Universitetet
i Stavanger

DET HUMANISTISKE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master i Matematikkdidaktikk, MUTMAS 1	Vårsemesteret, 2016 Åpen
Forfatter: Roar Storegraven	……………………………………… (signatur forfatter)

Veiledere: Raymond Bjuland, Reidar Mosvold.

Tittel på masteroppgaven: *Et kommognitivt blikk på eksempelbruk i matematikkundervisning.*

Engelsk tittel: *A commognitive view on the use of examples in teaching mathematics.*

Emneord: Diskurs, eksempler, eksemplifiseringsdiskurs, matematikkundervisning, algebra, funksjoner, kommognitivt rammeverk.	Antall ord: 30317 + vedlegg/annet: 32506 Stavanger, ……………….. dato/år

Et kommognitivt blikk på eksempelbruk i matematikkundervisning

A commognitive view on the use of examples in teaching mathematics

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på en femårig lærerutdannelse og overgangen til yrkeslivet. Jeg er glad jeg valgte å ta en mastergrad i matematikkdidaktikk, da disse to årene mer enn noe annet har inspirert meg og åpnet øynene mine for hvor fascinerende matematikken er. Dette skyldes i stor grad dyktige forelesere som har formidlet faget på en interessant måte med mye engasjement.

Arbeidet med masteroppgaven har både vært spennende og utfordrende. Særlig det å sette seg inn i det teoretiske rammeverket har vært en krevende prosess, da det bryter med en del etablerte begreper og beskrivelser knyttet til læring og utvikling. Denne omstillingsprosessen har til tider ført til stor frustrasjon. På den annen side har det vært interessant og lærerikt, og det har åpnet for nye tolkninger av hva som foregår når vi mennesker lærer noe nytt. Dette er noe jeg tar med meg inn i læreryrket som jeg tror jeg vil ha stor nytte av.

Jeg ønsker å takke mine veiledere Raymond Bjuland og Reidar Mosvold. Dere har hver gang stilt forberedt til veiledning, kommet med gode innspill og grundige tilbakemeldinger på arbeidet mitt.

I tillegg ønsker jeg å si takk til min kjære samboer som har blitt sittende mange kvelder alene i intensive skriveperioder, men som til tross for dette har støttet og pushet meg til å stå på. Arbeidet hadde ikke gått like lett uten denne støtten på hjemmebane.

Roar Storegraven

Universitetet i Stavanger

Juni 2016

Sammendrag

Denne masteroppgaven handler om læreres bruk av eksempler i matematikkundervisning. Mange har pekt på at eksempler spiller en viktig rolle i matematikk, noe som kan underbygges både historisk og teoretisk. Et eksempel omtales i litteraturen som et spesifikt tilfelle av et generelt prinsipp. Det har blitt forsket på ulike eksemplers påvirkning på læring av matematikk i skolen, men ingen har enda sett spesifikt på eksempelbruk i fra et *kommognitivt* perspektiv, et perspektiv som tar utgangspunkt i matematikk som en veldefinert form for kommunikasjon – en *diskurs*. Å lære matematikk blir i denne sammenheng omtalt som prosessen med å bli en sentral deltaker i en matematisk diskurs.

Med dette utgangspunktet formulerte jeg følgende forskningsspørsmål: *Hvilken rolle spiller lærerens bruk av eksempler for endring av elevers matematiske diskurs?* For å svare på spørsmålet har jeg gjennomført en *instrumentell case-studie*, hvor jeg har tatt sikte på å utvikle en teoretisk forståelse på grunnlag av et avgrenset empirisk materiale. Studien har omfattet to case, en 8. klasse og en 10. klasse. Datamaterialet består av transkripsjoner fra helklasseundervisning av emnene algebra og funksjoner.

Jeg beskriver eksempler i kommognitive termer som konkrete tilfeller av *rutiner*, *narrasjoner* eller *matematiske objekt* – tre sentrale komponenter i en matematisk diskurs. I analysene forsøker jeg å avgjøre hvilke typer eksemplifiseringer som er representert i datamaterialet og hvorvidt læring på *objektnivå* eller *metanivå* er mest sannsynlig. For å kommentere på potensielle muligheter og utfordringer i de ulike eksemplifiseringene, har jeg identifisert sentrale rutiner, narrasjoner og matematiske objekt og drøftet disse i lys av den kommognitive teorien.

Basert på mine funn argumenterer jeg for at en læreres *eksemplifiseringsdiskurs* er av minst like stor betydning for elevers læring av matematikk som eksemplene i seg selv. Teorien om en eksemplifiseringsdiskurs plasserer seg inn under idéen om en *matematisk undervisningsdiskurs*.

Innhold

1 Innledning

> *The notion of an example, and its relation to generality, is an integral part of the discipline of mathematics.*
>
> (Bills & Watson, 2008, s. 1)

Sitatet beskriver eksemplenes plass i matematikken. Helt siden antikken har matematikk utviklet seg gjennom forsøk på å generalisere og formulere generelle prinsipper basert på erfaringer med konkrete problemstillinger. Da er det kanskje ikke så rart at eksempler har fått sin plass i teorier om læring og undervisning av faget (Bills et al., 2006). Denne masteroppgaven tar utgangspunkt i påstanden i sitatet ovenfor om at konkrete eksempler, og deres tilknytning til generelle prinsipper, er en integrert del av matematikken. En læreres bruk av eksempler i matematikkundervisning kan derfor antas å være av betydning for elevers læring.

Motivet for å gjøre en studie av eksempelbruk i matematikkundervisning bygger på en opplevelse av at det finnes gode eksempler og dårlige eksempler. De fleste har antakeligvis forsøkt å forklare et fenomen for andre, og oppdaget at eksempelet man velger for å illustrere idéen ikke fungerer så godt som man hadde ønsket; faktisk kan det virke som om det bare fører til større uklarhet. Dette kan man også oppleve når man underviser matematikk. For å best mulig kunne hjelpe elever å utvikle seg i faget, ville det derfor vært verdifullt for matematikklærere å vite noe om bruken av eksempler i undervisningssammenheng. Det viser seg at ferdigheter i å plukke ut gode eksempler for undervisning ikke får noe særlig oppmerksomhet i lærerutdanningene, og at dette er noe lærere stort sett utvikler over tid i praksisfeltet (Zodik & Zaslavsky, 2008; Rowland, 2008).

Det er forsket mye på eksempler de senere årene, og eksemplene har blitt delt i ulike typer og kategorier (Bills et al., 2006). Det har også blitt sagt en del om læreres forhold til eksempler og hva som kreves av en lærer for å utnytte mulighetene i et gitt eksempel (e.g. Rowland, 2008; Zaslavsky, 2010). Innen forskning på eksempler i matematikkundervisning er det en utstrakt bruk av metaforer for å prøve å beskrive hva som skjer i hodet på den lærende. Et eksempel er idéen om at hver enkelt har *tilgang* til et «example space» (Watson & Mason, 2005; Zaslavsky & Peled, 1996). Flere bruker også ordet *assimilering* for å beskrive hvordan eksempler kan bli en del av et etablert «concept image» (e.g. Rowland & Zaslavsky, 2005; Skemp, 1979). Denne terminologien stammer fra kognitivismen og særlig Jean Piaget (Bills et al. 2006). Mye av forskningen som er gjort på eksempler i matematikkundervisning følger denne tradisjonen, en tradisjon som tar utgangspunkt i at læring er noe som skjer *innenifra*. Det finnes imidlertid læringsteorier som anser individets utvikling for å være en prosess hvor individet gradvis forsøker å ta del i kollektivt etablerte aktiviteter og kommunikasjonsmønstre (Sfard, 2008). Dette innebærer et syn på læring som noe som blir initiert *utenifra*. Denne oppgaven benytter det *kommognitive* rammeverket utviklet av Anna Sfard for å undersøke emnet. Dette rammeverket bygger på en sosiokulturell tradisjon og legger til grunn det deltakerorienterte læringssynet. Sfard (2008) belyser utfordringer med å støtte seg på typen metaforer som er nevnt ovenfor for å beskrive noe vi ikke kan observere direkte – nemlig hva som skjer i hodene våre når vi lærer. Man snakker gjerne om å *tilegne seg kunnskap*, men hva er egentlig kunnskap? Hva vil det si å *tilegne* seg det? Dersom begrep ikke er operasjonaliserte, og deres definisjoner ikke blir gjort eksplisitte, risikerer vi å sitte med ulike oppfatninger av hva for eksempel kunnskap er for noe. Sfard (2008) hevder at noen av de store spørsmålene knyttet til individets utvikling i bunn og grunn skyldes svikt i vår kommunikasjon *om* fenomenene.

Fra et kommognitivt perspektiv er et kunnskapsområde som matematikk en veldefinert form for kommunikasjon (Sfard, 2008). Matematiske eksempler må nødvendigvis være en del av denne typen kommunikasjon. Det virker interessant å undersøke hvordan idéen om eksempler passer inn i denne alternative teoretiske tilnærmingen. Cooper (2014) peker på at et kommognitivt perspektiv kan være det som trengs for å løse gåten om hvordan læreres undervisning og deres undervisnings*kunnskap* er knyttet sammen. Det finnes forskning som omhandler eksempler og hvor teorigrunnlaget har innslag av det kommognitive rammeverket. Jill Adler har sammen med kollegaer i Sør-Afrika utviklet rammeverket *Mathematical Discourse in Instruction*, hvor to hovedkomponenter er hvilke eksempler som blir brukt og hvilke muntlige forklaringer som følger med (Adler & Ronda, 2015). Selve eksemplene er imidlertid analysert i lys av variasjonsteori.

I denne oppgaven anvendes det kommognitive rammeverket i analyse av undervisningssekvenser som inneholder eksemplifisering av matematiske idéer. Bruken av dette rammeverket åpner for en annerledes tilnærming til bruken av eksempler i undervisningssammenheng og kaster nytt lys over hva som er av betydning i dette arbeidet. Oppgaven er skrevet med hensikten om å besvare følgende forskningsspørsmål:

Hvilken rolle spiller lærerens bruk av eksempler for endring av elevers matematiske diskurs?

For å svare på forskningsspørsmålet viser jeg til hvilke utfordringer som er knyttet til å endre et individs matematiske diskurs, og illustrerer de teoretiske poengene med empiriske data. Observasjonsdata fra to klasserom blir analysert med fokus på kommunikasjonen rundt konkrete eksempler som brukes i undervisningen. De to casene fungerer som empirisk grunnlag for å utvikle en teoretisk forståelse av fenomenet. Generaliseringer utover denne studien gjøres på et rent teoretisk plan.

Det kommognitive rammeverket inneholder en rekke nye definisjoner av velkjente begrep. I forskningsspørsmålet er *læring* byttet ut med den kommognitive definisjonen *endring i diskurs* (Sfard, 2008). Rammeverket vil bli grundig gjennomgått i teorikapittelet. Arbeidet med denne studien startet med en hypotese om at hvilke eksempler som blir brukt i undervisningen av et generelt prinsipp er avgjørende for hva man vil kunne formidle om dette prinsippet. Idéen var at enkelte eksempler tydeliggjør visse aspekter ved det generelle bedre enn andre. Gjennom analysearbeidet ble det tydelig at dette ikke alltid trenger å være det mest avgjørende. Det finnes gode og mindre gode eksempler på et matematisk prinsipp, det kommer tydelig frem av forskningen som foreligger på området (Bills et al., 2006). Et kommognitivt blikk på det hele antyder allikevel at hva en lærer *gjør* og *sier* i tilknytning til eksemplene ofte kan være av like stor betydning som selve eksemplene. I tråd med den opprinnelige hypotesen var det forventet at analysen skulle avdekke viktigheten av hvilke eksempler som ble brukt i sekvensene. Det viste seg imidlertid at det var vanskelig å argumentere for dette basert på resultatene som analysene ga. I resultat- og diskusjonsdelen drøftes funnene i oppgaven i forhold til annen forskning på eksempler og eksemplifisering, og jeg forsøker å kommentere på forskningsspørsmålet mitt.

2 Teori

I denne delen av oppgaven gir jeg først et kort overblikk over de sentrale linjene innen forskning på eksempler i undervisningssammenheng, før jeg går mer inn i *hva* et eksempel egentlig er. Deretter redegjør jeg for det kommognitive rammeverket og kommer med et forslag til hvordan eksempler kan plasseres inn i dette perspektivet.

2.1 Tidligere forskning

Dersom man tar et historisk perspektiv på eksempler kan man peke på for eksempel Girolamo Cardano og Robert Record, to anerkjente matematikere som levde på 1500-tallet, som begge inviterte leseren av tekstene sine til å konstruere egne eksempler for å fremme forståelsen av matematiske idéer (Bills et al., 2006). Det samme finner man også i nyere tid hos blant andre Pólya (1962). Fra 1700-tallet og frem til nyere tid har diskusjonen hovedsakelig omhandlet den deduktive kontra den induktive metode, kjennetegnet ved henholdsvis det generelle først eller det generelle senere (Bills et al., 2006). Ved en induktiv tilnærming er målet at man gjennom møtet med et utvalg eksempler vil være i stand til å identifisere det som er stabilt på tvers av samtlige eksempler, og på den måten selv oppdage og formulere den generelle sammenhengen. Dersom man arbeider deduktivt er tanken at man ved å kjenne det generelle begrepet først vil kunne gjenkjenne konkrete eksempler som spesielle tilfeller av det generelle, og på den måten kunne løse et slikt problem.

I senere tid har eksempler vært sentrale innenfor ulike læringsteorier, og det er mye av det samme som går igjen på tvers av tradisjonene. Man prater ofte om en eller annen form for generelt begrep, og eksempler som konkrete tilfeller av dette begrepet. Innenfor en kognitiv tradisjon prater man gjerne om «concept image», at man har et slags mentalt bilde av et fenomen eller begrep[1]. Idéen bygger på Piaget sine teorier om *mentale skjema*. Skemp (1969) forklarer hvordan et slikt bilde på et begrep dannes ved abstraksjon fra en rekke eksempler. Av dette følger det at hvilke eksempler som brukes for å danne et begrep er avgjørende. Eksempler kan være preget av «støy», det vil si at eksempelet inneholder visse egenskaper

[1] Ordet *begrep* anser jeg som en bedre oversettelse av «concept» enn den norske varianten *konsept*. Et konsept defineres i det norske språket som et utkast eller kladd til et skriftlig arbeid, alternativt som en plan for utvikling av et nytt produkt eller en idé. Et begrep refererer til en idé eller en klart avgrenset og allmenngyldig forestilling, eks. *angst* eller *kjærlighet*. (Wangensteen, 2004)

som ikke er av betydning for det matematiske begrepet som er i fokus, og eksempler på hva begrepet *ikke* er kan være med på å tydeliggjøre begrepets grenser (Skemp, 1969). Personlige «begrepsbilder» basert på uheldige eksempler vil kunne bli for ulike det kollektivt definerte begrepet, noe som vil kunne gjøre det vanskelig for individet å håndtere enkelte tilfeller av det generelle begrepet.

Behavioristisk forskning har brukt eksempler som stimuli for å frembringe læring, og har forsøkt å utvikle definisjoner på ulik atferd med økende kompleksitet som et resultat av å bli utsatt for ulike eksempler (Bills et al., 2006).

Variasjonsteori har forsøkt å beskrive læring som det å bli bevisst på ulike dimensjoner av variasjon. Gjennom bruk av ulike eksempler kan man la enkelte egenskaper ved et matematisk begrep variere, samtidig som man holder andre egenskaper konstant. På denne måten kan man identifisere denne egenskapen som en dimensjon av begrepet som kan variere (Marton, Tsui, Chik, Ko, & Lo, 2004). Ta for eksempel det matematiske begrepet «brøk». Ved å la nevneren i brøken variere over flere eksempler, samtidig som de andre strukturene holdes konstant, vil man kunne identifisere nevneren som noe som kan variere – en dimensjon av variasjon. Hvilke eksempler som brukes for å illustrere et matematisk begrep blir således avgjørende for hva som blir gjort *tilgjengelig for læring* (Marton & Pang, 2006). Jill Adler og kollegaer har benyttet seg av variasjonsteori for å si noe om kvaliteten på eksempler, som et ledd i å beskrive en matematisk undervisningsdiskurs (Adler & Ronda, 2014, 2015; Venkat & Adler, 2012).

Bills et al. (2006) viser til Hershkowitz og hennes fokus på menneskers tendens til å resonnere ved hjelp av *prototyper* heller enn definisjoner. Et prototypisk eksempel er det eksempelet som i høyest grad reflekterer et begreps overliggende struktur. En prototype har et sett med egenskaper som mer enn noen andre eksempler reflekterer egenskapene til alle andre eksempler på begrepet. Slike prototyper er eksempler som fungerer som «mentale referansepunkter» for ulike begreper, og andre eksempler på det samme begrepet vurderes opp mot denne prototypen (Schwarz & Hershkowitz, 1999). Dette er en mer fremtredende teknikk hos barn og unge, og ser ut til å avta etter hvert som individet blir en mer erfaren *matematist*[2], og i større grad kan foreta vurderinger av eksempler basert på egenskaper ved begrepers definisjon. Allikevel vises det til en studie av Markovits (1982) hvor en betydelig andel ungdomsskoleelever påstår at den eneste type funksjon som kan gå gjennom to gitte punkt i planet er den lineære funksjonen. Det argumenteres for at elevene har utviklet et «concept image» av begrepet funksjoner som i all hovedsak bygger på det prototypiske eksempelet *den lineære funksjon* (Schwarz & Hershkowitz, 1999). Det vises også til et annet interessant fenomen, nemlig at yngre elever eksempelvis kan påstå at et kvadrat *ikke* er en firkant fordi den har fire like sider, noe andre firkanter ikke har. Tilsvarende har man sett at en likesidet trekant satt litt «på skrå» ikke alltid regnes som en likesidet trekant, fordi prototypen elever sammenligner med alltid har en horisontal side (Schwarz & Hershkowitz, 1999). Dette er eksempler på at det å basere sitt begrepsbilde på prototyper vil kunne føre til at man anser enkelte tilfeller av et begrep som ugyldige.

