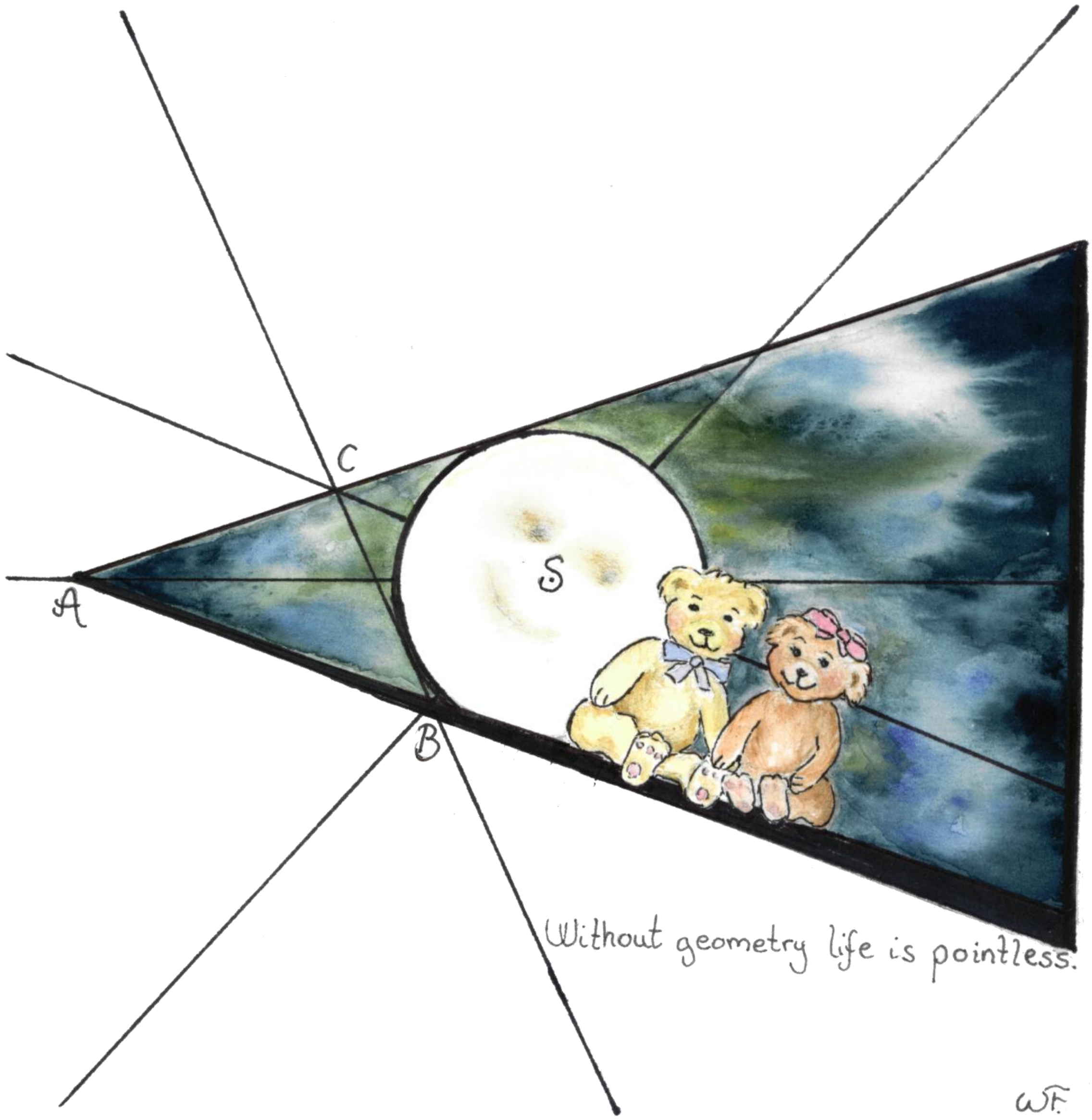
PROBLEMLØSNING I GEOMETRI

– EN STUDIE AV KONKURRANSEOPPGAVER OG ELEVERS LØSNINGSSTRATEGIER



Master i Matematikkdidaktikk

Universitetet i Stavanger, våren 2013

Wenche Fosli

Universitetet i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master i matematikkdidaktikk	Vår, 2013 Åpen
Forfatter: Wenche Fosli	………………………………………… (signatur forfatter)
Veileder: Arne Jakobsen	
Tittel på masteroppgaven: *Problemløsning i geometri – en studie av konkurranseoppgaver og elevers løsningsstrategier* Engelsk tittel: *Problem Solving in Geometry. A Study of Contest Problems and Students' Solution Strategies*.	
Emneord: Problemløsning, geometri, konkurranseoppgaver	Sidetall: 88 + vedlegg/annet: 183 Stavanger, 12.04.2013

FORORD

Without geometry life is pointless.

(ukjent kilde)

Da er jeg kommet til det punktet der dette masterarbeidet har resultert i et ferdig produkt. En sirkel er sluttet – som ung student planla jeg en gang et hovedfag i matematikkdidaktikk, men livet tok andre veier. Jeg er både overrasket og takknemlig over å være tilbake i den planen jeg en gang hadde.

Parallelt med universitetsstudier finnes livet der hjemme, og jeg vil gjerne begynne med å takke dere som er mine viktigste: En spesiell takk til min elskede Eistein for at du først oppmuntret meg til å begynne på masterstudiet og siden har støttet meg gjennom det.

Tusen takk også til mine seks nydelige barn for at dere i hvert fall tidvis har fått tankene mine bort fra masterprosjektet og over på det virkelige livet, og også takk for deres tålmodighet når dere ikke har lykkes med det. Hver og en av dere har fortjent en inderlig takk – dere er min største glede.

Det har også vært tangeringspunkter mellom masterarbeid og familieliv: Ingerid Marie, du må nevnes spesielt, du er den beste problemløseren jeg kjenner og har nok vært min viktigste inspirasjonskilde til denne masteroppgaven. Takk skal du ha. Kursene i diskret matematikk tok vi sammen. En bedre studiekamerat kunne jeg ikke ønsket meg – det var et perfekt samarbeid: Jeg var den heldige som fikk oppleve livet bli rikere på Istvan Becks underfundige forelesninger, mens du var opptatt med videregående skole. Hjemme rundt kjøkkenbordet kunne jeg videreformidle det jeg hadde lært – så kunne du hjelpe meg med de vanskeligste oppgavene etterpå.

I sentrum for masteroppgaven min står geometriske problemer, og i skjæringspunktet mellom oppgaver og strategier har jeg funnet leselyst og skriveglede. Det har nok vært en lang og ikke alltid helt rettlinjet prosess, men den har først og fremst vært spennende og lærerik. Jeg skylder en stor takk til de elevene som har jobbet iherdig med oppgaver og stilt opp til intervju – uten deres velvilje hadde jeg ikke kunnet fullføre dette prosjektet.

Noen ganger har jeg nok rotet meg bort i et hjørne og trengt litt hjelp for å se de store linjene eller finne nye perspektiver. Jeg vil gjerne takke dere som har hjulpet meg:

Takk til alle mine dyktige forelesere ved UiS, det har vært en fornøyelse å få lov til å sitte på denne siden av kateteret. Jeg tror ikke en gang at jeg overdriver når jeg sier at jeg har gledet meg til hver eneste forelesning.

En særskilt takk til min kunnskapsrike veileder Arne Jakobsen for at du har hatt tro på meg og prosjektet mitt. Jeg setter pris på at du har gitt meg rom til selv å finne retninger og foreta egne valg, men samtidig kommet med konstruktive tilbakemeldinger underveis.

Helt til slutt vil jeg si som det står skrevet i 1. Tim 1,12a: «Jeg takker ham som gjorde meg sterk, Kristus Jesus, vår Herre.»

SAMMENDRAG

I denne oppgaven analyserer jeg geometriproblemer fra matematikkonkurranser. Store og små utfordringer innenfor geometri fra de ti siste årenes Abelkonkurranse inngår i datamaterialet, sammen med seks problemer fra IMO (International Mathematical Olympiad). For å ha et sammenlikningsgrunnlag analyseres også eksamensoppgaver i geometri fra kurset R1.

Jeg har også vært til stede på en «treningsleir» i forkant av en matematikkonkurranse. Fem av deltakerne her besvarte et lite spørreskjema om problemløsningsstrategier. Tre deltakere ble intervjuet om sine løsninger av to geometriproblemer. Videre har jeg har deltatt på to møter i en såkalt Abel-gruppe (dvs. en elevgruppe som møtes i en av sine fritimer for å jobbe med konkurranse-oppgaver i matematikk). Fire elever herfra leverte inn besvarelser på et lite geometriproblem.

Formålet med studien er å undersøke om «geometri-nøtter» fra matematikkonkurranser kan være aktuelle for å fremme en mer problemfokusert undervisning i videregående skole. Jeg tar utgangspunkt i forskningsspørsmålet:

Hvordan samsvarer konkurranseoppgaver i geometri – samt elevers strategier i løsningsprosessen av disse – med kompetansemål for matematikkfaget i videregående skole?

Et viktig underspørsmål er:

Har skolen noe å lære av konkurransematematikken, og i tilfelle hva?

Pólyas (1957) problemløsningsmodell, samt utvidelser av denne, særlig slik vi finner dem hos Schoenfeld (1985) og Borgersen (1994) utgjør en viktig del av teorigrunnlaget. Jeg refererer til forskning som indikerer at på noen områder kan talentfulle elevers strategier sammenliknes med den profesjonelle matematikerens (Gorodetsky & Klavir, 2003; Sriraman, 2004). I studien brukes van Hiele-nivåene som forklaringsmodell for utvikling av geometrisk tenkning, og jeg ser nærmere på matematikkdidaktisk forskning som påpeker at undervisning i geometriske bevis bør knyttes opp mot problemløsning.

Et praktisk resultat av studien er en tabell med oversikt over noen konkurranseoppgaver som møter spesifikke kompetansemål. Det er særlig finaleoppgaver som anvender «R1-stoff». Problemer fra Abel-konkurransens innledende runder har få paralleller til geometridelen av R1 – van Hiele-teorien indikerer imidlertid at disse oppgavene har et potensiale knyttet til utvikling av geometriforståelse.

Et noe overraskende resultat av studien er at den frembringer argumenter for at sykliske firkanter bør inn i lærebøkene i R1 – de er der «nesten» allerede, selv om de hverken nevnes eller utnyttes. Sykliske firkanter er nødvendig kunnskap for elever som deltar i internasjonale matematikk-konkurranser, og dessuten et grunnleggende redskap for å møte R1-kompetansemålet om å bruke «setningen om periferivinkler i geometriske resonnementer og beregninger».

Analysene mine antyder at når vanskelighetsgraden i konkurranseoppgavene er adskillig høyere enn i eksamensoppgaver (R1), så er det *ikke* fordi de bygger på flere geometrikunnskaper. De krever imidlertid at kunnskapene brukes på en kreativ måte. Dette er nettopp et kjennetegn på *problemer* – oppgaver der eleven ikke kjenner en *metode,* og der eleven blir *engasjert* for å finne en løsning (Schoenfeld, 1989).

SUMMARY

This paper analyzes contest problems in geometry from the latest ten years of the Abel contest (Norwegian Mathematical Olympiad). Six problems from the IMO (International Mathematical Olympiad) are included. For comparison, I also analyze geometry problems given for exams in Norwegian high school (in R1, a course taken in 12^{th} grade).

I have participated as an observant in a problem solving training camp for competitors in a mathematical contest. Interviews with three students concerning solution strategies in geometry problems are based on two tasks given in this camp. Five students filled in a short questionnaire. I have also joined two meetings where high school students were training for the Abel contest. Four of these students completed and handed in their solutions to a geometry problem.

My research question is:

How do geometry problems from mathematical contests – and the strategies used by students when solving these problems – comply with goals expected in the curriculum for Norwegian high schools?

Another question that has emerged through the research process is:

What can we learn from mathematical contests that applies to the teaching of school mathematics?

Pólya's well-known problem solving model and its extensions, especially as found in the works of Schoenfeld (1985) and Borgersen (1994), are important parts of the theoretical framework. I also focus on research of talented students' solution strategies in mathematical problem solving, which indicates that in some aspects these strategies can be compared to those of professional mathematicians (Gorodetsky & Klavir, 2003; Sriraman, 2004). The van Hiele levels are used to explain development of geometrical understanding. Finally, I discuss research concerning the role of proofs in geometry teaching, and how proving must be viewed as part of the problem solving process.

A result of the study is an overview of some contest problems that can be used when teaching specific parts of the geometry curriculum. I show that problems from the IMO and from the final round in the Abel contest build on much of the same the geometrical knowledge as the geometry curriculum of Norwegian high school. This does not seem to be the case with the problems from the two Abel selection rounds, but the van Hiele theory suggests that these problems are useful for developing geometrical understanding.

The study provides arguments for including cyclic quadrilaterals in mathematics text books in Norwegian high school. Today cyclic quadrilaterals are "almost included" – though neither mentioned nor taken advantage of. On the other hand, cyclic quadrilaterals belong to the basics for students participating in mathematical competitions.

My analysis indicates that while contest problems are substantially more difficult than the geometry problems given for R1 exams, this is *not* due to a demand of more advanced geometrical knowledge. It seems to be because contest problems require knowledge to be used creatively. This is an essential quality of *problems* – tasks in which the student is *engaged*, and for which the student does not have a *method* to achieve the solution (Schoenfeld, 1989).

INNHOLD

1. INNLEDNING

1.1 BAKGRUNN

Matematikkfaget kritiseres ofte for en instrumentell tilnærming preget av pugging av algoritmer og formler. Problemløsning karakteriseres nettopp av at eleven ikke kjenner en *metode* for å komme fram til et svar. Det er derfor naturlig å framheve problemløsning som et viktig redskap for relasjonsforståelse i matematikk. Dette bør gi problemløsning en sentral plass i matematikkopplæringen.

Vi finner flere studier med fokus på problemløsning innenfor matematikkdidaktisk forskningslitteratur. Noen av disse omhandler oppfatninger av hva et matematisk problem *er* (Schoenfeld, 1992; Thompson, 1989), andre beskriver forsøk på å implementere problemløsning i klasserommet (Chang, Wu, Weng & Sung, 2012; Clarke, Breed, & Fraser, 2004; Fuchs et al., 2003; Lampert, 1990; Sakshaug & Wohlhunter, 2010). De gitte henvisningene er bare et lite utvalg av tilgjengelig forskning på dette området. Langt de fleste av artiklene er rettet mot grunnskolen. Det finnes også en del studier omkring lærere/lærerstudenter og problemløsning (Bjuland, 2007; Bjuland, 2004; Capraro, An, & Ma 2012; Chen, L., Van Dooren, & Chen, Q., 2011; Kandemir & Gur, 2007). Det er imidlertid forsket relativt lite på problemløsning som undervisningsmetode i videregående skole.

Abelkonkurransen er en matematikkonkurranse for elever i videregående skole. Her er det fullt av små og store utfordringer som er laget nettopp med tanke på at eleven skal måtte se matematiske sammenhenger og gruble seg fram til et svar i stedet for å benytte en ferdig innlært løsningsmetode. Kan disse oppgavene representere en mulighet for å integrere problemløsning også i den «vanlige» matematikkopplæringen på videregående trinn?

Abel-oppgavene er konsentrert omkring fire emner: algebra, kombinatorikk, tallteori og geometri. Jeg velger å fokusere på geometri. Da Euklidsk geometri kom tilbake med mer tyngde i videregående skole (i forbindelse med innføring av kurset R1), ble det argumentert med at elevene her fikk en «arena» som egner seg for utforskning, matematisk argumentasjon og bevisføring (Ranestad, 2007). Også forskningslitteratur trekker fram denne egenskapen ved geometri (Battista, 2007; Battista & Clements 1995; Borgersen, 1994; Cirillo & Herbst, 2012; Kreussler, 2009). Jeg mener dette tilsier at geometri kan være et «rikt» emne for å utforske elevstrategier i forbindelse med problemløsning.

1.2 STUDIENS FORMÅL OG FORSKNINGSSPØRSMÅL

Studiens formål er å undersøke om «geometri-nøtter» fra matematikkonkurranser kan være aktuelle for å fremme en mer problem-fokusert matematikkundervisning i videregående skole. Er disse oppgavene relevante i forhold til læreplanens kompetansemål? Hvilke oppfatninger har elever som deltar i matematikkonkurranser om disse oppgavene, og hva slags strategier bruker de for å løse dem?

På grunnlag av disse tankene har jeg valgt å ta utgangspunkt i forskningsspørsmålet:

Hvordan samsvarer konkurranseoppgaver i geometri – samt elevers strategier i løsningsprosessen av disse – med kompetansemål for matematikkfaget i videregående skole?

Forskningsspørsmålet er todelt – jeg fokuserer *både* på geometrioppgaver og elevstrategier. Jeg vil likevel poengtere at læreplanens kompetansemål er rettet mot hvilken kompetanse *elevene* skal oppnå, ikke mot hvordan oppgavene skal «se ut». Hvis jeg vil si noe om hvordan konkurranse-oppgaver samsvarer med kompetansemål i matematikk, er det derfor relevant å rette oppmerksomheten også mot *elevene.* Hvilke elever? Jo, de elevene som har erfaring med denne type konkurranseoppgaver. Hvilken kompetanse opplever de at de trenger for å løse disse oppgavene? Jeg har valgt å forsterke betydningen av å undersøke elevenes løsningsprosesser ved å inkludere dette momentet eksplisitt i forskningsspørsmålet.

Videre er det viktig å være oppmerksom på at vi kan finne et samsvar på noen områder, og et «ikke-samsvar» på andre. Eventuelle områder der vi *finner* et samsvar, er interessante i forhold til studiens relevans for praksis. Flere undersøkelser har vist at tid – eller rettere sagt mangel på tid – er en viktig faktor for valg av undervisningsmetoder i klasserommet (Barzel, 2007; Bjuland & Jaworski, 2009; Foley, Khoshaim, Alsaeed, & Nihan Er, 2012; Keiser & Lambdin, 1996). Vi har ikke tid til «tillegg». Hvis de nevnte konkurranseoppgavene derimot «passer inn» i et pensum/kompetansemål som er der fra før, så åpnes en port til faktisk å bruke dem. Da åpnes en mulighet for at disse oppgavene kan være med på å gi mer rom for problemløsning i skolen. Kanskje kan de bidra til å tilfredsstille læreplanens ord om «utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter» og samtidig møte noen av de kompetansemål som angis i faget.

Eventuelle områder der vi *ikke* finner et samsvar mellom konkurranseoppgaver og skolens kompetansemål, reiser også interessante spørsmål. Hva består forskjellene i? Et sentralt underspørsmål i dette forskningsarbeidet vil være:

Har skolen noe å lære av konkurransematematikken, og i tilfelle hva?

For å finne svar på forskningsspørsmål (og underspørsmål) har jeg valgt å analysere konkurranseoppgaver i geometri – først og fremst fra Abel-konkurransen. Jeg har også vært til stede på en «treningsleir» i forkant av en matematikkonkurranse der jeg intervjuet tre elever om deres løsninger av to geometriproblemer. Fem av deltakerne besvarte et lite spørreskjema. I tillegg har jeg mottatt oppgavebesvarelser på et lite geometriproblem fra elever i en såkalt Abel-gruppe ved en videregående skole. (Dette er elever som velger å bruke en av sine fritimer for å jobbe med konkurranseoppgaver i matematikk.)

1.2.1 AVGRENSNING

For å begrense stoffutvalget har jeg kun analysert Abel-oppgaver fra de siste ti årene. Geometri-oppgaver fra både runde 1, 2 og finalen er med. Dette gir et rikt utvalg av problemer med varierende vanskelighetsgrad. Seks oppgaver fra IMO (International Mathematical Olympiad) er også inkludert. Disse er hentet blant de enkleste IMO-oppgavene, men må likevel klassifiseres som særdeles krevende. Jeg velger å fokusere på plangeometri, og eventuelle problemer som omhandler rom-geometri, er derfor utelatt. Dette innebærer at jeg analyserer oppgavene i lys av kompetansemål i geometri i kurset *R1,* da det først og fremst er dette kurset i norsk videregående skole som inneholder plangeometri. Eksamensoppgaver fra R1 brukes som sammenlikningsgrunnlag for konkurranseoppgavene.

I undersøkelsen min av elevstrategier velger jeg å fokusere på elever som har en viss erfaring med å løse konkurranseoppgaver. Alle deltakerne i studien kan karakteriseres som «talentfulle» i matematikk. Det betyr at jeg i utforskningen av elevstrategier avgrenser meg til *flinke/talentfulle* elevers strategier i løsningsprosessen av konkurranseoppgaver i geometri.

1.3 FORSKNINGSETISK REFLEKSJON

Elevintervjuer inngår som en del av studien min. I en intervjusituasjon er deltakerne ikke likestilt, noe som f.eks. påpekes i *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2010). Dette innebærer at jeg som intervjuer må være bevisst den makt som ligger i denne rollen. Som lærer er jeg for så vidt vant til denne asymmetriske maktfordelingen. I skolen framheves det hvordan læreren hele tiden bør spørre seg selv hvordan han/hun kan bruke sin makt-posisjon til å hjelpe elevene til å realisere seg selv og utvikle sine evner og muligheter (Bergem, 2008). Samtidig vet vi at med makt følger fare for maktmisbruk. Denne bevisstheten må jeg ha med meg også inn i forskerrollen.

Løsningsstrategier i geometrioppgaver kan virke som et lite sensitivt tema. Ikke desto mindre kan mange elever føle ubehag ved å bli spurt om å forklare noe de ikke syns de forstår. Dette er nettopp et område hvor jeg må være klar over den ovenfor beskrevne maktposisjonen. Jeg har, med bakgrunn i denne problemstillingen, bestemt meg for å kun intervjue elever om *oppgaver de har fått til.* Jeg ønsker altså å intervjue elever om de strategiene de har brukt i *problemer de har løst*. Dette til tross for at det kunne være interessant å se nærmere på oppgaver elevene ikke har kommet i mål med – eller kanskje føler de slett ikke har kommet noen vei med. Hvor stoppet det opp? Hvilke strategier har de prøvd for å komme videre?

Jeg tror likevel jeg kan få gode svar på forskningsspørsmålet mitt uten å risikere å sette eleven i forlegenhet ved å be om et intervju omkring et problem han eller hun ikke ser løsningen på. Også i et intervju knyttet til et problem eleven *har* løst, er det mulig å spørre: Stod du fast underveis? Hva gjorde du for å komme videre?

Her syns jeg det er relevant å nevne Løgstrup og hans nærhetsetikk – en betegnelse han ikke selv brukte, men som er kommet til senere (Bergem, 2008). Nærhetsetikken utfordrer sensitiviteten overfor elevens følelser. «Kravet om 'å ta vare på den andres liv' er en nødvendig motvekt mot kravet om effektivitet» (ibid., s. 80). Også Johannesen et al. (2010) kommenterer at kompliserte og sensitive spørsmål bør unngås dersom de ikke er viktige for undersøkelsen. Spørsmål om problemer eleven ikke har løst, er nok interessante for studien min, men ikke nødvendige nok til at jeg kan forsvare å bruke dem.

2. TEORETISK INNRAMMING

I denne teoretiske innrammingen av studien fokuserer jeg på problemløsningsstrategier med utgangspunkt i Pólyas problemløsningsmodell og utvidelser av denne, særlig slik vi finner dem hos Borgersen og Schoenfeld. Spesielt kan disse strategiene anvendes innenfor geometri, noe jeg prøver å få fram ved å bruke eksempler fra dette fagfeltet.

Videre påpeker jeg hvordan forskningslitteratur trekker fram van Hiele-modellen som nyttig for å vurdere geometriforståelse. Ettersom vi i geometriundervisningen i videregående skole finner en vektlegging av bevis, prøver jeg å vise hvordan van Hiele-nivåene kan belyse kognitiv utvikling fram mot den deduktive tenkning som er nødvendig for å utlede bevis. Jeg understreker også at bevis må ses i sammenheng med problemløsning.

Til slutt drøfter jeg matematikkonkurranser. Her er jeg opptatt av at deltakerne i disse konkurransene er elever med talent for matematikk, og jeg ser nærmere på hva matematikkdidaktisk forskning sier om problemløsning i forhold til denne elevgruppen.

2.1 PROBLEMLØSNING

Ordene «problem» og «problemløsning» er blitt tillagt ulike betydninger innenfor matematikkfaget. I sine historiske studier av problemløsning identifiserte Stanic og Kilpatrick (1988, referert i Schoenfeld, 1992) tre fremtredende fokus:

- Problemløsning som kontekst
- Problemløsning som ferdighet
- Problemløsning som kunst

Innenfor hvert av disse hovedfokusene kan problemløsning inneha ulike roller som det vil føre for langt å komme inn på her. Jeg vil likevel nevne noen få eksempler for å påpeke at «problemløsning» ikke er et entydig begrep.

Med problemløsning som kontekst kan vi for eksempel sikte til at matematikkoppgaver fungerer som redskap for å oppnå andre målsetninger, gjerne innenfor andre fag. Problemløsning forstått på denne måten brukes av og til for å rettferdiggjøre matematikkundervisning: Matematikk er *nyttig* for å løse «virkelige problemer». Dette gjenspeiles i skolen ved vektlegging av matematikkoppgaver med tilknytning til elevenes dagligliv.

Dersom fokuset flyttes til problemløsning som ferdighet, er vi opptatt av at matematikk og matematisk problemløsning er viktig for sin egen skyld.

De pedagogiske implikasjonene for begge disse to førstnevnte hovedfokusene har imidlertid vist seg å gå i retning av instrumentell drilling: «Problemløsningen» begrenses til at læreren viser en framgangsmåte, og elevene jobber med øvingsoppgaver inntil de mestrer «metoden». Schoenfeld kommenterer at storparten av matematikkopplæringen i skolen faller inn i denne kategorien (Schoenfeld, 1992).

Det tredje perspektivet skiller seg ut fra de to foregående og hevder at «ekte problemløsning» *ikke* kjennetegnes av teknikker eller faste løsningsmetoder; ekte problemløsning er en kunst. Det holder ikke med en «oppskrift» for å løse et matematisk problem – i stedet kreves oppfinnsomhet og kreativitet. Å fylle mattetimen med metoder og regnetrening kan sammenliknes med å fylle kunst- og håndverkstimen med fargelære og behandling av pensler. Det har sin plass, men kanskje elevene også skulle få lov til å prøve seg med «ekte maling»? Den kjente engelske matematikeren G. H. Hardy (1941, opptrykk 1992, s. 85) uttrykte det kunstneriske aspektet ved matematikk særlig tydelig: «The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be *beautiful*; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way.» Jeg husker at jeg som lærer delte min begeistring for beviset for at den deriverte av $\ln x$ blir $1/x$. «Se», sa jeg til elevene mine, «se så vakkert det er! Hver linje 'rimer'.» Jeg forsikret dem om at dersom jeg hadde vært norsklæreren deres, og de hadde fått i oppgave å skrive et dikt, så hadde jeg gitt dem 6-er hvis de hadde levert noe slikt som dette her. («Kan ikke du være norsklæreren vår?» repliserte elevene.)

Å beundre andres kunstverk er imidlertid heller ikke det samme som å *utøve* kunst. Da må elevene selv løse problemer. Jeg syns Pólyas definisjon av problemløsning i stor grad klarer å fange opp dette kunstneriske perspektivet:

> Solving a problem means finding a way out of a difficulty, a way around an obstacle, attaining an aim which was not immediately attainable. Solving problems is the specific achievement of intelligence, and intelligence is the specific gift of mankind: solving problems can be regarded as the most characteristically human activity. (Pólya, 1981, vol. 2, s. ix)

Pólyas problemløsningsdefinisjon er ikke bare rettet mot et *matematisk* problem – den kan leses som å omfatte problemer i livet generelt. Nå er det ingen tvil om at Pólya – problemløsningens far – er opptatt av matematisk problemløsning, men det er likevel verd å legge merke til at Pólya bruker ordet problem slik at vi ser en stor grad av samsvar mellom et matematisk problem og den mer generelle betydningen av ordet.

Schoenfeld (1992) kommenterer nettopp at Pólya gjennom sine arbeider får fram problemløsning som kunst. Han påpeker videre at essensielt i Pólyas tenkning er matematisk *engasjement* –

problemløsning framstilles som en kreativ og oppdagende *aktivitet*. Dette fokuset på engasjement finner vi igjen i Schoenfelds definisjon av et matematisk problem:

> For any student a mathematical problem is a task (a) in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain a resolution, and (b) for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution. (Schoenfeld, 1989, s. 87)

Når jeg i denne studien drøfter problemløsning, velger jeg å forstå begrepet matematisk problem slik Schoenfeld her har definert det. Videre bruker jeg ordene «problemløsningsstrategier» og «heuristiske strategier» synonymt. Det avgjørende for at et problem er et problem – ifølge Schoenfelds definisjon – er altså at eleven er interessert i å løse det, og at han/hun ikke kjenner en løsningsmetode. Vi legger merke til at definisjonen er individuell – en oppgave kan være et problem for én elev uten å være det for en annen.

2.1.1 HVORFOR PROBLEMLØSNING?

FOR Å FREMME RELASJONSFORSTÅELSE

I *Relational understanding and instrumental understanding* (Skemp, 1976, gjengitt i Skemp, 2006) redegjør Skemp for forskjellen mellom relasjonell og instrumentell forståelse i matematikk – et skille han for øvrig ble gjort oppmerksom på av Mellin Olsen (ibid.). Relasjonsforståelse er det Skemp vil betegne som «ekte» matematikkforståelse og dreier seg om å bygge opp begrepsmessige strukturer (skjema) som en i prinsippet kan produsere et ubegrenset antall framgangsmåter fra. Det innebærer å se sammenhenger (relasjoner) mellom de ulike kunnskapene i skjemaet. Eleven skjønner både *hvordan* og *hvorfor.* Instrumentell forståelse vil derimot si å lære faste framgangsmåter for å finne svar på oppgaven. Eleven vet *hvordan* uten å skjønne *hvorfor.*

Skemp (1993) hevder at å avfeie en elev som ønsker relasjonsforståelse med «fordi det er sånn», eller «fordi regelen sier det», ikke bare kan, men *bør,* føre til negative holdninger til matematikk: Eleven tvinges til å assimilere meningsløshet i sine skjema. Det kan sammenliknes med å utsette eleven for fysisk skade; noe av det mest dyrebare eleven har, nemlig hans/hennes gryende intelligens påvirkes negativt (ibid.). En problemfokusert undervisning karakteriseres imidlertid av at eleven må se matematiske sammenhenger i stedet for å følge en på forhånd innlært løsningsmetode. Jeg mener dette tilsier at problemløsning kan hjelpe lærere og elever til å unngå den uheldige situasjonen Skemp advarer mot. Problemløsning kan i stedet fremme relasjonsforståelse.

FOR Å VEKKE INTERESSE FOR MATEMATIKK

Pólya (1981) mener undervisning i problemløsning er det viktigste en matematikklærer kan tilby sine elever. Han hevder at de 70 % av elevene som mener at de aldri senere kommer til å ha nytte av matematikk utover helt grunnleggende regneferdigheter, likevel vil ha nytte av den «common sense» som gjerne preger problemløsning. De 29 % som senere skal anvende matematikk, f.eks. som økonomer eller ingeniører, trenger å erfare matematikk som nyttig for å forstå og finne svar på praktiske problemer. Det er kanskje bare 1 % av elevene som vil bli fremtidige matematikere, men det er særdeles viktig at læreren klarer å vekke interessen for matematikk i disse elevene, slik at deres talent kan komme samfunnet til gode:

> Future mathematicians form only about 1% of the student body, but it is of paramount importance that they should be discovered: if they choose the wrong profession, their talent, needed by modern society in more than one way, may be wasted. The most important thing the high school teacher can do for this 1% is to awake their interest in mathematics. (Pólya, 1981, vol. 2, s. 122)

Selv om matematikkinteresse kan tennes på flere måter, fremhever Pólya problemløsning som et viktig redskap for å vekke engasjement og interesse for matematikk.

I samsvar med Pólyas utsagn viser den amerikanske studien *Consequences of a Problem-Based Mathematics Curriculum* (Clarke, Breed, & Fraser, 2004) der 182 elever fra tre high schools[1] deltok i et forsøk med problembasert matematikkopplæring, at elevene fikk signifikant mer positive holdninger til matematikkfaget enn elever fra en kontrollgruppe med tradisjonell undervisning. Videre gjorde elevene fra forsøksgruppen det like bra eller bedre enn elevene fra kontrollgruppen på standardiserte tester selv om de var vurdert til å ha et noe svakere faglig utgangspunkt.

Botten (2003) mener «grubliser» blir godt mottatt også av elever som kanskje ikke er så ivrige i arbeidet med de tradisjonelle oppgavene, og at grubleoppgavene kan være en fin innfallsport til å motivere også disse elevene for matematikkfaget. Mange kan fortelle om erfaringer med at problem-løsningsoppgaver har fungert fint for å få i gang engasjement og diskusjon (Bjuland, 2004; Botten, 2003; Ely & Cohen, 2010; Holden, 2003).

[1] Ved referanser til amerikansk skolesystem velger jeg å beholde de engelskspråklige betegnelsene middle school, high school og college.

FOR Å BRINGE SKOLEFAGET NÆRMERE VITENSKAPSFAGET

I *Proof and refutations* hevder Lakatos (1976) at matematikk utvikler seg gjennom gjetting, hypoteser, hypotesetesting og bevis/motbevis. Den matematiske prosessen har et sikk-sakk-preg som vi ikke lenger kjenner igjen når vi kommer fram til resultatet. Produktet representerer ikke prosessen.

Lampert kommenterer at i skolen er imidlertid matematikk ikke noe som skal skapes og utforskes; det er å følge regler som allerede er funnet. I *When the problem is not the question, and the solution is not the answer* (1990) viser Lampert at en mer problemfokusert matematikkopplæring gjør det mulig å bringe skolefaget nærmere vitenskapsfaget: Elevene (i dette tilfellet fra en 5.-klasse) utarbeider hypoteser, de lærer å begrunne dem og blir vant til å argumentere for sine meninger.

Borgersen (1994) trekker tilsvarende konklusjoner i et prosjekt der åpne problemløsningsoppgaver i geometri ble testet ut i universitetssammenheng. Også her konkluderer forskerne med at disse oppgavene er velegnet til å gi studentene et sannere bilde av hva matematikk er, inkludert prosessen med hypotesedannelse og hypotesetesting. Forskerne fremholder videre at denne type åpne problemløsningsoppgaver brukt i en smågruppe-sammenheng viser seg å bidra til et positivt og aksepterende læringsmiljø.

Mason og Davis (1991) trekker nettopp fram at den mest betydningsfulle enkeltfaktoren for å hjelpe elever til å tenke matematisk er å etablere et positivt og aksepterende læringsmiljø. De legger særlig vekt på en «conjecturing atmosphere» – en atmosfære der det er greit å framsette ulike hypoteser/påstander/forslag og så prøve «å finne ut av det». De mener at matematisk tenkning kjennetegnes av å spesialisere, å generalisere, å lage hypoteser og å (over)bevise. Problemløsning gir altså rike muligheter til matematisk tenkning.

Også Pólya (1981) kommenterer hvordan matematikerens arbeid med faget skiller seg klart ut fra den vanlige klasseroms-aktiviteten. Han framhever «guess and test» som en viktig metode i matematikk (slik den også er det i naturvitenskapene): «If you want a description of scientific method in three syllables, I propose: GUESS AND TEST» (ibid., s. 157). Pólya hevder videre at kunnskap i et hvilket som helst fag består av både informasjon og «know how». Med «know how» i matematikk mener han evne til å løse problemer – ikke bare rutineoppgaver – men problemer som krever noen grad av selvstendighet, originalitet og kreativitet. På grunnlag av dette framholder Pólya at skolens viktigste oppgave i matematikkopplæringen må være å vektlegge systematisk undervisning i problemløsning. Dette gjenspeiles i hans «Ti bud for lærere» (se vedlegg 13).

2.1.2 PÓLYAS PROBLEMLØSNINGSMODELL OG HEURISTISKE STRATEGIER

Mye av det fokus vi har sett på problemløsning i skolen, kan tilskrives Pólyas pionerarbeid innenfor heuristikk (Passmore, 2007). Med tydelig referanse til utgivelsen av Pólyas *How to solve it* i 1945 proklamerer Schoenfeld (1987, s. 27): «For mathematics education and for the world of problem solving 1945 marked a line of demarcation between two eras, problem solving before and after Pólya». Pólyas problemløsningsmodell er velkjent og gjengis her med noen underpunkter som alle er hentet fra *How to solve it* (2. utg., 1957, s. xvi):

1. **Forstå problemet**
- Hva er ukjent?
- Hva vet du?
- Hvilke betingelser er oppgitt?
- Har du tilstrekkelige opplysninger, eller kanskje flere opplysninger enn du trenger?
- Tegn en figur. Bruk formålstjenlige betegnelser

2. **Legg en plan**
- Har du sett et liknende problem før? Kan du i så fall bruke det?
- Kjenner du til et teorem som kan være nyttig?
- Se på den ukjente. Har du løst et annet problem før, med en tilsvarende ukjent?
- Kan du formulere problemet på en annen måte? På enda en annen måte?
- Kan du introdusere et «hjelpe-element»?
- Bruk definisjonene!
- Kan du løse et enklere problem som likner? Et spesialtilfelle? Et mer generelt tilfelle?
- Kan du løse deler av problemet?
- Hva skjer hvis du dropper noen av betingelsene i oppgaven? I hvor stor grad kan du nå bestemme den ukjente, og hvordan vil den variere?
- Har du brukt alle opplysningene i oppgaven?

3. **Gjennomfør planen**
- Utfør det du har planlagt. Kan du se klart at hvert enkelt trinn i løsningen er riktig? Kan du bevise det?

4. **Se tilbake**
- Reflekter over løsningen. Kan du sjekke at resultatet stemmer? Kan du sjekke argumentene?
- Kan du finne en annen løsningsmetode?
- Kan du bruke resultatet eller løsningsmetoden i andre problemer?

I *How to solve it* refereres punktene ovenfor ganske enkelt til som «listen». Pólya kommenterer at spørsmålene og forslagene i listen er enkle og følger fra «common sense». Videre er de generelle: De indikerer en generell retning, men det blir igjen mye som eleven selv må finne ut av. Den største prestasjonen i problemløsningsprosessen er ifølge Pólya å legge en plan. Planen kan komme gradvis eller som en a-ha-opplevelse. Det er imidlertid vanskelig å få en god ide innenfor et emne der vi har begrenset kunnskap, og umulig hvis vi ikke har noe kunnskap (Pólya, 1957). Gode ideer er grunnlagt på kunnskap! Også Schoenfeld poengterer at heuristiske strategier *ikke* erstatter kunnskap, tvert imot, suksessfull implementering av heuristiske strategier er avhengig av en solid kunnskapsbase (Schoenfeld, 1985).

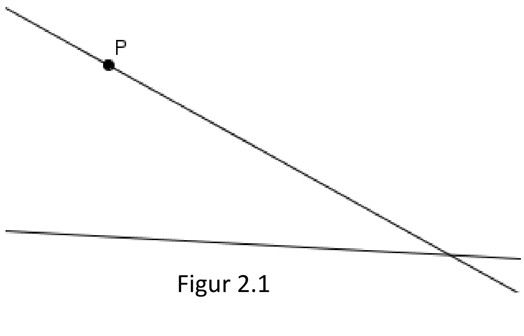
Noen problemløsningsstrategier er særlig framtredende i Pólyas «liste». Det gjelder f.eks. *analogi/sammenlikning* som alle de fire første punktene i «legg en plan» kan sorteres innunder. Pólya mener at «å sammenlikne» er naturlig for mennesket:

> Analogy pervades all our thinking, our everyday speech and our trivial conclusions as well as artistic ways of expression and the highest scientific achievements.… All sorts of analogy may play a role in the discovery of the solution and we should not neglect any sort. (Pólya, 1957, s. 37–38)

Gorodetsky og Klavir (2003) påpeker at «sammenlikning» kan referere til en søken etter et *mønster* som kan lede til en løsning. «Sammenlikning» kan også innebære at eleven gjenkjenner grunnleggende strukturer i tilsynelatende ulike problemer (ibid.). Vi er heldige, sier Pólya, hvis vi klarer å *finne et lettere problem* å sammenlikne problemet vårt med. Noen ganger kan analogi uttrykkes med matematisk presisjon. Hvis vi har en en-entydig korrespondanse mellom to systemer *S* og *S’,* vil alle sammenhenger som gjelder mellom objekter i det ene systemet, gjelde mellom tilsvarende objekter i det andre systemet – vi har det vi kaller en isomorfisme (Pólya, 1957).

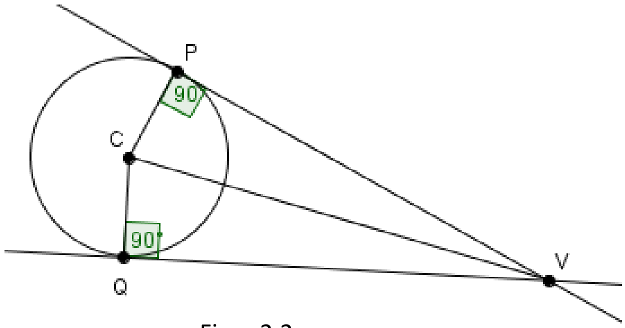
En annen heuristisk strategi som vi finner i Pólyas «liste», er bruk av *hjelpe-elementer.* Det kan f.eks. bety å bruke noe vi har funnet ut i en annen oppgave for å løse et nytt problem. I geometri-problemer kan et hjelpe-element ofte være å trekke en hjelpelinje. Pólya anbefaler å *bruke definisjonene* for å få tips om aktuelle hjelpe-elementer. Dersom et problem involverer en sirkel, kan for eksempel radien r være et viktig hjelpe-element (ettersom en sirkel med radius r og sentrum S er definert som det geometriske stedet for et punkt i en avstand r fra S). Schoenfeld trekker fram at vi kan finne nyttige hjelpe-elementer ved å *anta problemet som løst*. Se f.eks. på følgende problem:

> Gitt to linjer som skjærer hverandre, og et punkt P markert på en av dem. Konstruer en sirkel som tangerer begge linjene, og som har P som det ene tangeringspunktet. (Schoenfeld, 1985, s. 15)



Figur 2.1

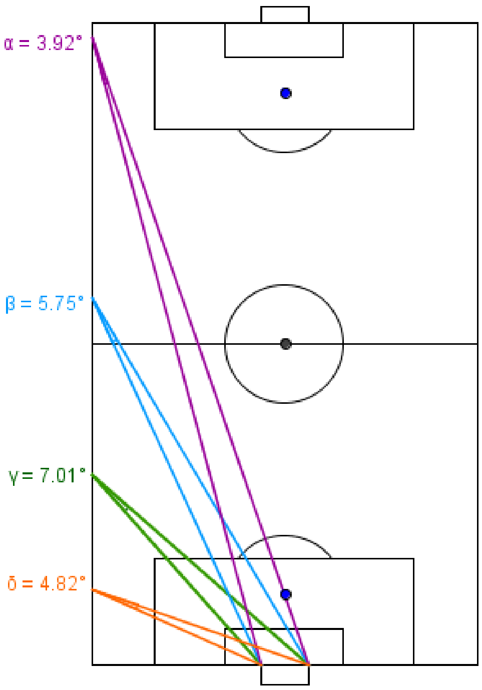
Å anta problemet som løst vil si at vi bruker den aktuelle sirkelen som hjelpe-element, dvs. *tegner* den inn i figuren og ser hvilke egenskaper den må ha. Dersom denne strategien skal føre oss fram til en løsning, krever det videre at vi vet, eller kan bevise, at sentrum i sirkelen ligger på vinkelhalveringslinja til $\angle PVQ$, og at $CP \perp PV$.



Figur 2.2

I tillegg trenger vi prosedyrekunnskap om hvordan vi konstruerer vinklehalveringslinjer og normaler. Vi ser altså at heuristiske strategier alene ikke er nok – problemløsning er et samspill mellom heuristiske strategier og kunnskap.

Spesialisering og *generalisering* er andre strategier som framkommer tydelig i Pólyas liste. Mason og Davis (1991) vektlegger spesialisering som en god måte i komme i gang på. «Hva slags tall får vi når 1 legges til produktet av fire etterfølgende tall?» er et godt eksempel på et problem som for de fleste vil framkalle en «indre trang» til å prøve noen spesialtilfeller – sette inn noen tall og se hva som skjer (ibid., s. 8.). Oppgaven illustrerer også at generalisering er «the other side of the coin» – kan vi finne et mønster som alltid vil gjelde?



Figur 2.3 Geometri på fotballbanen.

Et eksempel på en geometrioppgave som inviterer til spesialisering, kan være:

«Du skyter mot mål fra langsida på en fotballbane. Hva er beste plassering (dvs. hvor får vi den største vinkelen inn mot målet)?» (Omformulert fra Borgersen (1994)).

Her kan vi prøve å eksperimentere med ulike plasseringer. For å få et hint til hva vi skal gjøre for faktisk å bevise hvilken plassering som er best, kan vi f.eks. også eksperimentere med ulike størrelser på målet, og da gjerne ta i bruk en annen av Pólyas anbefalinger: Prøv et *ekstremtilfelle*.

Et forslag til generalisering av oppgaven kan være: «Du løper langs en vilkårlig rett linje mot hjørneflagget. Hvor på denne linja må du skyte for å få størst mulig vinkel til målet?» (ibid.) (Løsningsforslag til denne oppgaven finnes i vedlegg 8.)

How to solve it inneholder flere strategier enn det som framkommer i «listen». Det vil føre for langt å komme inn på alle, men jeg kan f.eks. nevne *sett opp en likning, bruk symmetri, jobb baklengs* og *kvalifisert gjetting*.

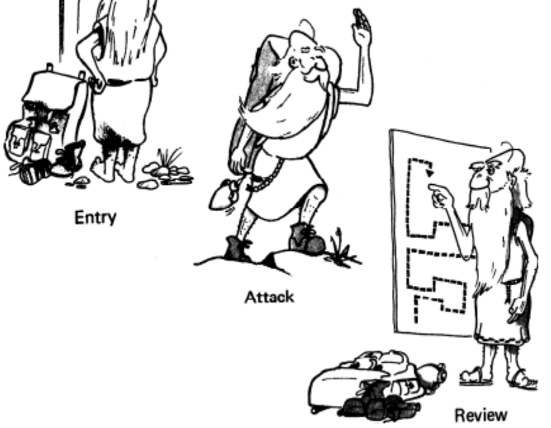
Pólyas arbeid førte til iherdig innsats for å implementere problemløsning i skolen, men resultatene så ut til å være beskjedne. Schoenfeld (1987) kommenterer at til tross for stor entusiasme omkring Pólyas problemløsningsmodell, ser det ut til at implementeringen av den i skolen har vært overfladisk; (satt på spissen: et par ekstra tekstoppgaver her og der, og noe løsrevet undervisning *om* noen få strategier). Pólyas hensikt var imidlertid at elevene måtte gis mulighet til å *engasjere* seg i problemløsning som en oppdagende og skapende *aktivitet.* Schoenfeld (1992, s. 352) skriver betegnende: «Little that goes in the name of Pólya also goes in the spirit of his work». I Lesters oppsummering av forskningslitteratur omkring problemløsning kommenterer han at et tydelig forskningsresultat er at det *ikke* er nok å lære *om* problemløsning (f.eks. undervisning om Pólyas fire-fasede modell) for å få bedre problemløsningsevne. Elever må *løse mange* problemer over en *lengre tidsperiode* for å bedre problemløsningsevnen sin (Lester, 1994).

Paper-and-Pencil Scores Earned by the students			
	Completely solved problems		
	Pretest	Posttest	Difference
Nonheuristic students			
S_1	2	2	0
S_2	1	2	1
S_3	2	1	-1
Heuristic students			
S_4	2	5	3
S_5	0	2	2
S_6	2	4	2
S_7	0	2	2

Tabell 2.1 Resultater fra problemløsningstester, hentet fra Schoenfeld (1985, s. 204).

Det er imidlertid heller ikke sikkert at øvelse alene gjør mester; forskning tyder på at elever *også* vil tjene på eksplisitt undervisning i heuristiske strategier dersom denne undervisningen skjer i tilknytning til løsning av spesifikke matematiske problemer (ibid.). Schoenfeld (1985) forteller om et lite forskningseksperiment i effekten av undervisning av heuristiske strategier der sju bachelorstudenter i matematikk ble fordelt tilfeldig på en kontrollgruppe (3 stk.) og en intervensjons-gruppe (4 stk.). Eksperimentet bestod av en pretest, en to-ukers instruksjonsperiode og til slutt en posttest. Pretest og posttest omfattet begge fem problemer. Instruksjonsmateriellet (et hefte med 20 problemer, der elevene prøvde å løse hvert problem på egenhånd før de bladde videre til løsningen, + et video-opptak med forklaringer til løsningene) var *det samme* for begge gruppene. Studentene i intervensjonsgruppen fikk imidlertid i tillegg informasjon om heuristiske strategier og ble gjort oppmerksomme på hvilke av disse strategiene som ble tatt i bruk i løsningene av de 20 problemene. Forskjellen mellom posttest og pretest viste en signifikant større framgang i intervensjonsgruppen (se tabell 2.1). Resultatene samsvarer med konklusjoner fra Lesters (1994) oppsummering av forskningslitteratur om problemløsning.

2.1.2 UTVIDELSER AV PÓLYAS MODELL OG METAKOGNITIVE FERDIGHETER



Illustrasjon fra Mason, Burton og Stacey, 1985, s. 26.

Problemløsningsstrategiene slik vi finner dem i *How to solve it,* har blitt kritisert for å være «descriptive rather than prescriptive» (Schoenfeld, 1992, s. 353). De er beskrivende i den forstand at matematikere og andre med god kjennskap til problemløsning kjenner seg igjen i dem, men de er vanskelige å *lære* problemløsning fra. Av problemløsningslitteratur som i større grad «hjelper leseren på vei», kan vi trekke fram *Thinking Mathematically* (Mason, Burton, & Stacey, 1985) og *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving* (Mason & Davis, 1991). Her finner vi et tydelig fokus på metakognitive ferdigheter. Løsnings-prosessen deles inn i tre hovedfaser: Inngang, «angrep» og tilbakeblikk. Gjennom alle fasene vektlegges det hvordan leseren kan ta kontroll over tenkningen sin og komme videre i problemløsningsprosessen. Sju punkter for å «utvikle en indre monitor» drøftes: Kom i gang, bli involvert, gruble, fortsett (hold ut), få innsikt, vær skeptisk, reflekter.

De fire fasene i Pólyas problemløsningsmodell kan framstå som veldig generelle. Enkelte forskere har sett det som nyttig å utvide til flere faser. Borgersen (1994) deler f.eks. inn i:

- *analysere/definere, tegning/modell, kvalifisert gjetting (prøve/feile), finne hypotese, utvikle bevis, refleksjon og generalisering*

Borgersen vektlegger den matematiske utforskningsprosessen som leder fram til hypoteseutvikling og bevis, og får på en fin måte fram at problemløsning kan være med på å bringe skolefaget nærmere vitenskapsfaget (jf. Lakatos (1976) utsagn om at matematikk utvikler seg gjennom gjetting, hypoteser, hypotesetesting og bevis/motbevis). Vi merker spesielt at Pólyas «se tilbake»-fase er blitt videreutviklet i Borgersen modell der både refleksjon og generalisering fremheves.

José Contreras ved University of Southern Mississippi gir interessante eksempler på hvordan han sammen med sine lærerstudenter benytter fundamentale matematiske prosesser som å bevise, spesialisere og generalisere for å formulere *nye* problemer: Et «hva hvis?»- utgangspunkt brukes for å modifisere et gitt problem og skape nye hypoteser (Contreras, 2007). Jeg opplever at nettopp en slik «hva hvis?»-oppfordring tydeliggjøres i de to siste fasene i Borgersens problemløsningsmodell.

Contreras påpeker hvordan denne måten å arbeide med problemer på kan lede til økt matematikkforståelse – og glede:

> I truly believe that all of us – mathematics educators, teachers, and students – should experience the joy of generating problems and discovering mathematical relationships, even if they are new only to us. In this process, we develop a better appreciation and understanding of the origin of mathematical problems. (Contreras, 2007, s. 23)

Schoenfeld er den som kanskje er mest kjent for videreutvikling av Pólyas fire-fasede modell. Hans problemløsningsmodell (jf. Schoenfeld 1985, 1989 og 1992) ligger veldig nær Pólyas:

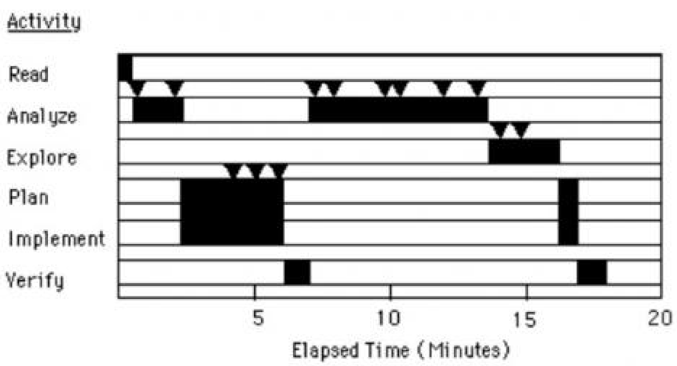
- *lese, analysere, utforske, planlegge, implementere og verifisere*

Pólyas «forstå problemet» er her delt opp i «lese» og «analysere». Videre gis «utforskning» mer vekt ved å framstilles som en egen fase (i stedet for å ligge innebakt i «legg en plan» slik som hos Pólya). Mens analysen kjennetegnes av god struktur og nærhet til betingelsene og målene i oppgaven, karakteriseres utforskning av en bredere søken etter relevant informasjon som kan brukes i analysering-planlegging-implementerings-prosessen. Utforskningen kan føre til at eleven må gå tilbake og forbedre analysen, eller den kan lede eleven videre til neste fase. Problemløsnings-prosessen er altså ikke lineær. Ettersom utforskningsfasen er løst strukturert, er det her ekstra viktig å vurdere om de tilnærmingsmåtene en har valgt, ser ut til å være hensiktsmessige, og endre strategi om nødvendig (Schoenfeld, 1985).

Et kjent eksperiment fra Schoenfelds forskning viser hvordan en matematikers løsningsprosess skiller seg dramatisk fra studenters. Schoenfeld mener at viktige forskjeller i matematikerens og studentenes løsning kan forklares ved hjelp av metakognitive ferdigheter.

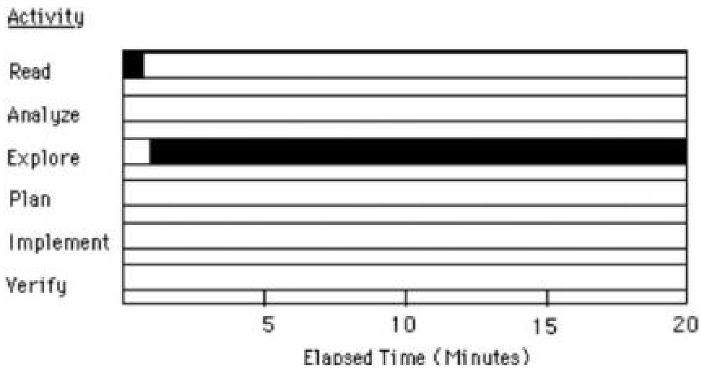
Historien fortelles i korthet av figur 2.4–2.6. (Figurene er hentet fra Schoenfeld, 1989, s. 96 og s. 99.) Matematikeren (figur 2.4) bruker betydelig tid på å *analysere* problemet. De små inverterte trekantene representerer matematikerens egne eksplisitte kommentarer vedrørende løsnings-prosessen. Problemet omhandler geometri, og den aktuelle matematikeren har ikke jobbet innenfor dette feltet på ti år. Gjennom nøye monitorering av egen løsningsprosess, klarer han likevel å løse problemet.

Matematiker som jobber med et vanskelig problem:



Figur 2.4

Studenter som prøver å løse et vanskelig problem:



Figur 2.5

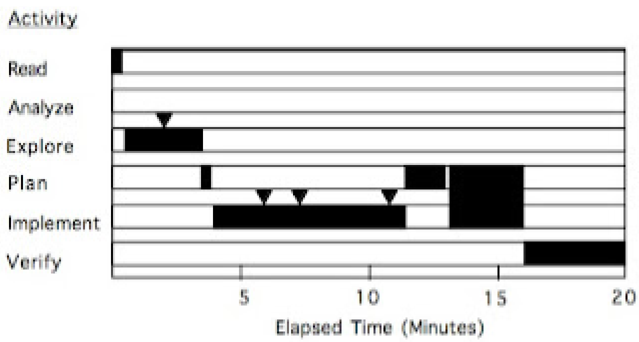
Elevundersøkelsen er basert på mer enn 100 video-opptak av studenter (high school og college) som jobber med «ikke-rutine» problemer. Mer enn 60 % av løsningsforsøkene kan klassifiseres som «les, gjør en rask beslutning, og følg den uansett». Figur 2.5 viser således et typisk problemløsningsforsøk der to studenter samarbeider om løsningen. Legg merke til at de ikke stiller spørsmål til sin egen løsnings-prosess, (vi ser altså ingen små trekanter i denne figuren).

