DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Utdanningsvitenskap - Matematikkdidaktikk	Vårsemesteret, 2014 Åpen
Forfatter: Maria Almberg Størkson	……………………………………… (signatur forfatter)
Veileder: Arne Jakobsen	

Tittel på masteroppgaven:

«Jeg forstår matematikken, jeg kan bare ikke bevise det» - bevisets og argumentasjonens stilling i matematikkfaget i norsk skole sett i lys av TIMSS og PISA resultater.

Engelsk tittel:

«I understand the mathematics, I just can't prove it» - the position of proof and argumentation in Norwegian education seen in the light of TIMSS and PISA results.

Emneord: Matematisk forståelse, argumentasjon i matematikk, matematikkundervisning, undervisningskultur, TIMSS, PISA, resonnering, Japan, Norge, matematisk bevis, internasjonale og nasjonale prestasjoner i matematikk	Sidetall: 74 + vedlegg/annet: 83 Stavanger, 15.05.2014 dato/år

Forord

Da er to års studier og arbeid snart over, og jeg er snart ferdig med min mastergrad i matematikkdidaktikk. For litt mer enn to år siden fant jeg ut at jeg ville utvide min faglige innsikt i matematikk og matematikkundervisning, fordi jeg følte at det var så mye jeg ikke hadde svar på. Jeg hadde da jobbet i to år som realfagslærer ved Åkrehamn VGS, der jeg underviste på Vg1 og Vg3 i matematikk og naturfag. Grunnen til at valget falt på akkurat denne masteren, var at jeg alltid har likt matematikk godt som skolefag, og synes at det har blitt mer og mer spennende med matematikk etter hvert som jeg har blitt eldre. I tillegg liker jeg godt å undervise i faget, og ønsket å utvikle meg som lærer i faget, for å kunne bli en enda bedre lærer for elevene mine, og gjerne spre mer glede og interesse for matematikkfaget i skolen. For å kunne ta master i matematikkdidaktikk fikk jeg innvilget to års permisjon av min arbeidsgiver, Rogaland Fylkeskommune/ Åkrehamn VGS. Dette er jeg svært takknemlig for, ellers hadde jeg ikke fått muligheten til å ta denne mastergraden. Undervegs har jeg fått god støtte fra mange hold, blant annet fra mine foreldre, besteforeldre og søsken. Jeg vil gjerne takke min studievenninne Amalie Steinshamn for samarbeid, oppmuntringer og gode diskusjoner gjennom hele studet. I tillegg fortjener min tålmodige samboer Åsmund Kringlebotten en stor takk for å ha holdt ut med en til tider frustrert masterstudent, som forvandlet stuen vår til bibliotek. Sist, men definitivt ikke minst viktig, vil jeg rette en stor takk til min dyktige veileder gjennom denne prosessen, førsteamanuensis Arne Jakobsen ved UiS. Takk for konstruktive tilbakemeldinger, gode faglige diskusjoner og oppfølging i arbeidet med denne oppgaven. Takk rettes også til lærerene, elevene og skolene som stilte opp i dette prosjektet.

Maria Almberg Størkson
Universitetet i Stavanger
Mai 2014

Sammendrag

Bakgrunnen for å gå i gang med arbeidet med denne oppgaven var at jeg hadde lagt merke til at jeg stadig hørte om norske elevers resultater på internasjonale tester som Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) og Programme for International Student Assessment (PISA), gjerne med fokus på at vi scorer relativt dårlig i matematikk sammenlignet med andre deltagerland, som for eksempel Japan og Finland. Da begynte jeg å lure på hva man gjorde i andre land som man ikke gjorde her i Norge, og om man kunne lære noe som hadde en overføringsverdi til norsk skole. Jeg hadde særlig merket meg hvor ulikt man jobber med matematikkfaget i Japan sammenlignet med i norsk skole, og lurte derfor på hvordan dette kunne ha en innvirkning på elevenes prestasjoner. Forskningsspørsmålene jeg har jobbet med i denne masteroppgaven har vært:

Forskningsspørsmål 1 (F1): Hvilke forklaringer på forskjeller i japanske og norske elever sine resultater på TIMSS og PISA testene kan man finne ved å analysere rapporten fra TIMSS 1999 Video Study ut i fra et undervisningskulturelt fokus?
Forskningsspørsmål2 (F2): Hvilke matematiske refleksjoner og opplevelser har elever på ulike ferdighetsnivåer i matematikk i norsk videregående skole knyttet til matematiske resonnementer og bevisføring?

Metodene jeg benyttet i tilknytning til datainnsamling i forbindelse med mine forskningsspørsmål var for F1 kvalitativ innholdsanalyse av rapporten fra TIMSS 1999 Video Study. Datainnsamling til F2 ble gjort ved bruk av klasseromsobservasjoner ved hjelp av video, lydopptaker og feltnotater, samt elevintervjuer tatt opp ved hjelp av lydopptaker. Klasseromsobservasjonene ble også supplert med elevnotater fra den observerte undervisningsøkten.
Resultatene for F1 viste antydninger til at det kunne være visse elementer som var særlig tydelige i japansk matematikkundervisning, som blant annet; fokus på resonnering, forståelse og bevisføring, som kanskje kunne forklare noe av japanske elevers gode prestasjoner i matematikk. Resultatene for F2 var mer uklare, fordi datagrunnlaget var så lite, men de elevene jeg observerte og intervjuet hadde tilsynelatende lite erfaring med matematisk bevis og matematisk resonnering.

Summary

The background for this master thesis was the fact that I had noticed a frequent mention in the media of how low scores Norwegian students got in mathematics on international tests like Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) and Programme for International Student Assessment (PISA). The media also focused on how students in countries like Japan and Finland excelled at the very same tests, and this made me wonder what other countries did in their mathematics education that we, apparently were not doing here in Norway. I had especially noticed that Japan seemed to have very different approaches to teaching mathematics compared to Norway, and I started to ponder the question of how this might have an impact concerning their students good results. The research questions I have worked on in my master thesis are:

RQ1: What explanations for the differences between the scores of Japanese and Norwegian students on the TIMSS and PISA tests might be found by analysing the written report from the TIMSS 1999 Video Study from an educational-cultural point of view?
RQ2: What mathematical reflections and experiences does Norwegian high-school students with varying mathematical abilities have in connection to mathematical reasoning and proof?

The method I used to gather data to answer my RQ1 was a qualitative content analysis of the written TIMSS 1999 Video Study report. The data collection for RQ2 was done by conducting classroom observation, using video camera, sound recording and field notes. In addition I also did student interviews, which were recorded by sound recorder. The classroom observations were also supported by the students' own notes from the observed session. The results for RQ1 showed some elements that were clearly prominent in Japanese classrooms which might help to explain some of the good results that Japanese students had on the international tests. This included, among other elements, a focus on reasoning, understanding and proof. The results for RQ2 were less conclusive, partly because my data sampling was so small, but the students I observed and interviewed seemed to have little experience with mathematical proof and mathematical reasoning.

INNHOLD

1. Innledning

Gjennom media får vi stadig høre om norske elevers resultater på internasjonale tester som Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) og Programme for International Student Assessment (PISA), gjerne med fokus på at vi scorer relativt dårlig i matematikk sammenlignet med andre deltagerland, som for eksempel Japan og Finland. Mange ulike teorier om hvorfor dette er tilfellet er blitt presentert, og mange ulike personer og fagmiljøer har kommet med innspill til hva de mener kan gjøres for å forbedre elevenes presatsjoner. Dette er jo et komplekst spørsmål, man kan ikke løse disse utfordringene over natten. Noe jeg har merket meg som interessant, er hvor ulikt man jobber med matematikkfaget i Japan sammenlignet med i norsk skole, og da lurer jeg på hvordan dette kan ha en innvirkning på elevenes prestasjoner. Selvfølgelig kan jeg ikke klare å finne ut dette bare ved å skrive en masteroppgave, det har jeg verken tid eller ressurser til, men jeg har lyst til å se om det kanskje kan være en sammenheng mellom det fokuset man har på forståelse og bevisføring i matematikk i japansk matematikkundervisning og de gode resultatene som landet har på PISA- og TIMSS-rankingen. I tillegg vil jeg forsøke å dra paralleller til hvilket fokus disse aspektene ved matematikkfaget har i den gjennomsnittlige norske matematikkundervisningen. I denne masteroppgaven skal jeg derfor fokusere på følgende forskningsspørsmål:

Forskningsspørsmål 1 (F1): Hvilke forklaringer på forskjeller i japanske og norske elever sine resultater på TIMSS og PISA testene kan man finne ved å analysere rapporten fra TIMSS 1999 Video Study ut i fra et undervisningskulturelt fokus?

Forskningsspørsmål2 (F2): Hvilke matematiske refleksjoner og opplevelser har elever på ulike ferdighetsnivåer i matematikk i norsk videregående skole knyttet til matematiske resonnementer og bevisføring?

Jeg har valgt å gi oppgaven min følgende tittel: *«Jeg forstår matematikken, jeg kan bare ikke bevise det» - bevisets og argumentasjonens stilling i matematikkfaget i norsk skole sett i lys av TIMSS- og PISA- studier.* Denne tittelen synes jeg beskriver mitt fokusområde godt. Samtidig belyser den et tema jeg mener er viktig i tilknytning til norsk matematikkundervisning, nemlig at det kan virke som om norske elever kan ha gode tekniske ferdigheter, men mangelfull forståelse innenfor matematikkfaget.

1.1. Bakgrunn for valg av tema

Jeg ønsker å se nærmere på elevers forståelse og bevisets plass i skolefaget matematikk, med et fokus på matematikkundervisning i Japan og Norge. I tilknytning til dette er det viktig for meg å klargjøre hvilke definisjoner av bevis jeg tar utgangspunkt i under arbeidet med denne oppgaven. Jeg vil forsøke å vise litt av hvilken rolle bevis har hatt i matematikken gjennom historien. I tillegg mener jeg det er relevant å gi en kort oppsummering av hvilken plass matematisk bevisføring har i et historisk perspektiv når man ser på læreplaner og lærebøker for matematikkundervisningen i norsk skole. Dette vil selvfølgelig bli en svært kort oppsummering, da dette stoffet er omfattende nok til å utgjøre flere masteroppgaver alene.

1.2. Motivasjon for valg av forskningsspørsmål

Hvilke forklaringer på forskjeller i japanske og norske elever sine resultater på TIMSS og PISA testene kan man finne ved å analysere rapporten fra TIMSS 1999 Video Study ut i fra et undervisningskulturelt fokus? I de siste TIMSS- og PISA- undersøkelsene har norske elever scoret under det internasjonale poengsnittet for deltakerlandene i undersøkelsene. Gjennomsnittet på PISA 2012 var 494 poeng, Norge hadde 489. På TIMSS 2011 var skalamidtpunktet for matematikkscore 500 poeng, Norge oppnådde 475. I tillegg var gjennomsnittsscoren i matematikk på TIMSS Advanced 2008, som tester elever i den videregående skolen 500 poeng. Her scoret norske elever 439 poeng (Grønmo et al., 2012; Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010; Kjærnsli & Olsen, 2013). Mange eksperter på matematikk, undervisning og læring, samt politikere og andre har prøvd å komme med forklaringer og forslag til forbedringer. Mange har sett til Finland, som scorer høyt på de samme testene, for å finne svar. Jeg har valgt å se mot Japan, da japanske elever har scoret i toppsjiktet på de samme undersøkelsene der Norge ikke når helt opp. På PISA 2012 scoret Japan hele 536 poeng, altså 47 poeng mer enn Norge. Når det gjelder TIMSS 2011, scoret Japan her hele 570 poeng i matematikk, altså 95 poeng mer enn Norge (Grønmo et al., 2012; Kjærnsli & Olsen, 2013). Japan deltok ikke i TIMSS Advanced 2008, så her har jeg ikke noe sammenligningsgrunnlag. Så vidt jeg vet er det ennå ingen som har sett på hvordan et undervisningskulturelt fokus kan ha innvirkning på matematiske prestasjoner med fokus på matematikkundervisningen i Norge og Japan, selv om det er så signifikante forskjeller i de to landenes resultater på TIMSS og PISA sine matematikktester. Det er ikke sikkert at undervisningskulturen i Japan kan gi svar på hvorfor de presterer så mye bedre enn oss her i Norge, men ved å se på rapporten fra TIMSS 1999 Video Study kan jeg forhåpentligvis finne noen momenter som kan bidra til å få litt dypere innsikt i hvordan de arbeider med elevenes matematiske forståelse. I rapporten har man analysert videoer fra matematikkundervisning fra blant annet 50 ulike skoler i Japan. I tillegg har man supplert med lærerintervjuer og spørreundersøkelser for å få et helhetlig bilde av undervisningen. Jeg kommer nærmere inn på detaljer rundt studien i avsnitt 2.8.1. Jeg tror at det å analysere denne rapporten kan hjelpe meg til å forstå hvordan det fokuset man har i japansk matematikkundervisning, kan hjelpe til å oppnå en høyere grad av forståelse for matematikk hos elevene og gi gode matematiske prestasjoner.

Hvilke matematiske refleksjoner og opplevelser har elever på ulike ferdighetsnivåer i matematikk i norsk videregående skole knyttet til matematiske resonnementer og bevisføring?

Jeg har prøvd å tenke gjennom mine egne erfaringer fra grunnskolen med bruk av matematisk bevis, og kunne ikke huske at det var noe vi jobbet særlig mye med da jeg var elev. Som lærer har jeg heller ikke undervist så mye om bevis, utenom i tilknytning til Pytagoras' læresetning knyttet til rettvinklede trekanter. Siden jeg har sett på resultatene norske elever har i matematikk på TIMSS - og PISA- testene, synes jeg det var interessant å se hvilke erfaringer norske elever har knyttet til matematisk resonnering, argumentasjon og bevis. Dette var noe jeg syntes var viktig å se nærmere på, fordi det å kunne bevise noe ofte er nært knyttet til det å ha forståelse for det man skal bevise. Og har man forståelse for det man jobber med i matematikk, er det nærliggede å anta at man vil kunne bedre det matematiske prestasjonsnivået, blant annet på internasjonale tester. I tillegg var fokus på resonnering i matematikk og arbeid med matematisk bevis noe av det jeg hadde oppfattet som fremtredende i japansk matematikkundervisning, og kanskje er dette et moment som har ført til japanske elevers gode matematikkprestasjoner.

2. Oppgavens rammeverk

De fleste forskningsoppgaver er forankret i eksisterende teori, som gir grunnlag for de problemstillingene og forskningsspørsmålene en ønsker å finne svar på. Teoriens rolle er å underbygge den forskningen man utfører, gi et fundament til analysen. Ib Andersen har gitt en god grunn til at vi som forskere trenger et teoretisk rammeverk når vi skal utføre egen forskning: *«Teorier er forenklinger af virkeligheden, og uden disse forenklinger ville analyser af virkeligheten ofte blive alt for komplekse, overvældende og flydende»* (Andersen, 2005 s. 31). Det teoretiske rammeverket hjelper en med å holde fokus når man jobber med egen forskning, og til å disponere og strukturere oppgaven man jobber med. I tillegg er det teorien som hjelper forskere til å systematisere de dataene de innhenter.

2.1. Teori om bevis

Som en kort bakgrunn for å underbygge mitt fokus på matematisk forståelse og matematisk bevis vil jeg her gi noen begrepsdefinisjoner, se kort på bevisets historie, bevisets plass i skolens læreplaner for matematikkfaget, samt en presentasjon av teori knyttet til matematisk forståelse som jeg har benyttet i arbeidet med oppgaven min.

2.1.1. Kort om bevis - noen teoretiske definisjoner og litt historie

Det har opp gjennom årenes løp blitt undervist i og om matematisk bevis i skolen. Men hva er egentlig et matematisk bevis, kort forklart? I matematikkboken *Sigma R1* gis følgende definisjon på hva et matematisk bevis er til elevene:
«Å gjennomføre eit bevis vil seie å etablere ei samanhengande kjede av implikasjonar frå premissen til konklusjonen» (Øgrim, 2011 s. 56). Dette er kanskje ikke den enkleste definisjonen på hva et matematisk bevis er, da det forutsetter at leseren er kjent med begrepene implikasjoner, premiss og konklusjon, og hvordan disse normalt benyttes i matematikkfaget. Alternativt har McGraw-Hill denne korte definisjonen: *«Proof; A deductive demonstration of a mathematical statement.»* Selv synes jeg Krantz har sagt det på en kortfattet og grei måte i innledningen til boka *si «A proof in mathematics is a psychological device for convincing some person, or some audience, that a certain mathematial assertion is true»* (Krantz, 2010 s. vii). Det finnes altså mange ulike definisjoner av hva som menes med matematisk bevis. Et element som kan gjøre bevis til et litt abstrakt og utfordrende begrep i skolematematikken, er at man bruker ulike begrep som kan virke fremmede, knyttet til bevis. Eksempelvis snakker man gjerne om induksjon og deduksjon, eller bevis ved hjelp av reductio ad absurdum. Disse begrepene kan virke kompliserte og utfordrende for en elev å forholde seg til, så det er viktig å forstå hva begrepene deduksjon og induksjon betyr, og sammenhengen mellom disse i matematikken. Jeg vil kort definere hva som menes med noen ulike bevisformer i matematikk. Definisjonene er i hovedsak

hentet fra Alsina og Nelsen (2010), oversatt og noe omformulert og nedkortet av meg. I tillegg til disse formene for bevis, kan det selvsagt finnes flere andre, gjerne mindre vanlige i skolematematikken, som f.eks. bevis ved kontrapositivitet, eller bevis som kombinerer ulike former av de nedenforstående versjonene.

Direkte bevis: Man beviser ved hjelp av definisjoner, aksiomer, ulikheter, tidligere beviste lemmaer og teoremer etc. for å vise at konklusjonen man har kommet frem til logisk følger av hypotesen man har fremsatt.
Bevis ved motsigelser/ kontrabevis: Denne typen bevis er kanskje bedre kjent under betegnelsen *reductio ad absurdum*, og går ut på å bevise at det er logisk umulig at et utsagn eller en hypotese er usann. Vanligvis gjøres dette ved at man som utgangspunkt antar at den gitte påstanden eller hypotesen er usann og deretter komme frem til et logisk motargument.
Bevis ved induksjon: Dette er en konkret metode, som blir mye benyttet i undervisning i matematisk bevis på mer avansert nivå i videregående og på universitetsnivå. Den går ut på at man ønsker å bevise at en påstand av formen P(*k*) er sann for alle positive heltall *k*. Da må man først vise at P(*1*) gjelder, og deretter vise at hvis P(*k*) er sant (noe man velger å anta), må også P(*k+1*) være sant.
Bevis ved eksemplifisering: Man deler opp hypotesen i et endelig antall *n* av bestemte tilfeller, og konstruerer *n* beviser som viser at hvert tilfelle *n* impliserer den konklusjonen man har antatt er sann. De *n* bevisene kan være direkte, bevis ved motsigelser eller andre bevisformer (Alsina & Nelsen, 2010 s. xii- xiii).

Matematisk bevis i seg selv kan utgjøre et eget emneområde i skolematematikken, men det jeg har fokusert på i denne oppgaven, er matematisk bevis som en metode til å kunne demonstrere for andre at det er en logikk og sannhet i de matematiske resonnementer og resultater man fremsetter. Dette henger sammen med de aktuelle grunnleggende ferdighetene som vektlegges i Læreplanen for Kunnskapsløftet's generelle del. Jeg kommer nærmere inn på dette i avsnitt 2.3. Bevis i matematisk sammenheng er altså uløselig knyttet sammen med logisk resonnement og sannhet. Men hva er sannhet i matematikken? Om et bevis er en endelig sannhet, har vi akseptert at de originale postulatene og aksiomene som alle våre mest kjente matematiske bevis er bygget på, er representasjoner av de grunnleggende matematiske sannheter (se f.eks. Bourbaki s.

11-17 og Reid & Knipping s. 37- 39). Man kan også finne mange matematikere som vil hevde at bevis er matematikkens hjerte (Alsina & Nelsen, 2010 s.xix).

Å kunne tenke matematisk og å kunne kommunisere disse tankene og refleksjonene til andre er en viktig grunnleggende ferdighet i skolematematikken som fag. Dette er presisert i den generelle delen av Kunnskapsløftet, som tar for seg grunnleggende og gjennomgående ferdigheter som elevene skal utvikle i alle fag (Kunnskapsdepartementet, 2006). Ved å jobbe med resonnering knyttet til det å forklare, argumentere og bevise noe matematisk kan elevene få utviklet sine ferdigheter både muntlig og skriftlig i faget, samtidig som de selv blir i stand til å utøve kritisk tenkning og fremsette hypoteser innenfor ulike matematiske emner og oppgaver. Dermed kan man oppnå mer enn bare «teknikklæring» hvis man jobber med bevis, elevene lærer om matematisk bevisføring samtidig som de lærer å kommunisere med hverandre ved hjelp av muntlig og skriftlig språk i matematikkfaget. Det å måtte sette ord på de tankene og refleksjonene man gjør seg, er et viktig redskap for å øke forståelsen for det man jobber med. Ved å måtte formulere de resonnementene og bevisene man kommer frem til, får man selv en større bevissthet om hvordan man selv har tenkt, og det faglige grunnlaget og matematiske innholdet i den oppgaven man har jobbet med. Da vil man ha tatt et viktig skritt i retning av relasjonell forståelse (som jeg kommer nærmere inn på i punkt 2.6 og 2.7). Om en elev har forstått det han eller hun har jobbet med, tydeliggjøres når eleven kan *«...forklare sammenhengen mellom premissene i utfordringen og den endelige løsningen»* (Solvang, 1986 s. 97). Bevis i matematikkundervisningen brukt på riktig måte, kan være et meget viktig element knyttet til å utvikle elevers forståelse, i følge blant andre Hanna og de Villiers (2008):

> ...for mathematicians, proof is much more than a sequence of correct steps, it is also and, most importantly, a sequence of ideas and insights, with the goal of mathematical understanding - specifically, understanding why a claim is true. Thus, the challenge for educators is to foster the use of mathematical proof as a method to certify not only that something is true, but also why it is true. (s. 330)

2.1.2. Deduksjon og argumentasjon vs. bevis

Når man diskuterer bevis og hva som regnes som matematisk bevis, er det viktig at man er klar over skillet mellom argumentasjon, deduksjon og bevis. Argumentasjon og deduktiv resonnering er essensielle deler av den prosessen man må gjennom for å komme frem til et plausibelt matematisk bevis, men det er ikke det samme som et bevis. Forskning gjort på feltet (se f.eks. Ball, Hoyles, Jankhe & Movshovitz-Hadar (2003), Knuth (2002), Stylianides (2009) og Tall (1989)), viser at mange elever blander sammen argumentasjon og bevis. De anser selve argumentasjonen som blir gjort i matematiske sammenhenger for å utgjøre et bevis i seg selv. Dette kan i mange tilfeller ha sammenheng med at elever i mange land har lite undervisning knyttet til bevisføring, og elever har for lite egen erfaring med matematisk bevisføring til å kunne avgjøre hva som kvalifiserer til å være et bevis og hva et bevis faktisk er kontra et argument. Dette innebærer også at de bør ha kjennskap til aksiomer og premisser i matematikken, slik at de kan se sammenhengen også i andres bevisføring. Når man jobber med å lære elever matematisk bevis, er det viktig å vise at opp gjennom historien har man formulert matematiske beviser ved hjelp av logisk resonnering og argumentasjon, bygget på kjente aksiomer og tidligere antakelser. Særlig Euklid sine aksiomer/ postulater, som han presenterte i sine bøker Elements, er gode eksempler på dette, som grunnsetninger i geometrien, som mange andre matematiske beviser bygger på (Burton, 2011b s. 141-181). I tillegg bør elevene ha kjennskap til de ulike måtene man kan bevise noe matematisk på, slik at de ser at matematiske bevisføring ikke bare er ensidig og rigid, men vakkert, fleksibelt og nødvendig (her kan Alsina og Nelsen sin bok være et fint verktøy for læreren(Alsina & Nelsen, 2010)). Jeg er av den oppfatning, etter å ha lest ulike forskningsartikler om bevis og bevis i skolens matematikk, at man bør vektlegge elevenes eget arbeid med bevis, slik at de får et eierskap og et reelt forhold til det å bevise noe matematisk, og vise dem hvorfor man gjør dette, ikke bare hvordan.

Ved hjelp av boken *Proof in Mathematics Education - Research, Learning and Teaching* (Reid & Knipping, 2010) har jeg fått et innblikk i aktuelle studier gjort i tilknytning til bevis i skolens matematikkundervisning i ulike land. Den presenterer teorier om hva bevis er og hvilken rolle det spiller i matematikken, samt relevante spørsmål, problemstillinger og utfordringer knyttet til matematisk bevis som forskningsfelt. Siden det er gjort veldig mye forskning på ulike aspekter av matematisk bevis de siste 20-40 årene, har denne boken vært til uvurderlig hjelp når det kommer til å få en oversikt over hvilke deler av forskningslitteraturen som er relevant for min masteroppgave.

2.2. Historie i matematikkundervisningen

Jeg synes det er viktig å nevne matematikkens historie som en fantastisk inspirasjon- og informasjonskilde på feltet bevis. Her kan man se på utviklingen av matematisk bevis av ulike typer, hvordan definisjonen på hva et matematisk bevis er har endret seg, og finne beviser på store matematiske problemstillinger. Noen kjente og aktuelle historiske bevis som jeg synes kan være spennende å ha fokus på i undervisningssammenheng, er blant annet bevisene for at det finnes uendelig mange primtall. Euklid sitt bevis på dette mener jeg er et nydelig eksempel som kan vise elevene at det å jobbe med matematiske bevis er både konkret og nyttig, da man lærer seg å argumentere og reflektere rundt svar i matematisk sammenheng. Her kan man for eksempel benytte kopier av utvalgte deler av Euklid's Elements, for å vise elevene hvordan han formulerte postulater og aksiomer om hva som skulle være definisjonene på bl.a. linjer og punkter. Deretter brukte Euklid de aksiomene og postulatene han hadde samlet til å utvikle ulike geometriske bevis, noe som kan illustreres ved hjelp av figurer for elevene. Det er også spennende å fordype seg i de diskusjonene som har vært knyttet til nettopp dette arbeidet til Euklid opp gjennom århundrene. (Se f. eks. side 42- 43 i Krantz (2010) og kap. 4 i Burton(2011b)). Det å trekke inn gode eksempler og oppgaver fra matematikkens historie kan være nyttig. Man kan la elevene jobbe seg frem til svar og bevis selv, og la de «klassiske» bevisene inngå som en del av klassediskusjon og drøfting i etterkant. Dette er et spennende område, som kan være aktuelt for en annen masteroppgave, dessverre har jeg ikke anledning til å diskutere dette videre her, da det vil gå langt utenfor omfanget av mine forskningsspørsmål og min masteroppgave. En fin innføring finner man i kapittel 1 i Ragnar Solvang sitt kompendium (Solvang, 1987).

2.3. Læreplaner

Når det gjelder bevisets plass i norske læreplaner har jeg hatt stor nytte av Olsrud sin masteroppgave som omhandler nettopp dette temaet, der han ser på læreplanene for videregående utdannelse i Norge fra 1896 til 2009 (Olsrud, 2009). Han konkluderer med at:

> ...matematisk bevis har vært betraktet som en viktig del av alle læreplanene som her har blitt studert. Det synes som om at beviset hadde en større plass i undervisningen ved Lov av høiere almenskoler av 1896 og 1935, en tid hvor gymnasene var for en mindre del av årskullet enn i de to læreplanene som fulgte i 1976 og 1994 (R94). Læreplanene fra 1976 og 1994 la mer vekt på anvendelser innenfor matematikken og bevisteori ble nedprioritert. R94 ble revidert i 2000 og bevis

fikk en enda mindre rolle etter dette, noe som går klart frem av læreplanmålene og eksamensoppgavene før og etter årtusenskiftet. Kunnskapsløftet (K06) fra 2006 ser ut til å satse mer på bevis enn sine to forgjengere fra 1976 og 1994. Elevene skal lære om ulike bevistyper og bruke disse til å gjennomføre matematiske bevis. Induksjonsbeviset er tilbake etter, i praksis, å ha vært ute av den videregående skolen i nærmere tjue år. (Olsrud, 2009 s. 6)

Det oppsto en del større endringer i tilknytning til læreplanene for den videregående skolen i Norge da det gjennom Reform 94 ble en lovfestet rett i Opplæringslovens § 3.1 (Kunnskapsdepartementet, 1998) for alle å ha muligheten til å ta videregående skole. Dette førte til at pensum og en læreplanen, som tidligere var spesielt tilpasset elever som tok videregående/ gymnas for å kunne gå videre på universtiets- og høyskolestudier, nå ble til en læreplan og et pensum som skulle favne alle elever. Dette var selvfølgelig en stor omveltning, da man ikke lenger kunne ta utgangspunkt i at det bare var faglig dyktige og motiverte elever som deltok i matematikkundervisningen i den videregående skolen. I dagens læreplaner finner vi bevis og resonnering knyttet til bevisføring nevnt blant annet på følgende steder i Kunnskapsløftets læreplaner:

Fra kompetansemål etter 10.årstrinn, tall og algebra:

Eleven skal kunne analysere samansette problemstillingar, identifisere faste og variable storleikar, kople samansette problemstillingar til kjende løysingsmetodar, gjennomføre berekningar og presentere resultata på ein formålstenleg måte

Grunnleggende ferdigheter for alle trinn fra 1.-10. samt Vg1:

Å kunne skrive i matematikk inneber å beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear. Det inneber å bruke matematiske symbol og det formelle matematiske språket til å løyse problem og presentere løysingar.