Teorien om «personal example spaces» hevder at den (mentale) samlingen av eksempler en matematist har tilgang til i et gitt øyeblikk, samt mangfoldet av koblinger mellom eksemplene, spiller en stor rolle for i hvilken grad matematisten er i stand til å forstå og håndtere matematiske oppgaver og aktiviteter (Bills et al., 2006). Man kan tenke seg at på et gitt tidspunkt vil et individ som forsøker å lære matematikk ha internalisert en viss mengde eksempler relatert til det aktuelle matematiske begrepet. Mellom disse eksemplene er det gjort visse koblinger, slik at det hele vil kunne beskrives som et strukturert nettverk av konkrete eksempler på et matematisk begrep. Dette nettverket er hva en matematist har å spille på i møte med nye oppgaver og aktiviteter knyttet til begrepet. Watson og Mason (2005) har formulert to prinsipper knyttet til denne idéen om *personlige eksempelrom* (min oversettelse). For det første at å lære matematikk består av å utforske, omrokere på, automatisere og utvide ens personlige eksempelrom, og koblingene mellom og innad i dem. For det andre at å oppleve (hensiktsmessig) utvidelse av ens personlige eksempelrom bidrar til mer fleksibilitet i ens egen tenkning, samt fostrer evnen til å sette pris på og å adoptere nye begrep. Det er viktig å peke på at personlige eksempelrom er individuelle og situerte; hvilke eksempelrom som i et gitt øyeblikk er tilgjengelig for et individ er avhengig av kontekst (Bills et al., 2006).

[2] Ordet *matematist* er en direkte oversettelse av «mathematist» slik Sfard (2008) bruker det. Ordet refererer til en deltaker i en matematisk diskurs, uansett nivå, da begrepet *matematiker* er reservert dem som arbeider med matematikk på et profesjonelt nivå.

2.2 Hva er et eksempel?

Betydningen av ordet *eksempel* er så langt ikke blitt omtalt. Da denne oppgaven dreier seg om dette fenomenet er det nødvendig å klargjøre hva som menes med det. I litteraturen finnes mange definisjoner på hva et eksempel er, og de forteller stort sett det samme. Chick (2007, s. 5) definerer eksempler som «a specific instantiation of a general principle, chosen in order to illustrate or explore that principle.» Watson og Mason (2002a, 2002b) bruker ordet eksempel for å referere til «…anything used as raw material for generalising». Eksemplifisering defineres som «…any situation in which something specific is being offered to represent a general class». Zodik og Zaslavsky beskriver eksemplene som «…a particular case of a larger class, from which one can reason and generalize» (2008, s. 1). Definisjonene peker alle på at et eksempel representerer et element plukket fra en mengde bestående av alle konkrete tilfeller av et matematisk begrep. Denne mengden kan for øvrig være endelig eller uendelig. Litteraturen viser større variasjon når det gjelder å dele eksempler inn i ulike kategorier. En overordnet inndeling er at det finnes eksempler på begreper og det finnes eksempler på prosedyrer. Et eksempel på et begrep kan være en rettvinklet trekant, og fremgangsmåten for å løse likninger av annen grad kan være et eksempel på en prosedyre. Under kategorien prosedyre skiller man også gjerne mellom ferdige løsningsforslag som viser hvordan en prosedyre kan anvendes, og oppgaver som elever selv må løse (Bills et al., 2006). På tvers av disse overordnede kategoriene, finnes tre forskjellige typer eksempler: *generiske eksempler*, *mot-eksempler* og *ikke-eksempler*.

Et generisk eksempel er et «typisk» eksempel på et begrep. Begrepet har mye til felles med prototyper, men omfatter et videre spekter av eksempler. Tanken er allikevel mye den samme som med prototypene, nemlig at slike typiske eksempler på prosedyrer eller begreper kan fungere som referansepunkter for den lærende i møte med nye problemer og oppgaver. Et mot-eksempel er litt annerledes, da de krever en matematisk påstand eller hypotese de kan motsi. I møte med påstander om at en viss sammenheng gjelder for alle mulige tilfeller er det vanlig å lete etter mot-eksempler for å forsøke å avkrefte at påstanden er sann. Mot-eksempler er også sentrale dersom man ønsker å skape selvmotsigelser som et ledd i elevers læring – også kjent som kognitive konflikter (Zazkis & Chernoff, 2008). Man kan også gjøre seg bruk av ikke-eksempler dersom man forsøker å ramme inn et matematisk begrep, ved å trekke frem eksempler på hva det *ikke* er. Både mot-eksempler og ikke-eksempler kan være nyttige når man ønsker å klargjøre hvor grensene for et begrep går (Zodik & Zaslavsky, 2008).

Bills et al. (2006) sin omfattende gjennomgang av forskning på eksempler i matematikkundervisning avdekket noen mangelfulle områder. (1) Sekvensering av eksempler, variasjonsdimensjoner og grensene for akseptabel variasjon må undersøkes nærmere. I tillegg ble det etterspurt mer kunnskap om (2) måter å styre elevers fokus mot å oppfatte det eksemplariske, samt (3) måter å endre elevers fokus i arbeid med oppgaver slik at oppgavene blir mer pedagogiske og effektive. På dette tidspunktet visste man også lite om (4) læreres arbeid med å velge hvilke eksempler de bruker, og (5) rollen som ferdige løsningsforslag til oppgaver spiller i elevers konstruksjon av et matematisk begrep. En rekke studier ble i ettertid gjennomført for å imøtekomme disse kunnskapshullene (Rowland, 2008; Zazkis & Chernoff, 2008; Zodik & Zaslavsky, 2008).

Lærernes bevissthet rundt eksempelbruk er et av områdene som har fått en del oppmerksomhet. Chick (2009) knytter læreres arbeid med eksempler opp mot lærernes *matematiske undervisningskunnskap* (Mathematical Knowledge for Teaching) og hvordan dette påvirker lærernes evne til å se hvilke muligheter som finnes i de ulike eksemplene. MKT-rammeverket er utviklet av Deborah Ball og kollegaer og beskriver ulike sider av kunnskapen som en lærer trenger for å undervise i matematikk (Ball, Thames, & Phelps, 2008).

Ofte er lærere nødt for å produsere eksempler på stående fot i undervisningssammenheng. Ifølge Zodik og Zaslavsky (2008) er det to situasjoner hvor dette kreves: enten som svar på påstander eller spørsmål fra elever, eller dersom de eksemplene som er planlagt på forhånd ikke strekker til. De samme forskerne kunne også rapportere at det ikke ble observert ett eneste tilfelle hvor en lærer brukte et *planlagt* mot-eksempel. Dette skjedde kun som spontane reaksjoner på elevpåstander.

Zaslavsky (2010) har sett på to momenter ved eksempler, nemlig det som omtales som eksemplenes «explanatory power», og i tillegg hvilke krav et eksempel stiller til læreren som skal behandle det. Eksemplenes forklaringsevne («explanatory power») diskuteres her på bakgrunn av noen viktige kjennetegn på «gode» eksempler. Egenskaper ved «gode» eksempler er gjennomsiktighet og at de fostrer generalisering (Bills et al., 2006; Zaslavsky, 2010). Tanken om gjennomsiktighet samsvarer med noe av idéen rundt generiske eksempler – eksempler som legger opp til at man kan se de generelle sammenhengene gjennom det spesielle tilfellet. Når det gjelder fostring av generalisering er det ønskelig at et eksempel understreker de kritiske egenskapene som gjør eksempelet til et spesielt tilfelle av det aktuelle matematiske begrepet, samtidig som det peker på det som er tilfeldig og som derfor kan variere (Zaslavsky, 2010). Eksemplene det her snakkes om omtales som «instructional examples» og defineres som et eksempel gitt av læreren i en undervisningskontekst. Hvordan læreren styrer elevenes fokus mot eksemplene vil i denne sammenheng også være avgjørende for om eksemplifiseringen oppfattes «god» i tråd med punktene ovenfor. Zaslavsky peker på at å fokusere på eksemplene på denne måten stiller krav til lærerens pedagogiske fagkunnskap. Her ser man likheter med Chick (2009) som nevnt ovenfor.

Adler og Ronda (2015) argumenterer for at et eksempel brukt i instruksjon av matematikk aldri står helt alene. I rammeverket sitt «Mathematical Discourse in Instruction» (MDI) legger de til grunn at et eksempel alltid akkompagneres av en eller annen form for forklaring, som de kaller «explanatory talk». Disse forskerne ser på eksemplene og tilhørende forklaringer som ulike faktorer som definerer en klasseromsdiskurs. På denne måten blir både hvilke eksempler som brukes og hva som sies i forbindelse med dem avgjørende for hva som blir gjort tilgjengelig for læring (Adler & Ronda, 2015).

Zazkis og Chernoff (2008) viser hvordan en sekvensering av mot-eksempler kan være til hjelp dersom elever har etablert metoder eller et «concept image» som ikke stemmer overens med konvensjonell matematikk – såkalte *misoppfatninger*. Studien demonstrerer hvordan det ofte er nødvendig med en serie av mot-eksempler for å få et individ til å forkaste sin egen oppfattelse av et matematisk begrep. I møte med de første mot-eksemplene ser man at individer ofte behandler disse som unntak, og holder fast med sin feilaktige oppfatning av det generelle begrepet (Zazkis & Chernoff, 2008).

2.3 Det kommognitive rammeverket

Det teoretiske rammeverket i denne oppgaven er det *kommognitive* perspektivet utviklet av Anna Sfard, professor ved Universitetet i Haifa, Israel. Teorien presenteres i sin helhet i boka «Thinking as Communicating» fra 2008. Her følger en innføring i de sentrale idéene og de aspektene som er mest relevant for målet med denne masteroppgaven.

Filosofi og grunnleggende definisjoner

Det kommognitive perspektivet bygger på arbeidet til Ludwig Wittgenstein, en anerkjent filosof fra Østerrike som hadde sitt virke tidlig på 1900-tallet, og den russiske psykologen Lev Vygotskij fra omtrent samme periode. Sfards siktemål med utviklingen av den kommognitive teorien er å endre hvordan vi tenker om tenkning. Den filosofiske tradisjonen bygger på idéen om at kommunikasjon, mer enn noe annet, er det som gjør mennesker så forskjellig fra andre levende vesener på jorda. Vår evne til å ta i bruk verbal kommunikasjon – språk – for å organisere og beskrive handlingene våre er noe av det mest menneskelige ved oss mennesker. En avgjørende egenskap ved språket vårt er hvordan vi kan kommunisere *om* kommunikasjonen. Ytringene våre om objekter i verden kan selv bli fokuset for kommunikasjonen, og dette gjentar seg i mange «lag». Det er denne *rekursive* egenskapen som har muliggjort den imponerende akkumuleringen av kunnskap vi ser gjennom menneskehetens historie. Denne egenskapen blir trukket frem som grunnen til at mennesker er i stand til å gjøre ting som å abstrahere, gjøre logiske resonnement, og stadig organisere sine aktiviteter på mer komplekse måter. Andre arter lever og utvikler seg tilnærmet identisk generasjon etter generasjon. Konklusjonen til Wittgenstein, og Sfard, er at dersom man ønsker å studere særegenhetene ved menneskelig aktivitet, er man nødt for å se på den særegne menneskelige kommunikasjonen.

Det kommognitive perspektivet legger til grunn et non-dualistisk syn på sammenhengen mellom menneskelig tenkning og tale. Dette innebærer at kommunikasjon ikke anses å være et uttrykk *for* tanker, men at tenkning og kommunikasjon er *to sider av samme sak*. Dette er for øvrig opprinnelsen til teoriens navn «commognition»: en kombinasjon av ordene *cognition* og *communication*. Det kommognitive søker et operasjonalisert vokabular for å prate om menneskelig utvikling, og ord som «tanker» eller det menneskelige «sinn» er fullstendig uinteressante for den kommognitive forsker før det kan operasjonaliseres, det vil si knyttes direkte til håndgripelige og observerbare fenomen. Tenkning blir i denne sammenheng definert som en *individualisert form av mellommenneskelig kommunikasjon* (Sfard, 2008, s. 81). Sagt enkelt, å prate med seg selv. Før denne idéen kan undersøkes nærmere, må man definere «mellommenneskelig kommunikasjon».

Kommunikasjonen vår består av mer enn det vi sier. Begrepet, slik det brukes i kommognitiv teori, innbefatter også gester, ansiktsuttrykk og skriftlige uttrykksformer. Dersom man studerer en del kommunikasjon vil man fort bli oppmerksom på at det ikke er tilfeldig hvordan kommunikasjonen utarter seg. Kommunikasjon fremstår som styrt av bestemte regler avhengig av kontekst. Deltakerne i kommunikasjonen styrer selvsagt hva som skjer, men de baserer seg på et avgrenset utvalg kommunikative handlinger (A) som ansees som «godkjente» av de andre kommunikasjonsdeltakerne sett i forhold til hva kommunikasjonen handler om. For hver av disse mulige handlingene finnes et utvalg godkjente reaksjoner (B) som andre kommunikasjonsdeltakere kan gjøre seg bruk av. B er ikke utelukkende en funksjon av A, og hvilken reaksjon B som «velges» avhenger blant annet av hva som ledet frem til handling A (historien til A), samt den sosiale konteksten. Kommunikasjon defineres som en *kollektivt utøvd mønsterstyrt aktivitet*, hvor mønsteret utvikler seg i henhold til reglene beskrevet ovenfor (Sfard, 2008, s. 86). Det finnes forskjellige *typer* kommunikasjon, med litt ulike «spilleregler», men med stor grad av overlapping. Allikevel er det mulig å skille dem ved at de inkluderer enkelte individer, og samtidig ekskluderer andre. En slik bestemt type kommunikasjon kalles i den kommognitive teorien for en *diskurs*. De nevnte «spillereglene» vil fra nå av omtales som *metadiskursive regler*.

Dersom man ønsker å karakterisere en gitt diskurs, finnes det noen sentrale faktorer man kan se på, som alle styres av de metadiskursive reglene: (1) *Ordbruk* er avgjørende for karakteristikken, da alle diskurser har visse nøkkelord som er viktige for å kommunisere de sentrale idéene i diskursen. Innenfor matematikken finner man flere av nøkkelordene blant ord som beskriver mengder og figurer. Mange av disse ordene opptrer gjerne også i dagligdagse diskurser, men innen den matematiske diskurs finnes en langt mer disiplinert bruk av ordene, med entydige definisjoner. Det er derfor *hvordan* ordene brukes, og ikke nødvendigvis *hvilke* ord som brukes, som er karakteriserende for en diskurs. (2) *Visuelle* *mediatorer* er synlige objekter som tas i bruk under kommunikasjonsprosessen. I hverdagslige diskurser vil dette ofte være materielle objekter rundt oss. I matematikken og andre vitenskapelige diskurser, vil symbolske artefakter ofte være sentrale i kommunikasjonen. Algebraisk notasjon stikker seg ut som et godt eksempel. (3) *Narrasjoner* er ytringer eller påstander som på en eller annen måte beskriver et objekt, forholdet mellom objekter, eller prosesser med eller av objekter, og som er gjenstand for vurdering som godkjent eller ikke godkjent. Hver enkelt diskurs har sine egne metadiskursive regler for denne vurderingsprosessen. En ytring om et bestemt objekt kan regnes godkjent i noen diskurser, og samtidig ikke være godkjent i enkelte andre diskurser. (4) *Rutiner* er den siste delen av diskurskarakteristikken. Rutinene er samlinger av metadiskursive regler som beskriver gjentakende kommunikasjonsmønstre i en diskurs. Disse metadiskursive reglene definerer betingelser for når rutinen er passende å bruke, selve handlingsforløpet i rutinen og betingelser for når rutinen kan anses som avsluttet. Det er viktig å påpeke at rutiner stort sett er «uskrevne regler» konstruert av observatøren, og ikke eksplisitte prinsipper som diskursdeltakerne bevisst forholder seg til. Samtidig er rutinene dynamiske strukturer som stadig gjenskapes i interaksjon mellom diskursdeltakerne, og som derfor kan endre seg over tid. På mange måter er metareglene *kultur*. De er beskrivelsen av «hvordan man gjør det» og er et resultat av samfunnets historiske utvikling og av hva som har fungert best. De er ikke slik de er fordi de *må* være slik. Eksempler på rutiner kan være hva vi sier dersom vi møter noen på gaten som vi kjenner eller hvordan man gir veibeskrivelser. I matematikken kan det være alt i fra et formelt matematisk bevis til et barn som lærer å telle. Sfard (2008) deler rutinene inn i tre ulike typer basert på diskursdeltakerens kriterier for å anse rutinen som avsluttet. Det er derfor en mulighet for at den samme rutinen implementert av to ulike diskursdeltakere kan klassifiseres som to ulike typer rutiner.

Utforskninger betegner rutiner hvor målet er å produsere nye godkjente *narrasjoner*. En utforskende rutine regnes som avsluttet når en ny beskrivelse av verden foreligger (Sfard, 2008). Det kan være nærliggende å sammenligne med *å resonnere*; en sekvens av ytringer som i henhold til visse metadiskursive regler fører frem til en ny akseptert beskrivelse av noe. En *gjerning* er en type rutine som har som mål å skape eller å endre *objekter*. Gjerningen regnes som avsluttet når det foreligger en fysisk endring i omgivelsene. Dette gjelder også visuelt medierte diskursive objekter, som matematiske symboler. Følgelig vil skriftlig løsning av et regnestykke telle som en endring i omgivelsene, og vil kunne karakteriseres som en gjerning. *Ritualer* kjennetegnes ved at målet er å skape og opprettholde et sosialt bånd med andre individer. I denne type rutine har diskursdeltakeren ikke noen mål om å produsere hverken objekter eller narrasjoner. Dette kjennetegner mange av vår dagligdagse sosiale kommunikasjonsmønstre. Ritualer er sentrale i prosessen med å bli deltaker i en diskurs da denne prosessen ofte innebærer å *imitere* andre diskursdeltakere. Imitasjon er avgjørende for å starte deltakelsen i en diskurs hvor man ikke er kjent med rutiner eller nøkkelord. Sfard (2008) beskriver paradokset med å bli deltaker i en matematisk diskurs: Å være kjent med hva diskursen handler om ser ut til å være en betingelse for deltakelse, samtidig som denne kjennskapen kun kan komme av deltakelse i diskursen. Imitasjon og ritualer nevnes i denne sammenheng som en mulig måte å bryte denne sirkelen på (Sfard, 2008).