Schoenfeld (1989) forteller at i sine problemløsningskurs deler han ofte opp studentene i grupper. Mens studentene jobber, går han rundt og spør:

> What (exactly) are you doing? (Can you describe it precisely?) Why are you doing it? (How does it fit into the solution?) How does it help you? (What will you do with the outcome...?) (s. 98)

Studentene kan normalt ikke svare. De skjønner imidlertid at de ikke «slipper unna» og begynner å drøfte spørsmålene sammen på forhånd. Ved slutten av semesteret er det i stor grad blitt en vane for dem å stille spørsmål til egen løsningsprosess. Det viser igjen i de små trekantene i figur 2.6. Etter problemløsningskurset er færre enn 20 % av løsningene av typen «les, gjør en rask beslutning og følg den uansett». Figur 2.6 er typisk for studenter etter å ha gjennomgått et semesters problemløsningskurs. Selv om også disse studentene mangler ekspertens grundige analyse av problemet, ser vi likevel at bedre kontroll over egen løsningsprosess gir studentene mulighet til å komme fram til en løsning.

Studenter løser problem etter kurs i problemløsning:



Figur 2.6

Det er stor enighet i forskningslitteraturen om viktigheten av metakognitive ferdigheter (Bjuland, 2007; Driscoll, 2010; Lester, 1994; Schoenfeld, 1992). Bjuland (2007) finner f.eks. i sin studie av lærerstudenter som jobber i grupper med problemløsning i geometri, at en student som påtar seg å skrive referat fordi hun føler hun ikke har så mye annet å bidra med, ved sine spørsmål til løsnings-prosessen (det må jo med i referatet) på en avgjørende måte er med på å drive problemløsnings-prosessen framover. Hennes bidrag fører særlig til at gruppa får en mer effektiv tilbakeblikks-fase.

Metakognitive ferdigheter er imidlertid vanskelige å undervise. Generell instruksjon i metakognitive ferdigheter viser seg å være lite effektiv. Resultatene ser ut til å være noe bedre når opplæringen tar plass i en spesifikk matematisk problemløsningssammenheng (Schoenfeld, 1992).

Abusdal (2011, s. 26) setter opp en tabell over fasene i problemløsningsprosessen slik den framstilles av Mason (1985), Pólya (1957) og Schoenfeld (1989). Jeg syns tabellen gir en hensiktsmessig oversikt og gjengir den her i en noe modifisert og utvidet form, der også Borgersens modell er tatt med:

	Faser i løsningsprosessen						
Mason et al. (1985)	Inngang		"Angrep"			Tilbakeblikk	
Polya (1957)	Forstå problemet		Legg en plan		Utfør planen	Se tilbake	
Schoenfeld (1989)	Lese	Analysere	Utforske	Planlegge	Implementere	Verifisere	
Borgersen (1994)	Analysere/ definere	Tegning/ modell	kvalifisert gjetting	Finne hypotese	Utvikle bevis	Refleksjon	Generalisering

Tabell 2.2 Oversikt over ulike faser i problemløsningsprosessen.

Vi ser at selv om forskerne gjør ulike valg i forhold til hvor mange faser de deler løsningsprosessen inn i, så er de enige om hovedtrekkene i problemløsningsprosessen. Det ser også ut til å være en grunnleggende enighet i forskningslitteraturen om at elever i stor grad fokuserer på angreps-fasen(e), mens inngang/forståelse av problemet, samt tilbakeblikk, blir viet lite oppmerksomhet. Dette bekreftes i en nyere studie der Erbas og Okur (2012) konkluderer med at verifiseringsfasen i all hovedsak er fraværende for high-school-elever. De finner videre at elever som går direkte over til utforskning etter en rask gjennomlesning av et problem, bare kommer fram til en løsning på problemet dersom utforskningen først leder dem tilbake til analyse-fasen.

Mangelfull erfaring med problemløsning (inkludert inngangs- og tilbakeblikks-faser) kan gi elever et snevert bilde av matematikk. Matematiker og lærer Paul Lockhart (2009, s. 19) hevder at det er for lite matematikk i mattetimen: Hvis elevene ikke får mulighet til å finne egne problemer, hypoteser, forklaringer; hvis de ikke får oppleve å bli «kreativt frustrerte og inspirerte», da har de heller ikke fått muligheten til å oppleve matematikk. For:

> Mathematics is the music of reason. To do mathematics is to engage in an act of discovery and conjecture, intuition and inspiration; … to have a breakthrough idea; to be frustrated like an artist; to be awed and overwhelmed by an almost painful beauty; to be alive. (Lockhart, 2009, s. 37)

2.2 GEOMETRI

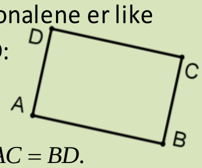
I *Learning Mathematics* uttrykker Anthony Orton et aldri så lite hjertesukk over elevers problemer med å forstå geometriske bevis: «Anyone who has tried to teach Euclidian geometry to teenagers must have been frustrated by their seeming inability to comprehend the nature of a proof» (Orton, 2004, s. 181). Det var denne type bekymring som ledet det nederlandske lærerekteparet Pierre van Hiele og Dina van Hiele-Geldof til å skrive hver sin doktoravhandling om elevforståelse i geometri. Pierre van Hieles forskning resulterte i en teoretisk modell over fem nivåer i utviklingen av geometrisk tenkning. Dina van Hiele-Geldof prøvde å forklare hvordan læreren kan hjelpe eleven å utvikle seg fra ett nivå til det neste og beskrev fem undervisningsfaser innenfor hvert nivå (Pusey, 2003).

Jeg vil i denne korte framleggingen av noen sentrale forskningsresultater omkring elevers geometriforståelse først gjennomgå de fem nivåene i van Hiele-modellen, og deretter se litt nærmere på bruk av bevis i skolens geometrifag.

2.2.1 VAN HIELE-MODELLEN

Van Hiele (1955, gjengitt i van Hiele, 1986) mener at tenkning i geometri kjennetegnes av fem distinkte, kvalitativt forskjellige nivåer. Forskningslitteraturen varierer noe i forhold til hvilke navn og nummer de fem nivåene betegnes ved. Jeg velger å snakke om nivå 1–5 (i stedet for van Hieles opprinnelige 0–4) først og fremst fordi jeg syns det blir mer ryddig dersom det er samsvar mellom å komme opp til «det tredje nivået» og å være «på nivå 3». Noen har også argumentert for en nummerering fra 1–5 fordi de mener det finnes et enda mer grunnleggende nulte nivå *under* det van Hiele betegner som nivå null (Clements & Battista, 1992). Jeg ser i denne framstillingen bort fra et eventuelt nulte nivå, bl.a. fordi et slikt nivå er irrelevant i forhold til den elevgruppen min egen studie sikter mot.

Jeg har i tabell 2.3 tillatt meg å utarbeide en oversikt over van Hiele-nivåene på grunnlag av kjennetegn og eksempler for hvert nivå slik de gis av Clements og Battista (1992) og/eller av Hoffman (1981). Det lille beviset som illustrerer nivå 4, er valgt først og fremst fordi det tar liten plass – elever på van Hiele-nivå 4 er også komfortable med mer kompliserte bevis.

	Nivå	Kjennetegn	Eksempel
5	**Rigorøst**	Kan utforme og sammenlikne aksiomatiske, geometriske modeller.	Forstår f.eks. : hvordan parallellpostulatet (Euklid) har sammenheng med eksistensen av rektangler, og at rektangler ikke eksisterer i ikke-Euklidsk geometri.
4	**Deduktivt**	Forstår viktigheten av bevis. Skjønner forskjellen mellom udefinerte begreper, definisjoner, aksiomer og teoremer. Kan formulere formelle geometriske bevis.	Kan f.eks. bevise at diagonalene er like lange i rektangelet ABCD:  $AD = BC,\ AB = AB,$ og $\angle ABC = \angle BAD$. Da er $\triangle ABC \cong \Delta BAD$. Dermed $AC = BD$.
3	**Relasjonelt (uformell deduksjon)**	Ser sammenhenger, og kan klassifisere figurer hierarkisk. Forstår viktigheten av definisjoner. Skiller mellom nød-vendige og tilstrekkelige betingelser. Forstår logiske geometriske argumenter.	Forstår f.eks. at: Ethvert kvadrat er også et rektangel. Vinkelsummen i en firkant er 360° fordi enhver firkant kan deles inn i to trekanter - hver med vinkelsum 180°
2	**Analytisk (Deskriptivt)**	Analyserer egenskapene til geometriske figurer. Forstår at figurer kan klassifiseres i ulike typer.	Vet f.eks. at: Motsatte sider i et rektangel er like lange. Vinklene i rektangelet er rette. En rombe er en figur med fire like lange sider.
1	**Visuelt**	Identifiserer geometriske former ut fra et helhetlig bilde av hvordan figuren ser ut.	"Det er et rektangel, for det ser ut som ei dør." "Det er en rombe, for jeg har lært at figurer som ser sånn ut, heter rombe."

Tabell 2.3 Oversikt over de fem van Hiele-nivåene.

Vi legger merke til at nivåene er hierarkiske. Begreper som forstås implisitt på ett nivå, forstås eksplisitt på det neste. F.eks. ser vi at figurer er bestemt av egenskaper også på nivå 1, men en elev på dette nivået legger ikke eksplisitt merke til disse egenskapene. I stedet oppfattes figuren som en helhet (se tabell 2.3), og først på nivå 2 trer figurens egenskaper fram i fokus. Van Hiele presiserer at dersom en elev skal fungere godt på ett nivå, må de forutgående nivåene først være mestret.

Forskning knyttet til van Hiele-modellen kan deles i tre hovedstrømmer (Pusey, 2003). Det første viktige fokuset er hvorvidt van Hiele-nivåene faktisk gir et riktig bilde av utvikling av geometri-forståelse. Forskningsresultater ser her i stor grad ut til å støtte van Hieles beskrivelse. Et unntak er fremstillingen av nivåene som distinkte – flere har tatt til orde for at de har en mer kontinuerlig karakter (Burger & Shaughnessey, 1986; Clements & Battista, 1992; Fuys, Geddes, & Tischler 1988).

Et annet sentralt utgangspunkt har vært å vurdere elevers van Hiele-nivåer. Resultatene viser generelt lave nivåer både i amerikanske og europeiske undersøkelser. Japanske studier indikerer imidlertid at elevene her kommer noe bedre ut. Det kan spesielt nevnes at flertallet av amerikanske elever ennå befinner seg på nivå 1 eller 2 når de går ut av middle school. I high school kreves imidlertid deduktive resonnementer (nivå 4), og lite erfaring med geometrisk tenkning, særlig fra nivå 3, medfører dessverre dårlige forutsetninger for å mestre det nye stoffet (Senk, 1989; Usiskin, 1982 referert i Fuys, 1985; van Hiele, 1989). Å hoppe over et nivå er heller ikke tilrådelig – da kan grunnlaget for forståelse mangle, og elever tvinges til å «komme seg gjennom pensum» ved ren pugging (van Hiele, 1986).

	Japan			*United States*		
Grade	*Level 0*	*Level 1*	*Level 2*	*Level 0*	*Level 1*	*Level 2*
1	100	0	0	100	0	0
2	5	95	0	100	0	0
3	0	80	20	93	7	0
4	0	82	18	83	17	0
5	0	47	53	76	13	0
6	0	92	8	70	29	1

Tabell 2.4. Prosentandel av geometrioppgaver på nivå 0, 1 eller 2 (ifølge 0-4 van Hiele-nummerering) i lærebøker fra Japan og USA. Tabellen er hentet fra Whitman et al., 1997, s. 221.

Kanskje kan lærebokanalyser være med å forklare elevenes prestasjoner: Tabell 2.4 fremstiller resultater fra en undersøkelse av van Hiele-nivåer i geometrioppgaver i amerikanske og japanske matematikkbøker (Whitman et al., 1997). (Merk at forskerne her bruker den opprinnelige 0–4-nummereringen slik at nivå 0, 1, 2 i tabellen tilsvarer det jeg betegner som henholdsvis 1, 2, 3.) Forskjellen er slående og tyder på at en i japansk skole jobber mer systematisk med gradvis å styrke elevenes geometriforståelse. Tabellen gjenspeiler en kritikk mot amerikansk skole for å fokusere for mye på å kunne navngi figurer (nivå 1) og for lite på begrepsforståelse (Fuys et al., 1988; Mistretta, 2000; Whitman et al., 1997).

Også for lærerstudenter viser det seg at mange er på van Hiele-nivå 1 eller 2 (Fujita, 2012; Fujita & Jones, 2007; Lawrie & Pegg, 1997, gjengitt i Pusey 2003; Mayberry, 1983). Her ser forskerne bl.a. at studentene ikke klarer å skille mellom nødvendige og tilstrekkelige betingelser, noe som f.eks. fører til at de tror at rektangler er kvadrater eller blander sammen likesidete og likebeinte trekanter.

En tredje retning innenfor forskning omkring van Hieles syn på geometrisk tenkning har dreid seg om ulike måter å prøve modellen ut på i praksis. Hvordan kan van Hieles teori *anvendes* for å fremme elevers geometriforståelse? Van Hiele mener at utvikling fra et nivå til et annet er mer avhengig av undervisning enn av alder og modenhet. Han presiserer:

> Instruction intended to foster development from one level to the next should include sequences of activities, beginning with an exploratory phase, gradually building concepts and related language, and culminating in summary activities that help students integrate what they have learned into what they already know. (van Hiele, 1999, s. 311)

Clements og Battista (1992) påpeker at høyere nivåer ikke oppnås på grunnlag av lærerens klasseromsundervisning, men ved *nøye utvalgte oppgaver*. Mistretta (2000) beskriver en feltstudie der matematikkopplæring for 23 elever i 8. klasse ble tilrettelagt spesielt med tanke på å utvikle deres geometriforståelse i samsvar med van Hiele-nivåene. Pretesten viste at 57 % av elevene var på nivå 1 eller lavere; 30 % var på nivå 2 og 13 % på nivå 3, (høyere nivåer ble ikke testet). Elevene jobbet to og to med aktiviteter spesielt tilrettelagt for å fremme relasjonsforståelse, de måtte selv finne nyttige strategier og var ivrige i å dele disse med hverandre. Ifølge posttesten en måned senere var 4 % av elevene nå på nivå 1, 26 % på nivå 2 og 70 % på nivå 3 (ibid.).

Patsiomitou & Emvalotis (2010) gjorde tilsvarende erfaringer i en undersøkelse av hvordan bruk av Geometer's Sketchpad i problemløsningsaktiviteter bidro til at elever (15–16 år) utviklet sin geometriske tenkning. Åpne geometrioppgaver der elevene selv måtte formulere hypoteser, muligheten til utforskning ved hjelp av dynamisk programvare, samt diskusjon i smågrupper, så ut til å fremme elevenes evne til deduktiv tenkning, slik at flere fungerte på van Hiele-nivå 4.

Pusey (2003) forteller om en forskningsstudie utført av Swafford og Jones (1997) i tilknytning til kursvirksomhet for lærere på mellomtrinnet. Formålet med kursene var både å øke lærernes fagkunnskap i geometri og deres kjennskap til utvikling av geometrisk tenkning ifølge van Hiele-modellen, med særlig fokus på nivå 2 og 3. Pusey oppsummerer:

> The teachers came away feeling more confident with geometry, open to taking risks and encouraging the same in their students, wanting to take more time teaching a geometry unit, and convinced that students needed more opportunities with lower experiences of the van Hiele model.
> (Pusey 2003, s. 34)

Det er vanskelig å ikke legge merke til hvordan van Hieles oppfordring til en innledende *utforskningsfase* passer inn i en problem-basert matematikkopplæring. Vektleggingen av utforskning, oppbygging av begrepsforståelse og oppsummerende aktiviteter for å knytte det en har lært til det en allerede vet, har som formål å fremme relasjonsforståelse (jf. Skemp, 1976, gjengitt i Skemp, 2006), noe som viser igjen i forskningsstudier knyttet til van Hiele-modellen.

2.1.2 BEVIS – PROBLEMLØSNING OG GEOMETRIFORSTÅELSE

Bevis er selvfølgelig et aktuelt tema innenfor alle områder av matematikkfaget. I tråd med det fokuset jeg har valgt for denne studien, vil jeg imidlertid bare se på bevis som del av *geometri-undervisning.* Mye av forskningen kommer fra USA der geometri undervises over et helt år i high school (normalt 10. klasse). Det er imidlertid bred enighet i internasjonal matematikkdidaktisk debatt om at bevis er et vanskelig emne å introdusere for elevene (Furinghetti, Olivero, & Paola, 2001).

Hoffer (1981) forteller at geometri peker seg ut som det kurset første-års universitetsstudenter rapporterer at de likte dårligst i high school med begrunnelser som «måtte bevise teoremer hele året» og «kom gjennom kurset ved å pugge bevis». Likevel er det også bred enighet om at bevis utgjør en sentral del av kunnskap i geometri. Herbst og Brach (2006) deler matematikkdidaktisk forskning relatert til bevis inn i fire brede kategorier:

- Historiske studier
- Kognitiv utvikling
- Misoppfatninger
- Klasseromskultur

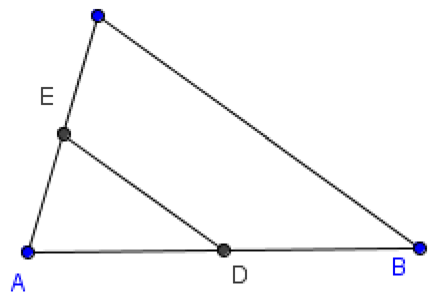
Det første viktige fokuset er historiske studier av bevisets plass i matematikken og i skolen. Om situasjonen i USA kommenterer Senk:

> Although teaching students to write proofs has been an important goal of the geometry curriculum for the college bound in the United States for more than a century, contemporary students rank doing proofs in geometry among the least important, most disliked, and most difficult of school mathematics topics. (Senk, 1989, s. 309)

Ikke bare er bevis blitt sett på som viktig i mer enn et århundre, men nyere forskning mener også at bevisets plass i skolen har fått *økt* oppmerksomhet det siste tiåret (Cirillo & Herbst, 2012). Dette skyldes først og fremst at bevis ses på som grunnlaget for matematisk forståelse og som essensielt for å utvikle, etablere og kommunisere matematisk kunnskap (ibid.). Undervisning i bevis innebærer dessuten muligheter ikke bare til å vise *at* påstander er sanne, men også til å forklare *hvorfor* de er sanne (Gooya, 2007).

For det andre har vi forskning som vektlegger kognitiv utvikling. Spesielt interessant her i forhold til mitt fokus på van Hiele-nivåer, er at det er påvist signifikante sammenhenger mellom elevers van Hiele-nivå i forkant av geometrikurset i high school og deres evne til å utlede bevis ved slutten av året (Senk, 1989). Selv om ikke noe van Hiele-nivå i begynnelsen av skoleåret garanterer at en elev vil klare seg i high school geometri, så indikerer undersøkelsen at et utgangspunkt på nivå 3 (eller høyere) utgjør en stor fordel. Et «inngangs-nivå» på 2 ser ut til å være en slags «kritisk grense» i forhold til å mestre bevis ved slutten av året (ibid.). Kanskje kan lave van Hiele-nivåer forklare hvorfor overgangen til kurs som vektlegger deduktiv tenkning, blir for brå for mange elever: «… abrupt transition to proof is a source of difficulty for many students, even for those who have done superior work with ease in their lower-level mathematics courses» (Moore, 1994, s. 249, referert i Furinghetti et al. 2001, s. 319). Her ser vi sannsynligvis et klart samsvar med van Hieles utsagn om at et nødvendig grunnlag for forståelse mangler dersom elever forventes å utføre deduktive resonnementer (van Hiele-nivå 4) uten først å ha mestret de tidligere nivåene. Kognitiv utvikling kan likevel ikke alene forklare hvordan en elev lykkes i å forstå bevis. F.eks. antyder en studie av 166 high-school-elever på Sri Lanka at *både* evne til geometrisk tenkning, generelle problem-løsningsferdigheter og god fagkunnskap i geometri er signifikante forklaringsvariabler for hvor godt elevene klarer å utlede geometriske bevis, men *god fagkunnskap* i geometri ser ut til å være den viktigste forklaringsvariabelen (Chinnappan, Ekanayake, & Brown, 2012).

Et tredje hovedfokus er undersøkelser av misoppfatninger i tilknytning til bevis. Et eksempel er at elever ser på «empirical evidence as proof and mathematical proof simply as evidence» (Chazan, 1993, s. 359). I oppgaven i figur 2.7 er elevene nøye med å sjekke for flere ulike spesialtilfeller (rettvinklet trekant, likebeint trekant, trekant med en stump vinkel osv.). Noen elever forklarer at fordi de kontrollerer for alle mulige «typer» trekanter, kan de si at de «beviser ved hjelp av eksempler». En del strever også med å godta gyldigheten av et deduktivt bevis. Beviset oppfattes gjerne som om det bare gjelder et spesialtilfelle, og elevene tror at det kan være mulig å finne et moteksempel (ibid.).



Figur 2.7 Oppgave:

Bevis at for enhver trekant er linja mellom midtpunktene på to av sidene parallell med den tredje siden.

Den siste hovedkategorien er forskning som vektlegger klasseromskulturen og bevis som en mulighet eller hindring til å la elever oppleve matematikk som en skapende *prosess*. Det påpekes at både undervisning og lærebøker gir inntrykk av at matematiske sannheter finnes ved logiske, deduktive resonnementer. Det fremgår imidlertid ikke at matematikk skapes ved en kreativ prosess der matematikeren danner og tester hypoteser, prøver å finne moteksempler, videreutvikler hypotesene og kommer fram til bevis. Det deduktive formatet som et teorem *presenteres* i, skjuler prosessen som *dannet* det (Battista & Clements 1995).

Borgersen (1994) framhever geometri som en rik kilde til åpne problemer som gir elever mulighet til å jobbe med prosess. Med åpne problemer mener jeg her oppgaver der spørsmålsstillingen eller resultatet ikke er helt klart på forhånd – elevene må selv utarbeide hypoteser. I forbindelse med et kurs i geometri for første-års universitetsstudenter konkluderer forskerne med at det *er* mulig å la studenter oppleve «the whole process of doing mathematics» (Borgersen, 1994, s. 32). Borgersen og Bjuland (2007, s. 254) påpeker at «bevis eller begrunnelse er det som vanligvis faller vanskeligst når vi løser problemer, men også det som ofte gir størst glede når vi får det til».

National Council of Teachers of Mathematics, NTCM, (2000, gjengitt i Cirillo & Herbst, 2012) vektlegger nettopp at eleven engasjeres i å danne og undersøke hypoteser, utvikle og evaluere matematiske bevis, samt velge ut og bruke forskjellige typer bevis. Til tross for disse anbefalingene fra NTCM hevder Cirillo og Herbst (2012) at den viktige delen som mangler i vår moderne forståelse av hva det vil si å jobbe med bevis i skolen, er *hypotesedannelse*. Furinghetti et al. (2001) trekker fram den tradisjonelle klasseromskulturen der lærer og lærebok er autoriteter – matematikk er ikke noe som diskuteres – som en årsak til at bevis framstår som en problematisk del av matematikk-opplæringen. Innenfor en slik kultur finnes ingen «sikk sakk» mellom hypoteser og validering: Oppgaver som krever bevis, presenteres *alltid* som «bevis at»; hypotesedannelse er altså unødvendig – det som skal bevises er allerede funnet.

Lamperts (1993) artikkel *Teachers' Thinking about Students' Thinking about Geometry* regnes som en klassiker i sin beskrivelse av undervisning av bevis i et «vanlig» amerikansk klasserom. Her påpeker hun hvordan læringen av bevis i stor grad dreier seg om å pugge definisjoner. Det er aldri noen tvil om at det som skal bevises, *kan* bevises (hypotesedannelse er et ikke-tema). Videre legges det så stor vekt på at beviset føres «riktig» i to kolonner (påstander og begrunnelser) at rigide krav til form framstår som viktigere enn logisk argumentasjon (ibid.). Om denne formen for matematikkopplæring kommenterer Lockhart:

> No mathematician works this way. No mathematician has ever worked this way.… Mathematics is not about erecting barriers between ourselves and our intuition, and making simple things complicated. Mathematics is about removing obstacles to our intuition, and keeping simple things simple. (Lockhart, 2009, s. 75–76)

Et eksempel på å «gjøre det som er lett, vanskelig» (jf. sitatet ovenfor) har vi når elever oppfatter bevis som et «ritual» for å verifisere fakta de allerede vet at er sanne (Driscoll, 2010). Flere forskere peker på at vi ved i større grad å knytte bevis til problemløsning, hypotesedannelse og hypotese-testing kan gjøre undervisning i bevis mer meningsfull for elevene (Cirillo & Herbst, 2012; Driscoll, 2010; Furinghetti et al., 2001). Mason og Davis (1991) foreslår å «myke opp» tilnærmingen til bevis i skolen ved å endre ordbruken fra å bevise (proving) til å overbevise (convincing), der en meningsfull bevis-prosess begynner med å overbevise seg selv om at en hypotese er sann, deretter en venn og til slutt en «skeptiker». De påpeker at «convincing is finding a way to express your seeing so that others can see it too» (ibid., s. 19).

Jeg vil avslutte denne lille gjennomgangen av bevis med å minne om at vi har valgt å se på problemløsning som en *kunst*. I tråd med et slikt fokus betegner Lockhart (2009, s. 111) bevis som «a poem of reason». Et bevis skal tilfredsstille krav til logikk, men det kan også være vakkert. Å endelig komme fram til et bevis etter en spennende problemløsningsprosess kan oppleves som at: «We made something beautiful and compelling and we had fun doing it. For a brief shining moment we lifted the veil and glimpsed a timeless simple beauty» (ibid., s. 119).

2.3 MATEMATIKKONKURRANSER

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse (Abel-konkurransen) er en norsk konkurranse i matematisk problemløsning for elever i videregående skole. Den har hatt form av en masse-konkurranse siden 1985. Skoleåret 2012/2013 deltok 3433 elever fra 226 skoler. Konkurransen består av to innledende runder ved skolene. De 10 % beste fra runde 1 går videre til runde 2. De 20–25 elevene med best samlet poengsum inviteres så til Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, NTNU, der de deltar i finalen (http://abelkonkurransen.no/nb/om/).

Norske elever kan også delta i internasjonale konkurranser. NMC – Den nordiske matematikkonkurransen arrangeres hver vår. De norske deltakerne tas ut på grunnlag av sine resultater i Abel-finalen. Konkurransen avholdes ved skolene (ibid.).

På høsten deltar et lag på fem norske elever i Baltic Way. Denne konkurransen avholdes til minne om Baltic Way demonstrasjonen i 1989 – en fredelig demonstrasjon der omkring to millioner mennesker holdt hverandre i hendene og dermed dannet en 600 km lang rekke gjennom Estland, Latvia og Litauen. Baltic Way er en matematisk lagkonkurranse som vektlegger samarbeid. Deltakerne kommer hovedsakelig fra de baltiske og de nordiske landene (ibid.).

Våren 2013 reiser to norske jenter til Luxemburg for å bli med på European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO). EGMO ble avholdt for første gang i 2012 i Cambridge, inspirert av China Girls' Mathematical Olympiad som har vært arrangert siden 2001 for å oppmuntre flere jenter til å prøve seg i matematikkonkurranser (http://www.egmo.org/).

Den mest prestisjetunge matematikkonkurransen for elever i videregående skole er International Mathematical Olympiad (IMO). IMO ble avholdt for første gang i Romania i 1959 – med sju deltakende land (Kreussler, 2009). Norge har deltatt siden 1984 og ligger som regel midt på treet i IMO. (http://abelkonkurransen.no/nb/inter/). Omkring hundre land fra fem kontinenter deltar med lag på opp til seks deltakere. Halvparten av deltakerne premieres; $^1\!/_{12}$ får gull, $^2\!/_{12}$ sølv og $^3\!/_{12}$ bronse. IMO 2012 ble arrangert i Argentina, mens Colombia står for tur i 2013.

2.3.1 OPPGAVENE

I alle de ovenfor nevnte konkurransene gis det oppgaver i emnene algebra, tallteori, kombinatorikk og geometri. Abelkonkurransen runde 1 består av 20 flervalgsoppgaver, hver med fem svar-alternativer. Oppgavesettet skal besvares i løpet av 100 minutter. I runde 2 er det 10 oppgaver, denne gang uten svaralternativer. For hver oppgave er svaret et heltall mellom 0 og 999, og også her er tidsfristen 100 minutter (http://abelkonkurransen.no/nb/om/). I finalen er oppgavene naturlig nok vanskeligere, men til gjengjeld har deltakerne mer tid til rådighet. I løpet av fire timer skal fire oppgaver – vanligvis delt inn i en a- og en b-oppgave – besvares. Eksempler på geometriproblemer (med løsningsforslag) fra både runde 1, 2 og finalen, finnes i vedlegg 1.

Deltakerne i IMO blir utfordret til å løse seks vanskelige oppgaver fordelt over to dager. De har 4 ½ time på å løse de tre første problemene. Neste dag følger 4 ½ nye timer til de tre siste. For hver dag gis oppgavene etter stigende vanskelighetsgrad, dvs. at oppgave 1 og 4 er antatt å være de «letteste». Vedlegg 2 inneholder to eksempler på geometriproblemer fra IMO.

2.3.2 TRENINGSLEIRENE

De norske deltakerne i Baltic Way og IMO tas ut på grunnlag av sine resultater i Abel-finalen og Den Nordiske Matematikkonkurransen. I forkant av både Baltic Way og IMO møtes de til omkring en ukes treningsleir. Treningsleiren før Baltic Way 2012 fant sted i Tallin i Estland, der også konkurransen ble arrangert. Treningsleiren før IMO 2012 ble avholdt i Sorø i Danmark og samlet alle de nordiske landene. På disse leirene får deltakerne undervisning i algebra, tallteori, kombinatorikk og geometri. Størstedelen av tiden er de selv engasjert i problemløsning. I tillegg fungerer leirene som et sosialt møtested for matematikkinteressert ungdom.

Andre land kan ha mer omfattende trening enn det vi i Norge tilbyr våre elever. Danske elever møtes f.eks. i Sorø flere ganger i løpet av året for å jobbe med problemløsning. Ledende IMO-nasjoner som Kina og Russland plukker ut talentfulle elever fra de er helt unge og organiserer omfattende treningsopplegg for dem. I USA arrangeres et fire ukers treningsprogram før IMO. Steve Olson fulgte det amerikanske IMO-laget i 2001 både under forberedelsene og i selve konkurransen. Han kommenterer hvordan den problembaserte matematikkopplæringen på treningsleirene minner mer om japansk enn om amerikansk undervisning. Olson (2004) forteller om en forskningsstudie der matematikkundervisning fra 81 junior high schools over hele USA ble videofilmet:

> What was missing from the classes was almost as obvious as what was present. Students almost never worked on challenging, multistep problems.… Instead, they memorized formulas and learned how to apply them. Unlike the Olympians, who use what they know to explore new territory, the students in the tapes were mostly practicing procedures. (Olson, 2004, s. 46)

Tilsvarende videoopptak fra japanske klasserom viste imidlertid en matematikkopplæring med utgangpunkt i problemløsning. Olson konkluderer med at både i Japan og på treningsleirene før matematikkonkurranser, så *virker* en problembasert tilnærming.

2.3.3 DELTAKERNE – PROBLEMLØSNING OG MATEMATISK TALENT

Det finnes en rekke undersøkelser av hvordan barn/ungdom som er karakterisert som «talentfulle i matematikk» klarer seg både i skolen og ellers i livet (Benbow, 2012; Lubinski & Benbow, 2006; Stanley, 1991). Flere har også skrevet mer spesifikt om deltakere i matematikk-konkurranser (Benson & Marrongelle, 2002; Campbell, 1996; Olson, 2004), og studier er utført for å se i hvilken grad matematikkolympiade-deltakere etter hvert er med og bidrar i samfunnet (Campbell & Walberg, 2011; Karp, 2002). Her vil jeg bare se kort på matematikkdidaktisk forskning omkring problemløsning og «talentfulle» elever. For det er ikke til å komme bort fra at en matematikkolympiadedeltaker har talent for matematikk. Det må vi vel også kunne si om de ca. 20 deltakerne i Abel-finalen. Blant de mer enn 3000 deltakende i første runde kan det imidlertid finnes mange grunner til å delta. (Da jeg selv var lærer og spurte om elevene mine ønsket å prøve seg i Abel-konkurransen, ville f.eks. hele klassen delta *hvis* de fikk lov til å ta testen i norsktimen… Det er ikke denne type deltakere jeg ønsker å se nærmere på her.)

Grunnlegger av *Wisconsin Mathematics, Engineering and Science Talent Search*, professor Laurence Chrisholm Young, knytter matematisk talent til problemløsning i følgende definisjon:

> Mathematical talent is a combination of ingenuity, insight, creativity, the willingness to experiment, and persistence; it is not merely a skill in manipulation. By working on problems, you can develop your talent for mathematical thinking and problem solving. (Young, referert i Morera, Rue, & Alet, 2012)

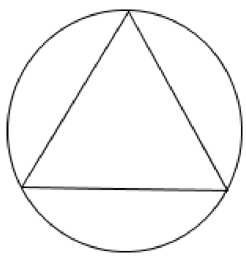
Jeg synes denne definisjonen på en god måte får fram at talent i matematikk er sammensatt av flere faktorer. Det settes av og til spørsmålstegn ved hvorvidt matematisk begavede tenker kvalitativt annerledes enn andre elever, eller om de «bare» er tidlig ute for alderen (Threlfall & Hargreaves, 2008; Winner, 2000). Dette ligger noe utenfor mitt fokus, men jeg registrerer at definisjonen ovenfor åpner opp for at alle kan utvikle sitt matematikktalent. Samtidig impliserer den en oppfordring til skolen om fremme et slikt talent gjennom problemløsning.

Med henvisning til Pólyas problemløsningsmodell finner Sriraman (2003) at elever som er klassifisert som begavede i matematikk, bruker mer tid enn sine jevnaldrende både på å forstå problemet og legge en plan. De skiller seg også ut i verifiseringsfasen der de reflekterer over hvordan løsningen samsvarer med det de hadde planlagt, sammenlikner ulike problemer, ser etter andre løsningsmetoder, finner nye hypoteser og prøver å generalisere resultatene.

Gorodetsky og Klavir (2003, s. 306) sier at «by definition the gifted are excellent problemsolvers». De mener videre at gode problemløsere kjennetegnes av god evne til å gjenkjenne dype strukturer i et problem. Dermed blir disse elevene bedre i stand til å trekke relevant informasjon ut av oppgaveteksten, de er mer effektive i å kombinere ulike opplysninger til en helhetlig løsning og klarer i større grad å gjøre bruk av analog tenkning. Med analog tenkning (jf. Pólya) menes her å bruke kunnskaper/strategier fra problemer en har løst før, i nye problemer; talentfulle elever har en tendens til å se hvert problem som et spesialtilfelle av en generell løsningsstruktur. Forskerne mener at den talentfulle elevens analytiske tilnærming til problemløsningsprosessen kan sammenliknes med matematikerens (Gorodetsky & Klavir, 2003).

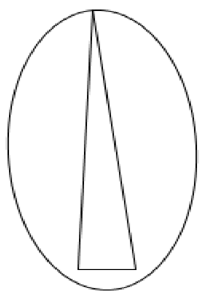
I sin oversikt over forskningslitteratur om problemløsning framholder også Lester (1994) at gode problemløsere fokuserer på strukturelle trekk i problemene, mens svakere problemløsere bare ser overfladiske trekk. Lester vektlegger dessuten metakognitive ferdigheter:

- Gode problemløsere vet i større grad enn svake problemløsere hva de vet, og de vet det på en annen måte – de ser sammenhenger mellom ulike kunnskaper (har godt utviklede skjema).
- Gode problemløsere er mer klar over sine styrker og svakheter som problemløsere.
- Gode problemløsere er flinkere til monitorering/kontroll av egen problemløsningsprosess.

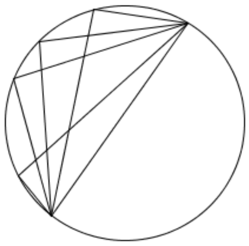


Figur 2.8

I en liten kvalitativ studie av matematisk begavede high-school-elever (n = 4) trekker Sriraman (2004) fram at disse ungdommene har en svært velutviklet evne til å kunne se et problem fra ulike synsvinkler. I undersøkelsen introduseres et problem som er helt nytt for dem: Spørsmålet «Er det sant at for *en hver* trekant finnes en sirkel som går gjennom alle tre hjørnene?» stilles sammen med en illustrasjon tilsvarende figur 2.8. Elevene begynner da straks å lete etter moteksempler ved å tegne trekanter som ser «mest mulig annerledes» ut enn den tilsynelatende likesidete trekanten i figuren. Et typisk forsøk på moteksempel er illustrert i figur 2.9: Hvis trekanten tegnes «lang og smal», kan en vel ikke tegne en sirkel gjennom hjørnene?



Figur 2.9



Figur 2.10

Elevene antar på dette stadiet at riktig svar på spørsmålet ovenfor er «nei», men i stedet for å slå seg til ro med det, klarer de å se problemet fra en annen synsvinkel ved *først* å tegne sirkelen. Nå kan de velge tre punkter på sirkellinja og dermed tegne en hvilken som helst trekant (hvorav noen er illustrert i figur 2.10). Sriraman mener denne evnen til radikalt å endre tilnæmingsmåte til et problem også kjennetegner matematikere (ibid.).

Det finnes også studier som indikerer at elever med talent for matematikk – i likhet med profesjonelle matematikere – er flinke til å visualisere og dessuten har god evne til å bruke intuisjon i problemløsningsprosessen (Fischbein, 1981, Kline, 1976, Sriraman, 2003b, alle gjenngitt i Sriraman 2004). Intuisjon defineres her som «the affective mood associated with having grasped the solution while trying to solve a problem before one can offer an explisit and complete justification for that solution» (Sriraman, 2004, s. 276). En av elevene i den nevnte studien kommer for eksempel fram til at sentrum i sirkelen må ligge på skjæringspunktet mellom midtnormalene på sidene i trekanten, «it just seems right, I don't know why» (ibid., s. 280). Et annet eksempel finner vi i følgende svar fra en IMO-deltaker som blir spurt om hvordan han nærmer seg et vanskelig geometriproblem: «Generally speaking, I try to understand what the fuzziest point in the problem is, and then apply my intuition to this point» (Koichu & Berman, 2005, s. 168).

I sin oppsummering av forskning omkring kognitiv utvikling og talentfulle barn påpeker Steiner og Carr (2003) at disse elevene bruker mindre tid enn andre på å løse et problem, selv om de bruker *mer* tid på utforskning og planlegging. De har en bredere kunnskapsbase og utnytter kunnskap mer effektivt. De kjenner til flere problemløsningsstrategier og viser en mer fleksibel strategibruk.

I boka *Count Down. The race for beautiful solutions at the International Mathematical Olympiad* (Olson, 2004) omtales de seks deltakerne på det amerikanske IMO-laget i 2001. Leseren imponeres både av deres svært solide matematikkunnskaper og av deres evne til å finne originale løsninger. Forfatteren kommenterer at selv om disse seks guttene på mange måter er svært forskjellige, har alle én ting felles: imponerende matematisk kreativitet. For dem er det å løse et matematisk problem en *skapende aktivitet*. Her er vi igjen tilbake til det temaet som også innledet dette teorikapittelet: Problemløsning som kunst. Dette kunstneriske perspektivet kommer tydelig til uttrykk i følgende intervju med en av deltakerne – 18 år gamle Gabriel Carroll:

> «So why is mathematics important?»
> «I don’t do mathematics because it’s important» Carroll says. «I do it for aesthetic reasons. Math is an art». Off camerea, Titu Andreescu [the U.S. team leader] nods approvingly (…) «Good answer, Gabe.».
> (Mackenzie, 2001, s. 596)

Tilsvarende finner Koichu og Berman (2005) i sin studie av to israelske IMO-deltakere at også disse guttene er opptatt av estetikk i løsningene. De uttrykker f.eks. at de ikke er fornøyde med å bruke algebraiske metoder i geometri-problemer; rene geometriske resonnementer er mer elegante.

Fascinasjonen over vakre løsninger kan sammenliknes med livets mange små og store mysterier:

> When we walk down a wooded path and sense, just for a moment, how amazing it is to live in this world of trees and sky and rich brown earth, we are experiencing the same emotions mathematicians feel when they discover something they never knew was there. Maybe that’s why the idea of genius appeals to us so strongly – because it partakes of a mystery with which we all are familiar.
> (Olson, 2004, s. 197)

3. METODOLOGI

Donna Mertens påpeker at valg av metoder kan begrunnes ut fra tre forhold: vitenskapsteoretisk posisjon, forskningsspørsmål og forskjellige praktiske forhold (Mertens, 2005, referert i Wæge, 2007). Disse tre punktene, sammen med «konstruksjon av data» og «kritiske bemerkninger til prosjektets design», utgjør rammen for dette metodekapittelet. I de tre førstnevnte overskriftene prøver jeg å vise *hvorfor* de ulike tilnærmingsmåtene er valgt, mens jeg i «konstruksjon av data» kommer nærmere inn på *hvordan* jeg har brukt dem.

3.1 METODOLOGI OG VITENSKAPSTEORETISK POSISJON

Mitt ståsted er konstruktivistisk; jeg tror at læring er en prosess der individet aktivt konstruerer sin egen kunnskap. En elev kan ikke sammenliknes med en tom beholder som skal fylles. Jeg kan ikke studere mentale prosesser direkte, men jeg prøver å finne ut hvordan elevene tenker. Da trenger jeg å snakke med dem. Jeg trenger å høre hvordan elevene selv forklarer strategiene sine. Det kvalitative forskningsintervjuet peker seg dermed ut som et naturlig metodevalg. Her opplever jeg at en kvalitativ tilnærming gjør det mulig å studere fenomener som ellers ville være vanskelig tilgjengelige. Nettopp dette framheves av Silverman (2011) som en styrke ved kvalitative metoder.

Jeg bruker teori fra det matematikkdidaktiske fagfeltet – f.eks. Pólyas problemløsningsmodell og utvidelser av denne – som bakgrunn for studien min. Etablert teori hjelper meg å systematisere observasjonene. Dette er det vi kaller en deduktiv tilnærming der begreper som allerede finnes, brukes for å plassere aktuelle fenomener der de hører hjemme. Jeg er klar over at et annet teori-grunnlag ville gitt meg andre «briller» og kanskje hjulpet meg å se andre ting. Malterud (2003, s. 172) sier treffende at «vi kan tenke oss at vi skal rydde saker fra et rotete rom inn i en kommode der det allerede står navn på skuffene». I prosjektet mitt er dette perspektivet særlig tydelig i forbindelse med kategoriseringen av konkurranseoppgavene. Vi skal imidlertid komme tilbake til at analysearbeidet *også* driver fram en mer «grounded approach». Likevel kan det påpekes at:

> Data uten teori fins ikkje, all forståing har som føresetnader eit visst perspektiv som kunne vore annleis. (Aagedal, 1973, s. 110)

– det er jo også et viktig perspektiv.

3.2 SAMMENHENG MELLOM FORSKNINGSDESIGN OG FORSKNINGSSPØRSMÅL

Hvordan samsvarer konkurranseoppgaver i geometri – samt elevers strategier i løsningsprosessen av disse – med kompetansemål for matematikkfaget i videregående skole?

Hva gjør jeg for å svare på dette spørsmålet? Først og fremst analyserer jeg konkurranseoppgaver og putter dem i kategorier utarbeidet delvis med utgangspunkt i kompetansemål for matematikkfaget, delvis med utgangspunkt i det jeg finner underveis i arbeidet med oppgavene. Videre benytter jeg et lite spørreskjema om konkurranseoppgaver i geometri. Jeg har også intervjuet tre elever om deres løsninger av to geometriproblemer. I tillegg har jeg fått inn besvarelser på en liten ekstraoppgave. Jeg vil komme nærmere tilbake til hvert av disse punktene i kapittelet om konstruksjon av data.

3.2.1 METODETRIANGULERING

Det kanskje mest iøynefallende med det forskningsspørsmålet jeg har valgt, er at det er todelt – med fokus på både oppgaver og strategier. Dette kan indikere at vi trenger flere tilnærmingsmåter for å svare på spørsmålet. I studien min er det nærliggende å trekke fram at både kvalitative analyser av oppgavene og kvalitative intervjuer med elevene framstår som viktige metoder.

Videre legger vi merke til at forskningsspørsmålet mitt starter med «Hvordan». John Creswell påpeker at forskningsspørsmål som innledes med *hvordan*, legger opp til en åpen design og indikerer en kvalitativ studie (Creswell, 2009). Samtidig mener jeg at ordet *samsvarer* i forskningsspørsmålet inviterer til å undersøke korrelasjon. Den relativt store mengden oppgaver i studien kan gi grunnlag for enkle kvantitative analyser. Dette peker i retning av metodetriangulering (eng: mixed methods).

Med metodetriangulering mener jeg at en studie inneholder både kvalitative og kvantitative metoder i design, datainnsamling og analyse (Teddlie & Tashakkori, gjengitt i Mertens, 2005). Metode-triangulering er ofte aktuelt i studier der forskningsspørsmålet er «bredt», gjerne fordi det er flere komponenter av interesse innenfor én setting (Morse & Niehaus, 2009). I prosjektet mitt bruker jeg flere metoder nettopp for å undersøke flere sider ved konkurranseoppgaver. Her kan studien min gjerne karakteriseres som *pragmatisk*: «What works» kan trekkes fram som et kriterium for å avgjøre hvilke metoder som benyttes for å svare på forskningsspørsmålet (Creswell, 2009).

Morse og Niehaus (2009) er opptatt av at alle «mixed methods»-studier har enten en kvalitativ eller en kvantitativ «kjerne». Studien min er det jeg med deres terminologi vil kalle en *kvalitativt drevet studie*, dvs. at det kvalitative perspektivet er mest framtredende.

Det er vanlig å skille mellom parallell og sekvensiell metodetriangulering. I prosjektet mitt brukes kvalitative og kvantitative teknikker *parallelt.* Johannessen et al. (2010, s. 367) skriver om parallell metodetriangulering at «da kan kvalitative data belyse de tallmessige resultatene, mens tallene kan si noe om utbredelsen av funnene i de kvalitative delene av undersøkelsen». Jeg mener imidlertid at dette gjelder metodetriangulering generelt. For meg har *parallell* bruk av ulike metoder først og fremst vært en fordel i forhold til tidsaspektet.

Selv om jeg har opplevd metodetriangulering som nyttig for å svare på forskningsspørsmålet, har det også vært utfordringer. For at det skal gi noen som helst mening å si noe kvantitativt om oppgavene, har jeg jobbet meg gjennom et relativt stort antall oppgaver. Likevel er materialet *lite* i kvantitativ sammenheng. Samtidig er materialet *stort* hvis det skal brukes til kvalitative analyser. Denne mis-matchen har gitt meg mye hodebry og veldig mye arbeid. Jeg har valgt å begrense de kvantitative betraktningene til en enkel korrelasjonsanalyse og vektlegge kvalitative analyser av *noen av* oppgavene. Jeg kommer nærmere tilbake til hvordan oppgaver er valgt ut i kapittel 3.4.

Som en kort oppsummering vil jeg påpeke at prosjektet i hovedsak framstår som en kvalitativt drevet studie med innslag av kvantitative strategier. Tilnærmingen til forskningsspørsmålet er pragmatisk. Ulike metoder brukes parallelt.

3.2.2 CASE-STUDIE

Robert Yin hevder at forskningsspørsmålet er den viktigste enkeltfaktoren for å velge forsknings-strategi (Yin, 2003). Han løfter fram en case-studie som særlig aktuell dersom det stilles et «hvordan» eller «hvorfor»-spørsmål om nåtidige fenomener eller hendelser som forskeren har liten grad av kontroll over. (For fortidige hendelser vil en historisk studie være mer aktuell, og en design der forskeren har stor grad av kontroll, vil gjerne peke i retning av et eksperiment.) Mitt «hvordan»-spørsmål legger altså til rette for en case-studie.

Hva er så en case-studie? Noe vagt kan vi si at betegnelsen case-studier refererer til undersøkelser av få enheter der forskeren analyserer mye informasjon om de enhetene studien omfatter (Thagaard, 2009). Robson (2011) oppsummerer Yin (2009) i følgende definisjon:

> [A case study is] a strategy for doing research which involves an empirical investigation of a particular contemporary phenomenon within its real life context using multiple sources of evidence.
> (Robson, 2011, s. 136)

Jeg vil spesielt trekke fram at en case-studie gjerne inneholder mange variabler og uklare skillelinjer mellom fenomen og kontekst. For å «samle trådene» vil et case derfor dra nytte av en teoretisk innramming. Min «innramming» er læreplanens kompetansemål, van Hiele-modellen og Pólyas problemløsningsmodell med utvidelser slik vi finner dem hos Schoenfeld (1985) og Borgersen (1994). Dette er den teori jeg ønsker å bruke for å gi caset mening.

Med Ecksteins terminologi fra *Case study and theory in political science* (1975, referert i Nevøy, 2004) kan studien plasseres som disiplinert-konfigurativ. Her er siktemålet å forklare og forstå et fenomen i lys av eksisterende begrep og teorier. I min undersøkelse prøver jeg nettopp å forstå fenomenet konkurransematematikk ved hjelp av kjente modeller. Jeg kategoriserer både oppgaver og elev-besvarelser ved hjelp av «kompetansemål for matematikkfaget», og jeg tilstreber å få oversikt over *mitt* materiale ved hjelp av andres teorier. Andersen (1997) påpeker at slike studier tar ikke sikte på, og bidrar heller ikke til, teoriutvikling. Han mener at den vitenskapelige interessen øker når etablert teori anvendes på nye måter. Vi kan også si at studiens styrke ligger i de valgte perspektivenes relevans og presisjon (Andersen 1997, gjengitt i Nevøy, 2004). Slik jeg her forstår Andersen og Nevøy vil studien min kunne kritiseres for manglende teoriutvikling, men jeg kan også argumentere for prosjektets styrke ved å trekke fram læreplanens kompetansemål som helt sentrale for vår målstyrte skole. Forskningsspørsmålet utfordrer til å gi en oversikt over konkurransematematikken i lys av disse kompetansemålene. En slik oversikt er interessant i seg selv.

Jeg ser imidlertid også muligheter for å gå et skritt videre og løfte caset opp til – eller i hvert fall i retning av – det vi (fortsatt med Ecksteins terminologi) kaller et heuristisk nivå. Disse studiene kan betegnes som eksplorerende, og hensikten er hypoteseutvikling (Nevøy, 2004). Her vil jeg se nærmere på det jeg har stilt opp som et sentralt underspørsmål for prosjektet: «Har skolen noe å lære av konkurransematematikken, og i tilfelle hva?» Yin (2003) påpeker at «hva»-spørsmål kan ligge til grunn for en eksplorerende studie der målet er å framsette hypoteser og proposisjoner for videre utforskning. Anne Nevøy skriver: «Det sentrale i heuristiske studier er at hypoteser utvikles med sikte på strengere testing i nye studier. Studiene sikter ikke mot konkludering» (Nevøy, 2004, s. 17). I den grad jeg klarer å svare på «hva»-spørsmålet ovenfor, åpnes en mulighet for ny innsikt – kanskje i form av hypoteser som siden kan testes med mer omfattende forskning.

Som en viktig del av dette forsøket på å definere prosjektet som en case-studie, vil jeg også trekke fram forskjellen på en enkelt- og fler-case design. Yin anbefaler sterkt å velge en fler-case-design dersom en har mulighet til det, delvis fordi enkelt-case-designs er sårbare (du satser alt på ett kort), delvis fordi en fler-case-design kan ha betydelige analytiske fordeler. To cases er den enkleste formen for fler-case-design, men selv det å utvide fra én til to styrker studien betraktelig, ifølge Yin (2003). To eller flere cases kan gi mer tyngde til konklusjonene som trekkes. Jeg har hatt mulighet å utføre studien min i to forskjellige elevgrupper, noe som indikerer en to-case design. I tillegg kan analysen av oppgavene betraktes som et case i seg selv.

Yin poengterer også viktigheten av å definere analyse-enhet(ene). Hva er det som analyseres? Analyse-enheten(e) bør kunne relateres direkte til forskningsspørsmålet og kan være individer, grupper, organisasjoner eller begrep avhengig av forskningsstudiens natur (ibid.). I min studie er det naturlig å argumentere for at studien består av flere analyseenheter, nemlig oppgaver og elevstrategier. Vi kan videre snakke om flere analyseenheter på flere nivåer og definere hver elev som intervjues og hver enkelt oppgave som analyseres som en analyseenhet. Jeg opplever imidlertid at forskningsspørsmålet mitt kan kritiseres for å prøve å romme for mye, og jeg mener det vil være hensiktsmessig å prøve å «samle» caset ved å trekke fram det ene (dog mangfoldige) begrepet «konkurranseoppgaver» som et overordnet tema eller fokus. Ragin (2000) snakker om å «konfigurere et case» når en forsker undersøker et case med tanke på hvordan de ulike aspektene henger sammen. Her er nettopp den grunnleggende ideen at de ulike delene utgjør et sammenhengende hele.

Oppsummert definerer jeg studien min som en disiplinert-konfigurativ case-studie med potensiale til å bevege seg mot det heuristiske. Studien framstår som en fler-case-design med flere analyseenheter. «Konkurranseoppgaver» løftes fram som et overordnet perspektiv for å gi oversikt og «helhet» til studien.

3.3 VALG AV METODER OG FORSKJELLIGE PRAKTISKE FORHOLD

Utgangspunktet mitt er å undersøke om oppgaver fra matematikkonkurranser kan være relevante for geometriundervisningen i videregående skole. Når jeg i tillegg til å analysere oppgavene også har valgt å fokusere på elevstrategier, henger det bl.a. sammen med at jeg fikk mulighet til å inkludere det jeg opplevde som et veldig spennende utvalg i studien min.

3.3.1 UTVALG

Tidlig i arbeidet med masterprosjektet fikk jeg anledning til å være til stede på en «treningsleir» i problemløsning. Leiren ble arrangert som en forberedelse til en matematikkonkurranse for elever i videregående skole, og deltakerne var plukket ut på grunnlag av sine resultater i tidligere matematikkonkurranser. Jeg mente at leiren kunne være en fin kilde til empiri for en studie om problemløsning i geometri, og jeg bestemte meg raskt for melde prosjektet inn for NSD. Etter å ha fått klarsignal herfra (prosjektet ble vurdert som ikke meldepliktig), valgte jeg å benytte muligheten til å delta som observatør på leiren.

Med en så spennende gruppe tilgjengelig, ble det naturlig å se videre enn bare til analyse av *oppgavene* for å finne ut mer om konkurranseoppgaver i geometri. Her hadde jeg noen av de norske elevene som faktisk hadde deltatt og gjort det bra i matematikkonkurranser, og som jeg dermed antok hadde trening i å løse denne type oppgaver. Hva mente de om disse oppgavene? Hvilke strategier brukte de for å løse dem? Hva syntes de om konkurranseoppgaver i geometri sammenliknet med skolens geometriundervisning? Jeg mente at disse spørsmålene var relevante for å belyse forskningsspørsmålet mitt om samsvar mellom konkurranseoppgaver og læreplanens kompetansemål, og bestemte meg derfor for også å utføre en intervjustudie. Tre deltakere ble plukket ut til intervju. I den grad studien presenterer navn på deltakere, er dette pseudonym der heller ikke kjønn (nødvendigvis) er ivaretatt.

Av anonymiseringshensyn lar jeg være å sted- og tidfeste den aktuelle leiren. Det avholdes ikke mange treningsleirer for norske deltakere i matematikkonkurranser, men det finnes mer enn én leir av denne typen årlig. Disse leirene fungerer som en møteplass for både norske og utenlandske elever med interesse for matematikkonkurranser. Jeg hadde sendt informasjonsskriv og fått tillatelser fra både norske lagledere og en internasjonal hovedleder, men bare de norske elevene var informert. Jeg kunne derfor bare inkludere fem *norske* deltakere i utvalget mitt.

Utvalget for prosjektet ble senere utvidet til også å gjelde en såkalt Abel-gruppe ved en videregående skole. Dette er en gruppe elever som velger å komme sammen ukentlig i en av sine fritimer for å jobbe med konkurranseoppgaver i matematikk. Jeg mente at jeg derfor også her ville finne elever med interesse for, og en viss trening i, å løse denne type oppgaver. Det viste seg imidlertid at ingen av dem fant noen løsning på de to problemene som ligger til grunn for intervjustudien min. Dette kommer jeg tilbake til i forbindelse med analyse av datamaterialet. Jeg valgte derfor å ikke be om intervju med noen av disse elevene. I stedet delte jeg ut en noe lettere «ekstraoppgave», der elevene kunne skrive på hvordan de tenkte. Fire av i alt åtte elever leverte inn en slik besvarelse.

Utvalget må ses på som strategisk – elevene er valgt på grunnlag av sin erfaring med konkurranseoppgaver.

