Universitetet i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Utdanningsvitenskap - Matematikkdidaktikk	Vårsemesteret, 2016 Åpen/ ~~konfidensiell~~
Forfatter: Ole Blomgren	Ole Blomgren (signatur forfatter)
Veileder: Reidar Mosvold	
Tittel på masteroppgaven: En kommognitiv analyse av matematikkundervisning Engelsk tittel: A commognitive analysis of the work of teaching mathematics	
Emneord: kommognisjon, aritmetikk, algebra, ledd, realiseringer, metaregler, undervisningskunnskap i matematikk (UKM), matematisk diskurs for undervisning (MDU)	Antall ord: 14810 + vedlegg/annet: Forfatterveiledning, Acta Didactica Norge Stavanger, 02.06/16 dato/år

Forord

Masteroppgaven min er skrevet i artikkelformat med en tilhørende overbygning (monografi). For å få et best mulig utbytte av studien, anbefaler jeg at artikkelen leses før monografien.

Artikkelen er skrevet slik at den tilfredsstiller kravene til publisering i mitt valgte tidsskrift som er Acta Didactica Norge, og tidsskriftets forfatterveiledning er derfor vedlagt. Jeg valgte også å følge disse retningslinjene da jeg skrev monografien. Det kan nevnes at jeg refererer til en upublisert oppgave skrevet av meg selv i studien, og jeg er klar over at dette må fjernes før en eventuell publisering i Acta Didactica Norge. UiS sine retningslinjer krever likevel at dette gjøres, og derfor er det gjort.

Takksigelser:

- Takk, førsteamanuensis Reidar Mosvold! Du har vært en særdeles dyktig, vennlig og arbeidsom veileder – og denne væremåten har gjort prosessen mot et produkt jeg er stolt av, mye enklere. Jeg er også takknemlig for at du støttet meg og viste vei da jeg valgte å skrive masteroppgaven i artikkelformat.

- Takk, kjære Aslaug! Du er den beste støtte noen kan ha, og din grundige korrekturlesing har vært til stor hjelp.

- Takk, søster Gro! Våre samtaler om matematikkundervisning er nyttige, og du har også lest korrektur.

- Takk, Hinna skole, Stavanger kommune og Utdanningsdirektoratet! «Kompetanse for kvalitet» og dens vikarordning har gjort det mulig for meg å studere i voksen alder.

- Takk, Anna Sfard! Det tok tid å trenge inn i rammeverket ditt, men da jeg evnet det, fikk jeg nye tanker om undervisning og læring.

Ole Blomgren

Juni 2016

Sammendrag

Studien (artikkel og monografi) har satt søkelyset på den krevende overgangen mellom aritmetikk og algebra. Internasjonale studier viser at norske ungdommers prestasjoner i algebra er svake, og studien har indikert årsaker til dette. Målet har vært å gjøre en matematikklærers undervisningsoppgaver synlige og vise hvordan de leder elever nærmere en historisk etablert diskurs.

En 8. klasse skal møte algebra som et selvstendig tema for første gang, og klassens lærer bruker en «utvidet aritmetisk diskurs» for å lede elevene inn i den algebraiske diskursen. En kommognitiv analyse av denne diskursen indikerte at det matematiske objektet «ledd» er spesielt sentralt i denne overgangen, og artikkelen har vist hvilke metaregler som styrer hvordan læreren realiserer ledd i diskursen. I monografien ble det diskursive rammeverket «Matematisk diskurs for undervisning» brukt til å studere hvordan lærerens ulike undervisningsoppgaver henger sammen med elevenes læring. Forskningsspørsmål for hele denne masterstudien ble derfor definert som følger: Hvordan påvirker en lærers kommunikative aktiviteter elevers læring?

Artikkelens kommognitive analyse har indikert at metareglene som styrer hvordan deltakere realiserer objektet ledd i en utvidet aritmetisk diskurs, er komplekse og at elevers regler må videreutvikles. Siden algebra kan ses på som diskursen om aritmetikk (meta-aritmetikk), kan dette være med på å forklare hvorfor norske ungdommers algebraiske diskurs kan beskrives som «ritualisert».

Monografien har beskrevet hvordan lærerens undervisningshandlinger henger sammen med elevenes læring. Analysen indikerte at lærerens kommunikasjon og interaksjon i klasserommet er sammensatt og at matematikklærere må være sentrale deltakere i flere diskurser for å lede elever til en mønstergyldig diskurs.

Innholdsfortegnelse

Vedlegg 1: Artikkel, «Ulike realiseringer av ledd i overgangen mellom aritmetikk og algebra»

Vedlegg 2: Forfatterveiledning, Acta Didactica Norge

EN KOMMOGNITIV ANALYSE AV MATEMATIKKUNDERVISNING

Innledning

> Resultatet for de norske elevene på området Algebra utmerker seg internasjonalt som spesielt svakt. Av de landene som deltok på 8. trinn i 2011 [TIMSS], var det bare typiske utviklingsland, med en helt annen ressurssituasjon enn Norge, som lå på eller i underkant av det norske nivået på dette emneområdet (Grønmo et al., 2012, s. 25).

Det er skolens lærere og deres undervisning som legger grunnlaget for elevers prestasjoner i matematikk, og de siste tiårene har forskere forsøkt å beskrive hva som kjennetegner god undervisning i faget. Ball, Thames og Phelps (2008) beskriver matematisk og fagdidaktisk kunnskap som er nødvendig for å utføre undervisningsarbeid i sin teori om «Mathematical knowledge for teaching» (MKT) (på norsk: Undervisningskunnskap i matematikk (UKM)), og studier viser at det er en sammenheng mellom UKM og kvaliteten på en lærers undervisning (Hill, Umland, Litke, & Kapitula, 2012). UKM er et kognitivt rammeverk, men flere har vist at det er mulig å bruke diskursive perspektiver når en studerer matematikklæreres profesjonskunnskap (e.g., Adler & Ronda, 2014; Barwell, 2013; Cooper, 2014, 2016; Mosvold, 2015, 2016; Venkat & Adler, 2012). Adler og Ronda (2014) og Venkat og Adler (2012) bruker diskursive perspektiver til å undersøke undervisning («the work of teaching mathematics»), og disse studiene foreslår et rammeverk som legger vekt på hvordan lærere kommuniserer i en klasseromskontekst. Ifølge Mosvold (2016) har forskere rettet lite oppmerksomhet mot matematikklæreres undervisningsoppgaver («tasks of teaching»), og han viser hvordan Sfards kommognitive teori kan brukes til å informere UKM. Mosvold forsøker ikke å erstatte UKM med diskursive teorier, men viser hvordan Sfards rammeverk kan finne informasjon om undervisningsoppgaver ved å studere observerbare diskursive handlinger. Undervisningsoppgavene er viktigere enn noe annet når en studerer undervisning i matematikk, ifølge Mosvold.

I denne monografien skal jeg utvide og utvikle temaet i artikkelen "Ulike realiseringer av ledd i overgangen fra aritmetikk til algebra" (Blomgren, 2016), og et bredere teoretisk perspektiv vil gi en videre diskusjon. Jeg skal undersøke *undervisningsoppgavene* til læreren vi møter i artikkelen ved å studere *undervisningen* hennes i et kommognitivt perspektiv. For å identifisere hvilke diskurser klassens lærer er i når hun kommuniserer ledds ulike realiseringer, brukes derfor «Matematisk diskurs for undervisning» (MDU) («Mathematical discourse for teaching» (MDT), min oversettelse). Dette rammeverket er en diskursiv versjon av UKM, og denne vinklingen ble først foreslått av Cooper (2014). Modellen ble senere utviklet videre av Mosvold (2015).

Hoover, Mosvold, Ball og Lai (2016) viser i en stor studie hva som er kjent og hva som må undersøkes for å bringe forskning på sammenhengen mellom matematisk kunnskap og undervisning videre. Ett av perspektivene som blir trukket frem i denne artikkelen, er hvilke forskningsspørsmål som er blitt studert for å undersøke den kunnskapen som er spesifikt knyttet til matematikkundervisningen. Ved å undersøke 190 engelskspråklige publikasjoner som de mener representerer feltets forskning mellom 2006 og 2013, presenterer de en oversikt som viser hvilke forskningsspørsmål som er blitt undersøkt og hvilke som enda ikke er blitt besvart. Denne oversikten viser at det finnes forskning som indikerer at det er en sammenheng mellom spesialisert lærerkunnskap og elevers prestasjoner («Does SM [specialized mathematics] contribute to student learning»), men at de ikke finner studier som forsøker å beskrive hvordan læreres spesialiserte matematiske kunnskap påvirker elevers læring i det undersøkte materialet («What does SM [specialized mathematics] contribute to student learning?»). MDU-perspektivet i denne monografien får frem hvordan lærerens ulike undervisningsdiskurser kommuniserer undervisningsoppgavene hennes og hvordan dette endrer måten elever prater om matematikk (elevers diskurs) – og derfor *hvordan læring skjer*.

I artikkelen viser jeg hvordan Anna Sfards kommognitive teori kan brukes til å gi informasjon om overgangen mellom aritmetikk og algebra, en «utvidet aritmetisk diskurs». Analysen indikerer at det matematiske objektet «ledd» er sentralt i denne diskursen og at metareglene som styrer hvordan deltakere bestemmer hvordan et ledd kan realiseres på ulike måter, er komplekse og at elevers regler må endres. Siden algebra kan ses på som «diskursen om aritmetikk» og derfor betegnes som meta-aritmetikk, er det deltakelse i aritmetikkens diskurs som skaper mening når diskursen utvides i møtet med algebra. Artikkelen peker på at et manglende aritmetisk grunnlag kan være med på å forklare hvorfor norske ungdommers prestasjoner i algebra er svake.

Forskningsspørsmål for hele denne masterstudien er definert som følger: *Hvordan påvirker en lærers kommunikative aktiviteter elevers læring?* I artikkelen er dette fokuset spisset, og nye forskningsspørsmål er definert for å studere det matematiske objektet ledd og dets ulike realiseringer i en utvidet aritmetisk diskurs. Monografiens mål er mer overordnet, og den beskriver en lærers undervisningsdiskurs og hvordan den henger sammen med elevers læring.

Teoretisk bakgrunn

Studiens teoretiske perspektiv er kommognitivt, og i denne delen skal jeg plassere Sfards læringssyn og vise hvordan begrepet undervisning kan defineres innenfor denne teorien. Etter at dette er gjort, introduseres det nye rammeverket som brukes i monografien – Matematisk diskurs for undervisning (MDU).

Kommognisjon

Et nytt sosiokulturelt perspektiv

Det kommognitive rammeverket skiller seg fra forgjengerne behaviorisme og kognitivisme ved sitt dialogiske perspektiv, og ser på kognisjon og kommunikasjon som ulike aspekter av samme fenomen (Sfard, 2010). Sfard er spesielt inspirert av Vygotsky og Wittgensteins arbeider, og rammeverket kan derfor plasseres innenfor et sosiokulturelt perspektiv. Studert i dette perspektivet, foregår all læring i en sosial kontekst, og læring defineres som å bli medlem i et matematisk samfunn (Sfard, 2012). Ved å bruke diskurs som analyseenhet, er likevel rammeverket annerledes enn andre sosiokulturelle perspektiver. Diskursbegrepet definerer Sfard (2010) på følgende måte: «special type of communication made distinct by its repertoire of admissible actions and the way these actions are paired with re-actions» (s. 297).

I artikkelen beskriver jeg matematikkens objekter, og de blir omtalt som diskursive konstruksjoner. Siden disse objektene er skapt i diskursen og ikke eksisterer uavhengig av den, må en matematisk diskurs karakteriseres ved å peke på eksterne egenskaper. Matematikk kan derfor ses på som en diskurs med en spesiell type kommunikasjon, og denne diskursen har fire kjennetegn (Sfard, 2010, 2012): ordbruk, visuelle formidlere, narrasjoner og rutiner.

Ordbruk («word use»): Dette er diskursens nøkkelord, og de betegner som oftest mengder og former. Sju, trekant og funksjon er eksempler på slike ord. Ordene er essensielle siden de avgjør hva deltakere er i stand til å si og derfor se, i diskursen.

Visuelle formidlere («visual mediators», min oversettelse): Siden matematikkens objekter ikke eksisterer uavhengig av diskursen, brukes symbolske artefakter som er laget spesielt for å kunne kommunisere i diskursen. Tall, algebraiske symboler og grafer er eksempler på visuelle formidlere.

Narrasjoner («narrative», min oversettelse): I artikkelen blir dette beskrevet som «skriftlige og/eller muntlige beskrivelser av objekter, relasjoner mellom objekter og aktiviteter av og med objekter». Narrasjoner kan være sanne (godkjente av det matematiske samfunnet) og usanne, og teoremer, definisjoner og regneregler er eksempler på sanne narrasjoner.

Rutiner («routines»): Metareglene som styrer hvordan diskursive mønstre repeterer seg selv i visse situasjoner, kalles for rutiner. Å vite hvordan en algoritme fungerer og når den kan brukes, er eksempler på dette.

Mens kognitivismen ser på utvikling som en indre endring i individet, er utvikling sett på som modifisering av aktivitet i det kommognitive rammeverket – og altså en endring i diskurs (Sfard, 2010, 2012). Begrepet brukes både for å beskrive historiske og enkeltpersoners (ontogenetiske) endringer. Enkeltpersoners utvikling som er det Sfard omtaler som læring, er sett på som reproduktiv, og dens mål er at elevers diskurs skal komme nærmere historisk etablerte former for diskurs. Historisk utvikling er også definert som et produkt av kollektive menneskelige handlinger, men brukes av Sfard for å beskrive hvordan nye diskurser blir til (produktiv eller kreativ). Endring i både enkeltpersoners og matematikkhistoriens diskurs kommer til syne ved en økning i kommunikasjonens kompleksitet.

Sfard (2012) har et positivt elevsyn, og hun beskriver det selv som følger:

> … while speaking about the development of the child's mathematical discourse rather than about the development of the child herself, one does not make any claims on the child as such and does not, automatically, pass any judgement on her «general abilities». If such judgement is ever to be made, it has to take into account the history of the collective efforts that led to the emergence of the child's discourse (s. 2 og 3).

Undervisning

«What does it take to turn outsiders to a discourse into insiders?» (Sfard, 2010, s. 282). Sfard (2010) svarer på dette spørsmålet ved å introdusere det hun kaller for *læring- og undervisningsenighet* («learning-teaching agreement»), og hun definerer denne som følger:

> situation that arises when the discursants are unanimous, if only tacitly, about at least three basic aspects of the communicational process: about which is the leading discourse, about the discursants' own respective roles as those who learn or those who teach, and about the nature of the expected change (s. 299).

Tre aspekter trekkes frem i denne definisjonen: enighet om hvilken diskurs som er ledende, enighet om diskursens rollefordeling og enighet om måten diskursive endringer skjer på (Sfard, 2010).

Enighet om hvilken diskurs som er ledende: Effektiv kommunikasjon krever at deltakere følger samme diskursive regler og altså er enige om hvilken diskurs som er ledende. En kommognitiv konflikt kan for eksempel ikke løses dersom de involverte er uenige om hvilken diskursiv modell som skal følges. I tillegg må diskursens lederskap avgjøres, og når ledere er valgt, må de andre deltakerne ønske å bli en del av deres diskurs.

Enighet om diskursens rollefordeling: Diskursens leder(e) må være villig(e) til å opptre som lærer(e), og de andre deltakerne må innta rollen som elever. Ledere må følge ansvar for endringer i nykommeres diskurs, og nykommere må vise vilje til å utforske diskursens indre logikk.

Enighet om måten diskursive endringer skjer på: Læringsprosessen tar tid, og Sfard (2010) bruker ordkonstruksjonene *diskurs-for-andre* («discourse-for-others») og *diskurs-for-seg selv* («discourse-for-oneself») for å få frem dette (s. 285). I starten vil nykommere oppleve at diskursens kommunikasjon ikke helt gir mening (diskurs-for-andre), og støtte fra diskursens erfarne deltakere er nødvendig. Målet med læring er at diskursen blir ens egen, og dette skjer når deltakernes kommunikasjon brukes til å løse egne problemer.

Selv om prosessen «læring- og undervisningsenighet» beskriver forutsetningene for læring og slik omtaler *undervisning,* definerer ikke Sfard dette begrepet eksplisitt. Derfor har Tabach og Nachlieli (2016) ved å ta utgangspunkt i denne prosessen, laget følgende definisjon av undervisningsbegrepet:

> «… teaching can be defined as the communicational activity the motive of which is to bring the learners' discourse closer to a canonic discourse» (s. 303).

Undervisning studert i et kommognitivt perspektiv, kan altså defineres som *de kommunikative aktivitetene som har som mål å lede elevers diskurs nærmere en diskurs der mønster er gyldige.*

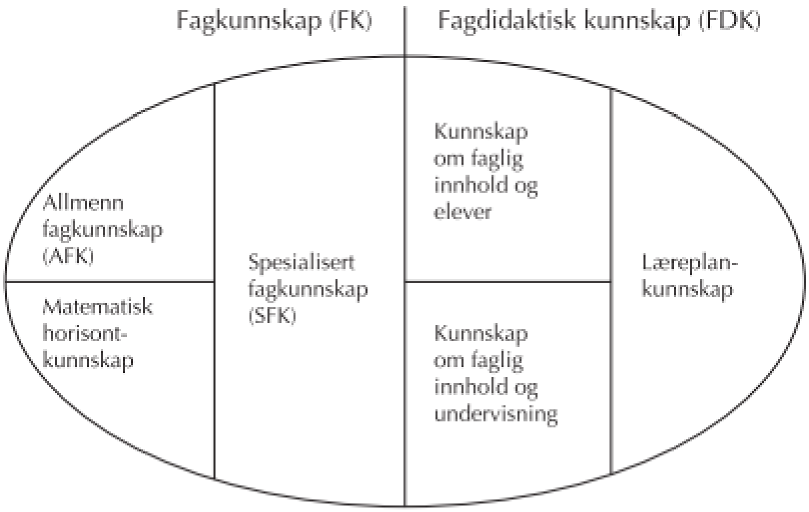
Matematisk diskurs for undervisning (MDU)

Matematisk diskurs for undervisning (MDU) er en diskursiv utgave av Undervisningskunnskap i matematikk (UKM). Jeg presenterer derfor først UKM, og viser etterpå hvordan MDU knytter UKM og det kommognitive perspektivet sammen.

Undervisningskunnskap i matematikk (UKM)

Tidligere var det vanlig å tro at dersom lærere bare kunne nok matematikk selv, ville undervisningen deres bli god (Fauskanger, Bjuland, & Mosvold, 2010). Shulman (1986) og hans studier på 80-tallet rettet fokus mot hvilke kunnskaper en lærer trenger for å undervise effektivt, og han skilte mellom fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap. Slik fikk han frem at fagkunnskap alene ikke automatisk gir bedre undervisning, og brakte inn et nytt perspektiv i utdanningsforskningen. Ball et al. (2008) bygget på Shulmans studier, og utviklet en modell som presenterer matematikklæreres profesjonskunnskap, «Mathematical knowledge for teaching» (MKT). «By "mathematical knowledge for teaching", we mean the mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics» (Ball et al., 2008, s. 395). Modellen som på norsk kalles Undervisningskunnskap i matematikk (UKM), identifiserer og spesifiserer de ulike formene for kunnskap matematikklærere trenger for å undervise i faget (figur 1).

Figur 1: Undervisningskunnskap i matematikk (UKM) (Fauskanger et al., 2010, s. 105)



UKM retter fokus mot undervisning («the work of teaching») og ikke den enkelte lærer. Den beskriver undervisningsoppgaver («tasks involved in teaching») og de tilhørende matematiske kravene. «By "teaching" we mean everything that teachers must do to support the learning of their students» (Ball et al., 2008, s. 395). Tidligere i monografien ble det kommognitive undervisningssynet definert som *de kommunikative aktivitetene som har som mål å lede elevers diskurs nærmere en diskurs der mønster er gyldige*. Disse definisjonene viser at de to perspektivene kan sies å ha et samsvarende syn på undervisning til tross for ulikt teoretisk ståsted.

Allmenn fagkunnskap beskriver kunnskap og ferdigheter som ikke er unike for undervisning og som brukes i andre yrker og profesjoner i tillegg. En matematikklærer i ungdomsskolen må være i stand til å forenkle algebrauttrykk, og denne kunnskapen må også blant annet ingeniører ha.

Spesialisert fagkunnskap er matematisk kunnskap og ferdigheter som er unike for undervisning. «Teaching requires knowledge beyond that being taught to students» (Ball et al., 2008, s. 400). En matematikklærer må for eksempel være i stand til å representere matematiske ideer, forklare regler og begrunne hvorfor en prosedyre er gal.

Matematisk horisontkunnskap får frem at matematiske emner bygger på hverandre og henger sammen. Å vite at aritmetiske ferdigheter danner grunnlaget for algebraisk forståelse, er et eksempel på dette.

Kunnskap om faglig innhold og elever viser at en matematikklærer må ha kunnskap om både elever og matematikk. En lærer må blant annet være i stand til å forutse hva elever vil tenke og hva de vil finne forvirrende, hvilke eksempler som er motiverende og hvilke oppgaver som er lette eller vanskelige.

Kunnskap om faglig innhold og undervisning kombinerer kunnskap om matematikk med kunnskap om undervisning. Et fagstoff kan presenteres på ulike måter, og en matematikklærer må kjenne fordeler og ulemper ved valgt tilnærmingsmåte.

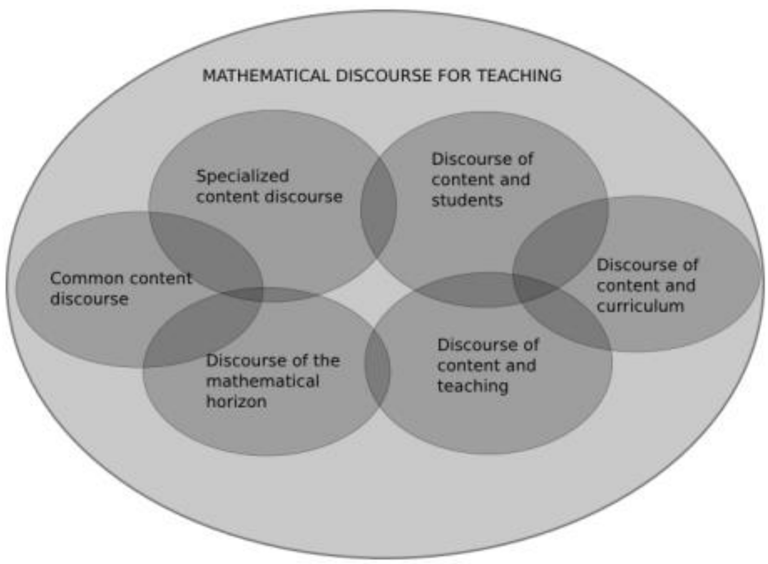
Kunnskap om læreplan og pensum sier at matematikklærere må vite hvilke emner som hører hjemme på ulike klassetrinn.

Matematisk diskurs for undervisning (MDU)
«Kunnskap» er et problematisk begrep i lys av Sfards teori, og Cooper (2014) har vist hvordan UKM kan bygges inn i det kommognitive rammeverket og slik gjøres diskursivt. Dette rammeverket kaller han for *Matematisk diskurs for undervisning (MDU)* («Mathematical discourse for teaching» (MDT), min oversettelse). Ved å studere en diskurs, kan en finne ny informasjon om hvordan en fagdidaktisk diskurs bringer en innholdsdiskurs og en undervisningsdiskurs sammen, en utfordring som ble trukket fram av Ball et al. i deres MKT-rammeverk (med bruk av kognitive begreper). «Thus, each of the MKT categories of knowledge may be redefined as a discourse, calling their union Mathematical Discourse for Teaching (MDT)» (Cooper, 2014, s. 338).

Mosvold (2015) bygget videre på Coopers idé, og han foreslo en modell der UKMs undergrupper er gjort diskursive – og derfor synlige (figur 2). Denne dynamiske modellen får frem at lærere drar veksler på erfaringer fra flere ulike diskurser når de underviser og at en lærers MDU kan forbedres ved at læreren blir en sentral deltaker i de ulike diskursene som er knyttet til undervisning i matematikk.

> With a discursive definition, a view of MKT – and knowledge in general – as some kind of object or hidden entity can be avoided. Discourse for teaching is not a latent or hidden trait, but something researchers can investigate and analyze more directly (Mosvold, 2015, s. 3085).

Figur 2: Matematisk diskurs for undervisning (Mosvold, 2015, s. 3081)



Mosvolds diskursive undergrupper har jeg oversatt til norsk i en tidligere intern publikasjon (Blomgren, 2015):

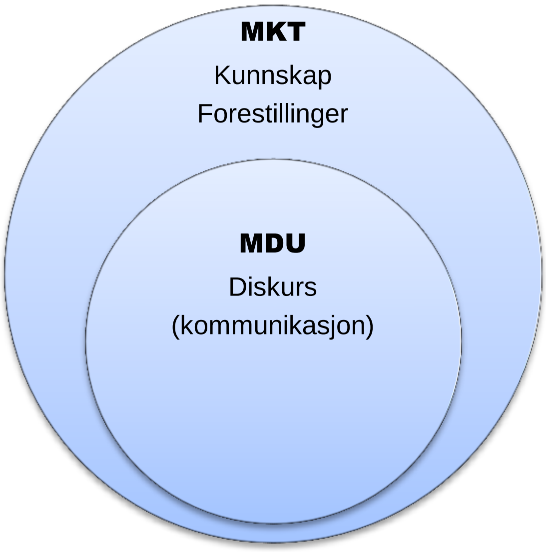
- Spesialisert innholdsdiskurs
- Allmenn innholdsdiskurs
- Matematisk horisontdiskurs
- Innhold- og elevdiskurs
- Innhold- og undervisningsdiskurs
- Læreplan- og pensumdiskurs

Disse diskursene er paralleller til UKMs kognitive grupper, og derfor er det ikke behov for å definere innholdet i de forskjellige diskursene siden dette allerede er gjort av Ball et al. Min tolkning er at diskursene ønsker å beskrive det samme som UKM-modellens forløpere, men en viktig ting er likevel annerledes. MDU-diskursene rommer kun det som kan observeres, og forholder seg ikke til kognitive konstruksjoner som «kunnskap» og «forestillinger».

Figur 3 får frem at UKM-rammeverket har som mål å beskrive både kunnskap, forestillinger og kommunikasjon og at MDU-rammeverkets diskursanalyser kan informere UKM. Dette siste synet tar utgangspunkt i Mosvolds (2016) idé om å bruke kommognisjon til å informere UKM. Mosvold viser at observerbare handlinger i diskursen kan identifisere undervingsoppgaver («tasks of teaching») og gjøre dem synlige. Ideen min er at MDU-diskursene kan informere UKM-kategoriene og gjøre dem klarere. Ved å studere en lærers undervisningsdiskurs, er det mulig å beskrive lærerens ulike kommunikative aktiviteter og hvordan de leder elever nærmere en mønstergyldig diskurs. En slik artikulering gjør det derfor mulig å identifisere hva som kreves for å undervise i matematikk og hvordan de ulike undervisningsoppgavene er knyttet opp mot elevers læring. Dette synet samsvarer også med Sfards (2012) egne tanker om å bruke det kommognitive rammeverket og dens studier av diskurs som en brobygger mellom de ulike læringsteoriene:

> … researchers need to build on each other’s work; to be able to do so, they have to communicate with one another; and in order to communicate, they need a common discourse, one which cognitive and affective, as well as intra-personal and inter-personal (or individual and social) aspects of teaching-learning processes would all be seen as members of the same ontological category (s. 1).

Figur 3: MDU informerer UKM



Metode

Masterstudien min består av to skriftlige produkter, artikkel og en tilhørende monografi, og begge er basert på det samme datamaterialet. Artikkelen ble skrevet først, og den retter fokus mot overgangen mellom aritmetikk og algebra ved å studere hvordan det matematiske objektet ledd realiseres i en utvidet aritmetisk diskurs. I monografien heves blikket, og studiens kommognitive perspektiv utvides. Artikkelens datamateriale ble nå analysert på nytt ved å bruke det diskursive rammeverket Matematisk diskurs for undervisning (MDU). Slik ble det mulig å beskrive lærerens undervingsoppgaver og hvordan dette endrer måten elever prater om matematikk (læring).

Artikkelens metodekapittel beskriver studiens analysearbeid grundig, mens studiens design og gjennomføring presenteres kort. Disse siste momentene blir derfor utdypet i denne delen. Begrepene reliabilitet og validitet brukes i tillegg for å drøfte studiens troverdighet, og jeg vurderer til slutt etiske utfordringer knyttet til forskediskursen min.

Studien er designet som en instrumentell case-studie, og en ungdomsskoleklasse og deres diskurs blir studert. «In what we may call instrumental case study, a particular case is examined to provide insights into an issue or refinement of theory» (Stake, 1994, s. 237). Skoleklassen og læreren deres er altså av sekundær interesse. De er valgt ut siden de kan gi informasjon om en utvidet aritmetisk diskurs. Både artikkelens og monografiens analyser er basert på Sfards (2010) kommognitive rammeverk. Det betyr at diskurser er studiens objekt og at læring er sett på som endring i diskurs. «… the methods of instrumental case study draw the researcher toward illustrating how the concerns of researcher and theorists are manifest in the case» (Stake, 1994, s. 243).

Ifølge Stake (1994) er ikke er en case-studie et metodisk valg, og både kvantitative og kvalitative undersøkelser kan være case-studier siden begge kan rette undersøkelsene sine mot individuelle objekter. Denne undersøkelsen er likevel kvalitativ. Det betyr at målet med studien er å oppnå en forståelse av en utvidet aritmetisk diskurs ved å studere et sosialt fenomen (Thagaard, 2013). Observasjon av en klassediskurs gir informasjon om elevers og lærers atferd og hvordan de samhandler med hverandre. Fordelen med denne tilnærmingen er at det er mulig å studere et fenomen som det er vanskelig å få tilgang til ved å bruke andre metoder (Silverman, 2011).

Analysens data ble samlet inn som en del av et forskningsprosjekt på masterstudiet i matematikkdidaktikk på UiS våren 2015, et prosjekt jeg deltok i som forsker. I dette prosjektet ble en 8. klasse fra Sør-Vestlandet og deres første møte med algebra som et selvstendig tema filmet over en periode på to uker. Klassen består av 20 elever, og de blir undervist av en kvinnelig lærer som har fordypning i matematikkdidaktikk på masternivå. For å dokumentere undervisningen, var det satt opp to kameraer i klasserommet. Det ene kameraet sto bak i klasserommet, og filmet læreren og tavla ved felles gjennomgang av fagstoff. Kamera nummer to var plassert foran i klasserommet, og det filmet elevene under samme aktivitet. Klassens lærer var i tillegg utstyrt med en lydopptaker for å sikre at hennes ytringer kom tydelig frem. Prosjektet fulgte spesielt to elevgrupper som henholdsvis besto av to jenter og tre gutter, og disse gruppene ble filmet da elevene arbeidet med individuelle oppgaver. Intervju med disse to gruppene og klassens lærer ble også filmet mot slutten av prosjektet. Hovedspørsmålene i disse intervjuene var bestemt på forhånd, men de to intervjuerne hadde anledning til å stille oppfølgingsspørsmål der det var naturlig. Intervjuene var altså semistrukturerte (Kvale & Brinkmann, 2009).

Etter at datainnsamlingen var ferdig, ble alle film- og lydopptak transkribert. Hovedfokuset i dette arbeidet var å dokumentere deltakernes ytringer, men noen andre former for kommunikasjon ble også skrevet ned. Det kan nevnes at transkripsjonsarbeidet avslørte at det var utfordrende å dokumentere elevdialogene i de to gruppene som ble filmet i timenes arbeidsøkter. Elevene pratet lite og lavt siden de virket å være påvirket av filmkameraenes tilstedeværelse, og kameraenes mikrofoner evnet ikke å gjøre dialogene deres tydelige.

Analysearbeidet mitt som er beskrevet detaljert i artikkelen, avslørte at den ene undervisningsøkta var annerledes enn de andre øktene. I denne timen kommuniserte nemlig læreren metareglene som avgjør hvordan hun realiserer det matematiske objektet ledd i aritmetiske regneuttrykk eksplisitt. Dette er regler som oftest er uuttalte (Sfard, 2010), og derfor skilte denne undervisningsøkta seg ut sammenlignet med de andre dokumenterte øktene. Analysene av denne øktas kommunikasjon viste også at elevers metaregler var annerledes enn lærerens. En utvidet aritmetisk diskurs kom til syne i denne ene timen, og gjorde det mulig å finne informasjon om overgangen mellom aritmetisk og algebraisk diskurs.

Som tidligere nevnt, deltok jeg i forskningsprosjektet der artikkelens og monografiens data er hentet fra, men det kan nevnes at jeg ikke var til stede i den undervisningsøkta som er brukt som analysenes grunnlag. Analysene mine er gjort ved å studere timens filmopptak og den tilhørende transkripsjonen.

Begrepene *reliabilitet* og *validitet* og deres beskrivelser av forskningskvalitet har ledet meg gjennom forskningsprosessen (Thagaard, 2013; Johannessen, Christoffersen, & Tufte, 2010). Dette er gjort for å sikre at min kvalitative studie som ikke kan etterprøves slik som muligheten hadde vært ved et kvantitativt valg, fremstår troverdig. Reliabilitet beskriver hvor *pålitelig* forskningen er, og studiens forskningsstrategi og analysemetoder er derfor beskrevet slik at leseren selv kan vurdere prosessen. Jeg skiller også mellom hva som er data fra innsamlingen og hva som er egne tolkninger av dette. Validitet uttrykker forskningens *gyldighet*. Tolkninger som presenteres, er derfor begrunnet med utgangspunkt i studiens data for å vise at de representerer den virkeligheten som er blitt studert. Jeg er klar over at dataenes mønstre ikke kan brukes til å overføre studiens forståelse til andre situasjoner siden studien er kvalitativ, og det kommer frem at det er fortolkningene mine som peker ut over det analyserte datamaterialet.

Som nevnt i artikkelen, har jeg flere års erfaring som matematikklærer i barne- og ungdomsskolen, og har over tid vært spesielt opptatt av overgangen mellom aritmetikk og algebra. Jeg har klare tanker om hvordan undervisning kan lede elever gjennom denne prosessen, og i starten av analysearbeidet preget denne forforståelsen arbeidet mitt. Jeg så etter undervisningsmønstre som *jeg* mener er sentrale istedenfor å forholde meg til *lærerens valg*, og disse analysene er derfor ikke en del av studien. Selv om bakgrunnen min alltid vil påvirke forskerdiskursen min (Sfard, 2010), tar de endelige analysene utgangspunkt i lærerens perspektiv. Eksempler fra transkripsjonen som viser *hva læreren sa og gjorde i diskursen*, gis derfor stor plass i studien, og teksten tydeliggjør *hvordan jeg tolker dette* ved å bruke annen forskning og teoretiske perspektiver. Å fremstille tolkningen sin som om den var deltakernes forståelse av situasjonen, kan oppleves som et overgrep ifølge Kvale og Brinkmann (2009).

Resultater og diskusjon

I denne delen av monografien gjør jeg en meta-analyse av datamaterialet som ble analysert i artikkelen. Artikkelen retter fokus mot overgangen mellom aritmetikk og algebra, og viser hvordan læreren realiserer det matematiske objektet ledd i en utvidet aritmetisk diskurs. Analysen går nå et skritt videre, og beskriver lærerens undervisningsoppgaver ved å studere de ulike undervisningsdiskursene (MDU) som er synlige i det samme datamaterialet. Matematisk innholdsdiskurs og fagdidaktisk innholdsdiskurs brukes som overskrifter i analysen, og de er paralleller til UKM-begrepene «fagkunnskap» og «fagdidaktisk kunnskap» (Fauskanger et al., 2010).