For å illustrere hvordan én og samme rutine kan regnes for å være alle de tre typene beskrevet ovenfor avhengig av hvem som utfører den, kan man se på rutinen kjent som *abc-formelen*. Dette er en formalisert matematisk rutine, det vil si en samling metadiskursive regler som er gjort eksplisitt og som deltakere i diskursen følger bevisst. I fasen hvor en elev er ny i diskursen på funksjoner, vil implementeringen av denne rutinen ofte foregå i fellesskap med lærer og/eller andre elever. I en periode vil målet for eleven med å gjennomføre denne rutinen være deltakelse i den sosiale aktiviteten i klasserommet, og hva som blir resultatet av rutinen er uinteressant for eleven. Ifølge Sfard (2008) finnes ingen kriterier for hva som regnes for et avsluttet ritual. Det viktigste for elevene i denne fasen er å opprettholde det sosiale båndet. Etter hvert som eleven blir fortrolig med rutinen, og har konstruert aktuelle matematiske objekt og godkjent aktuelle narrasjoner, vil rutinen kunne gå over til å bli en utforskning. Målet vil nå være å komme frem til en ny beskrivelse av verden, helt konkret å produsere narrasjoner om den aktuelle sammenhengen (funksjonen) mellom to mengder. Når eleven utvikler sin diskurs på funksjoner utover dette, og skal i gang med mer avansert funksjonsdrøfting, vil implementeringen av abc-formelen ikke lenger være et poeng i seg selv, men et «verktøy» som inngår i en mer omfattende rutine. På dette tidspunktet kan det være snakk om implementeringen av en gjerning, hvor målet er å produsere matematiske objekter (røttene til funksjonen) som kan brukes i det videre drøftingsarbeidet. På denne måten kan en rutine utvikle seg hos en diskursdeltaker, og kan potensielt være innom alle de tre formene.

Sfard (2008) trekker frem eksempler på det hun kaller *deed-enhansing mathematical explorations* som viser til tilfellene hvor en praktisk gjerning kan forbedres eller effektiviseres gjennom å utvikle en matematisk utforskende rutine. Eksemplene viser hvordan gjerningen med å dele konkrete objekter mellom personer kan effektiviseres gjennom utvikling av en matematisk rutine for å dele, eller hvordan barn utvikler utforskende rutiner knyttet til kardinalitet for å forbedre den praktiske gjerningen med *å velge*. Jeg vil referere til dette fenomenet som *gjerningsfremmende utforskning* (min oversettelse) i resten av oppgaven.

Definisjon av læring

Det er blitt antydet at å lære matematikk er å bli deltaker i en matematisk diskurs. Å bli deltaker i en diskurs innebærer å konstruere sentrale diskursive objekt i sin egen diskurs, godkjenne narrasjoner om slike objekter samt å bli fortrolig med typiske kommunikasjonsmønstre i den nye diskursen (Sfard, 2008). Følgelig fører denne prosessen til en endring i individets egen diskurs. Læring defineres generelt i det kommognitive rammeverket som *endring av diskurs*. I denne oppgaven bruker jeg stort sett denne formuleringen for å referere til fenomenet læring.

Ifølge Sfard (2008) kan læring foregå på to ulike nivåer: *objektnivå* og *metanivå*. Læring på objektnivå er en diskursiv endring kjennetegnet ved at den eksisterende diskursen utvides *innenifra*. Dette kan innebære konstruksjon av nye rutiner og objekter, samt godkjennelse av nye narrasjoner. At endringen skjer innenifra betyr at de nye rutinene eller objektene kan utledes basert på tidligere konstruerte objekter, rutiner og godkjente narrasjoner, og det krever derfor ingen endring i metadiskursive regler. Læring på metanivå betegner en metadiskursiv endring hos et individ, noe som i de aller fleste tilfeller er initiert *utenifra* i møtet med diskursdeltakere som handler ut ifra et annet sett med metadiskursive regler. Situasjonen hvor to diskursdeltakere bruker samme ord eller symboler, eller utfører samme type handlinger i henhold til ulike metadiskursive regler, vil refereres til som en *kommognitiv konflikt* (Sfard, 2008).

Endring på metanivå deles kan foregå på to måter: *vertikalt* og *horisontalt*. Vertikal metanivålæring betegner prosessen hvor en type matematisk diskurs blir «slått sammen» med sin egen *metadiskurs*. Metadiskursen vil være å gjøre eksplisitt hvilke generelle mønstre som er fremtredende i den opprinnelige diskursen. Et eksempel som trekkes frem av Sfard (2012) er etableringen av den algebraiske diskurs som en sammenslåing av aritmetikken og betraktninger av mønstrene i denne diskursen. Algebra regnes for å være en formalisert meta-aritmetikk (Caspi & Sfard, 2012). Horisontal metanivålæring viser til en prosess hvor flere diskurser som tidligere ble ansett som helt ulike, plutselig «kapsles inn» og til sammen utgjør en *ny* overordnet diskurs. Sfard (2008) eksemplifiserer denne prosessen med etableringen av diskursen på funksjoner, som kan ses på som en innkapsling av diskursene på algebraiske uttrykk, grafer og fysiske prosesser.

Metaforer og diskursiv utvikling

En egenskap ved vår språklige kommunikasjon som er avgjørende for vår utvikling av diskurs kalles for *metafor*. Ordet refererer til menneskers evne til å prate om nye ukjente fenomen ved hjelp av allerede kjente ord. Når vi opplever noe som er fullstendig ukjent for oss, finnes det ingen diskurs knyttet til dette fenomenet – vi vet ikke hvordan vi skal kommunisere om det vi opplever. Vår eneste mulighet er å kategorisere det vi opplever på grunnlag av de diskurser vi allerede er kjent med. Vi låner ord fra etablerte diskurser for å navngi og beskrive det ukjente fenomenet. Denne diskursive «transplantasjonen» er det som vil bli kalt en metafor. Når en slik transplantasjon er gjort, vil man gjerne begynne å utforske dette nye fenomenet. Diskursen som utvikles omkring det nylig oppdagede fenomenet vil basere seg på metaforen(e) som initierte diskursen, og som inntil videre fungerer som diskursens *nøkkelord*, frem til det eventuelt blir etablert egne nøkkelord for den nye diskursen. Noen ganger er det slik at metaforene forblir den nye diskursens nøkkelord, uten at de blir definert eksplisitt i den nye diskursive konteksten. Dersom dette skjer, vil den nye diskursen potensielt kunne bli offer for svært ineffektiv kommunikasjon, og vil kunne stå ovenfor problemer som handler om språklige uenigheter heller enn vitenskapelige spørsmål. Et ord hentet fra en bestemt diskurs bærer med seg en slags «betydning» som er definert innenfor den opprinnelige diskursen. Det er lite sannsynlig at det nye fenomenet vil sammenfalle med den allment aksepterte betydningen av ordet som nå kobles til fenomenet. Faren er at man begynner å behandle det nye fenomenet i henhold til de diskursive mønstre man forbinder med metaforen fra før – måten ordet blir brukt i den opprinnelige diskursen. Dette legger føringer for hva man vil være i stand til å si om det nye fenomenet. Fra et kommognitivt perspektiv blir dette ansett for å være det største problemet i forskningen på menneskelig tenkning og utvikling. En rekke perseptuelt utilgjengelige fenomen kommuniseres ved hjelp av metaforer fra langt mer konkrete diskurser. Dette kan eksemplifiseres ved fraser som «overføring av kunnskap». Det er vanskelig å si konkret hva kunnskap *er*. Måten vi bruker ordet på tilsier at det er en fysisk gjenstand som finnes et eller annet sted. Ordet «overføre» kan tenkes å være hentet fra en diskurs om transport av fysiske objekter. Kan man egentlig regne med at noe så uhåndgripelig som menneskers «tanker» skulle la seg overføre på samme måte som fysiske gjenstander? De potensielle fallgruvene for kommunikasjonen som åpner seg i denne prosessen kan gjøres betraktelig mindre farlige dersom man er tydelig på *hvordan* ordet skal brukes i den nye sammenhengen. Dersom man ikke er tydelig, men tar for gitt at kommunikasjonens metaforbaserte nøkkelord utløser de samme assossiasjonene hos andre, er det nesten uunngåelig at «misforståelser» vil oppstå – en kommognitiv konflikt.

Det er viktig å påpeke at selv om fokuset nå er på de potensielle farene og ulempene ved metaforer som utgangspunkt for nye diskurser, så er denne prosessen veldig effektiv og fullstendig uunnværlig for vår kommunikasjon og utvikling. Det er allikevel slik at dersom man kan være mer bevisst på fellene man kan gå i, så vil det være lettere å unngå dem og på den måten gjøre utviklingen og kommunikasjonen enda mer effektiv.

Objektivering

En spesiell type metafor – *objektmetaforen* – er særlig viktig for diskursiv utvikling. Denne metaforen er produktet av en prosess kalt *objektivering*. Sagt enkelt innebærer denne prosessen å gjøre ytringer som gjelder handlinger om til upersonlige ytringer om objekter. Dette er en todelt prosess:

Tingliggjøring er den første delen av objektiveringen. I stedet for å komme med ytringer som beskriver en rekke handlinger, for eksempel at en elev gjennom flere matematikkprøver *har gjort det meget bra* på oppgaver som omhandler likninger, vil man ofte heller si at eleven har *utviklet en forståelse* av likninger. Dette eksempelet illustrerer et veldig vanlig fenomen. For å enklere kunne kommunisere med hverandre «pakker vi inn» en rekke handlinger og setter ett navn på disse handlingene. Dette gjøre lange fortellinger om til enkle ord, samtidig som det eliminerer tidsaspektet ved handlingene. Vi lager et tilsynelatende mer stabilt og konkret objekt som vi kan kommunisere om på en mer enklere måte. Et blikk på en psykiatrisk diskurs, og man innser nøyaktig hvor effektiv denne prosessen kan være. Å stille diagnoser innen psykisk sykdom er ingenting annet enn en tingliggjøring av pasientens atferd over tid. Bestemte adferdsmønstre som avviker fra hva som ansees som normalt, blir definert som ulike tilstander og psykiske sykdommer. Dette effektiviserer kommunikasjonen i veldig stor grad, forutsatt at disse tingliggjorte begrepene er tydelig definerte innenfor diskursen når det gjelder hvilke handlinger de omfatter.

Fremmedgjøring er prosessen hvor man tar en slik påstand som «eleven har utviklet en forståelse for likninger» og frigjør det tingliggjorte objektet fra subjektet. I dette tilfellet vil man koble eleven fra forståelsen, og begynne å operere med *en forståelse* som et objekt som eksisterer uavhengig av eleven. Det er dette man gjør dersom man prater generelt om forståelsens betydning for læring, på samme måte som man kan prate om kostholds betydning for idrettsprestasjoner; som konkrete objekter som eksisterer uavhengig av diskurs. Dette er ikke tilfellet for objektmetaforen «forståelsen», som er skapt i diskursen om læring for å forkorte lange historier om elevers prestasjoner og handlinger. Selv om dette *er* en fremmedgjøring og en fullstendig objektivering, er det allikevel ikke det tydeligste eksempelet man kan finne. Objektivering finner man i sin mest ekstreme form i den matematiske diskurs. Sfard eksemplifiserer med diskursen som omhandler tall. Tall fremstår som objekter som finnes i verden, som vi derfor kan prate om, på samme måte som trærne i skogen. Mange vil kanskje bli forundret over påstanden om at tall ikke finnes noen andre steder enn i vår kommunikasjon. Det som finnes i den konkrete verden, er ulike mengder fysiske gjenstander. Tall er et resultat av vårt ønske om å kommunisere om disse mengdene. Historisk sett har vi gått fra enkle additive beskrivelser av mengder, med særegne symboler for alle ulike mengder, til stadig mer avanserte plassverdisystemer, slik som vårt titallssystem er et eksempel på. Fra dette perspektivet er det kanskje lettere å godta at tallene vi kjenner i dag er et produkt av diskursiv utvikling, med objektiveringen som hovedingrediens. Tallet fem, med tilhørende symbol «5», er en objektivering av en ellers kronglete ytring som for eksempel: «En mengde er slik at dersom man teller hvert element én gang så vil man hver gang ende opp på tallordet *fem*.» Dersom dette er resultatet av å «pakket ut» hva som skjuler seg bak symbolet «5», blir det fort klart at en matematisk diskurs fri for objektivering ville være vanskelig å forholde seg til. Relativt simple regnestykker ville krevd side opp og side ned dersom man skulle redegjort for alle prosesser involvert. Å objektivere telleprosesser og regneoperasjoner har gjort det mulig å utvikle en meget komprimert notasjon, hvilket er grunnen til at den matematiske diskurs har kunnet utvikle seg til å bli så kompleks som den er i dag. Mye matematikk er resultatet av manipulasjon av tall og symboler uten tanke for hva de representerer i virkeligheten. Det er ingen tvil om effektiviteten som følger av objektiveringsprosessen. Utfordringen er at desto mer objektivert diskursen er, desto vanskeligere er det å bli deltaker i diskursen.

Matematiske objekt

Matematiske objekt er hva den matematiske diskursen handler om. Et matematisk objekt er i kommognitiv teori definert som *en matematisk signifikans*[3] *sammen med dens realiseringstre* (Sfard, 2012, s. 5). En signifikans vil kunne peke på ulike *realiseringer*. For eksempel vil signifikansen «kvadratisk funksjon» peke på den grafiske representasjonen som en *parabel* og en *tabell* med tallverdier paret med kvadratet av tallet. På samme måten vil signifikansen «3» kunne realiseres som mengder av tre objekter på mange forskjellige måter. Det matematiske objektet *3* vil da være symbolet «3» sammen med alle disse realiseringene. Samtidig vil alle realiseringene også kunne fungere som signifikans for objektet, det vil si, tre epler vil kunne realiseres som det matematiske symbolet «3». Et realiseringstre er derfor et nettverk av realiseringer hvor en avgrenset mengde narrasjoner vil kunne regnes som godkjente om alle realiseringene. Disse realiseringstrærne er individuelle konstruksjoner og det er ikke gitt at det formelle matematiske objektet, i den konvensjonelle matematiske diskursen, sammenfaller med individets personlige konstruksjon av det.

En mekanisme som er sentral i konstruksjon av diskursive objekter, og som vil bli omtalt ved flere anledninger i denne oppgaven, er hva Sfard (2008) kaller «saming». Dette begrepet har jeg valgt å oversette til norsk som *likestilling*. Likestilling refererer i denne konteksten til prosessen med å gi ett navn til flere ulike objekter. Betingelsen for å kunne likestille en mengde objekter under én signifikans er at de alle deler enkelte egenskaper, og at under gitte omstendigheter vil de alle være «likeverdige». Et eksempel kan være når vi prater om en *finger*, en signifikans som refererer til alle de avlange objektene som vokser ut fra håndflatene

[3] *Signifikans* opprinnelig fra det latinske ordet *significare* som betyr *å gi tegn* (Guttu & Langdalen, 1993). Ord som peker på/refererer til et matematisk objekt, i tråd med Sfards bruk av «a signifier», vil bli omtalt som *en signifikans*.

våre. Et matematisk eksempel på et objekt som er et produkt av likestilling kan være en *potens*, en signifikans som refererer til alle tall på formen a^n.

Individualisering av matematiske objekt er sentralt i individets prosess med å bli deltaker i en matematisk diskurs. Nykommeren møter mer erfarne diskursdeltakeres objektiverte ordbruk og forsøker å finne ut av meningen med disse ordene gjennom en prosess med å prøve ordene ut i kjente diskursive «maler». Veien til en fullstendig objektivering av en signifikans kan ifølge Sfard (2008) deles i fire nivåer basert på ordbruk: *passiv bruk*, *rutinedrevet bruk*, *frasedrevet bruk* og *objektdrevet bruk*. Ved passiv bruk ytrer ikke individet ordet selv, men forbinder det kanskje med enkelte diskursive handlinger som kan utløses som respons på å høre ordet. Rutinedrevet bruk kjennetegnes ved aktiv bruk av ordet, men kun i bestemte kontekster og som en del av en viss type kommunikasjonsforløp. Frasedrevet bruk refererer til når individet vet hvordan ordet kan brukes i enkelte ytringer. Bruken er fremdeles begrenset og lite fleksibel da ordet er knyttet til bestemte fraser. Ved objektdrevet bruk har ordet fått et «eget liv», og er løsrevet fra kontekst og fraser. Ordet er blitt et objekt i seg selv som kan være gjenstand for refleksjon, og først nå blir ordet knyttet til et realiseringstre som forblir relativt stabilt på tvers av ulike situasjoner.

2.4 Eksempler i kommognitiv teori

Eksemplene får ingen direkte oppmerksomhet i boka til Sfard (2008). Ved en anledning viser hun til hvordan lærere ofte bruker eksempler og definisjoner for å hjelpe elever i arbeidet med å individualisere matematiske objekter. Hun beskriver også noe angående matematiske rutiner som har store likhetstrekk med variasjonsteori, nemlig at det vil være nødvendig for en nykommer å oppleve stor variasjon i rutinens bruk for å kunne se hvilke aspekter som kan variere og hva som utgjør rutinens «skjelett». Hva et eksempel *er* blir aldri diskutert, noe som tilsier at eksemplene ikke behøver en egen operasjonalisert definisjon i den kommognitive teorien.