3.3.2 INTERVJU I STEDET FOR OBSERVASJON

Intervju viste seg å være en mer nyttig metode enn observasjon for å få svar på spørsmålene mine. Jeg observerte undervisningen som ble gitt på den ovenfor nevnte leiren. Dette var fornuftig for å vite noe om hvilke kunnskaper elevene etterpå møtte oppgavene med, men ellers ligger denne undervisningen utenfor det som er fokus for prosjektet mitt.

Når observasjon framstod som en lite hensiktsmessig metode, henger det nok også sammen med at jeg ikke hadde noen innflytelse over det som foregikk på leiren. Jeg ser ikke bort fra at jeg – dersom prosjektet mitt hadde fremstått som «tyngre» f.eks. ved å være et doktorgradsarbeid eller ved å være del av en større studie – kunne organisert matematikkaktiviteter som ville ha gjort observasjon til en nyttig metode for mitt prosjekt. En mulighet her kunne være å i større grad legge til rette for problemløsning i grupper, der elevene måtte diskutere med hverandre. I Raymond Bjulands hovedfags- og doktorgradsarbeid ser vi nettopp et eksempel på dette. Her er det *observasjon* av lærerskolestudenter som sitter i smågrupper og diskuterer seg fram til løsninger på geometri-problemer, som gir innblikk i deres problemløsningsstrategier (Bjuland, 2002, gjengitt i Bjuland 2004). En slik tilnærmingsmåte kunne ha gagnet mitt prosjekt også fordi jeg kunne fått med meg et *sosial*konstruktivistisk perspektiv, noe studien min, slik den nå foreligger, godt kan kritiseres for å mangle. Her innser jeg at når intervju er valgt framfor observasjon, så er det i stor grad bestemt av «forskjellige praktiske forhold» (Mertens, 2005). (Dette må ikke tolkes dithen at arrangørene av den nevnte treningsleiren ikke så verdien av at elevene jobbet sammen i grupper. Det var lagt opp flere aktiviteter med tanke på gruppearbeid. Gruppene var imidlertid flernasjonale og derfor vanskelige å bruke i min studie ettersom jeg, som tidligere nevnt, bare inkluderte *norske* elever i utvalget for studien. Igjen har vi altså et eksempel på at «forskjellige praktiske forhold» begrenser og begrunner metodevalg.)

3.4 KONSTRUKSJON AV DATA

Både bevisste metodevalg på grunnlag av studiens forskningsspørsmål, min vitenskapsteoretiske posisjon og faktorer knyttet til forskjellige praktiske forhold, har satt sitt preg på konstruksjonen av data. Her vil jeg kort gjennomgå hvordan dataene som ligger til grunn for studien, er konstruert.

3.4.1 OPPGAVEANALYSER

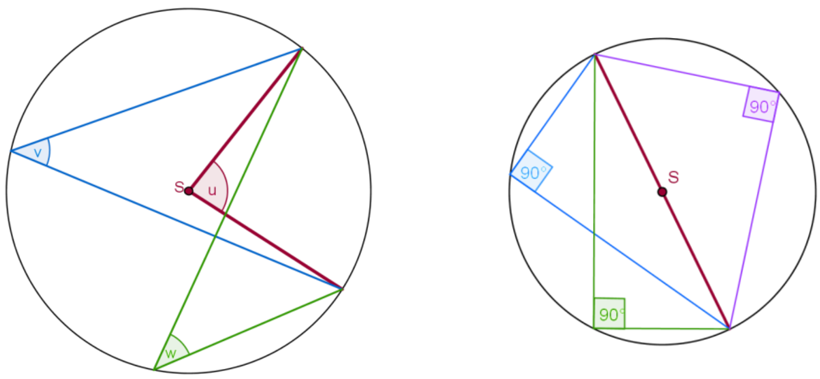
Jeg har jobbet meg gjennom alle geometrioppgavene fra Abelkonkurransen (runde 1, runde 2 og finale) de siste ti årene. I tillegg er seks av de «letteste» IMO-oppgavene inkludert. For å ha noe å sammenlikne med har jeg valgt å også analysere geometrioppgaver gitt til eksamen i R1. Jeg har sett bort fra eksamensoppgaver som omhandler analytisk geometri og vektorregning – ettersom disse i all hovedsak er irrelevante som sammenlikningsgrunnlag for Abel-oppgavene – men ellers har jeg gått gjennom alle geometrioppgavene fra samtlige eksamens-sett i R1. Datamaterialet omfatter til sammen 111 geometrioppgaver (48 fra Abel runde 1, 25 fra Abel runde 2, 10 fra Abel-finalen, 6 fra IMO og 22 fra R1-eksamen).

For hver oppgave har jeg notert hvilke kompetansemål (fra geometri, R1) jeg har opplevd som nyttige for å løse oppgaven. Avkrysningstabeller (vedlegg 12) gir oversikt over resultatene. En slik systematisering/kategorisering betegnes gjerne som innholdsanalyse og innebærer en kvantifisering av datamaterialet (Silverman, 2011). Kompetansemålene som ligger til grunn for dette arbeidet, slår fast at:

> Mål for opplæringen er at eleven skal kunne
>
> - bruke linjer og sirkler som geometriske steder sammen med formlikhet og setningen om periferivinkler i geometriske resonnementer og beregninger
> - utføre og analysere konstruksjoner definert av rette linjer, trekanter og sirkler i planet, med og uten bruk av dynamisk programvare
> - utlede og bruke skjæringssentrene for høydene, halveringslinjene, midtnormalene og medianene i en trekant
> - gjøre rede for forskjellige bevis for Pytagoras' setning, både matematisk og kulturhistorisk
>
> (Kunnskapsdepartementet, 2006)

Disse kompetansemålene er bakgrunnen for kategorier som formlikhet, konstruksjoner, periferivinkelsetningen og trekantsentre. Videre arbeid med oppgavene medførte ytterligere findeling av kategoriene. For eksempel delte jeg «periferivinkelsetningen» inn i både «periferivinkelsetningen» og spesialtilfellet «Thales teorem» (se figur 3.1).

Underveis innså jeg at jeg også måtte inkludere andre temaer som ofte inngikk i Abel-oppgavene (f.eks. «arealbetraktninger») i avkrysningstabellene. Analysearbeidet indikerte også at oppgave-spesifikke strategier som f.eks. «trekk linjer mellom viktige punkter» eller «bruk variabler» kjennetegnet flere av geometriproblemene. Selv om analysen i utgangspunktet var teoristyrt (kategoriene ble dannet på grunnlag av kompetansemål), opplevde jeg altså at arbeidet med oppgavene også drev fram en mer «grounded approach».



Figur 3.1 Periferivinkelsetningen sier at når en periferivinkel og en sentralvinkel spenner over samme sirkelbue, er periferivinkelen halvparten så stor som sentralvinkelen. I figuren er altså v = w = ½ u. Thales teorem er et spesialtilfelle av periferivinkelsetningen som sier at en periferivinkel som spenner over diameteren i en sirkel, er 90°.

For hver gang jeg inkluderte en ny kategori i avkrysningstabellene, startet jeg fra begynnelsen igjen med oppgaveanalysene. Det ble en interessant, men også tidkrevende og etter hvert ganske frustrerende prosess. I mange tilfeller var det ikke opplagt hvordan kategoriseringen skulle utføres. Som eksempel kan jeg nevne at selv om ingen av IMO-problemene var konstruksjonsoppgaver, opplevde jeg det som nyttig, ja ofte nødvendig, å *konstruere* figurene for å klare å jobbe meg fram mot en løsning. Jeg har derfor krysset av for «konstruksjoner» i et flertall av disse oppgavene. Det er selvfølgelig en vurdering som kan diskuteres.

Etter å ha fullført avkrysningstabellene lot jeg denne delen av prosjektet ligge i ro et par måneder før jeg ga meg i kast med oppgaveanalysene igjen – denne gang med utgangspunkt i kategoriene jeg hadde funnet sist, men ellers med «blanke ark». Jeg sammenliknet resultatene fra de to omgangene med oppgaveanalyser og så nærmere på tilfeller med avvik. Ingen av forskjellene viste seg å bli så store at jeg måtte revurdere (de foreløpige) konklusjonene jeg hadde trukket på grunnlag av dette datamaterialet, men jeg opplevde likevel denne «ekstraomgangen» som nødvendig for å styrke studiens reliabilitet.

I analysekapittelet presenteres diagrammer som viser hva jeg har ansett som mest sentralt i de ulike oppgavene. Diagrammene er basert på opptellinger fra avkrysningstabellene. Vedlegg 12 forteller mer om hvilke vurderinger jeg har gjort i forbindelse med dette arbeidet.

3.4.2 PILOTERING

Før jeg skulle i gang med elevintervjuer, gjennomførte jeg en liten pilotundersøkelse. Piloteringen besto av at jeg testet ut planlagte intervjuspørsmål overfor en elev som hadde noe erfaring med matematikkonkurranser, men som ikke var med i den «egentlige» studien.

Jeg benyttet en oppgave fra Abelkonkurransens runde 1 som grunnlag for pilotundersøkelsen. Oppgaven ble valgt fordi det var en relativt enkel oppgave som likevel var noe sammensatt – man må se mer enn én ting for å løse den. Jeg ønsket å benytte en forholdsvis lett oppgave fordi eleven som skulle løse den, var midt inne i en travel tid på skolen. Da var det greit at hun ikke fikk alt for mye ekstraarbeid som følge av at hun sa ja til å delta i en liten pilotstudie. Oppgaven og elevens løsning er presentert i vedlegg 6.

Jeg hadde i utgangspunktet planlagt et semi-strukturert intervju om konkurranseoppgaver i geometri. Da jeg skulle tolke elevens svar på spørsmål om bruk av en bestemt strategi/kunnskap/ferdighet, opplevde jeg det imidlertid vanskelig å vurdere elevens nja, tja og eventuelt noe usikre ja. Snakket vi om kunnskaper og strategier som ble brukt ofte, av og til eller (nesten) aldri her? Jeg følte nok at jeg til dels la ordene i munnen på eleven. På grunnlag av dette bestemte jeg meg for å erstatte denne delen av intervjuet med et spørreskjema.

En annen konsekvens av piloteringen var at jeg innså at noen begreper som jeg antok som kjente, ikke nødvendigvis var det. En elev kan f.eks. godt bruke Thales teorem i oppgaver uten å vite at det *heter* Thales teorem. Etter forundersøkelsen laget jeg derfor illustrasjoner som viste hva som menes med Thales teorem, periferivinkelsetningen og punktets potens. Disse illustrasjonene brukte jeg i forbindelse med spørreundersøkelse og intervju i hovedstudien.

3.4.3 SPØRRESKJEMA

Spørreskjemaet ble som nevnt utarbeidet på grunnlag av erfaringer fra piloteringen. De ulike variablene i skjemaet er enten knyttet direkte til kompetansemål i geometri i R1, eller til vanlige strategier i geometriproblemer. I motsetning til i oppgaveanalysene (avkrysningstabellene) har jeg også valgt å inkludere mer generelle problemløsningsstrategier som f.eks. «jobb baklengs» eller «prøv et ekstremtilfelle». Disse strategiene ble utelatt fra oppgaveanalysene fordi jeg vurderte dem som for personavhengige til å kunne si noe om hvorvidt de kjennetegnet selve oppgaven. I spørreskjemaet var det imidlertid et naturlig valg å spørre elevene også om denne type strategibruk.

En opplagt innvending i tilknytning til spørreskjemaet er om strategiene som nevnes er relevante. Er de tilstrekkelige, eller burde andre variabler være med? Utgangspunktet for min vurdering av hva som inngår i «strategier», er kunnskaper om problemløsning fra masterstudiet i matematikk-didaktikk, samt den erfaring jeg fikk med problemløsning i geometri ved å jobbe intensivt med konkurranseoppgaver i geometri måneden før utarbeidingen av spørreskjemaet.

Det kan kommenteres at skjemaet inneholder få verdier – elevene kan bare velge mellom «aldri/nesten aldri», «av og til» og «ofte». Hensikten med såpass romslige «intervaller» er å gjøre det lettere for eleven å velge svaralternativ. Jeg tror det ville være urimelig å operere med flere verdier i en undersøkelse som dette.

Intensjonen med spørreskjemaet er *ikke* kvantitative analyser; da hadde det vært ønskelig med flere verdier og dessuten nødvendig med flere respondenter. Enkle tellinger og tabeller kan gjerne finnes i kvalitative studier. Silverman (2011) kommenterer at disse i så fall gjerne ses på som et «starting point» heller enn et «end point». Jeg håper spørreskjemaet kan bidra til et «innledende overblikk» over disse elevenes meninger om konkurranseoppgaver.

Problemløsning i geometri og kompetansemål

Hvilke av følgende kunnskaper bruker du når du løser konkurranseoppgaver i geometri?

Kompetansemål	aldri/ nesten aldri	av og til	ofte
Formlikhet			
Periferivinkelsetningen (og Thales teorem)			
Punktets potens			
Konstruksjoner			
Pythagoras			
Bevis			
Trekantgeometri:			
* Omsenter			
* Innsenter			
* Tyngdepunkt			
* Ortosenter			
Geometriske steder			
* Midtnormal			
* Vinkelhalveringslinje			
* Median			
* Andre?			

Problemløsning i geometri. Strategier.

Hvilke av følgende strategier bruker du når du løser konkurranseoppgaver i geometri?

Generelle strategier:	aldri/ nesten aldri	av og til	ofte
Tegne figur			
Jobbe baklengs			
Løse lettere variant av oppgaven			
Sjekke ekstremtilfelle			
Prøve og feile			
Fastsette delmål			
Andre? Spesifiser:			

Problemløsning i geometri. Strategier.

Hvilke av følgende strategier bruker du når du løser konkurranseoppgaver i geometri?

Strategier for å finne vinkler/lengder	aldri/ nesten aldri	av og til	ofte
Trekke linjer:			
– som binder sammen viktige punkter			
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om			
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).			
Spesielle trekanter:			
Prøv å finne rettvinklede trekanter			
30-60-90-trekanter			
likebeinte/likesida trekanter			
kongruente trekanter			
Bruk variabler:			
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.			
– Tilordne variabler til viktige vinkler/lengder slik at du kan løse en likning.			
Viktige redskaper for å finne vinkler:			
Vinkelsum i trekant			
Periferivinkelsetningen			
Sykliske firkanter			
Parallelle linjer…			
Viktige redskaper for å finne lengder:			
Pythagoras			
Formlikhet (ev. kongruens)			
Punktets potens			

Andre strategier?

Kommentarer?

3.4.4 INTERVJU

Jeg hadde i utgangspunktet planlagt et «todelt» intervju – en semi-strukturert del om strategier i konkurranseoppgaver etterfulgt av en ustrukturert del der eleven forklarte sin løsning av en spesifikk oppgave. Som tidligere kommentert, ble den førstnevnte delen erstattet av et spørreskjema. Jeg tror fortsatt dette var en riktig beslutning. I etterpåklokskapens lys ser jeg imidlertid at den ustrukturerte intervjudelen i stedet burde ha vært semi-strukturert. Jeg har ikke på langt nær fått så mye informasjon ut av disse intervjuene som det jeg kunne ha fått med bedre planlegging. Jeg valgte en ustrukturert variant fordi jeg trodde det ville være vanskelig å planlegge spørsmål til en løsning jeg ikke kjente. Det var en feilvurdering.

I spørreskjemaet påpekte elevene hvilke kunnskaper og strategier de pleide å bruke i geometri-problemer. Nå ønsket jeg å se hvilke kunnskaper og strategier de *faktisk brukte* i to vilkårlig valgte problemer. Disse to geometriproblemene ligger til grunn for intervjuene.

Det er et poeng at problemene er vilkårlig valgt. I motsatt fall kunne jeg selv ha plukket ut oppgaver som «inviterte» til å bruke strategier jeg gjerne ville belyse. Mer spesifikt kunne jeg lett ha funnet oppgaver som krevde kunnskaper som også vektlegges i kompetansemålene i R1, og dermed påvirket svaret på forskningsspørsmålet mitt. (Det er ikke nødvendigvis feil å gjøre denne type strategiske valg, men man må være bevisst på hva man gjør og hvilke konsekvenser det har for det data-materialet man konstruerer.) *Før* jeg hadde sett geometriproblemene som skulle deles ut på den aktuelle treningsleiren, bestemte jeg meg for å bruke disse. Jeg hadde ingen innvirkning på utvalget av disse oppgavene, men jeg fikk tilgang til dem et par dager før elevene. Etter å ha jobbet meg gjennom de første fem problemene (av i alt 14) besluttet jeg å bruke et par av disse fem, helst de første to, bl.a. fordi jeg gjorde regning med at elevene «helt sikkert» ville rekke å løse de første oppgavene i settet. Jeg opplevde dessuten oppgave 3 som «uoversiktlig» og trodde kanskje oppgave 4 var litt for lett. Oppgave 5 var interessant, men ble dessverre gjennomgått før «mine» elever rakk å prøve seg på den. Det bør også kommenteres at hovedtendensen i oppgavesettet var at problemene ble presentert med økende vanskelighetsgrad. Jeg hadde (som tidligere nevnt) bestemt meg for å bare intervjue elever om problemer de hadde funnet en løsning på; jeg siktet meg derfor ikke inn mot de aller største utfordringene.

Det skulle imidlertid vise seg at ett eneste problem (oppgave 4) skilte seg ut ved at flere elever i utvalget mitt fant en løsning på det i løpet av den første arbeidsøkta i geometri. Her hadde elevene dessuten to helt *ulike* løsninger; deriblant én som lå langt fra den jeg selv hadde funnet. Det ble derfor interessant å benytte dette problemet som grunnlag for intervju. Kun én av elevene i utvalget mitt fant en løsning på de to første oppgavene i settet. Jeg valgte å intervjue denne eleven om oppgave 1, mens både denne eleven og to andre elever ble intervjuet om oppgave 4. Selv om jeg snakket med én elev om gangen, satt de sammen under intervjuene. Elevene hadde dermed mulighet til å kommentere hverandres løsninger – de ble imidlertid ikke spesifikt oppfordret til det, og jeg stilte bare spørsmål knyttet til den løsningen de selv hadde funnet.

Intervjuene var som nevnt ustrukturerte; elevene forklarte løsningen sin, og jeg prøvde å stille aktuelle spørsmål underveis. Jeg syntes dette var vanskelig, og i forbindelse med analysen av intervjuene ser jeg at det er mange spørsmål jeg *burde* ha stilt. Jeg hadde med meg figurer (printet ut fra GeoGebra) slik at eleven kunne tegne løsningen sin inn i figuren samtidig som han/hun forklarte hvordan han/hun hadde tenkt. Dette opplevde jeg som nyttig.

Intervjuene ble tatt opp på lydbånd. Jeg transkriberte dem umiddelbart etterpå, bl.a. fordi elevene gjerne pekte ut «den siden» eller «den vinkelen». Dermed hadde jeg behov for å transkribere intervjuene mens jeg ennå husket hva «den siden» eller «den vinkelen» refererte til, og kunne skrive det inn i klammer i transkripsjonene.

3.4.5 EKSTRAOPPGAVE

Jeg ønsket å bruke de to problemene fra problemløsningsleiren også i en Abel-gruppe ved en videregående skole. Jeg var med på to møter i denne gruppa – begge gangene var omkring ti elever til stede. På det første møte presenterte jeg en PowerPoint som først og fremst inneholdt tips til geometriproblemene i Abelkonkurransens runde 1. Et par av de siste lysarkene inneholdt imidlertid grunnleggende informasjon om sykliske firkanter, og jeg nevnte for elevene at dette var viktig stoff for å klare å løse de to problemene jeg hadde med til dem. Elevene virket ivrige etter å ta fatt på problemene og uttalte at de ville «gi det en real omgang».

Jeg kom tilbake to uker senere. Ingen hadde klart å løse de to problemene, og jeg delte derfor ut en noe lettere «ekstraoppgave». Ettersom disse elevene holdt på å jobbe med Abel-oppgaver som de fant på Abel-konkurransens nettside, der både oppgaver og løsninger ligger lett tilgjengelig, ville jeg forsikre meg om at jeg benyttet en oppgave de ikke allerede hadde sett løsningen til. I stedet for å velge en Abel-oppgave, brukte jeg derfor et geometriproblem hentet fra Georg Mohr-konkurransen (danskenes parallell til Abel).

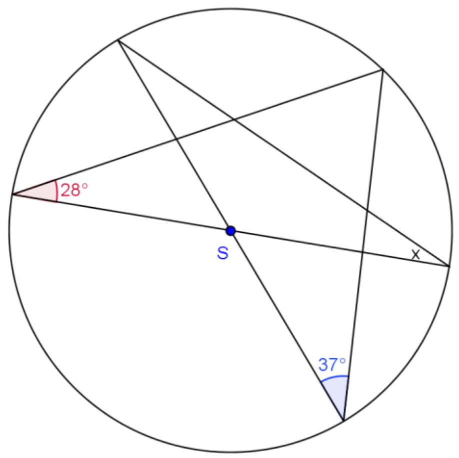
Dette var en *strategisk valgt* problemløsningsoppgave. Jeg visste på forhånd at viktige kompetanse-mål fra R1 var aktuelle i løsningen av denne oppgaven. Men jeg visste også at det var mulig å løse den uten å ta i bruk «R1-stoff». Jeg var derfor spent på hvilke løsninger elevene ville velge. Åtte elever prøvde seg på oppgaven; fire av dem fant en løsning og leverte besvarelsene inn til meg. Jeg observerte at noen av dem også prøvde seg på et av de to problemene fra treningsleiren, men da jeg tok kontakt igjen en uke senere, var det fortsatt ingen som hadde løsninger på disse. Jeg vurderte å heller be om et intervju knyttet til ekstraoppgaven, men syntes at jeg hadde fått så pass gode skriftlige besvarelser her – der elevene også forklarte hvordan de hadde tenkt – at jeg anså dette som unødvendig.

3.5 KRITISKE BEMERKNINGER TIL PROSJEKTETS DESIGN

Jeg innser at prosjektet mitt kan kritiseres for å prøve å favne for mye. Silverman (2011, s. 45) har følgende kommentar til bruk av ulike metoder: «My response is simple: Take this path only if you seriously want to complicate your life and, perhaps, end up having passed the time limit for delivery.» Behovet for å benytte flere metoder kan også henge sammen med at jeg ikke har klart å «spisse» fokus for prosjektet tilstrekkelig. Jeg har prøvd å argumentere for «konkurranseoppgaver» som et samlende begrep for studien min, selv om jeg velger å se på dette fra ulike perspektiver. Jeg syns det er positivt at studien min får mer bredde ved å inkludere både oppgaveanalyser og elevintervjuer om løsningsstrategier. Mer bredde kan imidlertid gå på bekostning av større dybde.

3.5.1 RELIABILITET

Silverman (2011) påpeker at datamateriale med utgangspunkt i *tekst* i prinsippet er mer reliabelt enn f.eks. observasjonsdata. Dette er relevant i forhold til de oppgaveanalysene jeg har gjort. Teksten ligger der tilgjengelig for innsyn fra andre uten å være filtrert gjennom forskerens notater. Problemer i forhold til reliabilitet kan imidlertid oppstå i tilknytning til kategoriene forskeren bruker ved tekstanalysen. I større forskningsprosjekter vil det være vanlig at flere forskere koder materialet uavhengig av hverandre for å styrke studiens reliabilitet. Denne muligheten har jeg ikke hatt i prosjektet mitt. At jeg har utført kategoriseringen alene innebærer en svekkelse av studiens reliabilitet. Jeg vil gi et eksempel:



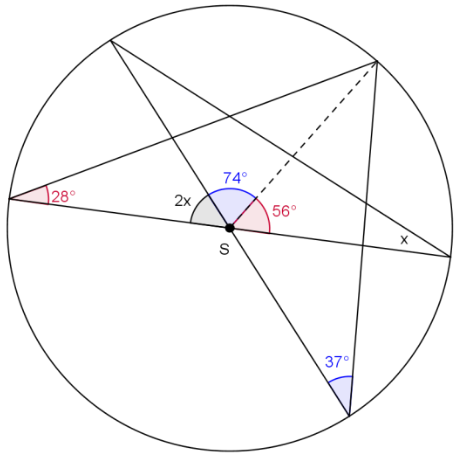
Abel, runde 2, oppg. 3, 2009:

To av vinklene i den femtaggede stjernen er 28° og 37° som vist i figuren. Alle hjørnene ligger på en sirkel, og det markerte punktet er sentrum i sirkelen. Hvor mange grader er vinkelen x ?

Figur 3.2 Eksempel på oppgave fra Abel, runde 2.

Med mine «kompetansemål i videregående skole»-briller tenker jeg med en gang på periferivinkelsetningen. Da er oppgaven løst ved hjelp av sentralvinklene slik det er illustrert i figur 3.3. Nå har vi:

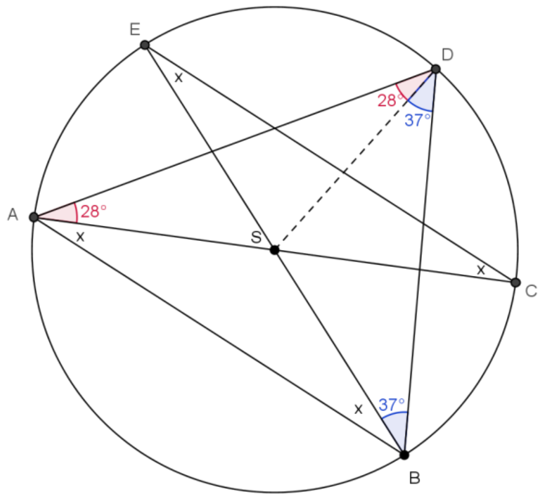
$$2x+74+56=180$$
$$\underline{\underline{\angle x=25^{\circ}}}$$



Figur 3.3 Løsning 1.

Denne oppgaven vil jeg dermed putte i kategorien «periferivinkelsetningen». Den vil også puttes i kategorien «supplementvinkel».

Jeg har selv en datter i videregående skole. Hun fikk tilfeldigvis se min løsning av denne oppgaven og gjorde meg oppmerksom på at hun umiddelbart så en annen løsning. (For å forklare løsningen er hjørnene i figur 3.4 markert med bokstaver.) Hun trekker en hjelpelinje fra A til B og legger merke til at de to trekantene $\triangle ASB$ og $\triangle ESC$ er kongruente, (de er begge likebeinte $\left(|AS|=|BS|=|ES|=|CS|\right)$ og $\angle CSE=\angle ASB$). Vi har dermed fire vinkler som alle er x grader. Nå bruker hun at også $\triangle ASD$ og $\triangle BSD$ er likebeinte for å bestemme $\angle D$. Vinkelsum i trekant $\left(\triangle ABD\right)$ gir nå den samme utregningen som ovenfor:



Figur 3.4 Løsning 2.

$$2x+2\cdot 37+2\cdot 28=180$$
$$\underline{\underline{\angle x=25^{\circ}}}$$

Med denne løsningen vil oppgaven puttes i kategoriene «trekke linjer som binder sammen viktige punkter», «kongruente trekanter», «likebeinte trekanter» og «vinkelsum i trekant».

De to løsningene har også fellestrekk – i begge tilfellene utnytter vi at vi har en sirkel, og vi trekker en «smart hjelpelinje» (stiplet i figur 3.3 og 3.4) som gir oss vinkler (løsning 1) eller trekanter (løsning 2) som vi vet noe om. Likevel mener jeg dette et tydelig eksempel på at ulike «briller» gir stort utslag. Jeg er klar over at mitt fokus på skolens kompetansemål kan, og sannsynligvis vil, føre til at flere oppgaver blir puttet i kategorier tilknyttet disse kompetansemålene enn det vi ville sett dersom studien var blitt utført av en forsker med andre «briller». Dette innebærer en klar svekkelse av studiens reliabilitet. For i noen grad å demme opp for denne svekkelsen har jeg benyttet løsningsforslag til oppgavene (som ligger tilgjengelig på abelkonkurransen.no), og der disse løsningsforslagene avviker fra mine egne, er oppgavene kodet på grunnlag av begge løsningene.

Som tidligere nevnt, opplevde jeg det som nyttig å utføre oppgaveanalysene i to omganger. En tilsvarende mulighet har jeg imidlertid ikke hatt i forbindelse med intervjuene. Det kan riktig nok påpekes at en test-retest er lite aktuell i tilknytning til intervjustudier fordi prinsippet om at forskeren oppfattes som uavhengig i forhold til informanten, ikke er holdbart i studier der mennesker forholder seg til hverandre (Thagaard, 2009). I stedet argumenteres det med at reliabilitet kan styrkes ved å gjøre forskningsprosessen mer transparent, dvs. dokumentere alle prosedyrer (Silverman, 2011; Yin, 2003). For på denne måten å oppnå økt reliabilitet har jeg prøvd å være konkret og spesifikk i rapportering av fremgangsmåter ved innsamling og analyse av data. Alle intervjuer er transkribert, og alle transkripsjoner er tilgjengelige.

3.5.2 VALIDITET

Med begrepsvaliditet i kvalitative undersøkelser er vi opptatt av om en metode undersøker det den har til hensikt å undersøke. Representerer resultatene av undersøkelsen den virkeligheten vi har studert? Jeg har imidlertid påpekt at mitt vitenskapsteoretiske ståsted er konstruktivistisk. Det innebærer at jeg ikke ser på den kunnskapen jeg kommer fram til som et speilbilde av en objektiv virkelighet; kunnskap er sosialt konstruert. Dette støttes av Kvale og Brinkmanns (2009, s. 252) argumentasjon for at vi trenger et alternativt validitetsbegrep «der man fjerner seg fra troen på kunnskap som en avspeiling av virkeligheten». Et slikt alternativt validitetsbegrep fordrer at vi flytter vekten fra produktvalidering til prosessvalidering, dvs. at validering er noe vi er opptatt av gjennom *hele* forskningsprosessen (ibid.). Her har jeg prøvd å være systematisk med å definere begrepene og «grunnfeste» dem i teori. Jeg har også prøvd å både argumentere for og stille spørsmål til forskningsspørsmålet. På tilsvarende måte har jeg etterstrebet å gi en systematisk begrunnelse for metodevalg og en grundig forklaring av hvordan jeg rent praktisk har gått fram. Til slutt prøver jeg å gå kritisk gjennom analyseprosessen og redegjøre for hvordan analysen gir grunnlag for de konklusjonene jeg kommer fram til. Jeg opplever dette som et forsøk på å oppnå det Kvale og Brinkmann betegner som «håndverksmessig kvalitet» – en forutsetning for at en undersøkelse skal framstå som troverdig.

Johannessen et al. (2010) mener at to teknikker som kan styrke validitet, er vedvarende observasjon og metodetriangulering. Jeg innser at det ville være en fordel om jeg hadde hatt mer tid sammen med elevene i undersøkelsen min. Tidsaspektet utgjør en svakhet ved prosjektet. Jeg oppfatter imidlertid min bruk av ulike metoder som en styrke. Også Yin (2003) kommenterer at å konstruere data på ulike måter kan øke begrepsvaliditeten.

Respondentvalidering trekkes av og til fram i forbindelse med intervju-undersøkelser. I intervjuene har jeg prøvd å stille oppfølgingsspørsmål for å få bekreftet at min oppfatning av elevens svar er riktig. Men i analysen av elevenes løsningsprosesser bruker jeg begreper og teorier som det ikke kan forventes at elever i videregående skole er fortrolige med. Det betyr at jeg anser respondent-validering som lite hensiktsmessig i forbindelse med analysene. Et mer relevant valideringsfellesskap vil være andre forskere/matematikkdidaktikere. Her opplever jeg det som en styrke at jeg har hatt en veileder å forholde meg til gjennom hele prosjektet.

Med ekstern validitet mener vi hvordan forståelse utviklet innenfor én studie kan være gyldig også i andre sammenhenger (Thagaard, 2009). Det settes gjerne spørsmålstegn ved generalisering i forbindelse med case-studier. Jeg kan vise til at jeg har en fler-case-studie der samsvarende konklusjoner fra de ulike casene styrker validiteten. Dette er det Yin (2003) sikter til med repliserbarhet i case-studier. Det betyr ikke at vi finner nøyaktig det samme i to cases, men det det er enighet om, kan rapporteres som styrket (Stake, 2010).

Det kan dessuten argumenteres for at målet med en case-studie er å utvide teorier (analytisk generalisering) heller enn statistisk generalisering. Case-studier generaliseres til teoretiske proposisjoner og ikke til populasjoner (Yin, 2003). Andersen (1997) støtter dette synspunktet og presiserer at det forskningsstrategiske hovedpoenget er at man må ha et bevisst forhold til hvordan et case passer inn i et empirisk eller teoretisk univers. I forhold til min studie forstår jeg dette som at jeg på ingen måte kan si noe om hva «alle elever» mener om konkurranseoppgaver. Jeg kan heller ikke si hvilke strategier «alle talentfulle elever» bruker i disse oppgavene. Jeg kan derimot prøve å se hvordan mine resultater samsvarer med tidligere forskning.

I forhold til oppgaveanalysene vil jeg påpeke at jeg har analysert *alle* geometrioppgavene fra Abelkonkurransen fra de siste ti årene, og jeg har analysert *alle* geometrioppgaver som er gitt til eksamen i R1. Materialet er likevel ikke veldig stort, og det kan selvfølgelig settes spørsmålstegn ved om mine tolkninger er gyldige. Kvale og Brinkmann proklamerer:

> Ideelt sett vil kvaliteten på håndverksarbeidet gi kunnskapsprodukter som i seg selv er så sterke og overbevisende at de faktisk bærer sin gyldighet i seg. I slike tilfeller ville forskningsprosedyrene være gjennomsiktige og resultatene åpenbare, og en studies konklusjoner ville være overbevisende sanne,… (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 264)

Det er nok et stykke igjen til idealet, men jeg håper likevel at hovedinntrykket i prosjektet mitt er at forskningsprosessen er troverdig.

4. ANALYSE

Analyse av data innebærer å lete etter mening(er) i det materialet en har samlet. Stake skriver om analyse og syntese:

> Research involves both analysis (the taking things apart) and synthesis (the putting things together). We gather data. We increase our experience. We look closely at the patches of collected data, the parts of our experience; that is, we analyze. And we put the parts together, often in different ways than before. We synthesize. (Stake, 2010, s. 133)

Gjennom min vurdering av konkurranseoppgavene har jeg har opparbeidet et betydelig data-materiale i form av «avkrysningstabeller». Jeg begynner dette kapittelet med å se nærmere på hvilken informasjon jeg kan få ut av disse dataene. Deretter vil jeg undersøke hva spørreskjema, intervjuer og oppgavebesvarelser sier om elevenes løsningsstrategier i geometrioppgaver.

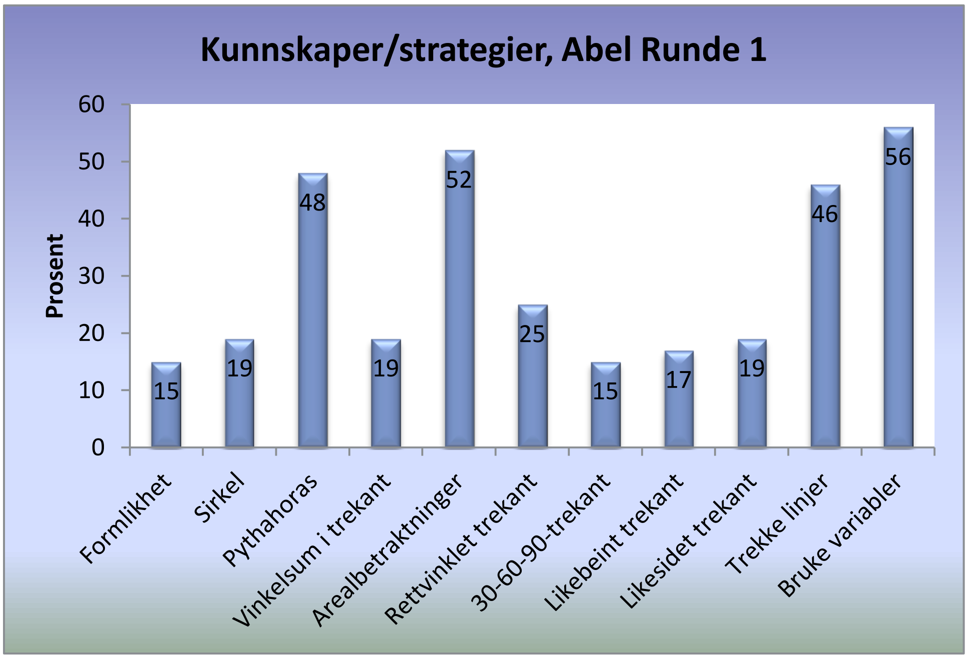
4.1 OPPGAVEANALYSE

Jeg innleder gjennomgangen av oppgaveanalysene med en oversikt over de emnene som framtrer som mest sentrale ut fra de vurderingene jeg har gjort. Videre følger en kort presentasjon av van Hiele-nivåer både i konkurranseoppgaver og eksamensoppgaver. Jeg har gjort meg noen få kvantitative betraktninger som jeg diskuterer, før jeg går over til de kvalitative analysene.

4.1.1 INNLEDENDE OVERSIKT

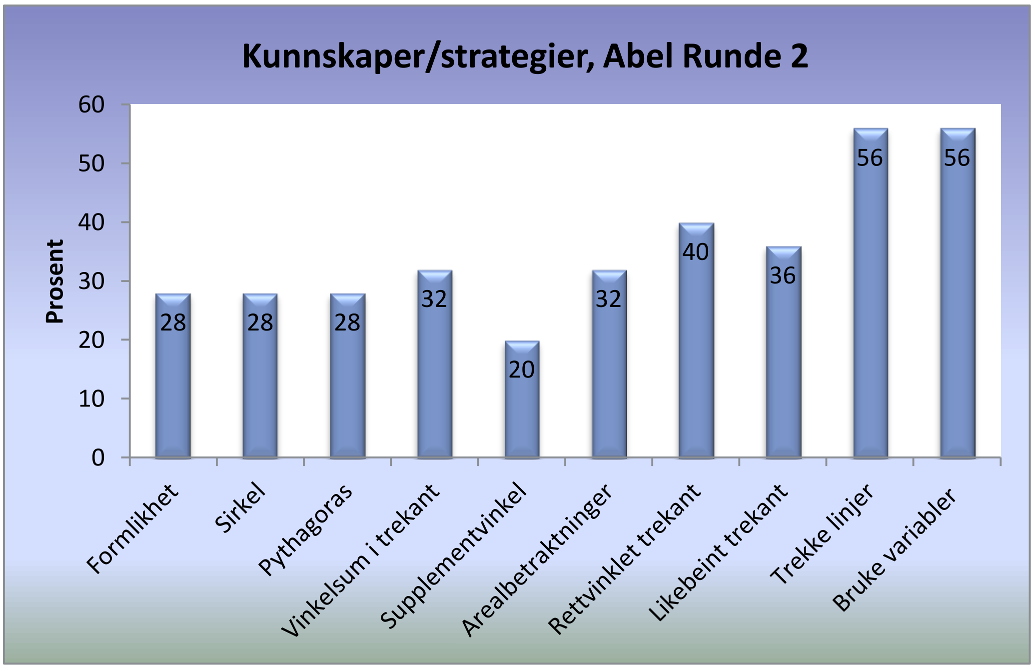
Vedlegg 12 (avkrysningstabeller) gir oversikt over hvilke kunnskaper/strategier jeg vurderer som nyttige i oppgavene jeg har analysert. Nedenfor er de viktigste framstilt i form av diagrammer. Den vertikale aksen angir i hvor mange prosent av løsningene bestemte kunnskaper/strategier er anvendt. Merk at kategoriene *ikke* er ekskluderende – man kan f.eks. trekke «smarte linjer» og bruke formlikhet i en oppgave som også involverer rettvinklede trekanter.

Som figur 4.1 og 4.2 viser, er særlig Pythagoras og arealbetraktninger viktige emner i de innledende rundene i Abel-konkurransen. Man må dra nytte av egenskaper ved sirkelen eller spesielle trekanter, samt gjøre ulike vinkelberegninger for å finne svar på oppgaven. Viktige strategier er å tilordne variabler til vinkler/lengder og dessuten trekke «smarte linjer». Dette kan være linjer mellom viktige punkter, eller linjer som trekkes for å lage trekanter vi vet noe om (se eksempler i vedlegg 1).
I oppgaver som involverer sirkler og tangeringslinjer, er det nyttig å trekke radien ut til tangerings-punktet. (Oppgaver av sistnevnte type er mer vanlig i runde 2 enn i runde 1.)



Figur 4.1 Nyttige kunnskaper/strategier for å løse oppgaver i Abel, runde 1.

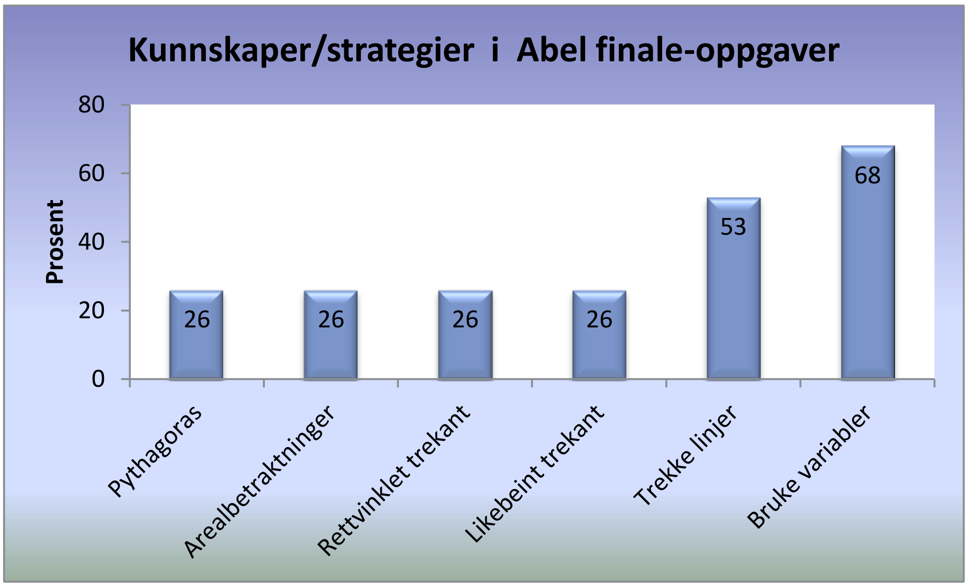
(Kategoriene er ikke ekskluderende – det gjelder også de påfølgende figurene.)



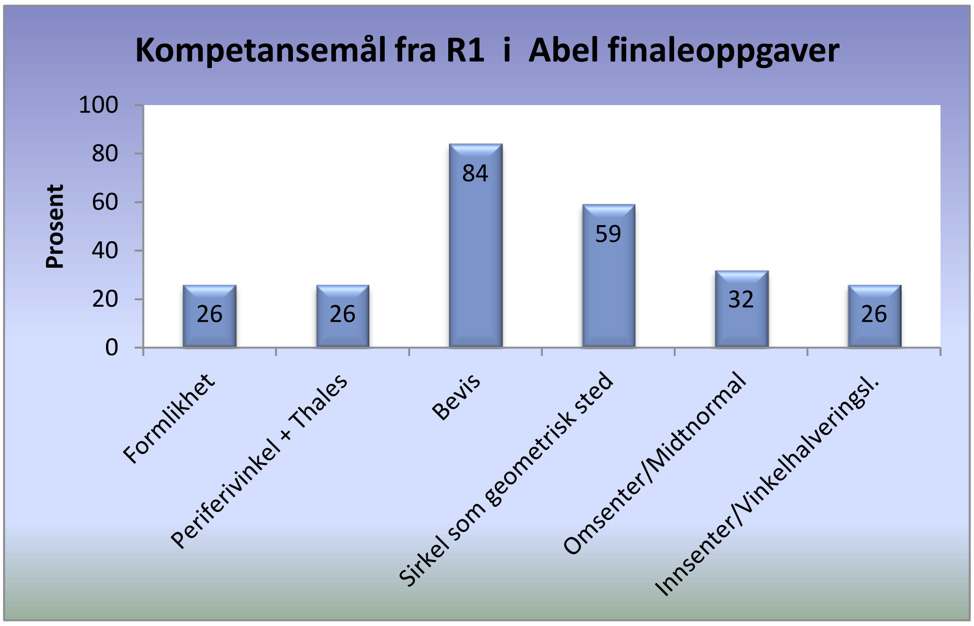
Figur 4.2 Nyttige kunnskaper/strategier for å løse oppgaver i Abel, runde 2.

Med unntak av formlikhet indikerer figur 4.1 og 4.2 lite samsvar mellom kompetansemålene i R1 og konkurranseoppgavene i geometri i de innledende rundene i Abel-konkurransen. Dette kan ganske enkelt skyldes at Abel-konkurransen skal være for alle elever i videregående skole – også de på trinn 1. Dermed ser det ut til at det bevisst legges vekt på stoff som er kjent fra ungdomsskolen.

Hvis vi går videre til finale-oppgavene, blir bildet et litt annet. Selv om figur 4.3 viser at kunnskaper/strategier som var sentrale i runde 1 og 2, fortsatt er viktige, er det tydelig i figur 4.4 at også kompetansemål fra R1 inngår i disse oppgavene. Nå blir det særlig påkrevd å beherske bevis. Geometriske steder slik som sirkel, midtnormal og vinkelhalveringslinje – som vi jobber så mye med i R1 – er også fremtredende i Abel-oppgavene. Videre dukker periferivinkelsetningen (eventuelt spesialtilfellet Thales teorem) opp som nyttig. Det hender imidlertid at løsningsforslagene på Abel-konkurransens nettside foreslår alternative løsningsmetoder for elever som ikke kjenner til periferivinkelsetningen. Heller ikke i finale-oppgavene *forutsettes* altså typiske R1-kunnskaper (som periferivinkelsetningen); det er likevel tydelig at geometrikunnskaper fra R1 er *nyttige* for å løse geometrioppgavene i Abel-finalen.



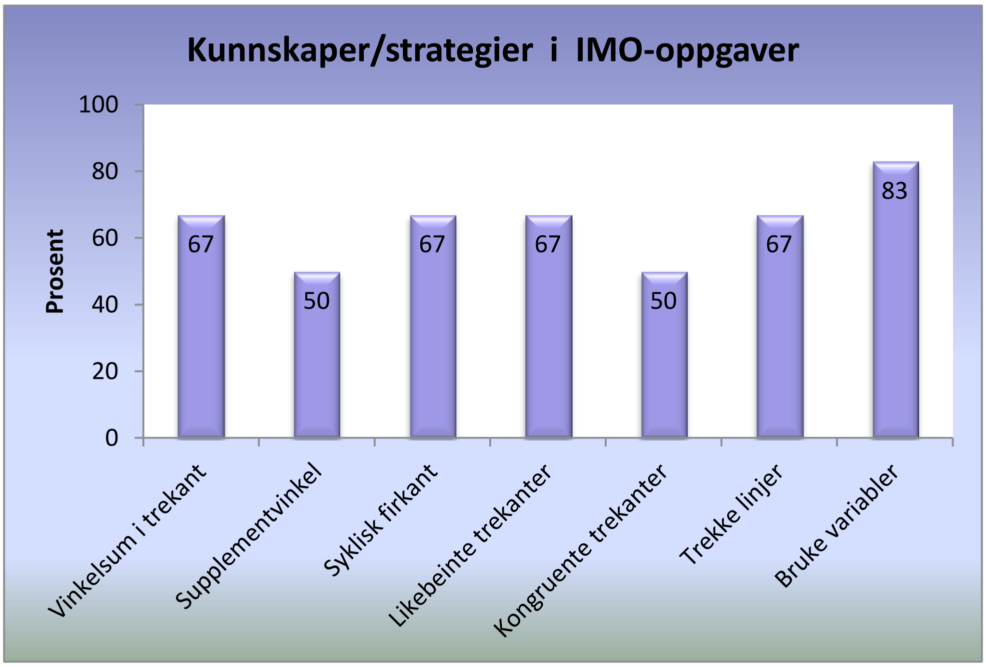
Figur 4.3 Nyttige kunnskaper/strategier for å løse Abel-finaleoppgaver.



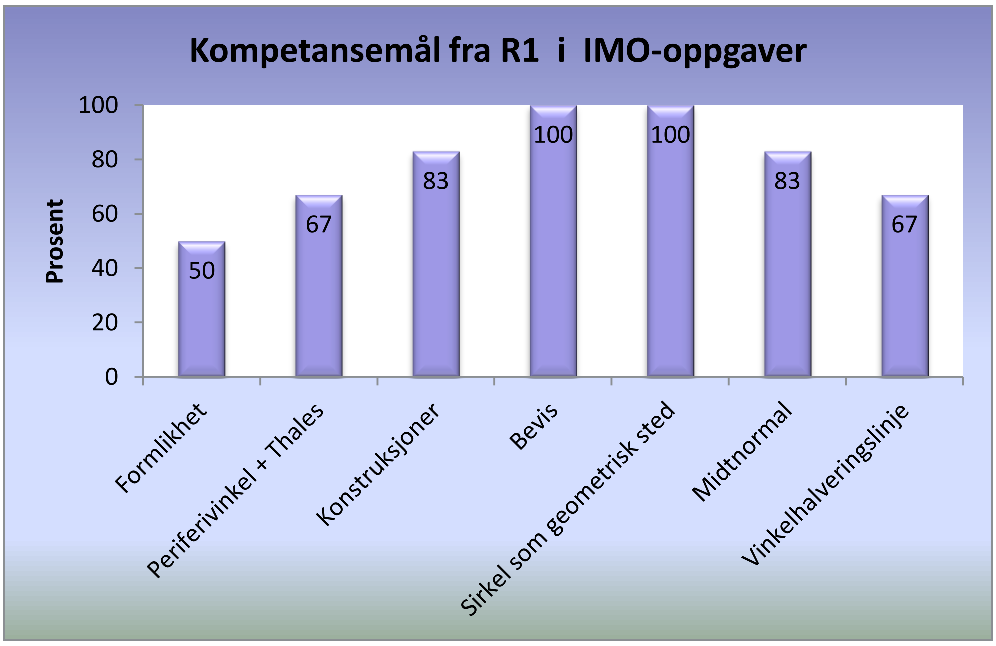
Figur 4.4 Kompetansemål fra R1 slik jeg finner dem i Abel-finale-oppgaver.

Også i de seks IMO-oppgavene brukes aktuelt R1-stoff. Til tross for oppgavenes vanskelighetsgrad inngår påfallende lite stoff som er ukjent for R1-elevene. Et viktig unntak er sykliske firkanter (se figur 4.5).

Figur 4.6 antyder relativt stor grad av samsvar mellom kompetansemålene i R1 og IMO-oppgavene. Vanskelighetsgraden i IMO-oppgavene er imidlertid adskillig høyere enn det R1-elevene er vant til, noe vi skal komme tilbake til i den kvalitative analysen av oppgavene.



Figur 4.5 Nyttige kunnskaper/strategier for å løse IMO-oppgaver.



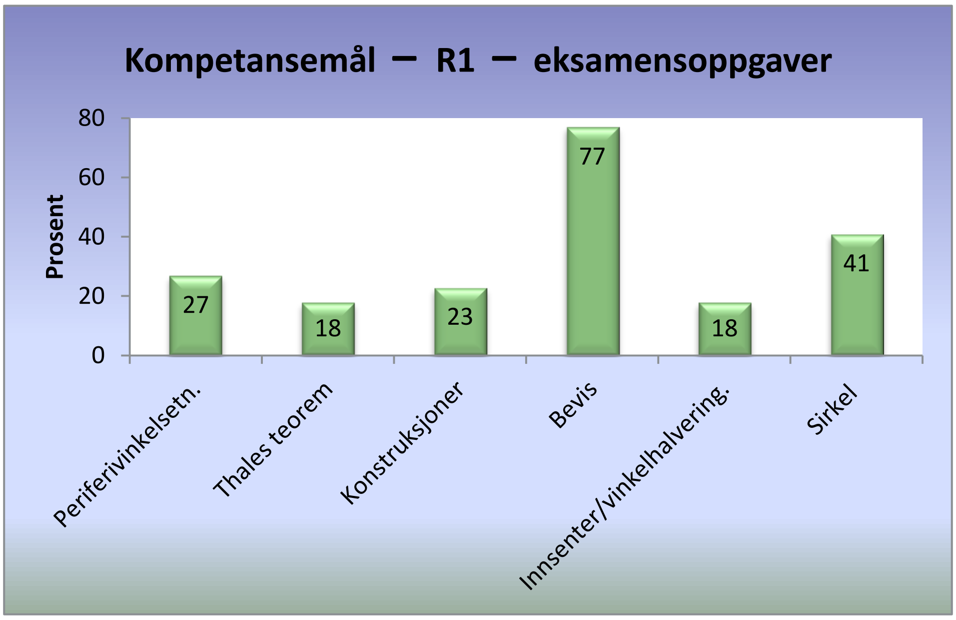
Figur 4.6 Flere emner som inngår i kompetansemål i R1, er også sentrale i IMO-oppgaver.

Oppsummert ser denne innledende oversikten over kunnskaper/strategier i konkurranseoppgavene ut til å antyde at vi i liten grad gjenfinner R1-kompetansemål i konkurranseoppgaver fra Abel-konkurransens innledende runder. Vi ser derimot et relativt tydelig samsvar mellom finaleoppgaver (både Abel og IMO) og kompetansemålene i geometridelen av R1.

For å ha noe å sammenlikne analysene av konkurranseoppgavene med vil det være interessant å se i hvilken grad kompetansemålene i R1 kommer til uttrykk i eksamensoppgavene. Figur 4.7 og 4.8 viser resultatet av analyser av samtlige eksamensoppgaver i geometri (analytisk geometri/vektorregning ikke medregnet) i R1 siden eksamen i faget ble avholdt første gang våren 2008 frem til og med høsten 2012. I figur 4.7 ser vi hvilke av kompetansemålene i R1 som har vært mest framtredende i disse eksamensoppgavene.

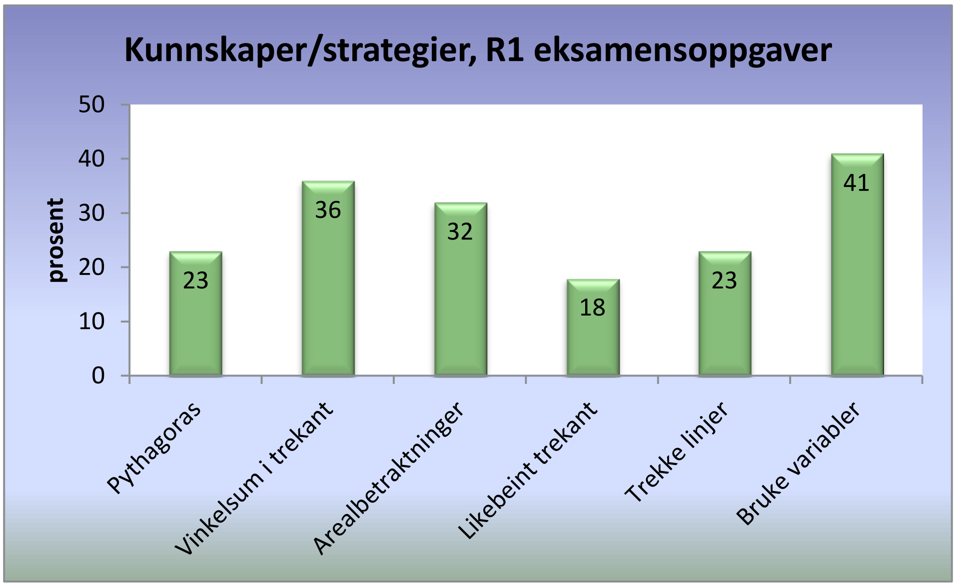
Det kan se ut som om diagrammene bekrefter at geometri er et emne som egner seg for å jobbe med bevis, slik jeg også påpekte i teoridelen av denne studien, bl.a. med henvisning til Cirillo og Herbst (2012), Ranestad (2007), Battista (2007) og Borgersen (1994). På dette punktet ser vi et klart samsvar mellom konkurranseoppgavene fra Abel-finalen, IMO og eksamensoppgavene i R1.

Samlet får også periferivinkelsetningen og spesialtilfellet Thales teorem høye prosenttall i figur 4.7, noe som nok gjenspeiler at dette er svært sentralt R1-stoff. Jeg syns imidlertid det er noe overraskende at innsenteret er det eneste av trekantsentrene som viser igjen i diagrammet. Tallene kan kanskje gi inntrykk av at kompetansemålene i R1 kommer bedre til uttrykk i IMO-oppgaver enn i eksamensoppgavene. Vi må imidlertid huske at hvert enkelt IMO-problem ofte er svært sammensatt. Det er derfor ikke særlig overraskende at *mange* kunnskaper kreves i en stor prosentandel av disse problemene.



Figur 4.7 Kompetansemål fra R1 som ofte dukker opp i eksamensoppgavene.

Mens figur 4.7 refererer til kompetansemål, får figur 4.8 fram kunnskaper/strategier som har vist seg å være nyttige i eksamensoppgavene, selv om de ikke eksplisitt er uttrykt i kompetansemålene. (Pythagoras nevnes i kompetansemålene i tilknytning til bevis. R1-elevene jobber mye med oppgaver der de *beviser* Pythagoras-setningen, men relativt lite med oppgaver der de *bruker* Pythagoras-setningen i beregninger. Begge typer oppgaver forekommer imidlertid i eksamensoppgavene og er for enkelhets skyld slått sammen til én søyle i figur 4.8.)



Figur 4.8 Nyttige kunnskaper/strategier i eksamensoppgaver, R1.

4.1.2 VAN HIELE-NIVÅER

År:	2007			2006			2005				2004	
Oppgaver (Runde 2):	3	6	9	2	4	6	3	4	6	8	3	5
van Hiele-nivå	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Tabell 4.1 van Hiele-nivåer i noen av de innledende Abel-oppgavene.

I oversiktstabellene i vedlegg 12 tilordner jeg van Hiele-nivå til hver av oppgavene. Tabell 4.1 viser et typisk utsnitt fra en slik tabell. Det finnes noen få oppgaver som er plassert på nivå 2 (framgår ikke av utsnittet i tabell 4.1), og det finnes oppgaver der jeg har valgt nivå 3 selv om jeg har vært usikker på «er dette 2 eller 3?», eventuelt «er dette 3 eller 4?». Likevel mener jeg det er en helt klar hoved-tendens at de innledende Abel-oppgavene kan plasseres på van Hiele-nivå 3. Det innebærer at det kreves uformell deduksjon for å løse dem. Eleven må ha god oversikt over sammenhenger mellom ulike geometriske egenskaper. På grunn av oppgavenes form (avkrysning i runde 1 og et heltallig svar i runde 2) kreves imidlertid ikke formell deduksjon. Det kan selvfølgelig godt hende at eleven har skrevet ned en omfattende utledning for å komme fram til løsningen sin, men han eller hun kan også ha funnet et svar ved hjelp av mer intuitive metoder. Uansett kreves det ikke at eleven kan føre formelle bevis.

År:	2008		2007		2006				2005			2004	
Finaleoppgave:	4a	4b	2a	2b	4a	4b	4b	3a	3a	3b	3b	3a	3b
van Hiele-nivå	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Tabell 4.2 van Hiele-nivåer i noen Abel finale-oppgaver.

Like tydelig som at Abel-oppgavene fra de innledende rundene kan tilordnes van Hiele-nivå 3, er det at Abel-finaleoppgavene (og IMO-oppgavene) befinner seg på nivå 4, noe utsnittet (tabell 4.2) fra oversikts-tabellen illustrerer. Jeg mener det er relativt lett å plassere disse oppgavene i forhold til van Hiele-nivå ettersom geometriproblemene i Abel-finalen/IMO i all hovedsak dreier seg om å føre bevis, og derfor klart befinner seg på nivå 4.

Semester:	Høst 2009		Vår 2009		H-08	Vår 2008		
Eksamensoppgave R1:	2	4 II	2	3	5	2e	4 II a	5
van Hiele-nivå	4	4	4	3	4	2	3	4

Tabell 4.3 van Hiele-nivåer i noen eksamensoppgaver, R1.

Det er ikke fullt så opplagt hvilket van Hiele-nivå de ulike R1-eksamensoppgavene svarer til. Oppgaven er også her gjerne «forklar at» eller «vis at», noe som indikerer nivå 4, men samtidig gis det ofte så tydelige hint i oppgaven til hvordan den skal gjøres (f.eks. «bruk det du fant i oppgave a til å vise…») at kravene til å beherske deduktive resonnementer blir mindre. Jeg har likevel vurdert de fleste av disse oppgavene til nivå 4. Et eksamens-sett inneholder imidlertid gjerne forskjellige typer oppgaver – noe som også gjenspeiles i van Hiele-nivåene (se eksemplet i tabell 4.3 og en mer fullstendig oversikt i vedlegg 12).

4.1.3 KVANTITATIVE BETRAKTNINGER

Gjennom oppgaveanalysene har jeg opparbeidet et relativt omfattende «tellbart materiale». Som nevnt er datagrunnlaget 48 runde 1-oppgaver, 25 runde 2-oppgaver, 10 Abel-finale-oppgaver (de fleste inndelt i a og b), 6 IMO-oppgaver og 22 R1-eksamensoppgaver. Kan enkle kvantitative betraktninger bidra til å finne svar på forskningsspørsmålet:

Hvordan samsvarer konkurranseoppgaver i geometri – samt elevers strategier i løsningsprosessen av disse – med kompetansemål for matematikkfaget i videregående skole?

Oversiktsdiagrammene som ble presentert innledningsvis i analysen, antyder at eksamensoppgavene i R1 ikke nødvendigvis gjenspeiler alle kompetansemålene like tydelig. Det er likevel ikke til å komme bort fra at både lærere og elever er opptatt av eksamen. Eksamensoppgaver er *sentrale* for faget. Jeg tror derfor at sammenlikning (både kvantitativ og kvalitativ) av konkurranseoppgaver og eksamensoppgaver kan gi nyttig informasjon.

Som kvantitativt analyseverktøy har jeg valgt å benytte korrelasjonsanalyse mellom geometri-problemer fra matematikkonkurranser og eksamensoppgaver i geometri (R1). Jeg har brukt SPSS og lagt inn hvor mange prosent av oppgavene som omhandler bestemte tema. Er det slik at kunnskaper/strategier som brukes mye i eksamensoppgavene, også forekommer ofte i konkurranseoppgavene?

Vi så allerede i begynnelsen av dette analysekapittelet hvilke kunnskaper/strategier som var *mest* sentrale i de ulike oppgavetypene. Korrelasjonsanalysen er imidlertid noe mer omfattende da tall fra *alle* kategoriene (ikke bare de mest framtredende) er lagt inn for hver oppgavetype (Abel runde 1, Abel runde 2, Abel-finale, IMO og R1-eksamen). Emner som jeg i utgangspunktet har ført opp i tabellene, men som ikke har forekommet i noen av oppgavene, er utelatt fra datamaterialet for ikke å bidra til et falskt inntrykk av samsvar. Jeg har da stått igjen med 34 kategorier som har dannet grunnlag for analysene (se vedlegg 11).

Tabell 4.4. viser moderat korrelasjon mellom R1-eksamensoppgaver og IMO-oppgaver. Korrelasjonen mellom R1 og Abel-finalen er fortsatt moderat, men nærmer seg høy. I begge disse tilfellene er verdiene signifikante. Vi finner derimot lav korrelasjon mellom R1-eksamensoppgaver og Abel-oppgaver fra de innledende rundene. Disse verdiene er imidlertid *ikke* signifikante. Resultatene er likevel omtrent som vi ville forvente på grunnlag av de innledende analysene.

Korrelasjon, n=34	R1
Abel Runde 1	0,217
Abel Runde 2	0,185
Abelfinale	0,691**
IMO	0,587**

** Signifikant på 0,01-nivå

Tabell 4.4 Korrelasjonsanalyser (Pearson r) mellom eksamens-oppgaver i R1 og konkurranse-oppgaver.

En korrelasjonsanalyse er sensitiv for svært avvikende verdier (Pallant, 2010). Ettersom jeg vurderer «bevis» til å være irrelevant i oppgavene fra Abel runde 1 og 2, men nyttig i flertallet av R1-eksamensoppgavene (77 % ifølge diagrammene/avkrysningstabellene), lurer jeg på om dette punktet kan betraktes som en såkalt «outlier». Ved å fjerne dette punktet fra korrelasjonsanalysene får jeg en korrelasjonskoeffisient (Pearson r) på 0,472 mellom R1 og Abel runde 1, og 0,457 mellom R1 og Abel runde 2. Nå blir dessuten verdiene signifikante på 0,01-nivå. (Alle korrelasjonsanalysene fra SPSS er gjengitt i vedlegg 11.)

Vi finner altså et svakt/moderat samsvar mellom R1 og Abel runde 1 + 2 dersom vi ser bort fra punktet om bevis. Jeg tolker dette som at eksamensoppgavene i R1 – i likhet med Abelkonkurransens innledede runder – også bruker mye stoff som er kjent fra ungdomsskolen, slik som vinkelsum i trekant, arealbetraktninger, formlikhet og Pythagoras. Nytt i R1 er imidlertid det relativt sterke fokuset på bevis. Dette synliggjøres godt i eksamensoppgave 8 våren 2011 som i all hovedsak kan løses på grunnlag av ungdomsskolekunnskaper i geometri. Men i tillegg kommer nettopp krav til bevis, samt bruk av Thales teorem.

Her har vi for øvrig et eksempel på vekselvirkning mellom kvalitative og kvantitative metoder: Jeg begynner med kvalitative analyser av oppgavene. Dette gir bl.a. et tellbart materiale som danner utgangspunkt for enkle kvantitative betraktninger. Disse leder meg igjen tilbake til mer grundige kvalitative analyser.

De kvalitative og de kvantitative analysene ser ut til å støtte hverandre i at geometrioppgaver gitt til eksamen i R1 og finaleoppgaver fra matematikkonkurranser bygger på relativt mye av det samme stoffet. Samsvaret er mindre mellom R1-oppgavene og oppgavene fra Abelkonkurransens innledende runder.

4.1.4 KVALITATIVE ANALYSER

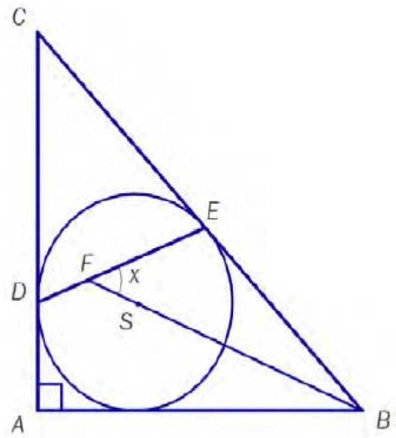
VANSKELIGHETSGRAD OG KREATIVITET

Det første som slår meg i de kvalitative analysene av oppgavene, er at eksamensoppgavene er markant lettere enn konkurranseoppgavene. Jeg har regnet gjennom svært mange oppgaver, og konkurranseoppgavene har krevd mange (og til dels lange) «tenkepauser». Jeg skal ærlig innrømme at jeg har *strevd* med disse oppgavene. Jeg ville være «lost» uten løsningsforslag til IMO-oppgavene og har vært takknemlig for løsningsforslag til oppgavene fra Abel-finalen også. Etter å ha *jobbet* meg gjennom «ti år med oppgaver» fra runde 1 (dvs. 48 oppgaver), opplevde jeg runde 2-oppgavene som relativt greie, kanskje pga. «treningen» fra første runde. Likevel hendte det jeg måtte konsultere løsningsforslaget her også. Konkurranseoppgavene krever i*kke* geometrikunnskaper utover det en gjennomsnittlig R1-elev innehar. Oppgavene fra de innledende rundene krever ikke geometri-kunnskaper utover det eleven har med seg fra ungdomsskolen heller. De er likevel vanskelige – ikke på grunn av kunnskapsmengden de krever, men fordi man må finne *kreative* måter å *anvende* kunnskapene på.

Med geometrioppgavene fra R1-eksamen stiller det seg ganske annerledes. Jeg har stort sett kunnet regne rett gjennom alle eksamensoppgavene uten noen form for vanskeligheter. Det kan hende dette skyldes at jeg har undervist R1 og selvfølgelig ikke «bør» ha problemer med disse oppgavene.

Jeg mener imidlertid at forskjellen i vanskelighetsgrad først og fremst har sammenheng med at konkurranseoppgavene er *problemer*, mens eksamensoppgavene gir tydelige retningslinjer både om hva man skal gjøre og hvordan man kan gjøre det. Se f.eks. på følgende eksamensoppgave i R1 fra våren 2011 (Utdanningsdirektoratet, 2011). Elevene får oppgitt figur 4.9 sammen med oppgaveteksten:

> I en $\triangle ABC$ er $\angle A = 90^\circ$. En sirkel med sentrum i S er innskrevet i trekanten. Sidene AC og BC tangerer sirkelen i punktene D og E. Linjen gjennom B og S skjærer DE i F.



Figur 4.9 Eksamen Matematikk R1 Vår 2011, oppgave 2.

Oppgaven leder fram mot å finne $\angle x$ i det siste spørsmålet («Vis at $x = 45^\circ$»). Dette kunne godt være en Abel-oppgave. Den ville sannsynligvis passe godt i runde 2 (der svaret skal være et heltall mellom 0 og 100), og ville nok ganske enkelt blitt gitt som «Finn $\angle x$» (sammen med figuren og den innledende oppgaveteksten sitert ovenfor). Da er det ikke opplagt hva slags framgangsmåte vi skal bruke. Vi må utforske figuren. Er det noen spesielle (f.eks. likebeinte) trekanter her? Hva vet vi om vinklene i likebeinte trekanter? Er det andre vinkler vi vet noe om? Hva vet vi om en sirkel som er innskrevet i en trekant? Hvor ligger sentrum i en slik sirkel? Kan vi klare å finne $\angle x$? Dette er kanskje ikke et veldig vanskelig problem, men det er et poeng at i konkurransesammenheng må eleven *selv* stille seg denne type spørsmål og prøve å *utforske* problemet for å komme fram til en løsning.

På eksamen får imidlertid elevene adskillig hjelp til å finne en løsnings*metode*. For det første oppgis det at $CD = CE$, og eleven får så beskjed om å sette $\angle ABC = v$ og $\angle BCA = u$. Deretter gis trinnvise instruksjoner, (her gjengitt med mine kommentarer i klammeparentes):

> a) Forklar at $u + v = 90^\circ$ [vinkelsum i trekant] og at $\angle DEC = 90^\circ - \frac{u}{2}$ [vinkelsum i trekant; to av vinklene i den likebeinte trekanten $\triangle DCE$ er like].
>
> b) Forklar at $\angle FBE = \frac{v}{2}$ [sentrum i den innskrevne sirkelen ligger på vinkelhalveringslinja til $\angle v$] og at $\angle BEF = 90^\circ + \frac{u}{2}$ [en rett linje er 180°].

c) Vis at $x = 45^\circ$ [Vinkelsum i trekant gir at $x = 180^\circ - \frac{v}{2} - \left(90^\circ + \frac{u}{2}\right)$. Siden vi allerede vet at $u + v = 90^\circ$, kan vi sette inn for v (eller u) og løse oppgaven. Altså:

$$x = 180^\circ - \frac{90^\circ - u}{2} - \left(90^\circ + \frac{u}{2}\right)$$
$$x = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ \underline{\underline{= 45^\circ}}$$]

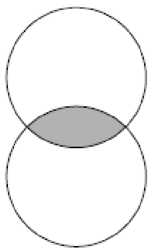
Visst må eleven fortsatt ha grunnleggende geometrikunnskaper på plass, men det er ikke mye tenkearbeid igjen i denne oppgaven. Den er ikke noe unntak. Når jeg har kunnet regne gjennom *hver eneste* av disse eksamensoppgavene uten å bruke mer tid enn den tida det tar å *skrive* dem ned, er det nettopp fordi jeg ikke har brukt tid på å *tenke,* framgangsmåten er opplagt ut fra oppgaven. Det er mulig at vi ikke ønsker å utfordre elevene med problemer til eksamen. Kanskje finnes problemløsningsoppgaver i lærebøkene selv om det ikke gjenspeiles i eksamensoppgavene? Eksamensoppgaver skal bl.a. skille toeren fra eneren. Da må det finnes lette oppgaver. Men sekseren skal også skilles fra femeren. Trenger vi ingen «nøtter»? Det skal innrømmes at siste oppgave i eksamen høsten 2012 ser ut til å være et hederlig forsøk på å tilby også de flinkeste elevene en geometrioppgave å bryne seg på. Jeg opplevede oppgaven som lett, men her gis i hvert fall *ikke* hint om hvert eneste trinn i løsningsmetoden. Vanskeligheten i oppgaven er ikke å «gjøre det du får beskjed om», men å finne ut *hva* du skal gjøre, (denne oppgaven, med løsningsforslag og kommentarer, gjennomgås i vedlegg 5).

TREKKE SMARTE LINJER

Vi har allerede sett at de innledende rundene i Abel-konkurransen ikke krever geometrikunnskaper utover det elevene har med seg fra ungdomsskolen. Kunnskapene må imidlertid brukes på en kreativ måte. Dette innebærer ofte det jeg kaller å «trekke smarte linjer». Ifølge diagrammene i kapittel 4.1.1 er «trekke linjer» en nyttig strategi i rundt 50 % av konkurranseoppgavene, men bare i 23 % av eksamensoppgavene. Denne forskjellen har jeg ønsket å undersøke nærmere med mer grundige kvalitative analyser. Se f.eks. på følgende runde 1-oppgave fra 2010/2011:

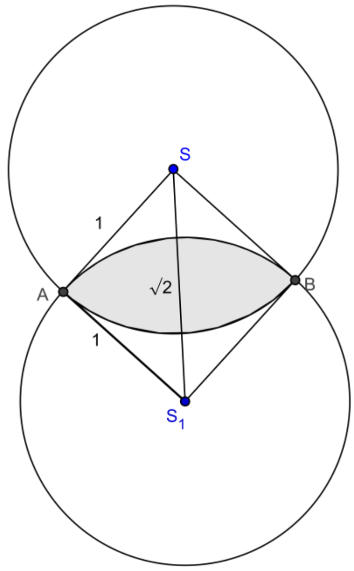
Oppgave 8

Avstanden mellom sentrene i to sirkler med radius 1 er $\sqrt{2}$. Hva er arealet av området som ligger inni begge sirklene?



A $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ **B** $\frac{\pi}{2} - 1$ **C** $\frac{2\pi}{3} - 1$ **D** $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **E** $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

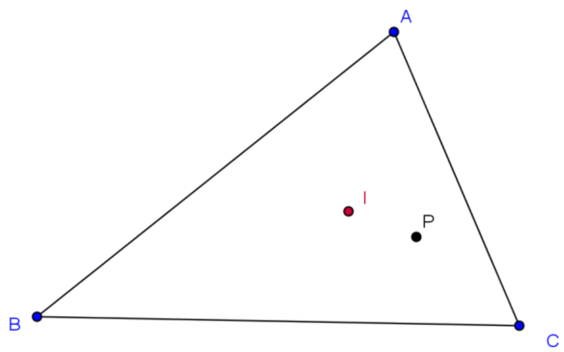
Figur 4.10 Abelkonkurransen, 2010/2011 Runde 1 oppgave 8.



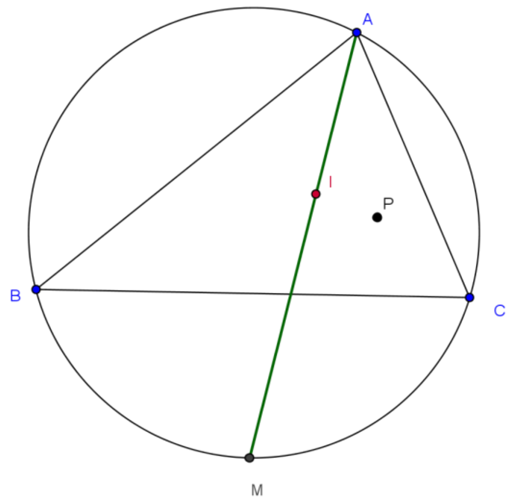
Figur 4.11 Runde 1 2010/2011 oppgave 8.

Her må eleven begynne med å analysere figuren. Hvilke linjer kan tegnes inn for å finne ut mer om den? Ofte kan det svare seg å begynne med å trekke opp linjer mellom de viktige punktene – så også her. Punkter som opplagt er viktige i denne figuren, er sentrum i hver av sirklene og skjæringspunktene mellom dem. Ved å trekke linjer mellom disse punktene får vi en figur som figur 4.11. Men $1^2+1^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ så $\triangle SAS_1$ må være rettvinklet (ved Pythagoras), og $\square AS_1BS$ er et kvadrat. (Merk at eleven selv må gjenkjenne Pythagoras her – det står ikke «bruk Pythagoras».) Det betyr også at sirkelsektoren AS_1B utgjør akkurat en kvart sirkel. Dermed gjenstår bare trivielle areal-betraktninger for å løse oppgaven.

I vanskeligere oppgaver er det selvfølgelig ikke alltid like lett å vurdere hvilke linjer som er smarte å trekke. «Viktige punkter» ligger gjerne utenfor den figuren en starter med. Figur 4.12 er f.eks. laget med utgangs-punkt i oppgave 1 fra IMO 2006. Her er I innsenter i en tilfeldig $\triangle ABC$, og P er et indre punkt slik at $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Vi skal vise at $AP \geq AI$ med likhet hvis og bare hvis $P = I$. En skal nok både ha en solid kunnskapsbase og en god porsjon kreativitet for å innse at et nyttig punkt for å løse dette problemet framkommer dersom vi forlenger linja gjennom A og I til vi igjen møter omsirkelen til $\triangle ABC$ (punkt M i figur 4.13. M vil for øvrig være sentrum i sirkelen gjennom B, I og C, og et avgjørende skritt i løsningen av oppgaven er å vise at også P må ligge på denne sirkelen). Løsningsforslag er gitt i vedlegg 2.



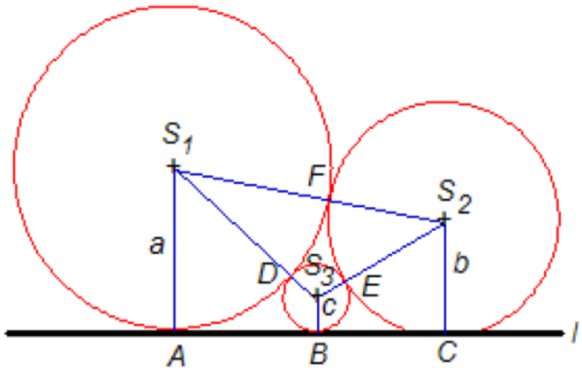
Figur 4.12 IMO 2006 oppgave 1.



Figur 4.13 IMO 2006_1 «Smart linje»

Selv om de «smarte linjene» kan være vanskelige å anvende i IMO-oppgavene i forhold til i de adskillig enklere Abel-oppgavene, så er prinsippet det samme: Eleven må selv analysere figuren og vurdere hvilke linjer som kan være nyttige. Ofte ligger et omfattende utforskningsarbeid til grunn for en slik vurdering. Sammenlikne dette med eksamen i R1, våren 2008 oppgave 5:

> Tre sirkler med sentre i S_1, S_2 og S_3 har radiene a, b og c. Alle sirklene tangerer linja l. Tangeringspunktene er A, B og C. Sirklene tangerer hverandre parvis i punktene D, E og F, slik figuren viser.

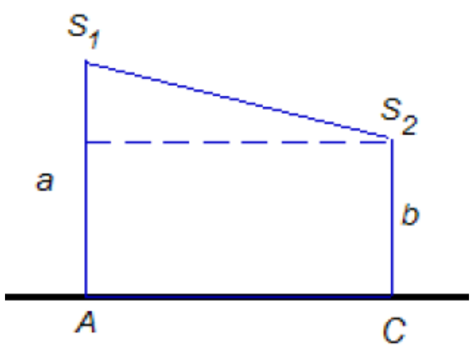


Figur 4.14 Eksamen R1
Vår 2008, oppgave 5a.

Oppgaven leder fram til å vise følgende sammenheng mellom radiene i sirklene:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$ – en fascinerende sammenheng som det helt klart kan være et problem å vise. Eleven utstyres imidlertid med en trinnvis *oppskrift*, der første punkt er å forklare at $S_1S_2 = a + b$. I dette spørsmålet ligger et potensiale til en *enkel* eksamensoppgave som likevel minner om konkurranseoppgavene i det at linjer må trekkes mellom de viktige punktene for at man skal se løsningen. Denne muligheten er ikke utnyttet. For som figur 4.14 viser, er de «smarte linjene» allerede trukket og tydelig framhevet for eleven med blått – her er ingenting igjen for eleven å oppdage selv.

I b-oppgaven får så eleven instruksjon om å bruke Pythagoras og vise at $AC = 2\sqrt{ab}$. For sikkerhets skyld oppgis en ny figur (figur 4.15) som sammen med beskjeden om å bruke Pythagoras, ikke burde etterlate noen tvil om hvordan en skal ta fatt på oppgaven. (Legg merke til forskjellen mellom denne oppgaven og Abel-oppgaven ovenfor, der eleven selv måtte analysere figuren og oppdage at Pythagoras var et avgjørende skritt i løsnings-prosessen.) Utfordringen i eksamensoppgaven er ikke å *finne ut* hva man skal gjøre; det er å gjøre det man får beskjed om.



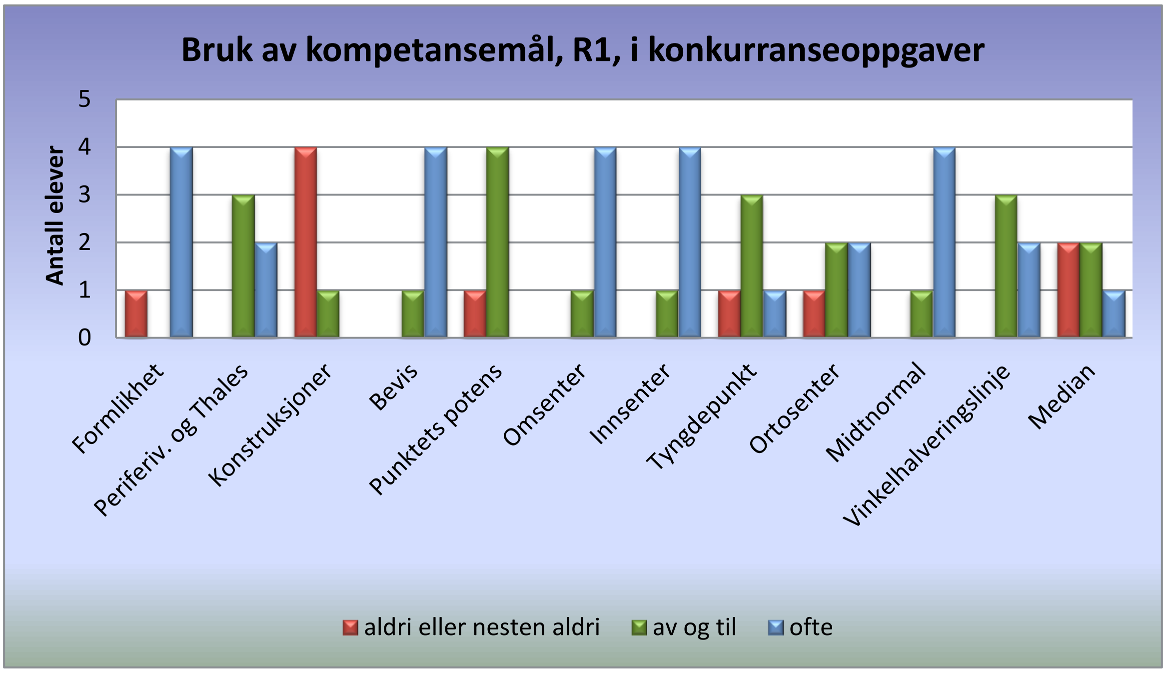
Figur 4.15 Eksamen R1
Vår, 2008 Oppgave 5b.

4.2 ELEVSTRATEGIER

Jeg innleder denne analysen av elevstrategier i geometriproblemer med en kort oversikt over resultatene fra en liten spørreundersøkelse. Videre kommenterer jeg elev-intervjuer knyttet til løsninger av to relativt krevende problemer. Som tidligere nevnt, fant disse intervjuene sted på en treningsleir i problemløsning i forkant av en matematikkonkurranse. Til slutt gjennomgår jeg besvarelser på en noe enklere problemløsningsoppgave fra en såkalt Abel-gruppe ved en videregående skole.

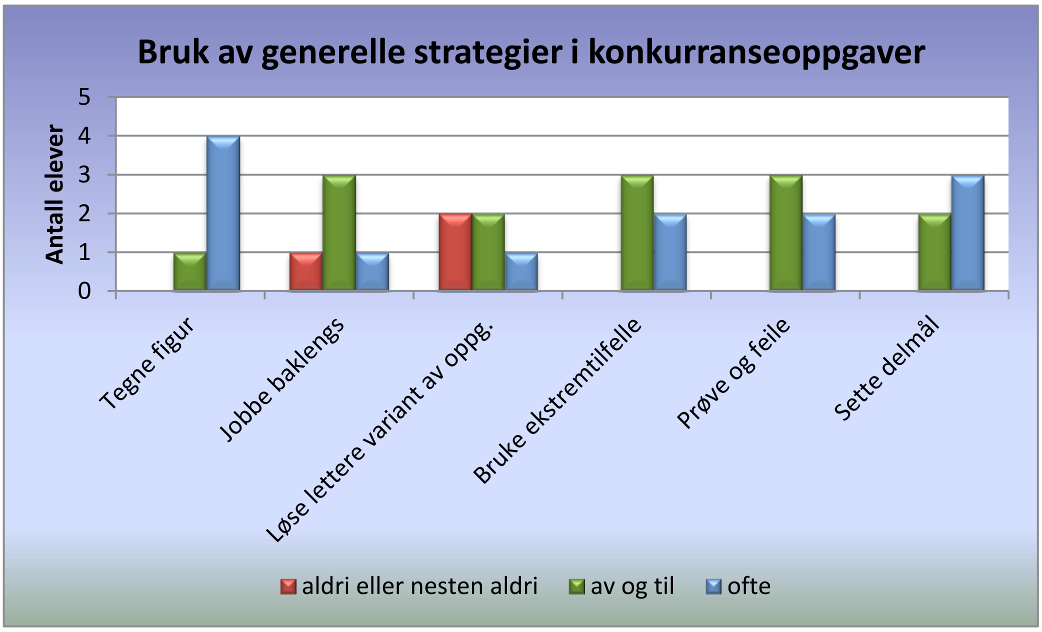
4.2.1 OVERSIKT FRA SPØRRESKJEMAET

Som det framgår også av metodedelen, er spørreundersøkelsen basert kun på svar fra fem deltakere ved en treningsleir i forkant av en matematikkonkurranse. Den må derfor tas for det den er – en innledende oversikt over hva *disse elevene* selv mener om hvilke kunnskaper og strategier de anvender i forbindelse med løsning av konkurranseoppgaver i geometri. De er spurt spesifikt om å angi hvor ofte de benytter bestemte kompetansemål fra R1 (uten at de selv trenger å vite at disse kunnskapene framkommer i læreplanen som kompetansemål i dette kurset). De er også spurt om mer generelle problemløsningsstrategier. I diagrammene nedenfor viser de blå søylene til kunnskaper eller strategier som elevene føler at de ofte har bruk for i geometrioppgaver fra matematikkonkurranser. De grønne søylene representerer et «av og til»-alternativ, mens de røde søylene viser til stoff som elevene sjelden eller aldri bruker.



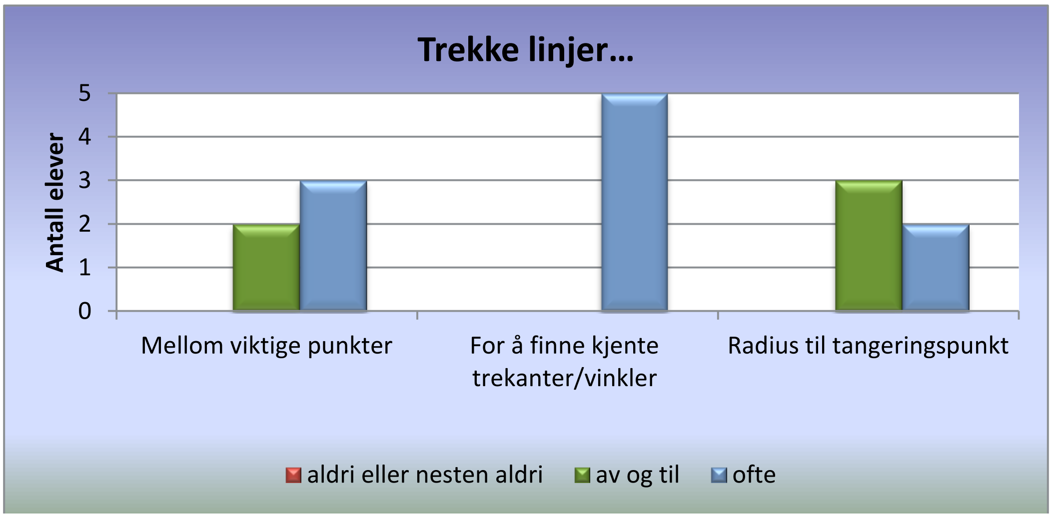
Figur 4.16 Elevstrategier. Bruk av kompetansemål fra R1 i konkurranseoppgavene.

Det begrensede datagrunnlaget i denne undersøkelsen gjør at den bare til en viss grad fungerer som en indikasjon på hvilke kunnskaper elever som deltar i matematikkonkurranser bruker når de løser geometriproblemer. Likevel synes jeg det er interessant å se det tydelige samsvaret mellom det disse elevene uttrykker og de resultatene jeg selv finner i oppgaveanalysene: Kompetansemål fra R1 som gjenfinnes i konkurranseoppgavene er i stor grad knyttet til bevis, formlikhet, omsenter og innsenter. Videre er midtnormal mye brukt (sannsynligvis i sammenheng med omsenter) og vi ser at vinkelhalveringslinjer, samt periferivinkelsetningen (ev. Thales teorem) benyttes ofte eller av og til (figur 4.16).

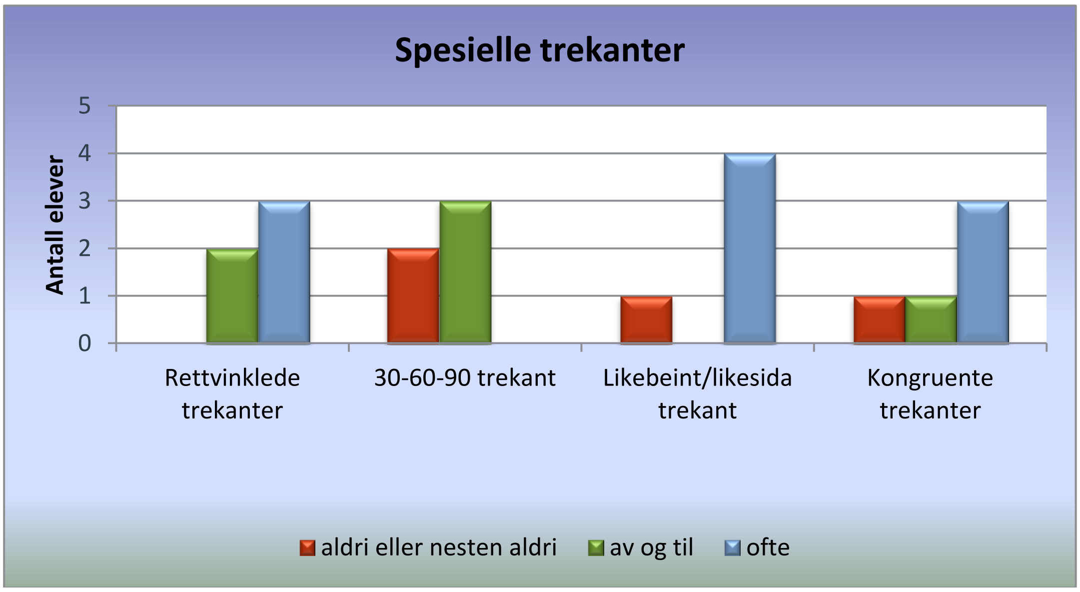


Figur 4.17 Elevstrategier. Bruk av generelle strategier i konkurranseoppgaver.

De mer generelle strategiene som anvendes av elevene i løsningsprosessen, har jeg ikke kunnet vurdere gjennom oppgaveanalysene. Her gir spørreundersøkelsen en første innfallsport til elevenes framgangsmåter. At de fleste finner det nyttig å tegne figurer, er vel nesten en selvfølge i geometri-oppgaver. Ellers indikerer figur 4.17 at det er relativt vanlig å sette seg delmål, bruke ekstremtilfeller og «prøve og feile». Det bør kanskje nevnes at selv om alle disse elevene har erfaring fra matematikkonkurranser, er det flere av dem som gir uttrykk for at de har jobbet lite med geometri. Det er derfor ikke uten videre enkelt for dem å si hvilke strategier de «pleier» å bruke. De har likevel svart så godt de kan, men det er kanskje betegnende at en av dem endret spørreskjemaets «tegne figur» til «krusedull» og dessuten streket under «feile» i «prøve og feile» og skrev at det gjorde han ofte ☺. En annen elev kommer med en konstruktiv kommentar om at han «bestemmer strategi ut ifra 'formen' på ønsket svar, f.eks. $(\ )^2 + (\ )^2 = (\ )^2$ indikerer Pythagoras». Dette er de eneste ekstra kommentarene som er påført spørreskjemaene.



Figur 4.18 Linjer. Elevene har ofte bruk for å trekke «smarte linjer» i konkurranseoppgavene.

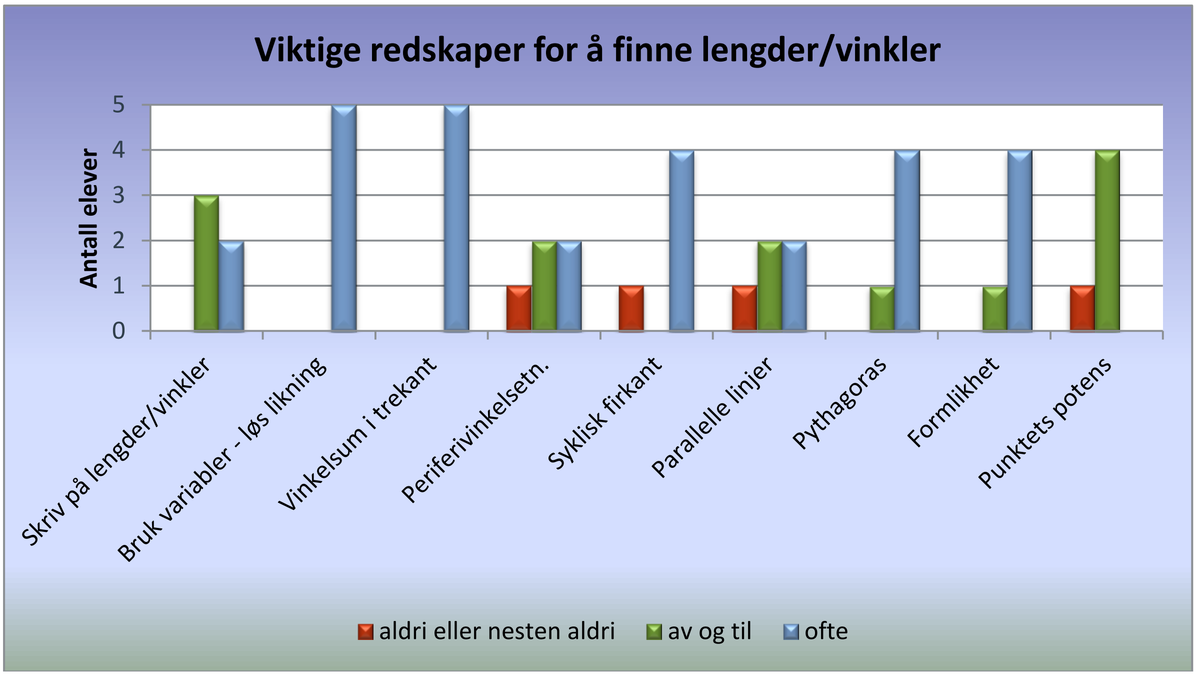


Figur 4.19 Trekanter. Noen trekanter dukker ofte opp i konkurranseoppgavene.

Figur 4.18 viser at alle elevene er enige om at de av og til eller ofte trenger å trekke «smarte linjer» for å finne løsninger på geometriproblemer. Igjen ser vi et klart samsvar med de analysene jeg har gjort av konkurranseoppgavene.

Dette gjelder også figur 4.19 som påpeker at spesielle trekanter gjerne dukker opp i konkurranse-oppgavene. Likebeinte/likesida trekanter ser ut til å forekomme oftest. Dessverre skiller ikke spørreskjemaet mellom disse to, men oppgaveanalysene gir grunn til å anta at likebeinte trekanter er mest framtredende.

Figur 4.20 gjenspeiler at det ofte er nyttig å bruke variabler og løse likninger i geometrioppgaver – noe vi også så i oppgaveanalysene. Ellers framhever elevene vinkelsum i trekant, sykliske firkanter, formlikhet og Pythagoras som de viktigste redskapene (blant dem som er nevnt på spørreskjemaet) for å finne henholdsvis vinkler og lengder.



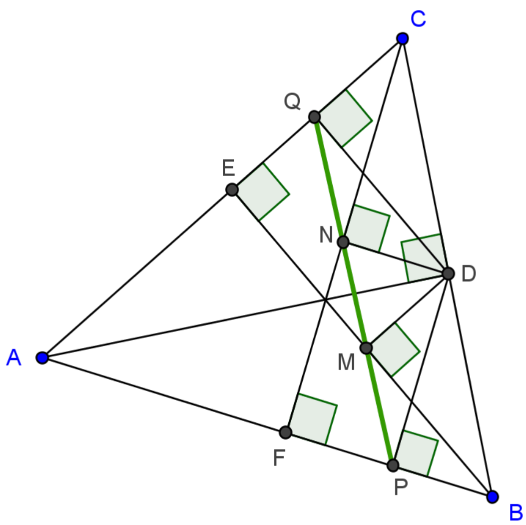
Figur 4.20 Trekanter. Noen trekanter dukker ofte opp i konkurranseoppgavene.

4.2.2 ELEVSTRATEGIER I NOEN KONKRETE OPPGAVER

Gjennom spørreskjemaet har elevene gitt oss et lite innblikk i hvilke kunnskaper og strategier de benytter seg av i forbindelse med løsning av geometrioppgaver. Neste skritt er å se nærmere på problemer elevene faktisk har løst, og se hvilke kunnskaper og strategier vi kjenner igjen i løsningen av disse oppgavene. Det første problemet fra treningsleiren er formulert på følgende måte:

PROBLEM 1

Let $\triangle ABC$ be an arbitrary triangle, and let D, E, F be the feet of perpendicular from A to BC, B to CA, and C to AB respectively. Draw perpendicular lines from D to AB, AC, BE, CF and let P, Q, M, N be the feet of perpendicular respectively. Prove that P, Q, M, N are collinear.



Figur 4.21 Problem 1. Ligger Q, N, M og P på en rett linje?

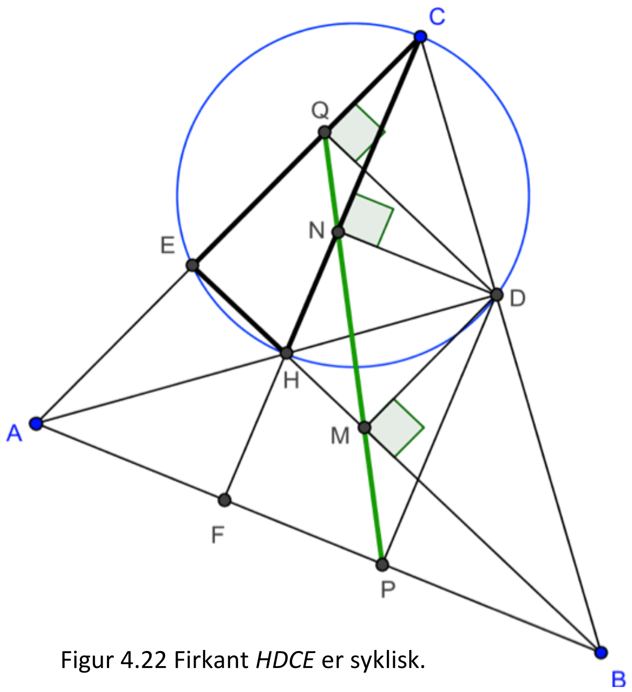
Elevene får oppgaven uten figur, og de har ikke anledning til å bruke andre hjelpemidler enn vanlige skrivesaker, passer og linjal. Dette er et problem som inviterer til å *tegne en figur*, og alle de fem elevene i utvalget mitt starter da også med det. Det er imidlertid slett ikke opplagt hva som skal gjøres for å komme videre.

Oppgaven består altså i å vise at P, N, M og Q ligger på samme linje, dvs. at den grønne linja i figur 4.21 faktisk er ei rett linje. (I figur 4.21 har jeg markert alle de vinklene som ifølge oppgaveteksten er rette.)

Eleven som delte løsningsstrategien sin med meg i problem 1 – la oss kalle ham Svein – er den eneste av elevene i undersøkelsen som har deltatt i matematikkonkurranser i flere år. Han forteller at han med én gang tenkte Simsonlinje da han så denne oppgaven (se vedlegg 7 for mer om Simsonlinja, og vedlegg 10 for transkripsjon av elevintervju).

Svein: *Du ser jo at det likner veldig på en Simsonlinje, nettopp fordi at du ser at hvis du fjerner et punkt, så har vi en trekant, og så har vi normalene ned på hver av sidene…*

Her legger vi merke til at Sveins løsning krever en *analyse* av problemet. Hvis de fire punktene ligger på samme linje, hvilke egenskaper vil da figuren kjennetegnes av? Oppgaveteksten oppgir mange rette vinkler, og ved å tegne disse inn i figuren, gjenkjenner Svein Simsonlinja. Videre ser vi et lite innslag av å jobbe baklengs: Vi vil ende opp med å vise at vi har en rett linje; vi lurer på om det er en Simsonlinje; hva må vi gjøre for å vise det?

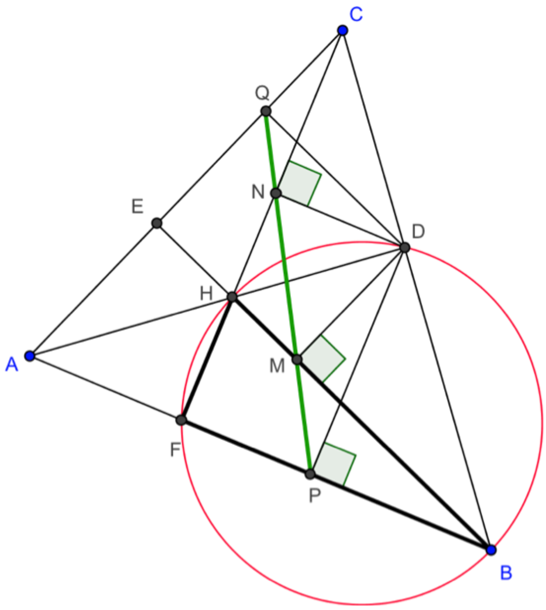


Figur 4.22 Firkant *HDCE* er syklisk.

Svein tegner inn ortosenteret H på figuren og forklarer at han bare trenger å vise at D ligger på omsirkelen til $\triangle HEC$ for å konkludere med at Q, N og M ligger på Simsonlinja til D med hensyn på $\triangle HEC$ (se figur 4.22) og tilsvarende vise at D befinner på omsirkelen til $\triangle BFH$ for å fastslå at N, M og P ligger Simsonlinja til D med hensyn på $\triangle BFH$ (se figur 4.23).

Oppgaven reduserer seg dermed til å forklare at $\square HDCE$ er syklisk, og tilsvarende at $\square HFBD$ er syklisk.

Svein: *Da ser jeg på* $\triangle HEC$ *og* $\triangle BFH$. *Så vil jeg vise at* D *ligger på omsirkelen til begge dem da, og da var det jo* 90° *der [peker på* $\angle HEC$ *] og* 90° *der [peker på* $\angle CDH$ *], og samme her [peker mot syklisk* $\square HFBD$*].*



Figur 4.23 Firkant *HFBD* er syklisk.

Svein jobber målrettet – han vet hva han vil fram til, og han gjengir løsningen sin uten å nøle. De rette vinklene i dette problemet gjør det til en grei sak å begrunne at firkantene $\square HDCE$ og $\square HFBD$ er sykliske. At alle de *fire* punktene må ligge på samme linje (ettersom vi har vist at Q, N og M ligger på én linje, samt at P, N og M ligger på én linje) framstår tilsynelatende som så opplagt at Svein ikke en gang nevner det – jeg kommer heller ikke på å spørre om det. Vi kan legge merke til at Svein ikke er usikker på om han har fått til oppgaven; han *vet* at han er i mål, noe som ifølge Schoenfeld (1989) kjennetegner ekspertens verifiseringsfase.

Vi har sett at matematikkdidaktikere framhever hypotesedannelse som et viktig moment for gjøre bevisføring meningsfullt (Borgersen, 1994; Cirillo & Herbst; 2012; Driscoll, 2010; Furinghetti et al., 2001; Mason & Davis 1991). Konkurranseoppgavene vektlegger tilsynelatende ikke hypotesedannelse – skal man konkurrere om å finne løsninger, må det være klart hva man prøver å komme fram til. I denne oppgaven skal elevene bevise at fire punkter ligger på linje; det som skal bevises er altså allerede gitt. Likevel er denne oppgaven et godt eksempel på at elementer av hypotesedannelse kan skjule seg i konkurranseoppgavene. Svein finner *selv* en hypotese når han lurer på om linja er en Simsonlinje. Han må så bevise den hypotesen han har funnet.

Sveins løsning er elegant, men krever en solid kunnskapsbase, særlig i forhold til sykliske firkanter (som er et nøkkelmoment i denne løsningen) og også den noe mer spesielle Simsonlinja. Dette er kunnskaper som er presentert for alle elevene på problemløsningsleiren gjennom undervisningen, men Svein er den eneste av elevene i utvalget mitt som er godt vant til denne type oppgaver. Det viser seg da også at ingen av de andre (av disse fem elevene) kommer fram til en løsning i løpet av de to timene de har til rådighet, noe som sannsynligvis skyldes at Simsonlinje og sykliske firkanter er nytt stoff for dem. Det er ikke «godt forankret» i kunnskapsbasen deres ennå. Dette samsvarer ikke helt med resultatene fra spørreundersøkelsen der fire av fem svarer at de *ofte* bruker sykliske firkanter for å finne vikler. Denne uoverensstemmelsen kan kanskje forklares med at spørreskjemaet ble delt ut *etter* at elevene hadde jobbet med oppgavene (og etter at disse var gjennomgått), slik at elevene nettopp hadde blitt fortalt – og nettopp hadde erfart! – at sykliske firkanter er et av de mest nyttige redskapene vi har for å finne vinkler i geometriproblemer.

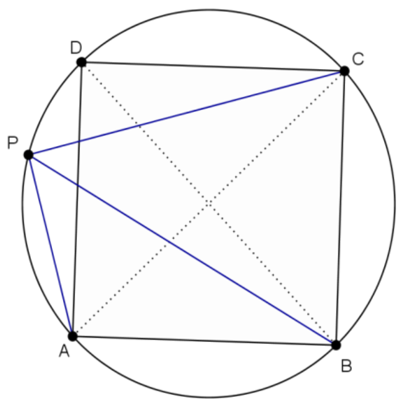
Det er fint mulig å løse oppgaven uten å bruke Simsonlinja (se alternativ løsning i vedlegg 3). Jeg har imidlertid ikke klart å finne en løsning som ikke anvender sykliske firkanter.

Jeg utfordret også elevene i en Abel-gruppe ved en videregående skole til å løse dette problemet etter å ha gjennomgått en kort PowerPoint-presentasjon der jeg bl.a. introduserte sykliske firkanter. Ingen kom imidlertid fram til en løsning. Det kan bl.a. skyldes at ingen av elevene hadde hørt begrepet «syklisk firkant» tidligere. Det må dermed være riktig å si at heller ikke for disse elevene var dette stoffet godt nok forankret i kunnskapsbasen til at de klarte å gjøre bruk av det. (Det bør kanskje også gjentas at sykliske firkanter ikke var noe hoved-tema i PowerPoint-presentasjonen. Den inneholdt først og fremst nyttige tips til geometrioppgavene i Abelkonkurransens runde 1.)

PROBLEM 2, LØSNING 1

I settet av geometriproblemer på treningsleiren ble dette gitt som nummer 4. Jeg velger imidlertid å kalle det «problem 2» da det er det andre problemet jeg gjengir herfra:

> Let $\square ABCD$ be a square. If P is a point on the circumcircle of $\square ABCD$ which lies on the arc AD, prove that the value $\frac{(PA+PC)}{PB}$ does not depend on the position of P.



Figur 4.24 Problem 2.

Vi skal altså vise at $\frac{PA+PC}{PB}$ er konstant, uavhengig av hvor på buen AD punktet P er plassert.

Marie forklarer løsningen sin på denne måten:

Marie: *Jeg tenkte jeg ville (…) finne en eller annen sammenheng som inneholdt de sidene [peker på PA, PC og PB] i tillegg til noen sider jeg kunne gjøre noe med, (…) sidene i kvadratet og diagonalen (…) og da ser jeg på den firkanten [peker på $\square ABCP$] så inneholder jo den de sidene jeg kan gjøre noe med, og da er jo den [peker på PB] diagonalen. Så alle de sidene jeg <u>har lyst til</u> å gjøre noe med eller <u>kan</u> gjøre noe med, inngår jo i (…) Ptolemeo, så det kom egentlig ganske av seg sjøl.*

Marie viser oppgavearket sitt der hun har notert at $\square ABCP$ er syklisk, så ved Ptolemeos teorem har vi $(PA)(BC)+(AB)(PC)=(PB)(AC)$

Hun skriver uttrykket om for å få noe som likner mer på det hun skal fram til:

$$\frac{PA\cdot BC+PC\cdot AB}{PB}=AC$$

Nå kaller hun siden i kvadratet for x og diagonalen for $x\cdot\sqrt{2}$ og får:

$$\frac{PA+PC}{PB}\cdot x=x\cdot\sqrt{2}$$
$$\frac{PA+PC}{PB}=\sqrt{2}$$

Vi ser at Marie er opptatt av å finne en sammenheng som inneholder både de størrelsene oppgaveteksten spør etter og de størrelsene hun vet noe om. Å spørre seg selv: *Hva vet jeg? Hva vil jeg vite?* er i seg selv en nyttig strategi i geometrioppgaver, (og med utgangspunkt i de to spørsmålene jobber man så henholdsvis forfra eller bakfra mot en løsning).

Marie innrømmer imidlertid at hun lenge stod fast på denne oppgaven. Hun tegnet opp figuren, men visste ikke hva hun skulle prøve for å komme videre. Hun forteller at hun har pleid å unngå geometrioppgaver – hun syns de er vanskelige, og kombinatorikk og tallteori appellerer mer.

Det er først etter et tips fra læreren (om at denne oppgaven likner på en de har gjennomgått i undervisningen) at hun ser at Ptolemeos teorem inneholder både de sidene hun har *lyst til* å gjøre noe med $(PA,\ PC\ og\ PB,$ dvs. linjestykkene som inngår i oppgaveteksten) og de sidene hun *kan* gjøre noe med $(AB,\ BC\ og\ AC,$ dvs. sidene og diagonalen i kvadratet). Her er det viktig at hun har *analysert* oppgaven godt nok til å ha oversikt over hva hun vet, og hvor hun vil hen. Hun benytter seg av det vi allerede har sett at er en mye brukt strategi – *tilordne variabler slik at du kan løse en likning* – og opplever at nå kommer løsningen av seg selv.

Også Svein har løst denne oppgaven ved hjelp av Ptolemeos teorem. Han uttrykker at han synes oppgaven var lett fordi den «likner på Ptolemeo». Det tyder på at han har klart å analysere oppgaven før han har gitt seg i kast med implementeringsfasen (jf. Schoenfeld (1989)). Svein viser også god evne til analog tenkning (jf. Pólya (1957)) der kunnskaper eller strategier fra problemer han har løst før, brukes i nye problemer. Vi kan også trekke fram Gorodetsky og Klavirs (2003) påpekning av at talentfulle elever gjerne ser et problem som et spesialtilfelle av en generell løsningsstruktur.

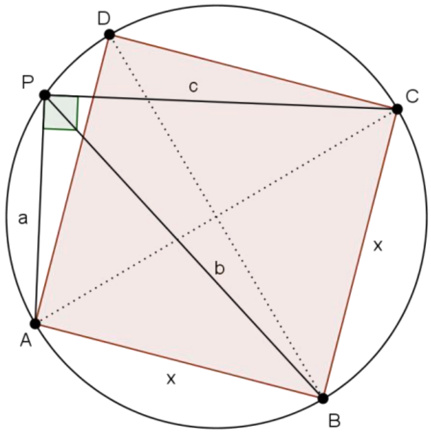
I motsetning til i problem 1 ser vi at også Marie (i tillegg til Svein) klarer å anvende den sykliske firkanten i problem 2. Selv om sykliske firkanter – med Schoenfelds terminologi – ikke ligger lett tilgjengelig i kunnskapsbasen hennes, kommer hun likevel i mål med oppgaven. Det er imidlertid verdt å nevne at det er adskillig lettere å utnytte at vi har en syklisk firkant i denne oppgaven enn i den forrige fordi den sykliske firkanten her er gitt i oppgaven, eleven trenger ikke *finne* den. Likevel må elevene fra Abel-gruppa melde pass også i denne oppgaven. Det skyldes nok både manglende erfaring med denne type problemløsning i geometri (jf. Lester (1994)), men også at de ikke har fått tilgang til den undervisningen elevene på treningsleiren har fått delta i – bl.a. en gjennomgang av Ptolemeos teorem. Som påpekt i teoridelen i denne studien er *fagkunnskap* i geometri en viktig forklaringsvariabel for elevenes evne til å finne løsninger på geometriproblemer (Chinnappan et al., 2012; Pólya, 1957; Schoenfeld, 1992; Steiner & Carr, 2003).

PROBLEM 2, LØSNING 2

Kenneth er heller ikke vant til å benytte hverken sykliske firkanter eller Ptolemeos teorem, og han finner i stedet sin egen løsning på denne oppgaven. Kenneth forklarer at det første han legger merke til, er at uansett hvor på sirkelbuen han plasserer punktet $P,$ så blir $\angle APC = 90^\circ$ pga. Thales teorem. Han kaller siden i kvadratet for x og diagonalen for $\sqrt{2}\,x.$ Lengdene oppgaven spør etter $(PA,\ PB$ og $PC)$ kaller han henholdsvis a, b og $c.$ Han ser at han kan uttrykke en sammenheng mellom a og c og diagonalen i kvadratet ved hjelp av Pythagoras-setningen, men han forteller at han strevde med å finne en sammenheng som inkluderte $b.$ Det er når han innser at periferivinkel-setningen gir at $\angle APB = \angle BPC = 45^\circ,$ at han kommer videre med oppgaven.

Når Kenneth blir stående fast, gjør han som bl.a. Pólya (1957) har anbefalt: Han fokuserer på den informasjonen i oppgaveteksten som han foreløpig ikke har klart å gjøre bruk av.

Kenneth: *Jeg måtte jo få med meg den siden [peker på b] på en eller annen måte. Og da kom jeg ingen vei før jeg så at vinkelen var jo 45°, og da skjønte jeg at jeg kunne bruke cosinussetningen.*



Figur 4.25 Problem 2, løsning 2.

Å innse at $\angle APB = \angle BPC = 45^\circ$ krever at han kjenner til at diagonalene i et kvadrat krysser hverandre i 90° (for da har vi at de to periferivinklene $\angle APB$ og $\angle BPC$ begge spenner over samme bue som en sentralvinkel på 90°). At han også vet at $\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gir ham nå to sammenhenger som han vet han kan jobbe videre med. Sammen med den tidligere nevnte Pythagoras-setningen har han nå følgende likninger, (her ser vi altså igjen at å tilordne variabler og løse likninger er nyttig i geometriproblemer):

1. $a^2 + c^2 = 2x^2$
2. $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 45$
3. $x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 45$

Ettersom likning 1 gir ham et uttrykk for $2x^2$, mens likning 2 og 3 begge gir ham et uttrykk for x^2, får han videre:

Kenneth: *Siden der har jeg $2x^2$, [peker på likningen $a^2 + c^2 = 2x^2$] og der har jeg x^2, [peker på de to likningene med x^2] så vil det si at $a^2 + c^2$ er lik alt det der [peker på de to uttrykkene for x^2] Så når vi slår det sammen får vi $a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos 45 - 2bc\cos 45$ [skriver mens han snakker]. a er på begge sider, og c er på begge sider, så de går vekk. Så kan vi flytte de [peker på de to leddene med cosinus] over på andre siden for å få de til å bli positive, så får vi $2b^2 = 2ab\cos 45 + 2bc\cos 45$ [skriver mens han snakker] og cosinus til 45 er jo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ som vil si at $2b^2$ blir lik (…) $\sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,bc$. Så deler vi på b over det hele, og da får vi $2b = \sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,c$. Og når vi da setter det inn i (…) ja (…) ja, så deler vi på 2 først selvfølgelig, så da får vi at $b = \frac{\sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,c}{2}$. Og når vi da setter det inn i $\frac{a+c}{b}$ som er det du får ut av $\frac{PA+PC}{PB}$ med mine bokstaver, så får vi $a+c$ delt på det styret der [peker på $b = \frac{\sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,c}{2}$] som ender opp med å bli $\sqrt{2}$.*

Oppsummert blir utregningen:

$$
\begin{aligned}
a^2 + c^2 &= a^2 + b^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos 45 - 2bc\cos 45 \\
2b^2 &= 2ab\cos 45 + 2bc\cos 45 \\
2b^2 &= \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,bc \\
2b &= \sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,c \\
b &= \frac{\sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,c}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{PA + PC}{PB} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+c}{\frac{\sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,c}{2}} = \frac{2(a+c)}{\sqrt{2}\,(a+c)} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}
$$

Kenneth kommenterer selv at denne løsningen bør være grei for elever som husker cosinussetningen fra 1T, og som ellers har R1-kunnskaper i geometri. Men når han diskuterer oppgaven med Marie og ser hvor lett den blir ved hjelp av Ptolemeos teorem, syns han det blir for dumt å bruke en så komplisert løsningsmetode som den han selv har valgt. Flere elever deltar i en diskusjon omkring oppgaven rundt lunsj-bordet denne dagen:

Kenneth: *Problemet med å bruke en sånn oppgave som dette [problem 2] i R1, er at om du får oppgaven når du nettopp har lært om Ptolemeo, så blir det alt for lett.*

Elev: *Jeg tror en flink elev ville likt det. Du får lære noe nytt, og så får du se at det virker.*

Elevene er enige om at de oppgavene de utfordres med i forbindelse med denne treningsleiren i problemløsning, er adskillig vanskeligere enn det de har opplevd i skolen:

Marie: *Jeg syns dette er veldig tungt i forhold til det jeg lærte på skolen.*

Intervjuer: *Dette er mye tyngre?*

Marie: *Ja, veldig mye tyngre.*

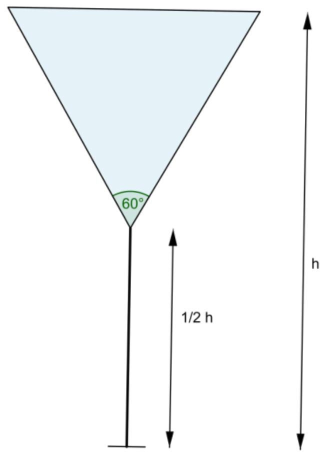
Intervjuer: *Hadde det vært kjekt å ha noe sånt som dette på skolen?*

Marie: *[med ettertrykk] <u>Ja, helt klart</u>.*

Svein: *<u>Ja</u>*

EKSTRAOPPGAVE

Ettersom de to problemene fra treningsleiren viste seg å bli noe vanskelige for elevene i Abel-gruppa, fikk denne elevgruppen, som nevnt i metodekapittelet, en «ekstraoppgave» i form av en noe lettere problemløsningsoppgave. Oppgaven er lettere først og fremst fordi løsningen ikke krever bruk av kunnskaper som ligger utenfor det vi normalt jobber med i videregående skole (slik som sykliske firkanter, Simsonlinje og Ptolemeos teorem). Den er interessant bl.a. fordi den kan løses med typiske «Abel-strategier» som å «trekke smarte linjer» og bruke det vi vet om «spesielle trekanter». Men den kan også løses ved hjelp av typisk «R1-stoff» – i dette tilfellet vinkelhalveringslinja og eventuelt også medianen som geometrisk sted. Oppgaven lyder:



Figur 4.26 Ekstraoppgave. Hentet fra Georg-Mohr-konkurransen1994.

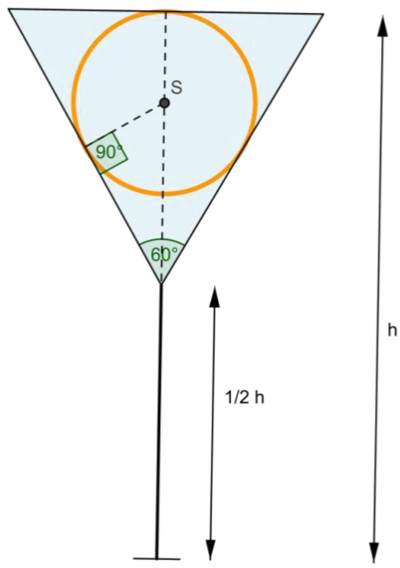
Et glass har tverrsnitt som vist på figuren. Glasset er sånn at en kuleformet appelsin med radius 3 cm akkurat kan være i glasset uten at noe av appelsinen viser over kanten. Hvor høyt er glasset?

Forklar hvordan du/dere tenkte for å løse oppgaven. Finner dere mer enn én måte å løse oppgaven på? Fint hvis dere nevner hva dere tenkte først, osv. (Bruk gjerne baksiden av arket.)

To elever samarbeider om denne løsningen:

> *Ser på appelsinen som en innskrevet sirkel.*
> *Tangeringsvinkelen mellom glass og appelsin er* 90°.
>
> *Får* $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ *-trekant med minste katet lik* $3\,cm$. *Finner hypotenusen og finner lett høyden:* $h = 18\,cm$.

Her ser vi en typisk løsning av en Abel-oppgave. Elevene har trukket den «smarte linja», radien, fra sentrum av sirkelen ut til et av tangeringspunktene. Det er mulig, men ikke nødvendig, at elevene her har tenkt at sentrum i innsirkelen er skjæringspunktet for vinkelhalveringslinjene. (De kan ev. ha funnet 30° -vinkelen ut fra symmetrien i figuren.) Nå utnytter de at i en $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ -



Figur 4.27 Ekstraoppgave løsning 1. Gjengitt etter elevtegning. (Elevene fikk en figur av meg og tegnet løsningen sin inn i den sammen med en forklaring av hvordan de hadde tenkt).

trekant er minste katet halvparten så lang som hypotenusen, og opplever dermed at de «finner lett høyden».

Den neste løsningen er i prinsippet lik den forrige, men eleven er tydeligere på at han bruker vinkelhalveringslinja som geometrisk sted. Eleven skriver:

Toppen av glasset utgjør en likesidet trekant.

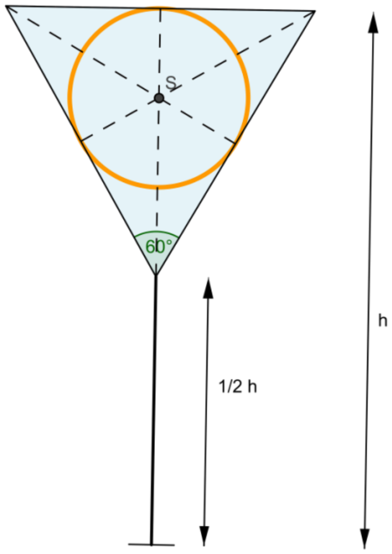
Appelsinen når til toppen av glasset, og er i alle sidene i glasset $\Rightarrow$ *innskreven sirkel.*

Innskreven sirkel $\Rightarrow$ *halveringslinjene krysses i appelsinens sentrum.*

Tar for meg en $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$*-trekant hvor høyden fra sentrum av appelsinen til bunnen av trekanten blir* $2r$. *Til toppen gjenstår* r.

Altså:

$$\frac{1}{2}h = 3r \Leftrightarrow h = 6r$$
$$h = 18$$

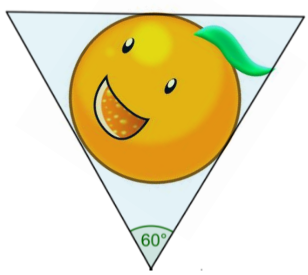


Figur 4.28 Ekstraoppgave løsning 2. Gjengitt etter elevtegning.

Vi ser at eleven utnytter det han har lært i R1 om vinkelhalveringslinjene i en trekant. Oppgaven framstår dermed som en konkurranseoppgave som kan passe godt inn i den «vanlige» undervisningen i forbindelse med gjennomgang av vinkelhalveringslinjer og innsenter i trekanter.

(En siste løsning fra Abel-gruppa i denne oppgaven anvender tangens (se vedlegg 4). Denne løsningen bruker indirekte at vi har en 30-60-90-trekant.)

Ingen av elevene utnytter at ettersom vi har en likesidet trekant, vil vinkelhalveringslinjene også være *medianer*, og S er altså også medianenes skjæringspunkt. Det er mulig dette skyldes at de ikke har regnet like mange oppgaver med medianer. Medianer er imidlertid sentralt R1-stoff (skjønt oppgaveanalysene jeg har gjort viser at de ikke dukker opp ofte i (eksamens)oppgavene). Selv om elevene i studien min ikke selv trekker inn medianer i denne oppgaven, vil det kunne kommenteres av læreren, slik at oppgaven kan fungere som et eksempel på hvordan også medianene kan komme til nytte i oppgaveløsning:



Vi vet at medianene skjærer hverandre i forholdet 2:1 regnet fra hjørnene, altså er avstanden fra S til et hjørne lik $2r$. Det følger at trekanten har høyde 9, og høyden av glasset er 18.

5. DISKUSJON

Jeg vil her prøve å samle trådene og få et overblikk over det materialet som er analysert. Det er tid for å «sette sammen delene» – etter analyse følger syntese (Stake, 2010).

5.1 KONKURRANSEOPPGAVER OG KOMPETANSEMÅL

Med utgangspunkt i forskningsspørsmålet

Hvordan samsvarer konkurranseoppgaver i geometri – samt elevers strategier i løsningsprosessen av disse – med kompetansemål for matematikkfaget i videregående skole?

har vi sett at vi kan finne et samsvar mellom konkurranseoppgaver i geometri og kompetansemål i R1 *på noen områder*. På andre områder viser analysene mine et klart «ikke-samsvar». Jeg vil først framheve de områdene der konkurranseoppgaver ser ut til å møte kompetansemål.

Tabell 5.1 kan leses som en oppsummering av oppgaveanalysene fra forrige kapittel. Her prøver jeg å gi en oversikt over oppgaver fra det materialet jeg har analysert som kan knyttes til spesifikke kompetansemål fra geometridelen i kurset R1. Da jeg først startet denne undersøkelsen, var det nettopp en slik modell jeg forventet å ende opp med – mange andre momenter har imidlertid dukket opp underveis. Ifølge analysen finner vi liten grad av samsvar mellom Abel-oppgaver fra de innledende rundene og eksamensoppgaver fra R1. Tabell 5.1 gir likevel tips om oppgaver herfra som *kan* være egnet til å belyse deler av det R1-elever forventes å lære; selv om det kanskje ikke er så

Geometriproblemer, konkurranser og kompetansemål					
Formlikhet	Formlikhet	Periferivinkel-setningen	Thales Teorem	Omsenter/ Midtnormaler	Innsenter/ vinkelhalv.linj.
A1_2012/13_16	A2_2009/10_7	A1_2011/12_19	A2_2012/13_7	A2_2004/05_8	AF_2011/12_2a
A1_2008/09_8	A2_2006/07_3	A2_2008/09_3	A2_2004/05_8	AF_2012/13_2	AF_2005/06_4
A1_2008/09_11	A2_2005/06_6	AF_2004/05_3	AF_2003/04_3a	AF_2007/08_4	IMO_2012_1
A1_2007/08_11	AF_2011/12_2b	AF_2003/04_3a	IMO_2012_1	AF_2005/06_4	IMO_2009_4
A1_2006/07_18	AF_2009/10_1	IMO_2012_1	IMO_2009_4	AF_2003/04_3a	IMO_2007_4
A1_2005/06_14	AF_2006/07_2b	IMO_2010_4		IMO_2008_1	IMO_2006_1
A1_2003/04_19	AF_2004/05_3b	IMO_2006_1		IMO_2007_4	
A2_2011/12_9	IMO_2008_1			IMO_2006_1	
A2_2010/11_9	IMO_2007_4				

Tabell 5.1 Kompetansemål, R1, i konkurranseoppgaver i geometri.

A1 = Abel runde 1 A2 = Abel runde 2 AF = Abel Finale IMO = International Mathematical Olympiad

F.eks.: A2_2011/12_9 betyr: Abel runde 2, 2011 – 2012, oppgave 9.

mange slike oppgaver, så finnes det *noen*. For lærere som ønsker å bruke mer problemløsnings-oppgaver, kan dermed tabell 5.1 gi god hjelp til å finne relevante geometriproblemer. Pólya (1957) mener som kjent at problemløsning er det viktigste en lærer kan tilby sine elever, og vi har sett at problembasert matematikkopplæring kan bidra til mer positive holdninger og engasjement for matematikkfaget (Clarke et al., 2004; Botten, 2003). I en travel skolehverdag er det imidlertid ikke alltid så lett for læreren å finne tid til å lete fram gode problemer, og da kan en oversikt som tabell 5.1 ha en betydelig nytteverdi.

Fra de problemene elevene i studien min har jobbet med, finner vi bruk av sentralt R1-stoff både i Kenneths løsning av problem 2 (periferivinkelsetningen og spesialtilfellet Thales teorem) og i ekstraoppgaven (vinkelhalveringslinjene og medianene i en trekant). Dette er eksempler på at konkurranseoppgaver i geometri kan belyse og utdype det stoffet som gjennomgås i lærebøkene i R1.

Problemer fra finalene – både Abel og IMO – er også inkludert i tabell 5.1 selv om de nok er for vanskelige for de fleste elevene. I skolen har vi imidlertid mulighet til å la elevene utforske disse oppgavene med et helt annet sett av hjelpemidler enn det deltakere i konkurranser har tilgang til. For det første kan elevene gis mer *tid* (både på skolen og hjemme), de kan få lov til å *samarbeide*, og de kan gjerne bruke *dynamisk programvare* (f.eks. GeoGebra). Jeg har i teoridelen av denne studien nettopp påpekt at geometriproblemer er velegnet til samarbeid (Bjuland, 2004; Borgersen, 1994) og også at bruk av dynamisk programvare kan være med på å fremme elevenes evne til geometrisk tenkning (Patsiomitou & Emvalotis, 2010).

IMO-problemene i tabell 5.1 er alle gitt som oppgave 1 eller 4 – de letteste problemene i konkurransen. De er likevel særdeles krevende, men til tross for dette bygger de i relativt liten grad på *kunnskaper* som det ikke kan forventes at R1-elever har. Kunnskapene må imidlertid anvendes på en kreativ måte. Det er også enkelte grunnleggende geometriemner som sannsynligvis er ukjente for elevene våre, og som de trenger å bli fortrolige med dersom de ønsker å prøve seg på disse oppgavene, f.eks. punktets potens og sykliske firkanter. Her kan jeg nevne at punktets potens gjennomgås i *Sinus R1* (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch, & Hals, 2008), mens begrepet syklisk firkant ikke introduseres i noen av lærebøkene. Dette kommer jeg tilbake til i avsnitt 5.3.

Noen vil kanskje mene at vanskelighetsgraden er stor også i problemer fra de innledende Abel-rundene. Dette bekreftes til en viss grad av analysene jeg har gjort. Konkurranseoppgavene fra runde 1 og 2 krever stort sett ikke flere geometrikunnskaper enn det som gjennomgås i løpet av ungdomsskolen. De kan likevel oppleves som vanskelige nettopp fordi de er problemer – eleven kan ikke følge en forhåndsgitt *metode* for å komme fram til en løsning (jf. Schoenfelds definisjon av et matematisk problem). Her vil jeg kommentere at Bjuland (2004) fant at selv relativt svake studenter klarte å løse vanskelige geometrioppgaver ved å samarbeide. Vi kan dessuten trekke fram at elever som ikke har opplevd å bli «kreativt frustrerte og inspirerte», heller ikke har opplevd matematikk (Lockhart, 2009). Hvis vi skal ta denne påstanden fra Lockhart på alvor, tyder uttalelser fra elever i studien min på at de ikke får nok anledninger til å «oppleve matematikk» i skolen. Det bør også nevnes at elever utvikler problemløsningsevnen sin ved å jobbe med problemer (Lester, 1994; Young, referert i Morera, Rue, & Alet, 2012). Skolen har et ansvar for at *alle* elever – både de som strever, og de som kan defineres som talentfulle – gis muligheter til å videreutvikle *sin* problemløsningsevne. Kanskje skylder vi å gi noen utfordringer også til de flinkeste?

Læreren trenger ikke nødvendigvis å bruke problemløsningsoppgavene i samlet klasse. Noen av dem kan kanskje egne seg spesielt for de elevene som trenger ekstra utfordringer. Elevene i undersøkelsen min er samstemte i at de ønsker seg flere problemer av den typen de jobber med i matematikkonkurranser inn i skolen. Da kan tabell 5.1 gi læreren oversikt over geometriproblemer som samsvarer med aktuelle kompetansemål.

5.2 HVA ER MATEMATIKK?

«Hva er matematikk?» kan oppleves som et pretensiøst spørsmål. Jeg har da heller ikke ambisjoner om å svare på det. Jeg ønsker imidlertid å se på noen aspekter ved det knyttet til de analysene jeg har gjort.

5.2.1 KREATIVITET

Jeg har påpekt at i Abel-oppgavene må eleven selv finne «smarte linjer» – linjer som er nyttige å trekke opp for å komme fram til en løsning. Samtidig mener jeg å se en tendens i eksamens-oppgavene (R1) til å ville hjelpe eleven på vei ved å presentere disse linjene for elevene. Mens konkurranseoppgavene krever at eleven *finner ut* hva han/hun skal gjøre, dreier eksamensoppgavene seg om å gjøre det man får beskjed om. Vil vi ha det slik?

Lockhart (2009) sier at matematikk *ikke* handler om å følge regler – det handler om å skape dem. Selv om dette utsagnet nok er litt satt på spissen, kan vi kanskje si at dersom det er et snev av sannhet i det, så tyder analysene mine på at konkurranseoppgavene viser mer av matematikkens vesen enn det eksamensoppgavene evner å gjøre.

Innledningsvis presenterte jeg det jeg kalte «et sentralt underspørsmål» i forskningsarbeidet mitt: «Har skolen noe å lære av konkurransematematikken, og i tilfelle hva?» Her er vi kanskje inne på et punkt der skolen kan dra lærdom av konkurransematematikken. Visst trenger vi både innlæringsoppgaver, øvingsoppgaver og repetisjonsoppgaver. Men kanskje trenger vi problem-løsningsoppgaver også. Kreativitet er et viktig stikkord for de forskjellene jeg finner mellom konkurranseoppgavene og eksamensoppgavene. Det skal innrømmes at eksamensoppgavene ikke nødvendigvis gjenspeiler hverken lærebøker eller eventuelle aktiviteter som finner sted i matematikkopplæringen. Det er en svakhet ved undersøkelsen min at jeg ikke er til stede i timene for å se hva som faktisk skjer der. I stedet for å kritisere matematikkfaget i skolen for mangel på kreative oppgaver, vil jeg derfor heller framheve konkurranseoppgavene som en *mulighet*. Her kan lærere finne en rik kilde til problemer som inspirerer elevene til å være kreative. Hvis læreren opplever at den vanlige undervisningen dekker dette behovet – flott – men lærere som *ønsker* det, har mulighet til å finne flere «kreative oppgaver» ved å se til konkurransematematikken. Kanskje kan også våre elever få et glimt av det både matematikere og deltakere i matematikkonkurranser uttrykker: Matematikk er en kunst! (Hardy, 1941; Lockhart, 2009; Mackenzie; 2001; Olson, 2004)

5.2.2 DEDUKTIV TENKNING

Både eksamensoppgavene i R1 og finaleoppgavene i Abel fokuserer på bevis. Matematikkdidaktisk forskning ser imidlertid ut til å vise at mange elever strever med den deduktive tenkning som ligger til grunn for bevis (Chazan, 1993; Furinghetti et al, 2001; Herbst & Brach, 2006; van Hiele 1989; Hoffer, 1981). Vi har sett at van Hiele-teorien er en forklaringsmodell innenfor geometri som kan belyse noen av disse vanskelighetene: Elever som opplever utledning av bevis som meningsløst, kan ha dårlige forutsetninger for å forstå deduktive resonnementer (van Hiele-nivå 4) på grunn av lite erfaring med de mer grunnleggende nivåene (se tabell 2.3 i kapittel 2).

Korrelasjonsanalysene jeg har utført, påviser lite samsvar mellom R1-eksamensoppgaver og geometriproblemer fra de innledende rundene i Abel. Også frekvensdiagrammene og de kvalitative analysene tilsier at det er liten grunn til å ta i bruk disse Abel-oppgavene i R1-undervisningen dersom hensikten er å gjennomgå fagstoff knyttet til kompetansemålene i geometri. (Relevante geometri-problemer i denne sammenhengen er altså unntaket heller enn regelen. De oppgavene jeg oppfatter som aktuelle er, som tidligere nevnt, framstilt i tabell 5.1.)

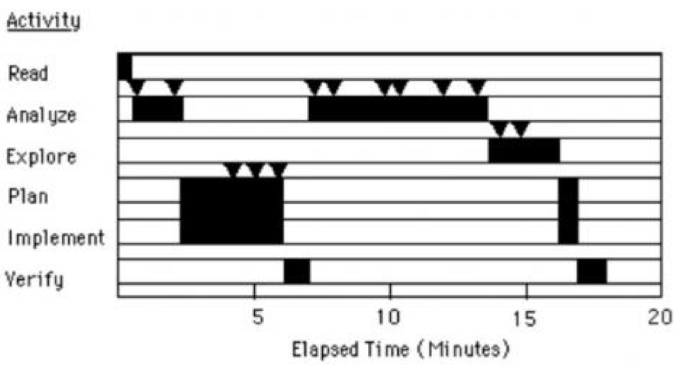
Geometrioppgavene fra runde 1 og 2 i Abelkonkurransen kjennetegnes av at eleven må ha god oversikt over egenskaper ved geometriske figurer, se geometriske sammenhenger og sannsynligvis også ha en begynnende forståelse for (uformell) deduksjon. På grunnlag av dette har jeg plassert de aller fleste av disse oppgavene på van Hiele-nivå 3.

Jeg har gjennomgått forskning som tyder på at elever som følger japanske lærebøker får hjelp til å jobbe seg suksessivt og opp gjennom van Hiele-nivåene. I USA ser det ut til at denne delen av matematikkopplæringen er mer usystematisk, og at særlig oppgaver på van Hiele-nivå 3 er nesten fraværende (Whitman et al., 1997). Jeg har dessverre ikke funnet nyere forskningsstudier som kan vise om eventuelle endringer i amerikanske læreverk de senere årene viser igjen i elevenes geometriforståelse. Poenget mitt er imidlertid ikke å gi en tilstandsrapport for amerikansk skole. Derimot gir de nevnte forskningsresultatene en interessant pekepinn om sammenhenger mellom undervisning/lærebøker og elevers geometriske tenkning uttrykt ved hjelp av van Hiele-nivåene. Denne sammenhengen er nyttig også for vår norske skolehverdag. Forskernes råd om å la elevene få et tilstrekkelig grunnlag fra nivå 2 og 3 før en forventer at de skal klare å formulere formelle bevis (Pusey, 2003; Senk, 1989; van Hiele, 1989), er verd å få med seg. Her kan vi legge merke til at Abel-oppgavene fra de innledende rundene representerer et stort potensiale for å tilby elevene våre geometriproblemer på van Hiele-nivå 3, og dermed legge et nødvendig fundament for forståelse for bevis. Det er ikke sikkert denne bruken av Abel-oppgaver hører hjemme i R1-sammenheng; kanskje bør vi finne rom for dem på et tidligere stadium i elevenes matematikkopplæring. Ved å jobbe med oppgaver på van Hiele-nivå 3 kan dermed elevene ha bedre forutsetning for å mestre deduktiv tenkning når de kommer fram til R1.

5.2.3 PROBLEMLØSNING OG STRATEGIER

Jeg har gjennomgått flere problemløsningsmodeller (Borgersen, 1994; Mason et al., 1985; Pólya, 1957; Schoenfeld, 1989). Det er som nevnt forskjeller i hvor mange faser forskerne velger å dele løsningsprosessen inn i, men alle starter med en form for forståelse av problemet/analyse. Jeg har ikke observert elevene «mine» gjennom problemløsningsprosessen, og har derfor heller ikke gode nok data til å sette opp tabeller a la Schoenfeld. Mitt valg av bare å intervjue elevene om oppgaver de allerede har løst, viser særlig igjen i mangelfull informasjon om utforskningsfasen. I intervjuene med elevene mener jeg imidlertid å se tydelige spor av en grundig *analysefase*. Dette indikerer en løsningsprosess som i hvert fall i noen grad kan sammenliknes med matematikerens (se figur 2.4, som for enkelhets skyld er gjengitt også her). Også mer omfattende forskning påpeker at talentfulle elevers analytiske tilnærming til problemløsningsprosessen kan sammenliknes med den profesjonelle matematikerens (Gorodetsky & Klavir, 2003; Sriraman, 2004).

Matematiker som jobber med et vanskelig problem:



Figur 2.4

Ikke overraskende starter elevene vanligvis et geometriproblem med å tegne en figur, og de er nøye med å få betingelsene i oppgaven med i figuren. Den lille spørreundersøkelsen indikerer at de prøver å trekke «smarte linjer» i figuren for å komme nærmere en løsning. I dette kan vi finne elementer av både utforskning og analyse. Det gjelder også når elever tegner *forskjellige* figurer (som oppfyller betingelsene i oppgaven) og ser hvilke egenskaper som ser ut til å beholdes selv om de endrer på figuren. Her vil jeg nevne at dynamisk programvare kan gagne denne formen for utforskningsarbeid ved at eleven lett kan endre en figur bare ved å «dra i et punkt». Elevene i studien min hadde ikke anledning til å bruke denne type hjelpemidler, men i *skolen* kan vi gjøre det. Dermed kan «umulige» oppgaver bli mulige for flere elever.

Jeg har kommentert at vi kan finne nyttige hjelpe-elementer (f.eks. «smarte linjer») ved å anta problemet som løst (Schoenfeld, 1985). Dette ser vi i studien min når elevene i Abel-gruppa tegner appelsinen «på plass» i glasset og undersøker hvilke egenskaper den må ha (jf. «ekstraoppgaven»). Analogi er en annen av «Pólyas strategier» som jeg finner tydelige eksempler på når elevene på treningsleiren gjenkjenner strukturer i oppgavene og bruker problemer de tidligere har løst for å finne løsninger på nye problemer. Elevene prøver seg f.eks. fram med Ptolemeos teorem fordi problemet «likner på Ptolemeo».

I intervjuene er det påfallende at elevene *vet* når de har funnet løsningen på et problem. De er ivrige etter å sammenlikne hverandres løsninger – ikke for å validere løsningene, men for å få tips til nye måter å nærme seg problemet på. Også i undervisningen på problemløsningsleiren ble det brukt tid til å reflektere over løsningene ved å lete etter ulike løsninger. Her ser vi et samsvar med forskning som påpeker at selv om verifiseringsfasen er nærmest fraværende for flertallet av elever i videregående skole (Erbas & Okur, 2012), bruker *talentfulle* elever betydelig tid til refleksjon (Sriraman, 2003).

5.2.4 MATEMATIKK SOM PROSESS

Jeg har kommentert at særlig Borgersens problemløsningsmodell gjenspeiler *matematikk som prosess*. Lakatos (1976) klassiker *Proofs and Refutations* framhever som nevnt at matematikk utvikler seg gjennom en prosess av hypoteser, hypotesetesting, bevis/motbevis og eventuelt videre generalisering. Vi har imidlertid sett at flere matematikkdidaktikere mener at denne prosessen i liten grad preger skolens matematikkfag (Battista & Clements 1995; Cirillo & Herbst, 2012; Furinghetti, 2001; Lampert, 1993). Spesielt trekkes hypotesedannelse fram som et manglende moment i undervisningen.

Mine analyser viser at heller ikke oppgaver fra matematikkonkurranser karakteriseres av å være det vi kaller *åpne* problemer (dvs. oppgaver der spørsmålsstillingen eller resultatet ikke er helt klart på forhånd – elevene må selv formulere hypoteser). I de vanskeligste konkurranseoppgavene (finale og IMO-nivå) kan elevene likevel trenge å utarbeide og bevise (eller forkaste) flere hypoteser underveis i arbeidet fram mot en løsning (jf. Sveins hypotese om Simsonlinje). Elever som selv finner hypoteser, vil også oppleve arbeidet med bevis som meningsfullt (Cirillo & Herbst, 2012; Driscoll, 2010; Furinghetti et al., 2001; Mason & Davis, 1991).

Elevene i studien min trekker fram bevis som noe av det mest sentrale i geometriproblemer, og ingen av dem opplever det som meningsløst – slik forskere har påpekt at ofte er tilfelle i skolen (Driscoll, 2010). Dette kan selvfølgelig skyldes at jeg har undersøkt elever som i utgangspunktet lar seg engasjere av matematikk. De positive holdningene kan henge sammen med at *flinke* elever ofte får anledning til å oppleve den *glede* det kan gi å *lykkes* med å komme fram til et bevis (Borgersen & Bjuland, 2007; Lockhart, 2009).

Det er også verdt å merke seg at bevis i konkurransesammenheng alltid er knyttet til *vanskelige problemer*. Da er bevis *ikke* et ritual for å verifisere påstander en allerede vet at er sanne (jf. Driscoll (2010) og Lampert (1993)). Flere forskere har jo nettopp påpekt at bevis i større grad bør knyttes til problemløsning (Cirillo & Herbst; 2012; Driscoll, 2010; Furinghetti et al., 2001). At geometri er trukket fram som et velegnet emne til å introdusere bevis for elevene, antyder at skolen kan dra nytte av geometriproblemer også fra matematikkonkurranser i dette arbeidet.

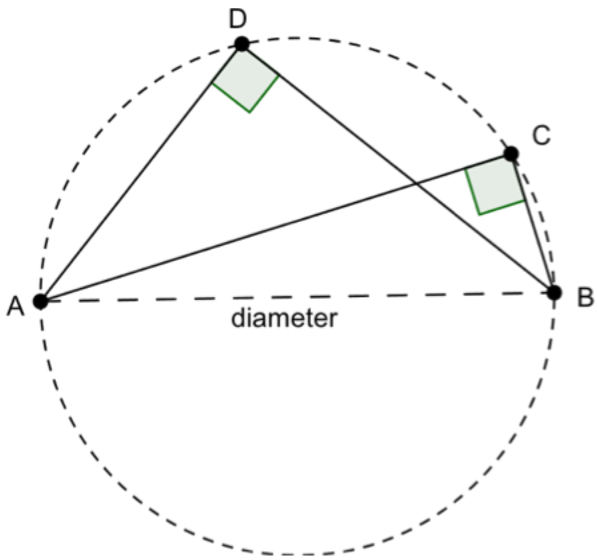
Mens noen problemløsningsoppgaver inviterer til generalisering, har andre en mer «lukket» karakter. For å finne generaliseringer kan vi ta utgangspunkt i et «hva hvis?»-perspektiv (Contreras, 2007). Egner konkurranseoppgavene seg til dette? Jeg har dessverre ikke spurt elevene «mine» om de pleier å spørre seg selv «hva hvis?» etter at de har løst et problem. I undervisningen på treningsleiren dukket imidlertid denne type spørsmål opp i forbindelse med at elevene gjennomgikk løsningene sine for hverandre. Vi ser altså at i hvert fall noen av konkurranseoppgavene har et potensiale til å få fram den matematiske prosessen – inkludert hypotesedannelse og generalisering – et resultat som samsvarer med Borgersens (1994) konklusjoner vedrørende problemløsningsoppgaver i geometri.

Nå kan det selvfølgelig også finnes oppgaver i den vanlige undervisningen som prøver å vise matematikk som prosess. R1-eksamen høsten 2009 inneholder f.eks. en geometrioppgave der elevene først blir oppfordret til å teste en hypotese ved hjelp av utforskning med dynamisk programvare. Jeg vil ikke karakterisere denne oppgaven som en problemløsningsoppgave da elevene også her utstyres med en «oppskrift» for å bevise hypotesen, men dette er likevel et positivt eksempel på at det er mulig å gjenspeile noe av den matematiske prosessen også i eksamensoppgavene.

Når kun én av elevene i utvalget mitt kommer fram til en løsning på det jeg har kalt problem 1, mener jeg dette henger sammen med manglende erfaring med sykliske firkanter. Dette er ikke overraskende. Både Pólya (1957) og Schoenfeld (1992) påpeker at på områder der vi har liten kunnskap, er det vanskelig å få en god idé. Jeg har også nevnt en studie av Chinnappan, Ekanayake og Brown (2012) der *god fagkunnskap* i geometri trekkes fram som den viktigste forklaringsvariabelen for hvorvidt elever klarer å utlede geometriske bevis.

Kompetansemålene i R1 sier at elevene skal kunne anvende periferivinkelsetningen i resonnementer og beregninger. Jeg synes sykliske firkanter hører naturlig inn her selv om ingen av lærebøkene velger å nevne dette begrepet. Det er imidlertid ikke mye ekstra som skal til for at vi kan introdusere dette stoffet også i skolen. I forbindelse med Thales setning leser vi i *Matematikk R1* (Heir, Erstad, Borgan, Moe, & Skrede 2007, s. 245):

> Det geometriske stedet for toppunktet til en rett vinkel med vinkelbein som går gjennom to punkter A og B, er sirkellinja med AB som diameter.

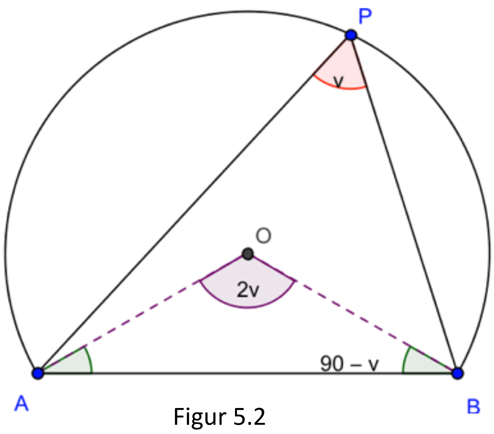


Figur 5.1

Men da *vet* vi jo at de fire punktene A, B, C og D i figur 5.1 ligger på samme sirkellinje. Vi mangler bare å *si* at da kalles $\square ABCD$ for syklisk, samt gjøre elevene oppmerksomme på hvor nyttige sykliske firkanter kan være i geometriproblemer. Når Svein løser det jeg har kalt problem 1, utnytter han nettopp den egenskapen ved sykliske firkanter som framkommer i figur 5.1: To rette vinkler som spenner over samme linjestykke AB, betyr *alltid* at vi har en syklisk firkant der AB er diameter i den omskrevne sirkelen. Rette vinkler i et geometriproblem er ofte et hint om å lete etter sykliske firkanter.

Under overskriften «Geometrisk sted for en vinkel som spenner over et linjestykke» står det i *Sigma R1* (Sandvold et al., 2007, s. 236):

> Alle punkter P som ligger slik at $\angle APB$ er lik en gitt vinkel v, ligger på en sirkel gjennom A og B, der $\angle AOB = 2v$.

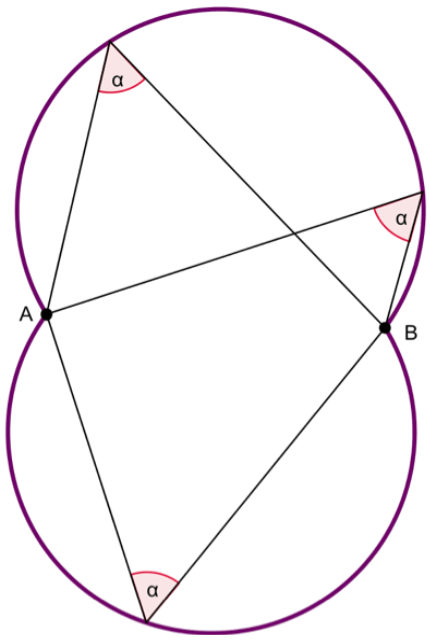


Figur 5.2

Teksten følges av en figur tilsvarende figur 5.2.

Det bør kanskje kommenteres at det geometriske stedet for alle punkter P slik at $\angle APB = \alpha$ for en fast vinkel α, strengt tatt ikke er en sirkel, men to sirkelbuer slik det er vist i figur 5.3. (Hvis vi hadde tegnet inn hele sirkelen i figur 5.2, ville en periferivinkel som spenner over AB på «den andre siden» av AB være $180^\circ - v$.)

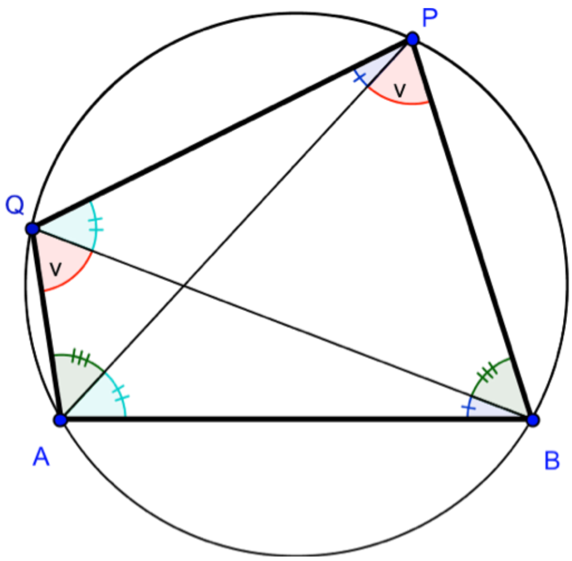
I forbindelse med sykliske firkanter er det imidlertid figuren slik den er gitt i læreboka (figur 5.2) som er viktig. Den kanskje vanligste måten å finne sykliske firkanter på er nettopp å gjenkjenne to like vinkler v som spenner over samme linjestykke AB, og som er plassert *på samme side* av det. Hvis vi tegner inn vinkel v også et annet sted på sirkelbuen i figur 5.2 (slik som i figur 5.4), så mangler vi også her bare å kommentere for elevene at vi har en syklisk firkant. Og så gjenstår det selvfølgelig å ta sykliske firkanter i bruk i geometriproblemer.



Figur 5.3

I figur 5.4 ser vi hvordan det at A, B, P og Q ligger på samme sirkel, leder til et helt kobbel av like vinkler (følger direkte av periferivinkelsetningen). Å anvende denne kunnskapen i oppgaver er nettopp å gjøre bruk av «setningen om periferivinkler i geometriske resonnementer og beregninger», noe elevene skal kunne ifølge kompetansemålene i R1.

At sykliske firkanter ligger nær det vi ellers jobber med i geometridelen av R1, gjenspeiles også i at oppgave 8, eksamen våren 2012, omhandler en syklisk firkant. Her skal elevene bl.a. bevise at summen av motstående vinkler i en syklisk firkant



Figur 5.4

er 180° – for øvrig et sentralt resultat for å *påvise* sykliske firkanter (se vedlegg 7). Oppgaven krever imidlertid ingen forkunnskaper om sykliske firkanter.

Som lærer vet jeg at vi strever med «å komme gjennom pensum». Vi kan ikke bare putte mer stoff inn i lærebøkene. Jeg vil likevel våge å si at sykliske firkanter burde være der. De er der nesten allerede. Vi har for så vidt sett at vi kan finne sykliske firkanter både i lærebøker og eksamens-oppgaver. Vi har imidlertid unnlatt å gjøre elevene oppmerksomme på at dette er et av de mest nyttige redskapene vi har for å finne vinkler i geometrioppgaver. Det fører blant annet til at de flinkeste av elevene våre må tilegne seg denne kunnskapen på egenhånd dersom de ønsker å bli med i internasjonale matematikkonkurranser. Det klarer de sikkert, selv om studien min indikerer at det først er etter en del erfaring med slike konkurranser, at oppgaver som involverer sykliske firkanter, blir tilgjengelige for elevene. Videre tyder oppgaveanalysene mine på at sykliske firkanter kan forventes å dukke opp i mer enn halvparten (67 % ifølge figur 4.5) av de «letteste» geometri-oppgavene i IMO. Dette hører altså med til de *grunnleggende kunnskapene* i (internasjonal) konkurransesammenheng.

Et annet argument for å tolke kompetansemålene i R1 slik at sykliske firkanter «er med» (det kan godt gjøres) er at det åpner porten til et helt nytt sett av spennende problemløsningsoppgaver.

Jeg mener at å utnytte sykliske firkanter i geometriske resonnementer er et nytt svar på spørsmålet jeg stilte innledningsvis: «Har skolen noe å lære av konkurransematematikken, og i tilfelle hva?»

6. KONKLUSJON

Over et halvt århundre er gått siden utgivelsen av Pólyas legendariske *How to Solve it.* Engasjementet for en mer problemfokusert undervisning har vært stort og argumentene mange. Jeg har bl.a. trukket fram at en sterkere vektlegging av problemløsning kan vekke interesse for matematikk, medvirke til relasjonsforståelse og bringe skolefaget nærmere vitenskapsfaget. Skolen kritiseres imidlertid fortsatt for å være så opptatt av pugging av metoder at det blir viktigere å huske enn å tenke.

Midt i denne store sammenhengen, eller kanskje i en liten utkant av den, har jeg prøvd å finne en plass til en bitte liten bit i det store puslespillet: Kan «nøtter» fra matematikkonkurranser være en kilde til problemløsningsoppgaver som egner seg for bruk i skolen?

Jeg har konsentrert meg om geometri i videregående skole og har valgt å fokusere på R1 ettersom geometrikomponenten er tydelig i dette kurset.

6.1 OPPSUMMERING OG RESULTATER

Hjørnesteinen i prosjektet er forskningsspørsmålet:

Hvordan samsvarer konkurranseoppgaver i geometri – samt elevers strategier i løsningsprosessen av disse – med kompetansemål for matematikkfaget i videregående skole?

Jeg vil også framheve det jeg mener er et viktig underspørsmål:

Har skolen noe å lære av konkurransematematikken, og i tilfelle hva?

For å utforske et mulig samsvar mellom konkurranseoppgaver i geometri og kompetansemål i videregående skole har jeg analysert geometriproblemer fra de ti siste årene i Abel-konkurransen. Seks av de «letteste» utfordringene fra IMO (International Mathematical Olympiad) er også inkludert. Jeg sammenlikner dessuten konkurranseoppgavene med eksamensoppgaver (R1). Kompetansemålene som danner grunnlag for analysene, er hentet fra geometridelen av kurset R1.

Videre har jeg vært til stede på en treningsleir i forkant av en matematikkonkurranse. Fem av deltakerne her fylte ut et lite spørreskjema om «problemløsning i geometri», og tre ble intervjuet om sine løsninger av to geometriproblemer. Jeg har også deltatt på to møter i en såkalt Abel-gruppe ved en videregående skole. I en slik gruppe samles elever i en av sine fritimer for å jobbe med konkurranseoppgaver i matematikk. Omkring ti elever deltok. Fire av dem leverte inn besvarelser på et lite geometriproblem.

Utgangspunktet mitt er at dersom det skal være realistisk å anvende problemer fra matematikk-konkurranser i skolen, må de kunne brukes til å belyse de kompetansemålene som danner grunnlag for matematikkopplæringen.

Jeg finner tydelige paralleller mellom geometrioppgaver gitt til R1-eksamen og finaleoppgaver fra matematikkonkurranser. Samsvaret er mindre mellom R1-oppgaver og problemer fra Abel-konkurransens innledende runder.

Et konkret resultat av studien framkommer i form av en tabell (tabell 5.1) med oversikt over konkurranseoppgaver som møter sentrale kompetansemål som formlikhet, periferivinkelsetningen (og spesialtilfellet Thales teorem), samt de viktige trekantsentrene innsenter og omsenter. Tabellen gjenspeiler at *på noen områder* finnes et klart samsvar mellom konkurranseoppgaver og kompetansemål. Jeg håper at en slik tabell kan lette arbeidet for lærere som leter etter problemløsningsoppgaver i tilknytning til disse emnene.

Elevene i studien min kan karakteriseres som flinke/talentfulle i matematikk. Deres utsagn om kunnskaper de opplever som viktige i konkurranseoppgaver, er i stor grad sammenfallende med det jeg finner i gjennomgangen av disse oppgavene. Elevene viser en løsningsprosess preget av en sterk analysefase. De gjenkjenner grunnleggende strukturer i oppgavene. Analogi er en sentral strategi som hjelper dem å analysere geometriske figurer «definert av rette linjer, trekanter og sirkler i planet» – et av kompetansemålene i R1.

Elevene kommenterer at vanskelighetsgraden er høyere i konkurranseoppgaver enn i R1-oppgaver. Analysene mine indikerer at denne forskjellen bl.a. skyldes at konkurranseoppgavene (både fra de innledende rundene og finalene) krever at elevene er *kreative* – de utfordrer elevene til å *finne ut* hva som må gjøres. For å løse eksamensoppgavene mener jeg imidlertid å se en tendens til at det holder å «gjøre det man får beskjed om». Dette illustreres med konkrete oppgaveeksempler i denne studiens analysedel. Her ser vi kanskje en antydning til at konkurransematematikken i større grad enn skolen klarer å få fram problemløsning som *kunst*. Jeg poengterer imidlertid at det er en svakhet ved undersøkelsen min at jeg ikke går inn i skolen og ser hva som faktisk skjer der. Min hensikt er ikke å kritisere skolens matematikkopplæring for manglende fokus på kreativitet. I stedet konkluderer jeg med at konkurranseoppgavene representerer en positiv mulighet – de er en rik kilde til «kreative oppgaver» som også skolen kan dra nytte av. Her har vi kanskje et svar på det underspørsmålet jeg stilte innledningsvis: «Har skolen noe å lære av konkurransematematikken, og i tilfelle hva?»

Et annet svar på dette spørsmålet har sammenheng med sykliske firkanter. Dataene mine indikerer at dersom elevene våre skal lykkes med geometriproblemer i internasjonale konkurranser, trenger de kunnskap om sykliske firkanter. Denne kunnskapen får de ikke i skolen. Et av kompetansemålene for geometri i R1 sier at elevene skal kunne bruke «setningen om periferivinkler i geometriske resonnementer og beregninger». Jeg mener at sykliske firkanter er et av de mest grunnleggende redskapene for å oppfylle dette kompetansemålet. Noe av det som har overrasket meg mest i løpet av dette masterarbeidet, har vært å oppdage at sykliske firkanter «finnes nesten» i lærebøkene – de *er* der, men begrepet syklisk firkant nevnes ikke, og elevene får ikke vite hvordan de kan *utnytte* sykliske firkanter i geometriproblemer. Her *har* skolen noe å lære av konkurransematematikken – det skylder vi elevene våre.

6.2 VIDERE FORSKNING

Hvordan egner geometriproblemer fra matematikkonkurranser seg til bruk i skolen? Jeg har prøvd å gå et første skritt på veien mot et svar på dette spørsmålet ved å utforske sammenhenger mellom konkurranseoppgaver og kompetansemål. Et opplagt neste skritt vil være å ta disse problemene i bruk i klasserommet. Lar elevene seg engasjere av denne formen for problemløsning? Er det først og fremst de flinkeste som fascineres av denne type oppgaver, eller kan også andre elever dra nytte av dem? Hvilke hjelpemidler fungerer (f.eks. samarbeid eller dynamisk programvare)? Her er muligheter for flere forskningsprosjekter, gjerne aksjonsforskning der læreren er forsker i eget klasserom.

Arbeidet med denne studien har gjort meg oppmerksom på van Hiele-teoriens potensiale i tilknytning til utvikling av geometrisk tenkning. Her finnes muligheter både til å forstå, og ikke minst til å hjelpe, elever som strever. Ifølge tidligere forskning mangler elever erfaring særlig med van Hiele-nivå 3 før de forventes å beherske deduktive resonnementer (nivå 4). Analysene mine antyder at Abel-oppgavene fra de innledende rundene er en rik kilde til geometriproblemer nettopp på van Hiele-nivå 3. Jeg kjenner ikke til norske studier hverken av elever, lærere eller lærebøker med hensyn til van Hiele-nivå. Viser våre læreverk systematisk arbeid opp gjennom van Hiele-nivåene (slik som i Japan), eller er geometriopplæringen mer tilfeldig og med for stort fokus på å huske navn på figurer (nivå 1) i stedet for begrepsforståelse? Hvis vi ønsker å hjelpe elevene våre til bedre geometri-forståelse, må dette være et spennende forskningsfelt!

Jeg har definert studien min som en disiplinert-konfigurativ case-studie (jeg undersøker konkurranseoppgaver og elevstrategier i lys av teori) med mulighet til å bevege seg mot det heuristiske. I metodekapittelet knytter jeg dette potensialet opp mot underspørsmålet som også ble stilt innledningsvis: «Har skolen noe å lære av konkurransematematikken, og i tilfelle hva?» Jeg vil minne om at heuristiske studier kjennetegnes av hypoteseutvikling med sikte på strengere testing i senere studier. På grunnlag av det vi har sett om konkurranseoppgaver og kreativitet vil jeg våge å fremsette følgende påstander:

- Konkurransematematikken hjelper elevene til å oppdage det kunstneriske aspektet ved matematikk.
- Det *er* mulig å dreie matematikkopplæringen fra et fokus på å «gjøre det du får beskjed om» til å «prøve å finne ut av det».
- Geometri er en velegnet gren av matematikkfaget til denne type arbeid.

Studien min går langt i å *konkludere* med disse tre punktene i forbindelse med elever som deltar i matematikkonkurranser. Jeg har imidlertid ikke testet dem ut i skolen. I skolesammenheng er dette nettopp *hypoteser* som kan testes i videre forskningsstudier. Jeg mener også at min diskusjon omkring sykliske firkanter gir grunnlag for nye hypoteser:

- Større fokus på sykliske firkanter vil gi de flinkeste elevene våre bedre muligheter til å lykkes i internasjonale matematikkonkurranser.
- Større fokus på sykliske firkanter vil gi alle elevene våre et bredere spekter av spennende problemløsningsoppgaver i geometri.

6.3 ET LITE ETTERORD

Vi har sett at Pólya definerer *problem* slik at både matematiske og hverdagslige problemer omfattes av definisjonen. Kanskje kan også denne studien oppfattes som en problemløsningsprosess. Da har jeg nettopp fullført analysefasen. Jeg har nok så smått begynt å legge en plan og er spent på implementeringsfasen der ute i skolen. En viss utforskningsfase blir det nok. Kanskje fører den meg tilbake til nye analyser? Hvilke konklusjoner jeg trekker etter verifiseringsfasen, er selvsagt for tidlig å si. Jeg håper noen elever kan oppleve livet bli rikere – slik livet gjerne blir når man lar seg fascinere av kunst.

Without geometry life is pointless.

REFERANSER

Abusdal, I. (2011). *Elevers strategier for løsing av matematikkoppgaver. En sammenlikning av noen sterke og svake elever på 9. trinn* (Masteroppgave, Universitetet i Oslo). Hentet fra https://www.duo.uio.no/handle/123456789/32317.

Andersen, S. S. (1997). *Casestudier og generalisering. Forskningsstrategi og design.* Bergen: Fagbokforlaget.

Barzel, B. (2007). New Technology? New Ways of Teaching – No Time Left for That! *International Journal for Technology in Mathematics Education,* 14(2), 77–86.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. I F. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 843–908). Carlotte: Information Age Publishing.

Battista, M., & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher, 88*(1), 48–54.

Benbow, C. P. (2012). Identifying and Nurturing Future Innovators in Science, Technology, Engineering, and Mathematics: A Review of Findings from the Study of Mathematically Precocious Youth. *Peabody Journal of Education, 87*(1), 16–25.

Benson, S., & Marongelle, K. (2002). *Mathematical Olympians: Who are they, where are they from, and how did they get where they are?* Presentasjon på NCTM/NCSM Annual Meeting, april 2002. Hentet 14. desember 2012, fra http://www2.edc.org/cme/showcase/olympiad.pdf.

Bergem, T. (1998). *Læreren i etikkens motlys.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Bjuland, R. (2007). Adult Students' Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education. *Montana Mathematics Enthusiast, 4*(1), 1–30.

Bjuland, R. (2004). Student teachers' reflections on their learning process through collaborative problem solving in geometry. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1–3), 199–225.

Bjuland, R., & Jaworski, B. (2009). Teachers' perspectives on collaboration with didacticians to create an inquiry community. *Research in Mathematics Education, 11*(1), 21–38.

Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordisk Matematikkdidaktikk, 2*(2), 6–35.

Borgersen, H. E., & Bjuland, R. (2007). Verksted for problemløsning: Mening, bevis og generalisering. I B. Jaworski et al. (Red.), *Læringsfellesskap i matematikk* (s. 253–274). Bergen: Caspar Forlag.

Botten, G. (2003). *Meningsfylt matematikk.* Bergen: Caspar Forlag.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 21–30.

Campbell, J. R. (1996). Cross-national Retrospective Studies of Mathematics Olympians*. International Journal of Educational Research, 25*(6), 473 – 582.

Campbell, J. R., & Walberg, H. J. (2011). Olympiad Studies: Competitions Provide Alternatives to Developing Talents That Serve National Interests. *Roeper Review, 33*(1), 8–17.

Capraro, M. M., An, S. A., & Ma, T. (2012). An investigation of Preservice Teachers' Use of Guess and Check in Solving a Semi Open-Ended Mathematics Problem. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 105–116.

Chang, K., Wu, L., Weng, S., & Sung, Y. (2012). Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning. *Computers and Education, 58*(2), 775–786.

Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 359–387.

Chen, L., Van Dooren, W., & Chen, Q. (2011). An investigation on Chinese Teachers' Realistic Problem Posing and Problem Solving Ability and Beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(4), 919–948.

Chinnappan, M., Ekanayake, M. B., & Brown, C. (2012). Knowledge Use in the Construction of Geometry Proof by Sri Lankan Students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(4), 865–887.

Cirillo, M., & Herbst, P. G. (2012). Moving Toward More Authentic Proof Practices in Geometry. *The Mathematics Educator, 21*(2), 11–33.

Clarke, D., Breed, M., & Fraser, S. (2004). The Consequences of a Problem-Based Mathematics Curriculum. *Mathematics Educator, 14*(2), 7–16.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. I D.A. Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 420–464). New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Contreras, José (2007). Unraveling the Mystery of the Origin of Mathematical Problems: Using a Problem-Posing Framework With Prospective Mathematics Teachers. *The Mathematics Educator, 17*(2), 15–23.

Creswell, J. W. (2009). *Research Design. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches.* 3. utg. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Driscoll, M. J. (2010). Geometry and Proof in Secondary School Classrooms. I J. Lobato & F.K. Lester (Red.), *Teaching and Learning Mathematics. Translating Research for Secondary School Teachers* (s. 21–26). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

EGMO *European Girls' Mathematical Olympiad.* Hentet 6. desember 2012, fra https://www.egmo.org/.

Ely, R. E., & Cohen J. S. (2010). Put the Right Spin on Student Work. *Mathematics Teaching in the Middle School, 16*(4), 208–215.

Erbas, A., & Okur, S. (2012). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. *Quality & Quantity, 46*(1), 89–102.

Foley, G. D., Khoshaim, H. B., Alsaeed, M., Nihan Er, S. (2012). Professional development in statistics, technology, and cognitively demanding tasks: classroom implementation and obstacles. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 43*(2), 177–196.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C. L., Owen, R., & Schoeter, K. (2003). Enhancing Third-Grade Students' Mathematical Problem Solving With Self-Regulated Learning Strategies. *Journal of Educational Psychology, 95*(2), 306–316.

Fujita, T. (2012). Learners' Level of Understanding of the Inclusion Relations of Quadrilaterals and Prototype Phenomenon. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60–72.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education, 9*(1, 2), 3–20.

Furinghetti, F., Olivero, F., & Paola, D. (2001). Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 32*(3), 319–335.

Fuys, D. (1985). Van Hiele levels of thinking in geometry. *Education and Urban Society, 17*(4), 447–462.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *Journal of Research in Mathematics Education Monograph 3: The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gorodetsky, M., & Klavir, R. (2003). What can we learn from how gifted/average pupils describe their processes of problem solving? *Learning & Instruction, 13*(3), 305–326.

Gooya, Z. (2007). Mathematics teachers' beliefs about a new reform in high school geometry in Iran. *Educational Studies in Mathematics, 65*(3), 331–347.

Hardy, G. H. (1941). *A mathematician's apology.* Opptrykk fra1992. Cambridge: Cambridge University Press.

Heir, O., Erstad, G., Borgan, Ø., Moe, H., & Skrede, P. A. (2007). *Matematikk R1.* Oslo: Aschehoug.

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and Doing Proofs in High School Geometry Classes: What Is It That Is Going On for Students? *Cognition and Instruction, 24*(1), 73–122.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*(1), 11–18.

Holden, I. (2003). Matematikk blir gøy – gjennom et viktig samspill mellom ytre og indre motivasjon. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 27–50). Bergen: Fagbokforlaget.

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2010). *Introduksjon til Samfunnsvitenskapelig metode.* 4. utg. Oslo: Abstrakt forlag.

Kandemir, M. A., & Gur, H. (2007). Creativity Training in Problem Solving: A Model of Creativity in Mathematics Teacher Education. *New Horizons in Education, 55*(3), 107–122.

Karp, A. (2002). Thirty Years After: The Lives of Former Winners of Mathematical Olympiads. *Roeper Review, 25*(2), 83–88.

Keiser, J. M., & Lambdin, D. V. (1996). The clock is ticking: Time constraint issues in mathematics teaching reform. *Journal of Educational Research, 90*(1), 23–32.

Koichu, B., & Berman, A. (2005). When do Gifted High School Students Use Geometry to Solve Geometry Problems? *Journal of Secondary Gifted Education, 16*(4), 168–179.

Kreussler, B. (2009). Ireland's Participation in the 50th International Mathematical Olympiad. *Bulletin of the Irish Mathematical Society, 64*, 43–54.

Kunnskapsdepartementet (2006). Kompetansemål: Matematikk R1. I *Læreplan i matematikk for realfag – programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram.* Hentet 30. januar 2013, fra http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Kompetansemaal/?tbm=Vg3___Matematikk_R1%2bMatematikk_R1.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* 2. utg. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert,M. (1993). Teachers' Thinking about Students' Thinking about Geometry: The Effect of New Teaching Tools. I J.L. Schwartz, M. Yerushalmy, & B. Wilson (Red.), *The Geometric Supposer: What is it a Case of?* (s. 143–147). Hilldale, N.J.:Lawrence Erlbaum Associates.

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29–63.

Lester, F. K. (1994). Musings About Mathematical Problem-Solving Research: 1970–1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 660–675.

Lockhart, P. (2009). *A Mathematician's Lament. How School Cheats Us Out of Our Most Fascinating and Imaginative Art Form.* New York, NY: Bellevue Literary Press.

Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2006). Study of Mathematically Precocious Youth after 35 Years: Uncovering Antecedents for the Development of Math-Science Expertise. *Perspectives on Psychological Science, 1*(4), 316–345.

Mackenzie, D. (2001). Top Young Problem Solvers Vie for Quiet Glory. *Science, 293*(5530), 596–599.

Malterud, Kristi (2003). *Kvalitative metoder I medisinsk forskning.* 2. utg. Oslo: Universitetsforlaget.

Mason, J., & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving.* Victoria: Deakin University.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically.* Workingham: Addison-Wesley.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(1), 58–69.

Mertens, D. M. (2005). *Research and Evaluation in Education and Psychology. Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Mistretta: R. M. (2000). Enhancing Geometric Reasoning. *Adolescence, 35*(138), 365–380.

Morera, L., Rué, J., & Alet, F. (2012). Enhancing Mathematical Research in High School. I ICME 12, *Proceedings of 12th International Congress on Mathematical Education*, Group 3, Seoul, Korea.

Morse, J. M., & Niehaus, L. (2009). *Mixed Method Design. Principles and Procedures.* Wallnut Creek, CA: Left Coast Press.

Nevøy, Anne (2004). *Et arbeidsnotat om Case-studier og kvalitativ metode. En teoretisk diskusjon.* Institutt for allmennlærerutdanning og spesialpedagogikk, Universitetet i Stavanger: upublisert.

Niels Henrik Abels Matematikkonkurranse. *Om Abelkonkurransen.* Hentet 6. desember 2012, fra http://abelkonkurransen.no/nb/om/.

Niels Henrik Abels Matematikkonkurranse. *Internasjonale finaler.* Hentet 6. desember 2012, fra http://abelkonkurransen.no/nb/inter/.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F., & Hals, S. (2007) *Sinus R1*. Oslo: Cappelen.

Olson, S. (2004). *Count Down. The race for beautiful solutions at the International Mathematical Olympiad*. New York: Mariner Books.

Orton, A. (2004). *Learning Mathematics. Issues, theory and classroom practice* 3. utg. London: Continuum.

Pallant, J. (2010). *SPSS Survival Manual*. 4. utg. Maidenhead: Open University Press.

Passmore, T. (2007). Polya's Legacy: Fully Forgotten or Getting a New Perspective in Theory and Practice. *Australian Senior Mathematics Journal 21*(2), 44–53.

Patsiomitou, S., & Emvalotis, A. (2010). Student Movements through Van Hiele Levels in a Dynamic Geometry Guided Reinvention Process. *Journal of Mathematics & Technology* (1), 18–48.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. New York: Wiley.

Pólya, G. (1957). *How to solve it*. 2. utg. Princeton, NJ, Princeton University Press.

Posamentier, A. S., & Salkind, C. T. (1996). *Challenging Problems in Geometry.* New York: Dover Publications.

Pusey, E. L. (2003). *The Van Hiele Model of Reasoning in Geometry: A Literature Review* (Masteroppgave, North Carolina State University). Hentet fra http://repository.lib.ncsu.edu/ir/bitstream/1840.16/2275/1/etd.pdf.

Ragin, C. C. (2000). *Fuzzy-Set Social Science.* Chicago: The University of Chicago Press.

Ranestad, K. (2007). *Matematikk R, S og X. Nye læreplaner for programfag i matematikk i videregående skole.* Foredrag på faglig pedagogisk dag 3. Jan. 2007. Hentet 17. november 2012, fra http://www.mn.uio.no/math/personer/vit/ranestad/foredrag-norske/fpd.pdf.

Robson, C. (2011). *Real world research: a resource for users of social research methods in applied settings*. Chichester: Wiley.

Rusczyk, R., & Lehoczky, S. (2010). *the Art of Problem Solving. Volume 2: and Beyond.* 7. utg. Alpine, CA: Art of Problem Solving.

Sakshaug, L. E., & Wohlhunter, K. A. (2010). Journey toward Teaching Mathematics through Problem Solving. *School Science and Mathematics, 110*(8), 397–409.

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., … Thorstensen, R. (2007). *Sigma R1 matematikk.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D.A. Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (s. 334–370). New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving. I L.B. Resnick & L.E. Klopfer (Red.), *Toward the Thinking Curriculum: Current Cognitive Research. 1989 ASCD Yearbook* (s. 83–103). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Schoenfeld, A. H. (1987). A brief and biased history of problem solving. I F.R. Curcio (Red.), *Teaching and Learning: A Problem-Solving Focus* (s. 27–46). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld (1985). *Mathematical Problem Solving.* San Diego CA: Academic Press.

Skemp, R.R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88–95.

Skemp, R. R. (1993). *The psychology of Learning Mathematics.* London: Penguin Books.

Senk, S. L. (1989). Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 309–321.

Silverman, D. (2011). *Interpreting Qualitative Data. A Guide to the Principles of Qualitative Research*. 4. utg. London: Sage Publications.

Sriraman, B. (2004). Gifted Ninth Graders' Notions of Proof: Investigating Parallels in Approaches of Mathematically Gifted students and Professional Mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4), 267–292.

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations. *Journal of Secondary Gifted Education, 14,* 151–165.

Stake, R. E. (2010). *Qualitative Research. Studying how things work.* New York: The Guildford Press.

Stanley, J. C. (1991). An Academic Model for Educating the Mathematically Talented. *Gifted Child Quarterly, 35*(1), 36–42.

Steiner, H. H., & Carr, M. (2003). Cognitive Development in Gifted Children: Toward a More Precise Understanding of Emerging Differences in Intelligence. *Educational Psychology Review, 15*(3), 215–246.

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode*. 3. utg. Bergen: Fagbokforlaget.

Thompson, A. (1989). Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs. I R.I. Charles, & E.A. Silver (Red.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (s. 232–243). Reston: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Threlfall, J., & Hargreaves, M. (2008). The problem-solving methods of mathematically gifted and older average-attaining students. *High Ability Studies, 19*(1), 83–98.

Utdanningsdirektoratet, (2011). Eksamensoppgaver. *Matematikk R1/R2/S1/S2.* Hentet 14. februar 2013, fra http://www.udir.no/Vurdering/Eksamen-videregaende/Eksamen-Kunnskapsloftet/Programfag-studieforberedende-/Matematikk-R1-/.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 310–316.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.

Whitman, N. C., Nohda, N., Lai, M. K., Hashimoto, Y., Iijima, Y., Isoda, M., & Hoffer, A. (1997). Mathematics Education: A Cross-Cultural Study. *Peabody Journal of Education, 72*(1), 215–232.

Winner, E. (2000). The Origins and Ends of Giftedness. *American Psychologist, 55*(1), 159–161.

Wæge, Kjersti (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning* (Doktoravhandling, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet). Hentet fra http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:no:ntnu:diva-1813.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research. Design and Methods.* 3. utg. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Aagedal, Olaf (1973). *Forkynninga i samfunnet – samfunnet i forkynninga*: *ei religionssosiologisk drøfting av privatisering i tilknytning til ein analyse av radio-andaktar.* (Upubliset magistergradsavhandling). Universitetet i Oslo.

VEDLEGG

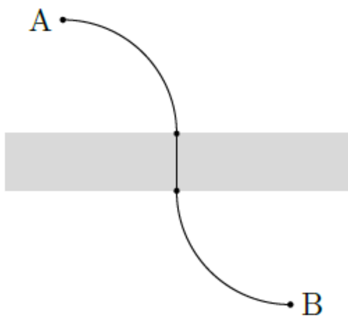
Oversikt

VEDLEGG 1 GEOMETRIPROBLEMER FRA ABEL-KONKURRANSEN

EKSEMPEL PÅ PROBLEM FRA ABELKONKURRANSEN, RUNDE 1

Denne oppgaven er hentet fra: http://abelkonkurransen.no/problems/abel_1213_r1_prob_nb.pdf

Abelkonkurransen 2012/2013 Første runde, oppgave 13

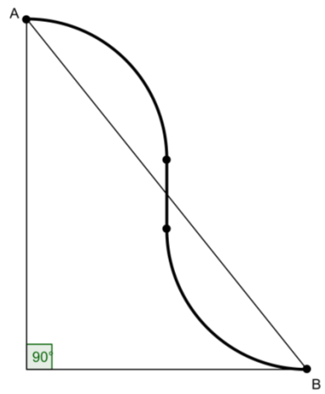


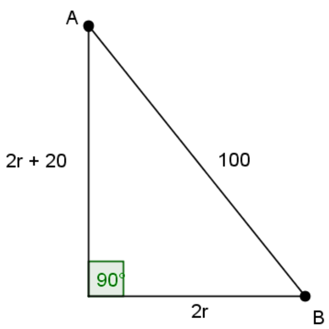
Karl Erik skal sykle hjem fra skolen i dag. Han sykler fra A til B slik som vist på figuren. Først sykler han på en sykkelsti som er formet som en kvartsirkel, deretter sykler han over en bro som er 20 m lang før han sykler videre på resten av sykkelstien, som også er formet som en kvartsirkel. Han sykler like langt før som han gjør etter broen. Dersom luftavstanden fra A til B er 100 m, hvor mange meter sykler Karl Erik?

A $40\pi + 20$ **B** $30\pi + 20$ **C** 210 **D** $60\pi + 20$ **E** 40π

Løsningsforslag:

Vi tegner den rette linja fra A til B inn i figuren. Vi trekker også et par «smarte linjer» for å få en trekant vi vet noe om – nemlig den rettvinklede trekanten med AB som hypotenus. Vi vet at AB har lengde 100. Ut fra opplysningene i oppgaveteksten vet vi også at den ene kateten er $2r$, den andre $2r+20$ (der r er radien i kvartsirklene). Nå kan vi løse en likning:





$$(2r)^2 + (2r+20)^2 = 100^2$$
$$4r^2 + 4r^2 + 80r + 400 = 10\,000$$
$$r^2 + 10r - 1200 = 0$$
$$(r+40)(r-30) = 0$$
$$r = -40 \quad \vee \quad \underline{r = 30}$$

Bare den positive løsningen er aktuell siden lengder er positive ☺.

(Det finnes selvfølgelig andre måter å løse andregradslikningen på. F.eks. kan vi fullføre kvadratet eller bruke abc-formelen, men det blir kanskje litt mer tungvint uten kalkulator.) I tillegg til 20 meter på broen syklet altså Karl Erik «omkretsen av en halvsirkel med radius 30 meter»: $\underline{\underline{30\pi + 20}}$

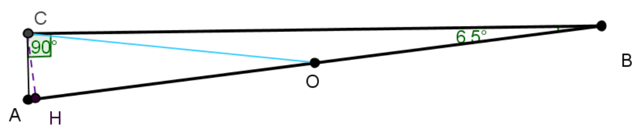
En adskillig mer kortfattet utgave av samme løsning på denne oppgaven finnes på:
http://abelkonkurransen.no/problems/abel_1213_r1_sol_nb.pdf

Denne oppgaven er hentet fra: http://abelkonkurransen.no/problems/abel_0405_r2_prob_nb.pdf

Abelkonkurransen 2004/2005 Andre runde, oppgave 8

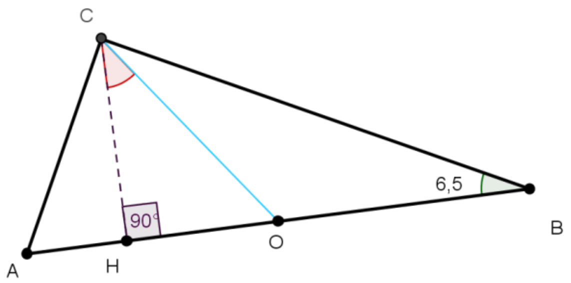
I trekanten $\triangle ABC$ er $\angle C = 90^\circ$, mens den minste vinkelen er lik $6{,}5^\circ$. La O være midtpunktet på hypotenusen. Hva er vinkelen (i grader) mellom linjestykket CO og høyden fra C ned på hypotenusen?

Løsningsforslag:



Tegner først en figur:

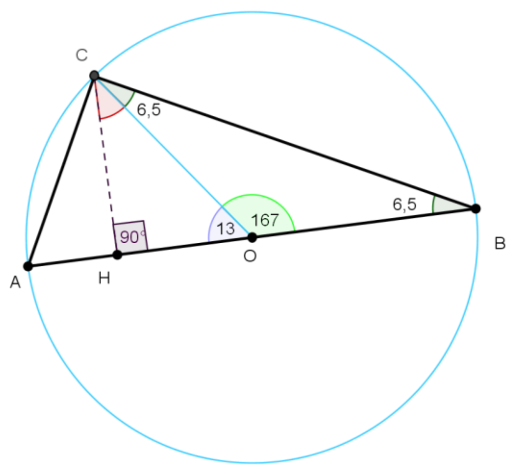
Tegner inn linjestykket CO og høyden fra C ned på hypotenusen. Kaller fotpunktet H. (Lar $\angle B$ være minst, men løsningen blir helt lik dersom vi lar $\angle A$ være minst.)



Ser at når den ene vinkelen er så liten som $6{,}5^\circ$, blir det litt vanskelig å se «hva som skjer». Velger derfor å lage en ny figur der denne vinkelen er tegnet større enn den egentlig skal være.

$\angle C = 90^\circ$ $\qquad$ $\angle HCO$ (i rødt) er den vi skal finne.

$\triangle BOC$ ser ut til å være likebeint. Er den det?



Ja, fordi det geometriske stedet for en rett vinkel (her $\angle ACB$) som spenner over et linjestykke AB, er en sirkel med AB som diameter (Thales teorem). Siden O er midtpunkt på AB, må O være sentrum i omsirkelen til $\triangle ABC$, og $OA = OB = OC$ er radius i sirkelen.

Siden $\triangle BOC$ er likebeint, er $\angle OCB = \angle CBO = 6{,}5^\circ$

Da er $\angle BOC = 180^\circ - 2 \cdot 6{,}5^\circ = 167^\circ$ (vinkelsum i trekant) og $\angle COH = 180^\circ - 167^\circ = 13^\circ$.

Men da er vi framme: $\angle HCO = 180^\circ - \left(90^\circ + 13^\circ\right) \underline{\underline{= 77^\circ}}$

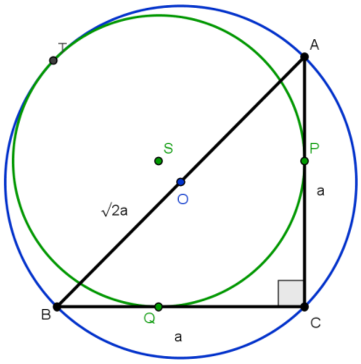
Denne oppgaven er hentet fra:

http://abelkonkurransen.no/problems/abel_0506_f_prob_nb.pdf

Abelkonkurransen 2005/2006 Finale, oppgave 4

La γ være den omskrevne sirkelen om en rettvinklet trekant $\triangle ABC$ med rett vinkel C. La δ være sirkelen som tangerer sidene AC og BC, og som tangerer sirkelen γ innvendig

a) Finn radien i δ uttrykt ved a når AC og BC begge har lengde a.



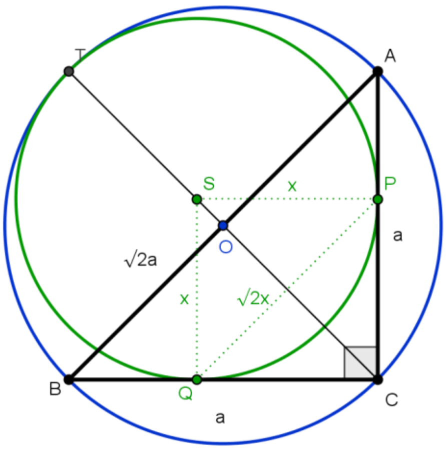
Løsningsforslag:

Tegner først figur. Kaller tangeringspunktene til δ på AC og BC for P og Q henholdsvis, kaller punktet der δ tangerer γ innvendig for T. Kaller sentrum i γ for O og sentrum i δ for S.

$\triangle ABC$ er likebeint med $AC = BC = a,$ så $AB = \sqrt{2}\,a$. Ser at AB er diameter i omsirkelen til $\triangle ABC$ siden $\angle C = 90^\circ$.

Vinkelhalveringslinja til $\angle ACB$ er det geometriske stedet for alle punkter som ligger like langt fra linja gjennom AC som linja gjennom BC. Da må S ligge på denne vinkelhalveringslinja.

O er skjæringspunkt til midtnormalene på sidene i $\triangle ABC$ (ligger på AB siden $\angle C = 90^\circ$). Siden trekanten er likebeint er midtnormalen på AB sammenfallende med vinkelhalveringslinja til $\angle ACB$. Siden både O og S ligger på denne vinkelhalveringslinja, må også tangeringspunktet T til δ og γ ligge på denne linja.

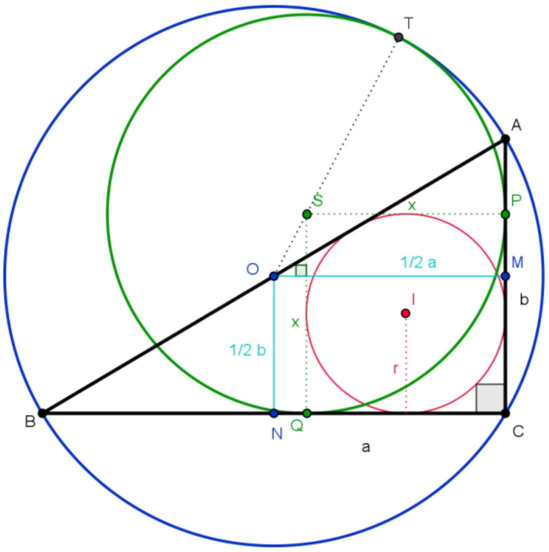


Kaller radien i δ for x. Tegner radien fra S ut til tangeringspunktene. Ser at $\square SQCP$ er et kvadrat med diagonal $CS = \sqrt{2}\,x$. Da har vi:

$$CS + ST = CT$$
$$\sqrt{2}\,x + x = \sqrt{2}\,a$$
$$x\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt{2}\,a$$
$$x = \frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}\,a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1} = \underline{\underline{\left(2-\sqrt{2}\right)a}}$$

b) Vis at radien i δ er dobbelt så stor som radien i den innskrevne sirkelen i $\triangle ABC$.

Løsningsforslag:



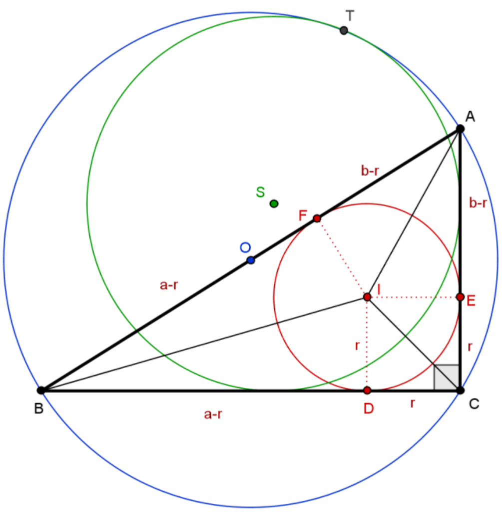
Tegner først figur som inneholder også den innskrevne sirkelen. Merk at trekanten ikke lenger trenger å være likebeint slik som i oppg. a.

Kaller radien i innsirkelen for r. Vil finne et uttrykk for radien, x, i δ:

O er skjæringspunkt for midtnormalene på sidene i $\triangle ABC$. Kaller midtpunktene på AC og BC for henholdsvis M og N. Lengden av OM er ½ *a*; lengden av ON ½ *b*. Radien i omsirkelen til $\triangle ABC$ er ½ *c*. Med utgangspunkt i den lille rettvinklede trekanten med OS som hypotenus, får vi:

$$\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}b\right)^2=\left(\frac{1}{2}c-x\right)^2$$
$$\frac{1}{4}a^2-ax+x^2+\frac{1}{4}b^2-bx+x^2=\frac{1}{4}c^2-cx+x^2$$
$$x^2+cx-ax-bx=\frac{1}{4}\left(c^2-\left(a^2+b^2\right)\right) \qquad \textit{Husk at } c^2=a^2+b^2$$
$$x\left(x+c-a-b\right)=0$$
$$x=0 \quad \vee \quad \underline{x=a+b-c}$$

Et uttrykk for radien r i innsirkelen finner vi ved å legge merke til at avstanden fra A er den samme til hvert av tangeringspunktene med innsirkelen; tilsvarende for B og C. (Dette kan vi f.eks. begrunne med at $\triangle AIF \cong \triangle AIE$ fordi $|IF|=|IE|=r$, linjestykket AI er felles for de to trekantene, og $\angle FAI=\angle EAI$ siden innsenteret ligger på vinkelhalveringslinja. Tilsvarende er $\triangle BIF \cong \triangle BID$ og $\triangle CID \cong \triangle CIE$.) Hypotenusen i $\triangle ABC$ kan skrives:



$$c=a-r+b-r$$
$$2r=a+b-c$$

- Altså $2r=x$ som var det vi ville vise.

Løsningsforslaget er i all hovedsak hentet fra:
http://abelkonkurransen.no/problems/abel_0506_f_sol_nb.pdf

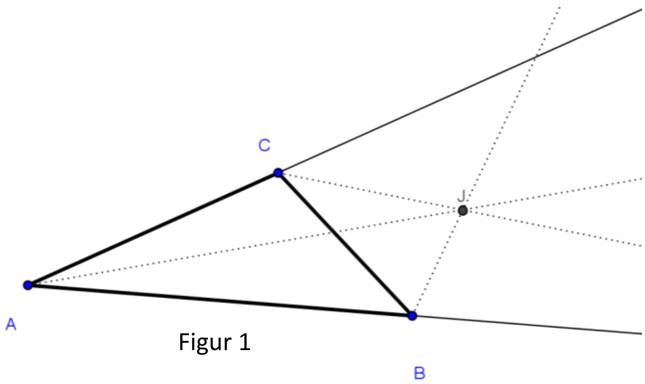
IMO – 2012 PROBLEM 1

Problemet

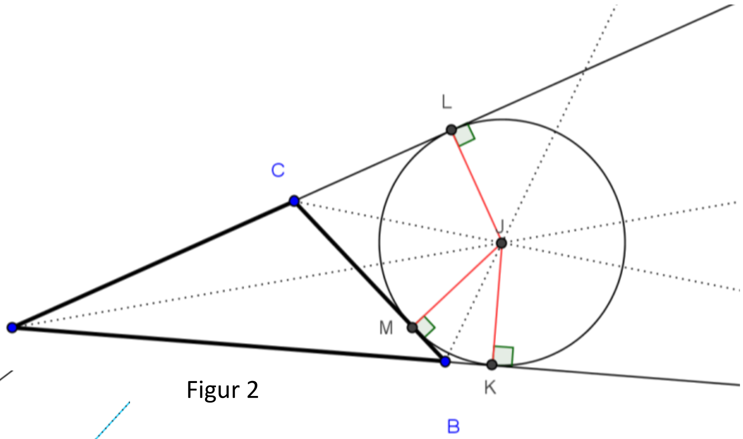
Given $\triangle ABC$ the point J is the centre of the excircle opposite the vertex A. This excircle is tangent to the side BC at M, and to the lines AB and AC at K and L, respectively. The lines LM and BJ meet at F, and the lines KM and CJ meet at G. Let S be the point of intersection of the lines AF and BC, and let T be the point of intersection of the lines AG and BC. Prove that M is the midpoint of ST.

Løsningsforslag:

Vi begynner med å tegne figur. Det første vi merker oss er at sentrum J i den ytre tangerende sirkelen ligger på vinkelhalveringslinjene som vist i figur 1. For å finne radien i sirkelen må vi tegne normalen fra J ned på en av sidene. I figur 2 er normalene (med rødt) tegnet ned på hver av sidene, og vi får de tre tangeringspunktene M, K og L.

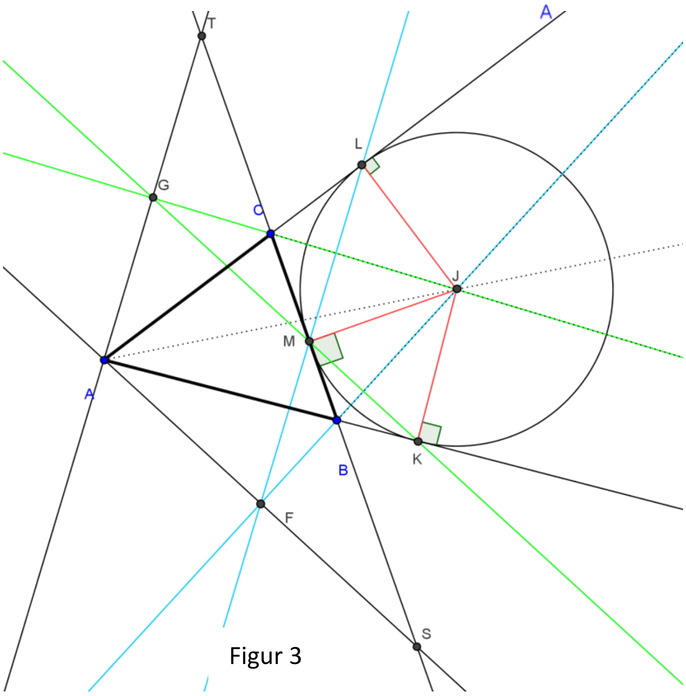


Figur 1



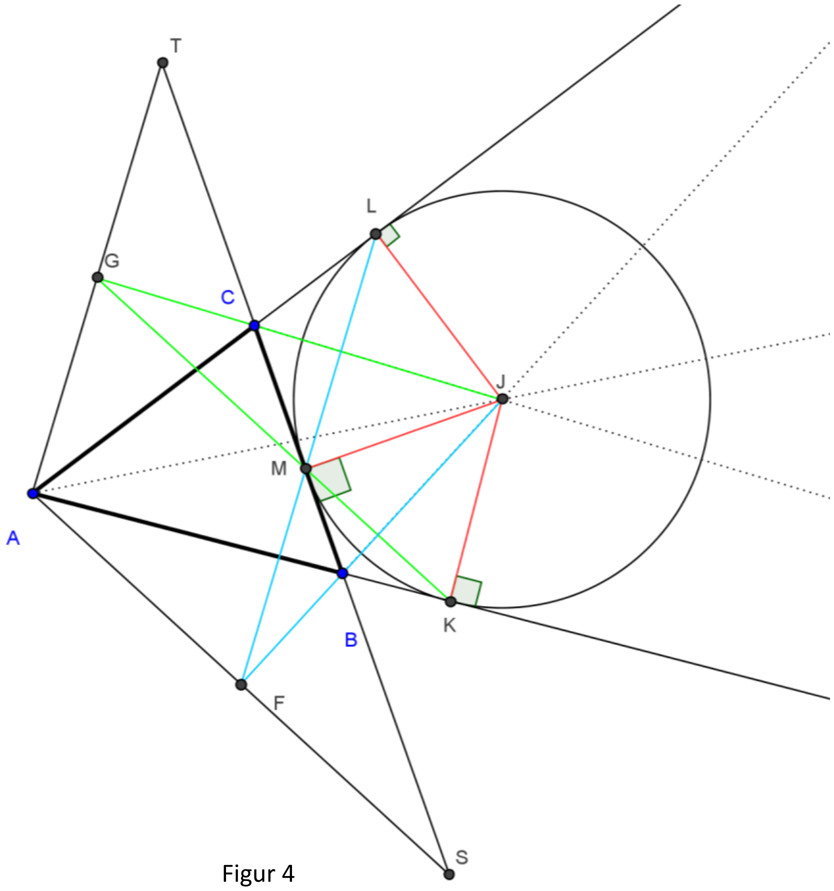
Figur 2

Vi trekker linjene gjennom LM og BJ (lyseblå i figur 3) og finner F.



Figur 3

Tilsvarende trekker vi linjene gjennom KM og CJ (lysegrønn i figur 3) og finner G. S er skjæringspunkt mellom AF og BC. T er skjæringspunkt mellom AG og BC. Å vise at M er midtpunkt på ST er det samme som å vise at $|TM| = |SM|$. Figur 4 er en mer «ryddig» utgave av figur 3. Vi ser ikke noen umiddelbar måte å vise at $|TM| = |SM|$.



Figur 4

Det er imidlertid andre lengder vi kan si noe om. F.eks. er $|AL| = |AK|$ (AL og AK er begge tangenter til sirkelen. At avstanden fra A inn til tangeringspunktene er den samme, kan anses som kjent i IMO-sammenheng, med mindre eleven spesifikt blir bedt om å bevise det. I så fall kan vi relativt lett argumentere med at $\triangle AJL$ og $\triangle AJK$ er kongruente.)

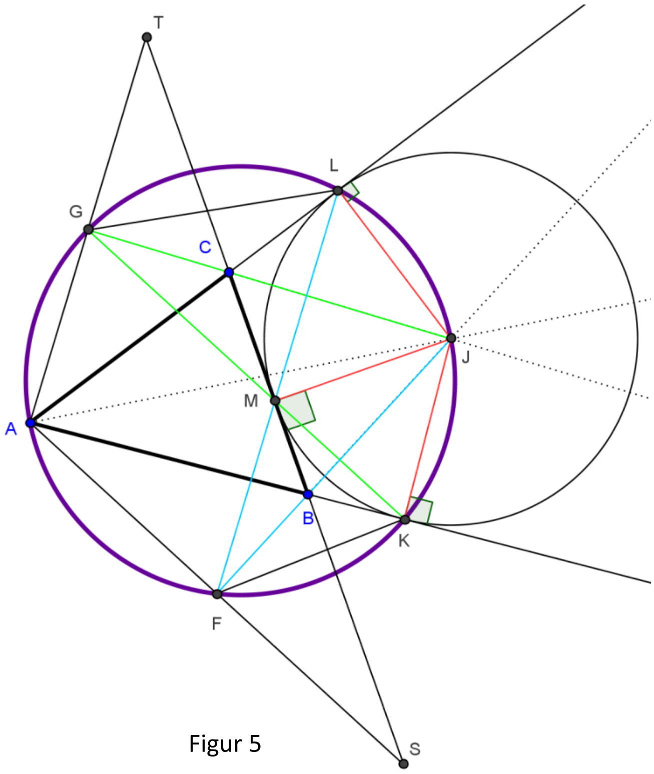
Tilsvarende er $|CL| = |CM|$ og $|BK| = |BM|$. Men hvis vi da kan vise at $|AC| = |TC|$ og $|AB| = |SB|$, dvs. at $\triangle ACT$ og $\triangle ABS$ er likebeinte, er vi framme! Da har vi endret oppgaven fra å være en oppgave der vi prøver å si noe om lengder til å bli en oppgave der vi prøver å si noe om vinkler.

Merk at fordi linja gjennom CJ er vinkelhalveringslinja til $\angle MCL$ må også $\angle GCT = \angle GCA$. Tilsvarende må $\angle FBS = \angle FBA$. Det betyr at dersom vi kan vise at $\angle CGT = \angle CGA = 90^\circ$, og tilsvarende at $\angle BFS = \angle BFA = 90^\circ$, så er $\triangle GCT$ og $\triangle GCA$ kongruente; tilsvarende er $\triangle FBS$ og $\triangle FBA$ kongruente, og da er vi framme. Da har vi redusert oppgaven til å vise at et par vinkler er rette!

Dersom $\angle AGJ = \angle AFJ = 90^\circ$, må både G og F ligge på en sirkel med AJ som diameter ved Thales teorem. Vi har ikke ennå vist at dette stemmer, men vi tegner inn sirkelen og ser om vi kan finne ut noe.

A-ha, nå ser vi at L og K må ligge på sirkelen med AJ som diameter. Dette *vet* vi ved Thales teorem. (Vi kunne ha sett dette tidligere, men det er først nå vi har funnet en grunn til å tegne opp denne sirkelen (lilla i figur 5).)

Det gjenstår å vise at G og F faktisk ligger på denne sirkelen. Dersom vi kan vise at $\angle JAL = \angle JFL$, så følger det at $\square AFJL$ er syklisk, og *F* må ligge på sirkelen gjennom A, J og L. Tilsvarende, dersom vi kan vise at $\angle KAJ = \angle KGJ$, så følger det at $\square AKJG$ er syklisk, og G må ligge på sirkelen gjennom A, J og K. (Sirkelen gjennom A, J og L er selvfølgelig samme sirkel som sirkelen gjennom A, J og K siden at vi allerede vet at $\square AKJL$ er syklisk pga. de to rette vinklene.)



Figur 5

Da begynner vi letingen etter vinkler!

Siden J ligger på vinkelhalveringslinja til $\angle KBM$ må $\angle JBM = \angle JBK$. Dessuten er $\angle JBK = \angle ABF$ siden toppvinkler er like store. Setter $u = \angle JBM = \angle ABF$ og får at

1. $2u + \angle ABC = 180^\circ$

Ved et helt tilsvarende resonnement får vi at

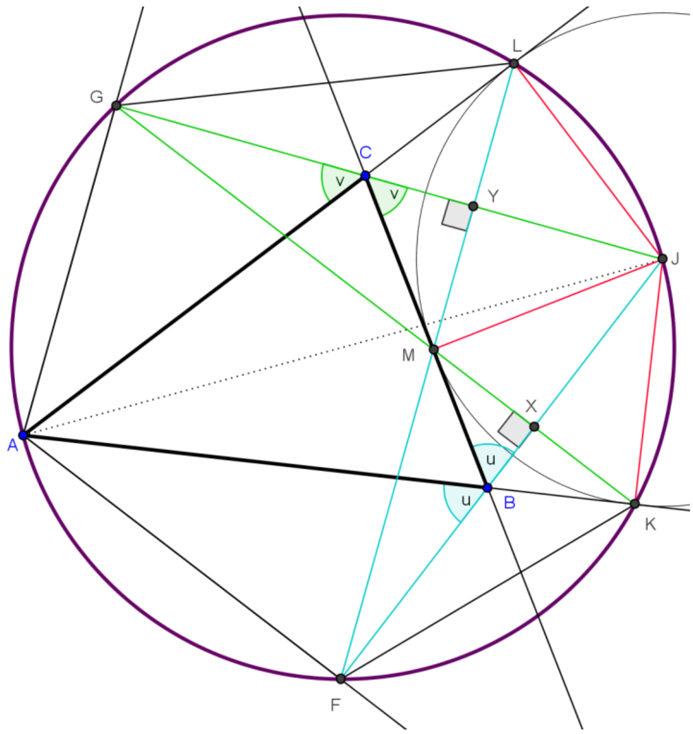
2. $2v + \angle BCA = 180^\circ$ (der v er vinklene markert med lysegrønt i figur 6).

Videre vet vi at ettersom $\triangle KBM$ er likebeint, vil vinkelhalveringslinja fra B også være midtnormal på KM. Kaller fotpunktet for X. Tilsvarende er $\triangle MCL$ likebeint, og vinkelhalveringslinja fra C vil også være midtnormal på LM. Kaller fotpunktet Y (se figur 6). Vi får:

3. $u + \angle BMX = 90^\circ$

Helt tilsvarende får vi at

4. $v + \angle YMC = 90^\circ$



Figur 6

Likning 1. og 3. ovenfor gir at $\frac{1}{2}\angle ABC = \angle BMX$.

Likning 2. og 4. ovenfor gir at $\frac{1}{2}\angle BCA = \angle YMC$.

Vinkelsum i trekant, sammen med disse likningene, gir:

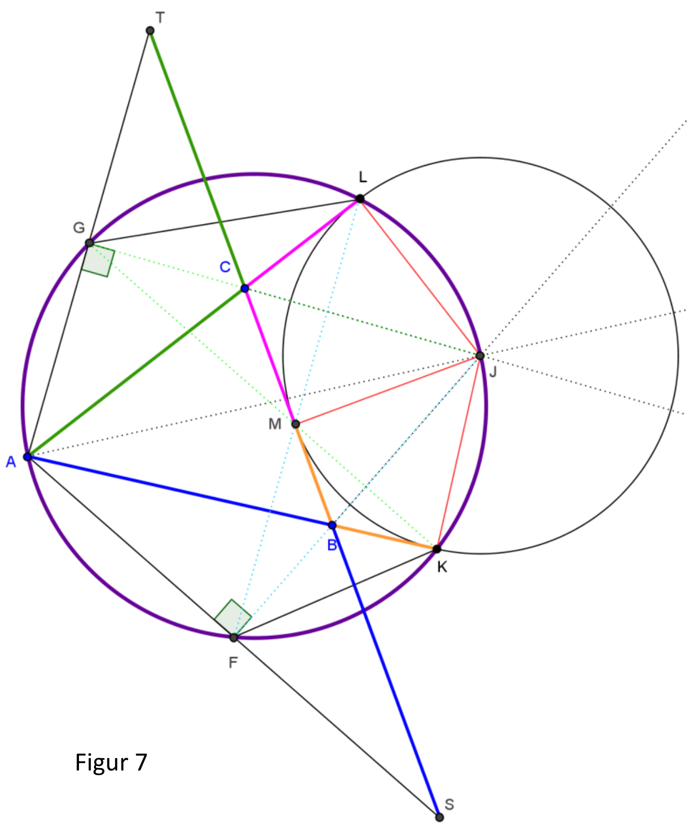
$$\begin{aligned}
\angle BAC &= 180^\circ - \angle ABC - \angle BCA \\
&= 180^\circ - 2\angle BMX - 2\angle YMC \\
&= 2(90^\circ - (\angle BMX + \angle YMC)) \\
&= 2(90^\circ - (\angle BMX + \angle FMB) \\
&= 2(90^\circ - \angle FMX) \\
&= 2\angle XFM = 2\angle JFL
\end{aligned}$$

Men da har vi vist at $\angle JAL = \angle JFL$, slik vi ville vise. Da er $\square AFJL$ syklisk og $\angle BFS = \angle BFA = 90^\circ$. Et helt tilsvarende resonnement gir at $\angle KAJ = \angle KGJ$, slik vi også ville vise. Da er $\square AKJG$ syklisk og $\angle CGT = \angle CGA = 90^\circ$. Men da vet vi at $\triangle AFB$ og $\triangle SFB$ er kongruente. Tilsvarende er $\triangle TGC$ og $\triangle AGC$ kongruente. Dermed har vi vist at $|AC| = |CT|$ (de to grønne linjene i figur 7) og at $|AB| = |BS|$ (de to blå linjene i figur 7). Men nå vet vi at

$|TM| = |TC| + |CM| = |AC| + |CL| = |AL| = |AK| = |AB| + |BK| = |SB| + |BM| = |SM|$

Da er M midtpunkt på SF. Q.E.D.

I dette løsningsforslaget har jeg prøvd å formidle hvordan jeg har tenkt, og vist hvordan jeg «jobber baklengs» for å finne en løsning. Jeg syns oppgaven var krevende og har selv hentet hjelp i følgende løsningsforslag: http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/2012_IMO_Problems/Problem_1. Her er løsningen ført «forfra».



Figur 7

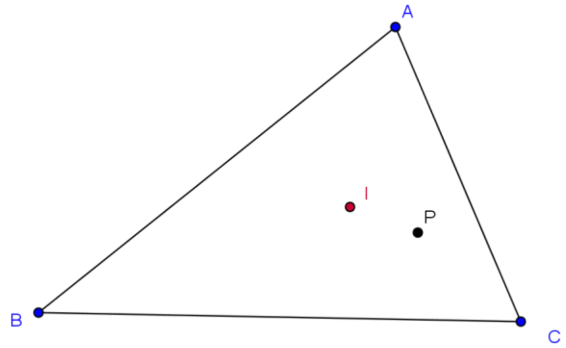
Problemet

La $\triangle ABC$ være en trekant med innsenter I. Et punkt P ligger inni trekanten og tilfredsstiller $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$.

Vis at $AP \geq AI$ med likhet hvis og bare hvis $P = I$.

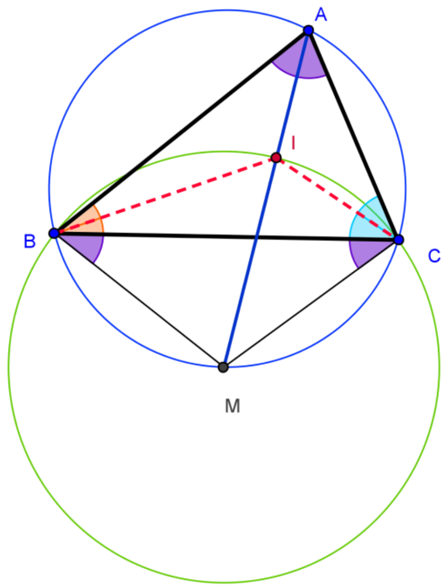
Løsningsforslag

Vi begynner med å tegne figur.



Figur 1 IMO_2006 Oppgave 1

Først vil vi vise noe som for mange kanskje er et kjent resultat: Dersom vi tegner omsirkelen til $\triangle ABC$ og trekker linja gjennom AI til den igjen møter omsirkelen (se figur 2), så vil skjæringspunktet mellom AI og omsirkelen til $\triangle ABC$ (M på figur 2) være sentrum i sirkelen gjennom B, I og C. Bevis:

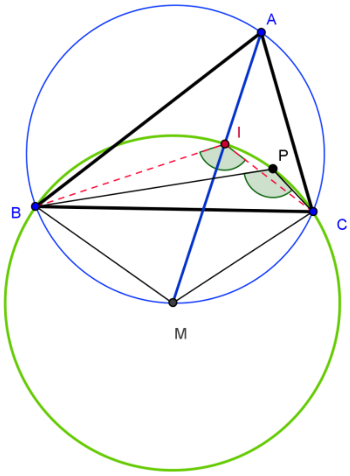


Figur 2

Innsenteret I ligger der vinkelhalveringslinjene i trekanten møtes. Linja gjennom AI halverer altså $\angle A$ slik at $\angle BAM = \angle MAC$. Ved periferivinkelsetningen vet vi at $\angle MBC = \angle MAC$ og $\angle BCM = \angle BAM$ (dvs. at alle de lilla vinklene i figur 2 er like). Da er $\triangle BMC$ likebeint. Da vet vi at M må ligge på midtnormalen til BC.

Nå vil vi vise at også $\triangle BMI$ er likebeint. I ligger også på halveringslinja til $\angle CBA$, så de to «oransje vinklene» $\angle CBI$ og $\angle IBA$ i figur 2 er like, (og på halveringslinja til $\angle ACB$, så de to lyseblå vinklene $\angle ACI$ og $\angle ICB$ er også like). $\angle AIB$ må være $180^\circ - (\text{«}oransje + lilla\text{»})$ (vinkelsum i trekant). Men da må $\angle BIM = \text{«}oransje + lilla\text{»}$ (rett linje 180°). Da har vi vist at $\triangle BMI$ er likebeint, og M må ligge på midtnormalen til BI.

(Et helt tilsvarende resonnement viser at $\triangle CMI$ er likebeint, og M ligger på midtnormalen til CI.)



Figur 3

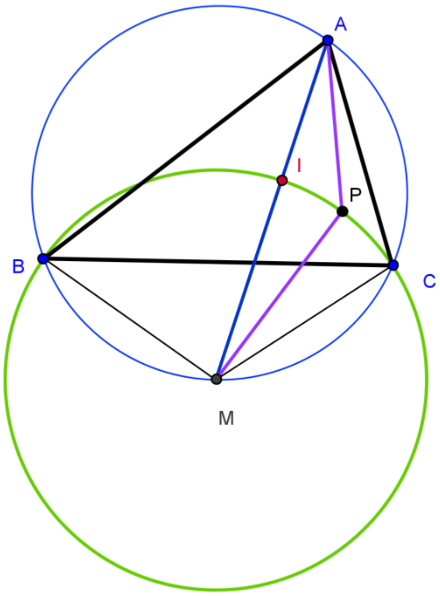
Da har vi vist at M er sentrum i omsirkelen til $\triangle BIC$ (der midtnormalene møtes) slik som vi skulle vise.

Vi vil så vise at punktet P ligger på omsirkelen til $\triangle BIC$. I $\triangle ABC$ setter vi $\angle A=\alpha,\ \angle B=\beta$ og $\angle C=\gamma$. Betingelsen i oppgaveteksten sier:

$\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$. Siden $\angle PBA+\angle PCA+\angle PBC+\angle PCB=\beta+\gamma$ kan betingelsen heller skrives $\angle PBC+\angle PCB=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$. Siden vinkelsummen i en trekant er 180° får vi:

$$\angle BPC=180^\circ-\frac{\beta+\gamma}{2}=180^\circ-\left(\frac{180^\circ}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=90^\circ+\frac{\alpha}{2}.$$

Men også $\angle BIC=180^\circ-\dfrac{\beta+\gamma}{2}=90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$. Altså er $\angle BPC=\angle BIC$, og siden P og I ligger på samme side av BC (husk at oppgaven sier at P ligger inni trekanten), betyr dette at $\square BCPI$ er syklisk. Da må $|MI|=|MP|$ for de er begge radier i samme sirkel. Siden den korteste veien mellom to punkter er ei rett linje må $|AP|+|PM|\geq|AM|$ (likhet hvis $P=I$ (se figur 3)). Men da har vi vist at $|AP|\geq|AI|$ med likhet hvis og bare hvis $P=I$ slik som vi skulle vise ☺.



Figur 4

Dette problemet med løsningsforslag (i en noe mer «kompakt» form) er hentet fra:

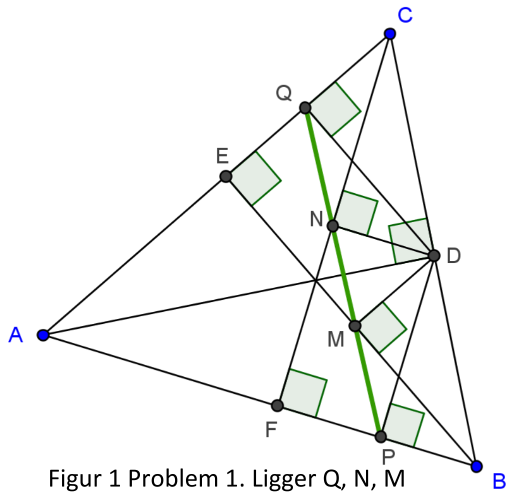
https://docs.google.com/file/d/1pvoc7t79koAWr2IDod2Q57ZPX67Dlh7aFn33TJ7o2HPpDMjF7rxlEP0jwkKq/edit?usp=sharing

Her er også de andre IMO-problemene fra IMO 2006.

Intervjuene i masteroppgaven min er basert på to problemer som jeg enkelt og greit kaller problem 1 og problem 2. I analysen presenteres én løsning til problem 1og to løsninger til problem 2. Her er en alternativ løsning til problem 1. Den er nok mer tungvint enn den som presenteres som «Sveins» løsning i masterstudien, men den er en mulig løsning for elever som ikke kjenner til Simsonlinja.

Problemet:

Let $\triangle ABC$ be an arbitrary triangle, and let D, E, F be the feet of perpendicular from A to BC, B to CA, and C to AB respectively. Draw perpendicular lines from D to AB, AC, BE, CF and let P, Q, M, N be the feet of perpendicular respectively. Prove that P, Q, M, N are collinear.



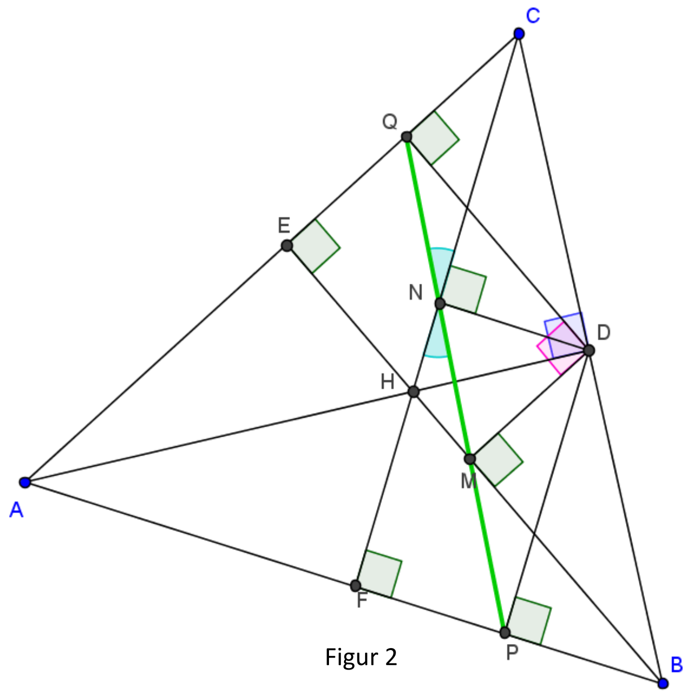
Figur 1 Problem 1. Ligger Q, N, M og P på en rett linje?

Løsningsforslag:

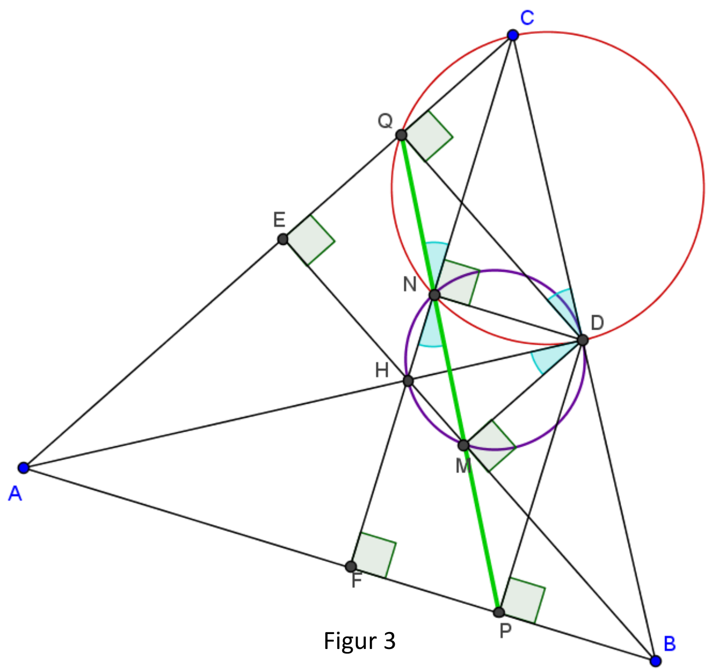
Vi begynner med å vise at Q, N og M ligger på samme linje. Det kan vi gjøre ved å vise at $\angle CNQ = \angle HNM$ (se figur 2).

Figur 1 gir en oversikt over hvilke vinkler som ifølge oppgaveteksten er rette. Vi ser at $\angle CDH$ er rett. Videre er $\angle QDM$ rett (siden de tre andre vinklene i $\square EMDQ$ er rette ifølge oppgaveteksten). (Se figur 2.)

Hvis vi nå trekker fra den «felles vinkelen» $\angle QDH$ fra disse to rette vinklene står vi igjen med to like vinkler: $\angle CDQ = \angle HDM$. (Se figur 3.)



Figur 2



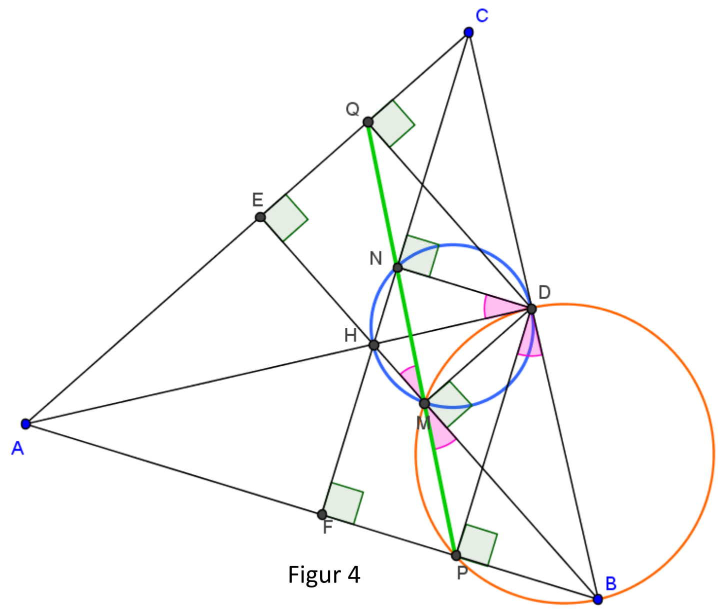
Figur 3

Men $\square NDCQ$ er syklisk (vi har to rette vinkler som spenner over samme linje-stykke), så $\angle CDQ = \angle CNQ$ for de er periferivinkler som spenner over samme bue.

Videre er $\square HMDN$ syklisk (vi har to motstående vinkler som begge er 90°), så $\angle HDM = \angle HNM$ for de er periferivinkler som spenner over samme bue.

Men da er alle de lyseblå vinklene i figur 3 like. Spesielt er $\angle CNQ = \angle HNM$ slik som vi ville vise. Da har vi vist at Q, N og M ligger på samme linje.

På nøyaktig samme måte kan vi vise at N, M og P ligger på samme linje. Detaljene gjentas ikke her, men fremgår av figur 4.

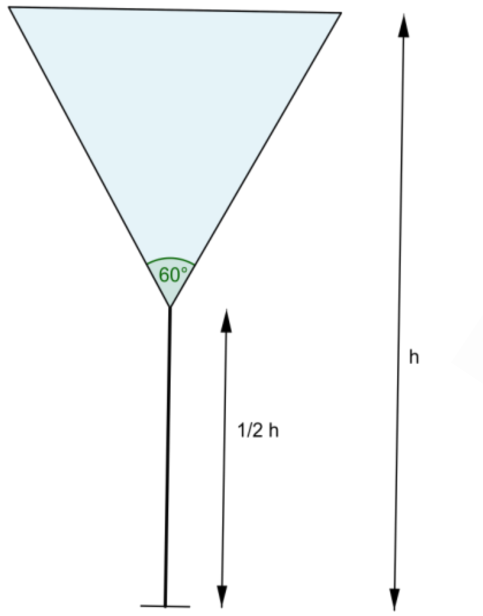


Figur 4

Ettersom vi har vist at både Q og P ligger på linja gjennom N og M, må alle de fire punktene ligge på samme linje. QED.

Denne ekstraoppgaven presenteres i masterstudiens analysedel med to elevbesvarelser. Jeg nevner at jeg også fikk inn en løsning som gjorde bruk av tangens til en vinkel på 30°.

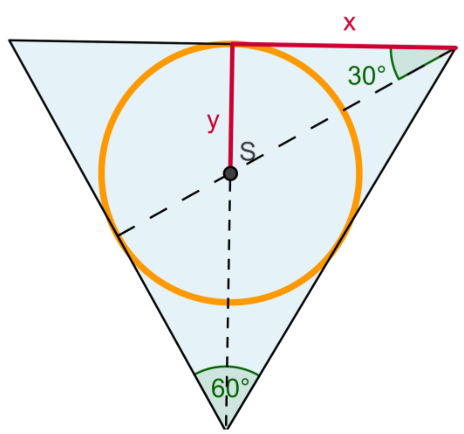
Problemet:



Figur 1. Ekstraoppgave. Hentet fra Georg-Mohr-konkurransen1994.

Et glass har tverrsnitt som vist på figuren. Glasset er sånn at en kuleformet appelsin med radius 3 cm akkurat kan være i glasset uten at noe av appelsinen viser over kanten. Hvor høyt er glasset?

Forklar hvordan du/dere tenkte for å løse oppgaven. Finner dere mer enn én måte å løse oppgaven på? Fint hvis dere nevner hva dere tenkte først, osv. (Bruk gjerne baksiden av arket.)



Figur 2

Løsning:

Av figur 2: $\tan 30 = \frac{y}{x}$

Av figur 3: $\tan 30 = \frac{x}{0{,}5h}$

Vet at $y = 3\,cm$ (radius i sirkelen).

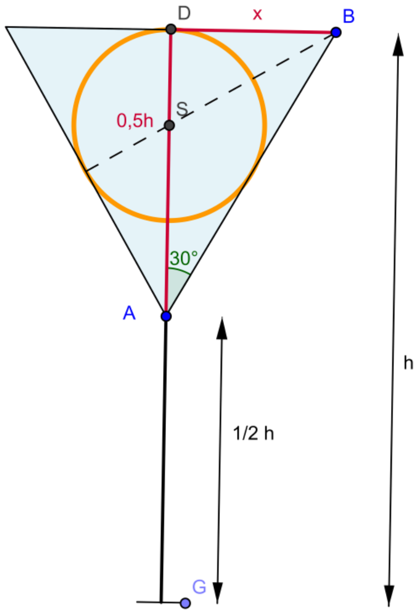
Vet at $\tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Setter inn og regner ut h:

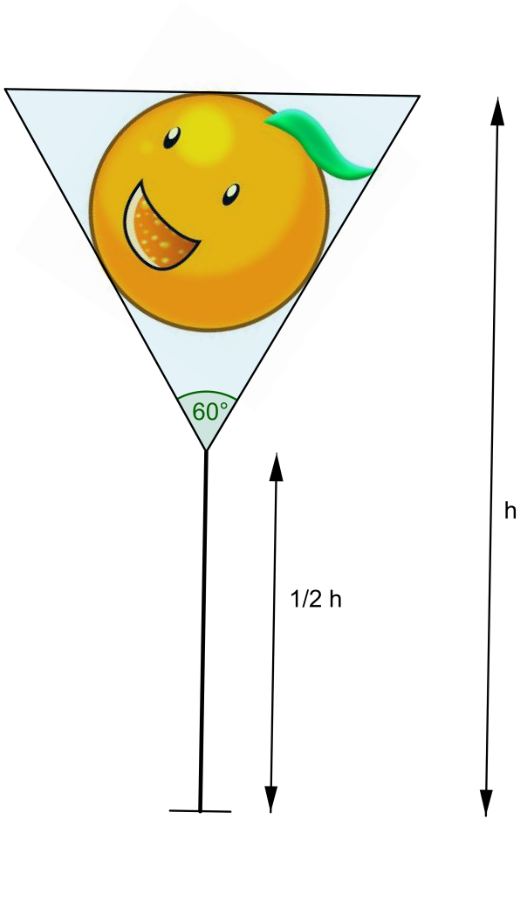
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{0{,}5\,h}$$

$$0{,}5\,h = 3 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\underline{\underline{h = 18}}$$



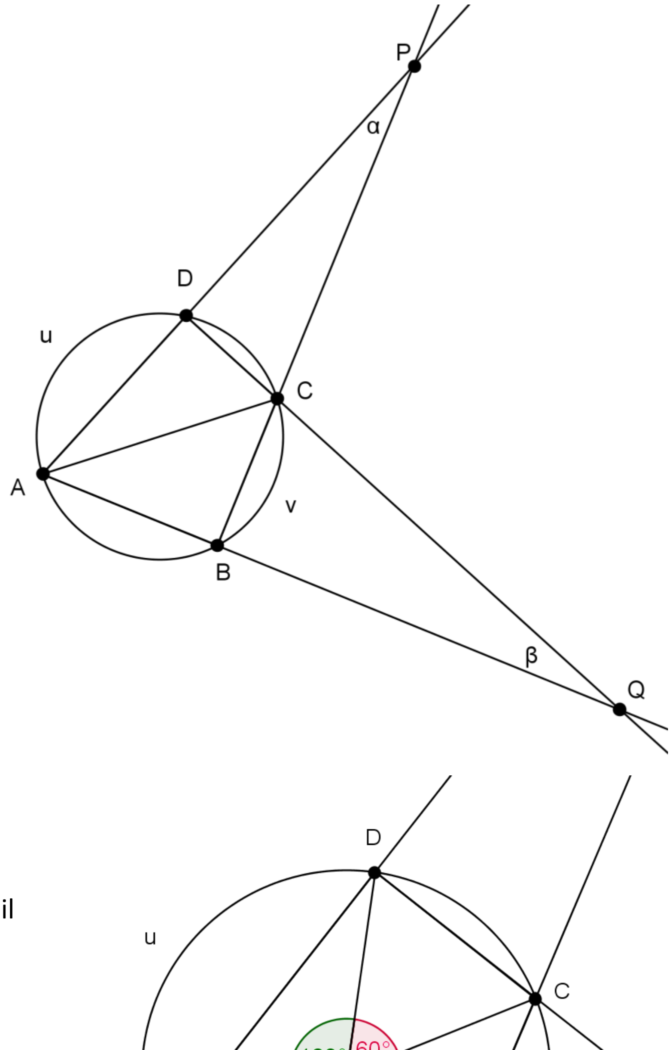
Figur 3



Jeg mener at de fleste eksamensoppgavene i geometri (R1) tester elevene i å «gjøre det de får beskjed om» heller enn å «finne ut hva de skal gjøre». Dette innebærer at disse eksamensoppgavene i stor grad kan ses på som repetisjonsoppgaver der elevene får vist hva de har lært. Det er sikkert fornuftig. Enkelte eksamensoppgaver bærer dessuten preg av å prøve å formidle matematikk som prosess: Oppgave 4 alternativ II høsten 2009 oppfordrer f.eks. til utforskning – gjerne i Geogebra. Oppgaven er likevel relativt «oppskriftsmessig». Det er få av eksamensoppgavene i geometri som bærer preg av å være problemer. Kanskje skyldes det den begrensede tiden elevene har til rådighet på eksamen. Oppgave 6 på del 2, høsten 2012, kan likevel karakteriseres som en problemløsnings-oppgave; her blir ikke elevene fortalt hvert trinn i løsningsprosessen, de må selv oppdage (i hvert fall noen av) dem:

Problem

$\square ABCD$ er innskrevet i en sirkel der AC er diameter. Buen $AD = u$ og buen $BC = v$. Forlengelsene av AD og BC skjærer hverandre i P. Vi setter $\angle P = \alpha$. Tilsvarende skjærer forlengelsene av AB og DC hverandre i Q, og vi setter $\angle Q = \beta$.



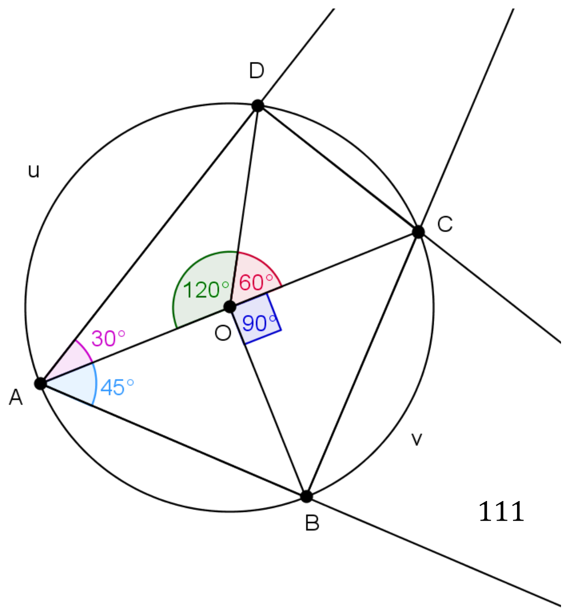
a) La $u = 120^\circ$ og $v = 90^\circ$. Forklar at da er $\angle BAD = 75^\circ$.

b) Vis at $\alpha = \beta = 15^\circ$ i dette tilfellet.

c) Vis at $\alpha = \beta$ for alle verdier av u og v (når $u \neq v$).

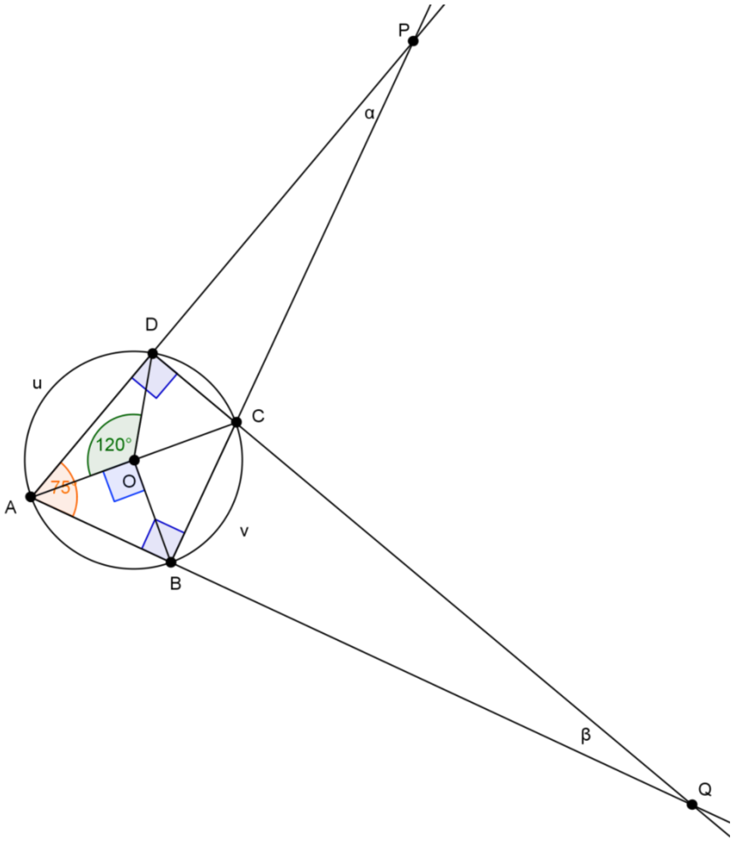
Løsningsforslag

a) Vi begynner med å tegne inn sentrum i sirkelen og trekker linjene fra sentrum til D og B. (Merk at disse linjene ikke på forhånd er tegnet inn i figuren for elevene.) u og v er sentralvinkler i sirkelen. Nå gir periferivinkelsetningen at $\angle BAC = 45^\circ$. Dessuten har vi at



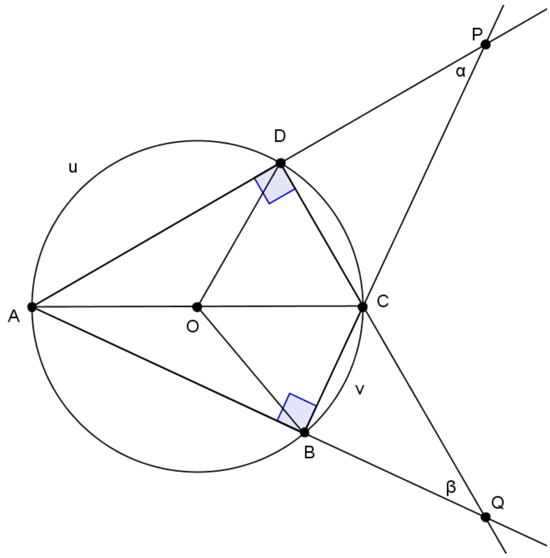
sentralvinkelen $\angle COD = 60^\circ$ (supplementvinkel til u). Da gir periferivinkelsetningen at $\angle CAD = 30^\circ$. Men da må $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 75^\circ$ slik som vi skulle vise.

(En alternativ løsning kunne være å utnytte at $\square ABCD$ er syklisk. $\angle DCB = 105^\circ$ siden den er en periferivinkel som spenner over samme bue som en sentralvinkel på 210°. Summen av motstående vinkler i sykliske firkanter er 180° så $\angle BAD = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.)



b) Ved Thales teorem må $\angle ADC = \angle CBA = 90^\circ$. (Merk at elevene ikke først blir bedt om å vise at disse vinklene er 90° – de må selv finne ut at dette vil føre dem nærmere løsningen på oppgaven. Alle trinnene i løsningen er altså ikke oppgitt.) Da gir vinkelsum i trekant at $\alpha = \beta = 180^\circ - (90 + 75)^\circ = 15^\circ$ slik som vi skulle vise.

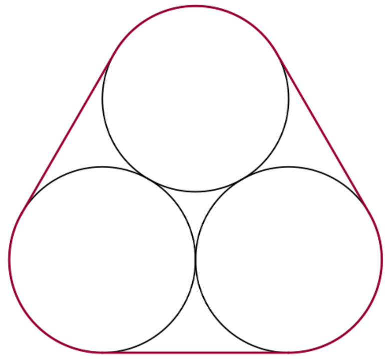
c) α og β er begge vinkler i en rettvinklet trekant ($\angle ADC = \angle CBA = 90^\circ$ ved Thales teorem). Disse to rettvinklede trekantene har en felles vinkel, nemlig $\angle BAD$. Størrelsen på denne vil variere når vi varierer u og v, men uansett har vi $\alpha = \beta = 180^\circ - (90^\circ + \angle BAD)$. Da har vi vist at $\alpha = \beta$ for alle verdier av u og v (når $u \neq v$) slik vi skulle vise. (For $u = v$ er ikke α og β definert, for da er linja gjennom AD parallell med linja gjennom BC.)



Problemet:

Følgende oppgave ble valgt som utgangspunkt for pilotstudien:

> Tre sirkler, som alle har radius 1, er plassert slik at de tangerer hverandre (se figur). Et tynt rødt tau er strukket rundt sirklene. Hva er lengden av tauet?



(Oppgaven er hentet fra runde 1 i Abelkonkurransen 2002/2003.)

Mitt løsningsforslag:

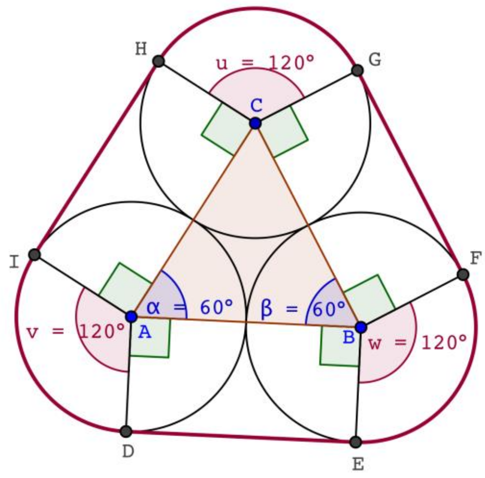
Trekk linjer mellom sentrum i hver av sirklene. Hvert av disse linjestykkene må ha lengde 2, så vi får en likesidet trekant. (Alle vinklene i $\triangle ABC$ på figuren er altså 60° og sidelengden er 2.)

En tangent til en sirkel står alltid vinkelrett på radien slik at

$\angle EDA = \angle BED = \angle GFB = \angle CGF = \angle IHC = \angle AIH = 90^\circ$

Da ser vi at hver av de «rette delene» av det røde tauet har lengde 2. Vi ser også at $\angle u = \angle v = \angle w = 120^\circ$ (siden $360 - (90 + 60 + 90) = 120$.) Da er hver av sirkelbuene som det røde tauet består av, en tredel av hele sirkellinja. Hver av disse buene har altså lengde

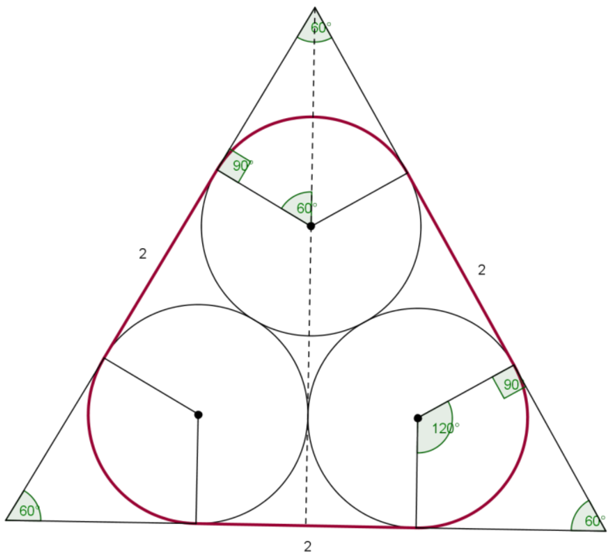
$$\frac{1}{3} \cdot \left(2\pi \cdot r\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(2\pi \cdot 1\right) = \frac{2\pi}{3}.$$



Til sammen har dermed det røde tauet lengde

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = \underline{\underline{6 + 2\pi}}.$$

Elevens besvarelse på oppgaven



Eleven skriver:

- Likesidet trekant
- Når du trekker høyden, deles vinkelen oppe i to. Den går gjennom sentrum av den øverste sirkelen. Dette gjelder alle sirklene.
- Når du lager en trekant, blir det på en måte tangenten til sirkelen.
- Når du tegner radius til tangeringslinjen, blir vinkelen som oppstår 90°. Vinkelen på 60° deles i to $=30^\circ$. Da blir den siste 60°.
- Dette fører til at vinkelen blir 120°
- Omkrets $=2\pi r$
- Den omkretsdelen vi trenger er 1/3 av sirkelen så regnestykket blir:

  $$\frac{2\pi r}{3}=\frac{2\pi\cdot 1}{3}\approx\frac{6,28}{3}\approx 2,093$$

- Så lengden på tauet blir $2+2+2+\left(3\cdot 2,093\right)=\underline{\underline{12,28}}$

Jeg syntes det var interessant at elevens løsning var noe annerledes enn den jeg selv hadde funnet. Jeg spør om hun stod fast noe sted underveis, og hun kan berette at hun umiddelbart så at de rette delene av tauet hver hadde lengde 2, men strevde en stund før hun kom videre herfra.

Wenche: Hva gjorde du for å komme videre? (…) Var det noen spesielle strategier du brukte?

Elev: (…) eeeh, nei [latter] (…) jeg tegnet jo…

Wenche: Du har jo en figur her [peker på tegningen på elevbesvarelsen].

Elev: Ja, jeg tegnet jo den trekanten, og så trakk jeg høyden, og så kom bare det ene etter det andre.

Oppgaven illustrerer noe som kanskje er opplagt i forbindelse med geometrioppgaver – en god figur kan være halve løsningen.

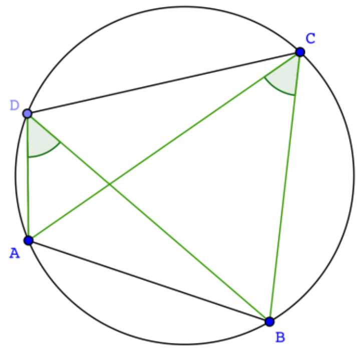
Den viktigste konsekvensen av forundersøkelsen ble at jeg besluttet å utarbeide et spørreskjema. Dette er redegjort for i masterstudiens hoveddel.

VEDLEGG 7 SYKLISKE FIRKANTER MED MER.

En firkant kalles syklisk dersom vi kan tegne en sirkel gjennom alle hjørnene.

Hvordan finne sykliske firkanter?

1. To like vinkler spenner over samme linjestykke og ligger på samme side av det, f.eks. $\angle ADB = \angle ACB$ (eller noen av de andre tilsvarende definerte vinklene er like).



2. Summen av motstående vinkler blir 180°.

Punkt 1 og 2 er de vanligste måtene å finne sykliske firkanter på.
Men av og til kan vi bruke:

3. Punktets potens «baklengs» (se eksempel nedenfor).

4. Ptolemeos likhet $(AC)(BD) = (AB)(CD) + (AD)(BC)$ gjelder hvis og bare hvis $\square ABCD$ er syklisk.

Vi vet altså at $\square ABCD$ er syklisk hvis vi kan vise én av følgende:

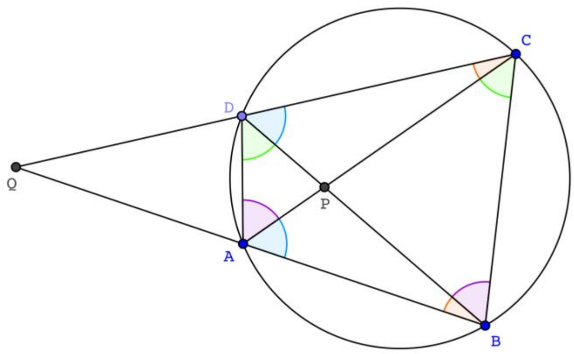
1) $\angle ADB = \angle ACB$ (eller noen av de andre vinklene med lik farge i figuren er like.)

2) $\angle ADB + \angle ACB = 180^\circ$ (eller $\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$)

3) $(PA)(PC) = (PD)(PB)$ (Punktets potens)

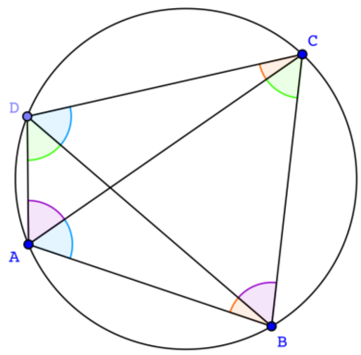
4) $(QC)(QD) = (QB)(QA)$ (Punktets potens)

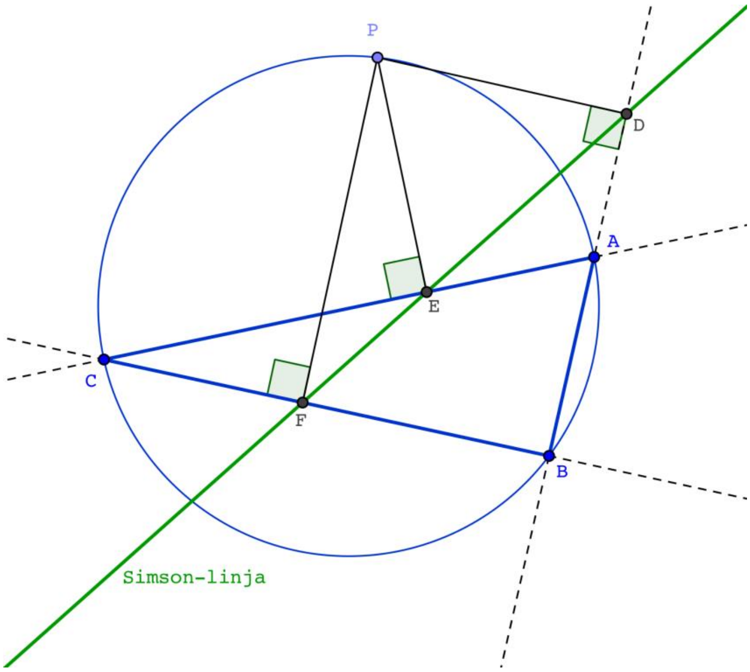
5) $(AC)(BD) = (AB)(CD) + (AD)(BC)$ (Ptolemeo)



Hvordan bruke sykliske firkanter?

Sykliske firkanter er et viktig redskap for å vise at vinkler er like. En syklisk firkant gir oss en hel «bukett» like vinkler: Si at du i en oppgave får oppgitt at de to grønne vinklene i figuren er like. Da vet du at $\square ABCD$ er syklisk. Da vet du også (ved periferivinkelsetningen) at alle de andre vinklene tegnet i samme farge er like!



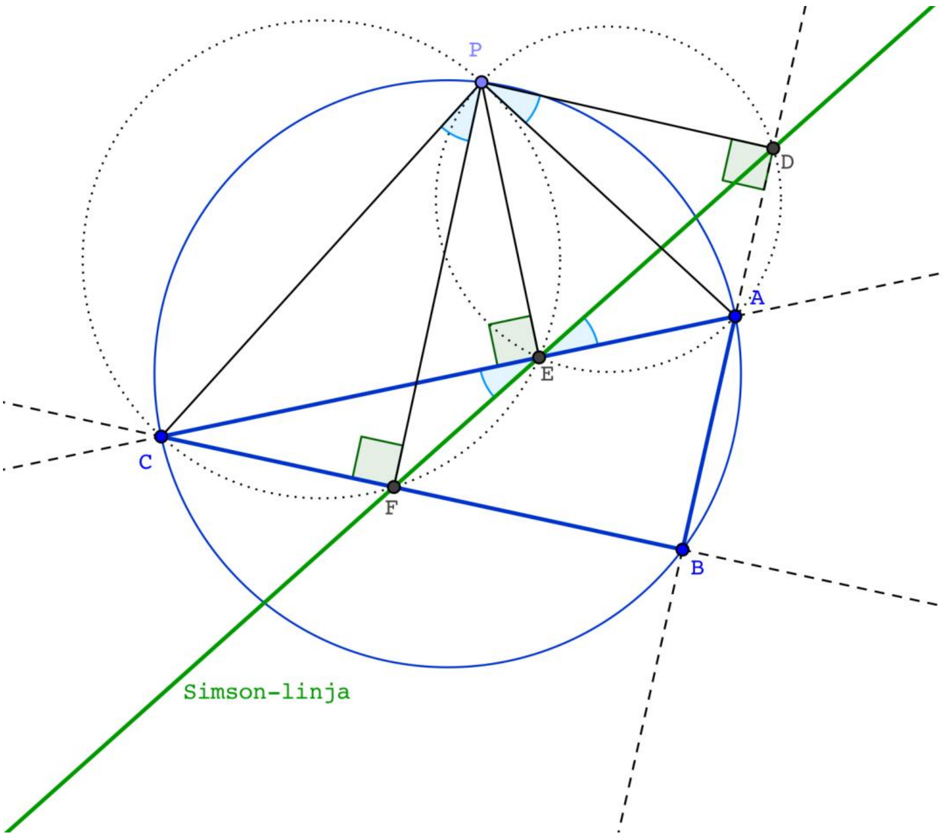


La P være et punkt på omsirkelen til $\triangle ABC$. Fell normaler ned på sidekantene AB, AC og BC (forlenget om nødvendig). Kall fotpunktene for D, E og F. D, E og F ligger på en rett linje. Denne linja kalles Simson-linja.

Vi beviser at D, E og F ligger på en rett linje ved å vise at $\angle AED = \angle CEF$.

Først:

Siden P er på omsirkelen til $\triangle ABC$, er $\angle CPA = 180^\circ - \angle B$. Merk at $\square ADPE$, $\square PFBD$ og $\square PEFC$ er sykliske. (De to førstnevnte fordi motstående vinkler summer til 180°, den siste fordi $\angle PEC = \angle PFC$.) Fra $\square PFBD$: $\angle FPD = 180^\circ - \angle B = \angle CPA$.



Dersom vi tar bort den felles vinkelen $\angle FPA$ fra disse to like vinklene, får vi at $\angle CPF = \angle APD$.

Fra $\square ADPE$ og $\square PEFC$ får vi $\angle CEF = \angle CPF = \angle APD = \angle AED$.

Men da ser vi spesielt at $\angle AED = \angle CEF$. Da ligger D, E og F på en rett linje.

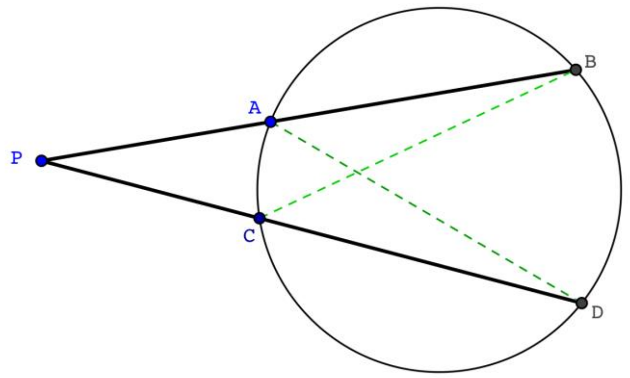
Beviset er hentet fra Rusczyk og Lehoczky (2010, s. 234).

En linje gjennom et punkt P skjærer en sirkel i to punkter A og B.

For alle slike linjer er produktet $PA \cdot PB$ konstant.

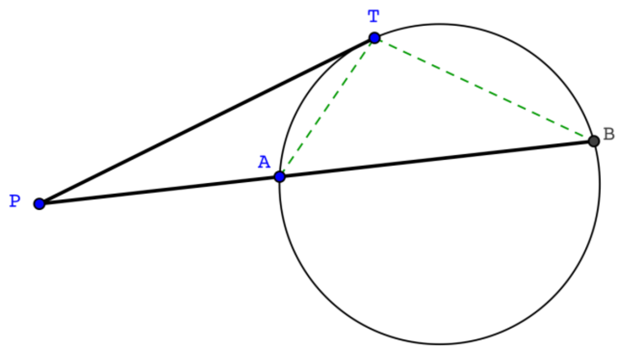
Bevis for dette utledes lett fra formlikhet (se figurene nedenfor) og gjennomgås ikke her.

Setningen om punktets potens (power of a point) kan illustreres med følgende figurer:



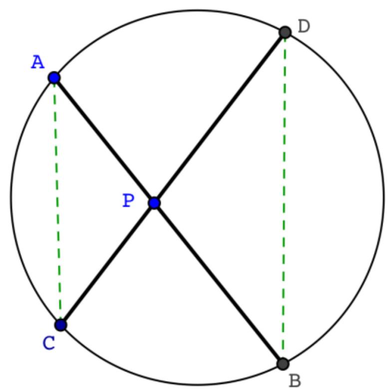
P utenfor sirkelen:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



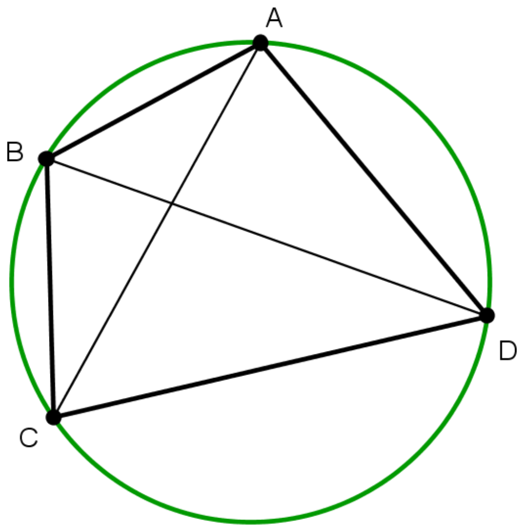
Et spesialtilfelle:

$$PT \cdot PT = PA \cdot PB$$



P inni sirkelen:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Det finnes mange bevis for Ptolemeos teorem. Det følgende er hentet fra Posamentier og Salkind (1996, s. 164–165).

Ptolemeos teorem

$\square ABCD$ er syklisk hvis og bare hvis

$$(AB)(CD)+(AD)(BC)=(AC)(BD)$$

Bevis:

Marker et punkt P på forlengelsen av CD slik at $\angle DAP=\angle BAC$. Vi vet at hviss $\square ABCD$ er syklisk, er $\angle CBA=\angle PDA$ (summen av motstående vinkler i en syklisk firkant blir 180°, og $\angle PDA$ og $\angle ADC$ er supplementvinkler).

Men da har vi to formlike trekanter: $\triangle BAC \simeq \triangle DAP$. Dermed: $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DP}$ som vi like gjerne kan skrive $DP=\frac{(AD)(BC)}{(AB)}$ $*$

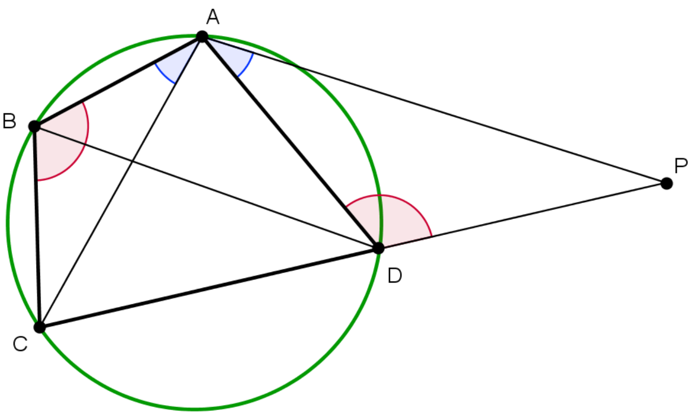
Siden $\triangle BAC \simeq \triangle DAP$ følger det også at $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AP}$. Videre ser vi at $\angle BAD=\angle CAP$. Men da må også $\triangle ABD \simeq \triangle ACP$ slik at $\frac{BD}{CP}=\frac{AB}{AC}$ som vi like gjerne kan skrive $CP=\frac{(AC)(BD)}{(AB)}$ $**$

$CP=CD+DP$ Bruker * og ** og får:

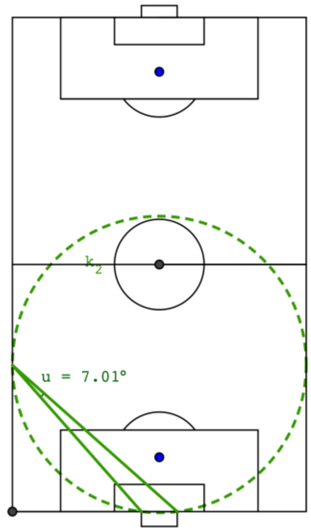
$\frac{(AC)(BD)}{(AB)}=CD+\frac{(AD)(BC)}{(AB)}$ Multipliserer med AB:

$(AC)(BD)=(AB)(CD)+(AD)(BC)$

(Det går ekvivalens mellom alle trinnene i beviset, og vi har derfor vist begge veier.)



Problem



Figur 1

Du skyter mot mål fra langsida på en fotballbane. Hva er beste plassering (dvs. hvor får vi den største vinkelen inn mot målet)? (Omformulert fra Borgersen (1994)).

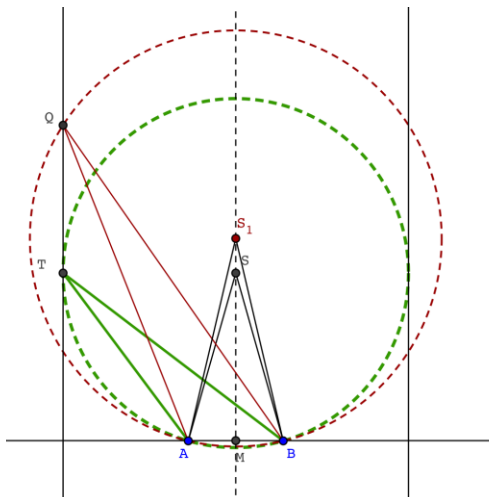
Løsningsforslag og kommentarer

Den første gangen jeg støtte på dette problemet var i forbindelse med «Notatbok i problemløsning» – et prosjektarbeid i kurset MMD100 «Undervisningskunnskap i Matematikk» ved oppstarten av masterstudiet i matematikkdidaktikk ved UiS. Løsningen jeg presenterer her er en noe kortere utgave av den jeg leverte i MMD100. (Her ble problemet formulert som beste plassering langs sidelinja for å se på en fotballkamp mellom Rosenborg og Viking ☺.)

Jeg begynte med utforskning i GeoGebra. Etter mye prøving og feiling og frustrasjon laget jeg en sirkel gjennom «målstengene» + et punkt på sidelinja (altså sirkelen definert av disse tre punktene). Jeg dro så i punktet på sidelinja og kom fram til at vinkelen til målet ville være størst når sirkelen tangerte sidelinja – se figur 1. Vinkelen ville da bli 7,01 grader. (Da hadde jeg valgt kortsiden = 60 og målbredden = 7,32.)

Bevis

Vi vil vise at den største vinkelen til målet med toppunkt på sidelinja er $\angle ATB$ der T er tangeringspunktet i en sirkel gjennom A, B og T som tangerer sidelinja:



Figur 2

Vi kan alltid finne en sirkel Ω_1 gjennom A, B og et vilkårlig punkt Q på sidelinja. La S_1 være sentrum i Ω_1. $\angle AQB$ er en periferivinkel i denne sirkelen; sentralvinkelen $\angle AS_1B$ er dobbelt så stor som $\angle AQB$. Hvis vil kan maksimere $\angle AS_1B$, vil vi dermed også maksimere $\angle AQB$. Punktene A og B («målstengene») står fast, men jo mindre vi gjør høyden i den likebeinte $\triangle ASB$, jo mindre blir de to like vinklene A og B, og jo større blir $\angle AS_1B$, dvs. jo større blir sentralvinkelen i Ω_1. Vi leter altså etter den minste mulige sirkelen gjennom A, B og et punkt Q på sidelinja, (da blir sentralvinkelen størst, og følgelig også periferivinkelen $\angle AQB$ størst.) Men den minste sirkelen vi kan lage som går gjennom et punkt på langsiden av fotballbanen og som har sentrum på midtnormalen på AB, er nettopp sirkelen som tangerer begge langsidene. Kall tangeringspunktet T, og $\angle ATB$ er vinkelen vi søker.

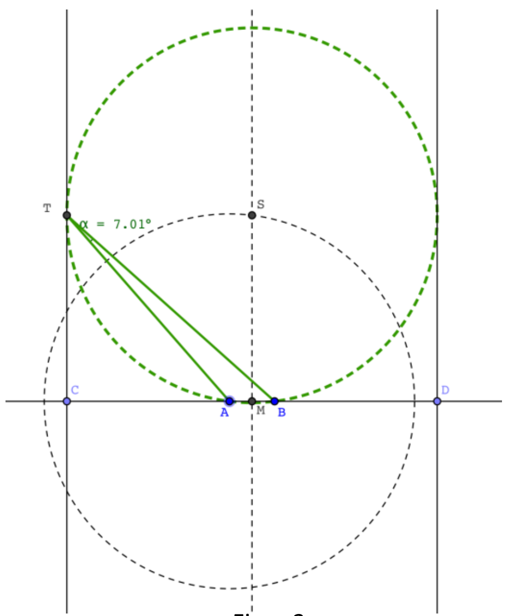
I det nevnte prosjektet skulle vi også *konstruere* den optimale posisjonen. Konstruksjonsoppgaver er med på å gi forståelse, og kan absolutt anbefales i skolesammenheng. De brukes også i en del matematikkkonkurranser (f.eks. i USA).

Konstruksjonsforklaring

1. Avsetter linjestykket CD med lengde 60 (kortsiden til banen), konstruerer normaler til CD i C og D, og konstruerer midtnormalen på CD. Kaller midtpunktet M.
2. Slår en sirkelbue med radius $3{,}66$ (halvparten av avstanden mellom målstengene) om M for å bestemme A og B («målstengene»).

(Vil finne $\triangle ABT$ der T er et punkt på den ene langsiden (velger venstre) slik at en sirkel gjennom A, B og T tangerer langsiden. Dette vil være omsirkelen til $\triangle ABT$. Kaller omsirkelen Ω. Sentrum i Ω ligger på skjæringspunktet til midtnormalene på sidekantene i trekanten. Merk at midtnormalen på CD også er midtnormal på AB. At sentrum i Ω ligger på denne midtnormalen og også tangerer venstre langside, må bety at Ω også tangerer høyre langside. Da må radien i Ω være lengden av kortsiden delt på to; altså $r = 30$.)

3. Slår en sirkelbue med radius 30 om A (eller B; de to sirkelbuene skjærer midtnormalen i samme punkt). Skjæringspunktet mellom sirkelbuen og midtnormalen på AB er sentrum, S, i Ω.
4. Finner Ω ved å slå en sirkel om S med radius $= SA (= SB)$. (Ω går gjennom A og B – ikke M – synes ikke så godt på figuren siden bredden på målet er så liten.)
5. Tangeringspunktet mellom langsiden og Ω er den optimale plasseringen langs sidelinja slik at vinkelen til målet blir størst.



Figur 3

Avstand til hjørneflagget

Vi skulle også finne avstanden fra denne optimale posisjonen til hjørneflagget når bredden til grasmatta på Viking stadion er 60 meter og bredden til målet er $7,32$ m.

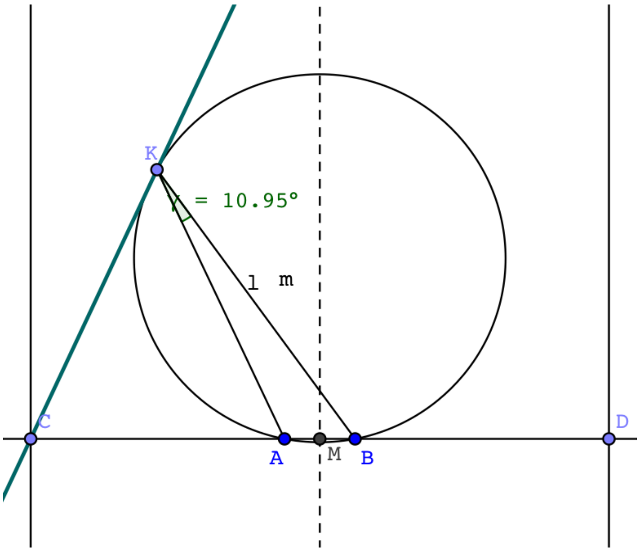
Løsning: I konstruksjonsforklaringen ovenfor har vi begrunnet hvorfor radien i Ω er 30 meter. Da er $AS = 30$ meter. $AM = \frac{7,32}{2} = 3,66$ meter. Nå gir Pythagoras: $SM = \sqrt{30^2 - 3,66^2} \approx 29,78\, meter$

Avstanden fra tangeringspunktet til hjørneflagget = $TC = SM = \underline{\underline{29,78\, meter}}$

Generalisering

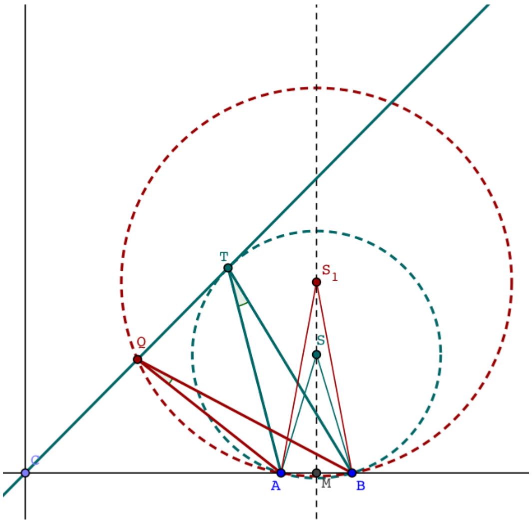
> Erik Nevland løper langs en vilkårlig rett linje mot hjørneflagget. Hvor på denne linja må du skyte for å få størst mulig vinkel til målet?

(Henvisningen til Nevland her kommer fra kurset MMD100, der dette problemet refererte til en fotballkamp mellom Rosenborg og Viking.)



Figur 4

La A og B være «målstengene» slik som før, og la K være et punkt på den vilkårlige linja gjennom hjørneflagget. Utforskning i GeoGebra viser at vinkelen til mål ($\angle AKB$ på figur 4) er størst når sirkelen gjennom A, B og K akkurat tangerer linja Nevland løper langs (heretter kalt «Nevlandlinja»). Størrelsen på vinkelen er avhengig av *hvilken* linje Nevland beveger seg langs, men i alle tilfeller er den størst når sirkelen gjennom A, B og K tangerer linja. For å bevise at det stemmer (se figur 5) kan vi bruke et helt tilsvarende resonnement som det vi gjorde da vi maksimerte vinkelen til målet med toppunkt på sidelinja (Dette var jo også et spesialtilfelle av det mer generelle tilfellet vi ser på nå.)



Figur 5

Avstand til hjørneflagget i det generelle tilfellet

Vi skal finne avstanden fra Nevland til hjørneflagget når bredden på banen er 60 m og bredden på målet er $7,32$ m. Vi kan bruke setningen om punktets potens. Med betegnelsene på vår figur får vi

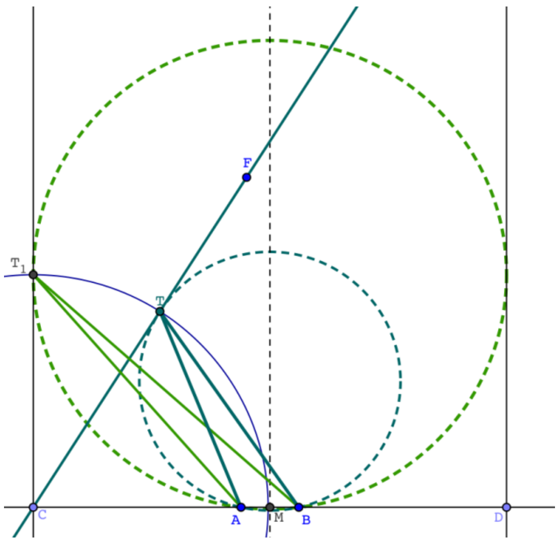
$$CT^2 = CA \cdot CB$$
$$x^2 = \left(30 - \frac{7,32}{2}\right) \cdot \left(30 + \frac{7,32}{2}\right)$$
$$\underline{\underline{x = 29,78}}$$

Avstanden fra Nevland (som selvsagt skyter fra best mulige posisjon på linja ☺)til hjørneflagget er altså $29,78$ meter. Jeg ble overrasket over at Nevland vil være $29,78$ meter fra hjørneflagget når vinkelen til målet er størst, uansett hvilken linje inn mot hjørneflagget han befinner seg på. Wow!

Til slutt kan vi *konstruere* den optimale posisjonen for skudd mot mål fra en vilkårlig linje inn mot hjørneflagget (se figur 6). Når jeg nå (i GeoGebra) trakk i det som er punkt F i figur 6, kunne jeg se at uansett hvordan jeg flyttet F – og dermed laget nye «Nevlandlinjer» inn mot hjørneflagget – så beveget punktet T seg hele tiden langs den mørkeblå sirkelbuen.

Konstruksjonsforklaring:

6. Begynn med å konstruere sirkelen gjennom A og B som tangerer sidelinja til banen (grønn sirkel her i figur 6). Denne konstruksjonen har jeg forklart før. Kall dette tangeringspunktet T_1.
7. Tegn en tilfeldig linje gjennom hjørneflagget (C), (turkis på figuren).
8. Slå en sirkelbue med sentrum i C og radius CT_1. Vi har vist at uansett hvilken linje Nevland befinner seg på, vil han være på denne (blå) sirkelbuen når plasseringen er optimal.
9. Finner T (optimal plassering) som skjæringspunktet mellom den blå sirkelbuen og den turkise linja.
10. Nå er egentlig konstruksjonen ferdig, men for å illustrere at sirkelen gjennom A, B og T nettopp er sirkelen som tangerer linja, kan vi konstruere denne sirkelen – turkis stiplet på figur 6. (Finner sentrum som skjæringspunktet mellom midtnormalene i $\triangle ATB$.)



Figur 6

VEDLEGG 9 INFORMASJONSBREV

(Informasjon i dette vedlegget er anonymisert. Det første informasjonsbrevet er delt ut til deltakere i en Abel-gruppe ved en videregående skole; det andre er sendt til deltakere på en treningsleir i forkant av en matematikkonkurranse.)

INFORMASJONSSKRIV VEDRØRENDE FORSKNINGSSTUDIE OM PROBLEMLØSNING

Jeg vil her informere om en forskningsstudie jeg er i gang med i tilknytning til mitt masterarbeid i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger. Målet med studien er å få mer kunnskap om hvordan oppgavetyper som brukes i matematikkonkurranser kan benyttes også i skolens matematikkundervisning.

Jeg er særlig interessert i problemløsningsoppgaver i geometri, og jeg har tidligere vært så heldig å få delta (som observatør) på en treningsleir i problemløsning i forkant av en matematikkonkurranse. Her jeg fikk anledning til å intervjue moen av deltakerne om hvilke kunnskaper, ferdigheter og strategier de bruker når de løser konkurranseoppgaver i geometri.

Nå ønsker jeg å utvide studien til også å omfatte en såkalt Abel-gruppe ved en videregående skole og har derfor tatt kontakt med dere på Solbakken vgs. Et par av dere som er med i Abel-gruppa vil bli spurt om å delta på et lite intervju (individuelt eller sammen) der dere forklarer løsningsstrategiene deres i en oppgave dere har løst. Det vil benyttes lydopptak til intervju, og alle opptak vil slettes/destrueres når prosjektet er avsluttet. Medvirkning i et slikt intervju er selvfølgelig frivillig. En kan når som helst si nei takk til et intervju, eller velge å trekke seg fra et allerede påbegynt intervju. Alle data som samles inn gjennom observasjoner og intervju vil bli behandlet konfidensielt og anonymisert.

Det ferdige arbeidet vil presenteres i min masteroppgave, våren 2013. Nærmere informasjon kan fås ved henvendelse til Wenche Fosli, w.fosli@stud.uis.no eller til min veileder ved Universitetet i Stavanger, Arne Jakobsen, arne.jakobsen@uis.no.

Vennlig hilsen

Wenche Fosli

Masterstudent i matematikkdidaktikk, UiS

Jeg vil her informere deg som deltaker på det norske laget i «Matematikkmesterskapet» om en forskningsstudie jeg ønsker å gjennomføre i løpet av treningsleiren i Sørvika 3.–8. oktober.

Jeg er masterstudent i Matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger (UiS), og er i denne forbindelse interessert i problemløsning. Målet med studien er å få mer kunnskap om hvordan oppgavetyper som brukes i matematikkonkurranser kan benyttes også i skolens matematikk-undervisning. Jeg håper denne forskningsstudien kan utgjøre en sentral del av min masteroppgave.

I denne forbindelse ønsker jeg å observere hvordan deltakerne jobber med matematikk i løpet av treningsleiren i Sørvika. Et par av deltakerne vil bli spurt om å være med på et intervju (individuelt eller i gruppe) der de forklarer løsningsstrategiene sine i noen av de oppgavene de har jobbet med. Jeg er særlig interessert i å finne ut hvilke strategier som er brukt i problemløsningsoppgaver i geometri. Det vil benyttes lydopptak til intervju, og alle opptak vil slettes/destrueres når prosjektet er avsluttet. Medvirkning i et slikt intervju er selvfølgelig basert på frivillighet. En kan når som helst si nei takk til et intervju, eller velge å trekke seg fra et allerede påbegynt intervju. Alle data som samles inn gjennom observasjoner og intervju vil bli behandlet konfidensielt og anonymisert. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning ved NSD.

Det ferdige arbeidet vil presenteres i min masteroppgave, høsten 2013. Nærmere informasjon kan fås ved henvendelse til Wenche Fosli (masterstudent), 94986577 w.fosli@stud.uis.no eller til min veileder ved Universitetet i Stavanger, Arne Jakobsen, 97097369, arne.jakobsen@uis.no.

Vennlig hilsen Wenche Fosli

Masterstudent i matematikkdidaktikk, UiS

Svarslipp:

Jeg samtykker i at det kan samles inn observasjonsdata (om løsningsstrategier i geometrioppgaver) og eventuelt foretas intervju slik det er beskrevet i dette brevet.

Ja   Nei   (sett ring rundt valg)

Underskrift deltaker: ....

VEDLEGG 10 TRANSKRIPSSJONSNØKKEL OG TRANSKRIPSJONER

TRANSKRIPSSJONSNØKKEL

Jeg har valgt å normere transkripsjonene til bokmål. Jeg mener at i disse intervjuene er det viktigste å formidle mening og bruker derfor også ofte matematisk notasjon. Matematisk notasjon kan nok innebære at noen småord fra det muntlige språket faller bort. Å transkribere gjengivelser av til dels lange utregninger uten bruk av matematisk notasjon, kan imidlertid føre til at det blir veldig vanskelig å oppfatte meningen med det som blir sagt. Det er her snakk om matematiske uttrykk som ble skrevet ned samtidig som de ble gjengitt muntlig. Jeg tror derfor det er rimelig å bruke matematisk notasjon også i transkripsjonene.

Funksjon	Tegn	Beskrivelse
Pause (> 3 s)	(ns) der n = antall sekunder	Pauser i antall sekunder
Kort pause	(.)	Pauser på under et sekund
Litt lengre pause	(…)	Pauser på 1–3 sekund
Konklusjon	.	Som punktum
Spørsmål	?	Indikerer et spørsmål
Forsterkning	Understrekning av tekst	Indikerer at ord eller setninger blir forsterket
Forklaring av ikke-verbal handling	[ ]	Forklarer f.eks. hvilke linjer, vinkler eller likninger eleven peker på.

Intervjuer: OK (…) Problem 1.

Svein: OK, det første var jo da (…) du ser jo at det likner veldig på en Simsonlinje, nettopp fordi at du ser at hvis du fjerner et punkt så har vi en trekant, og så har vi normalene ned på hver av sidene [peker på figuren] så det er egentlig bare å vise at D ligger på sirkelen gjennom den, den og den [H, E og C] og at D ligger på sirkelen gjennom (…) hvordan blir det her da [ser på figuren], nei oi (…)

Intervjuer: Du må gjerne se på notatene dine hvilke trekanter du brukte. Det finnes sikkert flere mulige løsninger her (…)

Svein: [finner fram notater til oppgaven] (5 s) Jeg brukte (…) ja klart, den trekanten der [peker på figuren].

Intervjuer: Tegn gjerne inn på figuren hvilke trekanter du brukte.

Svein: Ja (…) kan jeg gi et navn på den? [peker på ortosenteret]

Intervjuer: Ja, det må gjerne hete H.

Svein: H OK. Da ser jeg på trekant HEC og trekant BFH. Så vil jeg vise at D ligger på omsirkelen til begge dem da, og da var det jo 90° der [peker på vinkel HEC] og 90° der [peker på vinkel CDH], og samme her [peker mot syklisk firkant HFBD].

Intervjuer: Og da hadde du løsningen. Takk.

Intervjuer: OK (…) det står altså at firkant ABCD er et kvadrat. Hvis P er et punkt på omsirkelen til firkant ABCD som ligger på buen AD (…) altså her [peker på AD], så skal vi vise at verdien av PA pluss PC delt på PB ikke avhenger av hvor på AD P er plassert.

Marie: Jeg tenkte jeg ville (…) finne en eller annen sammenheng som inneholdt de sidene [peker på PA, PC og PB] i tillegg til noen sider jeg kunne gjøre noe med, (…) sidene i kvadratet og diagonalen (…) og da ser jeg på den firkanten [peker på ABCP] så inneholder jo den de sidene jeg kan gjøre noe med, og da er jo den [peker på PB] diagonalen. Så alle de sidene jeg har lyst til å gjøre noe med eller kan gjøre noe med, inngår jo i (…) Ptolemeo, så det kom egentlig ganske av seg sjøl.

Intervjuer: Så da kom Ptolemeo av seg selv?

Marie: Ja

Intervjuer: Hva syns du (…) den type oppgaver som du jobber med her, har du nytte av dette i R1, eller (…) har du har du hatt det, eller har du nytte av R1 i forhold til dette?

Marie: Ptolemeo var jo inkludert i R1-boka.

Intervjuer: Du hadde den i R1?

Marie: Ja

Intervjuer: akkurat, ja (…) men det er ikke opplagt. [Ut fra det jeg kjenner til av lærebøkene i R1 lurer jeg på om Marie her blander sammen med Punktets potens. Jeg vet at Punktets potens gjennomgås i én av R1-bøkene, men tror ikke det stemmer at Ptolemeo gjennomgås. Jeg er noe usikker, og lar være å nevne noe om dette. Jeg har i ettertid prøvd å finne en oppgave fra R1-bøkene som gjennomgår Ptolemeo, men har ikke lykkes med dette.]

Marie: Ja, vi skulle bevise den. Så det går jo for så vidt an å bruke R1 for å løse de, i hvert fall et par av oppgavene. Men jeg syns dette er veldig tungt i forhold til det jeg lærte på skolen.

Intervjuer: Dette er mye tyngre?

Marie: Ja, veldig mye tyngre.

Intervjuer: Hadde det vært kjekt å ha noe sånn som dette på skolen?

Marie: Ja, helt klart.

Svein: Ja!

Intervjuer: [henvendt til Svein]: Hvordan tenkte du på det problemet her? [Peker på arket med oppgaven]

Svein: Det var egentlig akkurat samme greia (…) det var jo at du ser at alle sidene er i den [peker på figuren], og det var en sirkel rundt dem, og da var det Ptolemeo.

Intervjuer: Stod du fast underveis?

Svein: Nei (…) siden alle punktene lå på en sirkel, så var det første jeg tenkte Ptolemeo, og så prøvde jeg det, og så funka det jo.

Intervjuer: Syns du dette var en lett oppgave?

Svein: Ja (4 s) du ser jo at det likner på Ptolemeo [latter]

Intervjuer: [henvendt til Kenneth]: Har du lyst til å forklare hvordan du tenkte?

Kenneth: Hvis du setter et punkt på en eller annen plass her, så for det første så vil den vinkelen her [peker på vinkel APC] den vinkelen vil bli 90 grader på grunn av Thales setning, og siden (…) skal vi se, hvis vi trekker ned dit og (…) dit og dit [tegner inn PA, PB og PC] (…) CPB blir en vinkel som spenner over samme buen som den sentralvinkelen der som er 90 grader, så blir den 45 grader. Og den [peker på vinkel APB] og den blir 45 grader av samme grunn.

Intervjuer: *Ja*

Kenneth: Så hvis vi tar at den er x og den er x [kaller sidene i kvadratet x; skriver dette inn på figuren] så får vi roten av 2 x her [skriver $\sqrt{2}\cdot x$ ved diagonalen] og den trekanten her [trekant APC] er rettvinkla og den [hypotenusen] er roten av 2 x, så da får vi at a i andre pluss c i andre er roten av 2 gange x i andre [$\left(\sqrt{2}\cdot x\right)^2$] som er 2 x i andre [skriver ned $a^2+c^2=2x^2$ på arket] og i tillegg til det så kan vi bruke cosinussetningen og få at $x^2=a^2+b^2-2ab\cos 45$ og at $x^2=b^2+c^2-2bc\cos 45$

[skriver mens han snakker]. Og da, siden der har jeg $2x^2$, [peker på likningen $a^2 + c^2 = 2x^2$] og der har jeg x^2, [peker på de to likningene med x^2] så vil det si at $a^2 + c^2$ er lik alt det der [peker på de to uttrykkene for x^2] Så når vi slår det sammen får vi $a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos 45 - 2bc\cos 45$ [skriver mens han snakker]. a er på begge sider, og c er på begge sider, så de går vekk. Så kan vi flytte de [peker på de to leddene med cosinus] over på andre siden for å få de til å bli positive, så får vi $2b^2 = 2ab\cos 45 + 2bc\cos 45$ [skriver mens han snakker] og cosinus til 45 er jo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ som vil si at $2b^2$ blir lik (...) $\sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,bc$. Så deler vi på b over det heile, og da får vi $2b = \sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,c$. Og når vi da setter det inn i ja ja, så deler vi på to først selvfølgelig, så da får vi at $b = \frac{\sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,c}{2}$. Og når vi setter det inn i $\frac{a+c}{b}$ som er det du får ut av $\frac{PA + PC}{PB}$ med mine bokstaver, så får vi $a + c$ delt på det styret der [peker på $b = \frac{\sqrt{2}\,a + \sqrt{2}\,c}{2}$] som ender opp med å bli $\sqrt{2}$.

Intervjuer: Jeg lurer litt på hvordan du kom på å bruke cosinussetningen. Var det fordi du måtte finne en måte å bruke b [PB] på, eller så du at du hadde en vinkel som du kjente cosinus til og lurte på hvordan du kunne bruke det?

Kenneth: Nei, nei, det var i motsatt rekkefølge. Jeg så først ikke at vinkelen var 45 grader, men jeg måtte jo få med meg den siden [peker på b] på en eller annen måte. Og da kom jeg ingen vei før jeg så at vinkelen var jo 45 grader, og da skjønte jeg at jeg kunne bruke cosinussetningen.

Intervjuer: OK, takk.

Kenneth: Det her det krever jo ikke at du kan mer enn det du lærer på skolen. Men på den andre siden så var den løsningen så komplisert. Litt unødvendig rett og slett.

Intervjuer: Jo, men samtidig så er det jo kjekt å se at det går an å gjøre ting på flere måter.

[Denne oppgaven ble også diskutert ved lunsjbordet. De følgende to utsagnene er ikke tatt opp på lydbånd, men notert ned rett etter lunsjen.]

Kenneth: Problemet med å bruke en sånn oppgave som dette [problem 2] i R1, er at om du får oppgaven når du nettopp har lært om Ptolemeo, så blir det alt for lett.

Elev: Jeg tror en flink elev ville likt det. Du får lære noe nytt, og så får du se at det virker.

Datagrunnlaget for korrelasjonsanalysen er følgende tabell basert på opptellinger fra avkrysningstabellene (vedlegg 12):

Kategorier	R1	Abel Runde 1	Abel Runde 2	Abel Finale	IMO
Formlikhet	14	15	28	26	50
Periferivinkelsetningen	27	4	8	16	50
Thales teorem	18	0	8	16	33
Konstruksjoner	23	0	0	5	33
Bevis	77	0	0	84	100
Omsenter	5	0	4	26	33
Innsenter	18	0	0	16	33
Tyngdepunkt	0	0	4	5	0
Ortosenter	5	0	0	0	17
Sirkel	41	19	32	59	100
Midtnormal	9	0	0	32	83
Vinkelhalveringslinje	18	0	4	26	67
Median	0	0	4	5	17
Pythagoras	23	48	28	26	0
Vinkelsum trekant	36	19	32	16	67
Komplementvinkel	0	6	0	5	0
Supplementvinkel	18	10	20	0	50
Parallellitet	5	6	16	5	33
Ortogonalitet	0	0	4	11	17
Andre vinkelberegninger	9	17	12	11	17
Arealberegninger	32	52	32	26	17
Omkretsberegninger	5	13	0	0	0
Sykliske firkanter	9	0	4	11	67
Punktets potens	9	0	0	16	17
Trekke linjer 1	5	25	48	37	67
Trekke linjer 2	14	31	12	11	33
Trekke linjer 3	5	4	20	16	33
Rettvinklet trekant	14	25	40	26	33
30-60-90-trekant	9	15	8	16	0
Likebeint trekant	18	17	36	26	67
Likesidet trekant	9	19	8	16	17
Kongruente trekanter	9	4	16	16	50
Bruk variabler 1	27	35	32	32	50
Bruk variabler 2	18	46	48	68	83

De 34 kategoriene gir n = 34. Er det slik at kunnskaper/strategier som brukes mye i R1, brukes mye også i konkurranseoppgavene? Korrelasjonsanalyser i SPSS gir følgende resultater:

Correlations

		R1	Abel1
R1	Pearson Correlation	1	,217
	Sig. (2-tailed)		,218
	N	34	34
Abel1	Pearson Correlation	,217	1
	Sig. (2-tailed)	,218	
	N	34	34

Tabell 1 Korrelasjon mellom eksamensoppgaver i R1 og konkurranseoppgaver fra Abel runde 1.

Correlations

		R1	Abel2
R1	Pearson Correlation	1	,185
	Sig. (2-tailed)		,294
	N	34	34
Abel2	Pearson Correlation	,185	1
	Sig. (2-tailed)	,294	
	N	34	34

Tabell 2 Korrelasjon mellom eksamensoppgaver i R1 og konkurranseoppgaver fra Abel runde 2.

Correlations

		R1	Abelfinale
R1	Pearson Correlation	1	,691**
	Sig. (2-tailed)		,000
	N	34	34
Abelfinale	Pearson Correlation	,691**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	
	N	34	34

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 3 Korrelasjon mellom eksamensoppgaver i R1 og konkurranseoppgaver fra Abelfinalen.

Correlations

		R1	IMO
R1	Pearson Correlation	1	,587**
	Sig. (2-tailed)		,000
	N	34	34
IMO	Pearson Correlation	,587**	1
	Sig. (2-tailed)	,000	
	N	34	34

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 4 Korrelasjon mellom eksamensoppgaver i R1 og konkurranseoppgaver fra IMO.

Tabell 1 og 2 viser at vi har lav korrelasjon mellom R1-eksamensoppgaver og konkurranseoppgavene fra Abelkonkurransens innledende runder. Resultatene er imidlertid ikke signifikante. Vi har derimot signifikante korrelasjonsverdier mellom R1 og Abel-finalen på 0,691, og mellom R1 og IMO på 0,587 – altså moderat korrelasjon.

Som nevnt i kapittel 4.1.3 gjentok jeg korrelasjonsanalysen mellom R1 og Abel runde 1 + 2 etter å ha fjernet det sterkt avvikende punktet knyttet til bevis. Resultatene ble da:

Correlations

		R1*	Abel1*
R1*	Pearson Correlation	1	,472**
	Sig. (2-tailed)		,006
	N	33	33
Abel1*	Pearson Correlation	,472**	1
	Sig. (2-tailed)	,006	
	N	33	33

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 5 Korrelasjon mellom eksamensoppgaver i R1 og konkurranseoppgaver fra Abel runde 1 når vi utelater punktet om bevis.

Correlations

		R1*	Abel2*
R1*	Pearson Correlation	1	,457**
	Sig. (2-tailed)		,008
	N	33	33
Abel2*	Pearson Correlation	,457**	1
	Sig. (2-tailed)	,008	
	N	33	33

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 6 Korrelasjon mellom eksamensoppgaver i R1 og konkurranseoppgaver fra Abel runde 2 når vi utelater punktet om bevis.

Det kan nok innvendes at jeg i stedet for å ta utgangspunkt i kunnskaper/strategier burde bruke *antall oppgaver* og dermed få en større n. Jeg er enig i at det er en ulempe at den relativt store mengden oppgaver som er analysert, ikke gjenspeiles i korrelasjonsanalysen. Jeg har imidlertid ikke funnet noen opplagt måte å utføre en korrelasjonsanalyse på der «n = antall oppgaver». Datamaterialet kan for så vidt gi grunnlag for ulike kvantitative betraktninger. Det ville være mulig å lage måleskjemaer som undersøker forskjellige typer sammenhenger. Gode måleinstrumenter er imidlertid tidkrevende å utarbeide, og de bør også kvalitetssikres før de tas i bruk (f.eks. ved faktoranalyse og vurdering av reliabilitet (ofte gjort vha. Cronbachs Alpha)). Jeg har ikke sett utarbeiding av et slikt måleskjema som praktisk mulig innenfor tidsrammene for denne studien. Kanskje ville det heller ikke være hensiktsmessig for å finne svar på forskningsspørsmålet. Jeg har derfor valgt å bare bruke en helt enkel korrelasjonsanalysen og heller legge mer vekt på de kvalitative analysene.

De kvalitative og de kvantitative analysene ser ut til å støtte hverandre i at R1-eksamensoppgaver og finaleoppgavene fra konkurransene bygger på relativt mye av det samme kunnskapsstoffet i geometri. Samsvaret er mindre mellom R1-oppgavene og oppgavene fra Abelkonkurransens innledende runder. Hvis vi ser bort fra punktet om bevis, er det likevel en del paralleller i disse oppgavene knyttet til grunnleggende geometrikunnskaper som formlikhet, vinkelberegninger, arealbetraktninger og Pythagoras.

VEDLEGG 12 TABELLER

Tabellene nedenfor er resultat av oppgaveanalysene jeg har utført. De danner grunnlaget for diagrammene i masterstudiens analysedel.

Jeg startet med kategorier basert på kompetansemål, men flere kategorier ble utarbeidet underveis i arbeidet med oppgavene. Nye analyser av oppgavene gav nye «forfininger» av kategoriene. Etter hvert som jeg skulle lage oversiktsdiagrammer basert på informasjonene i tabellene, så jeg imidlertid behov for å slå sammen noen av kategoriene igjen. F.eks. er «smarte linjer» framstilt som én kategori i diagrammene i masteroppgavens analysedel, mens tabellene også sier noe om hvilken type smarte linjer det er snakk om. På denne måten har noen oppgaver fått flere kryss for smarte linjer i tabellene – vi kan f.eks. *både* si at vi trekker linjer mellom viktige punkter, *og* at vi trekker linjer for å finne trekanter vi vet noe om. For ikke å telle én oppgave flere ganger når jeg i diagrammene prøver å formidle hvor stor prosentandel av oppgavene som tar i bruk ulike strategier, innebærer dette at selv om en oppgave har flere kryss for «trekke linjer», telles den bare én gang. (Det samme andre tilfeller der flere kategorier er slått sammen, f.eks. bruk av variabler).

Det var ikke alltid opplagt hvordan et problem skulle kategoriseres. I kapittel 3.4.1 nevnes et eksempel knyttet til «konstruksjoner». Også i forbindelse med «bevis» har jeg strevd med å vurdere oppgavene. Dersom ordlyden er «bevis at…» eller bare «vis at…» slik tilfellet er for flertallet av finaleoppgavene, har jeg selvfølgelig krysset av for bevis. Det finnes imidlertid en del «sammensatte» konkurranseproblemer der eleven utfordres til å finne en størrelse, f.eks. et areal. I en konkurranse vil imidlertid ikke eleven få full uttelling for svaret sitt uten å vise at resultatet er riktig. Skal det da krysses av for «bevis» i disse tilfellene? (I R1-eksamensoppgaver kan vi dessuten finne liknende problemer. Men her får eleven gjerne mer hjelp ved at «svaret» oppgis, og oppgaven gis som «vis at arealet er …», noe som innebærer at jeg *har* krysset av for bevis i disse eksamensoppgavene.) Jeg har prøvd å jobbe meg gjennom konkurranseoppgavene og vurdere i hvert enkelt av «tvilstilfellene» om det bør krysses av for bevis. Andre kan være uenige i de vurderingene jeg har gjort. Jeg synes dette viser at selv om avkrysningstabeller gir en grei oversikt, er det mye informasjon som ikke kan fanges opp av et kryss.

Også i *opptellingen* av datamaterialet må jeg ta beslutninger som ikke uten videre er opplagte. I finaleoppgavene har jeg valgt å telle hver deloppgave (a og b) som én oppgave. Ettersom det er både en a- og en b-oppgave i ni av de ti årene (2013 er unntaket), gir dette meg 19 oppgaver. Jeg tror dette er en fornuftig måte å gjøre det på da a- og b-oppgavene ofte er uavhengige oppgaver, og også i de tilfellene der de henger sammen, er hver deloppgave et sammensatt problem der eleven gjerne skal se flere trinn for å komme fram til en løsning. I eksamensoppgavene har jeg imidlertid valgt å se alle deloppgavene til sammen som én oppgave. Dette fordi en eksamensoppgave gjerne er brutt opp i små a, b, c og d-oppgaver, der hver enkelt deloppgave bare utgjør et lite trinn i løsningen av oppgaven. Her har jeg altså vurdert det som rimelig å betrakte hele oppgaven som en helhet. Selv om jeg tror disse vurderingene er fornuftige, er de slett ikke opplagte, og de har tydelige konsekvenser for analysen av datamaterialet. For eksempel vektlegger hver eneste geometrioppgave fra Abel-finalen (de ti siste årene) bevis. Det er imidlertid ikke sikkert at *både* a- og b-oppgaven spør etter bevis. Jeg ender opp med at «bevis» er viktig i 84 % av disse oppgavene, i stedet for 100 % som jo ville blitt resultatet dersom jeg hadde regnet med 10 oppgaver (en for hvert år) i stedet for 19 (hver deloppgave regnes som et eget problem). Dette sier meg bl.a. at jeg ikke kan klare å få fram all informasjon om disse oppgavene ved hjelp av enkle opptellinger; jeg er nødt til å ta i bruk mer grundige kvalitative analyser også. (Jeg har prøvd å eksperimentere litt med ulike måter å telle opp på, og selv om dette medfører at tallene endres, forandres ikke de store linjene. Jeg ender opp med de samme konklusjonene.)

En oppgave som har to ulike løsninger telles som én oppgave, men jeg har krysset av for kunnskaper/strategier fra begge løsningsforslagene. Momenter som brukes i begge løsningene, telles bare én gang.

Problemløsning i geometri: kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper/strategier nyttige i geometrioppgaver fra Abelkonkurransen, runde 1, (høsten før) 2004–2005

(høsten før) År:	2005					2004					
Oppgaver Runde 1:	6	7	10	13	15	10	10	12	14	16	19
van Hiele-nivå:	3	2	3	2	3	3	3	3	3	3	3
Kompetansemål R1						løsn1	løsn2				
Formlikhet											X
Periferivinkelsetningen											
Thales teorem											
Konstruksjon											
Bevis											
Trekantgeometri:											
* Omsenter											
* Innsenter											
* Tyngdepunkt											
* Ortosenter											
Geometriske steder											
* Sirkel				x	x						
* Midtnormal					(x)						
* Vinkelhalveringslinje											
* Median											
* Andre? Spesifiser:											
Andre kunnskaper:											
Pythagoras					X				X	x	
Vinkelsum i trekant							X	x			
Komplementvinkel						X					
Supplementvinkel											
parallellitet											x
Ortogonalitet											
Andre vinkelberegninger						b	b	c			
Arealbetraktninger	x	X	X	X					X	X	
Omkretsberegninger											
Sykliske firkanter											
Punktets potens											
Simsonlinje											
Ptolemeos teorem											
Homoteti											
Cevas teorem											
Menelaus teorem											
Andre? Spesifiser:	a										

a målestokk
b toppvinkler
c vinkelsum i 8-kant

Problemløsning i geometri – fortsettelse

(høsten før) **År:**	2005					2004					
Oppgaver Runde 1:	6	7	10	13	15	10	10	12	14	16	19
Noen strategier:						løsn1	løsn2				
Trekke linjer:				x	x		x			x	x
– som binder sammen viktige punkter				x						x	
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om					x		x				x
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).											
Spesielle trekanter:											
rettvinklet trekant					x		x				
30-60-90-trekant											
likebeint trekant					x						
likesidet trekant											x
kongruente trekanter											
Bruk av variabler:											
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.					x	x	x			x	x
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.				x		x	x			x	X

Problemløsning i geometri: kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra **Abelkonkurrabsen, runde 1**

(høsten før) **År:**	2007						2006				
Oppgaver Runde 1:	2	5	8	12	14	18	2	7	9	11	14
van Hiele-nivå:	2	3	3	3	3	3	2	3	2	3	3
Kompetansemål R1											
Formlikhet						x					X
Periferivinkelsetningen											
Thales teorem											
Konstruksjon											
Bevis											
Trekantgeometri:											
* Omsenter											
* Innsenter											
* Tyngdepunkt											
* Ortosenter											
Geometriske steder											
* Sirkel			x								
* Midtnormal											
* Vinkelhalveringslinje											
* Median											
* Andre? Spesifiser:											
Andre kunnskaper:											
Pythagoras			x	x		x		x			x
Vinkelsum i trekant		x								X	
Komplementvinkel										x	
Supplementvinkel											
parallellitet					X						
Ortogonalitet											
Andre vinkelberegninger				a							
Arealbetraktninger			X	X		x		X	X		
Omkretsberegninger	X						X				
Sykliske firkanter											
Punktets potens											
Simsonlinje											
Ptolemeos teorem											
Homoteti											
Cevas teorem											
Menelaus teorem											
Andre? Spesifiser:								b			

a 120 grader er 1/3 av sirkelen

b Triks: Finn (lengde + bredde). Litt morsom algebra.

Problemløsning i geometri – fortsettelse

(høsten før) **År:**	2007						2006				
Oppgaver Runde 1:	2	5	8	12	14	18	2	7	9	11	14
Noen strategier:											
Trekke linjer:				x	x				x	x	
– som binder sammen viktige punkter				x					x		
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om				x	x					x	
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).											
Spesielle trekanter:											
rettvinklet trekant		X				x			x		x
30-60-90-trekant				X	X						
likebeint trekant		x								x	
likesidet trekant											
kongruente trekanter		X							x		
Bruk av variabler:											
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.				x	x	x				x	
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.				x		x		x		x	x

Problemløsning i geometri: kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra **Abelkonkurrabsen, runde 1**

(høsten før) **År:**	2009					2008			
Oppgaver Runde 1:	3	5	8	10	11	7	9	11	14
van Hiele-nivå	2	2	3	3	3	2	3	3	3
Kompetansemål R1									
Formlikhet			x		X			X	
Periferivinkelsetningen									
Thales teorem									
Konstruksjon									
Bevis									
Trekantgeometri:									
* Omsenter									
* Innsenter									
* Tyngdepunkt									
* Ortosenter									
Geometriske steder									
* Sirkel									
* Midtnormal									
* Vinkelhalveringslinje									
* Median									
* Andre? Spesifiser:									
Andre kunnskaper:									
Pythagoras		x		x	x	X			
Vinkelsum i trekant									X
Komplementvinkel									
Supplementvinkel									x
parallellitet									
Ortogonalitet									
Andre vinkelberegninger		a							
Arealbetraktninger		X	X	X	X				
Omkretsberegninger	X					x			
Sykliske firkanter									
Punktets potens									
Simsonlinje									
Ptolemeos teorem									
Homoteti									
Cevas teorem									
Menelaus teorem									
Andre? Spesifiser:	b						b		

a 60 grader er 1/6 av 360 grader

b Triks for å finne omkrets i sammensatt figur: trekk fra det som telles to ganger

Problemløsning i geometri - fortsettelse

(høsten før) **År:**	2009					2008			
Oppgaver Runde 1:	3	5	8	10	11	7	9	11	14
Noen strategier:									
Trekke linjer:				x					
– som binder sammen viktige punkter									
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om				x					
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).									
Spesielle trekanter:									
rettvinklet trekant									
30-60-90-trekant				X					
likebeint trekant									X
likesidet trekant		x							X
kongruente trekanter									
Bruk av variabler:									
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.				x				x	x
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.			X	X	x			x	

Problemløsning i geometri: kompetansemål, kunnskaper og strategier

Nyttige kunskaper/strategier; geometri; **Abel runde 1,** (høsten før) år 2010 - 2011

(høsten før) **År:**	2011				2010				
Oppgaver Runde 1:	3	8	9	17	4	9	12	14	17
van Hiele-nivå	2	3	3	3	2	3	3	3	3
Kompetansemål R1									
Formlikhet									
Periferivinkelsetningen						x			
Thales teorem									
Konstruksjoner									
Bevis									
Trekantgeometri:									
* Omsenter									
* Innsenter									
* Tyngdepunkt									
* Ortosenter									
Geometriske steder									
* Sirkel		x		x	x	x			x
* Midtnormal									
* Vinkelhalveringslinje									
* Median									
* Andre? Spesifiser:									
Andre kunnskaper:									
Pythagoras	x	X	X	X		x			x
Vinkelsum i trekant								x	
Komplementvinkel									
Supplementvinkel								x	
parallellitet								x	
Ortogonalitet									
Andre vinkelberegninger	a					x	x		
Arealbetraktninger		X	X	X	X				X
Omkretsberegninger							X		
Sykliske firkanter									
Punktets potens									
Simsonlinje									
Ptolemeos teorem									
Homoteti									
Cevas teorem									
Menelaus teorem									
Andre? Spesifiser:									

a Vinkelsum i sekskant

(høsten før) **År:**	2011				2010				
Oppgaver Runde 1:	3	8	9	17	4	9	12	14	17
Noen strategier:									
Trekke linjer:	x	x	x	x		x	x		x
– som binder sammen viktige punkter	x	x		x		x	x		x
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om	x		x	x		x	x		
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).									x
Spesielle trekanter:									
rettvinklet trekant		x	x						x
30-60-90-trekant	x					x			
likebeint trekant								x	x
likesidet trekant	x					x	X		
kongruente trekanter									
Bruk av variabler:									
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.		x	x	x				x	
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.		x	x	x					x

Problemløsning i geometri:kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper/strategier nyttige i geometrioppgaver fra **Abel runde 1** år 2012 - 2013

(høsten før) **År:**	2013					2012			
Oppgaver Runde 1:	7	10	13	16	18	3	7	12	19
van Hiele-nivå	3	3	3	3	3	2	3	3	3
Kompetansemål R1									
Formlikhet				X					
Periferivinkelsetningen									x
Thales teorem									
Konstruksjoner									
Bevis									
Trekantgeometri:									
* Omsenter									
* Innsenter									
* Tyngdepunkt									
* Ortosenter									
Geometriske steder									
* Sirkel	x		x						x
* Midtnormal									
* Vinkelhalveringslinje									
* Median									
* Andre? Spesifiser:									
Andre kunnskaper:									
Pythagoras	x	X	X		X				X
Vinkelsum i trekant	x	x				X			
Komplementvinkel						x			
Supplementvinkel		x						X	
parallellitet		x							
Ortogonalitet									
Andre vinkelberegninger								x	
Arealbetraktninger		x		X	X		X		X
Omkretsberegninger			x						
Sykliske firkanter									
Punktets potens									
Simsonlinje									
Ptolemeos teorem									
Homoteti									
Cevas teorem									
Menelaus teorem									
Andre? Spesifiser:			a	b					

a Fullføre kvadrat, eller på annen måte løse (2x+20)^2+(2x)^2=10000

(ev. se faktoriseringen x^2+10x-1200=(x+40)(x-30))

b Gitt forhold mellom sider i formlike trekanter,

hva blir forholdet mellom arealene?

(høsten før) **År:**	2013					2012			
Oppgaver Runde 1:	7	10	13	16	18	3	7	12	19
Noen strategier:									
Trekke linjer:	x		x		x		x		x
– som binder sammen viktige punkter	x						X		
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om			X		x				x
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).	x								
Spesielle trekanter:									
rettvinklet trekant		X	X		X				
30-60-90-trekant	x								X
likebeint trekant		X				X			
likesidet trekant	x					X			x
kongruente trekanter									
Bruk av variabler:									
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.		x					x		
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.			x	x			X	X	X

OPPTELLING Runde 1

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra R1-eksamen

	(høsten før) År	2013-2012	2011-2010	2009-2008	2007-2006	2005-2004	Sum	prosent
	Runde 1 Abel:							
	Antall løsninger	9	9	9	11	10	48	
Kompetansemål R1								
	Formlikhet	1		3	2	1	7	15
	Periferivinkelsetningen	1	1				2	4
	Thales teorem							
	Konstruksjoner							
	Bevis							
Trekantgeometri:								
	* Omsenter							
	* Innsenter							
	* Tyngdepunkt							
	* Ortosenter							
Geometriske steder								
	* Sirkel	3	5		1		9	19
	* Midtnormal							
	* Vinkelhalveringslinje							
	* Median							
	* Andre? Spesifiser:							
Andre kunnskaper:								
	Pythagoras	5	6	4	5	3	23	48
	Vinkelsum i trekant	3	1	1	2	2	9	19
	Komplementvinkel	1			1	1	3	6
	Supplementvinkel	2	1	1		1	5	10
	parallellitet	1	1			1	3	6
	Ortogonalitet							
	Andre vinkelberegninger	1	3	1	1	2	8	17
	Arealbetraktninger	5	5	4	5	6	25	52
	Omkretsberegninger	1	1	2	2		6	13
	Sykliske firkanter							
	Punktets potens							
	Simsonlinje							
	Ptolemeos teorem							
	Homoteti							
	Cevas teorem							
	Menelaus teorem							
	Andre? Spesifiser:							

Opptelling Runde 1 - fortsettelse

	2013-2012	2011-2010	2009-2008	2007-2006	2005-2004	SUM	Prosent
Semester:	2013-2012	2011-2010	2009-2008	2007-2006	2005-2004	SUM	Prosent
Eksamensoppgave R1:							
Noen strategier:							
Trekke linjer:	5	7	1	4	5	22	46
– som binder sammen viktige punkter	2	6		2	2	12	25
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om	3	5	1	3	3	15	31
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).	1	1				2	4
Spesielle trekanter:							
rettvinklet trekant	3	3		4	2	12	25
30-60-90-trekant	2	2	1	2		7	15
likebeint trekant	2	2	1	2	1	8	17
likesidet trekant	3	3	2		1	9	19
kongruente trekanter				2		2	4
Bruk av variabler:	6	5	5	6	5	27	56
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.	2	4	3	4	4	17	35
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.	5	4	4	5	4	22	46

Problemløsning i geometri og kompetansemål, kunnskaper og strategier

Nyttige kunnskaper/strategier i geometrioppgaver fra **Abel RUNDE 2** år 2004 - 2007

År:	2007			2006			2005				2004	
Oppgaver (Runde 2):	3	6	9	2	4	6	3	4	6	8	3	5
van Hiele-nivå	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Kompetansemål R1												
Formlikhet	x					x						
Periferivinkelsetningen												
Thales teorem										X		
Konstruksjoner												
Bevis												
Trekantgeometri:												
* Omsenter										x		
* Innsenter												
* Tyngdepunkt												
* Ortosenter												
Geometriske steder												
* Sirkel		x	x							x		x
* Midtnormal												
* Vinkelhalveringslinje												
* Median												
* Andre? Spesifiser:												
Andre kunnskaper:												
Pythagoras		X	X			X						
Vinkelsum i trekant	x									x		X
Komplementvinkel												
Supplementvinkel	x									x		x
parallellitet	a			x								
Ortogonalitet		b										
Andre vinkelberegninger			x		x							
Arealbetraktninger				X		X					X	
Omkretsberegninger												
Sykliske firkanter												
Punktets potens												
Simsonlinje												
Ptolemeos teorem												
Homoteti												
Cevas teorem												
Menelaus teorem												
Andre? Spesifiser: trigonometri			x									
Opptelling av antall korder gjennom spesifisert punkt							x					
Volumberegning + "fantasifull algebra"								x				

a Ei linje gjennom midtpunktene på to av sidene i en trekant er parallell med den tredje siden.

b Diagonalene i en rombe krysser i 90 grader

Problemløsning i geometri – fortsettelse

År:	2007			2006			2005				2004	
Oppgaver (Runde 2):	3	6	9	2	4	6	3	4	6	8	3	5
Noen strategier:												
Trekke linjer:	x	x	x			x					x	x
– som binder sammen viktige punkter	x	X	x								x	x
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om	x					x						
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).		x	x									
Spesielle trekanter:												
rettvinklede trekanter		x	X			x			x			
30-60-90-trekanter												
likebeint trekant	x		x							X		X
likesidet trekant												
kongruente trekanter									X			
Bruk av variabler:												
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.	x	x			x				x	x		x
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.		X			X	x			X		X	x

Problemløsning i geometri og kompetansemål, kunnskaper og strategier

Nyttige kunnskaper/strategier i geometrioppgaver fra **Abel-konkurransen RUNDE 2** år 2008 - 2010

År:	2010		2009			2008		
Oppgaver (Runde 2):	3	7	3	3	7	5	5	8
van Hiele-nivå	2	3	3	3	3	3	3	3
Kompetansemål R1			løsn.1	løsn.2		løsn.1	løsn.2	
Formlikhet		X						
Periferivinkelsetningen			X					
Thales teorem								
Konstruksjoner								
Bevis								
Trekantgeometri:								
* Omsenter								
* Innsenter								
* Tyngdepunkt						x		
* Ortosenter								
Geometriske steder								
* Sirkel			x	x	x	x		
* Midtnormal								
* Vinkelhalveringslinje								
* Median						X		
* Andre? Spesifiser:								
Andre kunnskaper:								
Pythagoras					X	x	X	
Vinkelsum i trekant				x				
Komplementvinkel								
Supplementvinkel			x					
parallellitet								
Ortogonalitet					x			
Andre vinkelberegninger								
Arealbetraktninger	X							X
Omkretsberegninger								
Sykliske firkanter								
Punktets potens								
Simsonlinje								
Ptolemeos teorem								
Homoteti								
Cevas teorem								
Menelaus teorem								
Andre? Spesifiser:								a
legge merke til hva som er høyden i en trekant når høyden må tegnes utenfor trekanten.	x							

a Legge merke til at to trekanter har samme høyde og grunnlinje

Problemløsning i geometri – fortsettelse

År:	2010		2009				2008	
Oppgaver (Runde 2):	3	7	3	3	7	5	5	8
Noen strategier:								
Trekke linjer:	x		x	x	x	x	x	x
– som binder sammen viktige punkter	x			x	x	x	x	x
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om			x	x				
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).					x	x	x	
Spesielle trekanter:								
rettvinklede trekanter	x				x	x		
30-60-90-trekanter							X	
likebeint trekant	x	x		X				
likesidet trekant						x		
kongruente trekanter				X				
Bruk av variabler:		x			x	x	x	x
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.		x						
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.		x			x	x	x	X

Problemløsning i geometri og kompetansemål, kunnskaper og strategier

Nyttige kunnskaper/strategier i geometrioppgaver fra **Abel RUNDE 2** år 2011 - 2013

År:	2013			2012				2011	
Oppgaver (Runde 2):	5	7	7	4	6	6	9	5	9
van Hiele-nivå				3	3	3	3	3	3
Kompetansemål R1		løsn.1	løsn.2		løsn.1	løsn.2			
Formlikhet	(x)	X					X		X
Periferivinkelsetningen						X*			
Thales teorem			X						
Konstruksjoner									
Bevis									
Trekantgeometri:									
* Omsenter									
* Innsenter									
* Tyngdepunkt									
* Ortosenter									
Geometriske steder									
* Sirkel					x	x			
* Midtnormal									
* Vinkelhalveringslinje								(x)	
* Median									
* Andre? Spesifiser:				a					
Andre kunnskaper:									
Pythagoras	X	X	X						
Vinkelsum i trekant	x				x	x		x	X
Komplementvinkel									
Supplementvinkel									x
parallellitet							x		X
Ortogonalitet		x							
Andre vinkelberegninger					x				
Arealbetraktninger	X		X				X		
Omkretsberegninger									
Sykliske firkanter						X			
Punktets potens									
Simsonlinje									
Ptolemeos teorem									
Homoteti									
Cevas teorem									
Menelaus teorem									
Andre? Spesifiser:									

a bruker at for et generelt punkt P inni et kvadrat ABCD gjelde $(AP)^2+(CP)^2=(BP)^2+(DP)^2$

* ikke god som eksempel på periferivinkelsetn. i R1 hvis ikke elevene kan sykliske firkanter

Problemløsning i geometri – fortsettelse

År:	2013			2012				2011	
Oppgaver (Runde 2):	5	7	7	4	6	6	9	5	9
Noen strategier:		løsn.1	løsn.2		løsn1	løsn2			
Trekke linjer:		x	x				x	x	
– som binder sammen viktige punkter		x	x				x	x	
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om									
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).								x	
Spesielle trekanter:									
rettvinklede trekanter	X	X	X						
30-60-90-trekanter								X	
likebeint trekant	X				X	X			
likesidet trekant								X	
kongruente trekanter					X			X	
Bruk av variabler:			x						x
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.									x
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.			x						x

OPPTELLING Runde 2

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra R1-eksamen

	Semester:	2013-2011	2010-2008	2007-2004	Sum	prosent
	Runde 2, Abel					
	Antall løsninger	7	6	12	25	
Kompetansemål R1						
	Formlikhet	4	1	2	7	28
	Periferivinkelsetningen	1	1		2	8
	Thales teorem	1		1	2	8
	Konstruksjoner					
	Bevis					
Trekantgeometri:						
	* Omsenter			1	1	4
	* Innsenter					
	* Tyngdepunkt		1		1	4
	* Ortosenter					
Geometriske steder						
	* Sirkel	1	3	4	8	32
	* Midtnormal					
	* Vinkelhalveringslinje	1			1	4
	* Median		1		1	4
	* Andre? Spesifiser:					
Andre kunnskaper:						
	Pythagoras	2	2	3	7	28
	Vinkelsum i trekant	4	1	3	8	32
	Komplementvinkel					
	Supplementvinkel	1	1	3	5	20
	parallellitet	2		2	4	16
	Ortogonalitet		1		1	4
	Andre vinkelberegninger	1		2	3	12
	Arealbetraktninger	3	2	3	8	32
	Omkretsberegninger					
	Sykliske firkanter	1			1	4
	Punktets potens					
	Simsonlinje					
	Ptolemeos teorem					
	Homoteti					
	Cevas teorem					
	Menelaus teorem					
	Andre? Spesifiser:					

Opptelling Runde 2 - fortsettelse

	Semester:	2013-2011	2010-2008	2007-2004	sum	prosent
	Runde 2:	7 opp.g	6 oppg.	12 oppg.	25	
Noen strategier:						
Trekke linjer:		3	5	6	14	56
	– som binder sammen viktige punkter	3	4	5	12	48
	– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om		1	2	3	12
	– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).	1	2	2	5	20
Spesielle trekanter:						
	rettvinklet trekant	3	3	4	10	40
	30-60-90-trekant	1	1		2	8
	likebeint trekant	3	3	3	9	36
	likesidet trekant	1	1		2	8
	kongruente trekanter	2	1	1	4	16
Bruk av variabler:		2	4	8	14	56
	– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.	1	1	6	8	32
	– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.	2	4	6	12	48

Problemløsning i geometri og kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra **Abelfinalen** år 2004 - 2008

År:	2008		2007		2006			2005				2004	
Finaleoppgave:	4a	4b	2a	2b	4a	4b	4b	3a	3a	3b	3b	3a	3b
van Hiele-nivå	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Kompetansemål R1						løsn.1	løsn.2	løsn.1	løsn.2	løsn.1	løsn.2		
Formlikhet				x							X		
Periferivinkelsetningen								x*		x*		X	
Thales teorem					x	x	x					X	
Konstruksjoner													
Bevis	(x)	X	x		(x)	X	X	X	X	X	X	X	
Trekantgeometri:													
* Omsenter	x	x			x	x	x					x	
* Innsenter					x	x	x						
* Tyngdepunkt													
* Ortosenter													
Geometriske steder													
* Sirkel	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x	x
* Midtnormal	x	x				x	x	x	x			x	
* Vinkelhalveringslinje					x	x	x	x	x	(x)			
* Median													
* Andre? Spesifiser:													
Andre kunnskaper:													
Pythagoras						x	x					X	X
Vinkelsum i trekant	x									x		x	
Komplementvinkel												x	
Supplementvinkel													
parallellitet										x			
Ortogonalitet					x					x			
Andre vinkelberegninger			x									x	
Arealbetraktninger	X						x						X
Omkretsberegninger													
Sykliske firkanter								X		X		(X)	
Punktets potens						x				X			
Simsonlinje													
Ptolemeos teorem													
Homoteti													
Cevas teorem													
Menelaus teorem													
Andre? Spesifiser: Projeksjoner		X											
Trigonometri	x												
Forholdstall													x

* Periferivinkelsetningen bare nyttig for elever som også behersker sykliske firkanter

År:	2008		2007		2006			2005				2004	
Finaleoppgave:	4a	4b	2a	2b	4a	4b	4b	3a	3a	3b	3b	3a	3b
Noen strategier:						løsn.1	løsn.2	løsn.1	løsn.2	løsn.1	løsn.2		
Trekke linjer:		x		x	x	x	x	x	x	x		x	
– som binder sammen viktige punkter		x			x	x	x	X	X			x	
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om										X			
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).				x	x								
Spesielle trekanter:													
rettvinklede trekanter						x	x	x	x				X
30-60-90-trekanter								X	X			X	X
likebeint trekant	x		x							x	x	X	
likesidet trekant	x									X	X		
kongruente trekanter			x			x					X		
Bruk av variabler:	x			x	x	x	x	x	x				
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.					x	x	x	x	x				
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.	x			X	X	x	x		x				

Problemløsning i geometri og kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra **Abelfinalen** år 2009 - 2013

År:	2013	2012		2011		2010		2009	
Finaleoppgave:	2	2a	2b	2a	2b	1a	1b	3a	3b
van Hiele-nivå	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Kompetansemål R1									
Formlikhet			X			X	X		
Periferivinkelsetningen									
Thales teorem									
Konstruksjoner		x							
Bevis	X	X	X	Xa	X	X		X	X
Trekantgeometri:									
* Omsenter	x								
* Innsenter		x							
* Tyngdepunkt	x								
* Ortosenter									
Geometriske steder									
* Sirkel								x	x
* Midtnormal									
* Vinkelhalveringslinje		X							
* Median	x								
* Andre? Spesifiser:									
Andre kunnskaper:									
Pythagoras	x			X					
Vinkelsum i trekant									
Komplementvinkel									
Supplementvinkel									
parallellitet									
Ortogonalitet									
Andre vinkelberegninger									
Arealbetraktninger					Xb		X		
Omkretsberegninger									
Sykliske firkanter									
Punktets potens								X	
Simsonlinje									
Ptolemeos teorem									
Homoteti									
Cevas teorem									
Menelaus teorem									
Andre? Spesifiser:									c

a Bruker bevis ved motsigelse

b Trigonometri - arealformel

c sirkellikningen, god tallforståelse og en god porsjon kreativitet

År:	2013	2012		2011		2010		2009	
Finaleoppgave:	2	2a	2b	2a	2b	1a	1b	3a	3b
Noen strategier:									
Trekke linjer:	x	x					x		
– som binder sammen viktige punkter	x	x							
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om							X		
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).		x							
Spesielle trekanter:									
rettvinklede trekanter	x					x			
30-60-90-trekanter									
likebeint trekant							x		
likesidet trekant	X								
kongruente trekanter									
Bruk av variabler:	x		x		x	x	x	x	x
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.			x			x	x		
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.	x		X		X	X	x	x	x

OPPTELLING Finale

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra R1-eksamen

	Semester:	2013-2009	2008-2004	Sum	prosent
	Finale, Abel				
	Antall oppgaver	9	10	19	
Kompetansemål R1					
Formlikhet		3	2	5	26
Periferivinkelsetningen			3	3	16
Thales teorem			3	3	16
Konstruksjoner		1		1	5
Bevis		8	8	16	84
Trekantgeometri:					
* Omsenter			5	5	26
* Innsenter		1	2	3	16
* Tyngdepunkt		1		1	5
* Ortosenter					
Geometriske steder					
* Sirkel		2	9	11	59
* Midtnormal		1	5	6	32
* Vinkelhalveringslinje		1	4	5	26
* Median		1		1	5
* Andre? Spesifiser:					
Periferivinkel + Thales			5	5	26
Andre kunnskaper:					
Pythagoras		2	3	5	26
Vinkelsum i trekant			3	3	16
Komplementvinkel			1	1	5
Supplementvinkel					
parallellitet			1	1	5
Ortogonalitet			2	2	11
Andre vinkelberegninger			2	2	11
Arealbetraktninger		2	3	5	26
Omkretsberegninger					
Sykliske firkanter			2	2	11
Punktets potens		1	2	3	16
Simsonlinje					
Ptolemeos teorem					
Homoteti					
Cevas teorem					
Menelaus teorem					
Andre? Spesifiser:					

Opptelling Finale - fortsettelse

	2013-2009	2008-2004	sum	prosent
Semester:	2013-2009	2008-2004	sum	prosent
Runde 2:				
Noen strategier:				
Trekke linjer:	3	7	10	53
– som binder sammen viktige punkter	2	5	7	37
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om	1	1	2	11
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).	1	2	3	16
Spesielle trekanter:				
rettvinklet trekant	2	3	5	26
30-60-90-trekant		3	3	16
likebeint trekant	1	4	5	26
likesidet trekant	1	2	3	16
kongruente trekanter		3	3	16
Bruk av variabler:	7	6	13	68
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.	3	3	6	32
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.	7	6	13	68

Problemløsning i geometri og kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra IMO år 2006 - 2012

År:	2012	2010		2009	2008	2007	2006
IMO-oppgave:	1	4	4	4	1	4	1
van Hiele-nivå	4	4	4	4	4	4	4
Kompetansemål R1		løsn.1	løsn.2				
Formlikhet			X		X	X	
Periferivinkelsetningen	x	X	x				X
Thales teorem	X			X			
Konstruksjoner	x	x	x	x	x	x	
Bevis	X	X	X	x	X	X	X
Trekantgeometri:							
* Omsenter					x		X
* Innsenter				X			X
* Tyngdepunkt							
* Ortosenter					X		
Geometriske steder							
* Sirkel	x	X	X	x	x	x	x
* Midtnormal	x			x	x	X	X
* Vinkelhalveringslinje	X			X		X	X
* Median				x			
* Andre? Spesifiser: høyde				x	x		
Andre kunnskaper:							
Pythagoras							
Vinkelsum i trekant	x			x		x	x
Komplementvinkel							
Supplementvinkel					x	x	x
parallellitet			X		x		
Ortogonalitet					x		
Andre vinkelberegninger	x						
Arealbetraktninger						X	
Omkretsberegninger							
Sykliske firkanter	X			X	X		X
Punktets potens		X	X				
Simsonlinje							
Ptolemeos teorem							
Homoteti							
Cevas teorem							
Menelaus teorem							
Andre? Spesifiser: radiell akse					X		
Trigonometri arealformel						X	

År:	2012	2010		2009	2008	2007	2006
IMO-oppgave:	1	4	4	4	1	4	
Noen strategier:		løsn.1	løsn.2				
Trekke linjer:							x
– som binder sammen viktige punkter		x	x	x	x		x
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om				x			x
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).	x			x			
Spesielle trekanter:							
rettvinklede trekanter	x			x			
30-60-90-trekanter							
likebeint trekant	X	x	X				X
likesidet trekant				X			
kongruente trekanter	X			x		X	
Bruk av variabler:							
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.	X	X		x			
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.	X	X		x		x	x

OPPTELLING IMO

	Sum	prosent
Semester:		
IMO:		
Antall oppgaver	6	
Kompetansemål R1		
Formlikhet	3	50
Periferivinkelsetningen	3	50
Thales teorem	2	33
Konstruksjoner	5	83
Bevis	6	100
Trekantgeometri:		
* Omsenter	2	33
* Innsenter	2	33
* Tyngdepunkt		
* Ortosenter	1	17
Geometriske steder		
* Sirkel	6	100
* Midtnormal	5	83
* Vinkelhalveringslinje	4	67
* Median	1	17
* Andre? Spesifiser: høyde	2	33
Perifrivinkel + Thales	4	67
Omsenter + Midtnormal	5	83
Innsenter + vinkelhalv.	4	67
Andre kunnskaper:		
Pythagoras	0	
Vinkelsum i trekant	4	67
Komplementvinkel		
Supplementvinkel	3	50
parallellitet	2	33
Ortogonalitet	1	17
Andre vinkelberegninger	1	17
Arealbetraktninger	1	17
Omkretsberegninger		
Sykliske firkanter	4	67
Punktets potens	1	17
Simsonlinje		
Ptolemeos teorem		
Homoteti		
Cevas teorem		
Menelaus teorem		
Andre? Spesifiser:		

Opptelling IMO

	sum	prosent
Semester:	sum	prosent
Eksamensoppgave R1:		
Noen strategier:		
Trekke linjer:	4	67
– som binder sammen viktige punkter	4	67
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om	2	33
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).	2	33
Spesielle trekanter:		
rettvinklet trekant	2	33
30-60-90-trekant	0	
likebeint trekant	4	67
likesidet trekant	1	17
kongruente trekanter	3	50
Bruk av variabler:	5	83
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.	3	50
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.	5	83

Problemløsning i geometri: kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra R1-eksamen

Semester:	Høst 2009		Vår 2009		H-08		Vår 2008	
Eksamensoppgave R1:	2	4 II	2	3	5	2e	4 II a	5
van Hiele-nivå	4	4	4	3	4	2	3	4
Kompetansemål R1								
Formlikhet			X					
Periferivinkelsetningen								
Thales teorem				X				
Konstruksjoner				X	X			
Bevis	X	X	X		X		x	X
Trekantgeometri:								
* Omsenter								
* Innsenter				X	X			
* Tyngdepunkt								
* Ortosenter						X		
Geometriske steder								
* Sirkel		x			x		x	x
* Midtnormal								
* Vinkelhalveringslinje				X	X			
* Median								
* Andre? Spesifiser:						b	c	
Andre kunnskaper:								
Pythagoras			X				X	X
Vinkelsum i trekant								
Komplementvinkel								
Supplementvinkel								
parallellitet								
Ortogonalitet								
Andre vinkelberegninger								
Arealbetraktninger	X						X	
Omkretsberegninger								
Sykliske firkanter								
Punktets potens								
Simsonlinje								
Ptolemeos teorem								
Homoteti								
Cevas teorem								
Menelaus teorem								
Andre? Spesifiser:		a						

a Hypotesetesting i Oppg. 4 alternativ II a, Høst 2009
b Resten av oppg2, vår 2008 omhander vektorregning og analytisk geometri
c Resten av oppg.4 alternativ II vår 2008 omhandler funksjonslære

Problemløsning i geometri - fortsettelse

Semester:	Høst 2009		Vår 2009		H-08	Vår 2008		
Eksamensoppgave R1:	2	4 II	2	3	5	2e	4 II a	5
Noen strategier:								
Trekke linjer:	x							
– som binder sammen viktige punkter	x							
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om								
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).								
Spesielle trekanter:								
rettvinklet trekant	x							x
30-60-90-trekant								
likebeint trekant								
likesidet trekant	X							
kongruente trekanter		X			X			
Bruk av variabler:	x				x		x	x
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.	x				x		x	
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.					x		x	x

Problemløsning i geometri: kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra R1-eksamen

Semester:	Vår2011		Høst2010			Vår2010	
Eksamensoppgave R1:	2	8	2	4	6 II	1f	6
van Hiele-nivå:	3	4	4	3	4	3	4
Kompetansemål R1							
Formlikhet		X					
Periferivinkelsetningen			X		X		
Thales teorem		x			X		
Konstruksjoner					X	X	
Bevis	x	x	x		x		X
Trekantgeometri:							
* Omsenter						X	
* Innsenter	X						
* Tyngdepunkt							
* Ortosenter							
Geometriske steder							
* Sirkel			x				x
* Midtnormal						X	
* Vinkelhalveringslinje	X						
* Median							
* Andre? Spesifiser:							
Andre kunnskaper:							
Pythagoras			X		x		
Vinkelsum i trekant	X	x	x				x
Komplementvinkel							
Supplementvinkel	x						x
parallellitet							
Ortogonalitet							
Andre vinkelberegninger					x		
Arealbetraktninger		X		X			
Omkretsberegninger		X					
Sykliske firkanter							
Punktets potens							
Simsonlinje							
Ptolemeos teorem							
Homoteti							
Cevas teorem							
Menelaus teorem							
Andre? Spesifiser:							

Problemløsning i geometri - fortsettelse

Semester:	Vår2011		Høst2010			Vår2010	
Eksamensoppgave R1:	2	8	2	4	6 II	1f	6
Noen strategier:							
Trekke linjer:			x		x		
– som binder sammen viktige punkter							
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om					x		
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).			x				
Spesielle trekanter:							
rettvinklet trekant							
30-60-90-trekant			X		x		
likebeint trekant	x						X
likesidet trekant					x		
kongruente trekanter							
Bruk av variabler:	x	x	x	x			x
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.			x	x			
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.	x	x	x				x

Problemløsning i geometri: kompetansemål, kunnskaper og strategier

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra R1-eksamen

Semester:	Høst2012			Vår 2012		Høst2011	
Eksamensoppgave R1:	1;5	2;4	2;6	8	10	1g	3
van Hiele-nivå	4	4	4	4	3	4	4
Kompetansemål R1							
Formlikhet		X					
Periferivinkelsetningen			X	X		X	X
Thales teorem			X				
Konstruksjoner							X
Bevis	X	x	X	X		x	x
Trekantgeometri:							
* Omsenter							
* Innsenter							X
* Tyngdepunkt							
* Ortosenter							
Geometriske steder							
* Sirkel			x		X	x	
* Midtnormal							x
* Vinkelhalveringslinje							X
* Median							
* Andre? Spesifiser:							
Andre kunnskaper:							
Pythagoras							
Vinkelsum i trekant	x		x			x	x
Komplementvinkel							
Supplementvinkel			x			x	
parallellitet		x					
Ortogonalitet							
Andre vinkelberegninger	x			x			
Arealbetraktninger	X	X			X		
Sykliske firkanter			(x)	(x)			
Punktets potens							
Simsonlinje							
Ptolemeos teorem							
Homoteti							
Cevas teorem							
Menelaus teorem							
Andre? Spesifiser:		a					

a Oppgaven inneholder også funksjonslære

(For høst 2012 betyr 1;5 del 1 oppg. 5, mens 2;4 betyr del 2 oppg.4. Dette året (i motsetning til alle andre) begynner oppgavenummereringen på 1 igjen i del 2.)

Problemløsning i geometri - fortsettelse:

Semester:	Høst2012			Vår 2012		Høst2011	
Eksamensoppgave R1:	1;5	2;4	2;6	8	10	1g	3
Noen strategier:							
Trekke linjer:			x	x			x
– som binder sammen viktige punkter				x			
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om			x				
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).							x
Spesielle trekanter:							
rettvinklet trekant	X						
30-60-90-trekant							
likebeint trekant							X
likesidet trekant							
kongruente trekanter	X						
Bruk av variabler:							
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.							
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.							

OPPTELLING R1

Kunnskaper som er nyttige for å løse geometrioppgaver fra R1-eksamen

Semester:	vår2008_høst2009	vår 2010_vår2011	Høst 2011 _ høst 2012	Sum	prosent
Eksamensoppgave R1:					
Antall oppgaver	8	7	7	22	
Kompetansemål R1					
Formlikhet	1	1	1	3	14
Periferivinkelsetningen	0	2	4	6	27
Thales teorem	1	2	1	4	18
Konstruksjoner	2	2	1	5	23
Bevis	6	5	6	17	77
Trekantgeometri:					
* Omsenter	0	1		1	5
* Innsenter	2	1	1	4	18
* Tyngdepunkt	0	0			0
* Ortosenter	1	0		1	5
Geometriske steder					
* Sirkel	4	2	3	9	41
* Midtnormal	0	1	1	2	9
* Vinkelhalveringslinje	2	1	1	4	18
* Median	0	0			
* Andre? Spesifiser:					
Andre kunnskaper:					
Pythagoras	3	2		5	23
Vinkelsum i trekant		4	4	8	36
Komplementvinkel					
Supplementvinkel		2	2	4	18
parallellitet			1	1	5
Ortogonalitet					
Andre vinkelberegninger		1	1	2	9
Arealbetraktninger	2	2	3	7	32
Omkretsberegninger		1		1	5
Sykliske firkanter			2	2	9
Punktets potens				2	9
Simsonlinje					
Ptolemeos teorem					
Homoteti					
Cevas teorem					
Menelaus teorem					
Andre? Spesifiser:					

Opptelling - fortsettelse

	Semester:	vår2008-høst2009	vår 2012-vår2011	høst 2011-høst2012	sum	prosent
	Eksamensoppgave R1:					
Noen strategier:						
Trekke linjer:		1	2	3	6	23
– som binder sammen viktige punkter		1		1	1	5
– som lager trekanter/vinkler du allerede vet noe om			1	1	3	14
– tegne radien i en sirkel til tangerings-punkt (lage rettvinklet trekant).			1	1	1	5
Spesielle trekanter:						
rettvinklet trekant		2		1	3	14
30-60-90-trekant			2		2	9
likebeint trekant			2	2	4	18
likesidet trekant		1	1		2	9
kongruente trekanter		2			2	9
Bruk av variabler:		4	5		9	41
– Skriv på alle vinkler/lengder på figuren etter hvert som du finner dem, også om du må skrive dem vha. variabler.		3	2		6	27
– Tilordne variabler slik at du kan løse en likning.		3	4		4	18

1. **Be interested in your subject.**
2. **Know your subject.**
3. **Know abot the ways of learning: The best way to learn anything is to discover it by yourself.**
4. **Try to read the faces of your students, try to see their expectations and difficulties, put yourself in their place.**
5. **Give them not only only information, but "know-how," attitudes of mind, the habit of methodical work.**
6. **Let them learn guessing.**
7. **Let them learn proving.**
8. **Look out for such features of the problem at hand as may be useful in solving the problems to come – try to disclose the general pattern that lies behind the present concrete situation.**
9. **Do not give away your whole secret at once – let the students guess before you tell it – let them find out by themselves as much as is feasible.**
10. **Suggest it, do not force it down their throats.**

(Pólya, 1981, del 2, s. 116)