Grunnleggende ferdigheter i matematikk for studieforberedende, realfaglig, muntlig:

Det vil si å stille spørsmål, delta i samtaler og drøftinger av matematiske situasjoner og problemer og argumentere for egne løsningsforslag. Å formulere et matematisk bevis skriftlig med bruk av korrekt matematisk notasjon og logisk gyldige slutninger inngår. (Kunnskapsdepartementet, 2006)

På oppdrag fra Utdanningsdirektoratet har Matematikksenteret i Trondheim laget en guide til å forstå hva som menes med resonnementskompetanse i matematikk, og jeg synes denne guiden gir en god definisjon av hva som menes med resonneringskompetanse:

> Resonnementskompetanse består i å kunne følge matematiske resonnement gitt av andre og kunne gjennomføre resonnement selv. Dessuten innebærer det å forstå hva et bevis er, og hvordan et bevis skiller seg fra andre former for matematisk resonnement. Det innebærer å skulle oppfatte ideen i et bevis og selv kunne gjennomføre et bevis. (Matematikksenteret, 2007)

Denne guiden er basert på en dansk rapport som blant andre Mogens Niss var med på å utforme på oppdrag fra det danske Undervisningsministeriet (Niss & Jensen, 2002).

Når det gjelder lærebøker i matematikk som har vært benyttet i norsk skole, bærer disse hovedsaklig preg av noe av det samme bevisfokus som de gjeldende læreplanene de er skrevet under. Også dette har Olsrud gått nærmere inn på i sin masteroppgave (Olsrud, 2009).

2.4. Litteratur og forskning knyttet til matematisk forståelse

Jeg har sett på det som viktig for oppgaven min å først se på hvilke definisjoner jeg har valgt å benytte når jeg snakker om hva som menes med matematisk forståelse. Et passende og velbegrunnet teoretisk rammeverk er med på å definere denne oppgavens utforming, og jeg har hentet mye av mitt rammeverk fra Richard R. Skemp, som selv skrev i sin artikkel: *«There is nothing so powerful for directing one's actions in a complex situation, and for coordinating one's own efforts with those of others, as a good theory»* (Skemp, 1976 s. 13).

I prosessen med å skrive denne masteroppgaven jeg hentet svært mye hjelp og inspirasjon fra Skemp sin klassiker *The psychology of learning mathematics* (Skemp, 1987). Jeg bruker den andre, reviderte og utvidede versjonen av boken, den første kom ut i 1971. Teori om matematisk forståelse er nødvendig for arbeidet mitt med denne masteroppgaven, og jeg har valgt å hente denne teorien fra Skemp sitt arbeid. Et viktig moment er å påpeke at vi ofte snakker om to hovedtyper av forståelse i matematikk, konseptuell forståelse (som Hiebert ofte skriver om, men som av Skemp kalles for instrumentell forståelse) og relasjonell forståelse, som er Skemp sitt utgangspunkt. Konseptuell forståelse er en mer overfladisk forståelse av et matematisk konsept og/ eller en matematisk prosedyre, mens relasjonell forståelse er en forståelse for hvorfor man tenker og gjør som man gjør innenfor ulike matematiske problemstillinger. Dette forklares nærmere i avsnitt 2.5.

Å definere forståelse på et generelt grunnlag er vanskelig nok i seg selv, og ikke mindre utfordrende når det er snakk om forståelse i matematikkfaget, da dette er et fag som ofte skiller seg vesentlig ut fra resten av fellesfagene i skolen, både ved testresultater og elevers egen oppfattelse av fagenes vanskelighetsgrad og kompleksitet. Det å forstå noe kan vel enkelt forklares som at man har skjønt et konsept eller begrep sin egentlige betydning, og dette må være så klart at man selv kan bruke konseptet eller begrepet korrekt på egenhånd, og gjerne også være i stand til å forklare eller lære det videre til andre (Solvang, 1986 s. 96- 100). Når man forstår noe, finner man mening i det og bruker sine kognitive evner til å finne og lagre denne meningen. Forståelse handler altså om å finne en mening i noe, og hvordan vi mentalt strukturerer og organsierer den kunnskapen vi besitter (Skemp, 1987 s. 29- 32).

Grunnen til at jeg synes Skemp har gitt gode definisjoner på hva som menes med matematisk forståelse, er blant annet at han baserer seg på Piaget sine teorier om kognitivismen og utvikling av forståelse gjennom mentale skjemaer og vårt individuelle begrepsapparat. Piaget er jo en av de virkelig store navnene innenfor konstruktivismen, mer spesifikt den kognitive konstruktivismen.

Tre essensielle begreper fra Piaget's teori som også benyttes av Skemp, er *skjema, assimilasjon* og *akkomodasjon* (Piaget, 1997). Piaget brukte begrepet *skjema* om de mentale forbindelsene vi lager til et begrep, et fenomen, en ting og/eller et symbol. All kunnskap vi har om et fenomen organiseres mentalt som en representasjon av et handlingsmønster. Disse knyttes sammen og danner et skjema. Et skjema lagres og kan hentes frem ved behov, for eksempel når man skal prøve å forstå et nytt begrep eller fenomen (Imsen, 2005 s. 229- 231; Inhelder & Piaget, 1958). Man opparbeider seg altså en omfattende samling av slike mentale skjemaer, og ofte dannes det forbindelser mellom de ulike skjemaene. Disse forbindelsene mellom ulike skjema og grupperinger av skjema kalte Piaget for *kognitive strukturer*. Det er utviklingen av våre skjema og kognitive strukturer som fører til læring. Mer presist kan vi si at: *«De kognitive skjemaene er bevisste skjemaer som utgjør råmateriale for tenkning»* (Imsen, 2005 s. 231). Begrepene assimilasjon og akkomodasjon henger sammen med denne utviklingen av skjemaene våre, altså læringsprosessen. Når vi *assimilerer* ny kunnskap, betyr dette at vi går inn i våre eksisterende skjemaer, og tilpasser den nye kunnskapen til det vi vet fra før. Noen ganger oppstår det en kollisjon mellom den nye kunnskapen vi møter og den gamle kunnskapen vi allerede har i skjemaene våre. Da må vi enten konstruere et helt nytt skjema, eller radikalt endre og utvide våre eksisterende skjemaer. Det er dette Piaget kaller for *akkomodasjon*. For at det skal foregå læring, må man settes i situasjoner der akkomodasjon vil forekomme, slik at vi kan tilegne oss ny kunnskap og forståelse (Imsen, 2005 s. 232; Piaget, Vonèche, & Gruber, 1995).

Piaget vektla at det finnes to hovedformer for læring, nemlig figurativ og operativ læring. Figurativ læring vil være det vi kan se på som pugg og drill, der kunnskapen er overfladisk og ikke tilknyttes noen av våre kognitive strukturer. Operativ kunnskap er varig kunnskap, der man selv har kommet til en erkjennelse og forståelse, slik at den nye kunnskapen kan assimileres elller akkomoderes inn i våre kognitive strukturer (Piaget, 1997). Dette er interessant med tanke på at man i matematikkundervisningen dessverre ofte har endt opp med pugg og drill, altså figurativ kunnskap hos elevene, når det man egentlig ønsker er operativ kunnskap, også kalt logisk-matematisk læring. Piaget anså operativ læring som den optimale formen for læring, da kunnskapen er elevens egen som han eller hun har tilegnet seg gjennom egen forståelse og erkjennelse (Imsen, 2005 s. 234- 235).

2.5. Et grundigere blikk på Skemp sin teori om matematisk forståelse

Skemp introduserer i sin teori to svært essensielle begreper knyttet til læring og forståelse i matematikk, nemlig instrumentell forståelse og relasjonell forståelse, begreper som han har lånt og videreutviklet fra Stieg Mellin-Olsen (Skemp, 1976 s. 2). Når Skemp tar opp dette, viser han til det faktum at fra hans perspektiv er det relasjonell forståelse som utgjør «ekte» og dyptgående forståelse, mens instrumentell forståelse er en «forståelse» utelukkende basert på å kunne regler og metoder uten å vite hvorfor reglene og metodene fungerer. Grunnen til at Skemp selv anså det som nødvendig å lage en teori knyttet til matematisk forståelse, og å gå inn i de to ulike formene for forståelse, var at han oppdaget at det var svært mange lærere som utelukkende underviste matematikk fra et instrumentelt ståsted. I sin artikkel fra 1976 prøver Skemp å forklare forskjellen mellom relasjonell og instrumentell forståelse, se på fordeler og ulemper ved disse, og se hvordan læreren og elevenes syn på hva forståelse i matematikk er påvirker undervisningen og deres forhold til matematikkfaget. Skemp selv uttrykker stor overraskelse og fortvilelse over at det i så stor grad er legitimert å definere forståelse i matematikk utelukkende på instrumentell læring (Skemp, 1976). For å sitere ham direkte:

> ... relational understanding and instrumental understanding. By the former is meant what I have always meant by understanding, and probably most readers of this article: knowing both what to do and why. Instrumental understanding I would until recently not have regarded as understanding at all. It is what I have in the past described as «rules without reasons», without realising that for many pupils and their teachers the possession of such a rule, and ability to use it, was what they meant by understanding. (Skemp, 1976 s. 2, utheving i originalteksten)

Kort oppsummert er relasjonell forståelse brukt for å beskrive det å bygge opp konseptuelle strukturer knyttet til matematikk, som setter en person i stand til å løse stadig nye oppgaver og problemer, selv om de kanskje er annerledes enn de oppgavene man har jobbet med tidligere. Ideelt sett vil denne formen for forståelse i matematikk føre til at man hele tiden utvider sine mentale skjema og stadig når nye nivåer av forståelse gjennom aktiv deltakelse i læringsprosessen. Instrumentell forståelse brukes her for å beskrive matematisk forståelse som utelukkende baserer seg på å ha en metode eller en regel som bidrar til at man kan løse et gitt problem eller en bestemt oppgave og få et korrekt svar, uten at man nødvendigvis har noen innsikt i hvordan eller hvorfor metoden eller regelen fungerer. Denne formen for forståelse er lite fleksibel og har liten eller ingen overføringsverdi når man møter nye oppgaver og problemer som skiller seg fra det man tidligere har jobbet med. Satt på spissen kan man gjerne si at denne formen for forståelse passer om man kun ønsker side opp og side ned med korrekte svar på kortest mulig tid, mens relasjonell forståelse passer om man faktisk ønsker å vise elever glede og innsikt i matematikkfaget på et høyrere nivå, samt sette dem i stand til å selv utforske nye matematiske problemer (Skemp, 1976 s. 4- 15).

En av grunnene til at Skemp utviklet sin teori om matematisk forståelse, var at han mente at ingen elever kunne lykkes med matematikk om de ikke ble undervist i faget på en slik måte at de må bruke sin intelligens istedenfor evne til pugging og memorisering (Skemp, 1987 s. 7). Skemp definerer i kapittel 3 forståelse slik: *«To understand something means to assimilate it into an appropriate schema»* (Skemp, 1987 s. 29). For å kunne konstruere gode og funksjonelle skjemaer (også kalt konseptuelle strukturer) i arbeid med matematikkfaget, er det viktig å tenke langsiktig, og hvordan man kan etablere et skjema som er godt fungerende innenfor flere områder av matematikken. En viktig grunn til dette, er at det å endre på egne eller andres skjema er svært krevende, særlig om man ikke selv er enig i at skjemaene trenger endring. Dette er særlig viktig for en lærer som søker å utvikle en god relasjonell forståelse for matematikk hos sine elever, man må alltid ha fokus på langsiktige mål for skjemaene man ønsker å konstruere (Skemp, 1987 s. 34). Å bygge opp matematisk forståelse handler altså om å definere konsepter og symboler for ulike konsepter, som igjen settes sammen til skjema. I matematikk kan disse prosessene være ganske kompliserte, da matematikk er et ganske abstrakt fag, der mange av konseptene er del av komplekse hierarkiske strukturer. Om man mister forståelse på et nivå, vil alt som kommer over dette være meningsløst. Her ser man også paralleller til van Hiele sin teori om nivåer av matematisk resonneringskompetanse, som jeg kommer nærmere inn på i avsnitt 2.8.

I kapittel 11 skriver Skemp om *«matematikk som en aktivitet av vår intelligens»* (s.142, ibid., min oversettelse) der han ser spesifikt på konstruksjoner av kognitive skjema knyttet til matematikk og læring innenfor matematikkfaget. Fokuset er på hvordan skjemaer knyttet spesifikt til matematikk blir konstruert, og hvordan individet så kan ta i bruk disse skjemaene. Han stiller seg også følgende spørsmål: Hva kan vi bruke vår matematiske kunnskap og forståelse til når vi har ervervet den? Skemp kommer frem til to tydelige eksempler på hvordan matematikk og matematisk kunnskap kan representere noen av de særegne funksjonene til den menneskelige intelligens:

> So, two of the ways in which mathematics now appears as a special case of the functioning of human intelligence are: (a) The use of mathematical models to make predictions, sometimes to achieve goal states, which could not be possible without them; and (b) Making explicit the multi-purpose nature of these models. (Skemp, 1987 s. 146)

Et annet spennende kapittel knyttet til matematisk forståelse i tilknytning til skolens matematikkundervisning, er kapittel 13, som har tittelen *«Goals of Learning and Qualities of Understanding»* (s.164, ibid.). Her presenterer Skemp en modell for intelligens som han mener bør erstatte de mer tradisjonelle «I.Q.-baserte» modellene. I den nye modellen inkluderes faktorer som; hvordan intelligens fungerer, hvorfor vi trenger intelligens, og hvordan man som lærer kan hjelpe elever til å utnytte sin intelligens (uansett hvilket nivå eleven måtte være på) best mulig. Han snakker også om å skille mellom ulike typer forståelse, der han nevner sine egne kategorier, relasjonell og instrumentell forståelse, samt andre teorier som også involverer formell forståelse og logisk forståelse. Dette henter han fra forskning gjort av Byers og Herscovics, Backhouse og Buxton (Skemp, 1987 s. 166). Han velger å hovedsaklig fokusere på de to kategoriene han selv har presentert tidligere i boken, i tillegg til Byers og Herscovics sin kategori *logisk forståelse*, da han påpeker at det å ha for mange kategorier kan være like lite til hjelp som det å ha for få. Logisk forståelse defineres slik: *«...the ability to connect mathematical symbolism and notation with relevant mathematical ideas and to combine these ideas into chains of logical reasoning»* (Skemp, 1987 s. 166). Deretter diskuterer Skemp hvordan disse formene for forståelse vil kunne påvirke målene til henholdsvis skoler, lærere og elever innenfor matematikkundervisning. Den typen forståelse man bevisst eller ubevisst ønsker å oppnå med matematikkundervisningen vil påvirke målene for undervisningen og hvordan denne gjennomføres. Skemp tar også for seg forholdet mellom våre mentale skjemaer og læring, der han presiserer at det er viktig å ha fokus på hvilke mål man har med undervisningen, fordi dette henger sammen med hvordan elevene konstruerer sine skjema, og kan være fallgruver for undervisningens effektivitet:

> We must also remind ourselves that the goals of teachers and pupils may differ. Moreover, if we set up a learning situation which is conductive to one kind of learning goal, this will influence the kind of schemas pupils construct at least as much as, possibly more than, what is overtly being taught. So there will be a mis-match between the situationally-determined learning goals, and those which teachers may have in mind and/ or verbally present. (Skemp, 1987 s. 168)

2.6. Om van Hieles nivåer av matematisk forståelse og matematisk kompetanse

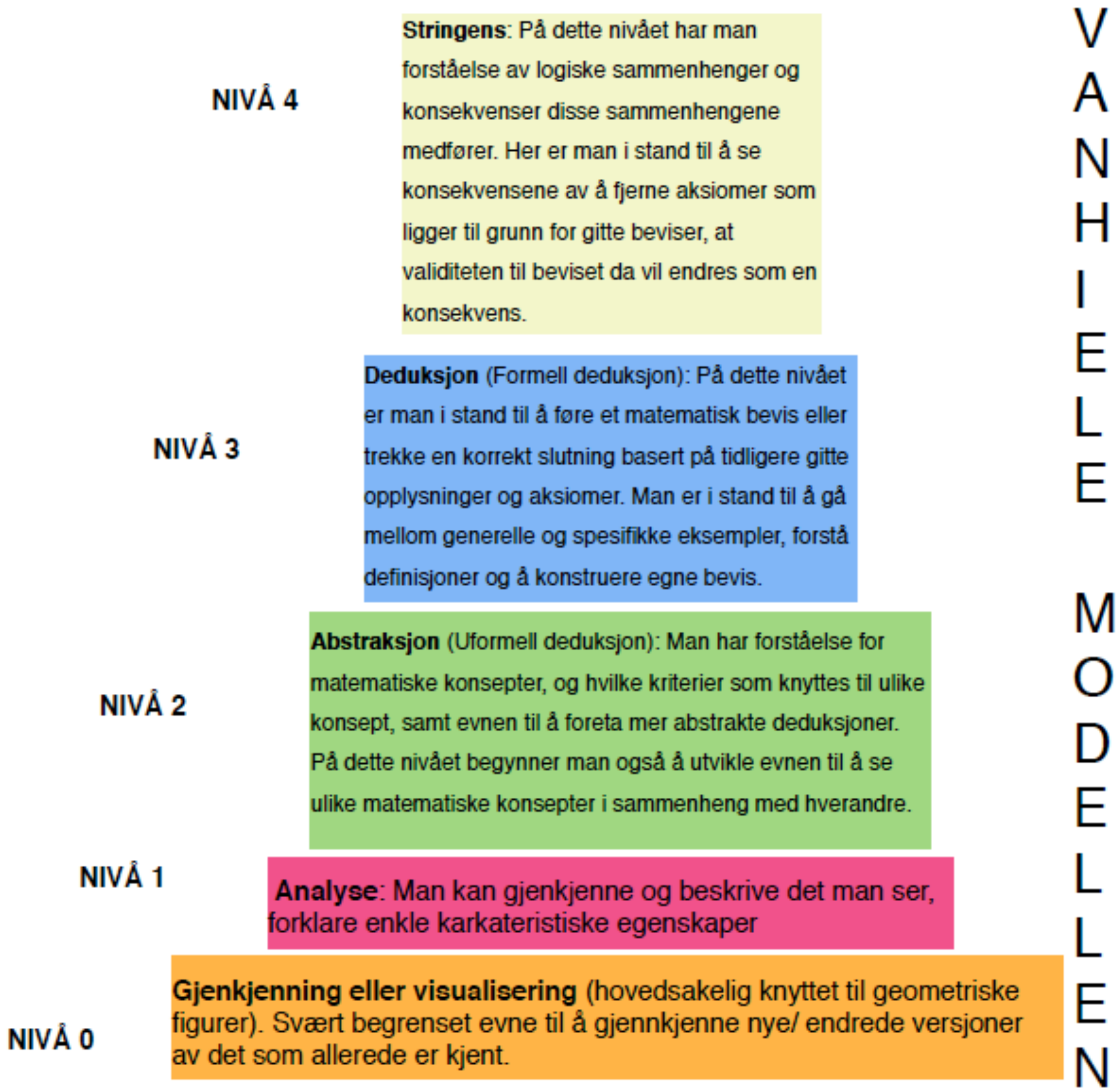
Ekteparet Pierre van Hiele og Dina van Hiele-Geldolf utviklet en modell over ulike nivåer i læring/ kognitiv utvikling spesifikt knyttet til geometri. Selv om dette i hovedsak er knyttet til geometri har jeg valgt å ta det med, da det kan sees på som en videreføring av Piaget sine teorier og arbeid innenfor kognitiv konstruktivisme. I tillegg synes jeg modellen er interessant på et mer overordnet nivå tilknyttet forståelse i matematikk. En interessant faktor knyttet til denne modellen, er det at bakgrunnen for å utvikle modellen var, i følge Pierre van Hiele, at forståelse og pugging ikke var det samme og at det å oppnå forståelse i matematikk kan innebære det å utvikle et begrepsapparat knyttet til en matematisk struktur:

> I had understood that the learning of facts could not be the purpose of teaching mathematics, I was convinced that development of insight ought to be the purpose. ... I learned that insight might be understood as the result of perception of a structure. (van Hiele, 1986 s. 4- 5)

De utviklet altså en teori om at man har en utvikling av matematisk forståelse og resonneringskompetanse som kan deles inn i fem ulike nivåer, og at undervisningen bør tilpasses til det nivået den enkelte elev befinner seg på. Det har vært ulike perspektiver på nivåinndelingen i van Hieles modell fra 90-tallet. I 1992 argumenterte Clements og Battista for at man burde ha nummereringen 1-5 på de eksisterende nivåene til van Hiele isteden for 0-4, slik at man kunne ha et nivå 0 som representerte den nye kategorien pre-rekognisjon (Clements & Battista, 1992). Dette nevnes også av Mason i hans artikkel om van Hiele nivåene (Mason, 1998). Her besvarer han spørsmålet om hvorfor det i ulike artikler benyttes ulike nummereringer på van Hiele nivåene, og hvilken betydning dette har:

> In their original works, the van Hieles numbered the levels from 0 to 4. Americans started numbering the levels from 1 to 5 instead. This scheme allows for the pre-recognition level to be called Level 0. Pierre van Hiele's recent works describe three levels of thought rather than five. (Mason, 1998 s.5)

Jeg har her prøvd å oversette og gjengi nivåene i et mer generelt matematisk perspektiv. Min oversettelse og tolkning er basert på van Hieles eget arbeid og de originale nivåinndelingene fra 0-4, men jeg har fjernet den spesifikke geometritilknytningen. Dette er gjort for å vise at teorien kan ha relevans på et mer generelt nivå i matematikkundervisningen.



Figur1: Bearbeidet og oversatt versjon av van Hieles nivåer av matematisk tenkning presentert i figur, fritt etter Pierre van Hiele (van Hiele, 1986).

2.7. Matematikkfaget i Japan og Norge

Som nevnt i avsnittet om min egenforståelse av forskningsspørsmålene, er det store poengforskjeller på norske og japanske elevers scorer på TIMSS og PISA testene, særlig i matematikkfaget. I denne masteroppgaven har jeg hovedsaklig valgt å fokusere på undervisningskultur i Japan og Norge, siden jeg selv underviser i og studerer matematikk i Norge, mens Japan er et land som presterer svært godt i matematikk. Jeg bruker en analyse av TIMSS 1999 Video Study (Hiebert, 2003) for å forsøke å forklare noen av poengforskjellene i matematikk mellom land som har deltatt i TIMSS og PISA undersøkelsene. Derfor anser jeg det som et relevant moment å komme med en kort utgreiing av hvordan utdanningssystemet og matematikkundervisningen i Japan er lagt opp sammenlignet med hvordan vi i Norge jobber med matematikkundervisning og skole generelt. Dette vil selvfølgelig bli en noe overfladisk innføring, grunnet denne forskningsoppgavens begrensede omfang.

Kort oppsummert er en av de mer interessante faktorene i japansk matematikkundervisning selve organiseringen av undervisningen, der man ofte kan bruke en hel skoletime til å jobbe med ett enkelt matematisk problem. Dette henger tett sammen med at man i Japan ønsker å fokusere på elevenes evne til refleksjon og matematisk tenking og argumentasjon, mens man i vestlige land kanskje har brukt mer tid på innlæring av teknikker og formler, gjerne etterfulgt av relativt store mengder med «pugg-og-drill» oppgaver (Andrews, 2001). Det kan virke som om japanske matematikklærere i større grad vektlegger at elevene selv skal resonnere seg frem til løsninger og formler, ofte fra det spesifikke til det mer generelle, i stedenfor at læreren kommer med alle svarene og løsningsmetodene. Det er et viktig element for japanske lærere at elevene forstår matematiske ideer (Sekiguchi & Miyazaki, 2000). Elevene blir ofte pålagt å presentere sine tanker og refleksjoner for læreren og resten av klassen, slik at man får en matematisk diskusjon der elevene selv er aktive bidragsytere. I Japan er det en signifikant kulturforskjell fra vestlige land som f.eks. Norge når det kommer til diskusjoner, nemlig at man ønsker å unngå uttalte uenigheter offentlig, samt at målet for kommunikasjon er harmoni og enighet mellom deltagerene i en diskusjon eller debatt. Dette antas også å påvirke den matematiske diskusjonen og argumentasjonen knyttet til bevisføring i skolens matematikkundervisning (Sekiguchi & Miyazaki, 2000). Læreren jobber aktivt for å fremme respekt for andres ideer og forslag, selv om man kanskje er uenig i det som blir fremsatt av andre. Et viktig mål er at elevene samarbeider, både med hverandre og med læreren, slik at klassen samlet kan komme frem til en løsning på problemet som alle kan enes om. Sammenlignet med vestens matematikk undervisning, finner vi mindre vektlegging av konkurranse mellom elevene og mer fokus på elevenes deltagelse i konstruktive argumentasjonsprosesser. Et mer dyptgående innblikk i likheter og forskjeller mellom matematikkundervisning i Japan og vesten (mer spesifikt i USA) finner man i Stigler og Hiebert's klassiker *The Teaching Gap* (Hiebert & Stigler, 1999).

Jeg har plukket opp noen flere kulturelle forskjeller mellom Norge og Japan som kan tenkes å ha påvirkning på arbeidet med matematikkfaget mens jeg har lest bøker og artikler om matematikkundervisning i Japan. Et interessant moment er for eksempel hvordan japanske lærere har muligheter til direkte påvirkning av det nasjonale pensumet i matematikk, og innspill til hvordan man bør undervise i matematikk (Mosvold, 2008). Her i Norge er det ofte politikere som initierer undervisningsreformer, gjerne på bakgrunn av elevenes «dårlige» prestasjoner på internasjonale tester som TIMSS og PISA. Fordi om enkelte utvalgsgrupper som arbeider med læreplaner og rettledninger til undervisning er sammensatt av utvalgte lærere, er det ofte ikke slik at det er den «vanlige» læreren som får bestemme eller ha innflytelse på læreplanene. I Japan, (som i Finland), har det vært fokus på at det skal være mindre politikerstyring og mer lærerstyring knyttet til læreplaner og undervisningsmetoder i matematikk. Andre kulturelle forskjeller knyttet til matematikk i skolen i Japan og Norge, er at det i Japan er en utbredt kultur for ulike former for privatundervisning i matematikk. Denne privatundervisningen kan være ved hjelp av andre studenter, privatlærer, eldre søsken og foreldre, eller ved såkalte juku (privatskoler som gir ekstraundervisning utenom vanlig skoletid) (Schumer, 1999). Det er altså et helt sett med andre holdninger og forventinger til en gjennomsnittlig japansk elev sin innsats i matematikk og andre skolefag enn her i Norge. Dette gjelder forventinger fra lærere og elever, men også elevenes forventninger til seg selv. I følge PISA-rapporten fra 2012 svarer 6 av 10 norske elever at de gir opp når de møter matematikkoppgaver som er vanskelige eller arbeidskrevende (Kjærnsli & Olsen, 2013 kapittel 4). Selvfølgelig vil det finnes unntak i begge land, men jeg tror dette muligens kan ha en innvirkning på elevenes innsats i faget. Ellers la jeg merke til at japanske lærere vektlegger det å verdsette alle elevers bidrag, og kunne gjøre konstruktiv bruk av elevfeil. Dette kan kanskje gi mer rom for elevdeltagelse, knyttet opp mot at flere av elevene opplever mestring når det er mindre fokus på rette og gale svar og mer fokus på at alle svar kan bidra til forståelse, innsikt og å lære nye tankemåter (Asami-Johansson, 2011; Jacobs & Morita, 2002; Stevenson & Stigler, 1994).