Jeg har derfor valgt å selv plassere idéen om eksempler i det kommognitive landskapet, og kommer med et forslag til hvordan man kan se på og analysere eksempler i matematikkundervisning ut fra et kommognitivt perspektiv. Jeg ønsker å argumentere for at den overordnede definisjonen av eksempler som har blitt presentert tidligere i denne oppgaven er kompatibel med et kommognitivt perspektiv. Jeg velger å videreføre Chick (2007, s. 5) sin definisjon av konkrete eksempler som «a specific instantiation of a general principle, chosen in order to illustrate or explore that principle» (s. 5). Det eneste som behøver en kommentar her er hva som menes med et generelt prinsipp. Et slikt prinsipp er en liten bit av den matematiske diskurs. Prinsippet vil kunne være en rutine, en narrasjon eller et matematisk objekt, og ofte flere av disse samtidig. Det kan være den generelle løsningsmetoden for annengradslikninger (rutine), den algebraiske identiteten «$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$» (narrasjon), eller det kan være idéen om en trekant (matematisk objekt). Den generelle formelen for løsning av annengradslikninger kan også ses på som en narrasjon, men selve løsningsprosessen vil være et kommunikasjonsmønster som alltid følger samme regler og alltid har de samme begrensninger, og er derfor en rutine.

På samme måte vil de konkrete eksemplene være spesifikke tilfeller av rutiner, narrasjoner eller matematiske objekt. Jeg forestiller meg at disse tre formene av eksempler inngår i en hierarkisk struktur. *Rutiner* er samlinger av metadiskursive regler som legger begrensninger på en bestemt diskursiv aktivitets retning og utvikling. Rutinene deles som kjent i tre ulike typer i det kommognitive rammeverket, hvor gjerninger og utforskninger er rutiner hvor målet henholdsvis er å produsere matematiske objekt og narrasjoner. Både narrasjoner og matematiske objekt kan derfor sies å være underordnet rutiner i en matematisk diskurs. En narrasjon defineres av Sfard (2008) som ytringer eller påstander som på en eller annen måte beskriver et objekt, forholdet mellom objekter, eller prosesser med eller av objekter. En narrasjon inneholder følgelig alltid matematiske objekt. Matematiske objekt er hva diskursen handler om, narrasjoner beskriver forhold ved disse objektene og rutiner er mønstre i hvordan vi godkjenner narrasjoner og kommuniserer rundt objektene.

Samtidig må man huske på at den matematiske diskursen er et *autopoetisk* system, et system som produserer sine egne diskursive objekter (Sfard, 2008). Nye matematiske objekt kan blant annet produseres gjennom objektivering av prosessen med å godkjenne nye narrasjoner om ett eller flere eksisterende objekter. Man kan se på tilfellet med kvadratrøtter. En gang i tiden visste man ikke om kvadratrøtter. Manipulering av eksisterende metadiskursive regler ledet til produksjonen av narrasjoner knyttet til det vi i dag kaller kvadratrøtter. Objektivering av prosessen med å løse problemer av typen «√x» produserte det matematiske objektet «kvadratrot». Dette nye objektet kan nå fungere som utgangspunkt for å produsere nye narrasjoner om kvadratrøtter og deres forhold til andre objekt. Dersom man plukker det fra hverandre vil derfor en narrasjon om det matematiske objektet «kvadratrot» også inneholde rutinen med å løse problemer av typen kvadratrøtter, og alle narrasjoner knyttet til dette. Dette eksempelet illustrerer hvordan rutiner, narrasjoner og objekter ligger i flere diskursive lag. Den overordnede strukturen beskrevet ovenfor vil allikevel gjelde «i hvert lag».

Nachlieli og Tabach (2012) omtaler eksempler i sin artikkel om konstruksjon av matematiske objekt. Disse forskerne hevder at eksempler på et matematisk objekt må være spesifikke realiseringer av objektet. Dette er en annerledes måte å tolke eksempler på i et kommognitivt perspektiv. Da jeg også omtaler eksemplifisering av rutiner, gir det ikke mening å prate om eksempler som spesifikke realiseringer. Ut ifra det kommognitive rammeverket vil ikke en rutine ha noen realisering. Jeg har valgt å prate om eksempler som spesifikke matematiske objekt, narrasjoner og rutiner. Kommognitive forskere har knyttet et matematisk objekt opp mot Vygotskys «scientific concept» (Nachlieli & Tabach, 2012; Sfard, 2008, 2012). I min oppgave vil jeg referere til det samme som et *generelt* matematisk objekt. Det samme har jeg gjort med rutiner, hvor en generell rutine betegner eksempelvis den generelle formelen for løsning av likninger av annen grad. En spesifikk rutine vil være et konkret eksempel på denne formelen implementert i løsningen av en konkret likning.

3 Metode

I metodekapittelet presenteres studiens forskningsdesign, det empiriske datamaterialet samt hvordan jeg har gått frem i arbeidet med å analysere data. Til slutt diskuteres studiens gyldighet utover den konkrete konteksten og det gjøres noen etiske refleksjoner.

3.1 Prosjektets design

Forskningsspørsmålet i denne oppgaven spør hvilken rolle læreres bruk av eksempler kan ha for elevers læring av matematikk, hvor læring defineres som endring av diskurs. Med dette utgangspunktet er det naturlig at diskursen fungerer som analyseenhet, og jeg har valgt å bruke observasjon som metode. Ved slik *åpen observasjon* kan man aldri utelukke at dette vil ha påvirkning på de som observeres (Thagaard, 2013). Særlig elever kan tenkes å bli påvirket av å ha videokameraer og observatører til stede i klasserommet, noe som kan komme til uttrykk gjennom mindre aktiv deltakelse i undervisningen. Studentenes *feltrolle* i denne situasjonen skulle være ikke-deltakende, fullstendig observasjon fra sidelinjen.

Forskningsdesignet som anvendes i denne oppgaven er av kvalitativ art, nærmere bestemt av typen *multippel case-studie* (Stake, 1995). Det er det samme som en *instrumentell* case-studie, men omfatter mer enn én case. Denne typen case-studie kjennetegnes ved at en eller flere konkrete caser studeres for å gi innsikt i et fenomen eller for å videreutvikle teori (Stake, 1995). I denne masteroppgaven studeres to caser med hensikt om å illustrere et teoretisk poeng, og de konkrete casene er derfor ikke interessante i seg selv.

Jeg har valgt å studere to caser for å ha muligheten til å sammenligne eksemplifiseringsdiskurser i undervisning av to forskjellige matematiske emner, algebra og funksjoner. Algebra kan beskrives som aritmetikkens formaliserte metaregler (Sfard, 2012). Dette gjør at man kan mistenke undervisning av algebra for å inneholde store mengder metadiskursive endringer. Samtidig hevdes det at diskursen på funksjoner oppstod som et resultat av å studere mønstre i en elementær algebraisk diskurs (Nachlieli & Tabach, 2012). Diskursen på funksjoner kan derfor sies å være enda mer abstrakt og «kondensert» enn den algebraiske. Det ville derfor være interessant å kunne sammenligne eksemplifisering fra disse to diskursene.

3.2 Empiriske data

Det empiriske datamaterialet det refereres til i denne masteroppgaven ble samlet inn over to forskjellige perioder med ett års mellomrom. Begge datasettene ble samlet inn gjennom et prosjekt for førsteårsstudenter på Master i Matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger. Den første innsamlingen, hvor jeg selv var aktiv deltaker, foregikk i februar 2015. Dette prosjektet omfattet én klasse på åttende trinn som skulle starte opp for første gang med undervisning i algebra. Det andre prosjektet foregikk året etterpå, og innsamlingen i februar 2016. Jeg var ikke involvert i det andre prosjektet, men var tilstede under deler av datainnsamlingen. Dette prosjektet omfattet én klasse på tiende trinn, som skulle starte opp med undervisning i emnet funksjoner.

Hvert av datasettene består av lyd- og videoopptak av åtte matematikktimer over en toukers periode. I tillegg til dette ble to elevgrupper på to til tre elever, samt læreren, intervjuet i hvert av prosjektene. Dataene ble fordelt studentene imellom og transkribert. Dette har ført til ulikt detaljnivå på transkripsjoner og ulike tolkninger av situasjoner. De datautdragene som benyttes i denne oppgaven har jeg derfor selv gått over for å kontrollere.

Jeg har valgt å presentere to sekvenser fra hver case i denne oppgaven. Samtlige sekvenser er plukket fra de innledende undervisningsøktene i hver case. Det er flere grunner til dette. Undervisningen i de to casene har stort sett samme struktur, og starter med at læreren underviser store deler av de første timene, før de går over til timer dominert av individuelt eller parvis elevarbeid. Kvaliteten på datamaterialet bestående av elevarbeid var ikke god, og det var vanskelig å fange opp hva elevene sa og holdt på med. Opptakene av læreren som underviser var betydelig bedre. Dette, kombinert med ønsket om å se på lærerens eksemplifisering heller enn eksemplene i læreboka, gjorde at de første undervisningsøktene var mest aktuelle. Sekvensene viser variert bruk av eksempler i matematikkundervisning. De to sekvensene fra algebraundervisningen inneholder bruk av konkreter, samt felles gjennomgang av regneuttrykkene som elever har produsert i arbeidet med oppgaver fra læreboka. Elevene arbeidet i par. Sekvensene fra funksjonsundervisningen på tiende trinn inneholder oppgaveløsning i plenum og i tillegg bruk av ressurser på internett som visuell mediator.

3.3 Analyse

Utgangspunktet for analysene er transkripsjonsmaterialet fra de fire sekvensene. Jeg har også sett en del på videoopptakene under analysene. Å se video av undervisningen gir et mer helhetlig inntrykk av diskursen, og dette har hjulpet meg i å tolke hva det er som skjer. Argumentene mine i forhold til de ulike sekvensene er allikevel kun knyttet til transkripsjoner av verbale ytringer. Ved én anledning beskriver jeg lærerens kroppsspråk og tolker dette for å komme med et poeng. Videre følger en beskrivelse av hvordan jeg har gått frem for å analysere sekvensene.

Matematikk er en diskurs (Sfard, 2008), og en sekvens hvor det foregår kommunikasjon omkring et konkret eksempel for å illustrere et generelt poeng i matematikken vil derfor være en del av en matematisk diskurs. Matematiske objekter er hva denne diskursen handler om, de danner utgangspunktet for ytringer om disse objektene som til sist vil settes i system, og rutiner vil etableres for hvordan man kommuniserer omkring objektene. Fra et kommognitivt ståsted gir det derfor mening å ta utgangspunkt i de matematiske objektene, narrasjonene og rutinene som er fremtredende i en eksemplifiseringssekvens når man ønsker å si noe om denne sekvensen.

I resultatdelen presenteres de fire eksemplifiseringssekvensene. Presentasjonen av analyseresultatene følger følgende struktur:

1. Beskrivelse av sekvensen
2. Hvilken type eksemplifisering er det?
3. Hvilken type diskursiv endring ønsker eksemplifiseringen å skape?
4. Identifisering og drøfting av sentrale rutiner, narrasjoner og matematiske objekt.

1. Beskrivelse av sekvensen

Presentasjonen av hver sekvens innledes med en kort oversikt over hendelsesforløpet i sekvensen og henvisning til hvilket case sekvensen er hentet fra. Her beskrives det matematiske innholdet, samt sentrale oppgaver som aktivitetene dreier seg om.

2. Hvilken type eksemplifisering er det?

I analysene har jeg startet med å identifisere hvilken *type eksemplifisering* det er snakk om. I praktiseringen av en matematisk diskurs vil det stort sett alltid forekomme både matematiske objekt, narrasjoner og rutiner. Det er allikevel forskjell på hvilket fokus en lærer har i eksemplifiseringen av noe. Selv om arbeidet med å eksemplifisere det matematiske objektet *den lineære funksjon* innebærer enkelte diskursive rutiner, har jeg valgt å klassifisere dette som eksemplifisering av et matematisk objekt. Likedan vil eksemplifiseringen av en matematisk rutine også inneholde matematiske objekt, men det er allikevel å regne for en eksemplifisering av en rutine. I noen av sekvensene er målet for undervisningen uttalt av lærer, andre ganger ligger dette implisitt i diskursen. Et fokus på *hvordan* man løser en type problem tolker jeg som en indikasjon på at det dreier seg om eksemplifisering av en *rutine*. Ytringer som «vi skal lære *om* [substantiv]» indikerer at et *matematisk objekt* er emne for eksemplifisering.

3. Hvilken type diskursiv endring kan finne sted?

Neste steg i analysen er å identifisere hvilken type *diskursiv endring* som potensielt kan være resultatet av eksemplifiseringen i hver enkelt sekvens. For å avgjøre dette har jeg tatt utgangspunkt i Sfards (2008) definisjoner av læring på *objektnivå* og *metanivå*. Deretter har jeg identifisert ytringer i eksemplifiseringen som sammenfaller med disse definisjonene.

Når jeg påstår at én av de to typene diskursiv endring er det mest sannsynlige resultatet av eksemplifiseringen, betyr ikke dette at endring på det andre nivået er utelukket. Vurderingen av at en sekvens sannsynligvis ikke vil skape en diskursiv endring på metanivå gjøres under forutsetningen om at elever handler i henhold til de metadiskursive reglene som er ønskelig etter et gitt antall år med matematikkundervisning. Dette er naturligvis ikke alltid tilfellet, og en elev som handler i henhold til et annet sett metadiskursive regler vil kunne oppleve en *kommognitiv konflikt* som vil kunne lede til endring av metaregler dersom konflikten løses. Dersom en endring av metadiskursive regler kan fremstå som sannsynlig, vil det også kunne forekomme endringer på objektnivå samtidig.

4. Identifisering av sentrale rutiner, narrasjoner og matematiske objekt

Hoveddelen av analysen består av å identifisere de rutiner, narrasjoner og matematiske objekt jeg anser for å være av størst betydning for elevenes arbeid med å bli deltakere i den aktuelle matematiske diskursen. Deretter har jeg drøftet hvordan disse ulike elementene av eksemplifiseringen fremstår for elevene, og hvilke utfordringer som er knyttet til dem.

Dersom eksemplifiseringen i en sekvens klassifiseres som typen *rutine*, har jeg forsøkt å kommentere på i hvilken grad rutinen blir synliggjort for elevene. I hvilken grad blir rutinen gjort eksplisitt, om det reflekteres rundt det diskursive mønsteret og hensikten med å gjøre det på denne måten. Jeg har også forsøkt å belyse hvilke hinder som kan vanskeliggjøre elevens møte med den nye rutinen. I noen tilfeller har det også vært aktuelt å diskutere hvorvidt den aktuelle rutinen kan sies å være en reell rutine i en konvensjonell matematisk diskurs, eller om den fremstår som skapt i en skolematematisk diskurs – om den fremstår som «kunstig».

Jeg har ikke klassifisert noen eksemplifiseringer som typen *narrasjon*. Narrasjoner har allikevel vært sentrale i eksemplifiseringer av matematiske objekt. Konstruksjonen av et matematisk objekt består blant annet av å godkjenne sentrale narrasjoner som omhandler objektet. Å trekke frem de narrasjonene jeg anser som avgjørende i tilknytning til et gitt objekt, samt drøfte gyldigheten av disse, har derfor vært viktig i analysen. Når det gjelder eksemplifisering av de matematiske objektene har jeg også pekt på hvilke signifikanser som brukes for å vise til objektet, samt hvilke realiseringer av objektet som blir presentert for elevene.

Underveis i analysen har jeg etter beste evne forsøkt å veksle mellom et *outsiders view* (utenforstående) og et *insiders view* (sentral deltaker) (Sfard, 2008). Ifølge Sfard er dette kritisk for den kommognitive forskningen for å kunne få tak i alle sider ved en diskurs. Når man er en sentral deltaker er man blind for mange særtrekk ved den aktuelle diskursen, særtrekk som en totalt utenforstående vil kunne fange opp. Diskursive handlinger som for sentrale deltakere vil kunne fremstå som merkelige og i strid med diskursens rutiner, vil ofte kunne gi mening for en utenforstående (Sfard, 2008). Sfard understreker allikevel hvor vanskelig det kan være å se sin egen diskurs med øynene til en utenforstående: «Listening to familiar words while barring their spontaneous interpretations is as difficult as focusing your sight on a very clean, very clear windowpane and trying to ignore what can be seen through it» (Sfard 2008, s. 280).

3.4 Validitet og reliabilitet

Johannessen et al. definerer validitet i kvalitative undersøkelser slik: «…validitet i kvalitative undersøkelser dreier seg om i hvilken grad forskerens funn på en riktig måte reflekterer formålet med studien og representerer virkeligheten» (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2004, p. 195) Sfard (2012) beskriver epistemologien som følger med en kommognitiv tilnærming. Hun er tydelig på at forskernes historier om virkeligheten ikke må forveksles med virkeligheten de prøver å beskrive. Disse historiene har mange versjoner, og de fleste vil være en dekkende beskrivelse. Ingen av dem bør allikevel ses på som den «ultimate» eller «korrekte» (Sfard, 2012). Dette står i kontrast til beskrivelsen i Johannessen et al. (2004) hvor forskerens funn på en riktig måte skal representere virkeligheten.