Matematisk innholdsdiskurs

Artikkelens analyse viser at læreren har skrevet regneuttrykk på tavla for å løse oppgaver slik teksten deres ber om. Selv om løsninger formulert som regneuttrykk ikke er vanlig i en aritmetisk diskurs, kunne dette også blitt utført av en som ikke tilhører matematikklærerprofesjonen. Klassens lærer kan derfor sies å være i en allmenn innholdsdiskurs når hun løser oppgavene. Hun realiserer objektet ledd på flere måter, og *handler* basert på metaregler siden oppgavene krever dette. I denne diskursen kommuniserer hun løsningene, og kommuniserer ikke bevisst til elevene hvordan hun handler basert på metaregler.

Deltakere i en diskurs vil som oftest ikke formulere metaregler, og Sfard (2010) omtaler derfor reglene som uuttalte («tacitness»). Samtidig skriver Sfard at mennesker er i stand til å reflektere over egne handlinger og at matematikere bruker slike mønstre til å danne nye matematiske objekter. Artikkelens analyse viser hvordan læreren bevisst *kommuniserer* metareglene som styrer hvordan hun realiserer objektet ledd på ulike måter i regneuttrykk, og artikkelen beskriver disse metareglene. Læreren kommuniserer altså regler som er tause i en allmenn innholdsdiskurs, og det viser deltakelse i en spesialisert innholdsdiskurs.

Artikkelens analyse peker også på at kommognitive konflikter kommer til syne i diskursen. Disse konfliktene oppsto siden elever handlet basert på andre metaregler enn dem som er gjeldende i den nye diskursen, og de fant en løsning da elevene aksepterte lærerens måte å kommunisere tenkning på. Læreren er i en spesialisert innholdsdiskurs når hun oppdager disse konfliktene og når konfliktene finner en løsning.

> … the participationist vision of human development implies that any substantial change in individual discourse, one that involves a modification in metarules or introduction of whole new mathematical objects, must be mediated by experienced interlocutors» (Sfard, 2010, s. 254).

Ifølge Sfard (2010) kan algebra beskrives som meta-aritmetikk, og den aritmetiske diskursen er derfor forløperen til den algebraiske (diskurs om diskurs). Ved å introdusere en utvidet aritmetisk diskurs til elevene (figur 1 i artikkelen), viser handlingene til klassens lærer at hun er i en matematisk horisontdiskurs. Læreren er selv deltaker både i den aritmetiske og den algebraiske diskursen, og hun vet at det er aritmetikkens prosesser som skaper mening når elevene møter den algebraiske diskursen. Den utvidede diskursen kommuniserer at den algebraiske diskursen vokser frem fra aritmetikkens diskurs (Sfard, 2012).

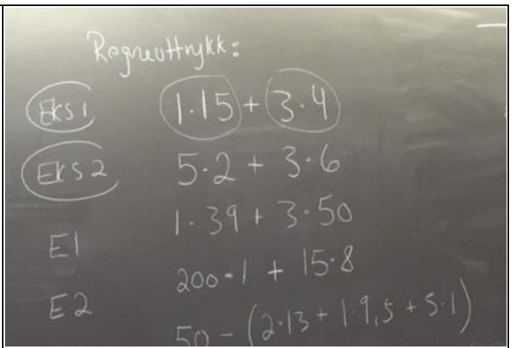
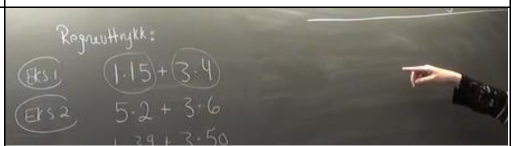
Fagdidaktisk innholdsdiskurs

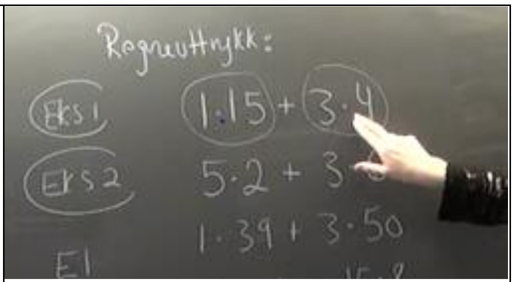
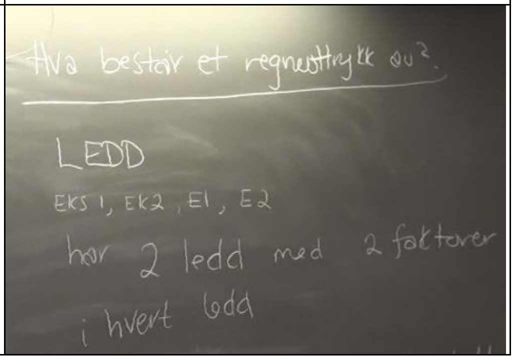
Matematikkens objekter er abstrakte diskursive konstruksjoner. De finnes ikke i fysisk utgave, og kan kun bli realisert (Sfard, 2010). Objektene kan sies å være skapt for kommunikasjonens skyld. Dette er en utfordring for elevene, og klassens lærer viser at hun er i en innhold- og elevdiskurs når hun realiserer signifikansen ledd ved å bruke ulike kommunikasjonsformer. Læreren realiserer ledd ved å beskrive dem med ord både skriftlig og muntlig, skrive regneuttrykk på tavla og ved å tegne ring rundt og peke på ledd i disse uttrykkene (figur 8 i artikkelen). Min tolkning er at hun vet at objektet ledd er konstruert i diskursen og at det kun kan realiseres ved å bruke ulike kommunikasjonsformer som elevenes sanser kan oppleve. Det kan nevnes at elevene ikke skal være i stand til å beskrive metareglene som styrer handlingene deres, men å handle basert på dem.

I artikkelen blir klassens utvidede aritmetiske diskurs sett på som horisontal læring på metanivå, og analysert i dette perspektivet krever deltakelse i den nye diskursen at metaregler endres. Denne formen for læring vil sjelden deltakere evne alene. Den skjer gjennom interaksjon med andre som allerede er deltakere i den aktuelle diskursen, og ifølge Sfard (2010) er kommognitive konflikter kilden til denne formen for læring. Uten andre personers eksempler har nemlig en elev ikke motiv til å endre diskursive handlinger. «From their point of view, the discourse in which they are fluent does not seem to have any particular weakness as a tool for making sense of the world around them» (Sfard, 2010, s. 257). Læreren er derfor i en innhold- og elevdiskurs når hun samhandler med elevene. «Let the use *teach* you the meaning» (Sfard, 2010, s. 191). Hun kommuniserer andre metaregler enn dem elever handler basert på, og kommognitive konflikter gir læring. Artikkelens analyse peker på at to slike konflikter var synlige i diskursen.

Fordelen med matematisk notasjon er at diskursive regelmessigheter blir synlige mønstre, og denne notasjonsformen kjennetegner skolens diskurs (Sfard, 2010). Skrivemåten er arbeidsbesparende siden symbolske diskursive konstruksjoner både beskriver en prosess og prosessens produkt, noe eksempelet $3 \cdot 4$ illustrerer. Ifølge Sfard (2010) skaper denne prosess-objekt-dobbeltheten utfordringer i elevers diskurs: «… the notion of process that also serves as its own product sounds as implausible as the idea of eating the recipe for a cake instead of the cake itself» (s. 183). Klassens lærer viser derfor at hun er i en innhold- og elevdiskurs når hun gjennomgår regneuttrykk der objektet ledd er realisert som sammensatte uttrykk. Min tolkning er at læreren ønsker å vise elevene at det som ser ut som en beskrivelse av handlinger, må ses på som resultatet av denne handlingen. I den grunnleggende aritmetiske diskursen kjenner elevene ledd realisert som enslige tall (hele tall og desimaltall), og læreren synliggjør nå at det finnes andre realiseringer, nemlig sammensatte uttrykk. Møtet med den algebraiske diskursen krever at elevene behandler regneoperasjoner som handlingens resultat, noe det algebraiske uttrykket a · b eksemplifiserer, og tolkningen min er at læreren bruker en utvidet aritmetisk diskurs til å lede elevene inn i den algebraiske diskursen.

Elevene i klassen opplever diskursen gjennom lærerens objektiverte bruk av ord og symboler (Sfard, 2010). Siden fortrolighet med diskursens innhold både er et resultat av og en forutsetning for deltakelse, er det utfordrende for elevene å bli en del av matematikkens selvskapende system. Sekvensen nedenfor viser hvordan læreren underviser når hun skal kommunisere hva et ledd er, og hun bruker en strategi som også Sfard (2010) beskriver: “Their [young learners] unwritten aim will be to connect the new with the old – to find a way to realize the novel signifiers in possibly unusual combinations of discursive constructs with which they are already familiar” (s. 177).

135. *Lærer*: Husker dere hva jeg kaller de? De er vel det første vi skrev opp i regelboken når vi startet opp i høst. Sånn her addisjonsstykke, hva kaller vi de som vi plusser sammen når vi adderer, hva kaller vi de? Husker du det, Gro?	
136. *Gro*: Ledd. 137. *Lærer*: Et ledd ja. Så kan vi si at det øverste regnestykket ((peker på eksempel 1 på tavla)) der består av to ledd? Kan vi si det? Er alle med på hva vi snakker om nå, at regneuttrykk kan ha, ett, to ledd? Så ((skriver på tavla)), ledd det er en ting som er med, kan være med i et sånn regneuttrykk. Og hvis vi tar et eksempel her, hvis vi ser på eksempel, eh, eksempel 1 og eksempel 2 og E1 og E2, de har to ledd, kan vi være enige om det? At hvis vi ser på regneuttrykkene som er her ((peker på tavla)) så har de to ledd, det er likt for alle sammen. Alle de har to ledd. Kan dere være med på det? Men kan jeg da klare å fortelle noe om de to leddene som er der ((peker på tavla)), kan vi si noe om ett slikt (sånn) ledd?	

Det som står inni en sånn sirkel (runding) her, kan vi klare å si noe om det da? Hvis vi skal bruke matteord. Hva kalte vi det når vi tok og så ganget, når vi tok og så multipliserte noe, hva var det vi kalte det for noe? Husker dere det da? 138. *Gustav*: Sånn faktor eller produkt. 139. *Lærer*: Faktor eller produkt, ja. Hva er hva? Hva var faktor og hva var produkt? Husker du det, Gustav? 140. *Gustav*: Jeg tipper produkt var svaret, så da må faktor være de to andre.	
141. *Lærer*: Ja. Så vi kan si at det er to ledd med to faktorer ((skriver på tavla)) i hvert ledd. Kan vi si det? At hvert ledd har to faktorer, så de matematiske uttrykkene, eksempel 1 og 2, E1 og E2 har to ledd med to faktorer i hvert ledd. Er dere med da? 142. *Geir*: Ja.	

Disse ytringene som finner sted i forlengelsen av den første sekvensen som ble analysert i artikkelen, illustrerer hvordan klassens lærer kommuniserer i en innhold- og undervisningsdiskurs. Hun bruker et kjent diskursivt mønster for å kommunisere hva et ledd er, og følgende av lærerens ytringer viser dette: «de som vi plusser sammen når vi adderer» (135), «det er en ting som er med, kan være med i et sånn regneuttrykk» (137) og «det som står inni en sånn sirkel (runding)» (137). Narrasjoner fra den grunnleggende aritmetiske diskursen som elevene allerede er deltakere i, brukes slik til å kommunisere at faktor multiplisert med faktor realiserer signifikansen ledd i et regneuttrykk. «Repetition of what was done before in new situations that, for one reason or another, seem to invite a similar sequence of actions is the very gist of learning» (Sfard, 2010, s. 178).

Regneuttrykkene som klassen arbeider med i diskursen, viser at læreren har valgt eksempler der signifikansen ledd er realisert ved å bruke ulike aritmetiske uttrykk. Min tolkning er at læreren bruker regneuttrykk som gjør det mulig for henne å handle basert på og slik kommunisere ulike metaregler, og hun viser derfor at hun er i en innhold- og undervisningsdiskurs. Det er viktig å presisere at metaregler ikke beskriver hvordan matematiske objekter oppfører seg; de beskriver deltakernes handlinger (Sfard, 2010). Å kommunisere alle mulige metaregeler som styrer hvordan en deltaker kan realisere et ledd, er derfor ikke naturlig. Det er objektnivåreglene «ledd + ledd = sum» og «ledd – ledd = differanse» som viser objektet ledds egenskaper, og det er dem det er naturlig å definere som en såkalt «regel» i diskursen. Dette er som nevnt i artikkelen, også gjort i klassens lærebok (Gulbrandsen, 2006, s. 95). Det kan derfor presiseres at figuren i artikkelen som beskriver alle former for realiseringer som ledd kan ha i regneuttrykk (figur 16), ikke er et forsøk på å gjøre om metaregler til objektnivåregler. Figuren er laget for å synliggjøre aritmetikkens kompleksitet, og sammen med figur 17 i artikkelen får den frem at elevers metaregler gradvis må modifiseres. Ifølge Sfard (2010) er dette ett av matematikkens opplæringsmål.

Elevene møter algebra som selvstendig tema for første gang på ungdomstrinnet (Utdanningsdirektoratet, 2016), og læreren er i en læreplan- og pensumdiskurs siden klassediskursen viser at hun vet dette. Hun bruker en utvidet aritmetisk diskurs som en slags bro for å lede elevene inn i en algebraisk diskurs.

Konklusjon

Masterstudien min forsøker å finne svar på *hvordan en lærers kommunikative aktiviteter påvirker elevers læring*, og det har den gjort ved først å studere hvilke metaregler som styrer hvordan en lærer og elevene hennes realiserer det matematiske objektet «ledd» i overgangen mellom en aritmetisk og algebraisk diskurs (artikkel), og etterpå ved å studere hvordan lærerens ulike undervingsoppgaver i denne «utvidete aritmetiske diskursen» henger sammen med elevenes læring (monografi).

Artikkelen indikerer at det matematiske objektet ledd er spesielt sentralt når en 8. klasse arbeider med aritmetiske regneuttrykk som en introduksjon til algebra. Metareglene som styrer hvordan klassens lærer realiserer et ledd på ulike måter, er synlige i denne diskursen, og de viser kompleksitet. Ved å studere diskursen som læring på metanivå, avslørte kommognitive konflikter at elevers narrasjoner er annerledes enn dem læreren handler basert på og at deres aritmetiske grunnlag i møte med algebra kan ses på som mangelfullt. Artikkelen knytter dette opp mot norske ungdommers svake prestasjoner i algebra, og antyder at et manglende aritmetisk grunnlag kan være med på å gi ungdommene en ritualisert algebraisk diskurs.

Monografien har hatt et todelt mål. Den beskriver en matematikklærers undervisning, men siden dette endrer hvordan elever prater om matematikk, beskriver den også hvordan læring skjer. Forskning viser at det er en sammenheng mellom en lærers UKM og kvaliteten på lærerens undervisning (Hill et al., 2012), og i monografien brukes MDU som er en kommognitiv utgave av UKM, for å finne informasjon om en lærers undervisning. Når undervisning studeres som deltakelse i ulike diskurser, er det mulig å beskrive en matematikklærers undervisningsoppgaver siden de er synlige i diskursenes kommunikasjon. Selv om UKM og MDU står i hver sin teoretiske tradisjon (kognitivisme og kommognisjon), forsøker monografien å vise at MDU kan informere UKM ved sitt fokus på observerbare diskursive handlinger.

I det kommognitve rammeverket er læring sett på som endring i diskurs. Læreren er en erfaren deltaker i diskursen, og det er hennes undervisningsdiskurs som viser nye handlinger. Det er disse handlingene som gjør det mulig for elevene å prate annerledes om matematikk. Studert i dette perspektivet, har monografien også beskrevet hvordan læring skjer.

Monografien viser de ulike diskursene en lærer er i når hun kommuniserer metaregler som styrer hvordan hun realiserer objektet ledd på ulike måter i regneuttrykk. De ulike undervisningsdiskursene får frem hvordan læreren kommuniserer for å lede elevene inn i en utvidet aritmetisk diskurs, og de ulike undervisningsoppgavene hennes er gjort synlige ved å studere diskurser.

Det er skolens lærere og deres undervisning som legger grunnlaget for elevers prestasjoner i matematikk, og studiens fortolkninger har implikasjoner for praksisfeltet. Analysene indikerer at matematikklæreres kommunikasjon og interaksjon i klasserommet er komplekse og at dette krever at lærere i faget er sentrale deltakere i de ulike diskursene som er knyttet til undervisning i matematikk. Studien viser hvordan læreren realiserer det matematiske objektet ledd på ulike måter i diskursen, og figur 16 i artikkelen er laget for å illustrere alle realiseringer ledd kan ha i regneuttrykk. Disse realiseringene må matematikklærere kjenne og være i stand til å kommunisere når de underviser i faget.

Studien retter fokus mot den krevende overgangen mellom aritmetikk og algebra, og figur 17 i artikkelen viser at algebra kan ses på som meta-aritmetikk (diskurs om diskurs) og at det er aritmetikkens metaregler som danner grunnlaget for algebra. Dette er et spesialisert perspektiv som hører hjemme i matematikklæreres profesjonsdiskurs. Perspektivet kan gjøre det lettere for lærere å lede elever nærmere en algebraisk diskurs der mønster er gyldige.

Selling, Garcia og Ball (2016) er bekymret over at mange lærere mangler sterk UKM, og de skriver at det er avgjørende for elevers læring at denne spesialiserte kunnskapen øker. De har derfor utviklet et rammeverk som beskriver matematikklæreres undervisning («Mathematical work of teaching»). Deres idé er at dette rammeverket kan brukes av forskere og lærerutdannere til å utvikle oppgaver og beskrivelser som gjør det mulig å måle og spore aspekter ved UKM i en stor skala. Studiens kommognitive perspektiv og derfor studier av diskurs har gjort en lærers spesialiserte undervisningshandlinger synlige, og disse har potensial til å informere UKM om sentrale undervisningsoppgaver. Fremtidig forskning kan vise hvordan denne informasjonen kan brukes til å øke læreres UKM/MDU.

Litteraturliste

Adler, J., & Ronda, E. (2014). An analytic framework for describing teachers' mathematics discourse in instruction. *I C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (red.) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 2* (s. 9–16). Vancouver, Canada: PME.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. doi: 10.1177/0022487108324554

Barwell, R. (2013). Discursove pstchology as an altenative perspective on mathematics teacher knowledge. *ZDM, 45*(4), 595–606.

Blomgren, O. (2015). *Hva er et ledd? "Er det liksom, et tall er et ledd?"*. UiS.

Blomgren, O. (2016). Ulike realiseringer av ledd i overgangen fra aritmetikk til algebra.

Cooper, J. (2014). Mathematical discourse for teaching: a discursive framework for analyzing professional development. I C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (red.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 2 (s. 337–344).* Vancouver, Canada: PME.

Cooper, J. (2016). Growth of mathematical knowledge for teaching – the case of long division. I K. Krainer & N. Vondrova (red.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2081–2088). European Society for Research in Mathematics Education.

Fauskanger, J., Bjuland, R., & Mosvold, R. (2010). "Eg kan jo multiplikasjon, men ka ska eg gjørr?": det utfordrende undervisningsarbeidet i matematikk. I T. Løkensgard Hoel, G. Engvik & B. Hanssen (red.), *Ny som lærer – sjansespill og samspill* (s. 99–114). Trondheim: Tapir akademisk forlag.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Gulbrandsen, J. E. (2006). *Nye Mega: matematikk for ungdomstrinnet: [8. trinn] Grunnbok 8A* (3. utg., bokmål). Oslo: Damm.

Hill, H. C., Umland, K., Litke, E., & Kapitula, L. R. (2012). Teacher quality and quality teaching: Examining the relationship of a teacher assessment to practice. *American Journal of Education, 118*(4), 489–519.

Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L., & Lai, Y. (2016). Making progress on mathematcal knowledge for teaching. *The Mathematical Enthusiast, 13*(1–2), 3–34.

Johannessen, A., Christoffersen, L., & Tufte, P. A. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (4. utg.). Oslo: Abstrakt.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Mosvold, R. (2015). Interdiscursivity and developing mathematical discourse for teaching. I K. Krainer & N. Vondrova (red.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 3079–3085). European Society for Research in Mathematics Education.

Mosvold, R. (2016). The work of teaching mathematics from a commognitive perspective. I W. Mwakapenda, T. Sedumedi, & M. Makgato (red.), *Proceedings of the 24th annual conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education (SAARMSTE)* 2016 (s. 186–195). Pretoria, South Africa: SAARMSTE

Selling, S. K., Garcia, N., & Ball, D. L. (2016). What does it take to develop assessments of mathematical knowledge for teaching? *The Mathematics Enthusiast*, *13*(1), 35–51.

Sfard, A. (2010). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing* (First paperback ed.). New York, NY: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51*, 1–9.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Silverman, D. (2011). *Interpreting qualitative data: a guide to the principles of qualitative research* (4. utg.). Los Angeles: SAGE.

Stake, R. E. (1994). Case studies. I N. K. D. Y. Lincoln (red.), *Handbook of qualitative research* (s. 236–247). Sage Publications.

Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: prologue. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(3), 299–306. doi: 10.1007/s10649-015-9638-7

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode* (4. Utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2016). Læreplan i matematikk fellesfag. Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Venkat, H., & Adler, J. (2012). Coherence and connections in teachers' mathematical discourse in instruction: original research. *Pythagoras*, *33*(3), 1–8.

Artikkel

Blomgren, O (2016). Ulike realiseringer av ledd i overgangen fra aritmetikk til algebra.

ULIKE REALISERINGER AV LEDD I OVERGANGEN FRA ARITMETIKK TIL ALGEBRA

Sammendrag

Internasjonale studier indikerer at norske ungdommers prestasjoner i algebra skiller seg ut som spesielt svake. Hva er årsakene til dette, og hva kan gjøres for å øke resultatene? I denne artikkelen brukes en aritmetisk diskurs for å finne forklaringer på utfordringen. Deltakelse i denne diskursen danner nemlig grunnlaget for en algebraisk diskurs og gjør at den gir mening. Er det et utilstrekkelig aritmetisk grunnlag som gir en ritualisert algebraisk diskurs hos norske ungdommer? En 8. klasse og deres arbeid med regneuttrykk med tall som en introduksjon til algebra («utvidet aritmetisk diskurs») blir undersøkt, og i denne diskursen står objektet «ledd» frem som spesielt sentralt. Selv om aritmetikkens diskurs som elevene allerede er deltakere i, beskriver hva et ledd er og hvilke realiseringer det kan ha, blir likevel begrepet ofte kun realisert gjennom enslige tall (hele tall og desimaltall) i arbeidet med grunnleggende regneoperasjoner. Datamaterialet analyseres i lys av Anna Sfards kommognitive teori, og ulike former for kommunikasjon indikerer at de metadiskursive reglene som styrer hvordan klassens lærer formulerer og beviser hvordan et ledd kan realiseres i et regneuttrykk, er komplekse og at elevers regler må videreutvikles. Analysen viser også at matematiske objekter som tidligere ikke er blitt sett på som like, blir likestilt («saming») i en utvidet aritmetisk diskurs og at dette kan være med på å forklare elevers utfordringer.

Nøkkelord: kommognisjon, aritmetikk, algebra, ledd, realiseringer, metaregler

Abstract

International studies indicate a poor performance in algebra among Norwegian youth. What are the reasons for this, and what can be done to improve their performance? In this study an arithmetic discourse is used to look for explanations of the challenge. Participation in this discourse forms the foundation for an algebraic discourse and makes it meaningful. Is it an inadequate arithmetic basis that results in a ritualized algebraic discourse among Norwegian youth? This study investigates a class of 8th graders (13 and 14 years old) working with arithmetic expressions as an introduction to algebra («an extended arithmetic discourse»), and in this discourse the object «addend» stands out. Even though the arithmetic discourse that the students are already participants in, describes what an addend is and what kind of realizations it might have, the term is still often only realized through single numbers (whole numbers and decimals) in dealing with basic arithmetic operations. The data material is analyzed using Anna Sfard's commognitive perspective. Various forms of communication presented by the teacher indicate the complexity in her patterned activity of formulation and substantiation of how an addend can be realized in a calculation expression. The rules that are enacted by students must therefore be developed further. The analysis also reveals that mathematical objects that, so far, have not been considered as similar, are given the same name in an extended arithmetic discourse (saming), and this may help explaining students' challenges.

Keywords: commognition, arithmetic, algebra, addend, realizations, metarules

Innledning

Denne studien fokuserer på den krevende overgangen fra aritmetikk til algebra i matematikkundervisningen, og fokuset er spesielt på ulike betydninger av begrepet ledd i aritmetikk og algebra. TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) som er en stor internasjonal undersøkelse av matematikk og naturfag i grunnskolen (4.- og 8. trinn), og dens resultater fra 2011 avslører at norske 8. klassingers prestasjoner i algebra skiller seg ut internasjonalt som spesielt svake (Grønmo et al., 2012). Selv om de norske elevene er blant de yngste som deltar i studien (alder for skolestart varierer mellom land) – noe som kan være en feilkilde, viser også andre undersøkelser at «elever på alle trinn presterer svært svakt i algebra» (Grønmo et al., 2012, s. 26); dette inkluderer elever i grunnskolen, i videregående skole og nyutdannede lærere i matematikk. «De svake norske resultatene i algebra er spesielt bekymringsfulle sett i forhold til den rollen algebra spiller som grunnlag for videre utdanning i matematikk» (Grønmo et al., 2012, s. 40).

Eksamensresultatene for skriftlig eksamen i matematikk for 10. trinn i perioden 2009-2014 viser en nedgang i fagets gjennomsnittskarakter, og samme periode viser også en økning i antall elever som får laveste karakter. I 2014 var for eksempel gjennomsnittskarakteren 3,0, og 12,6 % av elevene fikk karakteren 1. En evalueringsrapport skrevet at Matematikksenteret på oppdrag av Utdanningsdirektoratet, forklarer dette blant annet med at hovedområdet tall og algebra er blitt mer vektlagt etter 2009 (Andersen, Berg, Dahl, Ravlo, & Wæge, 2015). Elever sliter og har alltid slitt med algebra, og når dette er blitt mer vektlagt etter 2009, mener Andersen et al. at dette har innflytelse på nedgangen i gjennomsnittskarakteren for matematikkfaget i samme periode.

En kan altså beskrive norske elevers prestasjoner i algebra som svake, men hva er årsakene til dette? Hva kan gjøres for å bedre resultatene? I denne studien bruker jeg Anna Sfards kommognitive teori til å undersøke dette. Begrepet «kommognisjon» har Sfard (2010) konstruert for å vise at mellommenneskelig kommunikasjon og individuell tenkning er to sider av det samme fenomenet. Innenfor denne teorien er fokuset på diskurser, og læring blir sett på som endring i diskurs. En diskurs omfavner alle former for kommunikasjon, og ved å analysere disse aktivitetene, kan en studere diskursive mønstre – og altså læring. «The quest for discursive patterns is the gist of commognitive reserach» (Sfard, 2010, s. 200).

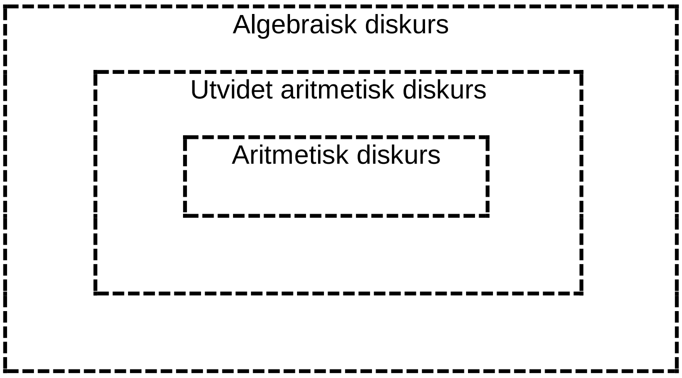
I introduksjonen til en case-studie skriver Gerhard (2013) at det finnes forskning som viser at skolens undervisning av aritmetikk påvirker elevers algebralæring negativt, men at det finnes lite forskning som forklarer *hvordan* aritmetisk kunnskap påvirker læring av algebra. Gerhards studie viser at elevers manglende kunnskap om aritmetikkens operasjoner og relasjoner hindrer en god tilnærming til algebra. I en annen studie refererer Mellone, Romano og Tortora (2013) til resultater fra en italiensk kartleggingsprøve i matematikk, og de viser at italienske 10. klassinger (15/16 år) strever med å løse et aritmetisk regneuttrykk siden løsningen krever at oppgavens ledd må uttrykkes på andre måter (transformasjon). De skriver derfor at denne oppgaven kan sies å ligge i grenselandet mellom aritmetikk og algebra, og case-studien deres viser at ved å gi elever som er trent i å lete etter matematiske mønster bedre tid til å løse oppgaven enn det som ble gitt nasjonalt, ble oppgavens resultater betydelig bedre.

I sin kommognitive studie definerer Caspi og Sfard (2012) algebra som aritmetikkens formaliserte metadiskurs. Ideen deres er at elevers algebraiske diskurs vil utvikle seg fra diskurser som elevene allerede har mestret, og Caspi og Sfard beskriver denne prosessen. Tanken om at deltakelse i aritmetikkens diskurs er en forutsetning for algebraisk tenkning, danner også grunnlaget for denne artikkelen: «… algebraic thinking occurs whenever one scrutinizes numerical relations and processes in the search for generalization or in an attempt to find an unknown» (Caspi & Sfard, 2012, s. 46). Innholdet i diskursen som analyseres og derfor denne artikkelens vinkling, er likevel annerledes. Det er en *aritmetisk diskurs* som danner grunnlaget for analysen, og det er den som skal gi informasjon om norske elever og deres møte med algebra. Denne diskursen har nemlig potensial til å gi svar på følgende sentrale spørsmål: Er det aritmetiske grunnlaget til stede slik at en algebraisk diskurs utvikler seg naturlig og gir mening? Hva innebærer «deltakelse i aritmetikkens diskurs»? Hva må til for å «mestre» denne diskursen og være klar til å «granske numeriske relasjoner og prosesser»?

> … trying to introduce students to algebra prior to their being reasonably versed in arithmetic would mean violating the single most important principle acknowledged by all teachers and researchers, regardless of their educational worldview: the principle of constructing new knowledge from the old knowledge or, in commognitive terms, of growing new discourse from old discourse. This violation is likely to result in ritualized algebraic discourse, disconnected from the main source of its meaningfulness (Sfard, 2012, s. 5).

En 8. klasse arbeider med regneuttrykk med tall som en introduksjon til algebra, og jeg har valgt å kalle dette for en «utvidet aritmetisk diskurs» siden klassens lærer bruker diskursen som en bro mellom den aritmetiske og den algebraiske diskursen (figur 1). I diskursen kommer derfor noen av aritmetikkens metaregler («spilleregler») og altså grunnlaget for algebra tydelig frem, og det matematiske objektet «ledd» står frem som spesielt sentralt.

Figur 1: Utvidet aritmetisk diskurs



Artikkelens forskningsspørsmål er:

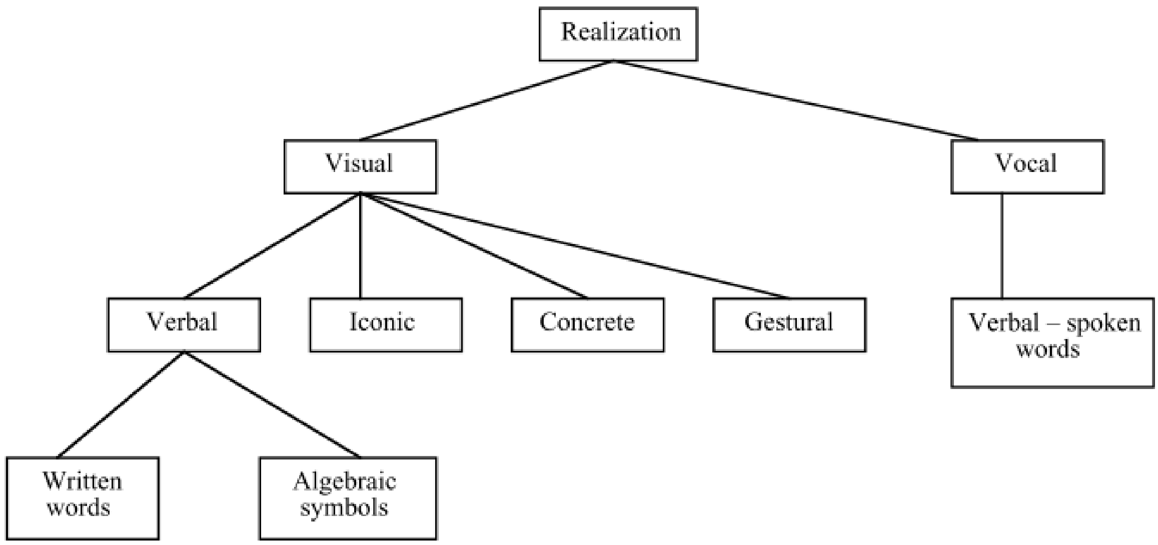
1. Hvilke nye realiseringer blir synlige og viser kompleksitet når det diskursive objektet «ledd» opptrer i nykommeres utvidede aritmetiske diskurs analysert i et kommognitivt perspektiv?
2. Hvilke utfordringer avslører kommunikasjonen når kjente objekter blir likestilt («saming») og «ledd» blir deres felles signifikans («signifier»)?

Teoretisk bakgrunn

Sfard (2010) beskriver matematikk som en diskurs om matematiske objekter, og tall, funksjoner, mengder og geometriske former er eksempler på dette. Til tross for at fagets objekter tilsynelatende kan defineres enkelt, skaper de samme objektene utfordringer siden de ikke kan bli vist. Matematikkens objekter er ikke-materielle, flyktige og abstrakte. I motsetning til andre fagområder som kjemi og zoologi, eksisterer ikke matematikkens objekter uavhengig av diskursen. De er diskursive konstruksjoner, og er selv en del av diskursen. «The best discursive means for saying more with less is the discursive construct known as *mathematical object*» (Sfard, 2012, s. 4).

Matematiske objekter er altså abstrakte diskursive konstruksjoner, og disse objektene finnes i flere former. Sfard (2010) bruker derfor begrepene *signifikans*[i] («signifier», min oversettelse) og signifikansens *realiseringer* for å beskrive dem. Signifikanser er ord og symboler diskursens deltakere bruker som substantiv i ytringer, mens signifikansens realiseringer er objekter som er tilgjengelige for sansene våre. Det er realiseringene vi bruker til å produsere eller bevise narrasjoner[ii] («narratives», min oversettelse) om en signifikans. Narrasjoner er skriftlige og/eller muntlige beskrivelser av objekter, relasjoner mellom objekter og aktiviteter av og med objekter (Sfard, 2010, s. 300). Figur 2 viser hvilke verbale og ikke-verbale former realiseringer kan ha.

Figur 2: Realiseringer (Sfard, 2010, s. 155)



Deltakere i en matematisk diskurs vil bruke begreper ulikt, og dette skaper utfordringer for kommunikasjonen. Spesielt graden av «objektivering» (å bruke nøkkelord som om de eksisterer uavhengig av den aktuelle diskursen) vil være forskjellig for forskjellige deltakere. Den samme signifikansen kan altså realiseres ulikt, og det kan skade kommunikasjonens effektivitet og også medføre brudd i diskursen. For å finne informasjon om deltakeres diskurs, kan en derfor bruke «realiseringstrær». Sfard (2012) understreker at et matematisk objekt kan defineres som en matematisk signifikans sammen med realiseringstreet sitt.

Figur 3: Realiseringstre (Sfard, 2010, s. 165)

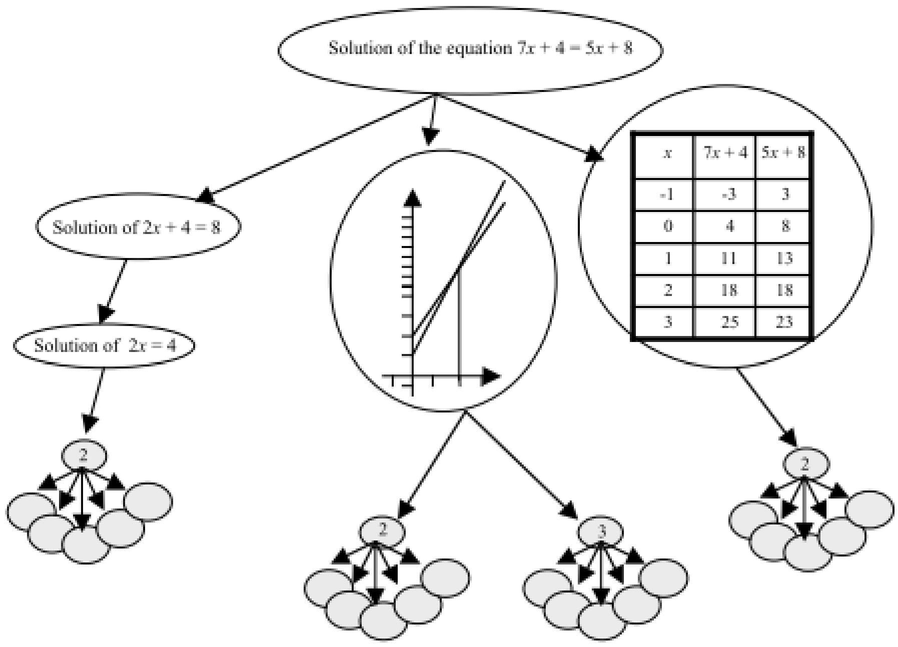


Figure 6.1. A realization tree of the signifier "solution of the equation $7x + 4 = 5x + 8$."

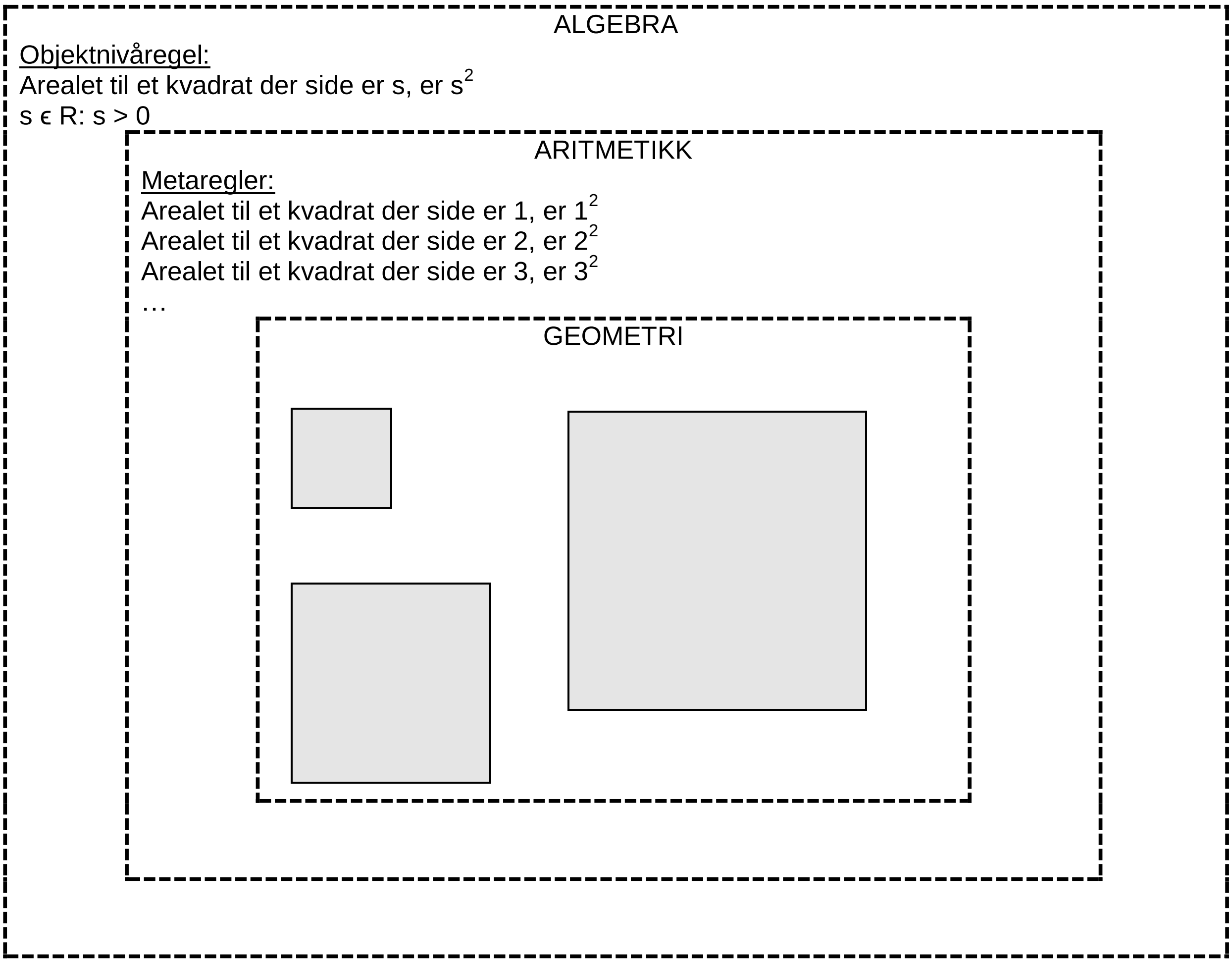
Diskursive objekter oppstår blant annet ved å knytte en signifikans (ett navn) til flere objekter som tidligere ikke er blitt sett på som like (Sfard, 2010). Denne prosessen kalles for å *likestille* objekter («saming», min oversettelse), og handler om å assosiere en signifikans med mange realiseringer. Signifikansen «tall» likestiller for eksempel diskursen om hele tall og diskursen om brøker i diskursen om rasjonale tall (Sfard, 2010, s. 186). En utfordring når objekter likestilles, er at veletablerte og godkjente narrasjoner vil minke. Dette er spesielt aktuelt når signifikansen er hentet fra en av diskursene som er blitt underlagt. «Multiplikasjon gjør større» forteller for eksempel hvordan et produkt av tall vil se ut i diskursen til hele tall, men i diskursen om rasjonale tall vil ikke lenger denne narrasjonen nødvendigvis være gyldig.

Sfard (2010) definerer menneskelig kommunikasjon som en regelstyrt aktivitet, og hun skiller mellom metadiskursive regler (metaregler) og regler på objektnivå. Regler på objektnivå definerer egenskapene til diskursens objekter; de er narrasjoner om objektenes faste regler. Metareglene derimot beskriver handlingene til diskursens deltakere, og mest aktuelt i en skolediskurs er de mønstrene som trer frem når deltakere prøver å vise at objektnivånarrasjoner er sanne.

Figur 4 illustrerer diskursive lag (diskurs om diskurs), og får i tillegg frem at det matematiske systemet produserer «tingene det snakker om» (Sfard, 2010, s. 161, min oversettelse).

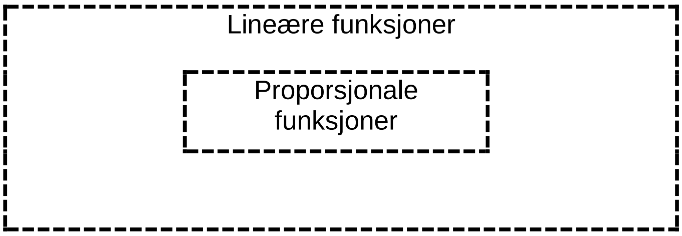
> … mathematics emerges as an *autopoietic* system – a system that contains the objects of talk along with the talk itself and that grows incessantly «from inside» when new objects are added one after another (Sfard, 2010, s. 129).

Figur 4: Matematikk er et selvskapende system



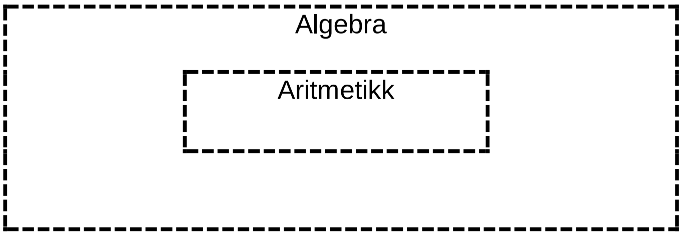
Å lære matematikk, medfører endring i diskurs, og Sfard (2010) skiller mellom to typer av læring: læring på objektnivå og læring på metanivå. Læring på objektnivå skjer når en diskurs utvides på grunn av indre forhold. Ved å undersøke *objekter som allerede er en del av diskursen*, kan en bli i stand til å formulere og godkjenne nye narrasjoner om dem (Sfard, 2012).

Figur 5: Læring på objektnivå

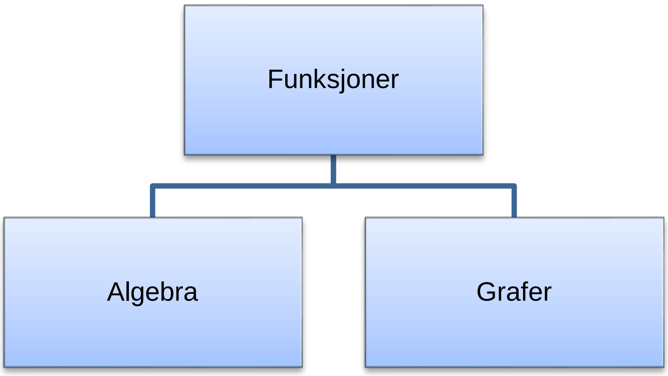


Læring på metanivå involverer endringer i diskursens metaregler («spilleregler»), og dette skyldes refleksjon om den eksisterende diskursen i sin helhet (Sfard, 2010). En utvidelse av diskursen (diskurs om diskurs) og en økning i dens kompleksitet er resultatet. Oftest blir *nye matematiske objekter* introdusert (Sfard, 2012). Metanivålæring kan skje på to måter: som vertikal eller horisontal læring (Sfard, 2012). Vertikal læring involverer å kombinere en diskurs med sin egen metadiskurs, og horisontal læring skjer når hittil ulike diskurser samles i en felles diskurs.

Figur 6: Vertikal læring på metanivå



Figur 7: Horisontal læring på metanivå



Læring på metanivå oppstår altså når en elev møter en ny diskurs. Siden denne diskursen er styrt av metaregler som er annerledes enn dem elevens handlinger tidligere har vært basert på, innebærer møtet en kommognitiv konflikt.

> … the encounter between interlocutors who use the same mathematical signifiers (words or written symbols) in different ways or perform the same mathematical tasks according to differing rules (Sfard, 2010, s. 161).

Oftest skyldes en slik konflikt at ulike deltakere godkjenner motstridende narrasjoner, og den løses ved at en «finner mening i andre menneskers tenkning (og derfor prat) om denne verden» (Sfard, 2010, s. 258, min oversettelse).

Det kan presiseres at begrepet «metaregel» brukes i to ulike sammenhenger i rammeverket. I objektnivålæring brukes det for å beskrive *gjeldende* mønstre i diskursen og hvordan deltakere forsøker å formulere og bevise objetnivånarrasjoner. «… metarules defines patterns in the activity of the discursants trying to produce and substantiate object-level narratives» (Sfard, 2010, s. 201). I læring på metanivå brukes metaregelbegrepet for å beskrive *nye* mønstre i en diskurs, og får frem at slike diskurser krever at metaregler endres. «Being governed by different meta-rules, the new discourse is incommensurable with the preceding one» (Sfard, 2012, s. 3).

Metode

For å finne svar på forskningsspørsmålene, undersøker jeg den utvidede aritmetiske diskursen i en klasse. Dette fungerer som en instrumentell case-studie (Creswell, 2007), hvor klassen og dens avgrensede matematiske diskurs illustrerer temaet jeg vil undersøke.

Dataene som brukes i artikkelen, ble samlet inn som en del av et forskningsprosjekt ved masterstudiet i matematikkdidaktikk ved Universitet i Stavanger våren 2015. I dette prosjektet ble en 8. klasse fra Sør-Vestlandet og deres første møte med emnet algebra dokumentert over en periode på to uker. Den observerte klassen består av 20 elever, og de blir undervist av en kvinnelig lærer som har studert matematikkdidaktikk på masternivå. I transkripsjonen blir klassens lærer omtalt som «lærer», og elevenes navn er fiktive. Nødvendige tillatelser fra Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD), elevenes foresatte og klassens lærer var innhentet før prosjektet startet opp.

Klassens undervisning og intervjuer av klassens lærer og to elevgrupper som ble gjennomført mot slutten av perioden, ble dokumentert ved å ta dem opp på film og ved å bruke lydopptaker. Alle disse film- og lydopptakene ble deretter transkribert. Hovedfokuset i dette transkriberingsarbeidet var deltakernes ytringer, men noen andre former for kommunikasjon ble også notert.

Analysearbeidet mitt startet med at jeg studerte samtlige transkripsjoner for å få en oversikt over datamaterialet som var samlet inn og hva som kunne brukes for å svare på forskningsspørsmålene mine. Denne innledende analysen indikerte at undervisningstime nummer to var annerledes enn de andre øktene, og den ble artikkelens datakilde. Denne timen brukte læreren til å kommunisere hvordan hun produserer og beviser ledds ulike realiseringer i aritmetiske regneuttrykk (metaregler), og en utvidet aritmetisk diskurs kom til syne. I de andre øktene og i intervjuene var ikke metaregler like observerbare i kommunikasjonen. Neste steg var å studere filmklippene fra timen som nå var valgt ut. Siden ikke alle former for kommunikasjon var nedtegnet i transkripsjonene og disse formene for kommunikasjon er sentrale for en kommognitiv forsker, ble det gjort en utvidelse av transkripsjonene i denne fasen av arbeidet. Det er denne siste transkriberingen som er artikkelens datagrunnlag.

Diskurs er studiens objekt, og derfor gir analysen stor plass til alle former for kommunikasjon som ble observert. Både deltakernes ytringer, beskrivelser av annen synlig kommunikasjon og sammenhengen dette skjedde i, kommer tydelig frem i analysen. I tillegg brukes stillbilder for å illustrere ikke-verbal kommunikasjon.

> The commognitive researcher is to begin her report with showing what was done and said, rather than with her story about it. Instead of revoicing the actors, she must let them speak in their own voice (Sfard, 2010, s. 277).

I kommognitive studier kan forskerens egne erfaringer påvirke forskerdiskursen (Sfard, 2010), og min mangeårige erfaring som matematikklærer i både barne- og ungdomsskole vil kunne påvirke min diskurs som forsker, og nevnes derfor.

Resultater og diskusjon

I denne delen skal jeg beskrive hvilke realiseringer av objektet ledd som er synlige i en utvidet aritmetisk diskurs, og prosessen å likestille («saming») brukes for å peke på at denne diskursen er styrt av metaregler som er annerledes enn dem som er blitt kommunisert tidligere. Ved å studere diskursen både som læring på metanivå og læring på objektnivå, indikerer analysen hva som må til for at møtet med en algebraisk diskurs skal gi mening.

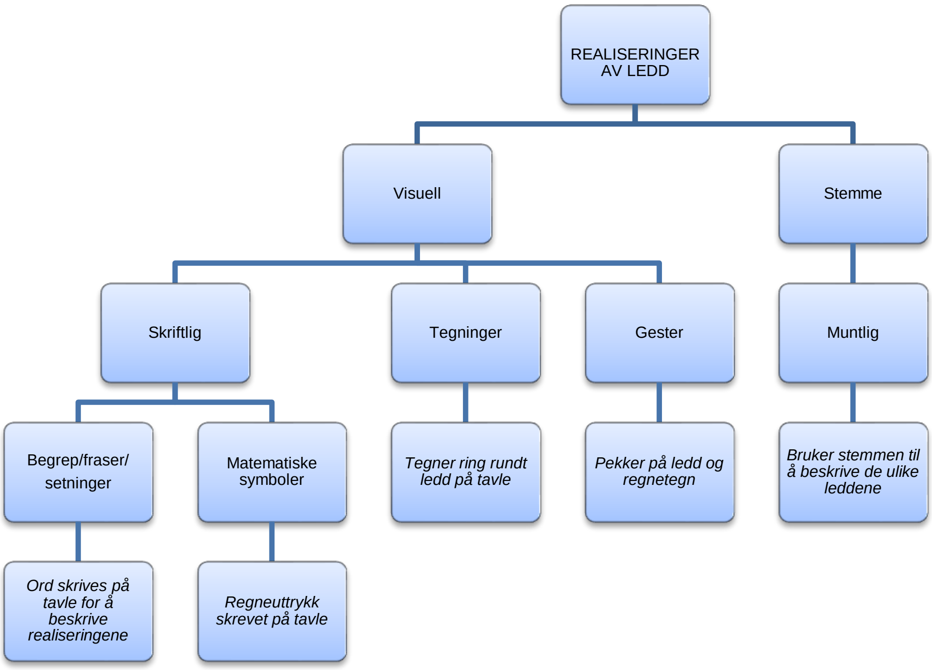
Realiseringer

Klassens lærer følger lærebokas progresjon (Gulbrandsen, 2006b, kap. E), og bruker regneuttrykk med tall for å lede elevene inn i algebraens diskurs. I den nye og utvidede aritmetiske diskursen står objektet ledd frem som en sentral signifikans. Som nevnt tidligere, kan ikke et matematisk objekt som ledd oppleves av sansene, men det kan dets ulike realiseringer (Sfard, 2010). Den algebraiske diskursen krever at alle disse realiseringene er en del av kommognisjonen (kommunikasjon/kognisjon) siden algebra kan defineres som meta-aritmetikk, eller «en samling av aritmetikk med sin egen metadiskurs» (Sfard, 2010, s. 120, min oversettelse). «Its power is in the names that reify and unify whole classes of computational processes and at the same time tell the exact story of the processes themselves» (Sfard, 2010, s. 120).

Det algebraiske uttrykket $a + b = c$ kan for eksempel beskrives som meta-aritmetikk. Uttrykket kan oversettes med *hvilke realiseringer a og b kan ha dersom summen deres skal bli c*. Det er aritmetikkens metaregler som regulerer hvordan ledd kan realiseres, og det er altså blant annet denne metadiskursen som danner grunnlaget for algebra.

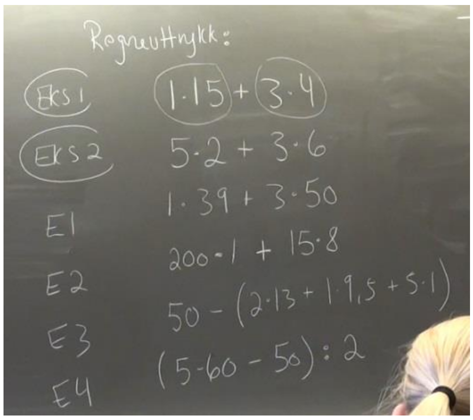
Matematisk kommunikasjon innebærer konstant overgang fra signifikanser til andre enheter (Sfard, 2010), og analysen min vil vise at læreren kommuniserer ulike realiseringer av ledd i regneuttrykk på flere måter. Disse objektene er tilgjengelig for elevenes sanser, og slik kan hun bruke dem til å produsere og bevise matematiske narrasjoner (beskrivelser av objekter). Figur 8 illustrerer funnene i den kommende analysen.

Figur 8: Realiseringer av ledd



Elevene er allerede deltakere i aritmetikkens diskurs, og objektnivåregler er definert i et tidligere gjennomgått kapittel i klassens lærebok slik figur 9 viser.

Figur 9: Vi har fire regningsarter (Gulbrandsen, 2006a, s. 95)



Objektnivåreglene omhandler egenskapene til disse diskursive objektene. Narrasjonene beskriver altså objektenes regelmessigheter, mens hvordan deltakere bruker disse objektene, er styrt av metaregler (Sfard, 2010). I analysen skal jeg vise hvilke realiseringer av ledd kommunikasjonen avslører når elevenes metaregler utfordres i møtet med en utvidet aritmetisk diskurs.

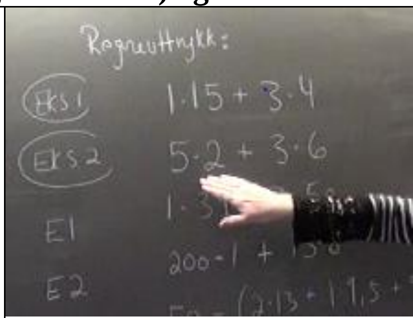
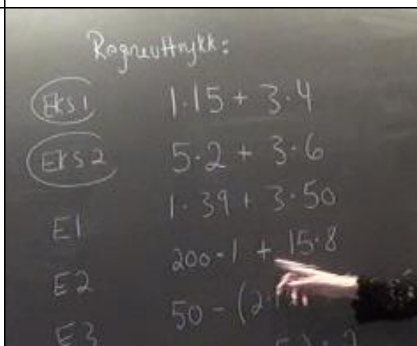
I undervisningsøkta arbeider klassen med seks tekstoppgaver, og elevenes oppdrag er å uttrykke løsningene som regneuttrykk. Disse regneuttrykkene er vist på bildet i høyre marg og i oversikten nedenfor.

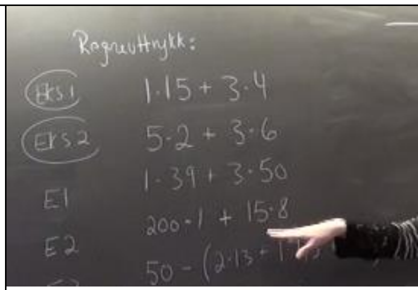
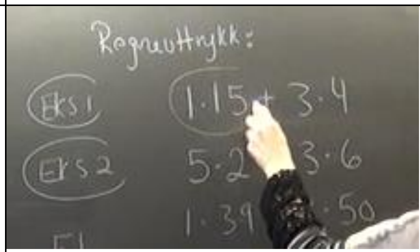
Økta starter med at læreren i dialog med klassen løser to av oppgavene. Etter denne felles oppstarten arbeider elevene i smågrupper for å løse de fire siste uttrykkene, før læreren gjennomgår disse oppgavene sammen med klassen. Analysen min finner sted når læreren i siste del av timen viser hvordan de gjennomgåtte regneuttrykkene er bygget opp. Læreren ytrer: «… vi må ha noen ord og begreper på plass slik at det er litt lettere å snakke om hva et regneuttrykk er».

OPPGAVENAVN I TRANSKRIPSJONEN	REGNEUTTRYKK SKREVET PÅ TAVLE AV LÆRER	OPPGAVENS KILDE
«Eksempel 1»	$1 \cdot 15 + 3 \cdot 4$	Lærers eget eksempel
«Eksempel 2»	$5 \cdot 2 + 3 \cdot 6$	Klassens lærebok (Gulbrandsen, 2006b, s. 28)
«E1»	$1 \cdot 39 + 3 \cdot 50$	
«E2»	$200 \cdot 1 + 15 \cdot 8$	
«E3»/«Eksempel 3»	$50 - (2 \cdot 13 + 1 \cdot 9{,}5 + 5 \cdot 1)$	
«E4»	$(5 \cdot 60 - 50) : 2$	

I sekvensene som følger, kommuniserer læreren på ulike måter noen realiseringer av ledd i regneuttrykk. Min tolkning er at lærerens undervisningsmål er å vise hvordan hun formulerer og beviser noen av metareglene som styrer ledd i regneuttrykk slik at elevene kan bli deltakere i den algebraiske diskursen. I ytringen som følger, begrunner læreren hvorfor dette valget er tatt: «Vi må vite hva et ledd er, og vi må kunne si noe om hvordan de er sammen i et regneuttrykk».

Ledd kan realiseres gjennom enslige tall (hele tall og desimaltall) og faktorer

<table>
<tr><td>135. Lærer: Det er to tall som er ganget med hverandre ((hånda glir over/peker på eksempel 1, eksempel 2, E1 og E2s første ledd)),</td><td></td></tr>
<tr><td>og så er det en pluss ((hånda glir over/peker på regneuttrykkenes addisjonstegn)),</td><td></td></tr>
</table>

og så er det to tall som er ganget med hverandre ((hånda glir over/peker på eksempel 1, eksempel 2, E1 og E2s siste ledd)).	
Og husker dere hva vi [de] heter, hvis vi tenker først at det, hvis jeg tenker at det er et tall ((setter en sirkel rundt eksempel 1s første ledd)) og det er et tall ((setter en sirkel rundt eksempel 1s neste ledd)). Husker dere hva jeg kaller de?	

I denne sekvensen utvider og utfordrer læreren elevenes metaregler; hun viser at ledd kan realiseres som et produkt av faktorer. Denne metaregelen gjør hun tilgjengelig for elevene ved å realisere den på flere måter. Hun peker på ledd og regnetegn som er skrevet på tavla, og setter ring rundt de to leddene i eksempel 1 som er realisert som et produkt av to faktorer, mens hun ytrer «hvis jeg tenker at det er *et tall* og det er *et tall*». Min tolkning av denne ytringen («et tall») er at læreren tar utgangspunkt i at elevene kjenner signifikansen ledd realisert som et enslig tall (hele tall og desimaltall), og hun kommuniserer at et produkt av faktorer er et annet mønster. En gjennomgang av lærestoffet i tidligere gjennomgåtte kapitler i klassens læreverk (Gulbrandsen, 2006a), viser med få unntak kun ledd realisert som enslige tall. Det finnes noen få oppgaver der ledd er realisert på andre måter (Gulbrandsen, 2006a, s. 170 og 171), men klassens lærer forteller i ettertid av datainnsamlingen at elevene ikke har arbeidet med disse eller tilsvarende oppgaver tidligere.

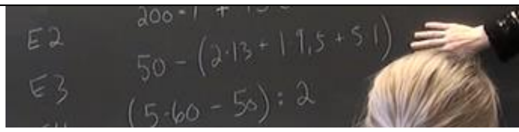
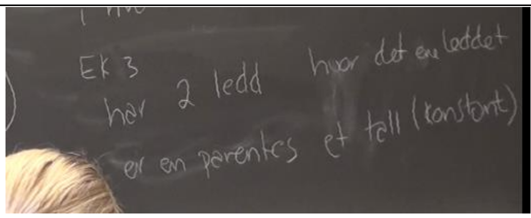
To metaregler er altså blitt kommunisert i denne sekvensen:

Ledd kan realiseres gjennom enslige tall (hele tall og desimaltall).

Ledd kan realiseres gjennom faktorer.

For erfarne deltakere i aritmetikkens diskurs, kan disse to metareglene se ut til å uttrykke nøyaktig det samme. Det gjør de også – i en objektivert diskurs; en diskurs der disse realiseringene betegner det diskursive objektet ledd (Sfard, 2010). Dette er ikke like selvsagt for nykommere i diskursen. «… only if we manage to *dis*objectify our "grown-up" discourse can we become aware that it is the difference rather than sameness that the child notices by default» (Sfard, 2010, s. 59).

Ledd kan realiseres gjennom ledd og på flere nivåer

<table>
<tr><td>143. Lærer: Hvis vi ser da på den her ((peker på E3 på tavla)), hvor mange ledd har den? Hvis vi ser på eksempel, eksempel 3 ((hun mener E3)), og egentlig ja, hvis vi ser på eksempel 3 ((E3)) vi må ha den først. Hvor mange ledd har den da?</td><td>Eksempel 3/E3:
$50-(2\cdot 13+1\cdot 9{,}5+5\cdot 1)$</td></tr>
<tr><td>Hvis jeg sier at det som står inni parentesen er ett ledd, så har den, Tore?
144. Tore: To.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>145. Lærer: To ledd. Eksempel 3 ((E3)) har to ledd ((skriver på tavla)) hvor det ene leddet, eh, hvor det ene leddet er en parentes.</td><td>
</td></tr>
</table>

I dette klippet ytrer læreren «Eksempel 3 ((hun mener E3)) har to ledd hvor det ene leddet, eh, hvor det ene leddet er en parentes» (145) mens hun skriver det samme på tavla. Siden parentesen som selv er et ledd inneholder ledd, får elevene oppleve en ny metaregel i diskursen:

Ledd kan realiseres gjennom ledd.

Objektet ledd brukes på to ulike nivåer i dette regneuttrykket: parentesen er et ledd, og det er også dens innhold. I en tidligere intern publikasjon har jeg foreslått å bruke begrepene «overordnet» og «underordnet» for å vise sammenhengen (Blomgren, 2015). Ved å bruke disse begrepene, er det mulig å beskrive med ord hvordan ledd kan realiseres på ulike nivåer i regneuttrykk. I tillegg får ordbruken også frem kompleksiteten i aritmetikkens diskurs og tydeliggjør utfordringen nykommere i diskursen står ovenfor.

Ledd brukt som et overordnet objekt/begrep:

50	–	$(2\cdot 13+1\cdot 9{,}5+5\cdot 1)$	=	40,5
ledd	–	ledd	=	differanse

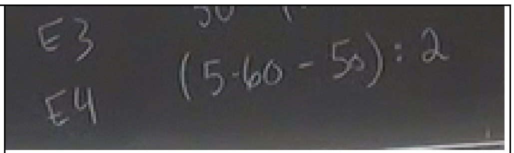
Ledd brukt både som et overordnet og et underordnet objekt/begrep:

50	–	$(2\cdot 13+1\cdot 9{,}5+5\cdot 1)$	=	40,5
ledd	–	ledd	=	differanse
ledd	–	(faktor · faktor + faktor · faktor + faktor · faktor)	=	differanse
ledd	–	($ledd_2$ + $ledd_2$ + $ledd_2$)	=	differanse

Følgende metaregel blir kommunisert i diskursen:

Ledd kan realiseres på flere nivåer i det samme regneuttrykket, overordnet og underordnet betydning.

En dividend kan realiseres gjennom ledd

170. *Lærer*: Kan vi klare å forklare hva som står inni parentesen der borte? ((Henviser til oppgave E4)).	
175. *Lærer*: Det blir to ledd, og det ene leddet er et tall ((peker på tallet 50)), det ene leddet er en konstant[iii] ((peker på 50 enda en gang)), yes.	
Og det ene, andre leddet er bestående av to faktorer ((viser at faktorene er ett ledd ved å peke på dem og lage en sirkelbevegelse med hånden)). Så det er to ledd ((peker på begge leddene hver for seg)), en konstant og to faktorer ((peker på begge leddene hver for seg)).	

I denne sekvensen viser læreren at ledd samlet i en parentes, også kan realisere signifikansen «dividend». I de andre klippene som er gjennomgått i analysen, er ledd signifikans, og lærer kommuniserer nå en annen sammenheng realiseringene inngår i. Lærerens pekebevegelser er spesielt tydelige i dette klippet, og sammen med ytringene viser de at leddene i parentesen («5 · 60» og «50») realiserer divisjonsuttrykkets dividend slik oppsettet nedenfor tydeliggjør.

dividend	:	divisor
(5 · 60 – 50)	:	2
(ledd – ledd)	:	divisor

Følgende metaregel blir altså kommunisert i sekvensen:

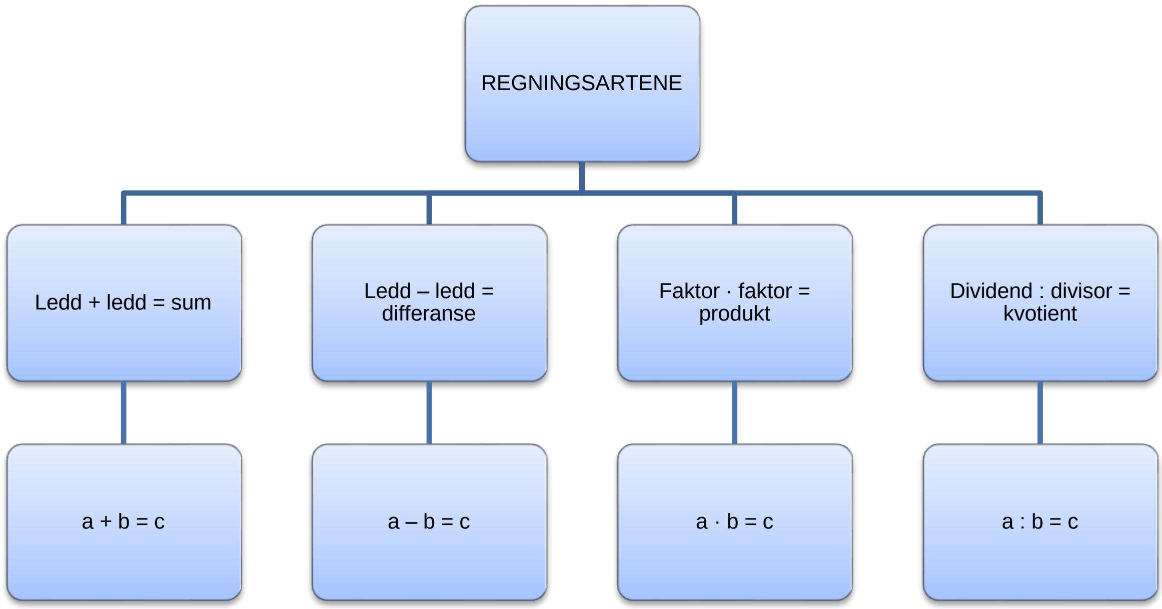
En dividend kan realiseres gjennom ledd.

Objekter likestilles, metaregler endres

Selv om aritmetikk involverer læring på objektnivå (Sfard, 2012)[iv], vil jeg argumentere for at det gir mening å studere klassens utvidede aritmetiske diskurs som horisontal læring på metanivå, altså en diskurs som involverer endringer i metaregler. Klassen har som beskrevet tidligere, kun arbeidet med regneuttrykk der ledd er realisert som enslige tall (hele tall og desimaltall) i tidligere diskurser. Det er derfor grunn til å hevde at den nye aritmetiske diskursen er styrt av metaregler som er annerledes enn dem elevene kjenner (Sfard, 2010). I den utvidede aritmetiske diskursen kan ledd realiseres på flere måter slik analysen har vist. «In our analyses, rather than asking whether interlocutors' objects are "the same", we should be trying to see whether there is a reason to suspect that they might be different» (Sfard, 2010, s. 167).

Figur 10 beskriver i hvilken sammenheng aritmetikkens objekter er brukt tidligere (Gulbrandsen, 2006a, s. 95).

Figur 10: Regningsartene



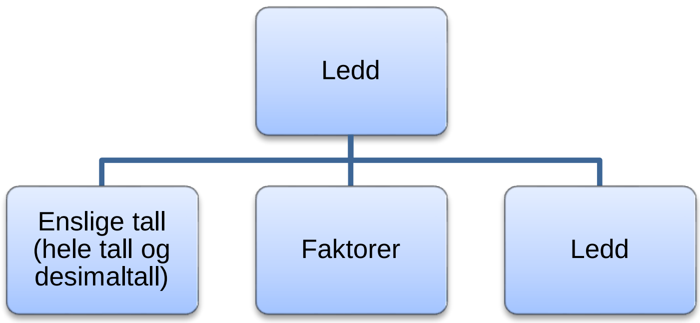
Metaregel som er kommunisert tydelig i diskursen: a og b er realisert gjennom enslige tall (hele tall og desimaltall).

I denne diskursen er «faktor multiplisert med faktor» en realisering av signifikansen «produkt» og «dividend delt med divisor» en realisering av signifikansen «kvotient». At disse objektene også kan realisere signifikansen «ledd», er ikke selvsagt i en aritmetisk diskurs som enda ikke er objektivert.

Den utvidede diskursen der disse objektene realiserer samme signifikans (ledd), kan beskrives ved å bruke prosessen *å likestille* («saming») (Sfard, 2010). Studert i dette perspektivet, kan første del av analysen min («Realiseringer») også vise hvordan lærer *likestiller* objekter som tidligere ikke er blitt ansett som like og hvordan de samles i en diskurs der ledd er ny signifikans. Resultatet av denne likestillingen er et nytt realiseringstre der den nye signifikansen (ledd) er toppen og de kjente objektene utgjør de lavere lagene (Sfard, 2010). Siden prosessen krever endringer i diskursens metaregler, kan dette altså tolkes som læring på metanivå.

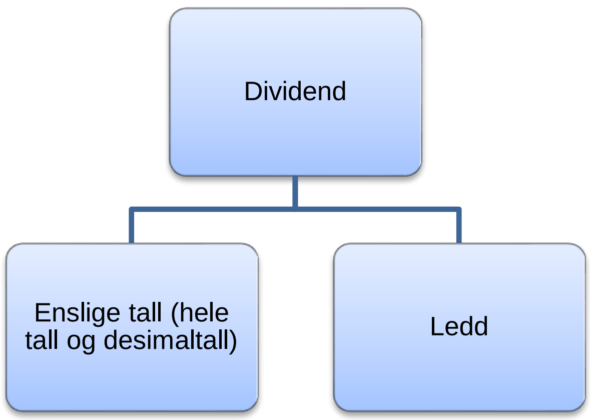
Figur 11 illustrerer hvilke realiseringer av signifikansen ledd som ble kommunisert av læreren i første del av analysen og at disse objektene er likestilt i den nye diskursen.

Figur 11: Realiseringer av ledd kommunisert i diskursen



Som analysen viser, arbeidet klassen også med et regneuttrykk der ledd realiserer signifikansen dividend (regneuttrykk E4). Siden elevene allerede kjenner en dividend når den er realisert som et enslig tall, kan figur 12 illustrere hvordan disse objektene likestilles i diskursen.

Figur 12: Ulike realiseringer av en dividend kommunisert i diskursen

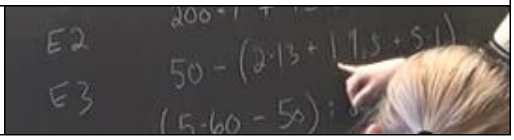


«The process of saming can be seen as the act of calling different things the same name» (Sfard, 2010, s. 170). Siden prosessen altså likestiller objekter som tidligere ikke er blitt sett på som like, er den utfordrende for nykommere i diskursen. Sekvensen nedenfor illustrerer dette, og får frem at elevers metaregler må endres i møtet med en utvidet diskurs. Signifikansen i disse eksemplene er ledd, og siden dette objektet er hentet fra en av de underlagte diskursene, er oppgaven ekstra utfordrende for elevene (Sfard, 2010).

«Er det liksom, et tall er et ledd?»

I sekvensen nedenfor arbeider klassen med regneuttrykk «E3»/«Eksempel 3»:
$50-(2\cdot 13+1\cdot 9{,}5+5\cdot 1)$

149. *Lærer*: Femti, et tall. Da kaller vi det for en konstant, når det er et tall som står sånn. Og et tall ((skriver på tavla)), altså en konstant. Så er jeg ikke helt ferdig for at nå må jeg forklare hva er det som er inni den parentesen da, det kan jeg jo si noe om, kan jeg ikke det? Kan jo hvis jeg vil til og med si at det, eh, det er et eget lite regneuttrykk inni parentesen, kan vi ikke det? Parentesen ((skriver på tavla)) består av, og så må dere hjelpe meg litt, hva er

det den består av? Går det an å prøve og forklare med å bruke ordene ledd og faktor hvordan den parentesen ser ut? Mange ledd er det der da? Kåre? Hvor mange ledd er det? 150. *Kåre*: Inne i parentesen? 151. *Lærer*: Ja. 152. *Live*: Kan jeg si det? 153. *Lærer*: Nei, nå kan Kåre få prøve. 154. *Kåre*: Er det liksom, et tall er et ledd? 155. *Live*: Nei ((sier det svakt i bakgrunnen)). 156. Lærer: Et ledd det var de, det som du plusser sammen eller tar minus med hverandre. 157. *Kåre*: Åja. Tre.	
158. *Lærer*: Tre ja, det er tre ledd her. En, to, tre ((lærer peker på de ulike leddene i parentesen)). Så parentesen består av tre ledd ((skriver på tavla)), ikke sant?	

Min tolkning er at en kommognitiv konflikt kommer til syne når Kåre blir bedt om å kommunisere antall ledd i parentesen. Når han ytrer *«Er det liksom, et tall er et ledd?»*, avslører han at han handler basert på at ledd kun er realisert som enslige tall. Elevens metaregler er altså i konflikt med den nye og utvidede diskursens metaregler. I den nye diskursen kan objektet ledd realiseres på ulike måter, og disse metareglene er altså annerledes enn dem eleven godkjenner basert på elevens ytringer i dette klippet.

Kåres diskurs kan illustreres slik figur 13 viser. Illustrasjonen synliggjør at en aritmetisk diskurs som denne vil skape utfordringer i møtet med en algebraisk diskurs.

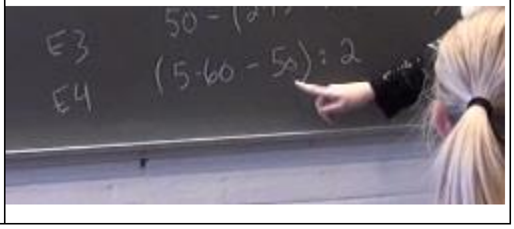
Figur 13: Kåres aritmetiske diskurs

Algebra

Aritmetikk
Metaregel:
Ledd er *kun* realisert gjennom enslige tall.

Ifølge Sfard (2010) skjer læring (endring i diskurs) gjennom interaksjon med andre, og det er slik denne konflikten finner en løsning. Ytringen «Et ledd det var de, det som du plusset sammen eller tar minus med hverandre» fra læreren leder eleven til riktig løsning. Om dette førte til en permanent løsning og en utvidet diskurs, finnes det ikke svar på i det innsamlede datamaterialet.

«Eh, et ledd og et tall, eller noe sånt»

170. *Lærer*: Kan vi klare å forklare hva som står inni parentesen der borte? ((Henviser til oppgave E4)). Katrine? 171. *Katrine*: Eh, et ledd og et tall, eller noe sånt. 172. *Lærer*: [Ja:] 173. *Katrine*: [Begge to er faktor.] 173. *Lærer*: Hvor mange ledd er det? ((Peker på leddene)). 174. *Katrine*: Å ja, men to.	Regneuttrykk E4: $(5\cdot 60-50):2$ 

Slik jeg analyserer dette datamaterialet, blir en ny kommognitiv konflikt synlig når læreren ber en elev om å forklare innholdet i en parentes. Denne parentesen består som sekvensen har vist, av to ledd: et ledd som er realisert gjennom faktorer («5 · 60») og et annet som er realisert gjennom et enslig tall («50»). Eleven ytrer: *«Eh, et ledd og et tall, eller noe sånt»*, og avslører at hun omtaler «faktor multiplisert med faktor» («5 · 60») som et «ledd» og det enslige tallet («50») som et «tall».

Ved å plassere metareglene som styrer elevens handlinger inn i figuren nedenfor (figur 14), demonstrerer den utfordringene en slik handling vil skape i møtet med algebra.

Figur 14: Katrines aritmetiske diskurs

Algebra

Aritmetikk
Metaregler:
Ledd er realisert gjennom faktorer.
Ledd er *ikke* realisert gjennom enslige tall.

Konflikten finner en løsning når læreren peker på leddene og samtidig ytrer: *«Hvor mange ledd er det»?* Eleven svarer: *«Å ja, men to»*, og viser at hun anerkjenner læreren som en mer erfaren deltaker i diskursen. Datamaterialet som er innsamlet, sier likevel ikke om endringen i metaregler ble varig eller ei.

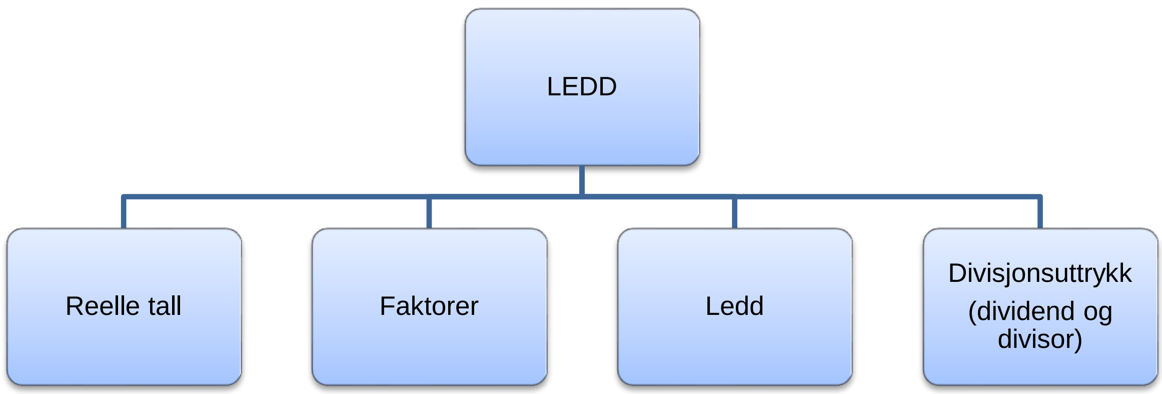
Læring på meta- og objektnivå

Analysen min viser at aritmetikk studert både som objekt- og metanivålæring, kan gi informasjon om en «utvidet aritmetisk diskurs». Disse to perspektivene utfyller og opplyser hverandre, og *viser hva som må til for at møtet med en algebraisk diskurs skal gi mening*. Dette siste momentet er viktig i norsk matematikkdebatt siden norske ungdommers prestasjoner i algebra er svært svake sammenlignet med andre land (Grønmo et al., 2012). Et viktig spørsmål blir da hva som kan gjøres for å heve ungdommenes faglige prestasjoner, og påstanden min er at norske ungdommer strever i algebra siden det aritmetiske grunnlaget er mangelfullt.

Læring på metanivå (horisontal)
Bruken av prosessen som Sfard kaller *å likestille* («saming») i analysen, viser at elevers metaregler må endres i møtet med en utvidet aritmetisk diskurs. Prosessen tydeliggjør at objekter får nye realiseringer og at veletablerte narrasjoner ikke lenger er gjeldende (Sfard, 2010). Perspektivet får også frem hvor *kompleks* den aritmetiske diskursen er.

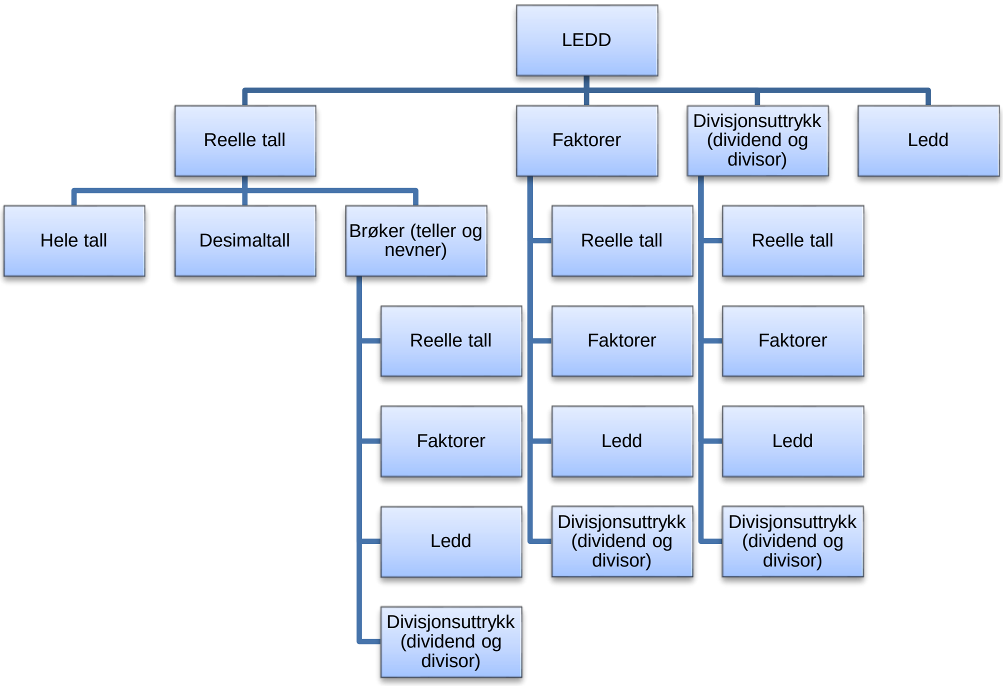
Tidligere i artikkelen har jeg vist hvilke objekter klassens lærer likestiller for å kommunisere at signifikansen ledd kan realiseres på flere måter i en utvidet aritmetisk diskurs (figur 11). Figur 15 viser hvilke objekter som må være likestilt i diskursen dersom *alle* mulige realiseringer skal være representert.

Figur 15: Ulike realiseringer av et ledd



En dividend kan realiseres gjennom ledd som også analysen har vist (figur 12), og det samme gjelder for objektene teller, nevner, faktor og divisor. Figur 16 beskriver alle former for realiseringer som er aktuelle i et regneuttrykk, og er laget for å tydeliggjøre diskursens kompleksitet.

Figur 16: Realiseringer i et regneuttrykk på flere nivåer



Forklaring til figur 16:

Eksempel 1

1. Ledd i regneuttrykk
2. Et ledd kan realiseres gjennom faktorer

a	+	b	=	c	(1)
$a_2 \cdot a_3$	+	b	=	c	(2)

Eksempel 2

1. Ledd i regneuttrykk
2. Et ledd kan realiseres gjennom faktorer
3. En faktor kan realiseres gjennom ledd

a	+	b	=	c	(1)
$a_2 \cdot a_3$	+	b	=	c	(2)
$(a_{2a} + a_{2b}) \cdot a_3$	+	b	=	c	(3)

Eksempel 3

1. Ledd i regneuttrykk
2. Et ledd kan realiseres gjennom et divisjonsuttrykk (dividend og divisor)
3. En dividend kan realiseres gjennom faktorer
4. En faktor kan realiseres gjennom et reelt tall
5. Et reelt tall kan realiseres gjennom en brøk

a	$+$	b	$=$	c	(1)
$(a_2 : a_3)$	$+$	b	$=$	c	(2)
$(a_{2a} \cdot a_{2b}) : a_3$	$+$	b	$=$	c	(3)
$(R \cdot a_{2b}) : a_3$	$+$	b	$=$	c	(4)
$(\frac{t}{n} \cdot a_{2b}) : a_3$	$+$	b	$=$	c	(5)

Læring på objektnivå (og metanivå)
Som tidligere nevnt, kan algebra beskrives som meta-aritmetikk: «… elementary algebra can be seen as arithmetic combined with a formalized discourse about numerical patterns, that is, about arithmetic itself» (Sfard, 2012, s. 3). Figur 17 forsøker derfor å synliggjøre at aritmetikkens prosesser er en forutsetning for deltakelse i algebraens diskurs. I tillegg får den frem at metaregler gradvis må modifiseres og at dette er ett av målene med skolens opplæring i matematikk (Sfard, 2010, s. 202). Figuren er laget med utgangspunkt i artikkelens analyse, og «Aritmetikk 1» viser diskursen elevene var deltakere i før møtet med en utvidet diskurs. Den neste diskursen («Aritmetikk 2») representerer de metareglene som ble kommunisert av læreren slik analysen viser, mens «Aritmetikk 3» får frem at det er flere realiseringer som er en del av den aritmetiske diskursen og at metaregel nummer 1 må revideres.

Figur 17: Diskurs om diskurs

ALGEBRA

ARITMETIKK 3

Metaregler:

1. Ledd kan realiseres gjennom reelle tall.
2. Uendret.
3. Uendret.
4. Uendret.
5. Uendret.
6. En divisor kan realiseres gjennom ledd.
7. En faktor kan realiseres gjennom ledd.
8. Ledd kan realiseres gjennom et divisjonsuttrykk (dividend og divisor).

ARITMETIKK 2

Metaregler:

2. Ledd kan realiseres gjennom faktorer.
3. Ledd kan realiseres gjennom ledd.
4. Ledd kan realiseres på flere nivåer i det samme regneuttrykket, overordnet og underordnet betydning.
5. En dividend kan realiseres gjennom ledd.

ARITMETIKK 1

Objektnivåregler:

- Ledd + ledd = sum
- Ledd – ledd = differanse
- Faktor · faktor = produkt
- Dividend : divisor = kvotient

(Gulbrandsen, 2006a, s. 95)

Metaregel:

1. Ledd kan realiseres gjennom enslige tall (hele tall og desimaltall).

Konklusjon

Norske 8. klassinger sliter med algebra (Grønmo et al., 2012), og ved å studere en «utvidet aritmetisk diskurs» (overgangen mellom aritmetikk og algebra), har jeg i denne artikkelen forsøkt å finne forklaringer på dette. Ut fra et kommognitivt perspektiv kan algebra ses på som aritmetikkens metadiskurs. Det er denne diskursen som danner grunnlaget og gir forståelse når elever møter en algebraisk diskurs (Sfard, 2010).

> … if algebra is a meta-discourse of arithmetic or in simpler terms, the science of patterns discernable in the realm of numbers and numerical operations, it is as unreasonable to think about algebra emerging prior to arithmetic as it is to imagine a house being built from its roof down (Sfard, 2012, s. 5).

Analysen indikerer at objektet ledd står frem som en sentral signifikans når en 8. klasse arbeider med aritmetiske regneuttrykk som en introduksjon til algebra. Metareglene som styrer hvordan klassens lærer realiserer et ledd på ulike måter, ble beskrevet, og de viser kompleksitet. I denne diskursen kom også kommognitive konflikter til syne, og her viste det seg at elevers narrasjoner var annerledes enn dem læreren handlet basert på.

Ved å studere denne diskursen som læring på metanivå og å bruke prosessen å likestille («saming») (Sfard, 2010), fikk også analysen frem at en utvidet aritmetisk diskurs – og derfor også en algebraisk diskurs – krever at objekter som tidligere ikke er sett på som like, likestilles. Dette er utfordrende for elever siden godkjente narrasjoner ikke lenger er gjeldende. I en objektivert diskurs er ikke denne utfordringen til stede, men for nybegynnere i diskursen er ikke likheten å finne. *«This is why the adults seem incapable of seeing as different the things that the children cannot se as the same»* (Sfard, 2010, s. 141).

For å tydeliggjøre aritmetikkens kompleksitet i enda større grad og for å vise prosessene som danner grunnlaget for algebra, har jeg også beskrevet alle realiseringer av et ledd som kan være til stede i regneuttrykk.

Denne case-studien har sine begrensninger, og kun ei undervisningsøkt er blitt analysert. Likevel peker fortolkningen av klassediskursen og analysen av ledds ulike realiseringer ut over dette utvalget. Er det et manglende aritmetisk grunnlag som resulterer i en ritualisert algebraisk diskurs hos norske ungdommer? Det er behov for mer forskning som beskriver en «utvidet aritmetisk diskurs», overgangen mellom aritmetikk og algebra. Grunnlaget og muligheten til å finne mening i algebraens diskurs, legges her.

Litteraturliste

Andersen, T., Berg, U. S., Dahl, K. R., Ravlo, G., & Wæge, K. (2015). *Vurdering av eksamen i matematikk.* Hentet fra http://www.matematikksenteret.no/content/5769/Vurdering-av-eksamen-i-matematikk.

Blomgren, O. (2015). *Hva er et ledd? "Er det liksom, et tall er et ledd?"*. UiS.

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous Meta-Arithmetic as a First Step toward School Algebra. *International Journal of Educational Research, 51*(3), 45–65. doi: 10.1016/j.ijer.2011.12.006

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design : choosing among five traditions* (2. utg.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Gerhard, S. (2013). How arithmetic education influences the learning of symbolic algebra. I B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (red.), *Proceedings of the Eighteenth Congress of the European Society for Research* *in Mathematics Education* (s. 430–439). Ankara, Turkey: European Society for Research in Mathematics Education.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Gulbrandsen, J. E. (2006a). *Nye Mega: matematikk for ungdomstrinnet : [8. trinn] Grunnbok 8A* (3. utg., bokmål). Oslo: Damm.

Gulbrandsen, J. E. (2006b). *Nye Mega: matematikk for ungdomstrinnet : [8. trinn] Grunnbok 8B* (3. utg., bokmål). Oslo: Damm.

Guttu, T. (1993). *Norsk illustrert ordbok: moderat bokmål og riksmål* (1. utg.). Oslo: Kunnskapsforlaget

Mellone, M., Romano, P., & Tortora, R. (2013). Different ways of grasping structure in arithmetical tasks, as steps toward algebra. I B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (red.), *Proceedings of the Eighteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 480-499). Ankara, Turkey: European Society for Research in Mathematics Education.

Sfard, A. (2010). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing* (First paperback ed.). New York, NY: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51*, 1–9.

---

[i] Det engelske ordet «signifier» er et substantiv. På norsk er «signifikant» et adjektiv, og substantivet «signifikans» brukes derfor (Guttu, 1993). «Signifikans» er et abstrakt substantiv, og det bøyes vanligvis ikke i flertall. I denne artikkelen gjør jeg dette likevel i mangel på et bedre alternativ. Dialog med språkforsker Finn-Erik Vinje bekrefter at dette er et riktig valg.

[ii]Engelsk: «narrative» (adjektiv og substantiv). Norsk: «narrativ» (adjektiv) og «narrasjon» (substantiv) (Guttu, 1993). Siden Sfard bruker «narrative» som et substantiv, brukes «narrasjon» i teksten. «Narrasjon» bøyes vanligvis ikke i flertall, men i mangel på et bedre alternativ gjøres dette likevel i denne artikkelen. Dialog med språkforsker Finn-Erik Vinje bekrefter at dette er et riktig valg.

[iii] Åsaken til at lærer bruker begrepet «konstant» når hun omtaler et ledd realisert som et tall i et aritmetisk regneuttrykk, vites ikke. En mulig forklaring kan være at hun gjør dette for å lede elevene inn i algbraens diskurs.

[iv] E-postkorrespondanse med Anna Sfard forteller at læring på metanivå krever at nye objekter introduseres i diskursen. I en algebraisk diskurs innføres det nye objekter, noe som ikke er tilfelle i en «utvidet aritmetisk diskurs».

Acta Didactica Norge

Manuskript

Online innsending av manuskript

Har du allerede brukernavn/passord til Acta Didactica Norge?
GÅ TIL INNLOGGING

Trenger du brukernavn/passord?
GÅ TIL REGISTRERING

Registrering og innlogging er påkrevet for sende inn elementer online og for å følge status for innsendte manuskript.

Forfatterinstruks

Omfang for vitenskapelige artikkeltyper *(format for andre typer bidrag finnes i våre Seksjonsretningslinjer)* ***Fagvurdering:*** Bidrag til seksjonen *Artikler* er fagfellevurdert av minst 2 fagkonsulenter utenom redaksjonen ***Sjangereksempel:*** • *Artikler som presenterer ny kunnskap* (**Omfang:** inntil 40 000 tegn uten tomrom, inkludert bibliografi) •Tematiske *artikler* (**Omfang:** inntil 40 000 tegn uten tomrom, inkludert bibliografi) **ØVRIGE KRAV TIL MANUSKRIPTENE Rene filer** En viktig side av arbeidet i et vitenskapelig tidsskrift, er å sørge for upåklagelig publikasjonsteknisk kvalitet i de publiserte manuskriptene. Dette krever en fullverdig forlagsmessig bearbeidingsprosess, som kan bli svært ressurskrevende. Det er imidlertid også et mål for fagtidsskrift å bruke så mye som mulig av ressursene sine til faglig og innholdsmessig innsats. Derfor oppfordres forfatterne til å følge disse retningslinjene samvittighetsfullt, og særlig å *unngå overflødig formatering i manuskriptfilene*. Vi minner om at det er et stilideal i vitenskapelige tekster at det er innholdet som skal framheves, og innpakningen nedtones. Derfor er den beste layout nesten usynlig, fordi ingen formvalg forstyrrer leserens konsentrasjon om innholdet i teksten. **Hele filer** Manuskriptfilen bør være *så komplett som mulig*. Dette innebærer at bilder, figurer, tabeller, sluttnoter og bibliografi helst skal være montert inn i manuskriptfilen slik forfatteren ønsker de skal framstå. Ved bruk av tilleggsverktøy for produksjon av henvisninger, eller av tabeller og figurer (som for eksempel EndNote eller Excel), skal de elementene som monteres inn helst gjøres så enkle og stabile som mulig. Dette gjøres på litt ulikt vis for ulike program, og tidsskriftet setter derfor pris på at forfatteren selv sørger for å få lokal hjelp til dette før filer sendes inn til tidsskriftet. Hvis dette ikke har latt seg gjøre, bør forfatteren varsle redaksjonen om dette allerede ved innsendingen av manuskriptet. **Velformete filer** Alle angivelser av bidragenes omfang i våre *Seksjonsretningslinjer* tar utgangspunkt i tidsskriftets *standard manuskriptsideoppsett*:

- sidestørrelse A4
- marger 2,5cm
- enkel linjeavstand
- typestørrelse 12 punkt
- skrifttype Times New Roman
- hovedformatet for litteraturhenvisninger og litteraturlister i dette tidsskriftet er "APA-stilen", som er fullstendig beskrevet i nyeste utgave av *American Psychological Associations Publication Manual*. Litteraturhenvisninger settes i parentes i den løpende teksten, med samme format som omgivelsene. Universitetsbiblioteket ved NTNU har nettpublisert enkle og gode veiledende eksempler på både *litteraturliste skrevet i APA-stil* og *referanser i tekst skrevet i APA-stil*.
- Sluttnoter skal helst unngås, og aldri brukes til rene litteraturhenvisninger. Fotnoter tillates dessverre ikke.
- korte sitat i den løpende teksten markeres med anførselstegn. Sitat som går over to linjeskift bør markeres som blokksitat; det vil si med ekstra linjeskift både før og etter sitatet, og med innrykkete avsnitt
- normalt skal ikke mer enn fem overskriftgrader brukes: 18 punkt, 14 punkt (+ kursiv), 12 punkt fet (+ fet kursiv).
- eneste form for utheving i den løpende teksten skal være kursiv, med to unntak: 1) for klikkbare URL-adresser som blir automatisk understreket, og 2) for bruk av fete typer i 12 punkts overskrifter

I ledetekstene til tabeller, figurer, bilder og noter utenfor den løpende teksten anbefales bruk av 10 punkts groteskskrift, som for eksempel skrifttypen Arial. Dette vil også være et godt valg inne i tabeller og figurer. For større bibliografier/litteraturlister kan Arial 9 punkt eller Times New

OPEN JOURNAL SYSTEMS

Hjelp

BRUKER
Brukernavn rmosvold
Passord ••••••••
Husk meg
Logg inn

VARSLINGER
- Vis
- Abonner

SPRÅK
Norwegian

TIDSSKRIFTINNHOLD
Søk
Alle
Søk

Finn fram
- i utgaver
- i forfattere
- i titler
- Andre tidsskrift

INFORMASJON
- For lesere
- For forfattere
- For bibliotekarer

Roman 10 punkt velges. **Strukturerte sammendrag** Acta Didactica Norge krever fra og med juni 2010 at bidragsytere til tidsskriftet leverer et *strukturert sammendrag* ved innsending av artikkelmanuskript som ønskes fagfellevurdert (jf. *Vol. 4 Nr. 1 Art. 4*). Sammendraget skal være på maks 250 ord, og strukturert slik at det besvarer spørsmålene under overskriftene nedenfor. Disse overskriftene skal **ikke** brukes i sammendraget, som skal være en sammenhengende tekst:

- **Sammendrag**
- **Innledning** Hva har du undersøkt eller utviklet - og hvorfor? (emne, bakgrunn, problemstilling)
- **Material og metode** Hva brukte du i arbeidet, og hvordan brukte du det? *(Angi om nødvendig hvor i artikkelen dette er behandlet.)*
- **Resultat** Hva ble hovedresultatet av arbeidet ditt; hva førte arbeidet ditt til? *(Angi om nødvendig hvor i artikkelen dette er behandlet.)*
- **Diskusjon og konklusjon** Hva betyr resultatet av arbeidet ditt, og hvordan forholder du dette resultatet til annen relevant forskning? *(Angi om nødvendig hvor i artikkelen dette er behandlet.)*

Det strukturerte sammendraget skal bidra til å klargjøre viktige hovedfunksjoner i de innsendte manuskriptene. Dette vil være til hjelp både for forfatterne, for redaksjonens arbeid, og for leserne av tidsskriftets artikler. Sammendraget vil både bli publisert som ingress i utskriftsversjonen av artikkelen, og det vil også i sin helhet inngå i artikkelfilens søkbare metadata. Dermed sikrer vi svært god tilgang til artiklene for søkeinstrument på internett, noe som i sin tur bør sikre hver enkelt artikkel maksimal tilgjengelighet og spredning til beste for bidragsyterne våre.

Retningslinjer for artikler som presenterer ny forskning.

Disse skal vanligvis ikke overstige 40 000 tegn uten mellomrom.

Artikler som presenterer ny forskning skal innholde følgende seksjoner. Innholdet i de ulike seksjonene kan variere, avhenging av type artikkel.

Et *Sammendrag*

1. på maksimum 250 ord
2. fem til syv søkeord
3. artikler på norsk, dansk eller svensk skal også innholde et sammendrag på engelsk på ikke mer enn 250 ord, og tre til fem søkeord
4. artikler på engelsk skal også innholde et sammendrag på norsk, dansk eller svensk på ikke mer enn 250 ord, og tre til fem søkeord

En *Innledning:*

1. bakgrunn og rasjonale for studiet
2. forskningsspørsmålet
3. en litteraturgjennomgang som rammer inn forskningsspørsmålet. Det bør også omfatte internasjonale studier

En *Metodeseksjon:*

1. forskningsdesign
2. beskrivelse av forskningsinstrumenter, datainnsamling og analyse
3. beskrivele av utvalget
4. tiltak for a sikre reliabilitet og validitet/overførbarhet (transferability)

En *Resultatseksjon*

1. innholde en logisk og sammenheng fremstilling av funnene delt inn i passede seksjoner og underseksjoner
2. kan inneholde grafer og tabeller
3. en diskusjon av funnene hører ikke hjemme i denne seksjonen

En *Diskusjons*seksjon

1. et inneledende sammendrag av funnene
2. en tolkning av disse
3. drøfting i forhold til teori og relevante studier
4. sprøsmål omkring validitet/overførbarhet og begrensinger

En Konklusjonsseksjon

1. kort oppsummering med eventuelle implikasjoner av studiet
2. forslag til videre forskning

Litteraturliste i APA format

Eventuell ***vedlegg*** med forskningsintrumentene som er brukt

Retningslinjer for tematiske artikler.

Disse skal vanligvis ikke overstige 40 000 tegn uten mellomrom.

Tematiske artikler skal innholde følgende seksjoner. Innholdet i de ulike seksjonene kan variere noe.

Et *Sammendrag*

1. på maksimum 250 ord
2. fem til syv søkeord
3. artikler på norsk, dansk eller svensk skal også innholde et sammendrag på engelsk på ikke mer enn 250 ord, og fem til syv søkeord
4. artikler på engelsk skal også innholde et sammendrag på norsk, dansk eller svensk på ikke mer enn 250 ord, og tre til fem søkeord

En *Innledning:*

1. bakgrunn og rasjonale
2. forskningsspørsmålet
3. en litteraturgjennomgang som rammer inn forskningsspørsmålet. Det bør også omfatte internasjonale studier

En *Resultat/Diskusjonsseksjon*

1. skal være delt i seksjoner, og hvis relevant, underseksjoner
2. en sammenhengede tekst vil ikke bli akseptert

En Konklusjonsseksjon

1. kort oppsummering med eventuelle implikasjoner av studiet
2. forslag til videre forskning

Litteraturliste i APA format

Eventuell ***vedlegg***

Du kan finne et **eksempel på en tematisk artikkel** i henhold til våre krav her: http://adno.no/index.php/adno/article/view/207/246

Debatter og diskusjoner

I dette forumet utgis korte artikler hvor man diskuterer tidligere utgivelser i Acta Didactica Norge, eller komme med tilsvar. De er vanligsvis ikke lengre enn 10 000 tegn uten mellomrom. Bidragene skal være konstruktive og å bidra til å fremme en konstruktiv diskusjon og debatt. Diskusjonsartikler vurderes på samme måte om vanlige artikler.

Anmeldelser

Acta Didactica Norge er svært interessert i å motta anmeldelser av undervisningsrelevante bøker og læringsressurser. Anmelderen bes om å gi en klar og systematisk beskrivelse og vurdering som kan hjelpe leseren med å avgjøre hvor relevant materialet er.

Det forventes at anmeldelsen knyttes opp mot relevant teori og forskning. Anmeldelsen bør ha med navn, institusjonstilknytning, e-postadresse og en URL-hvis relevant. Det bør også være et bilde av boken eller den aktuelle læringsressursen.

Følgende bør tas med i begynnelsen av anmeldelsen:

- Forfatter(e)
- Tittel
- Utgivelsesdato
- Utgiver
- Utgivelsested og land
- Antall sider
- ISBN
- Pris

Et eksempel på en bokanmeldelse finnes her: http://adno.no/index.php/adno/article/view/160/151

Ved innsending av bidrag vil innsenderen dessuten måtte bekrefte følgende sjekkliste:

Sjekkliste for klargjøring av manuskript

Som del av innsendingsprosessen må forfatteren krysse av for at manuskriptet oppfyller følgende krav, og manuskript som ikke oppfyller kravene og følger retningslinjene, kan bli returnert til forfatteren.

1. Manuskriptet er på norsk, engelsk eller skandinaviske språk (jf. *Vol. 4 Nr. 1 Art. 4*).
2. Manuskriptet er ikke tidligere publisert, og er heller ikke til vurdering i noe annet tidsskrift (eller gi eventuelt en nærmere forklaring i feltet 'Kommentarer til redaktøren').
3. Manuskriptfilen er levert i Microsoft Word eller RTF filformat.
4. Manuskriptet følger kravene til strukturerte sammendrag, stil og bibliografisk formatering, slik de er angitt i Forfatterinstruksen, som finnes i *Om tidsskriftet*.

   Det leveres sammedrag med nøkkelord på norsk/svensk/dansk og engelsk.

5. Teksten bruker enkel linjeavstand; 12-punkts skrifttype som normalskrift (helst Times

New Roman); kursiv i stedet for understreking (unntatt i URL-adresser); bruker aldri fet skrift (unntatt i overskrifter: kursiv er ellers eneste uthevingsmåte); og alle illustrasjoner, figurer og tabeller er satt inn på rett plass i teksten.
6. Så langt det går an er URL-adresser oppgitt til alle siterte kilder som foreligger på nett, også de som gir tilgang til Open Access versjoner av kilden. URL-adressene skal være aktive "klikkbare" lenker.
7. Forfatteren(e) bekrefter at alle relevante forskningsetiske vurderinger av manuskriptet er gjort, og sier seg villig til å redegjøre for dette på forespørsel. (Se også Retningslinjer fra de nasjonale forskningsetiske komiteer).
8. Forfatteren(e)s formål med innsendingen av manuskriptet til tidsskriftredaksjonen, er å offentliggjøre manuskriptet i tidsskriftet etter fagfellevurdering og manuskriptbehandling. Forfatteren(e) er kjent med tidsskriftets fagvurderingsprosess, Open Access retningslinjer, Erklæring om copyright, og Erklæring om personopplysninger.

Erklæring om copyright

- Forfatteren(e) beholder sin opphavs- og kopieringsrett til eget manuskript, men gir tidsskriftet varig rett til 1) å fremføre manuskriptet for offentligheten i den opprinnelig publiserte digitale form, og 2) å registreres og siteres som første publisering av manuskriptet.
- Forfatteren må selv forvalte sine økonomiske kopieringsrettigheter overfor eventuell tredjepart.
- Tidsskriftet gir ingen økonomisk eller annen kompensasjon for innsendte bidrag, medmindre det er gjort særskilt avtale om dette med forfatteren(e).
- Tidsskriftet plikter å arkivere manuskriptet (inklusive metadata) i den opprinnelig publiserte digitale form, i minst ett dertil egnet åpent tilgjengelig langtidsarkiv for digitalt materiell, som for eksempel i de norske universitetenes institusjonsarkiv innen rammen av NORA-samarbeidet.
- Lesere av tidsskriftet kan ta utskrift av de fremførte manuskriptene under samme betingelser som gjelder ved papirkopiering av eksemplar. Dette innebærer at masseframstilling av trykte eksemplar, eller framstilling av eksemplar for kommersielle formål, ikke er tillatt uten etter avtale med forfatteren(e).

Erklæring om personopplysninger

Navn og e-postadresser som skrives inn til dette tidsskriftet og nettstedet vil kun bli brukt for de formålene som er oppgitt for tidsskriftet eller som følger av gyldig rettslig pålegg, og vil ikke bli gjort tilgjengelig verken for andre formål eller for uvedkommende.

ISSN 1504-9922

Service provided by: University of Oslo Library