2.8. PISA og TIMSS

PISA og TIMSS er to store internasjonale undersøkelser knyttet opp til ulike lands faglige prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing, samt kartlegging av trivsel, organisering av undervisning o.l. i de ulike deltagerlandene. Kort sagt, en kartlegging av ulike undervisningssystemers prestasjoner og funksjoner, målt ut i fra elevbaserte undersøkelser. PISA og TIMSS er utviklet av hhv. The Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) og International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Her skal jeg kort oppsummere disse undersøkelsenes karakter, både når det gjelder historisk bakgrunn, testområder, deltakerland og grunnen til at de ble konstruert og tatt i bruk. I tillegg vil jeg kort ta med kritiske aspekter ved undersøkelsene som har blitt tatt opp i årenes løp. Det meste av informasjonen har jeg hentet fra de nasjonale og internasjonale nettstedene tilknyttet disse rapportene (OECD, 2014; UiO, 2014a, 2014b), samt de norske bøkene som oppsummerer resultatene fra de ulike testrapportene til TIMSS (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo et al., 2012; Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010) og PISA (Kjærnsli & Olsen, 2013; Kjærnsli, 2004, 2007; Kjærnsli & Roe, 2010).

Arbeidet med PISA startet midt på 1990-tallet, men ble offisielt lansert i 1997. Undersøkelsene har blitt gjennomført i henholdsvis år 2000, 2003, 2006, 2009 og 2012. Den neste PISA-undersøkelsen vil altså bli i 2015. Alle OECD-landene har deltatt på alle PISA-undersøkelsene, men det er også en del andre land som er med. I 2000 var det 43 deltakerland, mens det i 2015 forventes at minimum 71 nasjoner skal delta i undersøkelsen. Undersøkelsen kartlegger elevenes ferdigheter i regning, naturfag og lesing. Elevene som deltar er i alderen 15-16 år, og spørsmålene og oppgavene som benyttes er blant annet utviklet på grunnlag av innsendte bidrag fra alle deltakerlandene. For mer informasjon om undersøkelsens oppbygning og deltakerland samt administrering av undersøkelsene, vil jeg anbefale å gå inn på OECD sine PISA-sider.

TIMSS er en undersøkelse som tester elevers ferdigheter i matematikk og naturfag. Arbeidet med TIMSS startet i 1991, og den første undersøkelsen ble gjennomført i 1995. TIMSS gjennomføres av elever på 4.trinn og 8.trinn, samt at det finnes en egen undersøkelse, TIMSS Advanced, som retter seg mot elever på videregående. TIMSS er en læreplanbasert undersøkelse, som analyserer læreplanene i de ulike deltakerlandene, og gir oppgaver knyttet til hovedlinjene i disse. Antallet deltakerland har gått fra 45 på den første undersøkelsen i 1995, til 63 land i 2011. Ellers driver UiO en egen nettside for TIMSS Norge, der en finner alle resultatene og rapportene.

En god forklaring på hva som er likheter og forskjeller mellom TIMSS og PISA, samt målsettingen for å ha slike undersøkelser, finner man på TIMSS sin norske hjemmeside:

> TIMSS kan karakteriseres som en læreplanbasert undersøkelse. Analyse av de forskjellige nivåene i læreplanen står sentralt i TIMSS og et av de viktigste kriteriene for utvelgelse av oppgaver er at de er relevante i forhold til hva som undervises i majoriteten av deltakerlandene. Det er altså det som kan betegnes som ”skolekunnskap” man ønsker å måle.
>
> I PISA fokuseres det først og fremst på de nyttige sider ved fagene, og man søker å måle elevenes evne til aktivt å bruke sine kunnskaper og erfaringer. OECD ønsker gjennom PISA-undersøkelsen å få et svar på hvor godt skolen forbereder elevene på å møte de utfordringer de trolig vil møte i framtida (UiO, 2014b).

I Norge analyseres dataene fra TIMSS og PISA av Measurement and Evaluation of Student Achievement (MESA) som er tilknyttet Enhet for kvantitative utdanningsanalyser (EKVA) ved UiO. De jobber også med flere andre typer internasjonale data og undersøkelser knyttet til læring og undervisning. Representanter for de internasjonale hovedkontorene til TIMSS og PISA etterprøver analysene og resultatene som er gjort på nasjonalt nivå for å sikre at kvaliteten tilfredsstiller de kravene som er satt til alle deltakerlandene (OECD, 2014).

2.8.1. TIMSS 1999 Video Study

TIMSS 1999 Video study var en studie av matematikk og naturfag gjennomført i sju ulike land: Australia, Tsjekkia, Hong Kong SAR, Nederland, Sveits, USA og Japan. Den var basert på TIMSS Videotape Classroom Study fra 1995 (Stigler, 1999), som inkluderte tre land: Tyskland, Japan og USA. Dataene fra Japan er de samme både i 1995 og 1999 studien, men de er re-analysert i studien fra 1999. I forhold til Norge og vår undervisningskultur, kan vi sammenlignes med USA og Nederland, men begge landene har scoret bedre enn Norge på TIMSS- og PISA- testene. Det ble valgt ut mellom 50 og 100 klasserom som skulle filmes i alle deltagerlandene. De skulle være representative for landets gjennomsnittlige undervisning i matematikkfaget, ikke eksemplariske undervisningseksempler som skilte seg ut fra «normalen». Det var altså svært mange klasserom som ble filmet og analysert:

> The study involved videotaping and analyzing teaching practices in more than one thousand classrooms. In conjunction with the International Association of the Evaluation of Education Achievement (IEA), the study was conducted by the National Center for Education Statistics, U.S. Department of Education under a contract with LessonLab, Inc. of Los Angeles, California. (Hiebert, 2003)

Målene for å gjennomføre TIMSS 1999 Video Study var, i følge rapporten som ble laget etter studien, å beskrive undervisning i sju land, inkludert noen land som hadde scoret svært høyt på tidligere internasjonale tester av matematikkferdigheter. I tillegg var studien ute etter å utvikle objektive, observerbare målinger av klasseromsinstruksjon, som kunne fungere som kvantitative indikatorer på undervisningspraksis i hvert land. Den tok også sikte på å sammenligne undervisningspraksis mellom de ulike landene, og identifisere lignende eller ulike «lesson features» på tvers av landene og beskrive møsntre av undervisningspraksis innad i hvert av deltakerlandene (Hiebert, 2003 s. 1- 2).

Basert på den interessen som TIMSS 1995 Video Study genererte, hadde TIMSS 1999 Video Study også som mål å bruke den tilgjengelige informasjonen til å utvikle metoder egnet til å formidle studiens resultater, gjennom skriftlige rapporter og videoepisoder. Denne formidlingen skulle gjelde både for forskningsformål og for utviklingen av læreryrket/ undervisning (Hiebert, 2003 s. 1- 2).

Noen interessante faktorer fra rapporten i tilknytning til min oppgave, er at de har gjort noen interessante funn knyttet til resonnerningskompetanse og arbeid med matematisk problemløsning, og det å kunne demonstrere ved hjelp av logisk resonnering. Her er det særlig Japan som skiller seg ut, så dette kommer jeg til å gå nærmere inn på i analysedelen av oppgaven. Jeg har lest i rapporten om hvordan man bruker matematisk bevis i undervisning, og hvordan man jobber med å få elevene til å bli aktive deltakere i undervisningen. Det er også interessant å se på hvordan man i Japan vektlegger at elevene skal være med å utvikle de matematiske konseptene og begrepene man jobber med, at det ikke bare er læreren som står foran klassen og lekser opp en rekke matematiske formler og fakta (Hiebert, 2003).

2.8.2. Kritikk knyttet til TIMSS- og PISA-testene

Det har selvfølgelig vært ulike tilbakemeldinger på bruken av TIMSS og PISA gjennom årenes løp, både positive og negative. Som et eksempel på en person som har vært svært kritisk til PISA-undersøkelsene i senere tid, kan jeg nevne statistikkprofessor i undervisningstest ved Københavns Universitet, Svend Kreiner. Han har vært kritisk til resultatene og bruken av statistikk i disse undersøkelsene, han mener at om man bare manipulerer tallene nok, kan man få disse undersøkelsene til å vise stort sett det man ønsker (Kreiner, 2011). Rolf Vegar Olsen i forskergruppa Measurement and Evaluation of Student Achievement (MESA) ved Universitetet i Oslo er uenig i den kritikken Kreiner kommer med, og uttaler blant annet følgende til forskning.no: *«- Kreiner framstiller det som gjetting. Sånn er det selvsagt ikke. Det ville betydd at vi drev med juks og fanteri, sier Olsen. Han sier det er kompliserte beregninger som ligger bak resultatene, men at det finnes god dokumentasjon på hvordan det er gjort»* (Nordahl, 2011). Det er altså et forsvar mot den kritikken som fra flere hold har indikert at tallene fra TIMSS- og PISA-undersøkelsene brukes til blant annet å fremme skolepolitiske synspunkt og innføre endringer i skolen etter politikeres smak og behag.

Et viktig moment fra kritikerene av disse testene, er altså at resultatene kan misbrukes av politikere og andre som tolker resultatene i favør av endringer de selv ønsker innført i skolen. Dette har blitt kritisert av blant andre Theo Koritzinsky, førsteamanuensis i samfunnsfag ved Høgskolen i Oslo, avdeling for lærerutdanning:

> Mange politikere er lite eksplisitte når de bestiller forskning, både på hva de bestiller og hvorfor de bestiller det. De ønsker å bruke forskningen selektivt til å legitimere en politikk som de har gjennomført eller som de vil gjennomføre, uansett hvilke resultater evalueringen får. I beste fall legitimerer forskningen det de allerede har bestemt seg for å innføre. (Jakobsen, 2002)

Andre har igjen påpekt at all publisiteten rundt disse testene endrer synet folk flest har på skolen og skolens rolle, særlig når mediene blåser opp det som er negativt knyttet til norske resultater på disse testene (Sjøberg, 2005).

Når man får et sterkt resultatorientert fokus, kan dette medføre nedprioritering av andre sider ved undervisningen. Man må også ha i bakhodet at PISA og TIMSS presenterer en statistisk sammenligning av land med svært ulike kulturer, både innenfor undervisning, men også i samfunnet ellers. Terje Ogden, forskningsdirektør ved Atferdssenteret, har påpekt at selve PISA-testen kan sees på som problemet, da holdningene norske elever og deres foreldre har til disse testene avviker fra andre land:

> Terje Ogden...mener norske foreldre har større utdanningskrav til barna sine enn i mange andre land. Han tror grunnen til de svake PISA-resultatene er at norske skolebarn ikke ser viktigheten ved selve testen.
> – Mange land tillegger testen mer viktighet enn Norge. Her har skoleungdommen et mer avslappet forhold til prøven, og det viser seg nok i resultatene, sier han. Ogden tror at norsk skoleungdom er mer opptatt av helheten og meningen i utdanningstilbudet, og mener dette kan tolkes som et sunnhetstegn. (Fladberg & Wedén, 2013)

Det har også vært stilt spørsmål ved hvilke matematikkunskaper som testes gjennom TIMSS og PISA, er det snakk om instrumentell forståelse eller relasjonell forståelse? Og hva er det ønskelig at elevene skal testes i for å kunne si at man har elever som er gode i matematikk? Disse spørsmålene har vært diskutert av ulike politikere, lærere og forskere, særlig av dem som kanskje mener at ens eget land har prestert «dårlig» på grunn av at elevene ikke får vist sin egentlige kunnskap gjennom oppgavene som brukes i disse testene.

Det er altså ulike teorier om hva det vil si å ha matematisk forståelse, og hvordan man kan teste matematiske ferdigheter, samt nytteverdien av tester som PISA og TIMSS. Jeg tar utgangspunktet i at man uansett kan prøve å lære noe av disse testene, særlig med TIMSS 1999 Video Study som supplement. Siden det er så mange ulike teorier rundt matematisk forståelse, må man velge et synspunkt rent teorimessig, og jobbe ut i fra dette når man leser slike studier. Jeg går derfor inn i den konkrete studien med de teoretiske «brillene» jeg har presentert i del to av denne oppgaven, basert på Skemp og van Hiele sine definisjoner av matematisk forståelse, samt teori om bevis, deduksjon og matematisk resonnement som elementer knyttet til matematisk forståelse.

3. Metode

I dette kapittelet ser jeg på hovedtyper av forskningsmetoder man kan benytte i kvalitativ og kvantitativ forskning samt ulikheter mellom disse to hovedkategoriene av forskningsmetoder. Jeg vil kort oppsummere hva som skiller de kvalitative og de kvantitative metodene fra hverandre. Deretter presenterer jeg de metodene jeg har valgt å benytte meg av, og begrunner de valgene jeg har gjort, for så å gå videre på datainnsamlingen min og analysene av mine data. Til slutt vil jeg diskutere fordeler og ulemper med mine metodevalg, samt ulike etiske spørsmål knyttet til forskningsmetode på mer generelt grunnlag, blant annet troverdighet i data og analyse.

3.1. Forskningsmetode generelt

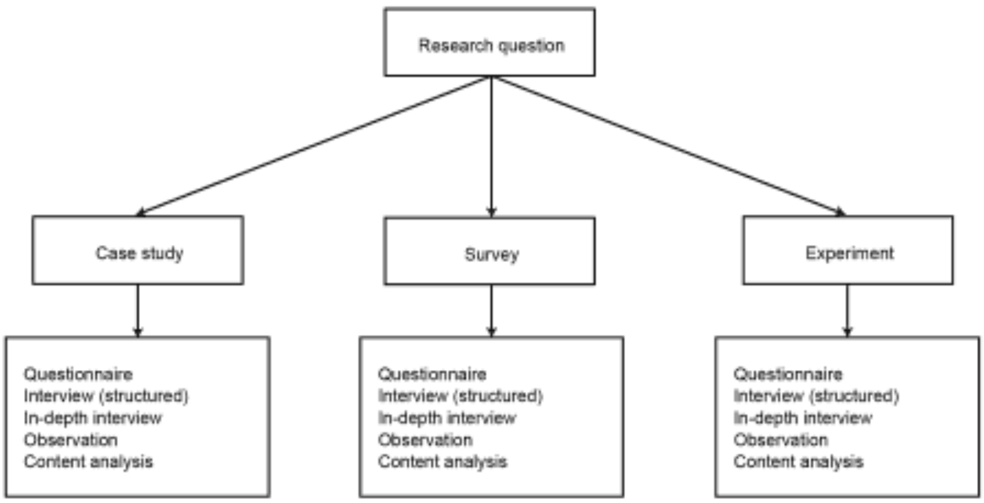
Når man skal gjøre en vitenskapelig undersøkelse av ett eller flere fenomen, har man bruk for en metode man kan benytte som verktøy til å gjennomføre undersøkelsen. Det finnes mange ulike metoder som brukes, og like mange preferanser som det finnes forskere. Det er viktig å ha kjennskap til ulike forskningsmetoder, både kvalitative og kvantitative, samt hvilke begrensninger de ulike metodene har. Slik får man muligheten til å velge den eller de metodene som er best egnet til undersøkelser av det fenomenet man vil forske på. Tidligere var det ofte svært tydelige skiller mellom de metodene som ble benyttet i naturvitenskapene og de metodene som ble benyttet i samfunnsvitenskapene/ humaniora. Per i dag er det mer vanlig å skille mellom kvantitative og kvalitative forskningsmetoder, uten at noen av metodene nødvendigvis er fastlåst til et bestemt fagfelt (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2010 s. 100).

Den opprinnelige betydningen til det greske ordet for metode er *veien til målet* (Kvale, Brinkmann, Anderssen, & Rygge, 2009 s. 99). Datainnsamling, analyser og diskusjon, er avgjørende når man jobber med forskningsoppgaver. Det metodevalget man gjør, henger tett sammen med hvordan den ferdige oppgaven blir, fordi det avgjør hvilke data man får samlet inn. Metode handler jo blant annet om hvordan man samler inn data og analyserer disse. Så valg av metode er både viktig og utfordrende for en fersk forsker som meg selv. I tillegg vil alltid problemstillingene man ønsker å besvare påvirke det metodevalget man gjør, fenomenet man vil studere styrer valget av forskningsmetode (Johannessen et al., 2010 s. 99). Så metode er altså, kort sagt å *«opstille og afgrænse spørgsmål, der har til formål at frembringe ny viden»* (Voxted, 2006 s. 9).

3.1.1. Kvalitative forskningsmetoder

Felles for de kvalitative forskningsmetodene, er at de tar utgangspunktet i at den sosiale realiteten er konstruert av deltakerene i den og at den kontinuerlig skapes i lokale situasjoner. I tillegg er menneskelige intensjoner en viktig faktor når man skal forklare forhold og sammenhenger mellom ulike sosiale fenomen ved hjelp av kvalitativ forskningsmetode (Gall, Gall, & Borg, 2007 s. 32). En forsker som driver med kvalitativ forskning er ofte personlig involvert med deltakerene i studien, og studerer ofte «cases», altså spesifikke tilfeller av et fenomen, helst i en naturlig setting, ute i «felten». Ofte vil en forsker oppdage konsepter og teorier etter at data er samlet inn, gjerne ved hjelp av en induktiv dataanalyse. I kvalitativ forskning vil alltid forskerens egen bakgrunn og perspektiv farge den ferdige rapporten og analysen, fordi det er umulig å være hundre prosent objektiv fordi om man tilstreber dette (Gall et al., 2007; Johannessen et al., 2010).

Eksempler på forskningsmetoder som ofte benyttes kvalitativt er observasjon, semi-strukturert intervju, tekstanalyser, og aksjonsforskning. Disse kan også benyttes innenfor kvantitativ forskning, det er måten man velger å bruke metodene på som bestemmer om forskningen utføres kvalitativt eller kvantitativt. Se for eksempel på David De Vaus sin redegjørelse for survey som en metode for både kvantitativ og kvalitativ forskning (2002 s. 5- 6), der han blant annet påpeker at det er viktigere å skille mellom datainnsamling og dataanalyse som prosesser enn å skille mellom kvantitativ og kvalitativ forskning. Han har også en fin illustrasjon til dette, som viser på en ryddig måte hvordan forskningsspørsmålet man jobber med påvirker metodevalgene man gjør, men også at ulike metoder kan benyttes i ulike sammenhenger:



Figur 2: Oversikt over ulike måter å velge metoder på, kopiert fra Surveys in Social research (De Vaus, 2002 s. 6)

Casestudier blir noen ganger sett på som et synonym for kvalitative forskningsmetoder, og et casestudy design kan benytte seg av flere ulike metoder i samme studie (Gall et al., 2007 s. 31). Metodetriangulering er også et alternativ, der forskeren benytter ulike forskningsmetoder for å verifisere og teste sine funn. Ved metodetriangulering benyttes ofte både kvalitative og kvantitative forskningsmetoder i samme studie, men man kan også utføre metodetriangulereing ved bruk av bare kvalitative eller kvantitative metoder. (Johannessen et al., 2010 s. 367). Så, om mange av de konkrete forskningsmetodene som for eksempel intervju, kan benyttes både kvalitativt og kvantitativt, hvordan kan man da si hva som definerer kvalitative metoder? *«Svært forenklet kan vi si at kvalitative metoder forholder seg til data i form av tekster, lyd og bilde og legger vekt på fortolkning av dataene»* (Johannessen et al., 2010 s. 99). Som regel vil kvalitative data være representert i form av tekst, mens kvantitative data ofte er representert i form av tall. Man kan selvfølgelig ha tekstbaserte data som gjøres kvantifiserbare, ved for eksempel å telle antall ganger et bestemt ord forekommer i en tekst eller lignende.

3.1.2. Kvantitative forskningsmetoder

Kvantitative forskningsmetoder forbindes som regel med tall, statistikk og diagrammer. Når man jobber utfra et kvantitativt metodeperspektiv, velger man å anta at den sosiale virkeligheten er objektiv, og relativ konstant på tvers av tid og sted. Ved kvantitativ forskning ser man på forholdet mellom sosiale fenomener fra et mer «mekanisk» perspektiv enn i kvalitativ forskning (Gall et al., 2007 s. 32). En forsker som driver med kvantitativ forskning forsøker å innta en objektiv og distansert rolle til de som deltar i forskningen og settingen forskningen foregår i. *«...kvantitative metoder forholder seg til data i form av kategoriserte fenomener og legger vekt på opptelling og utbredelse av fenomenene»* (Johannessen et al., 2010 s. 99). Når man analyserer data kvantitativt, benytter man seg av statistiske metoder, og forskningsrapportene er ofte upersonlige og objektive i sin fremstilling av de numeriske dataene som er analysert (Johannessen et al., 2010 s. 31 og s. 237). Eksempler på forskningsmetoder som ofte benyttes kvantiativt er spørreskjema, vitenskapelig eksperiment, kvasieksperiment, simulering, tverrsnittundersøkelser, longditunelle undersøkelser og kausal-komparative studier. (Disse metodene kan også benyttes som kvalitative metoder, men de er ofte brukt kvantiatativt). Som nevnt ovenfor kan man også benytte seg av metodetriangulering, som kombinerer to eller flere ulike forskningsmetoder. Innenfor kvantitative metoder er det ofte mer standardiserte analyseprosesser enn innenfor kvalitative metoder, som for eksempel ulike statistiske prosedyrer. Her er det også vanlig å benytte egne analyseprogrammer, som kan gi svært avanserte analyser av tallbaserte data. Programmet SPSS er et program som ofte blir brukt i forbindelse med statistiske analyser i Norge (Pallant, 2010). Andre programmer som kan brukes til statistiske analyser kan være programmene Statistica, Simstat, Modstats og Statcalc (De Vaus, 2002 s. 235- 236).

3.2. Metodevalg og begrunnelse

Jeg har valgt å dele oppgavens metodebruk i to deler, da mine to forskningsspørsmål er ganske ulike. De tar utgangspunkt i to relativt ulike former for databehov. I tilknyting til forskningsspørsmål1(F1): *« Hvilke forklaringer på forskjeller i japanske og norske elever sine resultater på TIMSS og PISA testene kan man finne ved å analysere rapporten fra TIMSS 1999 Video Study ut i fra et undervisningskulturelt fokus?»* har jeg benyttet kvalitativ innholdsanalyse, som er basert på å finne svar på et bestemt forskningsspørsmål ved hjelp av rapporter fra TIMSS og PISA studier, særlig rapporten fra TIMSS 1999 Video Study (Hiebert, 2003).
I tillegg har jeg benyttet kvalitativt intervju (semi-strukturert) og klasseromsobservasjon som mine metoder for innsamling av data i tilknytning til forskningsspørsmål2 (F2): *«Hvilke matematiske refleksjoner og opplevelser har elever på ulike ferdighetsnivåer i matematikk i norsk videregående skole knyttet til matematiske resonnementer og bevisføring?»* Dette kan grupperes som casestudier, da jeg har gått inn i spesifikke undervisningssituasjoner tilknyttet oppgavens tema og observert og intervjuet i tilknytning til dette.

Når det gjelder metodene jeg valgte til datainnsamling i forbindelse med F2 ønsket jeg å gå inn i to ulike klasser. Dessverre fikk jeg grunnet sykdom bare anledning til å observere i en enkelt klasse. Her skulle jeg observere en bestemt undervisningsøkt med matematisk forståelse, resonnement og bevisføring som tema. Observasjon var ut i fra min vurdering en gunstig måte å samle inn data på. Da det var et bestemt undervisningsopplegg som jeg hadde ønsket at læreren skulle benytte, var dette en tidsavgrenset case som jeg kunne observere. For å følge litt opp det som skjedde knyttet til undervisningsopplegget og elevenes arbeid, valgte jeg å intervjue to elever fra klassen etter at undervisningen var ferdig, samt to elever fra en klasse som ikke deltok i undervisningsopplegget. Intervjuene var forholdsvis korte, med en ganske åpen struktur, jeg hadde laget noen stikkord og spørsmål på forhånd, men noen av spørsmålene dukket opp mens jeg observerte undervisningen og da jeg snakket med elevene i etterkant.

Metoden benyttet i tilknytning til F1 var litt mer utfordrende, fordi jeg her henter data fra eksisterende forskningsrapporter basert på data andre har samlet inn. Rapporten er av svært omfattende omfang og innhold. Jeg skulle altså hente ut data fra rapporten fra TIMSS 1999 Video Study (Hiebert, 2003), som er over 200 sider lang. For meg var dette en uvant måte å samle inn data på. Etter å ha lest om kvalitativ innholdsanalyse, syntes jeg at denne metoden virket som et fornuftig grunnlag for den datainnsamlingen jeg ville gjøre fra rapporten. Denne metoden leste jeg mer om hos Elo og Knygäs (2008) og Mayring (2000). Særlig Mayring sitt arbeid fant jeg stor nytte i, og jeg har benyttet noen av hans analysemodeller når jeg har jobbet med dataene fra innholdsanalysene.

Et viktig aspekt å være klar over som forsker, er at alle metoder har sine styrker og svakheter. Det viktige er at man erkjenner og er klar over at ingen metoder er perfekte, men har et reflektert forhold til hvorfor man mener de metodene man har valgt fungerer godt til å utforske det/ de fenomener man studerer (Gall et al., 2007 s. 34- 36). Som forsker viser det en større troverdighet om man evner å vise at man er klar over at det ikke finner noen metoder som er ufeilbarlige, og at man tar høyde for dette i egen forskning.

Intervju kan være vanskelig fordi spørsmålene man stiller og måten de blir stilt på kan avgjøre hvilken informasjon intervjuobjektene gir. Man kan som forsker og voksen «autoritet» på et område sette intervjuobjektet i en situasjon der han eller hun føler seg usikker og gir de svarene de tror intervjuer ønsker å høre. Et intervju kan også være problematisk i den forstand at ting som ikke blir spurt om kommer ikke frem. Dette kan gi et individualistisk og ensidig perspektiv på det emnet man ønsker å belyse ved hjelp av intervjuet (Kvale et al., 2009 s. 296- 299). Når man benytter kvalitative metoder, er det ofte bare anledning til å intervjue et fåtall personer, og man kan ikke garantere at disse nødvendigvis er representative for alle i populasjonen man ønsker å studere (Voxted, 2006 s. 191). I tillegg kan en spesifikk utfordring med de intervjuene jeg gjennomførte være at det å bli intervjuet i tilknytning til matematikk og forståelse kan by enkelte elever i mot, fordi de har lav selvtillit knyttet til matematikkfaget, og lav mestringsfølelse. Da vil en intervjusituasjon knyttet til matematikk kanskje oppleves som truende, negativ eller ubehagelig, fordi eleven kan føle at jeg som forsker er ute etter å evaluere og teste hans eller hennes matematikkferdigheter. Dette gjorde intervjusituasjonene og utvelgelsen av intervjuobjekter ekstra krevende og viktig for meg som forsker. Som Jespersen og Madsen skriver i Voxted sin bok: *«Hvilken type informant der bør vælges, afhænger af formålet med interviewet, og for at få mest mulig ud af interviewet, er det derfor viktig at overveje, hvilken type viden, vi søger i det enkelte interview»* (2006 s. 191).

Observasjon som metode er ofte benyttet i forskningsarbeid knyttet til undervisning og aktiviteter som foregår i klasserom, men er ikke uten utfordringer. *«It has to be recognised that when someone new comes into a classroom to observe, then the very presence of an* *additional adult who is not normally present may itself influence what happens»* (Wragg, 2012 s. 14). Disse ordene, hentet fra den kjente professoren Edward Conrad Wragg belyser et viktig moment knyttet til klasseromsobservasjon, nemlig forskereffekten (også kalt rosenthaleffekten). Det er nemlig slik at man aldri kan anta at en situasjon som observeres vil være helt upåvirket når forskeren/ observatøren selv er tilstede i situasjonen. Men når man er klar over at dette er en faktor som påvirker det som observeres, får man som forsker mulighet til å ta det med når man analyserer og tolker de observasjonsdataene man har samlet inn, samt prøve å gjøre vår tilstedeværelse minst mulig «synlig» i situasjonen. Dessverre vil man aldri kunne eliminere forskereffekten helt når man observerer, eller som Jack Sanger skriver: *«We can minimize our effect but would be foolish to claim that we have no effect at all»* (Sanger, 1996 s. 5). I tillegg til forskerens tilstedeværelse benytter man ofte kamera og lydopptaker i observasjonssituasjoner, og dette kan også påvirke hvordan elever oppfører seg, når de vet at det de gjør blir filmet.

Jeg benyttet metodetriangulering når jeg samlet inn data i tilknytning til F2. Både observasjon og intervju ble benyttet. De samme elevene som var deltakere i undervisningssituasjonen ble intervjuet i etterkant. I tillegg tok jeg notater og fikk tilgang til notater elevene selv hadde gjort mens de arbeidet. Dette kunne jeg bruke til å bygge opp om de analysene jeg gjorde etter at dataene var samlet inn. Triangulering gir meg større mulighet for å stole på de dataene jeg samlet inn, og gir en større bredde i materialet som skal analyseres. Utfordringer knyttet til triangulering kan være å velge metoder som utfyller hverandre, samtidig som de er egnet til det fenomenet man ønsker å studere. Siden jeg har et lite datagrunnlag, synes jeg at det var ekstra viktig å benytte flere metoder for å få flere innfallsvinkler til dataene som jeg skulle analysere. Metodetriangulering kan selvfølgelig også benyttes i studier med stort datagrunnlag, det er jo ment som en kvalitetssikring (Voxted, 2006 s. 22- 23).

I mitt arbeid med å samle inn data vurderte jeg at både observasjon og kvalitativt intervju var gunstige metoder som passet til et fenomen som skulle studeres i en klasseroms/ undervisningssituasjon. I tillegg var både disse metodene og den kvalitative innholdsanalysen velegnet med tanke på de ressursene jeg hadde tilgjengelig, særlig med tanke på tidsbruk. Kvantitative alternativer til de metodene jeg valgte å benytte kunne vært for eksempel surveys administrert til elever og lærere om hvordan de jobber med matematisk bevis og resonnement, eller analyse av eksisterende data ved hjelp av ulike statistikkprogrammer. Det kunne også vært longditunelle studier som gikk inn i en elevgruppe på tre ulike tidspunkt og observerte og samlet inn svar via spørreskjema, for eksempel mens elevene var på henholdsvis 10.trinn, Vg1 og Vg3 for å se progresjon og arbeidsmåter. Ellers kunne jeg, da gjerne med hjelp av andre studenter, analysert videoopptak fra mange klasser som jobbet med det samme, og lage statistikk på hvilke momenter som var fremtredende knyttet til forståelsen for undervisningsopplegget og eventuelle problematiske momenter som gikk igjen i observasjonene. Så det at jeg valgte kvalitative metoder var en avgjørelse tatt på bakgrunn av de fenomenene jeg ønsket å observere, hvilke metoder jeg følte meg trygg på å bruke, samt hvor mye tid jeg kunne bruke til datainnsamling.

3.3. Metoder for innsamling av data

Man kan selvsagt samle inn data på svært mange ulike måter, for eksempel ved hjelp av spørreundersøkelser, analyse av ulike tekster og bøker, observasjon, ulike typer intervju og lignende. Det handler om å finne en innsamlingsmetode som passer til det prosjektet man jobber med, og de dataene man trenger for å forsøke å besvare de forskningsspørsmålene man har valgt å fokusere på. Man kan se på metode som *«måder at frembringe viden, der lever op til videnskabelige kriterier. Det er de verktøjer og principper, der anvendes til at indsamle, bearbejde og kvalitetsvurdere data»* (Voxted, 2006 s. 9). Her kommer også ressursbruk og tidsbruk inn i bildet, man må finne en innsamlingsmetode som ikke går utover de rammene man har for prosjektet, samtidig som man prøver å sikre at man faktisk får tak i relevante data som man har nytte av i forskningsprosjektet dataene er tilknyttet. Det er fullt mulig, og ganske vanlig, å benytte flere datainnsamlingsmetoder i ett og samme prosjekt, for å få mest mulig bredde og relevans i dataene man skal analysere. Som nevnt i avsnittene om kvalitativ og kvantitativ forskningsmetode, kan man også benytte en kombinasjon av ulike innsamlingsmetoder for å sikre dataenes validitet. Jeg har allerede sett på observasjon og intervju som metode, så jeg vil bare kort se litt på hva som defineres som casestudier, da min datainsamling til F2 kan kategoriseres som en liten casestudie.

Casestudier er en mye brukt forskningsmetode, særlig innenfor kvalitativ forskning, fordi om den til tider har blitt kritisert som en «svak» vitenskapelig metode som kan være utfordrende å bruke (Yin, 2003). Men hva kjennetegner egentlig casestudier som metode? Og hva skiller casestudier fra andre forskningsmetoder? Johannessen et. al. påpeker at casestudier kjennetegnes av *«...(1) en klar avgrensning av hva som er casen, og (2) en inngående beskrivelse av casen»* (2010 s. 394). En case er altså et bestemt, gjerne avgrenset tilfelle av et fenomen som skal studeres. Jeg synes at Peter Rod (Rod, 2008) har gitt en svært god avklaring på hva som kjennetegner casestudien som metode, samt når og hvordan man kan benytte en casestudie i sin artikkel *Praksisorienteret projektarbeide*:

> Casestudie er en velegnet metode til indsamling af data om «experience». Ordet *case* er afledt af de latinske ord casus og cadere, der betyder en begivenhed, et tilfælde eller det, der sker. Sociologer anvender casestudier om en person eller en gruppe personer i forbindelse med analyse af en social situtíon, proces eller relation (konkret «experience»). Der skelnes mellem tre undersøkelsestyper:
> - *eksplanatoriske*, forklarende - *eksploratoriske*, udforskende - *deskriptive*, beskrivende. ...De almindeligste former for dataindsamling i casestudie er dokumentanalyse, deltagerobservationer og interviews. (Rod, 2008 s. 41- 42, kursiv i originalen)

3.4. Innsamling av data

For å forsøke å besvare mitt F1 samlet jeg inn data ved hjelp av TIMSS 1999 Video Study og så på resultater fra Norge og Japan ved hjelp av tidligere TIMSS og PISA rapporter. Jeg ønsket å prøve å finne ut om strukturen i matematikkundervisningen kunne ha tilknytning til resultatene de to ulike landene fikk innenfor matematikk på disse testene. Fokuset var særlig rettet mot å finne informasjon om hvordan undervisningskulturen i Japan er sammenlignet med undervisningskulturen i Norge. For å kunne forklare og forstå litt mer av japansk undervisningskultur har jeg hentet støtteinformasjon i bøkene *Teaching Gap* og *Learning Gap* (Hiebert & Stigler, 1999; Stevenson & Stigler, 1994). I tillegg har jeg benyttet flere artikler knyttet til TIMSS Video Study, f.eks. (Hiebert & Stigler, 2000; Stigler & Hiebert, 1997). Ellers har jeg også lest om lesson study i Japan i artikkelen *A Lesson is Like a Swiftly Flowing River* (Lewis & Tsuchida, 1998) og om matematikkundervisning i Japan i artikkelen til Gundel Schümer (Schumer, 1999). Når det gjelder støttelitteratur knyttet til arbeid med matematisk bevis i Japan, har jeg benyttet (Sekiguchi & Miyazaki, 2000) og (OECD, 2012b).

I arbeidet med F2 samlet jeg inn data i to ulike påbyggklasser ved to ulike videregående skoler i sør-vest Norge. Begge skolene hadde rundt 450 elever, der en del av elevene gikk på yrkesfaglige linjer og befant seg i to mindre byer. De fleste elevene hadde tatt matematikk 1P eller 1P-Y det første året på videregående, mens de nå tok faget matematikk 2T -Y eller 2P - Y. Klassene hadde 16 og 27 elever. Jeg hadde på forhånd snakket med klassenes matematikklærere, og en lærer gjennomførte undervisningsopplegget «Hundrerkartet» som er hentet fra Skole i Praksis sine nettsider

(Matematikksenteret, 2010). Den andre læreren hjalp til med å finne to elever som ville bli intervjuet av meg. Undervisningsopplegget ble gjennomført i løpet av en undervisningsøkt som gikk over en dobbeltime, altså 90 minutter. Jeg var stort sett med som ikke-deltakende observatør, men fikk enkelte spørsmål fra læreren og elevene undervegs, knyttet til praktiske deler av undervisningsopplegget. Jeg benyttet videokamera, notater og lydopptager til å dokumentere det jeg observerte. I tillegg foretok jeg et parintervju med to elever fra klassen som ble observert, samt to fra klassen som ikke gjennomførte undervisningsopplegget.

3.4.1. Klasseromsobservasjon

«Observasjon som metode egner seg godt når forskeren ønsker direkte tilgang til det han undersøker, for eksempel samhandling mellom mennesker, enten det er i et styrerom, i et klasserom eller på en buss.» (Johannessen et al., 2010 s. 118) Klaseromsobservasjonen min ble gjennomført som casestudier. Jeg benyttet observasjon ved hjelp av videokamera, lydopptager og feltnotater til innsamling av data, og i tillegg inn elevenes egne notater.

3.4.2. Intervju

Intervju som metode: *«Det kvalitative forskningsintervjuet søker å forstå verden sett fra intervjupersonenenes side»* (Kvale et al., 2009 s. 21). Jeg intervjuet to elever parvis i etterkant av den observerte undervisningsøkten, for å få litt mer innsikt i deres tanker og meninger knyttet til det undervisningsopplegget de nettopp hadde gjennomført. I tillegg stilte jeg enkelte spørsmål knyttet til deres erfaringer med matematisk bevis. Jeg intervjuet også to elever fra en annen skole om deres tanker og erfaringer med resonnering og bevisføring knyttet til matematikk. Intervjuene ble gjennomført ved hjelp av en semistrukturert intervjuguide, men bar preg av en mer løst organisert samtale, da jeg ikke alltid klarte å bruke intervjuguiden på en konsekvent måte.

3.4.3. Kvalitativ innholdsanalyse av tekst

Kvalitativ innholdsanalyse betyr at jeg laget kategorier som jeg benyttet til å analysere rapporten fra TIMSS 1999 Video Study med utgangspunkt i mitt F1. En analyseenhet er *«De sosiale enhetene eller elementene som en studie tar utgangspunkt i»* (Johannessen et al., 2010 s. 118). Det var viktig for meg å holde fokus på mitt spesifikke forskingsspørsmål da jeg analyserte innholdet i rapporten, siden det lett kunne bli et veldig omfattende arbeid. Som hjelp brukte jeg blant annet de seks spørsmålene Krippendorff (1980) mente måtte adresseres når man jobber med innholdsanalyse:

1) Which data are analyzed?
2) How are they defined?
3) What is the population from which they are drawn?
4) What is the context relative to which the data are analyzed?
5) What are the boundaries of the analysis?
6) What is the target of the inferences?

Ellers er det et viktig poeng fra Becker Jensen som har vært i bakhodet mitt under hele analyseprosessen: «*Tekster svarer på det man spørger dem om - intet annet*» (Becker, 2011 s.9).

3.4.4. Arbeid med datamaterialet

Utfordringer knyttet til innsamlingen av datamaterialet jeg trengte var at jeg aldri hadde jobbet med å analysere forskningsrapporter med tanke på å besvare et forskningsspørsmål tidligere. I tillegg var det vanskeligere enn jeg hadde forventet å få tak i skoler og klasser som hadde tid til å bidra til mitt forskningsprosjekt. Dette gjorde at jeg følte sterkt på tidspresset knyttet til det å få samlet inn nok data til oppgaven min. Ellers var det en utfordring å lage gode analyser av dataene etter at jeg hadde samlet dem inn og bearbeidet dem. Dette kommer jeg nærmere inn på i analysedelen av oppgaven.

3.5. Dataanalyse

Her er en kort oppsummering av hvordan analysene av de ulike dataene innhentet til oppgaven ble gjennomført. Kort vil jeg si noe om dataanalyse på generelt grunnlag, før jeg går over til bruk av dataanalyse i min oppgave mer konkret. Da det er flere typer data som har blitt analysert, har jeg valgt å ta for meg analyse av observasjoner, intervjuer og TIMSS 1999 Video Study rapporten hver for seg, for å få et mer oversiktlig bilde av de analysene jeg har foretatt i tilknytning til oppgaven. Selve analysene gjennomføres og diskuteres i oppgavens del fire.

3.5.1. Analyse av klasseromsobservasjoner

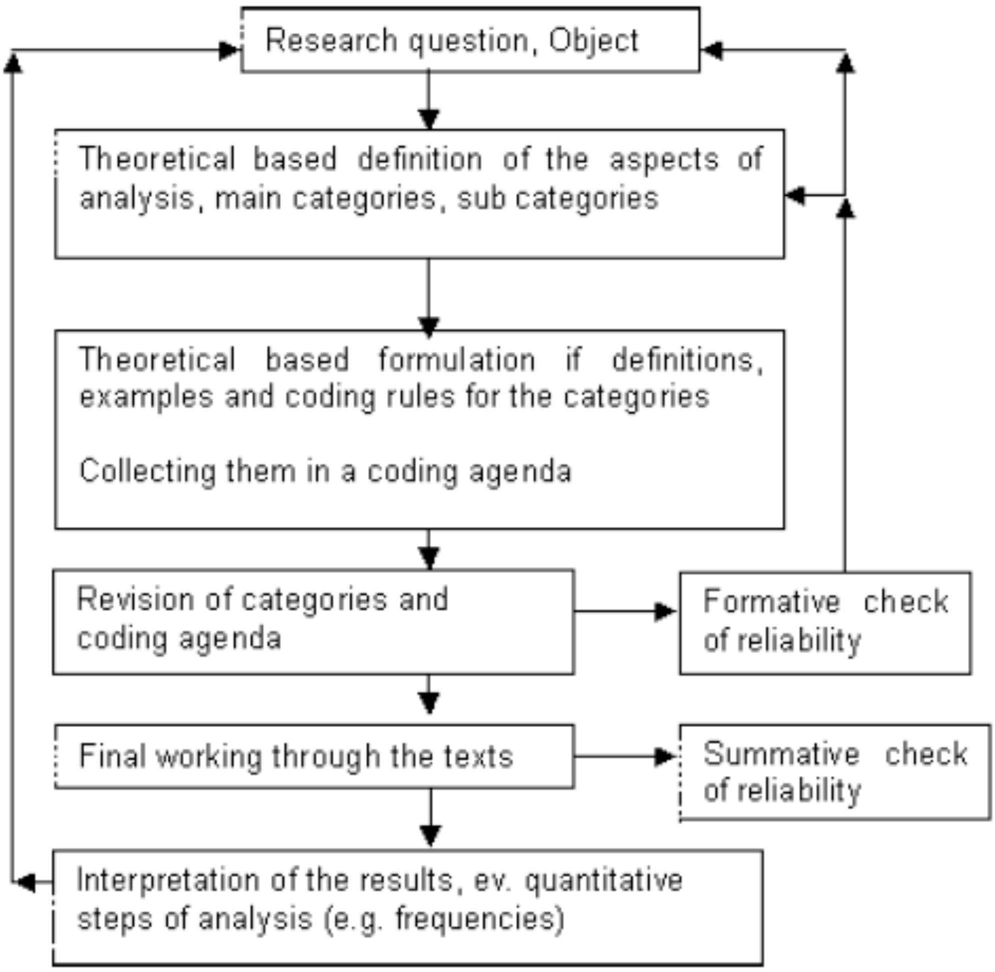
Jeg jobbet her med analyse av de transkriberte videoobservasjonene jeg hadde, støttet av egne feltnotater og elevnotatene. Her var utfordringen å finne gode kategorier til å gruppere dataene i. Fokus var å se dataene i lys av F2, samtidig som jeg hadde informasjonen jeg hadde fått fra arbeidet med F1 med meg i analysen.

3.5.2. Analyse av elevintervjuer og lærerintervju

I denne delen av arbeidet med dataene transkriberte jeg elveintervjuene, for deretter å analysere dem hver for seg. Kategoriene jeg hadde definert benyttet jeg til begge de analyserte intervjuene. Her var utfordringen å finne en egnet modell for analyse av intervju, og å lage relevante analysekategorier for klassifisering av dataene.

3.5.3. Analyse av rapporten fra TIMSS 1999 Video Study

Hvordan analyserer man en rapport på over 200 sider fra forskning gjort av andre? Dette lurte jeg på, og fant ut at det viktigste i analysearbeidet var å holde fokus på hva jeg egentlig ville forsøke å svare på her. Jeg måtte altså finne ut hva som var den beste måten å finne disse svarene på. For å lage en kurant analyse og analysekategorier brukte jeg noen av figurene Philipp Mayring har utviklet:



Figur 3: Kopi av Mayring sin modell for utvikling av induktiv utvikling av analysekategorier når man jobber med kvalitativ innholdsanalyse av tekst. (Mayring, 2000 s. 5).

Category	Definition	Examples	Coding Rules
C1: high self confidence	High subjective conviction to have successfully coped with the situational demands, which means - to be clear about the demands and their coping possibilities, - to have a positive, hopeful feeling in handling the situation, - to be sure to have coped with the demands on ones own efforts.	"Of course there had been some little problems, but we solved them all, either I myself or the student gave in, depends who made a mistake. Everyone can make mistakes." (17, 23) "Sure there had been problems, but in the end we had a fine relationship. We got it all together." (27, 33)	All three aspects of thew definition have to point to "high" self confidence no aspect only "middle" Otherwise C2: middle self confidence
C2: middle self confidence	Only partly or fluctuating conviction to have successfully coped with the situational demands	"Quite often I found it hard to maneuver through the problems, but finally I made it." (13, 45) "Time by time everything got better , but I couldn't tell if it was me or the circumstances." (77, 20)	If not all aspects of definition point to "High" or "low"
K3: low self concept	Conviction to have badly coped with the situational demands, which means - not to know what the situation exactly demands, - to have a negative, pessimistic feeling in handling the situation, - to be sure that ones own efforts had no effect on improving the situation.	"that stroke my self confidence; I thought I'm a nothing – or even less than that." (5, 34)	All three aspects of definition point to low self confidence, no fluctuations recognizable

Figur 4: Kopi av et eksempel på kodingsagenda med kategorier for koding (Mayring, 2000 s. 6).

3.6. Kontekst

Bakgrunn og setting for datainnsamlingen til F2 var å få observere et konkret undervisningsopplegg gjennomført i en påbyggsklasse ved en videregående skole. I tillegg intervjuet jeg totalt fire elever fra to ulike videregående skoler, to fra skolen som deltok i undervisingsopplegget og to fra en skole som ikke deltok. Begge skolene var yrkesfaglige med påbyggingsklasser for elever som ønsker studiekompetanse. Skolene ligger begge i byer, den ene befinner seg i en by med ca. 10 000 innbyggere, den andre i en by med ca.

45 000 innbyggere. Skolene har henholdsvis ca. 450 og 500 elever. Klassene er beskrevet tidligere, i avsnitt 3.4. Læreren som gjennomførte undervisningsopplegget i sin klasse er ansatt ved den minste av skolene. Han er en mannlig realfagslærer i slutten av 30-årene. Han er lektor med spesialisering i økologi, med tilleggsutdanning i matematikk, og har jobbet ved denne skolen i snart to år. Hans fokusområder og tanker i forhold til matematikkundervisningen er å jobbe med å gjøre matematikken konkret og forståelig, med praktiske eksempler. Har også fokus på konkretisering av læringsmålene i matematikkfaget.

3.7. Drøfting og kritikk av metode

Jeg valgte metoder som jeg har noe erfaringer med fra tidligere prosjekter, blant annet klasseromsobservasjon og intervju. Likevel syntes jeg det var krevende og utfordrende, særlig når jeg var alene som forsker, da ble observasjonene lettere preget av at det bare var mitt perspektiv på situasjonene som kom frem, fordi om jeg forsøkte å være objektiv. I tillegg synes jeg kanskje at intervjuene mine ble litt korte, jeg kunne vært enda mer fokusert i intervjusituasjonene, samt hatt en bedre og mer gjennomarbeidet intervjuguide. Intervju er en fin metode for å få et dybdeperspektiv på intervjuobjektenes tanker og meninger rundt et fenomen, men dette forutsetter at intervjuet gjennomføres på en god måte og holder høy kvalitet gjennom hele prosessen fra planlegging til analyse (Kvale et al., 2009 s. 174- 175). Ellers kunne jeg kanskje hatt data fra flere klasser/ elever, for å sikre en større bredde i dataene som jeg benyttet. Jeg synes metodevalgene mine var passende til de dataene jeg innhentet og de forskningsspørsmålene jeg ønsket å besvare. Men det er alltid rom for forbedringer. Det er også fullt mulig at andre metoder, som for eksempel surveyundersøkelser eller mer strukturerte intervjuer kunne gitt gode data til oppgaven. Ideelt sett burde jeg kommet enda tidligere i gang med datainnsamlingen, slik at jeg fikk bedre tid til å mestre de metodene jeg valgte å bruke, samt kunne gå tilbake og intervjue flere elever og lærere i etterkant om jeg syntes det var nødvendig. Andre utfordringer og kritiske punkter ved datainnsamlingen vil bli diskutert i oppgavens analysedel samt diskusjonsdel.

3.7.1. Troverdighet

Troverdighet innenfor kvalitativ forskning kan også kalles begrepsvaliditet og *«dreier seg om hvorvidt en metode undersøker det den har til hensikt å undersøke...dreier seg om i hvilken grad forskerens framgangsmåter og funn på en riktig måte reflekterer formålet med studien og representerer virkeligheten»* (Johannessen et al., 2010 s. 230). Et grep som kan sikre økt troverdighet i forskningen er metodetriangulering (Lincoln & Guba, 1985), som jeg har benyttet. I tillegg kunne jeg, om tidsaspektet tillot det, benyttet observasjon over lengre tid (vedvarende observasjon). En utfordring i det å vurdere troverdighet i egne data er at man er subjektiv og ikke objektiv, selv om man som forsker alltid etterstreber størst mulig grad av objektivitet. Forsker man sammen med andre, er ikke dette en garanti for troverdighet i dataene, men man kan belyse hverandres synspunkter, tolkninger og oppfatninger av de observerte situasjonene. Ellers kan det være styrkende for dataenes og analysenes troverdighet å la deltagere i observasjonene og intervjuene selv få se og godkjenne, se om de gjenkjenner seg i forskerens beskrivelser og analyser (Gall et al., 2007 s. 611; Johannessen et al., 2010 s. 230). Kort sagt handler det om å kunne vise at man har benyttet adekvate og redelige forskningsmetoder til det fenomenet man har satt seg fore å studere.

> En grunnbetingelse for at forskning skal være faglig kvalitetsarbeid, er at den er metodisk troverdig. Det krever nødvendig faglig innsikt og kompetanse til å anvende et best mulig forskingsdesign og de mest formåltjenlige metodiske tilnærmingene. Her er tale om å makte å gjennomføre alle de kompliserte leddene i et kvantitativt arbeid på en kvalifisert måte og å unngå å havne i faglig-metodiske fallgruber. Alt i alt handler dette om å unngå, eller minimalisere, utilsiktede feil. (Befring, 2009)

I tillegg er det viktig for troverdigheten at det er lett for leserene av min forskningsoppgave å se skillet mellom de faktiske dataene og mine analyser og vurderinger av disse.

3.7.2. Etiske forhold

Jeg har i arbeidet med denne masteroppgaven forholdt meg til retningslinjer gitt av De nasjonale forskningsetiske komiteene, NESH (Kalleberg, 2006). Dette innebar at jeg søkte om prosjektgodkjenning og tillatelse til å samle inn data hos Norsk samfunsvitenskapelig datatjeneste (NSD). Jeg benyttet samtykkeskjema som alle elevene måtte lese og signere (se vedlegg nr. 3) før jeg gikk i gang med observasjonene, og unnlot å filme eller intervjue de elevene som hadde reservert seg mot å delta i forskningsprosjektet. Jeg har også prøvd å ha i tankene hvilken effekt min tilstedeværelse og bruk av videokamera kan ha hatt på de observerte situasjonene. Dette er viktig, fordi *«Etiske reflektioner bør indgå som en del af ethvert led i enhver opgave eller undersøglese»* (Voxted, 2006 s. 258). Jeg prøvde også å se på hvordan situasjonene kunne oppfattes av de elevene jeg observerte, fordi mange synes matematikkfaget er utfordrende og skremmende nok i seg selv, fordi de ofte opplever mangel på mestring i tilknytning til dette faget (Stramel, 2010). Det at jeg kom inn som forsker og utenforstående kan ha økt ubehaget for de elevene som kanskje allerede hadde et anstrengt forhold til faget. Jeg tenkte at det var en del av mitt etiske ansvar som forsker å ikke forsterke opp negative assosiasjoner til matematikkfaget ved mitt nærvær i tilknytning til prosjektet. Derfor var det viktig for meg å kommunisere til elevene at jeg ikke på noen måte skulle evaluere eller bedømme deres innsats i de matematikktimene jeg observerte, jeg ville bare se på hvordan de arbeidet generelt.

3.7.3. Fra metode til analyse

Etter å ha samlet inn dataene, skulle jeg gå over til å analysere dem. Dette er en krevende og viktig prosess. Her måtte jeg velge hvordan dataene skulle analyseres, med utgangspunkt og fokus i forskningsspørsmålene mine. I denne prosessen måtte jeg hele tiden forsøke å tenke på hvordan mine innsamlede data skulle presenteres for andre. Dette er viktig, fordi som Johannessen påpeker: *«Kvalitative data taler ikke for seg selv. De må fortolkes»* (Johannessen et al., 2010 s. 163). De tre viktigste momentene for meg i overgangen fra metode og datainnsamling til analyse var følgende: Å se på dataene i lys av forskningsspørsmålene, analysere dataene ved hjelp av oppgavens teoridel og å skille mellom hva som er rene analyser og hva som er mine fortolkninger av dataene (Becker, 2011 s. 45-46).

4. Analyse av data

I dette kapittelet vil jeg gå inn og analysere rapporten fra TIMSS 1999 Video Study, elevintervjuene mine og klasseromsobservasjonen. Fokuset vil være på å forsøke å besvare forskningsspørsmålene mine, som altså er:

F1: *Hvilke forklaringer på forskjeller i japanske og norske elever sine resultater på TIMSS og PISA testene kan man finne ved å analysere rapporten fra TIMSS 1999 Video Study ut i fra et undervisningskulturelt fokus?*

F2: *Hvilke matematiske refleksjoner og opplevelser har elever på ulike ferdighetsnivåer i matematikk i norsk videregående skole knyttet til matematiske resonnementer og bevisføring?*

Analysene er altså gjennomført med dette som fokus for analysekategoriene jeg har brukt, og forskningsspørsmålene har påvirket vinklingen jeg har hatt i arbeidet med dataanalysen. I tillegg har jeg jobbet ut i fra den teorien som danner rammeverket for oppgaven, og forsøkt å se mine funn i lys av denne.

4.1. Analyse av TIMSS 1999 Video Study

Jeg har valgt å gå inn i rapporten fra TIMSS 1999 Video Study med spesifikt fokus på de dataene som omhandlet Japan og har særlig lett etter elementer i rapporten som viser forskjeller mellom Japan og de andre deltagerlandene. Norge deltok ikke i denne studien, men jeg mener fortsatt at dette er en god kilde til informasjon som også vi kanskje kan lære av i tilknytning til matematikkundervisning. USA, som var med i studien, er på mange måter ganske likt Norge, særlig med tanke på en del av de utfordringene landet har hatt med å forbedre elevenes prestasjoner i matematikk, og resultater på TIMSS- og PISA-testene. I tillegg er det et likhetstrekk at det kan virke som om motivasjonen for matematikkfaget er noe laber hos amerikanske og norske elever (Hiebert & Stigler, 1999; Kjærnsli & Olsen, 2013; Stevenson & Stigler, 1994). Siden dataene som rapporten bygger på allerede er grundig gjennomgått og analysert, ble min oppgave å gjøre en analyse av en allerede bearbeidet og analysert datamengde i leting etter svar på mitt forskningsspørsmål F1.

Jeg begynte med å bruke «Japan» og «japanese» som søkeord, og så på de avsnittene hvor dette ble nevnt, og gikk inn i teksten og lette etter informasjon som kunne være relevant for mitt forskningsarbeid. Da jeg fikk veldig mange treff på «Japan» (354 treff) og «japanese» (154 treff), valgte jeg å foreta en kvalitativ innholdsanalyse, som begynte med at jeg leste gjennom og identifiserte avsnitt som omhandlet Japan og i tillegg var relevante for min oppgave. Fortsatt var det mye som skulle leses og analyseres grundig og jeg måtte da finne ut hvilke data som skulle ekskluderes fra den endelige analysen min, og hva som skulle være med. Det vil si at jeg fokuserte på de delene av rapporten som i klarhet omhandlet matematisk resonnering, argumentasjon og bevis, samt avsnitt der det kom frem om det var faktorer som skilte japansk matematikkundervisning fra matematikkundervisningen i andre land. Etter å ha valgt ut de avsnittene jeg anså som innholdsmessig relevante, laget jeg en enkel inndeling i analysekategorier basert på Mayring sin modell (Mayring, 2000 s. 6). Jeg viser her tabellen med de tre kodingskategoriene jeg valgte å benytte. Jeg har brukt noen av de mange figurene som finnes i rapporten for å vise mine funn, da jeg synes disse gir en ryddig og oversiktlig presentasjon av rapportens data, analyser og funn som er relevante for min oppgave. De figurene jeg referer til i tabellen, vil bli vist og omtalt videre i dette avsnittet, sammen med andre relevante figurer fra TIMSS 1999 Video Study (Hiebert, 2003).

Kategori	Definisjon	Eksempel	Kodingsregler
K1: Bruk av matematisk resonnering og argumentasjon i undervisningen	Analyserte data som viser at elevene benytter resonnering og matematisk argumentasjon i matematikktimene. Konseptene skal være definert i rapporten, slik at det tydelig vises at dette gjelder.	Figur hentet fra side 92 i rapporten, som viser antall problemer av ulike typer der løsningsforslag ble presentert i hel klasse. Dette vil i de tilfellene der elevene selv presenterte sine løsninger involvere deres resonnmenter og argumenter, for å vise både medelever og lærer hvordan de tenkte.	Må vise ting som det er rimelig å knytte til resonnering og argumentasjon, gjerne med disse begrepene benyttet eksplisitt. Må IKKE forveksles med bevis/ proof, som går inn under K2.
K2: Matematisk bevisføring	Analyserte data som viser at elevene benytter matematisk bevis i matematikktimene eller undervises spesifikt i dette. Ordet bevis (proof) skal brukes eksplisitt i rapporten.	Figur hentet fra side 74 i rapporten, som viser en markant ulikhet mellom bruken av proof i Japan og de andre deltakerlandene	Må være fokusert spesifikt på bevis/ proof. Ordet proof må vær benyttet eksplisitt. Må IKKE forveksles med resonnering og argumentasjon uten bevisføring, dette dekkes i K1.
K3: Elementer som skiller japansk matematikkundervisning fra de andre landene som deltok	Her inkluderes organisering av undervisning, oppgavetyper, arbeidsmåter, emner og andre faktorer som fremstilles som relevante for elevenes læring og forståelse av matematikk i rapporten.	Figur hentet fra side 94 i rapporten, som viser hvor mange prosent av timene som inkluderte problemer der mer enn én løsning ble presentert. Figur fra side 40 som viser gjennomsnittlig tid brukt på per elev i de ulike landene.	Her bør det være klare referanser i rapporten om at de elementene som tas med kan tenkes å påvirke hvordan elevene presterer i matematikk, gjerne knyttet til forståelse.

Figur 5: Kodingsagenda brukt i analysen av TIMSS 1999 Video Study rapporten.

De datafunn fra rapporten som jeg har hatt hovedfokus på, er de delene av rapporten som kanskje kan bidra til å forklare hvorfor japanske elever har et så høyt faglig nivå i matematikkfaget. Når jeg snakker om høyt nivå i matematikkfaget, er det i hovedsak ment som en referanse til de gode resultatene japanske elever har hatt på TIMSS- og PISA-tester. Funnene presenteres ved hjelp av figurer hentet fra rapporten, med min begrunnelse for hvorfor jeg anser hver figur som en indikasjon på mulige forklaringer til mitt forskningsspørsmål nummer 1. Figurene er presentert i den rekkefølgen de forekom i rapporten.

Da jeg analyserte rapporten, forsøkte jeg å kategorisere relevante funn i forhold til kategoriene i tabell 5. Følgende data, hentet ut fra rapporten og her kalt figur 6, har jeg plassert inn i kategori K3.

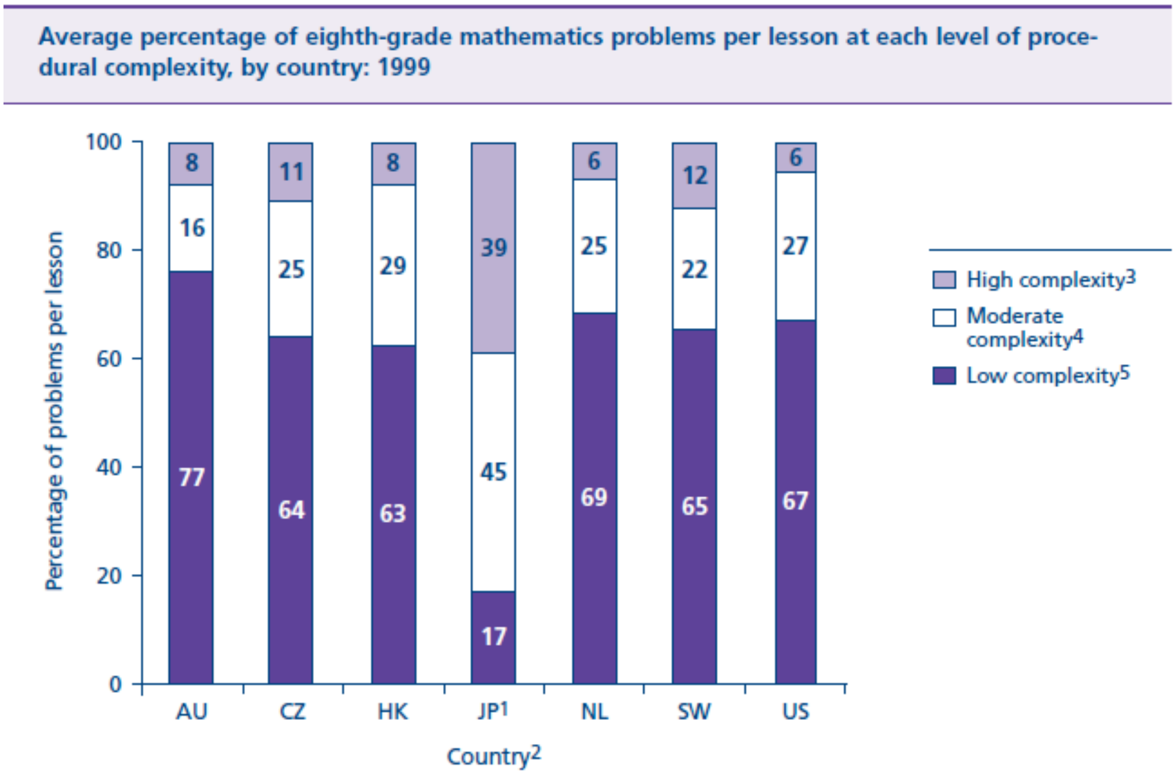
TABLE 3.2. **Estimated median time spent in mathematical work per week and per year in eighth grade, by country: 1999**

Country	Estimated median time in mathematical work per week (in minutes)	Estimated median time in mathematical work per year (in hours)
Australia (AU)	174	113
Czech Republic (CZ)	179	90
Hong Kong SAR (HK)	175	105
Japan[1] (JP)	200	116
Netherlands (NL)	127	84
United States (US)	179	107

Figur 6: Estimert gjennomsnittstid brukt på matematisk arbeid i de ulike landene (kopi fra Hiebert 2003, s. 40)

Figur 6 viser at japanske elever bruker mest tid per uke og per år på matematisk arbeid i skoletiden av alle deltakerene i studien. Matematisk arbeid forstås her som tid brukt på matematisk innhold presentert via enten et matematisk problem, ved samtaler eller lesing om matematiske idéer, arbeid med matematiske prosedyrer eller pugging av definisjoner og regler (Hiebert, 2003 s. 38). Dette synes jeg var interessant, fordi japanske elever bruker i snitt 21 minutter mer per uke og 9 timer mer per år på matematisk arbeid i skolesammenheng enn bl.a. elever i USA. Dette er altså et element som skiller den japanske matematikkundervisningen fra de resterende deltakerlandene. Som nevnt i avsnitt 2.7, bruker japanske elever i tillegg vesentlig mer tid enn europeiske og amerikanske elever på arbeid med matematikkfaget utenom skoletiden (Schumer, 1999).

Den neste figuren, figur 7 har jeg også klassifisert inn i kategorien K3, fordi Japan også her skiller seg markant fra de andre landene i studien.



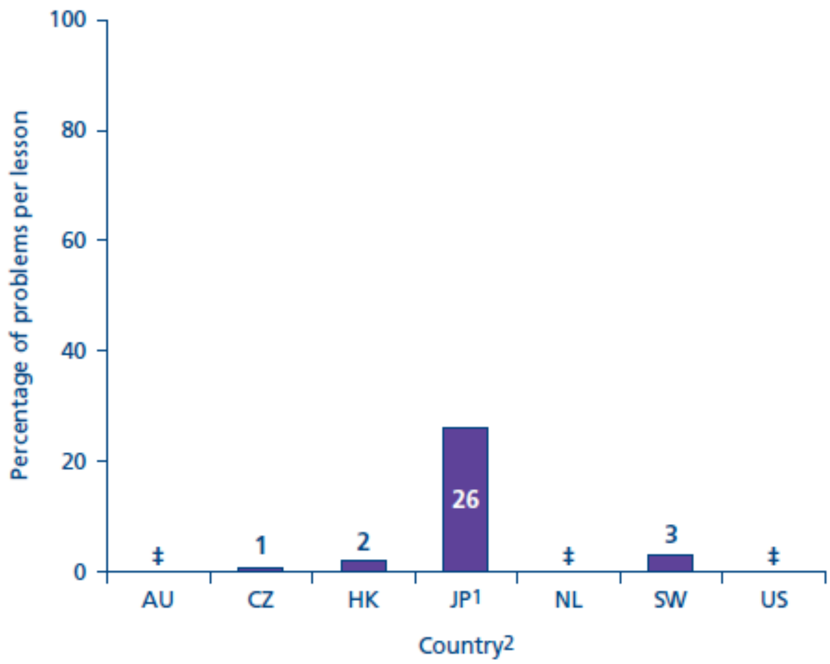
Figur 7: Prosentandel av oppgaver på lavt, middels og høyt nivå av kompleksitet per undervisningstime i de ulike landene (Hiebert, 2003 s. 71)

Denne figuren viser gjennomsnittlig prosent av matematiske problemer per undervisningstime på ulike nivåer av kompleksitet knyttet til løsningsprosedyrer. Det vil si antall steg/ trinn man må gjennom for å løse et gitt problem ved å bruke bestemte fremgangsmåter. Det er laget bestemte kriterier som plasserer de observerte problemene i tre ulike kategorier av kompleksitet, lav, middels og høy. Et problem av lav kompleksitet krever fire eller færre enn fire avgjørelser eller valg fra elevens side. Moderat kompleksitet innebærer at oppgaven krever mer enn fire valg fra elevene, og kan også inneholde et delproblem. Problemer av høy kompleksitet, ved bruk av konvensjonelle metoder, krever mer enn fire avgjørelser fra eleven, og inneholder to eller flere delproblemer (Hiebert, 2003 s. 70- 71). Dette sammenfaller også med OECD rapporten fra 2012, der det påpekes at man i japansk skole arbeider ut ifra at alle elever kan oppnå gode resultater gjennom hardt arbeid (OECD, 2012a s. 191). Det gir derfor mening at man i en alminnelig japansk klasse vil jobbe med matematiske problemer av høy kompleksitet, slik at elevene, uavhengig av faglig nivå, kan utfordre seg selv og lære gjennom disse utfordringene.

Figur 7 viser at bare 17% av japanske problemer var av lav kompleksitet, mens hele 39% av japanske problemer var av høy kompleksitet. Dette står i sterk kontrast til fordelingen i de andre landene, der ingen har mer enn 12% problemer av høy kompleksietet ut i fra denne studiens vurderingskriterier. Dette er altså nok et element i studien der japansk matematikkundervisning skiller seg ut fra de resterende landene.

Figur 8 viser gjennomsnittlig prosentandel av matematikktimene som inkluderte matematisk bevis. Derfor har jeg sortert denne informasjonen inn i kategorien K2 i min analyse.

Average percentage of problems per eighth-grade mathematics lesson that included proofs, by country: 1999

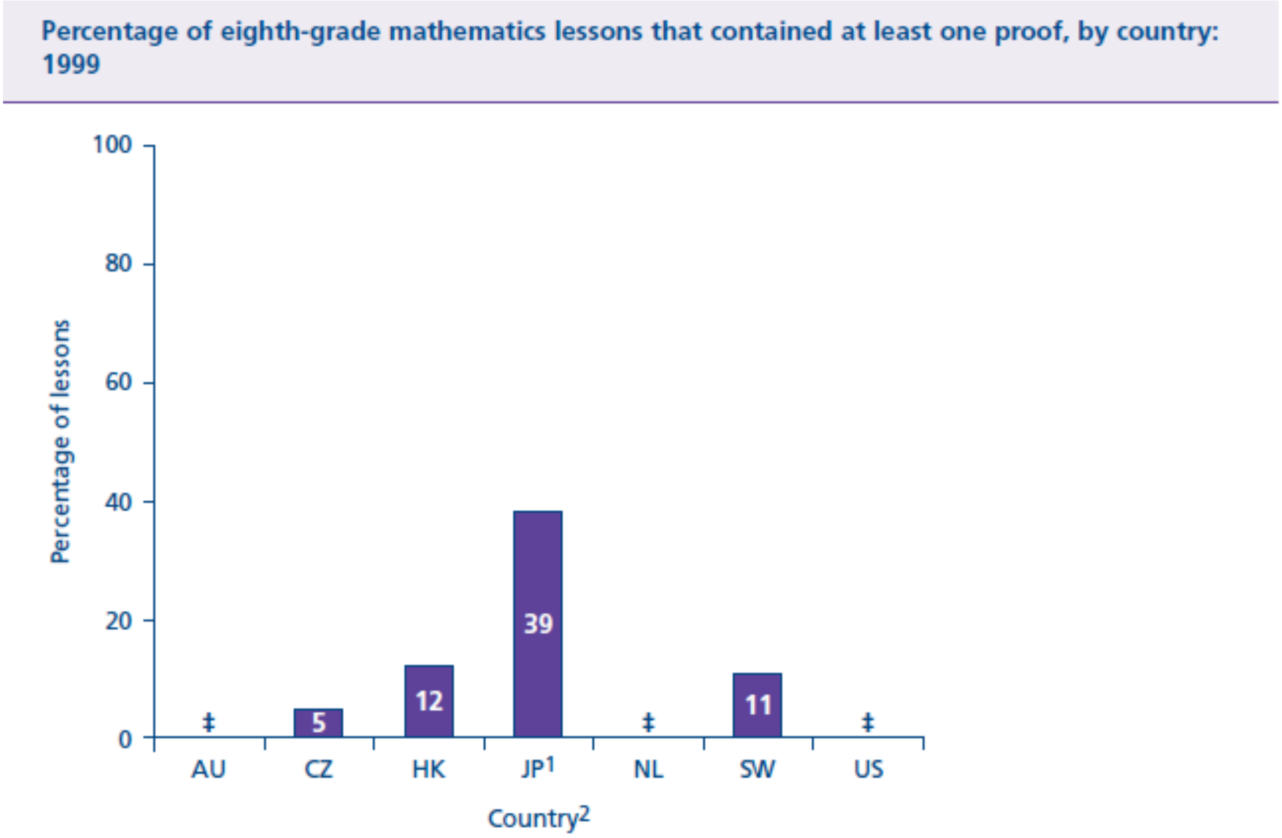


‡Reporting standards not met. Too few cases to be reported.
[1]Japanese mathematics data were collected in 1995.
[2]AU=Australia; CZ=Czech Republic; HK=Hong Kong SAR; JP=Japan; NL= Netherlands; SW=Switzerland; and US=United States.
NOTE: JP>CZ, HK, SW. For each country, average percentage was calculated as the sum of the percentage within each lesson, divided by the number of lessons.
SOURCE: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), Video Study, 1999.

Figur 8: Gjennomsnittlig prosentandel av undervisningstimer som inneholdt matematisk bevis (Hiebert, 2003 s. 74).

Matematisk bevis er her sett på som å kunne demonstrere at et resultat må være sant ved å resonnere ut i fra de gitte betingelsene ved å bruke en logisk sammenhengende fremgangsmåte. Dette samsvarer med definisjonenene av bevis jeg har sett på i oppgavens teoridel (Alsina & Nelsen, 2010; Øgrim, 2011). Målet for denne studien var å fange opp alle problemer som førte til deduktiv resonnering med bevis som resultat. Elevene måtte kunne bevise at noe var sant ikke bare i ett, men i alle gitte tilfeller. Her kan man se at dette kunne også ha vært kodet inn i K3, fordi det nesten bare var Japan som viste bruk av matematisk bevis. Gjennomsnittlig var det hele 26% av undervisningstimene i Japan som inkluderte bruk av matematisk bevis. Ellers var det i flere av landene så få eksempler på bruk av matematisk bevis at man ikke kunne lage noen gjennomsnittlig score på dette. Matematisk bevis har muligens en mer sentral rolle i japansk matematikkundervisning enn i matematikkundervisningen man finner i vestlige land. Dette kan ha en sammenheng med at japanske lærere vektlegger «wakaru»,som betyr forståelse av matematiske idéer, og «shoumei», som er et japansk ord for bevis, eller for å beskrive handlingen man gjør når man viser logisk at et utsagn må være sant (Sekiguchi & Miyazaki, 2000). Man vektlegger altså matematisk tenking og forståelse i stor grad, og det virker som om matematisk bevisføring sees på som et redskap til å vurdere elevenes kompetanse innenfor disse ferdighetene (Andrews, 2001; Nagasaki & Becker, 1993).

Figur 9 viser prosentandel av matematikktimene som inneholdt minst ett matematisk bevis. Dette er et funn som jeg har kodet inn i min kategori K2, siden det konkret dreier seg om matematisk bevis.

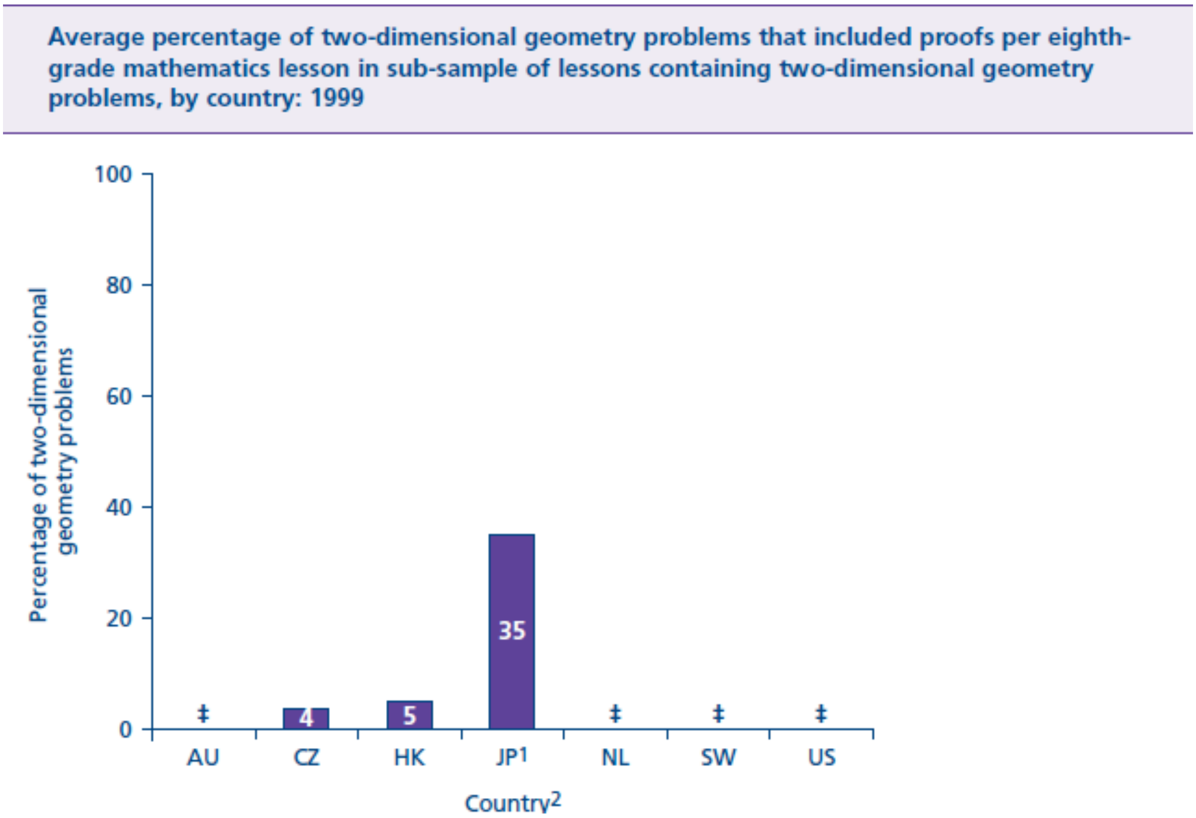


Figur 9: Prosentandel av matematikktimene som inneholdt minst ett bevis, fordelt på deltakerland (Hiebert, 2003 s. 74).

Rapportens analytikere har definert også mer uformelle og mindre stringente definisjoner av bevis inn i denne statistikken, der det viktigste var at elevene demonstrerte deduktiv resonneringsevne når de begrunnet sine svar (Hiebert, 2003 s. 73). Sett ut fra dette, ville det også være mulig å kode denne figuren inn i K1, men jeg velger å bare kode den inn i K2 siden det eksplisitt er brukt ordet «proof» i figurens fremstilling av dataene som er analysert. Reid og Knipping har påpekt at argumentasjon og bevis ofte linkes sammen i forskning som er gjort i forbindelse med matematikkundervisning (Reid & Knipping, 2010 s. 133). Dette stemmer overens med redegjørelsene rapportens forfattere kommer med knyttet opp til hva de har valgt å se på som bevis i sine analyser av videoene. I tillegg anser jeg det som et vesentlig moment å ta med i min analyse, fordi det å kunne argumenter og å bevise kan knyttes opp til Skemp sin teori om relasjonell forståelse (Skemp, 1987).

Figur 10 omhandler også bevis, her i tilknytning til geometri, og er derfor også kodet inn i K2. Geometri er et av de emneområdene i skolematematikken der bevis kanskje har vært mest fremtredende i senere tid, i tilknytning til for eksempel Pythagoras' læresetning eller

Euklid sine geometriske postulater (Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2003 s. 912- 914; Krantz, 2010 s. 39- 46).



Figur 10: Gjennomsnittlig prosentandel av to-dimensjonale geometriproblemer som inneholdt bevis, hentet fra de timene som inneholdt todimensjonale geometriske problemer (Hiebert, 2003 s. 75).

Figuren refererer til todimensjonale geometriproblemer, som, ifølge rapporten, omhandler for eksempel polygoner, vinkler og linjer (Hiebert, 2003 s. 75). Her ser man igjen at Japan har en mye høyere prosentandel av problemer som inneholdt bevis som en del av problemløsningsprosessen. Dette var litt overraskende for meg, ikke fordi Japan scoret høyt, men fordi de andre landene scoret så lavt. Jeg ville trodd at matematisk bevis ble mer brukt i forbindelse med geometriske problemer i alle deltakerlandene. Dette fordi geometri er et emneområde som for meg er det som er tettest knyttet til bevis i skolematematikken (Knuth, 2002; Krantz, 2010; Reid & Knipping, 2010).

Figur 11 har jeg kodet inn i min analysekategori K1 fordi den omhandler presentasjoner av løsninger foran hel klasse, noe som stort sett vil involvere matematisk argumentasjon og resonnering.

FIGURE 5.7. **Average percentage of problems per eighth-grade mathematics lesson for which a solution was presented publicly in the videotaped lesson, by country: 1999**

[1]Japanese mathematics data were collected in 1995.
[2]AU=Australia; CZ=Czech Republic; HK=Hong Kong SAR; JP=Japan; NL=Netherlands; SW=Switzerland; and US=United States.
[3]Independent problems for which a solution was presented publicly: No differences detected.
[4]Concurrent problems for which a solution was presented publicly: AU, CZ, HK, JP, SW, US>NL; CZ>AU, SW, US; HK>AU, SW.
NOTE: Independent problems were presented as single problems and worked on for a clearly definable period of time. Concurrent problems were presented as a set of problems to be worked on privately. For each country, average percentage was calculated as the sum of the percentage within each lesson, divided by the number of lessons.
SOURCE: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), Video Study, 1999.

Figur 11: Gjenomsnittlig prosentandel av problemer av ulike typer der en løsning ble presentert i fellesskap (Hiebert, 2003 s. 92).

Figur 11 ble kodet inn i min analysekategori K1 fordi den omhandler presentasjoner av løsninger foran hel klasse, noe som stort sett vil involvere matematisk argumentasjon og resonnering. Her har elevene, og til tider lærerene argumentert for sine løsninger på de matematiske problemene klassen har jobbet med, og vist for andre hvordan de selv har resonnert. Med «independent problems» menes problemer som ble presentert enkeltstående og jobbet med i et avgrenset tidsrom, enten individuelt eller i hel klasse. Med «concurrent problems» menes et problem som ble presentert som en del av et set med problemer, ofte som oppgaver fra ark eller tekstbok, som regel jobbet elevene individuelt med disse problemene (Hiebert, 2003 s. 43). Som det vises av figuren, er det ikke noen stor forskjell på Japan sin score sammenlignet med de andre deltakerlandene i studien.

Figur 12 har jeg kodet inn i både kategori K1 og K3 fordi den viser løsningsmetoder presentert i fellesskap og Japan skiller seg ut fra de andre landene i denne oversikten.

TABLE 5.1. Average percentage of problems per eighth-grade mathematics lesson and percentage of lessons with at least one problem in which more than one solution method was presented publicly, by country: 1999

Country	Average percentage of problems per lesson with more than one solution method presented[2]	Percentage of lessons with at least one problem in which more than one solution method was presented[3]
Australia (AU)	2	25
Czech Republic (CZ)	2	16
Hong Kong SAR (HK)	4	23
Japan[1] (JP)	17	42
Netherlands (NL)	5	30
Switzerland (SW)	4	24
United States (US)	5	37

[1]Japanese mathematics data were collected in 1995.
[2]Average percentage of problems per lesson with more than one solution method presented: JP>AU, CZ, HK.
[3]Percentage of lessons with at least one problem in which more than one solution method was presented: US>CZ.
NOTE: Analyses do not include answered-only problems (i.e., problems that were completed prior to the videotaped lesson and only their answers were shared). For each country, average percentage was calculated as the sum of the percentage within each lesson, divided by the number of lessons. The tests for significance take into account the standard error for the reported differences. Thus, a difference between averages of two countries may be significant while the same difference between two other countries may not be significant.
SOURCE: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), Video Study, 1999.

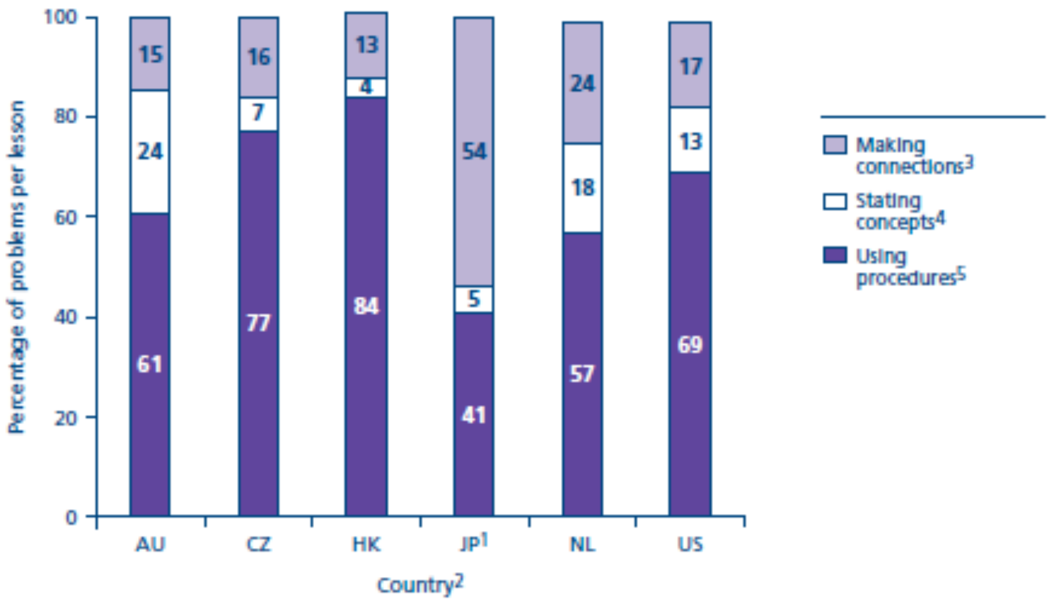
Figur 12: Gjennomsnittlig prosentandel av problemer der mer enn én løsningsmetode ble presentert, samt gjennomsnittlig prosentandel av undervisningstimer der dette var tilfellet (Hiebert, 2003 s. 94).

Presentasjoner av ulike løsningsmetoder i fellesskap vil, sannsynligvis, innvolvere resonnering og argumentasjon fra elevene. Japanske undervisningstimer med problemer der løsninger presenteres i fellesskap, har i gjennomsnitt 17% problemer der flere enn én løsningsmetode blir presentert. De andre landene har tilsvarende mellom 2% og 5%. Også når det gjelder gjennomsnittlig antall undervisningstimer der dette forekommer ligger Japan klart foran de andre landene, med hele 42%. Dette samsvarer med det faktum at japansk matematikkundervisning ofte preges av at man bruker en hel time på ett enkelt problem (Andrews, 2001; Sekiguchi & Miyazaki, 2000), og at man ofte diskuterer ulike måter å løse problemene på, med fokus på løsningsmetodene fremfor selve svaret (Schumer, 1999 s. 402).

Japanske lærere har i mange år jobbet ut i fra et «open-end approach», som går ut på å utvikle gode matematiske problemer med mange ulike løsningsmetoder. Dette er ment til å fremme elevenes naturlige tenkemåte og gi rom for individualitet i løsningsprosessene (Nagasaki & Becker, 1993 s. 32).

Figur 13 har jeg også kodet inn i både K1 og K3. Denne figuren viser rapportens funn knyttet til gjennomsnittlig prosentandel av de matematiske problemene i hvert land som er kodet inn i tre ulike typer problemutsagn. Under figuren har jeg oversatt rapportens forklaringer på hva som er inneholdt i de tre ulike typene problemutsagn.

FIGURE 5.8. **Average percentage of problems per eighth-grade mathematics lesson of each problem statement type, by country: 1999**



Figur 13: Gjennomsnittlig prosentandel av de matematiske problemene knyttet til ulike typer problemutsagn (Hiebert 2003, s. 99).

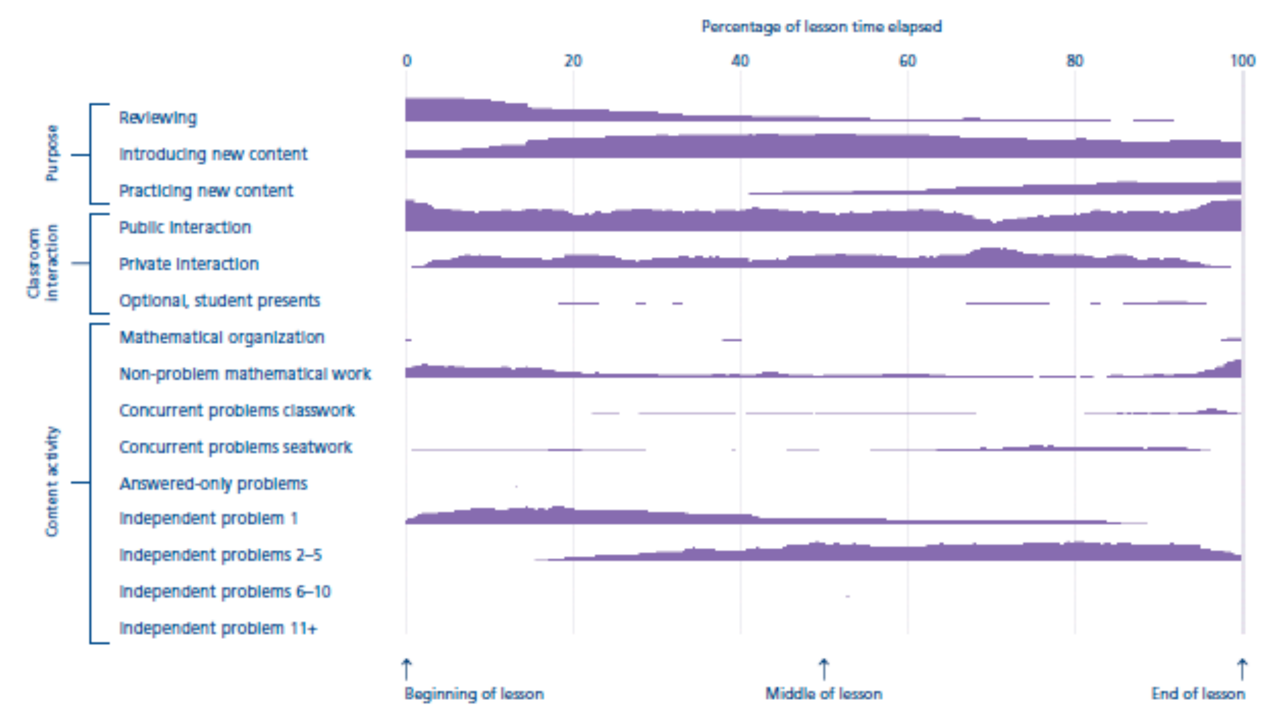
Forklaring på de tre ulike kategoriene som er benyttet, fritt oversatt fra rapportens egen forklaring:

- Å bruke prosedyrer vil si at problemet ble løst ved algoritmer, og diskusjonen rundt løsningen og problemet var fokusert på metoder, prosedyrer og regler mer enn underliggende matematiske konsepter.
- Å fastslå idéer eller konsepter vil si at matematiske egenskaper og definisjoner ble identifisert mens elevene løste problemet, uten diskusjoner knyttet til matematiske forhold eller resonnering. Dette inkluderte f.eks. å finne navnet på en egenskap som

begrunnelsen for et svar, men ikke å forklare hvorfor denne egenskapen var passende for den aktuelle situasjonen.
- Å finne sammenhenger vil si at elevene involverte eksplisitte referanser til matematiske forhold og/eller matematisk resonnering mens de løste problemet (Hiebert, 2003 s. 100).

Den siste figuren jeg har valgt å ta med for å illustrere de relvante elementene min innholdsanalyse resulterte i, er figur 14.

FIGURE 6.4. **Japanese eighth-grade mathematics lesson signature: 1995**



Figur 14: «Lesson signature» fra en gjennomsnittlig japansk matematikktime (Hiebert, 2003 s. 137).

Denne figuren har jeg endt opp med å kode inn i analysekategori K3, fordi den viser «lesson signature»[1] til en gjennomsnittlig japansk matematikktime ut i fra videoanalysene gjort i studien. Alle deltakerlandene har fått en egen signatur, og Japan sin signatur skiller seg fra de andre på flere områder, for eksempel tidsbruk knyttet til repetisjon (mindre enn de andre landene) og tid brukt på samtaler, diskusjon og samarbeid i klassen (mer enn de andre landene).
En «lesson signature» er gjennomgående mønster som vises når alle videoklippene fra et land er analysert og sammenlignet. Det er i rapportens arbeid med dette brukt tre ulike

[1] Jeg velger å bruke det engelske begrepet lesson study, fordi jeg ikke fant noe godt norsk begrep med samme betydning som kunne brukes.

dimensjoner for å gi et dynamisk bilde av landenes signatur; målet med aktivitetene som gjennomføres, hvilke ulike typer av interaksjoner som foregår i klasserommet og hvilken type innhold de ulike aktivitetene hadde. Histogrammets høyde økes med èn piksel per 5% av timen som registrerer positivt for den aktuelle kategorien som analyseres, og forsvinner hvis mindre enn 5% av timens innhold passer i kategorien. Den horisontale aksen viser hvor mye tid av timen som er gått, fra begynnelse til slutt (Hiebert, 2003 s. 123- 124).

4.2. Analyse av klasseromsobservasjoner

Jeg analyserte data fra klasseromsobservasjonen jeg hadde gjennomført, der jeg hadde observert en påbyggklasse som gjennomførte undervisningsopplegget «Hundrerkartet» (Matematikksenteret, 2010). Dette undervisningsopplegget hadde fokus på at elevene skulle bruke matematisk argumentasjon, resonnering og kanskje komme frem til et matematisk bevis. For å gjennomføre en analyse av klasseromsobservasjonene mine, benyttet jeg data fra videoopptak, transkribert lydopptak, egne feltnotater og innsamlede elevnotater fra undervisningstimene. Transkripsjonsnøkkel til videotranskripsjonene finnes som vedlegg, da de er mer detaljerte enn transkripsjonene av intervjuene, som bare inneholder nummererte ytringer. Jeg har i analysen prøvd å fokusere på elevenes resonnementer og tankeprosesser knyttet til problemløsningen. Matematikk handler, som nevnt i teoridelen av oppgaven, om å finne mening i det man jobber med (Skemp, 1987). I oppgavens avsnitt 2.5 nevnte jeg at Skemp mente at ingen elever kunne lykkes med matematikk om de ikke ble undervist i faget på en slik måte at de må bruke sin intelligens istedenfor sin evne til pugging og memorisering (Skemp, 1987 s. 7). Dette synes jeg er noe som det observerte undervisningsopplegget «Hundrerkartet» (Matematikksenteret, 2010), tok hensyn til fordi elevene selv måtte jobbe aktivt for å komme frem til svarene. De fikk ikke en regelbasert metode utgitt ved timens oppstart, men måtte finne ut en egen løsningsmetode steg for steg, med læreren som aktiv støttespiller. Ved å jobbe slik, blir prosessen med å komme frem til en forståelse av det man jobber med, like viktig som selve svaret.

Det jeg gjennom denne delen av analysen håpet på å få litt mer innsikt i, var om elevene forsto det de jobbet med, og om det gav mening for dem, samt hvordan de uttrykte dette. Analysen ble gjennomført ved at jeg gikk inn i datamaterialet og forsøkte å se på episoder som kunne illustrere hvordan elevene arbeidet og tenkte, ting de fant utfordrende, oppdagelser de gjorde og hvordan de resonnerte seg frem til svar på oppgavene. Jeg laget altså en stikkordpreget kategoriindeling (basert på de stikkordene som er nevnt her), med hovedtyngde på kategoriene jeg kalte *tegn på forståelse* og *synlige resonnementer* Jeg brukte deretter kategoriene mens jeg jobbet med dataene. Jeg forsøkte også å finne noen indikasjoner på hvilket av van Hiele sine matematiske nivåer (Mason, 1998; van Hiele, 1986) de observerte elevene så ut til å befinne seg på. Jeg har forsøkt å underbygge dette i min analyse med noen bilder fra elevenes notater, samlet inn i etterkant av arbeidet med det observerte undervisningsopplegget.

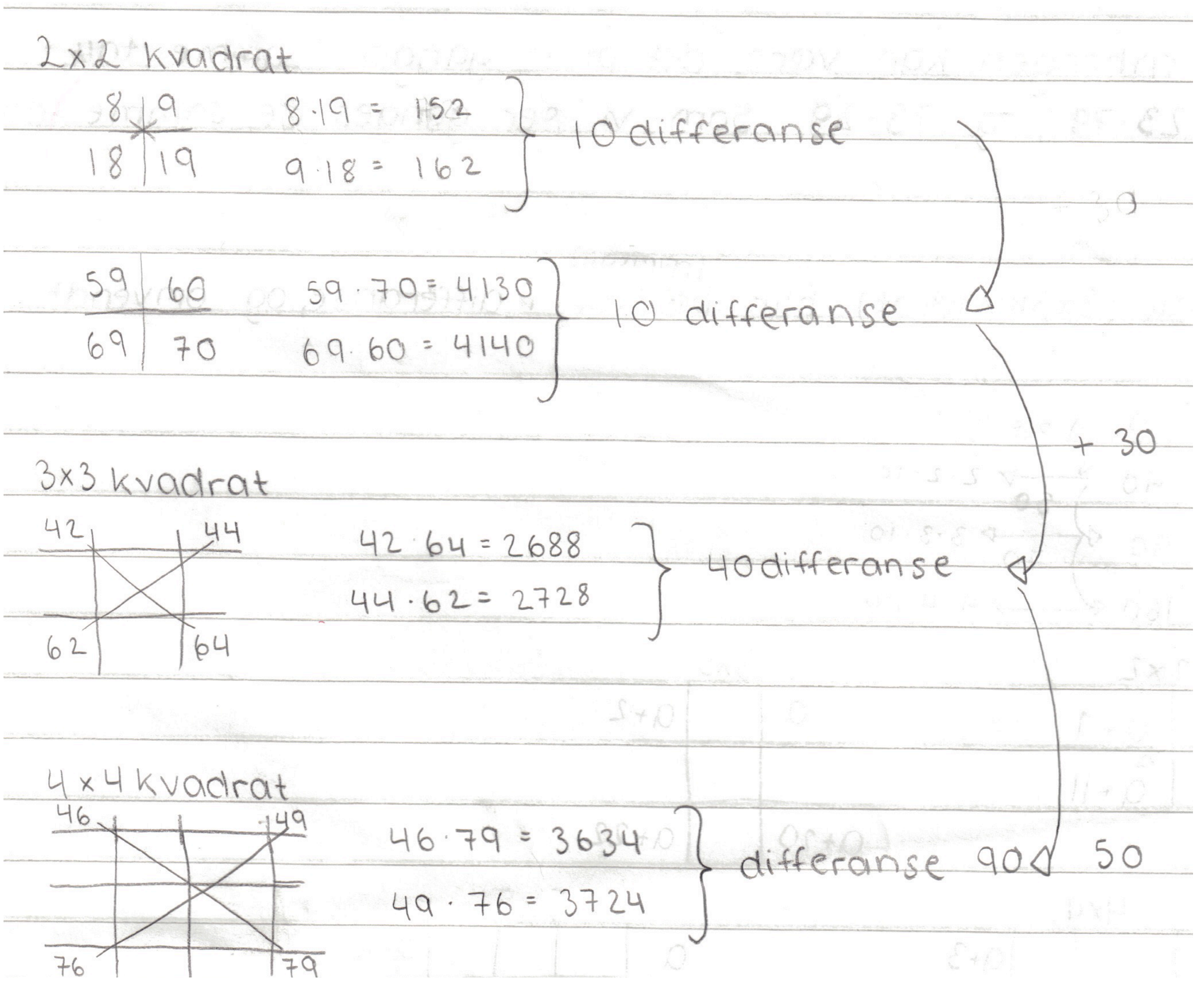
Læreren begynte timen med å forklare hva de skulle jobbe med, og at målet var å få litt innsikt i det som kaltes matematisk bevis. Da han spurte om noen av elevene hadde kjennskap til hva dette var, var det bare én elev som hadde hørt om det tidligere. Læreren begynte arbeidet med å vise eksempler på hvordan man kunne finne ulike tallkvadrater inne i hundrerkartet, og hvordan man her skulle multiplisere hjørnetallene i kvadratene, før elevene satte i gang selv. Det kunne virke som om de fleste elevene syntes det var spennende og engasjerende med denne arbeidsmåten, og jeg ser ut ifra dataene at alle elevene i klassen, utenom to stykker, jobbet aktivt med å finne mønstre.

32	09.12	Lærer	Men hvis du skal forklare det til meg, muntlig?		Snakker med elev 11, som synes det er vanskelig å vite hva han skal skrive
33	09.13	Elev 11 til elev 12 og lærer	At på to ganger to, alle tallene, differanse er det samme. Tallene er de samme for alle kvadratene, uansett hvor store de er.		
34	09.15	Lærer	Hvilke tall i kvadratet er det du mener?		
35	09.17	Elev 11 til elev 12 og lærer	De ytterste.		
36	09.18	Lærer	De diagonale tallene da?		
37	09.19	Elev 11	Ja		
38	09.19	Lærer	Det er tydelig at du har skjønt det her, men det er litt vanskeligere å forklare det. Til andre. Men er det ikke fascinerende?		

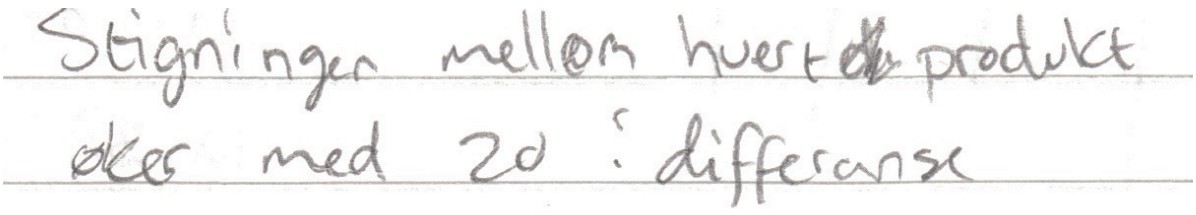
39	09.21	Elev 11	Jo ,men når jeg skal si det, det blir fort litt rot. Egentlig så liker jeg å bare gjøre noe når jeg skal gjøre noe, bli ferdig med det.		
40	09.28		Ja, men dette her er liksom litt sånn problemløsning med å forstå, forstå matematikken, tenke litt liksom. Så hvis du er med på denne «leken» her så, så får du nok litt større forståelse for hvordan de lager formler og sånn.		
41	09.33	Elev 11	Men, hva skal jeg skrive liksom, eller hva man tenker.		
42	09.35	Lærer	Hva er tanken bak?		
43	09.36	elev 11	Mhm. Hva det er man vil si.		
44	09.38	Lærer	Hva har du skrevet nå da?		
45	09.39	Elev 11	Nei, jeg har bare skrevet det som, sant, at to ganger to kvadratene, så ,så er det, dette er differansen, uansett tall her.		
46	09.44	Lærer	Går det an å skrive det litt spissere?		
47	09.45	Elev11	Ja, det gjør det. Jeg har bare skrevet vi har gjort liksom, har vel ikke skrevet, det er en forklaring på en måte (ukjent tekst).		En del bråk og bevegelser i klasserommet rundt kamera, så litt vanskelig å høre alt som blir sagt.
48	09.49	Lærer	Ja, det går nok an å skrive det på en litt annen måte (ukjent tekst). (2s), men du kan jo tenke litt.		

Dette utdraget illustrerer noe jeg observerte hos flere av elevparene, at da de kom så langt at de skulle begynne å formulere med ord det de hadde funnet, var det mange som syntes dette var både utfordrende og uvant. Her viser utdraget fra observasjonene hvordan læreren prøver å hjelpe et elevpar med å sette ord på det de har funnet ut:

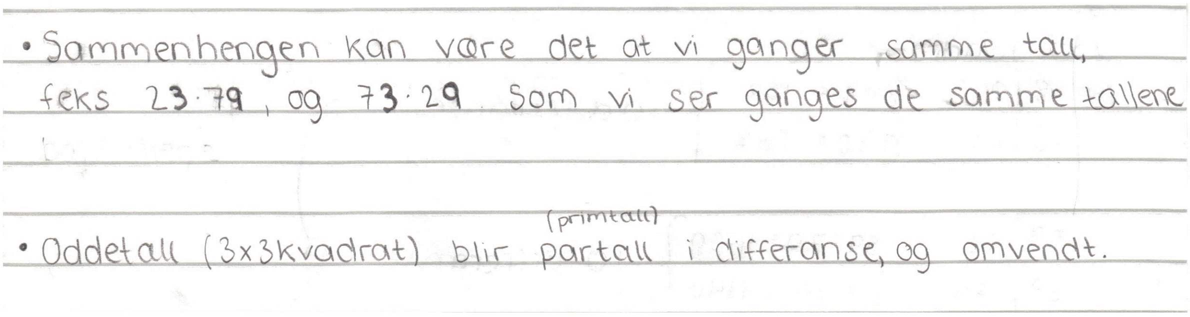
Det jeg syntes var særlig interessant i dette utdraget fra samtalen, er at elev 11 anser det som unødvendig tidsbruk å måtte forklare og skrive ned det han har tenkt, han ønsker i følge ytring nummer 39 bare å *«bli ferdig med det»*. Jeg synes læreren sin respons på dette er god, i ytring 40 viser han med klarhet til eleven at det er en grunn til at de jobber slik, at eleven kan forstå og få innsikt i *«hvordan de lager formler og sånn»*. Grunnen til at jeg merket meg dette utdraget, er mye det at det virker som om elevene generelt sett ikke er så vante med å forklare og å sette ord på det de tenker når de jobber med matematikk. Dette er noe blant andre Skemp har påpekt at er et viktig moment knyttet til forståelse: *«The mere act of communicating our ideas seems to help clarify them, for, in so doing, we have to attach them to words (or symbols), which makes them more concscious»* (Skemp, 1987 s. 88). Det blir altså vanskelig å bevise noe for andre om man ikke kan sette ord på det selv. Jeg har scannet inn noen utdrag fra elevenes notater her, som viser hvordan de jobbet med å finne mønster (Figur 15), før de gikk over til å forsøke å formulere en forklaring på de funnene de hadde gjort (Figur 16, 17 og 18):



Figur 15: Notater fra ett av elevparene (elev 8 og elev 4), som viser at de har begynt å ane et mønster knyttet til differansen av differansene i kvadratenes hjørnetall

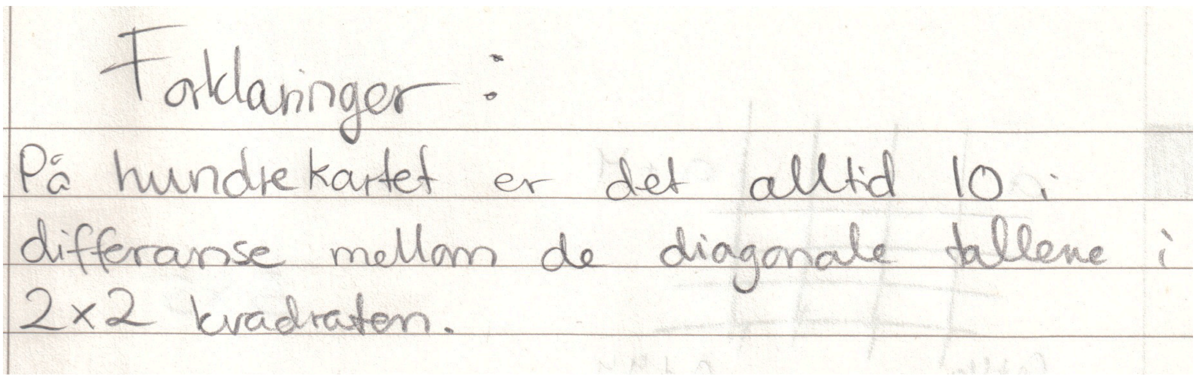

Stigningen mellom hvert ~~de~~ produkt
øker med 20: differanse

Figur 16: Et førsteutkast fra ett annet elevpar (elev 11 og elev 12), et forsøk på en forklaring på hva de har funnet ut etter at læreren hadde hjulpet dem igang


• Sammenhengen kan være det at vi ganger samme tall,
feks 23·79, og 73·29 Som vi ser ganges de samme tallene

(primtall)
• Oddetall (3x3kvadrat) blir partall i differanse, og omvendt.

Figur 17: Her har elevparet bestående av elev 8 og elev 4 forsøkt å forklare den sammenhengen de har sett med ord.


Forklaringer:
På hundrekartet er det alltid 10 i
differanse mellom de diagonale tallene i
2x2 kvadraten.

Figur 18: Nok et eksempel på en forklaring, fra elevpar bestående av elev 1 og elev 2.

Ut i fra de notatene og skriftlige forklaringen jeg har sett, kan det virke som om de fleste av elevene befinner seg enten på nivå 2 eller 3 i modellen til van Hiele som jeg presenterte i avsnitt 2.6. Det vil si at de viser tegn på at de mestrer uformell deduksjon (nivå 2) eller formell deduksjon (nivå 3). Dette innebærer at elevene på nivå 2 har forståelse for matematiske konsepter, og hvilke kriterier som knyttes til ulike konsept, samt evnen til å foreta mer abstrakte deduksjoner, mens elevene på nivå 3 er i stand til å føre et matematisk bevis eller trekke en korrekt slutning basert på tidligere gitte opplysninger og aksiomer. De er i stand til å gå mellom generelle og spesifikke eksempler (Mason, 1998; van Hiele, 1986). Det at jeg har observert indikasjoner på denne nivåfordelingen under ett enkelt undervisningsopplegg, er selvfølgelig ikke grunnlag for noen bastante nivåinndelinger av disse elevenes matematikkferdigheter generelt.

61	16.01	Elev 1	Okei. Ehm, hm, hvis du har et to ganger to kvadrat, og ganger tallene med hverandre, eller hjørnetallene diagonalt med hverandre, da vil differansene mellom svarene alltid være ti. I forhold til et sånt hundrerkart. Og hvis du har et tre ganger tre kvadrat eh og ganger hjørnetallene diagonalt med hverandre, sånn som du gjorde på den forrige så vil differansen alltid være førti. Og da finner vi ut at mellom ti og førti vil det alltid være eller det vil være tre, altså tretti i forskjell, eller tre. Og hvis du går videre til et fire ganger fire kvadrat vil variansen mellom svarene være nitti. Som da er fem, eller femti i forskjell til førti. Da ser du at tallene som går i mellom alltid vil være oddetall, da blir de tre, fem, sju, ni ogsåvidere nedover. Så kan du etterhvert regne ut store tall uten å måtte, ja.		
62	16.58	Lærer	Ja, takk. Det var godt formulert. Du bruker gode ord og uttrykk til å forklare sammenhengen.		

Det var en av elevene som skilte seg ut, med svært høyt refleksjonsnivå, og god evne til å forklare det hun hadde kommet frem til, jeg vil anta at hun ligger mellom nivå 3 og nivå 4 (stringens) i henhold til van Hiele sin modell. Det vil si at denne eleven viste forståelse av logiske sammenhenger og konsekvenser disse sammenhengene medfører (van Hiele, 1986). Utdraget ovenfor, med fokus på ytring nummer 61, viser hvordan hun forklarer for læreren og resten av klassen hvordan hun tenkte i begynnelsen av prosessen med «Hundrerkartet». Også litt senere i timen, mens læreren snakker med hele klassen og stiller spørsmål i fellesskap, er det denne eleven som utmerker seg med svært raske og innsiktsfulle svar:

113	18.31	Lærer	Jeeei! Bra! HEhe. Fire ganger fie, ser dere ett mønster?≈		
114	18.32	Elev 1	≈det går i gangen, det går i to, tre, fire, fem gangen!		
115	18.34	Lærer	Jajaja! Da tipper vi at, [tohundre og femti] Ja.		
116	18.35	Elev 1	[Det er fem ganger fem, blir tjuefem]		
117	18.36	Elev 13	Kult da!		
118	18.37	Lærer	Ser dere det? To, tre fire, så kommer vi opp til fem gangen, ja tjuefem i femgangen, fem ganger fem blir tjuefem. Ja. Så fem ganger fem≈		

Andre viste også gode refleksjoner, fordi om det var litt utfordrende å få elevene til å se at det hadde et poeng å gå fra konkrete tall til mer generelle uttrykk der man representerte verdiene ved hjelp av bokstaver.

141	26. 33	Lærer	Da vil jeg gjerne se hvordan dere laget, kom frem til denne generelle måten å skrive på. (3s). Da kan det jo være litt interessant kanskje, og så regne på tallene som ser sånn ut, istedenfor tallene som ser sånn ut, er ikke det mulig? (.) Dere blir ikke redde når vi skal regne med litt bokstaver?	Viser på tavlen at han vil at elevene skal flytte fokuset fra å regne med konkrete tall, over til de bokstavuttrykkene som de kom frem til tidligere	
142	26.47	Elev 1	Men det blir jo litt lite praktisk da, med det istedenfor tall?		

143	26.48	Lærer	Nei det blir ikke det, du skal se, det blir fantastisk! La oss prøve iallefall. Hvis vi skal gange sammen de tallene de, a ganger a pluss elleve, kan vi ikke skrive det sånn, a ganger og så en parantes a pluss elleve, (2s) ånei ånei hehehe. Når vi ganger a med a, hva blir det?	Han ser at noen av elevene ser litt stresset ut når det algebraiske uttrykket dukker opp	
144	26.52	Elev 8	a i to, eller andre		
145	26.53	Lærer	Ja. A ganger elleve, hva blir det?		
146	26.59	Elev 2	(4s) Elleve a.		

Læreren viste stort engasjement og god begrunningsevne når det gjaldt å besvare disse utfordringene, noe jeg synes blir godt illustrert i utdraget ovenfor, kanskje særlig i ytring 143. En ting jeg la merke til etterhvert som problemløsningen kom så langt ut i prosessen at man skulle bruke mer generelle uttrykk, var at manglende algebrakunnskaper kunne være et hinder for noen av elevene. Det at de ikke husket hvordan man regnet med bokstavuttrykk, gjorde at de fikk problemer med å komme frem til det generelle matematiske beviset. I notatene mine har jeg notert ned en elevkommentar mens de jobbet med bokstavuttrykkene: *«Men, jeg skjønner ikke det jeg heller, hvis jeg setter den, a sammen med a, det blir jo for mange a'er da?»* Så denne eleven har ikke fått orden på regningen hun skal utføre med bokstaver, og det kan jo være et element som stjeler fokus fra forståelsen for hva det er som er beviset for den matematikken de jobber med her.

4.3. Analyse av elevintervjuer

Da jeg jobbet med intervjuer, valgte jeg å intervjue fire elever, to som hadde gjennomført undervisningsopplegget «Hundrerkartet», og to som ikke hadde det. Elevene ble intervjuet to og to, for å skape trygge rammer rundt intervjusituasjonen. I analyseprosessen var elevintervjuene det jeg jobbet med til slutt, etter å ha gjort analysene av rapporten fra TIMSS 1999 Video Study og klasseromsobservasjonene. Analysene ble gjennomført ved å bruke de samme stikkordene som jeg kategoriserte observasjonene mine rundt, og de gav meg støtte til å se mer inngående på analysene jeg gjorde i tilknytning til klasseromsobservasjonene. Jeg brukte intervjuene til å få et enda dypere og mer fokusert innsyn i elevenes tanker knyttet til bevisføring, ressonering, forståelse og forklaringer. Da jeg intervjuet elevene som hadde gjennomført undervinsningsopplegget jeg hadde observert, forsøkte jeg å spørre dem litt om hvordan de opplevde det å jobbe på denne måten i matematikk. De elevene som ikke hadde deltatt i dette undervisningsopplegget fikk mer generelle spørsmål knyttet til deres tanker rundt matematikkfaget. Intervjuene var relativt korte (mellom 5 og 10 minutter), og de utdragene jeg har funnet mest interessante gjennom analysen har størst fokus på kategorien jeg har kalt for matematisk forståelse, her forstått som relasjonell forståelse ut i fra Skemp sine definisjoner (Skemp, 1976).

4.3.1. Intervju 1

Intervju 1 ble gjennomført med to elever fra den minste av skolene, som hadde deltatt i det observerte undervisningsopplegget. Intervjuet ble gjennomført rett etter at økten med «Hundrerkartet» var ferdig. Her prøvde jeg å finne ut om elevene tidligere hadde støtt på matematisk bevis i matematikkundervisningen, men det hadde de ikke. De to elevene jeg intervjuet hadde gått i samme klasse på ungdomsskolen også, og forklarte at det var lite forklaringer og bevis knyttet opp til den matemtikken de møtte der:

> 27.R: Vi fikk aldri vite hvordan, vi måtte bare godta at det var sånn.

Denne ytringen var en oppsummering den andre eleven gjenkjente, og det gav derfor meg et inntrykk av at det var uvant for dem å støte på forklaringene på hva som ligger bak alle formlene og reglene de hadde lært tidligere i matemtikkfaget. I tillegg kan man jo anta at det kan ha virket negativt på deres utforskning og glede ved matematikkfaget om alle spørsmål om «hvorfor» ble avfeid med at de *«måtte bare godta at det var sånn»*. Selvfølgelig er dette tilfellet (forhåpentligvis) ikke representativt for alle elevers erfaringer fra ungdomsskolens matematikkundervisning. Men dette står i så fall i sterk kontrast til kulturen i japansk matematikkundervisning, som vektlegger forståelse av matematiske idéer, og betydningen av at elevene stiller spørsmål om hvorfor ting er som de er i matematikken: *«In school mathematics, we emphasize the importance of asking questions «why?» in thinking: «Why» questions encourage asking to search the origin (causes or basic premises) of the phenomenon in focus»* (Sekiguchi & Miyazaki, 2000 s. 3). Også Skemp vektlegger viktigheten av å få gode svar og forklaringer på hvorfor ting er som de er for å fremme relasjonell forståelse i matematikk (Skemp, 1987 s. 86- 87).

I oppgavens teoridel har jeg sett på hva som skal til for at noen skal lære noe, og brukte blant annet Piaget sin teori om læring til å belyse dette. Slik kom jeg frem til at for at det skal foregå læring, må man settes i situasjoner der akkomodasjon vil forekomme, slik at vi kan tilegne oss ny kunnskap og forståelse (Imsen, 2005 s. 232; Piaget et al., 1995).

> 29.I: Men, sånn som når dere jobbet på denne måten (med resonnering og bevis, en oppgave på en hel økt), følte dere at dere lærte noe, eller lærte på en annen måte?
> 30.L: Jeg lærte iallefall mye på, nå har jo du det arket (notatene elevene tok mens de jobbet med hundrerkartet), men den eh i siste biten når det var mye eh, når vi skulle regne det ut, sånn a ganger og sånn som det, jeg sliter ganske mye med det, men nå fikk jeg det til, liksom litt repetisjon og jeg fikk lært≈
> 31.I:≈det gav mer mening å bruke bokstver på en måte?≈
> 32.L:≈Ja. Jeg syntes at det var lettere nå med bokstaver enn, for det var litt mer ryddig på en måte.

Ytringene 30 og 32 fra elevintervjuet kan tyde på at det observerte undervisningsopplegget gjorde nettopp dette for noen av elevene, satte dem i en situasjon der de fikk belyst tidligere kunnskap på nye måter, og tilegnet seg ny forståelse. Det kan altså virke som om arbeidet med «Hundrerkartet» gav eleven ny innsikt i blant annet bokstavregning og hvorfor man i matematikken noen ganger benytter bokstaver som representasjoner for tall. Her kan man kanskje se tegn på at eleven har en begynnende relasjonell forståelse for matematikken (Skemp, 1987 kap. 12). Ideelt sett vil denne formen for forståelse i matematikk føre til at man hele tiden utvider sine mentale skjema og stadig når nye nivåer av forståelse gjennom aktiv deltakelse i læringsprosessen, jamfør teorien presentert i oppgavens avsnitt 2.4.

> 38.L: ≈jeg synes at det var kjekt også jeg da, det var noe litt utenom det vanlige liksom.
> 39.I: Så bra! Hvordan tror du at å jobbe på denne måten med matte kan gjøre at du, kanskje kan like det bedre eller, ha mer igjen for å være≈
> 40.L≈ for jeg er ganske treg, det er bare meg da, men jeg er treg, og jeg trenger liksom tid, at det liksom synker inn, også at jeg får repetert det flere ganger, så Rita forklarte det jo flere ganger, og da hjalp det ganske mye liksom, og at andre forklarer det også, enn kun læreren.

Ut i fra elevens ytringer her (38 og 40) kan det virke som om det å få jobbe med matematikk på denne måten, der man fokuserer på et åpent og krevende matematisk problem i en hel undervisningsøkt, virket motiverende for noen av elevene.
Dette intervjuet tar jo for seg et bittelite utvalg av elever, men det kan se ut som om det

viser noen positive tegn knyttet til å undervise litt mer som man gjør i japanske klasserom, med fokus på å jobbe på få problemer med rom for egen tenkning og diskusjon hos elevene (Andrews, 2001; Nagasaki & Becker, 1993; Stigler & Hiebert, 1997). Dette vil jeg se mer på i oppgavens diskusjonsdel.

4.3.2. Intervju 2

Intervju 2 ble gjennomført med to elever fra den største av de to skolene. De hadde ikke deltatt i det observerte undervisningsopplegget. Jeg har i oppgavens teoridel definert forståelse som at man har skjønt et konsept eller begrep sin egentlige betydning, og at man bør ha dette så klart for seg at man kan bruke det korrekt på egenhånd, og gjerne også være i stand til å forklare eller lære det videre til andre (Solvang, 1986 s. 96- 100). Under intervjuet kom det frem at det kan virke som om elevene er komfortable med å forklare matematiske begreper, konsepter og oppgaver for medelever.

> 22.I: Ehmmm, ja. Men når du må forklare til andre i matte, føler du at det kan hjelpe deg selv på noen måte? Jeg tenker viss du på en måte sammenligner at du bare sitter og jobber med oppgaver for deg selv da, eller sammenlignet med når du snakker med andre og forklarer ting, eller får forklart ting fra dem. Merke du noen forskjell på hvordan du tenker og sånn?
> 23.P: Ja jeg vil egentlig sagt det, fordi jeg får et mye bredere syn på min egen tanke liksom, når jeg først prøver å uttrykke det, og å forklare andre.
> 24.I: Er det vanskelig? Å forklare ting, altså, hvis du hadde møtt en person som du ikke kjente, så skulle du forklare noe i matte til dem, hadde du syntes at det var utfordrende eller skummelt, ehm.
> 25.A: Spørs om du har kontroll på det selv eller, hvis jeg hadde visst at jeg hadde kontroll, så hadde jeg elsket det! ≈

Det kan ut i fra ytring 23 og 25 virke som om elevene har et opplevd læringsutbytte av å forklare for andre elever i matematikk, såfremt de føler at de selv har en god forståelse av det som skal forklares. Jeg synes særlig at utsagnet i ytring 23 om at eleven *«får et mye bredere syn på min egen tanke»* når han *«først prøver å uttrykke det, og å forklare andre»* er interessant sett i lys av Skemp sin teori om kommunikasjon knyttet til forståelse (Skemp, 1976 s.56- 58, s.88-90).

I japansk matematikkundervisning er det tidligere observert at man ikke bare har fokus på at elevene skal presentere korrekte svar eller fremgangsmåter, men også feiltenkning og steder der de står fast (OECD, 2012a s.194; Schumer, 1999). En interessant episode er blan annet observert i The Learning Gap (Stevenson & Stigler, 1994 s. 16- 17) . Det er altså ikke bare «riktige» svar som er viktige svar når man i japansk undervisning forsøker å få et innblik i tankeprosessene til elevene og deres forståelse i matematikk (Nagasaki & Becker, 1993 s. 9 og s. 33). Norske elever er kanskje mer vant med at man i klasserommet bare viser det svaret som er riktig, om man rekker opp hånden for å svare skal man helst vite at man har løst oppgaven riktig.

> 33.A: Ja, men med en gang jeg føler at jeg er litt usikker på, at jeg ikke er helt sikker på om det er rett≈
> 34.I:[mhm]
> 35.A:≈ så synes jeg ikke det er noe kjekt. Da bare lar jeg være å si noe. Men eh, sånn hvis jeg vet at jeg har fått rett svar, så er det jo gøy.

Det kan virke som om det er en utfordring for elevene å forklare matematiske løsninger for andre om de ikke er helt sikker på om de har skjønt det riktig selv. Den kommentaren jeg la best merke til i dette intervjuutdraget var *«Da lar jeg bare være å si noe»* i ytring 35. Kanskje er dette en utbredt holdning blant norske elever, at man lar være å delta muntlig og aktivt i matematikktimene fordi man er redd for å ha feil. Det er i såfall synd, fordi det kan tyde på at det å sette ord på sine egne tanker og løsninger kan bidra til økt forståelse når man jobber med matematikk, særlig om læreren klarer å vise at også feil løsninger kan være verdifulle for læring (Skemp, 1987 kap. 17).

5. Diskusjon

I denne delen av oppgaven vil jeg se på det empiriske materialet forskningen min har frembrakt, og diskutere dette opp mot mine forskningsspørsmål samt den presenterte forskningslitteraturen knyttet til disse spørsmålene. Mitt hovedfokus vil være rettet mot elevers forståelse og resonnering i matematikkfaget og hva vi i norsk skole kanskje kan lære av å studerere japansk matematikkundervisning.

5.1. Diskusjon knyttet til data og funn relatert til F1

Forskningsspørsmål 1 (F1): Hvilke forklaringer på forskjeller i japanske og norske elever sine resultater på TIMSS og PISA testene kan man finne ved å analysere rapporten fra TIMSS 1999 Video Study ut i fra et undervisningskulturelt fokus?

I analyseprosessen min kom jeg frem til flere interessante momenter som jeg mener kanskje kan bidra til å forklare noe av bakgrunnen for japanske elevers gode prestasjoner i matematikkfaget. Jeg har forsøkt å særlig se på elementer som jeg oppfatter som mindre fremtredende eller mindre alminnelige i norsk matematikkundervisning. Jeg delte i analysen av rapporten fra TIMSS 1999 Video Study (Hiebert, 2003) inn i tre hovedkategorier, K1, K2 og K3. Kategorien K1 var knyttet til resonnering og argumentasjon i matematikkfaget, K2 var knyttet til elementer som omhandlet matematisk bevis, mens K3 var knyttet til elementer som skilte den japanske matematikkundervisningen fra matematikkundervisning i andre land. Jeg ønsker å knytte diskusjonen opp mot hver av disse kategoriene.

5.1.1. Diskusjon knyttet til K1: Resonnering og argumentasjon

Mange elever, både i Norge og på internasjonal basis kan ofte ha problemer med å skille mellom argumentasjon og bevis innenfor matematikkfaget (Knuth, 2002; Stylianides, 2009). Her kan man kanskje ha noe å lære fra japansk matematikkundervisning, da det ut i fra analysen av TIMSS 1999 Video Study kan se ut som japanske matematikklærere i større grad enn de andre landene i undersøkelsen legger vekt på elevenes løsningsforslag og forklaringer (Hiebert, 2003 s. 3). Det at man i tillegg vektlegger at flere ulike løsningsforslag blir vist i hel klasse, antyder et fokus på at resonnering og argumentasjon blir sett på som viktige elementer for å forstå matematikken man bruker (Schumer, 1999 s. 402). Dette illustrereres blant annet av Figur 11 og Figur 12 i oppgavens analysedel. Det kommer også frem i litteraturen knyttet til japansk matematikkundervisningskultur generelt og matematikkundervisning i Japan spesielt, at lærerene vektlegger at elever skal forstå det de jobber med, og at dette kan oppnås ved å stille spørsmål og å diskutere (Sekiguchi & Miyazaki, 2000 s. 3). Dette involverer da at elevene må diskutere sine egne resonneringer med andre elever og lærere, samt sette ord på egne tanker for å kunne forklare sitt resonnement muntlig eller skriftlig (Andrews, 2001). I tillegg virker det som om det vektlegges at man som elev bør kunne argumentere på en faglig måte for logikken i ens egne løsningsforslag, slik at det også vil være forståelig for andre hvordan man har tenkt . Figur 13 i denne oppgaven viser at japansk matetmatikkundervisning ser ut til å vektlegge matematiske problemer som søker å fremme elevenes evne til å se forbindelser i matematikken de jobber med, gjerne for å få et innblikk i hvordan flere ulike emner innenfor matematikkfaget henger sammen. Det at man i japansk matematikkundervisning ofte vektlegger å ha fokus på ett enkelt matematisk problem, eller iallefall få problemer per undervisningsøkt, tror jeg gjør at elevene får bedre tid til å tenke og å fordype seg i den matematikken som behøves for å løse problemet de arbeider med (Hiebert, 2003 s. 49). En effekt jeg antar at dette vil ha, er at alle elevene jobber med samme problem, men på ulike nivåer, alt etter hvilke ferdigheter de har i faget. Det er normalt sett ikke ferdighetsinndelinger av elevene i japanske matematikklasser (Andrews, 2001). Selvfølgelig vil man kunne argumentere for at det i enkelte situasjoner kanskje kan ha sine fordeler at elevene jobber i nivådelte grupper, men dette praktiseres ikke i japansk matematikkundervisning. Det at man alltid jobber samlet med samme oppgave gir derfor et godt grunnlag for en god diskusjon der hele klassen kan bidra. Lærere i Japan ser ut til å vektlegge kommunikasjon med elevene, det er en klasseromskultur der alle elevene kan forvente å måtte delta muntlig (Mosvold, 2008 s. 12). Det forskere ofte har lagt merke til i lignende situasjoner i vestlige land, er at vi tenderer mot å ha fokus kun på hva som er feil og rett svar eller konklusjon (Stevenson & Stigler, 1994). Dette kan igjen gjøre at mange elever vegrer seg for å bidra muntlig i matematikktimene, fordi det involverer en risiko for å svare feil (Solvang, 1986 kap. 12; Stramel, 2010). I tillegg kan det at man ikke har for vane å fokusere på ett enkelt problem over lengre tid være knyttet opp til det faktum at mange elever har lett for å gi opp når de møter matematiske problemer som er krevende. I japansk matematikkundervisning kan det altså, ut i fra analysen jeg har gjort, se ut som om man har fokus på argumentasjon og resonnering framfor riktig svar i seg selv, og at også gale svar eller fremgangsmåter vektlegges, fordi de også gir rom og muligheter for læring hos elevene (Sekiguchi & Miyazaki, 2000 s. 4). I tillegg kan kanskje denne arbeidsmåten og dette fokuset også gi et bredere vurderingsgrunnlag for karaktersetting i matematikkfaget, ved at man som lærer får mer innsikt i hva eleven har forstått og hvordan han eller hun klarer å bruke tilegnede kunnskaper (Nagasaki & Becker, 1993).

5.1.2. Diskusjon knyttet til K2: Matematisk bevis

Et matematisk bevis kan være knyttet til forståelse i matematikkfaget fordi man viser at man ikke bare har kommet frem til et svar, men også kan vise hvorfor og hvordan man kom frem til svaret, og at svaret er korrekt ut i fra de premissene som er gitt (Krantz, 2010; Øgrim, 2011 s. 56). Man er altså ute etter å vise at det er sannhet i de utsagnene man framsetter, og dette er jo også slik matematikere jobber. Det å få elevene til å se at man beviser at noe er sant for en grunn, og at dette kan gjøres på ulike måter (Alsina & Nelsen, 2010). Kanskje kan det også hjelpe elevene til å forstå hvordan matematikken de møter idag også har vært nye idéer som måtte bevises en gang, og at man ikke bare kan komme med et svar og forvente at andre skal godta det uten beviser for at dette svaret er korrekt

(Nystedt, 1993 s. 77- 78). Når det kommer til matematisk bevis brukt i japansk matematikkundervisning, viser analysen min av TIMSS 1999 Video Study at Japan skiller seg ut ved å bruke matematisk bevis i undervisningen vesentlig oftere enn alle de andre deltakerlandene i studien (Hiebert, 2003 s. 73). Jeg har ut i fra Figur 8, 9 og 10 vurdert dette som et element som kanskje kan bidra til å forklare noe av japanske elevers gode resultater på TIMSS- og PISA- tester. Kanskje henger dette sammen med det at elevene gjennom arbeid med matematisk bevis er øvet opp i å se og forklare matematiske sammenhenger, begrunne sine løsningsforslag og å demonstrere sine tanker for andre (Alsina & Nelsen, 2010). Jeg stiller meg spørsmålet om dette kan gi de japanske elevene en fordel i tilknytning til slike tester ved at de har trening i å finne ulike løsninger på problemene, samt å ikke bare skrive ned svaret på en oppgave, men også grunngi hvorfor svaret er riktig. Flere av oppgavene i TIMSS og PISA har elementer av deduksjon og bevisføring (Grønmo & Onstad, 2009 kap. 3; Kjærnsli, 2007 kap. 7). Om elever fra de andre deltakerlandene på disse undersøkelsene da ikke har noe særlig erfaring med å bruke matematisk bevis, vil de kanskje ha større utfordringer med å løse disse oppgavene. Jeg vil iallefall anta at de funnene jeg gjorde knyttet til analysekategori K2 antyder at det kan være en sammenheng mellom disse faktorene. Selvfølgelig vil det være viktig å se på hvordan man bruker matematisk bevis i undervisningen, at det blir integrert på en naturlig og god måte som kan fremme forståelse, ikke bare som en rutinepreget læring av regler for hvordan man kan bevise noe matematisk (Hanna & Jahnke, 2002; Knuth, 2002; Lakatos, Worrall, & Zahar, 1976). Det er altså ikke slik at jeg tror at man automatisk øker den matematiske forståelsen hos elevene ved å innføre bruk av matematisk bevis. Jeg tror likevel at man kan få nyttig inspirasjon til hvordan man kan bruke matematisk bevis konstruktivt ved å studere japansk matematikkundervisning.

5.1.3. Diskusjon knyttet til K3: Særtrekk ved japansk matematikkundervisning

Det har vært viktig for meg å ta høyde for at hele kulturen et land har knyttet til matematikkundervisning og skole, kan være en faktor i seg selv som påvirker et land sine prestasjoner på TIMSS- og PISA- undersøkelser. Forbundet med undervisningskultur har man elementer som forventninger fra foreldre og lærere, hvilke resursser som brukes på å utvikle god matematikkundervisning, hva man velger å ha fokus på i undervisningen, oppfølging utenom skoletid, elevsyn og lignende elementer (Dewey, 2005). Ut i fra teorien jeg har lest om japansk matematikkundervisning, har jeg merket meg at det virker som om mange japanske elever tar ekstratimer i matematikk utenom den vanlige skolen. Dette skjer som regel via privatundervisning, eller undervisning fra foreldre eller eldre søsken, eller på såkalte juku, privatskoler som tilbyr tilleggsundervisning i matematikk (Schumer, 1999). Det er i tillegg indikasjoner på at foreldre har forventninger til at barna gjør det bra på skolen, og at de skal legge ned arbeid i å gjøre det bra på skolen. I tillegg anser jeg det som en relevant faktor at japanske matematikklærere ser på matematikk som et fag alle elever kan lære, så lenge man har fokus på innsats og hardt arbeid kontra «talent» (Hiebert & Stigler, 1999; Stevenson & Stigler, 1994). Det brukes også mye ressurser i Japan på å utvikle gode matematikktimer, via såkalt «lesson study» (Lewis & Tsuchida, 1998). I min analyse av TIMSS 1999 Video Study fant jeg i min analysekategori K3 også frem til noen elementer som bekreftet og støttet opp om den teorien jeg på forhånd hadde lest. Det var altså elementer i studien der Japan skilte seg tydelig ut fra de andre deltakerlandene, og derfor har jeg tenkt at disse kanskje kan være en del av de faktorene som kan kaste lys over hvorfor japanske elever har gode matematikkprestasjoner på TIMSS- og PISA- tester.

Figur 6 viste at japanske elever brukte mer tid på matematisk arbeid på skolen enn noen av de andre deltakerlandene gjorde. Siden dette inkluderte blant annet matematiske samtaler, og arbeid med matematiske problemer, anser jeg det som et relevant moment som kan ha bidratt til de gode resultatene til elever fra Japan. Så japanske elever bruker altså mye tid på å jobbe med matematikkfaget både utenfor og på skolen (Hiebert, 2003 s. 38). Man kan selvfølgelig argumentere for at man i vestlige land legger mer vekt på at barn og unge skal ha fritid og muligheter til å få drive med aktiviteter utenom skolen, og at dette påvirker antall minutter man bruker på skolearbeid per dag og per uke. De asiatiske landene som Kina og Japan har av og til møtt kritikk fra vestlige land fordi de legger så stort press på sine barn og unge i skolesammenheng (Stevenson & Stigler, 1994).

Figur 7 i analysen viste at japanske elever fikk jobbe med mange flere matematiske problemer av høy kompleksitet enn elevene i de andre landene. Dette kan ha bidratt til at de japanske elevene er mer vant med å jobbe med krevende matematikkoppgaver som utfordrer dem til å bruke sin matematiske resonneringsevne aktivt hver gang de jobber med matematikkfaget. Det kan også ha gjort dem mindre redde for å forsøke å løse oppgaver som kan virke ukjente og utfordrende, fordi de er vant med å bli møtt med utfordringer i sin vanlige matematikkundervisning. Figur 12 viste i tillegg at japansk matematikkundervisning hadde langt flere problemer med ulike løsningsmetoder presentert i klassene som ble observert enn de andre landene hadde. Dette kan ha en positiv innvirkning på prestasjonene til japanske elever, fordi dette gjør at de er vant med at det er akseptabelt å løse et problem på flere ulike måter, og at man kan finne sin egen løsningsstrategi på de problemene man møter. Elever i vestlige land, som for eksempel USA, får ofte presentert en konkret løsningsmetode først, deretter problemer som de da skal praktisere denne metoden på selv (Stevenson & Stigler, 1994). Figur 13 viste dessuten at japanske lærere vektla å bruke matematiske problemer der elevene selv skulle se og komme frem til sammenhenger, ikke bare praktisere rutiner og regler. Dette vil nok også kunne bidra til en mer fleksibel tankegang hos elevene når de skal løse nye problemer, de er ikke avhengige av å kunne en nøyaktig regel for å løse problemet om de er godt trente i å se problemene i en større matematisk sammenheng.

5.2. Diskusjon knyttet til data og funn relatert til F2

Forskningsspørsmål2 (F2): Hvilke matematiske refleksjoner og opplevelser har elever på ulike ferdighetsnivåer i matematikk i norsk videregående skole knyttet til matematiske resonnementer og bevisføring?

Mine første tanker etter å ha observert undervisningsopplegget «Hundrerkartet» og intervjuet elever, var at norske elever ikke er så vant til å jobbe med matematisk bevis eller resonnering. Enda læreplanene gir rom for at man kan bruke matematisk bevis som et element i norsk matematikkundervisning, både i tidligere læreplaner og i Læreplan for Kunnskapsløftet (se oppgavens avsnitt 2.3), får jeg inntrykk av at dette er lite utbredt i dagens matematikkundervisning i norsk skole. Det er vanskelig for meg gjennom et så lite forskingsprosjekt å si noe om dette er korrekt, eller hvorfor det eventuelt er slik. Jeg vil derfor prøve å diskutere med fokus på de resonneringene norske elever viste i mine data, og hvilke erfaringer disse elevene hadde med matematisk bevis.

5.2.1. Diskusjon knyttet til observasjon

Det å bare ha en klasse som observasjonenhet gir selvfølgelig et svært begrenset datagrunnlag å basere en faglig diskusjon rundt. Ideelt sett ville jeg, særlig sett i etterkant av dataanalysen, hatt flere klasser som jeg kunne observert mens de gjennomførte undervisningsopplegget «Hundrerkartet». Dette ville gitt meg et bredere bilde av hvordan elever i norsk skole jobber med matematisk resonnering og bevis. I tillegg kunne det vært nyttig å hatt klasser med mer ulik matematisk bakgrunn, gjerne elever som hadde fordypning i realfag. Da vile jeg kanskje fått observere klasser og elever som hadde reell erfaring med matematisk bevisføring fra tidligere undervisning. Ut fra det lille datagrunnlaget jeg hadde, fant jeg likevel observasjoner som gav stoff til refleksjon og ettertanke. Blant annet synes jeg det var interessant å observere de utfordringene mange av elevene støtte på da de skulle formulere matematiske forklaringer og sette ord på sine egne resonneringer. Læreren måtte svært ofte hjelpe dem med å komme i gang, samt forklare hvordan man uttrykker seg slik at andre kan følge logikken bak det arbeidet man gjør i matematikk. Se for eksempel Figur 16 og 17. Jeg tenker at dette kanskje kan ha en sammenheng med at norske elever sjelden blir utfordret til å jobbe på denne måten i matematikkfaget, kanskje er vi i norsk skole for fokuserte på svarene elevene finner, ikke hvordan de finner dem. Selvfølgelig vil det ikke være gunstig å si noe veldig bastant om dette ut i fra datagrunnlaget i denne oppgaven, men det er kanskje verdt å ta med seg når man ser på utviklingen av matematikkfaget i norsk skole.

Ellers fikk observasjonene meg til å se at man har mange flinke elever som er faglig dyktige i matematikk, men de mangler kanskje en del av de «formelle verktøyene» som skal til for å kunne uttrykke seg med presisjon rent matematisk (Grønmo et al., 2012). Særlig kan dette være et viktig moment når det gjelder å rekruttere flere unge inn til realfagsstudier, at man på videregående skole kan gi dem gode verktøy til å forstå matematikk og til å formulere egne tanker rundt matematikk . Dette vil kanskje kunne hjelpe elever til å mestre studier der man forventes å jobbe mer som matematikere gjør, nemlig med matematisk argumentasjon og bevis. Jeg tenker at undervisningsopplegg som er bygget opp slik som «Hundrerkartet» kan være gunstige å benytte av og til i matematikkfaget. Det kan kanskje gi elever motivasjon å få jobbe over lengre tid med ett bestemt problem, i tillegg til at det samme problemet kan tilpasses elever som er på ulike nivåer faglig.

Mange av elevene som ble observert gav uttrykk for at de syntes det var kjekt å jobbe på denne måten, men det var selvfølgelig noen som syntes det ble litt lenge å holde på med samme oppgave, og det var uvant. Som vist i oppgavens analysedel, observerte jeg i en og samme klasse at elevene så ut til å være på ganske ulike nivåer, både i forhold til van Hiele sin modell (Mason, 1998) og resonneringsevne generelt. Det virket også som at noen av elevene slet med undervisningsopplegget fordi de ikke hadde gode nok tekniske matematikkferdigheter. Da kom kanskje manglende ferdigheter i blant annet algebra i vegen for dypere innsikt i bevis og bakgrunn for matematiske mønstre. Jeg har likevel tro på at mange elever kan ha utbytte av å jobbe med å utvikle sin evne til matematisk resonnering og argumentasjon, og at dette kan hjelpe elevene å finne mening i matematikkfaget, som igjen kan bidra til mer relasjonell forståelse (Skemp, 1987).

5.2.2. Diskusjon knyttet til intervjuer

I intervjuene prøvde jeg først å se om elevene hadde noen erfaringer og tanker knyttet til det å jobbe med matematisk bevis. Ingen av de elevene jeg intervjuet hadde noen erfaringer med dette, bare en av dem kunne huske å ha hørt om matematisk bevis tidligere. Da jeg intervjuet få elever er dette selvsagt ikke nok til å si at disse erfaringene er representative for erfaringene de fleste elevene i Norge har med matematisk bevis. Ellers er det også viktig å påpeke at jeg ikke er en erfaren intervjuer, og kanskje kunne andre spørsmål vist andre erfaringer elevene har med lignende matematiske begreper eller arbeidsmåter. Men det er jo synd at to av elevene har erfaringer som tyder på at det ikke var en viktig del av matematikkundervisningen de hadde hatt på ungdomsskolen; å få forklart hvorfor ting var som det var, man måtte bare godta svarene man fikk (ytring 27). I intervjuene finnes det tegn på elementer som kan være viktig for elevers arbeid med matematikk og deres forståelse av faget. Blant annet at det å forklare noe for andre, medelever eller lærere, i matematikk kan hjelpe til å forstå sine egne resonnementer og tankerekker bedre. Jeg vil anta at dette er relevant i forhold til forståelse, fordi man lettere kan forklare for andre det man forstår selv (Skemp, 1976 s. 56- 58).

Intervjuet av elevene som hadde gjennomført undervisningsopplegget «Hundrerkartet» antyder at dette var relativt uvante arbeidsmåter for disse elevene, men at det iallefall for den ene eleven hadde bidratt til forståelse knyttet til bokstavregning. Kanskje kan disse intervjuene tyde på at noen elever i norsk skole har mer instrumentell enn relasjonell forståelse (Skemp, 1987), og at dette muligens har en sammenheng med at man ikke har arbeidsmåter som fremmer relasjonell forståelse i matematikk. Men datagrunnlaget mitt er svært lite, og det må mye mer forskning til for å kunne få en god diskusjon om dette er tilfelle eller ikke, og om denne typen undervisningsopplegg faktisk er egnet til å fremme matematisk forståelse. Ett aspekt jeg likevel synes kunne være verdt å se nærmere på, er det at elevene bare liker å forklare det de kan, eller det de vet de har fått til «riktig». Her kan vi nok ha noe å lære av japanske lærere, som vektlegger at man også kan lære av de gale svarene og fremgangsmåtene, og at de derfor også er viktige å få med (Sekiguchi & Miyazaki, 2000 s. 4).

6. Avslutning

Jeg har søkt å finne svar på to ulike forskningsspørsmål i mitt arbeid med denne masteroppgaven og resultatene av dette arbeidet har blitt diskutert i foregående avsnitt. Jeg vil til slutt se på hvilke konklusjoner det kan være mulig å dra ut av den forskningen jeg har gjort, om jeg kan besvare forskningsspørsmålene mine, og hvilke pedagogiske implikasjoner disse eventuelt kan medføre. Helt til slutt vil jeg oppsummere mine refleksjoner og erfaringer i tilknytning til denne oppgaven.

6.1. Konklusjon

Når det gjelder konklusjoner som kan knyttes til mitt forskningsspørsmål 1, tror jeg det er viktig å ta forbehold om at man ikke automatisk kan overføre noe fra en kultur til en annen og forvente at det skal fungere helt likt i den nye kulturen. Man kan likevel påpeke viktige momenter som kanskje kan være ting man kan lære av hverandre. Kanskje kan matematikkundervisningen i Norge bli bedre ved hjelp av observasjoner fra japanske klasserom. De momentene jeg tror at man kanskje kan ha nytte av å innføre i norsk matematikkundervisning, er det tydelige fokuset man i Japan har på elevers forståelse av matematikken de jobber med (Sekiguchi & Miyazaki, 2000). Siden det kan virke som om japanske matematikklærere legger opp undervisningen sin basert på det faktum at kommunikasjon rundt matematikken man presenterer for elevene er essensielt, kan dette være et element man kanskje kan integrere mer også i norsk matematikkundervisning. Dette kan eventuelt bidra til at elevene lærer å være undersøkende og spørrende i tilnærmingen til matematikkfaget (Alsina & Nelsen, 2010; Schumer, 1999). Selvfølgelig er det sannsynligvis en enda mer kompleks forklaring på hvor mye ulike kulturelle aspekter spiller inn på elevers matematikkprestasjoner i ulike land, og at man ikke kan forvente at alle undervisningsmetoder vil være like effektive i andre land. Jeg tør likevel påstå at det kan se ut som om det å jobbe over lengre tid med få problemer av høy kompleksitet, kan være positivt sett i lys av de diskusjonsmulighetene og resonneringsmulighetene elevene da får. I tillegg er det mulig at det å flytte fokus på at alle bidrag fra elever er viktige og kan føre til læring i klasserommet, å se at ikke bare de svarene som er korrekte er nyttige, kan styrke selvbildet til elever innenfor matematikkfaget. Dette kan igjen kanskje føre til økt elevaktivitet og at flere tør å delta i matematiske diskusjoner i klassen. De elementene jeg her har nevnt, er noen av de elementene jeg tror muligens kan ha vært noen av de faktorene som har bidratt til japanske elevers gode prestasjoner på TIMSS- og PISA tester, fordi om jeg ikke kan trekke noen bastante konklusjoner bare basert på min forskning i tilknytning til denne oppgaven. I tillegg er det viktig å påpeke at mine forskningsspørsmål selvfølgelig har påvirket hvordan jeg har utført min innholdsanalyse knyttet til TIMSS 1999 Video Study. Andre spørsmål ville gitt andre fokusområder og et annet blikk på dataene.

Når det gjelder konklusjoner knyttet til mitt forskningsspørsmål 2, vil jeg være svært forsiktig med å si med sikkerhet at jeg fant et svar på spørsmålet mitt. Dette er særlig vanskelig fordi jeg har så få data, så de eventuelle svarene jeg fant vil uansett ikke kunne sies å være allment gjeldende for norske elever. Så konklusjonene min ble vel mer at det ut i fra mine data kan se ut som om de elevene jeg har intervjuet og observert hadde liten erfaring med matematisk argumentasjon og bevis. De hadde derimot en del interessante refleksjoner, knyttet til at det kan være nyttig, men utfordrende, å sette ord på de matematiske resonnementene og forklaringene man har kommet frem til. Selvfølgelig kan jeg ikke si at et så lite utvalg er representativt for norske elever på videregående skole generelt, kanskje har andre elever helt andre erfaringer med resonnering og matematisk bevisføring. Så jeg er litt usikker på om jeg føler jeg har fått et godt eller utvetydig svar på dette forskningsspørsmålet, men det har iallefall ført til at jeg har begynt å stille flere spørsmål knyttet opp til matematisk resonnering og matematisk forståelse hos elever. Noen nye, spennende spørsmål som dukket opp var for eksempel: Hvordan resonnerer elever i matematikk generelt, og hvilken bevissthet har de rundt sin egen tankegang i denne prosessen? Hvor ofte forklarer egentlig norske elever hvordan de har tenkt når de jobber med matematikk? Brukes denne typen arbeidsmetoder i matematikkfaget på barneskolen? Hvor mye tid bruker man egentlig i gjennomsnitt på hvert problem i matematikkundervisningen i norsk skole? Dette var bare noen av spørsmålene som dukket opp, så den endelige konklusjonen kan kanskje sies å være at mitt arbeid med forskningsspørsmål 2 genererte flere spørsmål enn svar, men at det likevel var nyttig å jobbe med.

6.2. Pedagogiske implikasjoner

Hvis jeg ut i fra dette forskningsprosjektet skal trekke noen pedagogiske implikasjoner, vil jeg si at man i norsk skole kanskje kan ha nytte av å la elevene arbeide med færre problemer per matematikktime, og at man som lærer legger mer vekt på å utvikle gode problemløsningsoppgaver som kan tilpasses flere nivåer. I tillegg kan det virke som om det er en fordel å la elevene få øve opp sin kommunikasjon- og argumentasjonsevne knyttet til matematikkfaget, og at vi som lærere kanskje kan bli flinkere til å ikke bare fokusere på at elevene våre finner riktig svar, men at de også skjønner *hvorfor* svaret er riktig og *hvordan* man kom frem til svaret. En vektlegging av resonnering og argumentasjon i matematikkundervisningen kan i tillegg være en mulighet til å gi læreren innblikk i hvordan eleven ligger an, hva han eller hun faktisk har forstått av det man jobber med (Nagasaki & Becker, 1993). Jeg tror i tillegg at man alltid kan lære noe av å studere hvordan man underviser i andre kulturer, om ikke annet for å få et nytt perspektiv på egen undervisning (Hiebert & Stigler, 2000 s. 15).

6.3. Egne refleksjoner og erfaringer

Dette har vært en utfordrende og lærerik oppgave å jobbe med. Mine refleksjoner knyttet til gjennomføringen konkret er at jeg skulle hatt et større datagrunnlag for å besvare F2, men da måtte jeg også brukt enda mer tid på selve forskningsdelen av oppgaven min. Det viktigste jeg har lært av å skrive denne oppgaven, er å fokusere på hvordan jeg selv faktisk underviser i matematikkfaget, og hva jeg kan gjøre for å gi elevene mine mer forståelse for matematikkfaget, som igjen kanskje også kan gi dem mer motivasjon. Jeg tenkte også på min egen erfaring med matematisk bevis og resonnering, som jeg ikke hadde noe særlig bevisst forhold til før jeg begynte å studere matematikkfaget på lærerskolen. I løpet av denne mastergraden har jeg også jobbet med et arbeidshefte med problemløsningsoppgaver, der vi skulle forklare med ord hvordan vi tenkte og hva vi gjorde mens vi jobbet med hvert enkelt problem. Dette var veldig bevisstgjørende for meg og mitt arbeid i matematikkfaget, og jeg tror kanskje det var den første spiren til det som etter hvert vokste frem til å bli denne masteroppgaven. Jeg ønsker å ta med meg de elementene fra japansk matematikkundervisning som jeg har sett på som originale og viktige for japanske elevers matematikkprestasjoner, og håper at jeg får til å integrere noe av dette i min egen undervisning. Mine tanker rundt matematikkfaget per idag, som jeg ønsker å få elevene til å oppleve gjennom matmematikkundervisningen min, kan avslutningsvis oppsummeres ved hjelp av disse ordene: *«I find mathematics an infinitely complex and mysterious world; exploring it is an addiction from which I hope never to be cured»* (Davis & Hersh, 1998 s. 2).

7. Bibliografi

Alsina, C. & Nelsen, R. B. (2010). *Charming proofs: a journey into elegant mathematics*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Andersen, I. (2005). *Den skinbarlige virkelighed: om vidensproduktion inden for samfundsvidenskaberne*. Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Andrews, P. (2001). Comparing international practice in the teaching of mathematics. I P. Gates (Red.), *Issues in mathematics teaching* (s. XV, 318 s. : ill.). London: Routledge/Falmer.

Asami-Johansson, Y. (2011). *A study of a problem solving oriented lesson structure in mathematics in Japan.* Paper presentert ved the Proceedings of the seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7).

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2003). The teaching of proof. *arXiv preprint math/0305021*.

Becker, J. L. (2011). *Indføring i tekstanalyse*. Roskilde: Roskilde universitetsforlag.

Befring, E. (2009, 20.09.2013). "Kvantitativ metode". Hentet 17.04, 2014, fra http://www.etikkom.no/FBIB/Introduksjon/Metoder-og-tilnarminger/Kvantitativ-metode/

Bourbaki, N. (1994). *Elements of the History of Mathematics*. New York: Springer.

Burton, D. M. (2011a). *Elementary number theory*. New York: McGraw-Hill.

Burton, D. M. (2011b). *The history of mathematics: an introduction*. New York: McGraw-Hill.

Clements, D.H. & Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: MacMillan Publishing Co.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1998). *The mathematical experience*. Boston: Houghton Mifflin.

De Vaus, D. A. (2002). *Surveys in social research*. London: Routledge.

Dewey, J. (2005). *Demokrati og uddannelse*. Århus: Forlaget Klim.

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing, 62*(1), 107-115. doi: 10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x

Fladberg, K. L. & Wedén, A. S. (2013, 05.12). Ber foreldre stille tøffere krav, *Dagsavisen*. Hentet fra http://www.dagsavisen.no/samfunn/ber-foreldre-sti-lle-toffere-krav/

Gall, M. D., Gall, J. P. & Borg, W. R. (2007). *Educational research: an introduction*. Boston: Allyn and Bacon.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. [Oslo]: Unipub.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind: TIMSS advanced 2008 i videregående skole*. [Oslo]: Unipub.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2008). ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM, 40*(2), 329-336.

Hanna, G. & Jahnke, H.N. (2002). Another approach to proof: Arguments from physics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(1), 1-8. doi: 10.1007/BF02655687

Hiebert, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*: DIANE Publishing.

Hiebert, J. & Stigler, J. W. (1999). *The teaching gap*: New York: The Free Press.

Hiebert, J. & Stigler, J. W. . (2000). A proposal for improving classroom teaching: Lessons from the TIMSS video study. *Elementary School Journal, 101*(1), 3-20.

Imsen, G. (2005). *Elevens verden* (Vol. 4). Oslo: Universitetsforlaget.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence: an essay on the construction of formal operational structures*. London: Routledge & Kegan Paul.

Jacobs, J. K. & Morita, E. (2002). Japanese and American teachers' evaluations of videotaped mathematics lessons. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 154-175.

Jakobsen, S. E. (2002). Drømmen om pølsefabrikken. Hentet 22.04, 2014, from http://www.forskningsradet.no/prognett-bladetforskning/Nyheter/Drommen_om_polsefabrikken/1250810484128

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode*. Oslo: Abstrakt.

Kjærnsli, M. (2004). *Rett spor eller ville veier?: norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M. (2007). *Tid for tunge løft: norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå: norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M. & Roe, A. (2010). *På rett spor: norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag i PISA 2009*. Oslo: Universitetsforlaget.

Knuth, E. J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher* Washington, *95*(7), 486-491.

Krantz, S. G. (2010). *The proof is in the pudding: the changing nature of mathematical proof*. New York, N.Y.: Springer.

Kreiner, S. (2011). *Is the Foundation Under PISA Solid?: A Critical Look at the Scaling Model Underlying International Comparisons of Student Attainment*: Department of Biostatistics, University of Copenhagen.

Krippendorff, K. (1980). *Content analysis: an introduction to its methodology*. Beverly Hills, Calif.: Sage.

Kunnskapsdepartementet. (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet*. (82-486-0397-0). [Oslo]: Kunnskapsdepartementet ; Utdanningsdirektoratet Hentet fra http://www.udir.no/Lareplaner/Finn-lareplan/#matematikk.

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. . (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Lakatos, I., Worrall, J. & Zahar, E. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lewis, C. & Tsuchida, I. (1998). A lesson is like a swiftly flowing river. *American Educator, 22*(4), 12-17.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, Calif.: Sage.

Mason, M. (1998). The Van Hiele levels of geometric understanding. *Professional handbook for teachers, geometry: Explorations and applications,* Boston: McDougal Inc.

Matematikksenteret. (2007). Kompetanser og grunnleggende ferdigheter. Hentet 03.02, 2014, fra http://www.matematikksenteret.no/content/2380/Kompetanser-og-grunnleggende-ferdigheter

Matematikksenteret. (2010). Skole i Praksis - Matematikk i VGS. 2014, fra http://www.skoleipraksis.no/matematikk-i-vgs/hundrekartet/

Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum: Qualitative Social Research, 1*(2), 105-114.

Mosvold, R. (2008). Real-life connections in Japan and the Netherlands: National teaching patterns and cultural beliefs. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*(July 3).

Nagasaki, E. & Becker, J. P. (1993). Classroom Assessment in Japanese Mathematics Education. *NCIM's 1993 Yearbook Assessment in the Mathematics Classroom*, 40-53.

Kalleberg, R. (2006). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. [Oslo]: Forskningsetiske komiteer.

Niss, M. & Jensen, TH. (2002). Kompetencer og matematiklæring-ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark (rapport nr. 18–2002). *København: Undervisningsministeriets forlag. http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf*.

Nordahl, M. (2011, 18.05. 2011). Slår tilbake mot PISA-kritikk. Hentet 21.02, 2014, fra http://www.forskning.no/artikler/2011/mai/288395

Nystedt, L. (1993). *På tal om tal: en läsebok i matematik*. [Djursholm]: Instant Mathematics.

OECD. (2012a). *Lessons from PISA for Japan*: OECD Publishing.

OECD. (2012b). *Lessons from PISA for Japan,*

Strong Performers and Successful Reformers in Education,

OECD. (2014). PISA - Programme for International Student Assessment. Hentet 05.02, 2014, fra http://www.oecd.org/pisa/

Olsrud, H. G. (2009). *Bevisets plass i norske læreplaner: en historisk oversikt og drøfting av matematiske bevis i videregående skole*. Oslo: H.G. Olsrud.

Opplæringslova(1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa (opplæringslova).* Hentet fra http://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61?q=Lov+om +grunnskolen+og+den

Pallant, J. (2010). *SPSS survival manual: a step by step guide to data analysis using SPSS*. Maidenhead: McGraw-Hill.

Piaget, J. (1997). *Selected works*. London: Routledge.

Piaget, J., Vonèche, J. & Gruber, H. E. (1995). *The essential Piaget*. Northvale, N.J.: J. Aronson.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense.

Rod, P. (2008). Praksisorienteret projektarbeide. In S. Voxted (Ed.), *Valg der skaber viden - om samfundsvidenskabelige metoder* (pp. 35- 51). København: Academia.

Sanger, J. (1996). *The compleat observer?: a field research guide to observation*. London: Falmer Press.

Schumer, G. (1999). Mathematics education in Japan. *Journal of Curriculum Studies, 31* (4), 399-427.

Sekiguchi, Y. & Miyazaki, M. (2000). Argumentation and mathematical proof in Japan. *The Proof Newsletter*.

Sjøberg, S. (2005). PISA, TIMSS og norske læreplaner. *Bedre Skole, 2005*(1).

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillesdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Solvang, R. (1986). *Matematikk-didaktikk*. Rud: NKI-forlaget.

Solvang, R. (1987). *Bevismetodikk*. [Oslo]: Pedagogisk seminar i Oslo.

Stevenson, H. W. & Stigler, J. W. (1994). *The learning gap: why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education*. New York: Touchstone.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1997). Understanding and improving classroom mathematics instruction: An overview of the TIMSS video study. *Phi Delta Kappan, 79*, 14-21.

Stigler, J.W. (1999). *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Paoject on Eighth-grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States*: DIANE Publishing.

Stramel, J. K. (2010). *A naturalistic inquiry into the attitudes toward mathematics and mathematics self-efficacy beliefs of middle school students*. Manhattan, Kan.: Kansas State University.

Stylianides, A. J. (2009). Breaking the Equation. *Mathematics Teaching, 213*, 9-14.

UiO, Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. (2014a). *PISA Norge*. Hentet 05.02, 2014, fra http://www.pisa.no/index.html

UiO, Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. (2014b). http://www.uv.uio.no/ils/

TIMSS -Trends in International Mathematics and Science Study, Norge. Hentet 05.02.14, 2014, fra http://www.timss.no/

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*: Academic Press.

Voxted, S. (2006). *Valg der skaber viden: om samfundsvidenskabelige metoder*. København: Academica.

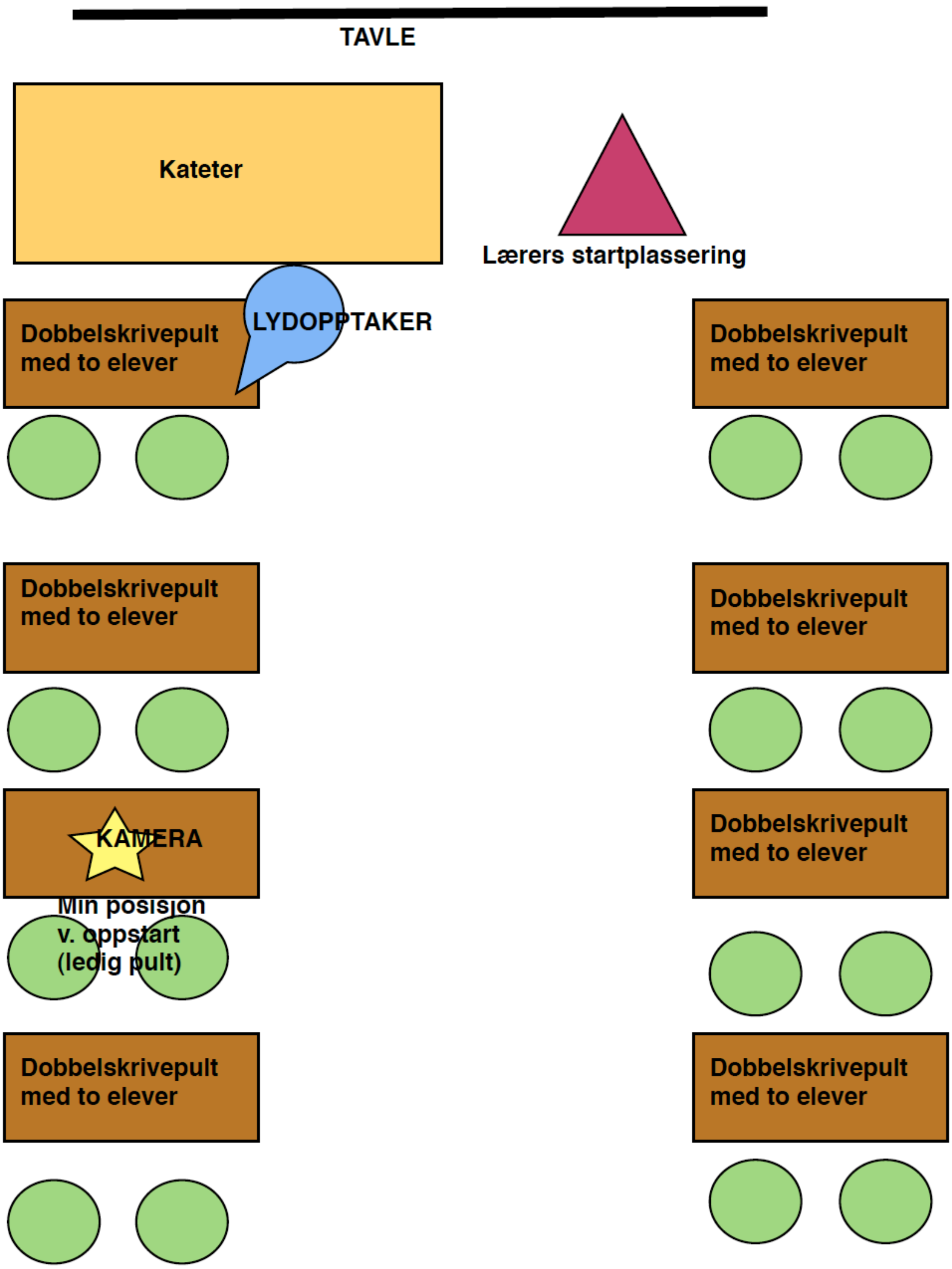
Wragg, E. C. (2012). *An introduction to classroom observation*. London: Routledge.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: design and methods*. Thousand Oaks, Calif.: Sage.

Øgrim, S. (2011). *Sigma R1: matematikk*. Oslo: Gyldendal undervisning.

8. Vedlegg

Vedlegg 1: Skisse av klasserom 1, med plassering av kamera og lydopptager



Vedlegg 2: Transkripsjonsnøkkel

Funksjon	**Tegn**	**Beskrivelse**
Overlapp	[tekst] [tekst]	Blir brukt når to personer sier noe samtidig
Overtakelse	tekst≈ ≈tekst	Indikerer når en person overtar og fortsetter å snakke uten at det er pause imellom
Pause (≥ 1 s)	(ns) der n = antall sekunder Eks. (6s)	Pauser i antall sekunder
Kort pause (≤ 1 s)	(.)	Pauser på under et sekund
Konklusjon	.	Som punktum
Spørsmål	?	Indikerer et spørsmål
Forlengelse	: eller :: for lengre	Indikerer at ordet forlenges
Lav prat	°tekst°	Indikerer at det blir snakket lavt
Ukjent tekst	(ukjent tekst)	Indikerer når det som blir sagt er helt ugjenkjennelig og blir ikke transkribert
Forsterkning	<u>tekst</u>	Indikerer at ord eller setninger blir forsterket

Vedlegg 3:

Informasjonsskriv vedrørende forskningsprosjekt i skolen

Jeg vil her informere deg om forskningsprosjektet som jeg ønsker å gjøre i klasse xxxx ved xxxx VGS. Prosjektet er en del av min masteroppgave i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger(UiS). Målet med prosjektet er å tilegne seg kunnskaper og erfaringer om læring og undervisning i matematikk. Arbeidet vil dreie seg om sammenhenger mellom arbeid med bevisføring i matematikk og forståelsen og prestasjonene elever har i matematikkfaget.

Det er derfor ønskelig at jeg får anledning til å observere klassen (2 skoletimer) og samle inn data som feltnotater, intervju og oppgaveanalyse. Det vil bli gjort video- og lydopptak fra undervisningen og intervjuene. Alle observasjoner og kommentarer fra lærer og elever vil bli behandlet konfidensielt og anonymisert slik at de ikke vil kunne spores tilbake til elevene. Gjennom hele prosessen (innsamling, bearbeidelse, analyse og presentasjon av data) vil jeg være bevisste på å anonymisere dataene. Det vil derfor ikke være mulig å vite hvem som har gjort eller sagt hva eller hvilken klasse og skole forskningen har foregått ved.

All medvirkning i dette prosjektet er basert på frivillighet, og du står selvsagt helt fritt til å velge om du vil være med eller avstå fra å delta i prosjektet eller ikke.

Observasjonene vil fortrinnsvis foregå i løpet av februar/mars, etter nærmere avtale med klassens matematikklærer. Video- og lydopptak vil bli oppbevart på en sikker måte. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning ved NSD. (NSD er Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste, som samler inn og ivaretar data for forskning. NSD har også som oppgave å passe på at alle forskningsdata er lovlig innhentet og blir behandlet korrekt. Det er et krav at alle forskningsprosjekter blir meldt inn til NSD for godkjenning. Mer informasjon om NSD finner du på deres nettside: http://www.nsd.uib.no/nsd/omnsd.html)

Alle involverte parter fra UiS er underlagt taushetsplikt, og data vil bli behandlet deretter. Alle opptak vil bli slettet/destruert når prosjektet er avsluttet. (Dato for prosjektets slutt er satt til 01. august 2014.)

Det ferdige arbeidet vil bli presentert i en skriftlig rapport som senere kan videreutvikles til en publiserbar artikkel. Nærmere informasjon om prosjektet kan fås ved henvendelse til meg på telefon 99774451 eller epost maria_stoerkson@yahoo.no. Du kan også kontakte min veileder, Arne Jakobsen på telefon 97 09 73 69. Jeg håper på positiv tilbakemelding fra deg.

Vennlig hilsen
Maria A. Størkson
Masterstudent i matematikkdidaktikk, UiS

Svarslipp:

Jeg tillater at masterstudent Maria A. Størkson fra UiS observerer (og eventuelt intervjuer) meg.

Underskrift av elev over 18 år ....

Jeg godtar også at det blir samlet inn data som beskrevet ovenfor.

Ja   Nei   (sett ring rundt valg)

Svarslipp leveres til kontktlærer innen onsdag uke 6 (05.02.14)