Validitet i min oppgave vil jeg argumentere for er knyttet opp til min bruk av det kommognitive rammeverket i analyser av virkeligheten, og i hvilken grad den kan påstås å være «fornuftig». Å adoptere det kommognitive perspektivet har vært en krevende prosess da det innebærer en omfattende deobjektivering og redefinering av min personlige diskurs på læring og utvikling. Ord som *tanker*, *forstå* og *kunnskap* som kanskje er noen av de mest sentrale nøkkelordene i en tradisjonell diskurs på menneskelig utvikling, skal ikke på samme måte være en del av ens vokabular. I denne oppgaven har jeg forsøkt å praktisere en kommognitiv diskurs i mitt analyse- og tolkningsarbeid. Gyldigheten av arbeidet er opp til hver enkelt å vurdere. Jeg har forsøkt å følge et viktig prinsipp for validitet i kvalitative studier: *gjennomsiktighet* (Silverman, 2011). Dette innebærer at forskeren redegjør for og er tydelig på hvorfor analysene gir grunnlag for fortolkningene. I kapittel 3.3 har jeg derfor forsøkt å gi en grundig beskrivelse av hvordan jeg har gått frem i mitt analysearbeid. Resultatene presenteres som *mine* tolkninger av hva det er som foregår, med henvisning til de konkrete ytringer det gjelder og til delene av teorien som jeg mener støtter opp under mine argumenter.

Når det gjelder *overførbarhet*, også kjent som *ytre* validitet (Thagaard, 2013), kan dette kun begrunnes på et teoretisk plan. Ifølge Thagaard (2013) kan en enkeltstudie «…bidra til en mer generell teoretisk forståelse hvor sosiale fenomener og ikke enkeltstående situasjoner er i fokus» (s. 211). I denne masteroppgaven forsøker jeg å beskrive generelle mekanismer i diskursiv utvikling knyttet til eksemplifisering. På denne måten mener jeg at funn i denne studien er overførbare til andre matematikklasserom, gitt at mine fortolkninger kan anses for å være fornuftige. Når det gjelder case-studier spesielt, kan disse blant annet ha en deduktiv karakter, hvor studier av en eller flere caser velges ut for å videreutvikle teorien som er utgangspunktet for studien (Thagaard, 2013). Dette er en god beskrivelse av mastergradsprosjektet mitt, hvor utgangspunktet var å utforske bruken av det kommognitive perspektivet.

Begrepet *reliabilitet* handler i utgangspunktet om hvorvidt andre forskere ville kommet frem til samme resultat dersom de benyttet seg av samme data og samme metode (Thagaard, 2013). Sfards (2012) beskrivelse av hvordan enhver historie om virkeligheten ikke vil være virkeligheten selv, og at disse historiene alltid har utallige versjoner som alle vil kunne være gyldige, gjør at man må stille spørsmål ved det ovennevnte kravet om *repliserbarhet*. Når det gjelder å sikre reliabiliteten i en kvalitativ studie er vi tilbake til prinsippet om gjennomsiktighet. Grundig beskrivelse av teoretisk grunnlag, datainnsamling, bearbeiding, analyse- og fortolkningsprosess vil gjøre det lettere for andre å vurdere *troverdigheten* til studien steg for steg (Silverman, 2011). Silvermann fremhever troverdighet som sentralt i vurdering av kvalitativ forskning.

3.5 Etiske refleksjoner

I tråd med de forskningsetiske retningslinjene (Kalleberg & De Nasjonale forskningsetiske, 2006) har samtlige deltakere i denne studien avgitt *fritt informert samtykke* (se vedlegg). De aller fleste elevene var under 16 år gamle ved datainnsamling og foreldre har derfor avgitt samtykke.

Læreren er i fokus i denne studien, og store deler av oppgaven dreier seg rundt lærerens arbeid. Som nevnt i kapittelet om forskningsdesign (3.1) er de konkrete casene ikke av primær interesse, men fungerer som grunnlag for teoriutvikling. Det er allikevel slik at jeg i resultatdelen kommenterer direkte på ting lærerne i de to casene sier og gjør. Selv om datamaterialet som presenteres her i oppgaven ikke muliggjør identifisering av personer, er det en viss sjanse for at lærerne kan kjenne seg selv igjen. Derfor er det viktig å presisere at alle tolkninger av klasseromssituasjoner som forekommer i denne oppgaven kun er *mine* tolkninger. I tråd med Sfard (2012) vil dette bare være én mulig beskrivelse av virkeligheten og en annen tolkning vil kunne være like gyldig. Min tolkning er preget av min personlige diskurs. Jeg har etter beste evne forsøkt å la teorien ligge til grunn for mine tolkninger, og prøver på den måten å gi en objektiv analyse av datamaterialet. I dette legger jeg at poengene som løftes frem ikke skal være hva jeg personlig syns er viktig, men hva teorien trekker frem som sentrale momenter. Dette er selvsagt en vanskelig oppgave. Et viktig prinsipp for forskningsetikk er å ivareta involverte personers *integritet* (Thagaard, 2013). Dette gjøres først og fremst gjennom anonymisering av data, men man bør også tenke over hvordan man fremstiller personer gjennom sine tolkninger. Personer som samtykker til å bli forsket på samtykker ikke til hvilke tolkninger som blir gjort, og de samtykker ikke til å bli krenket i presentasjonen av en studie. Samtidig er det uheldig dersom dette hensynet hemmer forskeren underveis i tolkningsarbeidet slik at kreative tolkninger går tapt. Jeg har vært bevisst på dette etiske dilemmaet underveis i arbeidet med analyse og tolkning, og har forsøkt å bruke situasjoner fra datamaterialet som utgangspunkt for generell diskusjon heller enn å vurdere den enkelte lærer.

4 Resultater

I dette kapittelet presenterer jeg resultatene av analyseprosessen. Første og andre sekvens representerer casen fra 8. trinn, algebra. Tredje og fjerde sekvens representerer følgelig casen fra 10. trinn og undervisning om funksjoner.

4.1 Første sekvens: Variabler som ukjente lengder

Foranledningen for første sekvens er at elevene på 8. trinn har fått vite at de denne timen skal starte opp med noe helt nytt som kalles *algebra*. De får deretter utdelt et sett med papirstrimler i ulike lengder og farger som de får beskjed om å lage ulike figurer med, som de etterpå skal tegne inn i boka si med fargeblyanter. Etter at de har arbeidet en stund med dette i par, samler læreren igjen klassens oppmerksomhet mot tavla. Dette er starten på det jeg kaller første sekvens. Sekvensen inneholder helklasseundervisning hvor læreren forsøker å få elevene til å si noe om lengdene rundt et rektangel uten å kjenne til noen konkrete mål. De identifiserer noen størrelsesforhold mellom noen av strimlene, og kaller lengden på strimlene for henholdsvis a, b, c og d. Rektangelets omkrets blir så beskrevet først ved hjelp av fargekodene på strimlene og etterpå ved de tilsvarende bokstavene hver strimmel har fått tildelt. Bokstaven, eller variabelen, er tenkt å skulle representere strimlenes ukjente lengder. Sekvensen ender med at læreren etablerer ekvivalensen «$a + c + a + c = 6c = 3a$», og får en noe motvillig aksept for denne.

Hvilken type eksemplifisering er det?

Denne sekvensen konsentrerer seg om *hvordan man går frem* for å si noe om lengdene i et rektangel dersom man ikke kjenner de faktiske målene. Samtidig kan det sies å være et eksempel på *bruken av* variabler for å beskrive generelle sammenhenger eller ukjente størrelser. Denne beskrivelsen av sekvensen tilsier at dette er eksemplifisering av en *rutine*. Denne spesifikke rutinen er samlingen av metadiskursive regler som legger rammene for hva man kan si om omkretsen til den geometriske figuren *rektangel* uten å kjenne målene på figuren. I tillegg er dette eksemplifisering av en situasjon hvor det er passende å bruke bokstaver som benevning for ukjente størrelser, samt hvordan man gjør det.

Hvilken type diskursiv endring?

Dette er introduksjonsøkta i algebra, og det er derfor rimelig å anta at elevene ikke er kjent med det som blir presentert i denne sekvensen fra før. Dette betyr at de aller fleste elevene ville vurdert denne måten å beskrive omkretsen av et rektangel på som ugyldig. Dersom elevene skal akseptere en variabel størrelse som «6c» som et uttrykk for omkretsen til et rektangel, innebærer dette en endring i metadiskursive regler for hva som vurderes som en gyldig narrasjon om rektangelet. Sfard (2012) peker på at å utvikle en algebraisk diskurs innebærer å slå sammen aritmetikken og dens metanivåregler, såkalt *vertikal metanivålæring*. Dette vil si at å utvikle en algebraisk diskurs alltid vil bety en diskursiv endring på metanivå. Å konstruere det matematiske objektet *variabel* kan tolkes som diskursiv endring på objektnivå. Det er allikevel slik at dersom det nye objektet ikke kan utledes logisk ifra den eksisterende diskursen, men krever etableringen av helt nye diskursive mønstre, vil dette være en diskursiv endring på metanivå (Caspi & Sfard, 2012). Den forventede diskursive endringen i denne sekvensen vil derfor være på metanivå.

Rutiner

Den aktuelle rutinen handler om hvordan man kan uttrykke seg om omkretsen til et rektangel uten å kjenne målene på de ulike sidene. De metadiskursive reglene som rammer inn denne aktiviteten inneholder blant annet regelen om at man ikke skal måle figuren med linjalen. Denne regelen, som går mye igjen i ulike matematiske rutiner, er ganske interessant. Å ikke kunne måle figurer er noe ganske særegent for matematikken, og understreker i hvor stor grad diskursen handler om abstrakte objekter. Når man ikke kan måle en figur for å beskrive den, så er det fordi man egentlig ikke er interessert i den konkrete representasjonen av figuren man har foran seg og hvilke unøyaktigheter den måtte inneholde. Man er interessert i *idéen* om et rektangel, en firkant hvor to og to sider er *nøyaktig* like lange og hvor alle vinkler er *nøyaktig* 90 grader. Denne særegenheten i matematikken får ofte lite oppmerksomhet, og elever vil kunne ha vanskelig for å akseptere denne regelen. Regelen om måling blir gjort eksplisitt i den aktuelle undervisningssekvensen.

113. Lærer: Ok, første spørsmålet er: kan dere si noe om hvor lange de forskjellige strimlene er? Går det an å si at vi- ikke bruke linjal, jeg skal ikke måle, men går det an likevel å si noe om hvor lange de er? Når vi har fire. Vi har en som er lyse blå, og så har vi en som er mørke blå, og så har vi en som er ros- rød, skal vi kalle den for rosa da? Den siste. (Skriver fargene på tavlen mens hun sier dem). Går det an å si noe om hvor lange de er? (...6 sek.) Uten å måle med linjal. (…7sek).

Læreren ber elevene beskrive lengden på papirstrimlene de har fått utdelt for å lage ulike figurer tidligere i undervisningsøkta. I det spørsmålet blir stilt første gang (113., første og andre linje) er det flere elever som griper etter linjalen. Sett fra utsiden er dette en helt logisk reaksjon på spørsmålet. I hvilken som helst diskurs bortsett fra matematikken vil man, om man har muligheten til det, måle dersom man lurer på en størrelse eller forholdet mellom størrelser. Sett fra utsiden fremstår dette faktisk som eneste mulighet dersom man skal kunne svare på spørsmålet om «hvor lange de er». Læreren påpeker imidlertid fort at måling med linjal er uaktuelt, men uten å forklare dette videre. Det er lett å se at elever kan bli forundret over dette. Det som for dem står som eneste løsning på problemet blir avvist av læreren. Dette skjer fordi læreren selv er en sentral deltaker i en matematisk diskurs, og har automatisert den aktuelle rutinen hvor å *ikke* måle er en sentral metadiskursiv regel. Dette kan være en kommognitiv konflikt, da det kan se ut som om lærer og elever handler i henhold til ulike metadiskursive regler.

Læreren spør om elevene kan si noe om hvor lange de ulike strimlene er. Dette kan være en vanskelig oppgave, da lengden av et konkret objekt oftest er knyttet opp mot konkrete verdier. Uten å vite noen konkrete mål på strimlene kan man ikke si noe om hvor lange de er. Man kan derimot si noe om *forholdet mellom* de forskjellige strimlene. Dette er det som blir gjort videre:

114. Elev: Den rosa er jo kortest.

115. Lærer: Den rosa er den korteste?

116. Elev: Ja.

117. Lærer: Ok.

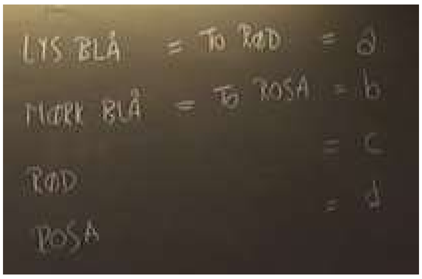
118. Elev: Den røde er halvparten av den lyse blå og rosa er halvparten av den mørke blå.

119. Lærer: Den rosa er halvparten av den mørke blå? Ok. Så hvis du tar to rosa, får du da en mørke blå? Ja (skriver «mørke blå = to rosa» på tavla). Så da kan jeg si at den mørke blå er to rosa. Også sa du en ting til. Du sa at?

120. Elev: Den rød er halvparten av den lyse blå.

121. Lærer: Den rød er halvparten av den lyse blå så da vil det si at den lyse blå, da er den to rød. Ok. (Skriver «lys blå = to rød» på tavlen) (…)

En elev kommer med et forslag til en beskrivelse av en av strimlene (114). I denne situasjonen ser jeg det som nødvendig å gjøre et unntak når det gjelder min metode for analyse av dataene. Ytring 114 får lærerens ansikt til å «lyse opp» (hever øyenbryn, smiler mer) og stemmeleiet blir forhøyet. Jeg tolker dette som en positiv respons på elevens ytring, og at elevens ytring er av den typen læreren hadde håpet at skulle dukke opp. Dette kommer ikke frem av transkripsjonene. Jeg anser dette som avgjørende for den videre utviklingen av situasjonen, og velger derfor å ta det med. En annen elev kommer med en lignende type påstand om strimlene (118), og læreren skriver dette opp på tavla. Sett fra utsiden kan det virke som om elevene gjetter på hvilke svar læreren vil ha, og tolker lærerens respons som et signal på om de er på rett spor eller ikke. Dette er karakteristisk for et ritual i tidlig fase, hvor elevene ikke ennå kjenner rutinen. Deres eneste mulighet er å etterligne mer erfarne deltakere og på den måten forsøke å få tak på hvordan denne formen for kommunikasjon utarter seg. Den metadiskursive regelen de nå får erfare sier noe om at narrasjoner av typen «en side er halvparten av en annen» vurderes som verdifulle i den aktuelle diskursen. Enkelte vil nok kunne bli forundret over dette. I andre deler av en matematisk diskurs vil denne typen narrasjoner ofte kunne bli vurdert som lite hensiktsmessige. Noen vil kanskje oppleve at de nå sitter med motstridende metaregler i forhold til dette.



Det neste som skjer er at de ulike strimlene får tildelt en bokstav som skal stå for den ukjente lengden. Bildet til høyre viser hvordan det hele blir satt opp.

121. Lærer: Den rød er halvparten av den lyse blå så da vil det si at den lyse blå, da er den to rød. Ok. (Skriver «lys blå = to rød» på tavlen) (…) Ålreit, hvis jeg nå sier at eh: vi kan kalle lengden til den lyse blå a. Bokstaven a. (skriver "=a" på tavlen) Vet jo ikke helt hvor langt det er, men kaller den for a. A er en fin bokstav. Og den mørke blå kan være b, for b-klassen er jo best. så da kan vi kalle den for b. (skriver på tavlen) Så kan jeg sei okay, den mørke blå er b. Så lang er den, b lang. Så kan vi tenke oss at en c. Den røde kan da være c. Og den rosa kan være d (skriver på tavlen mens hun snakker). Er dere med på den? At vi kan bare si: okay vi vet ikke helt avstanden, men vi kaller den for en bokstav. (...) Når vi da har gjort det hvis jeg hvis du nå den ene figuren du har tegna så tar du å stiller deg her sånn i hjørne (markerer hjørne på firkanten som er på tavlen, med krittet). Og så skal vi tenke oss det at jeg skal gå rundt hele figuren. Skal gå bort hit, opp dit, hele veien her og så ned tilbake igjen til start (viser hele tiden på figuren). Hvis du skal gå rundt hele figuren som du har tegna, går det da an på et eller annet vis å si hvor lang du har gått? (5 sek). Hvis jeg nå sier at her er en, Den er lys blå og den her e: rød. (Skriver på tavlen.) Går det an å si noe om, hvis jeg går først en lyse bål, og en rød og en lyse blå og en rød? (Peker på elev med handa oppe)

122. Elev: E: Må vel være seks røde.

123. Lærer: Hva sa du?

124. Elev: Seks ganger rundt den røde.

125. Lærer: Seks ganger rundt den røde. Ja for du tenker at hvis den lyse blå er to rosa så blir det en, to, tre, fir, fem, seks rød (peker på figuren). (Ser på eleven). Ja. Ålreit, kan du hvis du bytter ut den der røde med, hvilken bokstav skulle vi ha den som da?

126. Elever: C

127. Lærer: C. Så det betyr at jeg kan skrive at det er seks c rundt figuren. Kan jeg si det? (Skriver på tavlen mens hun snakker)

128. Elev: Ja.

Læreren beskriver hvordan man kan fortelle at man beveger seg rundt figuren (121). Hun bruker beskrivelser som «bort dit», «opp hit» og «ned tilbake til start». Deretter etterlyses en mer presis måte å referere til de ulike sidene i figuren. Etter en fem sekunders pause uten respons viser læreren tydelig til fargekodene som har blitt tilordnet de ulike sidene i figuren. I siste setning svarer læreren på sitt eget spørsmål, men med en spørrende formulering for å gi elevene muligheten til å bekrefte narrasjonen. På dette punktet kan det se ut som om enkelte elever plukker opp hvilke type ytringer læreren forsøker å produsere, og de kommer med to forslag til hvordan man kan uttrykke omkretsen til figuren; Først som «seks røde» (122), og deretter som «tre lyse blå» (130). Som utenforstående kan denne aktiviteten fremstå som meningsløs. Å beskrive omkretsen til figuren med fargekoder fremfor «bort dit» eller «opp hit» bringer en ikke nærmere å vite hvor langt det faktisk er rundt figuren. I den matematiske diskursen, så langt elevene har erfart til nå, pleier det å handle om tall. Svar på spørsmål pleier å ende opp i et konkret tall. Dette kan være med på å forklare litt av tilbakeholdenheten som observeres blant elevene i denne sekvensen.

129. Lærer: Kan jeg si noe annet da? (Peker på elev med handen oppe)

130. Elev: Jeg er litt usikker om det går an å sei tre lyse blå?

131. Lærer: Tre lyse blå?

132. Elev: Ja, jeg tenker at de to røde det er jo en lyse blå.

133. Lærer: Ja. Så du kan tenke at, og lyse blå hvilken farge var det da? Eller hvilken bokstav er den?

134. Elev: A.

135. Lærer: A. Så du kan si at det er tre a rundt figuren (skriver på tavlen mens hun snakker). Ja, det kan vi vel si? Kan du si noe annet da? (5sek) Hvis jeg tenker at lys blå det var a. (Skriver på a på tavlen) Så først går jeg den a-en, og så hvis jeg skal legge til noe, bruker jeg noen regnetegn da? Hvis vi skal legge til noe, hva pleier vi å gjøre da? Hvilket regnetegn hvis vi skal legge til noe? (Peker på elev med handen oppe)

136. Elev: Pluss.

137. Lærer: Ja, eller addisjon, sant? Vi kan addere, bruke pluss. Hvor langt skal jeg gå etterpå der da, etter at jeg har gått den lyse blå? (…) En rød, hvilken bokstav var den rød da? (Peker på elev med handen opp).

138. Elev: C.

139. Lærer: C. Og så skal jeg gå en lys blå og så skal jeg gå en rød (skriver "(a+c)+a+c" på tavlen). Er det det? Og det er akkurat like lagt som å gå seks c eller som å gå tre a (skriver disse utrykka bak det første med likhetstegn i mellom). Er det ikke det? (6 sek)

140 Elev: Ja: ((Virker lite entusiastisk))

141. Lærer: Ja. Ehm, så på den måten går det faktisk an å fortelle noen hvor langt det er den figuren, rundt den figuren ved å bruke bokstaver, i stedet for tall. Så nå kunne jeg godt tenke meg. Ser dere også en ting, at e: det ikke er et riktig svar her? Vanligvis pleier det å være et rett svar. Her kan det være forskjellige ting som er rett svar. Nå vil jeg at dere e: tar også prøver å fortelle på hver eneste figur du har tegnet så skal du lage et uttrykk for hvor langt det er rundt. Nå tar du tak i hver enkelt av figurene som du har tegna opp og så prøver du å lage med bokstaver og fortelle hvor lagt det er rundt. Skjønte dere?

142. Elev: Ja.

Selv om denne rutinen kan virke meningsløs for en utenforstående er denne type aktivitet en helt avgjørende del av det å begynne å uttrykke seg generelt i en algebraisk diskurs. Dersom noen elever sitter med en utenforståendes opplevelse, vil det kunne hjelpe å drøfte denne karakteristiske delen av matematikken med elevene. En matematikklærer er en sentral deltaker i en matematisk diskurs og anser denne måten å uttrykke seg på om figurer som verdifull for å generalisere egenskaper ved ulike typer figurer. Dette kan man ikke anta at elevene ser basert på kommunikasjonen så langt i denne sekvensen. For elevene som for første gang deltar i en algebraisk diskurs vil denne diskursen hovedsakelig bli ansett som en *diskurs-for-andre* (Sfard, 2008), det vil si, en diskurs de foreløpig kun deltar i for å kunne kommunisere med mer erfarne deltakere (læreren). Dersom det skal kunne forventes at elevene forvandler denne diskursen til en diskurs-for-seg-selv, må elevene se en fordel med denne spesifikke diskursen (Nachlieli & Tabach, 2012).

I sekvensen beskrives omkretsen til et rektangel til slutt med narrasjonen «$a + c + a + c = 6c = 3a$». Denne narrasjonen forteller oss imidlertid ingenting om omkretsen til dette rektangelet. Det forteller oss derimot noe om hvilken type figur vi har med å gjøre. Det forteller oss at i *alle* rektangler hvor den korteste siden er nøyaktig halvparten av den lengste siden vil omkretsen være gitt ved enten tre ganger langsiden (3a), eller seks ganger kortsiden (6c). Dette impliserer også at dersom omkretsen til et vilkårlig rektangel kan skrives som enten tre ganger langsiden, eller seks ganger kortsiden, så er rektangelet slik at den korteste siden er nøyaktig halvparten av langsiden. Det som er interessant ved dette er ikke at man kan skrive bokstaver i stedet for tall på den aktuelle figuren på tavla. Det interessante er at man har klart å beskrive et forhold ved en spesiell figur som vil være det samme uansett hvor stor eller liten figuren er. Man kan nå sette inn hvilket som helst positivt tall i for eksempel 3a, og man vil finne omkretsen til alle rektangler av typen hvor kortsiden er halvparten av langsiden. Tallet man setter inn vil her være langsiden, og kortsiden vil nødvendig vis være a/2. Det kan altså argumenteres for at alle tall i ni-gangen vil kunne representeres geometrisk som et rektangel av denne typen.

Resonnementet over illustrerer litt av idéen bak en algebraisk diskurs; man ønsker å kunne uttrykke seg om generelle forhold knyttet til ulike mengder og størrelser (Caspi & Sfard, 2012). Det er ikke et mål i seg selv å «regne med bokstaver», det er bare slik diskursen har utviklet seg; ved å ta i bruk symboler fra alfabetet for å mediere generelle idéer.

Den samme diskursive aktiviteten kan fungere som ulike typer rutiner for forskjellige diskursdeltakere (Sfard, 2008). Den aktuelle rutinen er eksempel på dette. For læreren er dette en *utforskning* med hensikt å produsere nye narrasjoner om det matematiske objektet i fokus. Det samme kan ikke sies om elevene. For at en rutine skal kunne telle som en utforskning, krever det at den aktuelle matematiske diskursen er fullstendig objektivert hos individet. Dette er første timen i temaet algebra, og elevene har trolig ikke en objektivert bruk av variabler. Alt tyder på at dette for elevene vil være å regne for et ritual. De forsøker å kommunisere slik læreren gjør og etterspør, og prøver å finne ut av hvordan denne diskursen fungerer. Det later også til å være både lite interesse for, og lite enighet rundt narrasjonen som presenteres til slutt (139).

Matematiske objekt

De matematiske objektene som er mest sentrale i denne sekvensen er rektangelet og variabelen. Aktiviteten forutsetter at elevene har godkjent en rekke narrasjoner om objektet rektangel. Eksempler på slike narrasjoner er at det er en firkant hvor sidene er parvis like lange, hvor alle vinkler er rette og hvor omkretsen er summen av de fire sidene. Dette kan man anta er en del av elevenes diskurs fra årene i barneskolen. Skulle dette objektet ikke være fullstendig konstruert i en elevs diskurs, vil det gjøre eleven ute av stand til å ta stilling til narrasjonene som blir produsert om objektet; man har vanskelig for å beskrive noe man ikke kjenner.

Det andre sentrale objektet, variabelen, utgjør kanskje den største utfordringen elevene står ovenfor ikke bare i denne sekvensen, men i arbeidet med å bli deltaker i en algebraisk diskurs. Konstruksjonen av dette objektet er utfordrende. Blant annet er det vanskelig å forholde seg til såkalte *urealiserte signifikanser*, noe som er fremtredende i den algebraiske diskurs (Sfard, 2008). Man kan se det på elevers trang til å realisere variabler som en konkret tallverdi. Urealiserte signifikanser beskriver de situasjonene hvor man er nødt for å akseptere som endelig svar et uttrykk som tilsynelatende ikke inneholder mer informasjon enn det man hadde til å begynne med. Dette kan for eksempel være når man realiserer 2 delt på 3 som $\frac{2}{3}$, eller når man har et endelig svar som inneholder variabler; eksempelvis *k – 1*.

I tillegg møter man utfordringen med likestilling når man skal konstruere variabelobjektet. En fullstendig objektivering av variabler innebærer at man behandler store grupper tall som fullstendig likestilte under visse omstendigheter. Kvadratsetningene er et godt eksempel hvor alle rasjonelle tall likestilles og kan fungere som enten a eller b i de respektive narrasjonene. Begge disse utfordringene knyttet til variabler gjør det vanskelig for elevene å forholde seg til narrasjonen «$a + c + a + c = 6c = 3a$».

Narrasjoner

En sentral narrasjon i sekvensen finnes i ytring 118, hvor forholdet mellom de to lange og de to korte papirstrimlene påpekes. Dette kan vises ved å måle de ulike strimlene opp mot hverandre, og det er derfor ikke en narrasjon som er krevende å akseptere for elevene. Dette er en nøkkelnarrasjon i forhold til den beskrivelsen av rektangelet læreren ønsker å lede frem mot.

På grunnlag av den nevnte narrasjonen og narrasjonen som beskriver omkretsen til en firkant, produseres en ny sentral narrasjon. Denne narrasjonen medieres først av en dagligdags diskurs; Omkretsen til figuren beskrives som «seks ganger rundt den røde» (122-125). Læreren bringer så narrasjonen over i en algebraisk diskurs (127); det er seks c rundt figuren (skrives på tavla som «6c rundt figuren»). Det samme mønsteret gjentar seg i produksjonen av narrasjonen «3a rundt figuren». Disse to narrasjonene markerer grensen for hvor langt man kan anta at elevenes diskurs strekker seg. De symbolske mediatorene og signifikansene «3a» og «6c» må antas å være ukjente for elevene. Her starter elevenes arbeid med å realisere disse nye symbolene. Det er en fare for at elevene kan blande sammen strimlenes farge/navn med symbolet for den ukjente lengden. Det er en diskret, men viktig forskjell på å si «det er seks ganger rundt den røde» og «6c rundt figuren». Seks ganger den røde strimmelen er en bestemt lengde, nemlig den fysiske strimmelen lagt etter hverandre seks ganger. Å beskrive omkretsen som 6c vil derimot være riktig uansett hvor stor c er. Det er en forskjell her, selv om den ikke kommer tydelig frem i sekvensen. Denne problemstillingen berører selve «essensen» ved algebra. Man ønsker å beskrive mønsteret som ligger bak de konkrete tilfellene, ikke hva som er særegent for tilfellene. Dette er en metadiskursiv regel det er viktig at elever blir presentert for, men som ikke får oppmerksomhet i den aktuelle sekvensen.

4.2 Andre sekvens: Regneuttrykk

Den andre sekvensen er også hentet fra casen på 8. trinn, og dreier seg om regneuttrykk uten variabler. Sekvensen fremstår som todelt: Første del består av felles gjennomgang av to eksempler på hvordan hverdagslige situasjoner knyttet til kjøp av varer i butikk kan skrives opp som regneuttrykk. Deretter følger en økt med elevarbeid i par som ikke vil bli belyst i analysen. Andre del inneholder felles gjennomgang av svarene elevene har kommet frem til gjennom parvis arbeid med fire oppgaver fra læreboka. Disse oppgavene er også knyttet til hverdagslige situasjoner som handler om penger.

Første del av andre sekvens starter med at læreren presenterer elevene for en situasjon hvor noen har handlet i kantina. De har brukt 27 kroner, og lærer forklarer hvordan det er mulig å dele opp denne prisen og fortelle noe om hvordan denne prisen er fordelt på varene som ble kjøpt. De to forskjellige varene som ble kjøpt skrives opp med tilhørende pris. Deretter formulerer læreren et uttrykk for hvordan man kan regne det ut: «$1 \times 15kr + 3 \times 4kr$». Det refereres til Excel regneark, som ikke godtar bokstaver i cellene når det skal utføre kalkuleringer, som en overgang til hvordan et regneuttrykk skal se ut. Lærer skriver opp regneuttrykket «$1 \times 15 + 3 \times 4$» og presiserer at man ikke skal ha med benevning i et matematisk regneuttrykk. Det samme mønsteret utspiller seg en gang til ved gjennomgang av et liknende eksempel.

Andre del av andre sekvens innebærer at elevene kommer med forslag til løsninger på de fire oppgavene de har arbeidet med. Disse skrives opp som en liste på tavla, og drøftes underveis. Etter hvert som oppgavene blir vanskeligere dukker det opp utfordringer knyttet til rekkefølgen for regneoperasjonene. Her viser flere elever rutiner som er hentet fra en dagligdags diskurs når de løser oppgavene, og den største utfordringen ser ut til å være medieringen ved hjelp av en matematisk diskurs med matematiske symboler og regler knyttet til dette. Når alle regneuttrykkene er kommet på plass, trekker læreren frem noen komponenter i et regneuttrykk, som ledd, produkt og faktor. Det presiseres at det er godt å kunne disse begrepene og deres funksjoner i et uttrykk før de skal blande inn bokstaver i uttrykkene.

Hvilken type eksemplifisering er det?

Denne sekvensen inneholder noen ulike typer eksemplifisering. Hovedsakelig dreier sekvensen seg om å sette opp matematiske regneuttrykk basert på beskrivelser av praktiske situasjoner som omhandler ulike pengebeløp. Mange av disse uttrykkene blir satt opp i fellesskap, noe som gjør at *rutinen* som regulerer denne aktiviteten kommer i fokus. Regneuttrykkene blir listet opp på tavla etter hvert og fungerer også som eksempler på det *matematiske objektet* regneuttrykk. I tillegg avsluttes sekvensen med at lærer presenterer en rekke sentrale narrasjoner som beskriver de ulike objektene – regneuttrykkene.

Det er mulig å tolke regneuttrykkene som narrasjoner i en aritmetisk diskurs. En narrasjon er imidlertid definert som å være enhver sekvens av ytringer ment som en beskrivelse av objekter, forholdet mellom objekter eller prosesser med eller av objekter, *som kan vurderes* som godkjente eller ikke godkjente (Sfard, 2008). Den siste delen av definisjonen er avgjørende her. Regneuttrykket «$2 \times 5 + 3 \times 6$» er ikke en påstand man kan ta stilling til før det foreslås en løsning på uttrykket. Først når man påstår at uttrykket er ekvivalent med 28 har man en narrasjon man kan vurdere gyldigheten av. Denne sekvensen inneholder to typer eksemplifisering. Først og fremst er det en eksemplifisering av det matematiske objektet regneuttrykk. I tillegg er det en eksemplifisering av rutinen for å konstruere denne typen objekt.

Hvilken type diskursiv endring?

Andre sekvens inneholder introduksjonen av et matematisk objekt samt en rutine for å produsere denne type objekt. Utfordringene elevene står ovenfor innebærer blant annet prosessen med å realisere en hverdagslig situasjon i en aritmetisk diskurs. For å gjøre dette må sekvenser av ytringer om den hverdagslige situasjonen likestilles med fullstendig objektiverte ytringer i den aritmetiske diskursen. De skal også begynne arbeidet med å konstruere det generelle objektet regneuttrykk, som vil være et objekt skapt ved å likestille alle aritmetiske uttrykk med to eller flere ledd. I tillegg krever det godkjenning av en rekke narrasjoner om forholdet mellom objektene som inngår i et regneuttrykk, eksempelvis det som i denne sekvensen refereres til som «regnerekkefølge». Basert på denne beskrivelsen av hvilke diskursive endringer som kreves av den som ønsker å bli deltaker i den typen diskurs som man finner i andre sekvens, kan man argumentere for at den diskursive endringen man kan forvente i sekvensen vil være på objektnivå.

Rutiner

Den rutinen som er fremtredende i denne sekvensen handler om hvordan man kan tolke en dagligdags situasjon knyttet til kjøp, salg eller annen inntjening av penger for videre å kunne uttrykke disse situasjonene i en matematisk diskurs mediert av tall og symboler. Nedenfor vises arbeidet med det andre eksempelet fra første delen av sekvensen:

7. Lærer: Eksempelet stod på side 28. Anders han skal handle noen blyanter og skrivebøker, og så er spørsmålet om vi kan klare og ikke bare svare hvor mange kroner han bruker, men om vi kan sette det opp litt detaljert og så gjøre det med et sånt regneuttrykk, og, vi skriver ned eksempelet i regelboken. Han heter Anders den her fyren (skriver på tavla), han skal kjøpe fem blyanter til to kroner stykke og så skulle han kjøpe seks skrivebøker, og de kostet, ja nå ble det litt, det var tre skrivebøker som kostet tre kroner. Og så er jo oppgaven da hva må en betale. Og da, hva må vi gjøre da? Bare for å få dere litt med, hva må vi gjøre da? Vi skal regne ut hvor mye han må betale.

8. Elev: Da må du ta fem ganger to og tre ganger seks, eller pluss, pluss de liksom= (lærer skriver på tavla)

…

15. Lærer: Ja. Også blir det tyveåtte kroner. Ja, men er det noe regneuttrykk da? Hvorfor gjør vi sånn? (Elev i klassen rister på hodet)

16. Lærer: Hvorfor gjør du sånn? (Rister på hodet selv)

17. Elev: For du skal ikke ha med kroner og sånn.

18. Lærer: Nei så hvordan blir regneuttrykket da?

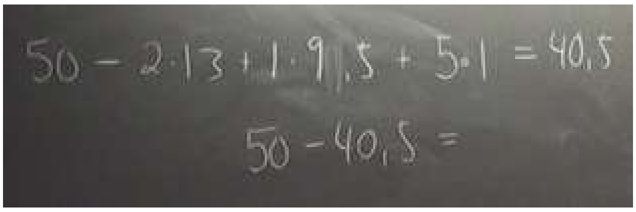
19. Elev: Nei det blir vel fem ganger to pluss tre ganger seks.

Elevene går på ungdomsskolen og man kan derfor anta at de er kjent med å handle i butikken og å regne seg frem til hvor mye de må betale. I ytring 8 viser eleven at han/hun har en automatisert rutine som implementeres i denne type situasjoner, men viser samtidig at å uttrykke seg om dette i en matematisk diskurs er noe som er mer ukjent. Dette går igjen i denne sekvensen; Flere elever viser tegn til automatiserte rutiner for å løse praktiske situasjoner, men har vanskeligere for å uttrykke seg i en matematisk diskurs. Det finnes minst to potensielle grunner til dette. Den første er utfordringene knyttet til å se det aritmetiske regneuttrykket og beskrivelsen av situasjonen i læreboka som *det samme*. Den andre årsaken kan være knyttet til bruken av visse symbolske mediatorer i matematikken. Denne problematikken blir synlig i oppgave E3, hvor spørsmålet er hvor mye man får *igjen* etter å ha kjøpt tre forskjellige varer og betalt for dem med en 50-lapp. Dette innebærer å legge sammen prisen for varene for deretter å trekke denne summen fra de 50 kronene. Flere elever kommer med forslag til rutiner for å løse problemet, og det er mulig at samtlige elever ville klart å løse oppgaven i en hverdagslig situasjon. Utfordringen ligger i å mediere rutinen i en aritmetisk diskurs. Det finnes en metaregel i rutinen for å produsere regneuttrykk som blir gjort mer eksplisitt enn noen annen; regelen om at man ikke skal ha med benevning bak noen av verdiene i et regneuttrykk. Ytringene 15 til 19 illustrerer denne metaregelen, og hvordan den blir gjort eksplisitt i sekvensen.

Når læreren først spør om noen vil komme med forslag til regneuttrykk på oppgave E3, svarer en elev først med et uttrykk for alt som skal kjøpes. Transkripsjonen under er fortsettelsen av dette, hvor lærer minner elevene på hva oppgaven spurte etter:

68.	Lærer: Ja, fem tyggegummier som kostet en krone. Ok, ja. Er det svaret på hele oppgaven? Hva var det de spurte om?
69:	Elev: Hvor mye han fikk igjen.
70.	Lærer: Hvor mye han fikk igjen ja, når han hadde betalt med en femtilapp.
71.	Elev: Og da tok jeg førti ganger fem, eller, femti minus førti komma fem er ni komma fem.
72.	Lærer: Ja for du regnet ut det som står her (viser til det oppsatte stykket på tavla) til å være førti komma fem, og så tenkte du at da må det være femti minus de førti komma fem, så er svaret?
73.	Elev: Ja.
74.	Lærer: Ja. Sånn tenkte du ja, flott. XX?
75.	Elev: Jeg satt bare, ehm, femti, femti minus foran to ganger tretten.
76.	Lærer: Du hadde lyst til å sette femti minus der, sånn? (Skriver dette foran de andre leddene i uttrykket)
77.	Elev: Det gjorde jeg og.
78.	Lærer: Ja.
79.	Elev: Er det feil?

80. Lærer: Ja godt spørsmål er det rett eller er det feil? Hva er det det står der nå egentlig? Det står at jeg først skal ta femti minus, hva da? Ja?



Utklippet fra tavla til venstre viser hvordan tavla så ut etter ytring 80. Forslaget i ytring 71 er et eksempel på en praktisk orientert rutine. Utgiftene blir summert for så å bli trukket fra beløpet man har til rådighet. Dette er en rutine for å «finne svaret», det vil si å produsere det vi oppfatter som et objekt som er enklere å forholde seg til enn hva vi hadde i utgangspunktet. I denne undervisningssekvensen er imidlertid ikke dette noe poeng. Fokuset i sekvensen er å gjøre elevene kjent med rutinen «å sette opp et regneuttrykk». Rutinen er ment å være til hjelp for elevene i å løse problemer av den typen de møter i lærebokoppgavene, en såkalt gjerningsfremmende utforskning. Oppgaven med å bestemme hvor mye som skal betales vil nå kunne gjøres ved å anvende en rutine for å produsere matematiske narrasjoner.

Ytring 75 er et steg nærmere uttrykket som beskriver situasjonen på riktig måte, men det mangler fremdeles noe. Denne ytringen viser at det er noen sentrale metaregler i den aktuelle diskursen som eleven fremdeles ikke er kjent med – regler for hvordan man uttrykker enkelte forhold mellom mengder. Det kan veldig gjerne være at eleven ville regnet riktig her allikevel ved å trekke de tre opprinnelige leddene fra de femti. Eleven vil allikevel ikke fremstå som en deltaker i diskursen da han/hun ikke vil være i stand til å kommunisere med andre sentrale deltakere. Samtidig er det vanskelig å si om eleven vil gjøre det samme i en annen liknende situasjon.

Det finnes en kilde til forvirring i denne sekvensen. Læreren ønsker at elevene skal produsere regneuttrykk som beskriver situasjonene i de ulike oppgavene, noe som blir sagt eksplisitt. Allikevel ber oppgavene elevene om *svaret* på problemene. Dette virker kanskje som en ubetydelig forskjell, men det kan argumenteres for at det har betydning for hvilken rutine elevene implementerer. Dersom det kun ble spurt etter regneuttrykket, ville det kanskje ikke dukket opp løsningsforslag som det vi finner i ytring 71. De elevene som er tilstrekkelig sentrale deltakere i diskursen, det vil si at de er i stand til å benytte seg av rutinen med å produsere regneuttrykk for å løse oppgaven, vil både produsere regneuttrykket som beskriver situasjonen *og* det konkrete svaret. Elever som ennå ikke er kommet så langt i sin utvikling av diskursen vil kunne ty til rutiner de er mer fortrolige med for å løse oppgaven de har fått. Dette kan føre til at noen produserer svaret – summen av regnestykket – ved hjelp av alternative rutiner og at de derfor ikke sitter med noe regneuttrykk. Dette kan være en mulig tolkning av ytring 81 hvor eleven er opptatt av hvordan man regner seg frem til svaret:

81. Elev: Da er det bedre at du tar, for eksempel at du, eh, finner ut hva liksom to ganger tretten er og en ganger ni komma fem og fem ganger en. Og så skriver du femti minus tjueseks, minus ni komma femti, minus fem.

Neste elevinnspill bidrar til fremdrift i situasjonen ved å introdusere en *parentes* i uttrykket:

83. Elev: Eh, jeg hadde satt femti på slutten siden nå står det jo femti minus to, og det blir jo førtiåtte, ganger tretten pluss en ganger ni=

84. Lærer: =Ja=

85. Elev: =Hvis det skal stemme så må det jo stå i parentes.

86. Lærer: Ja! Det må stå i en parentes, det er riktig. Hvor vil du ha den parentesen?

87. Elev: Ehm.

Parentesen er et symbol som er relativt nytt for elevene i åttende klasse. Det er et sentralt symbol i aritmetisk og algebraisk diskurs, og det brukes blant annet til å gruppere flere ledd sammen i én mengde. Det er en signifikans som viser til et diskursivt objekt elevene kjenner fra en språklig diskurs. Utfordringen elevene står ovenfor nå er at dette symbolet også skal fungere som signifikans for et matematisk objekt.

89. Elev: Eh, Foran to og etter fem komma én, nei ganger én.

90. Lærer: Fem ganger én ja. For hvis vi tenker oss at alt det hun kjøper det er liksom noe jeg skal, det hører litt sammen, alt det jeg kjøper kan jeg legge sammen først. Ikke sant? Og så er det femti kroner minus alt, det som vi skal legge sammen.

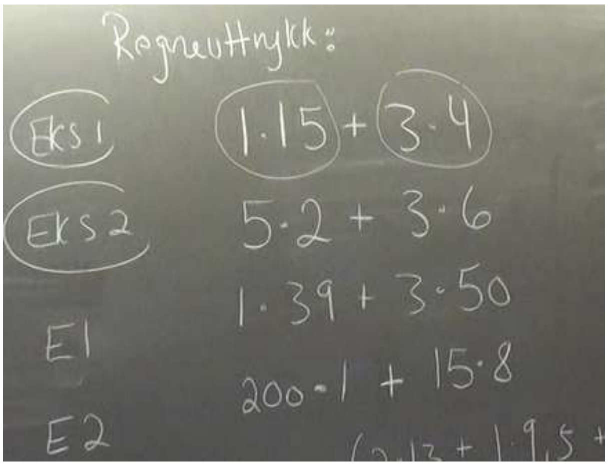
Lærerens forklaring (90) kan tolkes som en narrasjon som beskriver en parentes som noe som rammer inn flere små mengder som hører sammen. Det er en narrasjon som lar seg godkjenne ved hjelp av metaregler fra en hverdagslig diskurs, da det viser til det å pakke inn noe eller sette rammer rundt noe som hører sammen. Senere i sekvensen blir også «det som står inni parentesen» beskrevet som *ett ledd*. Dette er på mange måter den samme narrasjonen som den første, men den medieres av en matematisk diskurs, som også gjør det nødvendig å være mer sentral deltaker i diskursen for å godkjenne den. Det forutsetter blant annet at man har internalisert objektet ledd.

133. Lærer: … Nå, har vi rett og slett et behov for å prøve og så, snakke om hva er et regneuttrykk bygd opp av. Han gutten min hjemme han er veldig glad i å bygge Lego, og når vi skal bygge sånne hus og sånt så sier han at han må ha en firer og så må du ha en toer og så må du ha en sånn, og så bygger vi det sammen. Klarer vi og så bruke noen ord på hva dette her er? Hvordan er et regneuttrykk bygd opp? Altså vi skal prøve å finne ut av hva består et regneuttrykk av? Det må vi prøve og så få, vi må ha noen ord og begreper på plass, slik at det er litt lettere å snakke om hva et regneuttrykk er. Enig? Hvis vi ser på de første her (referer til oppgavene skrevet på tavlen), er det noe som er likt med de? De fire første faktisk, er bygd opp på en lik måte, er de ikke det? Se på de fire første regneuttrykkene, er ikke de bygd opp ganske likt?

134. Elev: Jo.

Ytring 133 markerer en endring av hvilken rutine som står i fokus. Frem til nå har rutinen med å tolke en praktisk situasjon og mediere denne i en aritmetisk diskurs vært sentral. Aktiviteten som nå starter opp har som mål å produsere narrasjoner om de allerede produserte objektene (regneuttrykkene). Elevene sier lite i denne delen av sekvensen, og det blir nærmest en monolog fra lærer. Det er derfor vanskelig å si noe om i hvilken grad elevene kan regnes som sentrale deltakere i denne diskursen.

Lærer refererer først til de fire første regneuttrykkene som står under hverandre på tavla, og spør om det er noe som er likt ved disse fire uttrykkene. Lærer foreslår her en narrasjon om disse objektene som hun ønsker at elevene skal ta stilling til. Nest siste linje av ytring 133 indikerer samtidig at læreren har godkjent narrasjonen på forhånd. Godkjenning av narrasjoner i en matematisk diskurs skal ideelt sett gjøres i henhold til etablerte metadiskursive regler. Det er allikevel ofte slik at maktforhold og roller blant deltakerne i en diskurs er avgjørende for slik godkjenning (Sfard, 2008). I en undervisningssituasjon vil elever, som uerfarne deltakere i diskursen, ofte godkjenne narrasjoner basert på at læreren har godkjent dem som en sannhet. I den aktuelle delen av sekvensen kan det ikke utelukkes at elever tilsynelatende aksepterer enkelte narrasjoner kun basert på at lærer gir uttrykk for at hun anser dem som en sannhet. Dersom man ønsker å frembringe en «ekte» godkjenningsprosess hos elever, kan det på grunn av dette være viktig å uttrykke seg så nøytralt som mulig angående gyldigheten av en narrasjon.



135. Lærer: Det er to tall som er ganget med hverandre (peker på regnestykkene på tavla), og så er det en pluss, så er det to tall som er ganget med hverandre. Og husker dere hva vi heter, hvis vi tenker først at det, hvis jeg tenker at det er et tall (sirkler inn et ledd i EKS1 på tavlen) og det er et tall (sirkler inn neste ledd). Husker dere hva jeg kaller de? De er vel det første vi skrev opp i regelboken når vi startet opp i høst. Sånn her addisjonsstykke, hva kaller vi de som vi plusser sammen når vi adderer, hva kaller vi de?

136. Elev: Ledd.

137. Lærer: Et ledd ja. Så kan vi si at det øverste regnestykket (peker på EKS1 på tavla) der består av to ledd? Kan vi si det? Er alle med på hva vi snakker om nå, at regneuttrykk kan ha, et, to ledd? Så (skriver på tavla), ledd det er en ting som er med, kan være med i et sånn regneuttrykk. Og hvis vi tar et eksempel her, hvis vi ser på eksempel, eh, eksempel 1 og eksempel 2 og E.1 og E.2, de har to ledd, kan vi være enige om det? At hvis vi ser på regneuttrykkene som er her (peker på tavla) så har de to ledd, det er likt

for alle sammen. Alle de har to ledd. Kan dere være med på det? Men kan jeg da klare å fortelle noe om de to leddene som er der (peker på tavla), kan vi si noe om ett sånn ledd? Det som står inni en sånn runding her, kan vi klare å si noe om det da? Hvis vi skal bruke matteord. Hva kalte vi det når vi tok og så ganget, når vi tok og så multipliserte noe, hva var det vi kalte det for noe? Husker dere det da?

138. Elev: Sånn faktor eller produkt

139. Lærer: Faktor eller produkt ja. Hva er hva? Hva var faktor og hva var produkt? Husker du det XX?

140. Elev: Jeg tipper produkt var svaret så da må faktor vær de to andre.

141. Lærer: Ja. Så vi kan si at det er to ledd med to faktorer (skriver på tavla) i hvert ledd. Kan vi si det? At hvert ledd har to faktorer, så de matematiske uttrykkene eksempel 1 og 2, E.1 og E.2 har to ledd med to faktorer i hvert ledd. Er dere med da?

142. Elev: Ja.

Lærer bruker i første del av ytring 127 de fire første uttrykkene sammen for å formidle en metaregel for identifisering av det matematiske objektet «ledd», nemlig at man kan lete etter tall eller uttrykk som skilles med «pluss» eller «minus». I de fire første uttrykkene identifiseres *to* ledd i henhold til denne metaregelen. På samme måte leder lærer elevene gjennom identifisering av faktorer innad i leddene i de første uttrykkene (siste del av 137 – 142).

143. Lærer: Ja. Glimrende. Hvis vi ser da på den her (peker på E3 på tavla), hvor mange ledd har den? Hvis vi ser på eksempel, eksempel tre, og egentlig ja, hvis vi ser på eksempel tre, vi må ha den først. Hvor mange ledd har den da? Hvis jeg sier at det som står inni parentesen er ett ledd, så har den, XX?

144. Elev: To.

Uttrykket i E3 er annerledes enn de fire foregående. Det består av to ledd, hvor det ene leddet er en parentes som igjen inneholder tre ledd. Denne nivådelingen kan være utfordrende å akseptere. Lærer er kjapt ute med forklaringen på at det som står inne i parentesen teller som ett ledd (143). Igjen får elevene lite tid til å reflektere over problemstillingen, og det blir en demonstrasjon av implementeringen av en annen rutine for identifisering av ledd; en parentes adskilt fra andre deler av uttrykket med «pluss» eller «minus» teller som ett ledd uavhengig av hva som måtte stå inni den. Spørsmålet om hvor mange ledd som inngår i «eksempel tre» vil kunne utløse en utforskende rutine hos elever, en rutine som vil kunne produsere den ønskede narrasjonen om uttrykket. Dersom dette er ønskelig, er det avgjørende at de får tid til det.

Narrasjoner

Definisjonen av *ledd* står sentralt i siste del av denne sekvensen. Selve definisjonsnarrasjonen blir ikke presentert eksplisitt, men midt i ytring 135 finner man noe som ligner: «Sånn her addisjonsstykke, hva kaller vi de som vi plusser sammen når vi adderer, hva kaller vi de?» Hvorpå en elev foreslår «ledd» (136), noe lærer bekrefter. En definisjon hentet fra Store Norske Leksikon går som følger: «Betegnelse på de enkelte addender i en sum, og på de enkelte elementer i en rekke» (2009, 14. februar). De enkelte addender svarer til «de som vi plusser sammen». På denne måten fungerer denne narrasjonen som en beskrivelse av objektet ledd. Godkjenning av denne type narrasjoner inngår i konstruksjonen av det matematiske objektet, og det er avgjørende for hva som skal skje videre i denne sekvensen at elevene har en objektdrevet bruk av ordet «ledd».

Ledd er et av ordene som brukes for å beskrive regneuttrykkene. En slik beskrivende narrasjon er «alle de har to ledd», hvor «de» refererer til uttrykkene i eksempel 1 og 2, samt oppgavene E1 og E2. Det blir vanskelig for elevene å godkjenne disse beskrivende narrasjonene dersom «ledd» ikke er utviklet til et *objektdrevet* nivå. Kanskje har noen elever en frasedrevet bruk av ordet, noe som betyr at ordet er knyttet til spesielle ytringer og i større grad er kontekstavhengig for eleven. Det blir da vanskelig for eleven å bruke objektet ledd til å produsere nye narrasjoner. Hvert av de to leddene i de fire første uttrykkene blir også beskrevet som å inneholde *to faktorer*. Dette medfører det samme behovet som ved ledd ovenfor. Elevene må ha konstruert objektet «faktor» i sin diskurs og ha nådd et objektdrevet nivå i bruk av denne signifikansen for å kunne godkjenne denne type narrasjon på annet grunnlag enn at læreren har godkjent det.

«Det må stå i en parentes» (86) dukker som kjent opp i arbeidet med oppgave E3. Dette er en viktig og interessant narrasjon som kan være utfordrende å ta stilling til. Som utenforstående kan det oppleves som unødvendig å sette parentesen. Som mange av elevene i sekvensen har vist, er det «enkelt» å se at prisen for det du kjøper i butikken skal trekkes fra femtilappen du skal betale med. Dette handler om at en perifer deltaker i diskursen ikke er kjent med enkelte matematiske rutiner, rutiner som i dette tilfellet er utviklet gjennom historien og som legger føringer for hvordan man uttrykker seg. I utgangspunktet er det ikke noe galt med å uttrykke situasjonen i oppgaven på følgende måte:

$$13\times 2 + 1\times 9{,}5 + 1\times 5 = 40{,}5$$

$$50 - 40{,}5 = 9{,}5$$

Eller som:

$$13\times 2 + 1\times 9{,}5 + 1\times 5 = 26 + 9{,}5 + 5$$

$$50 - 26 - 9{,}5 - 5 = 9{,}5$$

Disse uttrykksmåtene representerer de to første elevinnspillene i oppgaveløsningen. Begge vil kunne telle som gyldige løsninger på den konkrete oppgaven. Kanskje oppleves det av disse elevene som unødvendig å absolutt måtte sette alt opp i ett uttrykk, og fra et praktisk ståsted så er det kanskje sant. En sentral diskursdeltaker vil derimot kunne se verdien av å bli trygg på rutinen med å uttrykke seg kort og med alt samlet i ett uttrykk. Dette blir til stor hjelp i arbeidet med mer komplekse problemstillinger, og rutinen kan også implementeres direkte i en algebraisk diskurs hvor man ofte ikke har anledning til å regne ut de enkelte leddene eller komme frem til et konkret tallsvar.

Objekt

De sentrale matematiske objektene i denne sekvensen er det generelle objektet *regneuttrykk*, de seks konkrete regneuttrykkene som produseres fra oppgavene og eksemplene, samt objektene *ledd* og *faktor*.

Objektet regneuttrykk beskrives innledningsvis som det man får dersom man skriver opp en situasjon som har med ulike mengder å gjøre som «… bare tallene, ikke kronene eller bilene eller hva det var jeg egentlig skulle gjøre. Det er selve regneuttrykket». På denne måten beskrives et regneuttrykk som å være en realisering av en praktisk situasjon. Dette er ofte tilfellet, men ikke alltid. Etter hvert brukes «regneuttrykk» som signifikans for alle uttrykkene som står på tavla. Et regneuttrykk er i så måte et produkt av å likestille, foreløpig, de seks aritmetiske uttrykkene på tavla.

Under er alle de seks regneuttrykkene listet opp i den rekkefølgen de til slutt stod på tavla:

Eks 1: $1 \times 15 + 3 \times 4$

Eks 2: $5 \times 2 + 3 \times 6$

E1: $1 \times 39 + 3 \times 50$

E2: $200 \times 1 + 15 \times 8$

E3: $50 - (2 \times 13 + 1 \times 9{,}5 + 5 \times 1)$

E4: $(5 \times 60 - 50) : 2$

Ut i fra hvilke konkrete uttrykk som er likestilte under signifikansen «regneuttrykk» er det mulig at elever har produsert enkelte narrasjoner for seg selv om hvordan et regneuttrykk kan se ut; de består av ett eller flere ledd, et ledd kan være ett tall eller det kan bestå av flere faktorer, et ledd kan være en parentes og kan igjen inneholde flere ledd og faktorer i disse leddene, uttrykket kan inneholde divisjon. Sammensetningen av eksempler i denne sekvensen kan sies å inneholde god variasjon i utseende, og tillater produksjon av mange narrasjoner knyttet til regneuttrykk.

Objektene ledd og faktor har vært omtalt i avsnittet om narrasjoner. Det er allikevel mulig å si noe mer om hvordan disse objektene har blitt til. *Ledd* er et produkt av å likestille alle addender i en sum, eller elementer i en rekke, for å bruke ordlyden i definisjonen nevnt tidligere. På samme måte er *faktor* et produkt av å likestille alle mulige inndelinger av en mengde som er slik at alle disse delmengende består av like mange elementer: 10 kan deles i to mengder med fem elementer i hver mengde, altså er 2 en faktor i 10. Både ledd og faktor er objekter som vil fortsette å vokse for elevene i en god stund fremover. Etter hvert som de utvikler sin matematiske diskurs vil de møte stadig nye, mer komplekse realiseringer av disse signifikansene. Det kan hende mange elever i den aktuelle sekvensen møter realiseringer av disse objektene som de ikke har internalisert enda, for eksempel en parentes som igjen inneholder tre nye ledd.

4.3 Tredje sekvens: Oppstart med funksjoner

Tredje sekvens er hentet fra casen på 10. trinn, og oppstart av emnet funksjoner. Det nye emnet introduseres denne timen, og lærer forklarer at funksjoner er noe de har vært borti ved flere anledninger tidligere, senest i forrige kapittel hvor de arbeidet med å løse likningssett med to ukjente. De har også arbeidet med enkle funksjoner i 9. klasse. Lærer viser til en eksempeloppgave i boka for å minne elevene om at de har arbeidet med lineære funksjoner. Dette er en oppgave med bilde av verditabell og to grafer i et koordinatsystem. Etter dette introduserer læreren elevene for begrepet «flipped classroom», hvor elever hjemme kan se på undervisningsvideoer i et emne før de kommer på skolen for å arbeide med stoffet. Det er denne videosnutten som utgjør tredje sekvens i datamaterialet.

I videoen introduseres lineære funksjoner. Sekvensen inneholder to konkrete eksempler på lineære funksjoner, og disse brukes for å illustrere to sentrale aspekter ved denne type funksjon: stigningstall og representasjon som rette linjer i et koordinatsystem. Videoen blir avbrutt før den er ferdig, da det er tenkt at elevene skal bruke tid på dette hjemme. Læreren har allikevel valgt å bruke denne nettressursen i sin undervisning av faget, og det er derfor interessant å analysere denne eksemplifiseringen.

Hvilken type eksemplifisering er det?

Denne sekvensen inneholder en introduksjon til emnet lineære funksjoner, og forsøker å illustrere noe av det som ligger i dette begrepet. Det generelle begrepet er her av typen matematisk objekt – nærmere bestemt *den lineære funksjon*. Dette kommer frem av introduksjonen som nett-foreleseren har:

19. Foreleser: *«Da skal vi lære om lineære funksjoner og her ser vi et eksempel på en lineær funksjon og en lineær funksjon det er alltid en rett linje, det er derfor vi kaller det for lineær, vi ser at det er det st- det ligger inni ordet at det er en linje så det er en rett linje den har ikke lov til å, å bøye seg på noen som helst vis, den må alltid være helt rett.»*

Det at målet her er å lære *om* lineære funksjoner viser at det er et matematisk objekt som er i hovedfokus. Foreleseren viser allerede i første setning til en av de mest fremtredende realiseringene til signifikansen «lineær funksjon» som er en grafisk fremstilling. I samme setning kommer også en veldig sentral narrasjon eksplisitt til uttrykk, nemlig at grafen til en lineær funksjon alltid vil være en rett linje.

To konkrete lineære funksjoner blir så brukt for å illustrere det generelle begrepet: (1) $y = 2x$ og (2) $y = 7x$. Funksjon (1) brukes for å mediere narrasjonen om at grafen alltid vil gi en rett linje. I tillegg kommer det en påstand om at *stigningstallet* til denne funksjonen er 2. Funksjon (2) brukes deretter for å illustrere idéen om stigningstallet til en funksjon. I denne prosessen er rutinen med å gå fra formel til tabell og så til grafisk fremstilling av en funksjon sentral. Man kan derfor si at denne eksemplifiseringen også inneholder et konkret eksempel på en rutine.

Denne sekvensen inneholder hovedsakelig eksemplifisering av et matematisk objekt. Dette innebærer reproduksjon av flere narrasjoner *om* dette objektet som regnes for å være sanne i en konvensjonell matematisk diskurs, og det innebærer også implisitte metaregler for hva man regner som en funksjon, rutiner for hvordan man vurderer narrasjoner knyttet til dette objektet og hvordan man kommuniserer i denne diskursen. Jeg velger allikevel å kalle dette for en eksemplifisering av det matematiske objektet *lineær funksjon*, da dette er det som er det uttalte målet for sekvensen.

Hvilken type diskursiv endring?

Da elevene har vært gjennom lineære funksjoner både i 8. og 9. klasse er undervisningen i den aktuelle sekvensen først og fremst tenkt som repetisjon. Men selv om dette er noe elevene har arbeidet med før, kan det i denne omgangen være at det som for noen har vært en «diskurs-for-andre» nå kan bli en «diskurs-for-seg-selv». Det er derfor interessant å kommentere på denne eksemplifiseringens potensielle rolle i en diskursiv endring selv om datamaterialet ikke tillater meg å påvise en slik endring hos elevene.

Sekvensen inneholder en diskurs om det matematiske objektet lineær funksjon. Å konstruere dette objektet innebærer *horisontal metanivålæring*, og krever at man under gitte omstendigheter er i stand til å se algebraiske formler, linjer i planet og fysiske prosesser som ulike realiseringer av det samme fenomenet. Hvor langt elevene har kommet i denne prosessen finnes det ikke grunnlag for å si noe om, og det vil kunne være stor variasjon i elevgruppa. På dette tidspunktet, etter å ha vært gjennom emnet lineære funksjoner ved flere anledninger tidligere, er det ikke like sannsynlig at en metadiskursiv endring er å forvente i denne sekvensen. Jeg velger å behandle denne sekvensen med utgangspunkt i at elevene har etablert en diskurs på lineære funksjoner, og ser det derfor som mest sannsynlig at en diskursiv endring på objektnivå vil kunne forekomme. Som diskutert i metodekapittelet, utelukker ikke dette at metanivålæring kan forekomme hos enkelte elever.

Matematiske objekt

Objektet *lineær funksjon* refereres til først, og det er en liten språklig detalj som er viktig å merke seg i den første setningen (19). Foreleseren sier «en lineær funksjon det er alltid en rett linje», noe som ikke er matematisk korrekt å si. En funksjon *er* ikke en linje. En funksjon *kan representeres* som en linje i et koordinatsystem. Dette er antakeligvis foreleseren fullstendig klar over. Allikevel vil det kunne ha betydning for elevenes konstruksjon av dette objektet. Ifølge Sfard (2008) vil en godt utviklet diskurs på funksjoner omslutte diskursen på grafer, algebraiske formeluttrykk og fysiske prosesser. Dette innebærer at narrasjoner om funksjoner som vi regner for å være sannheter, vil være narrasjoner som også vil gjelde for alle disse tre realiseringene av en funksjon (Sfard, 2008). Det vil derimot ikke være slik at alle godkjente narrasjoner om algebraiske formler vil kunne overføres til en diskurs på funksjoner. Det diskursive objektet *funksjon*, og tilhørende diskurs, er ifølge Sfard resultatet av å likestille algebraiske formler, kurver i koordinatsystemet og fysiske prosesser som eksempelvis akselererende (konkrete) objekter. Dersom man ønsker at elever skal konstruere objektet funksjon slik det brukes i den konvensjonelle matematiske diskurs, bør man derfor være forsiktig med å knytte funksjonsbegrepet for tett opp mot én av dets realiseringer.

Forelesers diskurs i denne sekvensen tar som utgangspunkt at elevene har et objektivert forhold til objektene x og y. Noen problemstillinger i forhold til objektiveringen av variabler er diskutert i analysen av første sekvens. En fullstendig objektivering av variabler innebærer at man kan løsrive variablene fra de konkrete situasjonene hvor de opptrer. I stedet for at de inngår i et regnestykke hvor det finnes en ukjent, hvor variabelens funksjon bare er å stå i stedet for tallet man ikke har funnet enda, må man kunne ta variabelen ut av kontekst og behandle den som et eget objekt. Da kan man se på variabelen som noe som representerer store mengder verdier samtidig, og kan bruke den til å uttrykke generelle sammenhenger. Først da vil man se hensikten med funksjonsuttrykk som «$y = 7x$». I tillegg må man skille mellom avhengige og uavhengige variabler.

Objektene $y = 2x$ og $y = 7x$ brukes som eksempler på en lineær funksjon. Sett i sammenheng med fokuset på stigningstall kan dette være fornuftig. Ved å kutte ut konstantleddet i disse eksemplene slipper elevene foreløpig å forholde seg til idéen om konstantleddet. På denne måten kan elevene konsentrere seg om leddet som beskriver stigningen. På den annen side blir disse to funksjonene presentert som eksempler på lineære funksjoner, som naturligvis er helt riktig. Det likevel verdt å merke seg at de ikke gir mulighet for å konstruere det generelle objektet lineære funksjon i sin helhet, da de ikke inneholder konstantleddet og således avviker fra standardformen $y = ax + b$. Dette skal ikke problematiseres så mye. Det er all grunn til å anta at konstantleddet blir innført etter at stigningstall er gjennomgått, selv om nett-forelesningen blir avbrutt før den kommer så langt.

Etableringen av det matematiske objektet *stigningstall* starter med å realisere funksjonen $y = 7x$ som en tabell med x- og y-verdier.

19 forts.	Foreleser: «*…Og så kan vi lure på, hva er funksjonsuttrykket for denne her ja, vi ser Hanna her, hun sier at y er lik to x og det er riktig. Så dette her er grafen til funksjonen y er lik to x, og så sier Simen noe, han sier at stigningstallet er to, og det har han og rett i men hva da med det? Jo det skal vi ta å se litte grann på nå, hvordan vi finner stigningstall. Vi kan tenke oss da, en lineær funksjon. Nå tar jeg ikke to x, som vi så på i stad, men jeg tar en y er lik syv x. Skal vi ta å så regne litt på det. Vi setter opp en verditabell, sånn som dette her og så vil en da regne ut noen y verdier. Hvis jeg nå velger x er lik null her så skal jeg bytte ut x-en her med null, da tar vi syv ganger null, ja det er null. Hvis jeg velger x er lik én, så ser vi det at da får jeg syv ganger én, som er syv og hvis jeg velger x er lik to, da får jeg syv ganger to, som er fjorten, så nå vil jeg at du skal fortelle meg hvilket tall skal stå her, når x er lik tre, svar på den så fortsetter videoen etterpå*»

Her, i fortsettelsen av ytring 19, knyttes elementer fra funksjonens definisjonsmengde sammen med elementer i funksjonens verdimengde. Man kan si at det produseres en rekke nye narrasjoner her, av typen «dersom x er lik én, da blir y lik syv». Alle disse narrasjonene medieres av en verditabell. Verdiene for x plukkes slik at de går fra null til og med tre i stigende rekkefølge. Dette fører til y-verdier som alle ligger syv enheter ifra både foregående og neste y-verdi. Det er nå mulig å identifisere et mønster i utviklingen. Basert på narrasjonene som finnes i verditabellen kan man nå produsere narrasjoner om differansen mellom y-verdiene. Dette er det som skjer videre i ytring 27.

27.	Foreleser: *«vi hørte at Simen snakket om det at den andre grafen hadde to som stigningstall og hva er stigningstallet her? Stigningstallet det er hvor mye y øker når x øker med én og det håper jeg du ser her, vi ser når x øker med én her, fra null til én, så ser vi at y øker med syv og hvis x-en øker igjen med én her, fra én til to, så ser vi og at y øker med syv. Og Samme her og vi kan se det samme på grafen. Så kan vi se at hvis jeg velger et punkt på grafen og går én mot høyre, altså jeg øker x-en fra én til to,*

det er det samme som å øke fra én til to der, så ser du at y verdien her den øker i fra syv til fjorten altså den øker med syv oppover der»

Stigningstallet er objektiveringen av historien om hvordan y-verdiene endrer seg i forhold til x-verdiene. Denne historien kommer godt frem i sekvensen, mediert både muntlig, ved hjelp av tabellverdier og av den grafiske fremstillingen. I hvilken grad man er i stand til å umiddelbart akseptere den gitte definisjonen av stigningstall avhenger mye av om man har en tilstrekkelig objektivert og automatisert diskurs på x-verdier og y-verdier, verditabeller, algebraiske funksjonsuttrykk og koordinatsystemet. Dette er en forutsetning for å kunne delta i en utforskende rutine hvor målet er å produsere nye narrasjoner om utviklingen til objekter knyttet til disse diskursene.

Narrasjoner

«Stigningstallet, det er hvor mye y øker når x øker med én». Dette er en av de mest sentrale narrasjonene i denne sekvensen da det er selve definisjonen på begrepet stigningstall. Det er viktig å være klar over at denne narrasjonen er knyttet opp mot en algebraisk eller grafisk representasjon av en funksjon, og vil uttrykkes på en litt annerledes måte i en diskurs på funksjoner. Definerer man stigningen til å være hvor mye y øker når x øker med én, har man situert seg selv i en diskurs hvor x og y brukes for å referere til henholdsvis en uavhengig og en avhengig variabel – diskursene på grafer og algebra. Dersom man er i en diskurs på fysiske prosesser, og for eksempel ser på tilbakelagt strekning som en funksjon av tid, vil ikke en utenforstående kunne se noen sammenheng mellom disse størrelsene og x-er og y-er. Det blir viktig for elevene å knytte både de fysiske prosessene og algebraiske mediatorene sammen som mulige realiseringer av det samme objektet. Elevene gis ikke denne muligheten i den aktuelle sekvensen.

Første del av ytring 19 inneholder en viktig narrasjon i tilknytning til objektet lineær funksjon, nemlig at funksjonen alltid vil se ut som en rett linje i et koordinatsystem. En like interessant narrasjon kommer rett etterpå: «… den har ikke lov til å, å bøye seg på noen som helst vis, den må alltid være helt rett». Her trekkes det også frem en narrasjon som *ikke* vil regnes som godkjent om det aktuelle matematiske objektet. Det kan være nyttig for elevene i prosessen med å danne realiseringer av det aktuelle objektet å få noen tydelige grenser for hvordan dette objektet ser ut.

Rutiner

Bak narrasjonen om at en lineær funksjon ikke har lov til å bøye seg på noe vis, ligger det en rutine for godkjenning av narrasjoner om disse funksjonene. Den metadiskursive regelen som styrer dette sier at man kan studere en funksjons grafiske representasjon for å avgjøre om det er en lineær funksjon. Dersom grafen krummer kan den umulig være en lineær funksjon.

En sentral rutine som blir implementert i denne sekvensen styrer prosessen med å realisere funksjonen $y = 7x$ som konkrete tallverdier, mediert av en verditabell. