikkdidaktisk innhold på det trinnet dere underviser. (Hvorfor/hvorfor ikke? Eksemplifiser ved å se på noen oppgaver spesielt. Gi eksempler fra klasserommet for å illustrere...)
    vii. Hva gjør oppgavene lette/vanskelige? (Hvorfor mener dere det?/Hva mener dere med det? Eksemplifiser ved å se på noen oppgaver spesielt.)

7. Oppleves oppgavene som relevante om de skal brukes til planlegging av deres etterutdanning? (Hvorfor/hvorfor ikke? Eksemplifiser med oppgaver eller med eksempler fra klasserommet.)
8. Hvordan tenker dere at oppgavene kan brukes når etterutdanning av lærere skal planlegges og gjennomføres? Begrunn og eksemplifiser.

- Kan du utdype det du sier?
- Kan du gi meg et eksempel på hva du mener?
- Kan du si mer om det?
- Nå har vi hørt ulike synspunkter på .... Noen andre som vil si noe om dette?
- Hva med dere andre?
- Jeg ser at noen av dere nikker, kan dere si hvorfor?
- Jeg vil gjerne høre andre syn på saken. Er det noen andre som ser på dette på en annen måte?

Oppsummering i gruppa
Oppsummere det jeg/vi oppfatter er hovedkonklusjonene tilknyttet hovedspørsmåla.

1. Speiler denne oppsummeringen deres oppfatning av diskusjonen vi har hatt?
2. Er det noe dere vil understreke eller er viktig å få frem?
3. Helt til slutt: Er det noe viktig dere mener ikke har blitt tatt opp til diskusjon? Noe vi burde diskutert, men som er utelatt?

Oppsummering
Viktig å også sette av tid til oppsummering forskerne imellom etter at deltakerne har forlatt rommet (tabell på neste side til hjelp):

- Hva var de viktigste temaer og ideer som kom frem i dette intervjuet?
- Var temaene og ideene forskjellig fra det vi forventet? Hva var eventuelt forskjellig?
- Var dette FGI forskjellig fra de andre vi har foretatt? Om vi er flere som intervjuer…
- Hva er viktig for våre videre publikasjoner?
- Er det noen utsagn vi bør merke oss spesielt?
- Var det noe uventet eller forventet som ble sagt?
- Bør vi gjøre noe annerledes i vårt neste intervju?

Respons på spørsmål
En tabell som på neste side til hvert hovedspørsmål.

Lage et hefte med tabeller tilknyttet hvert spørsmål og ta det med til hvert intervju.

<table>
<tr><td>Kort oppsummering/hovedpunkter</td><td>Viktige sitater</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Kommentarer/observasjoner</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>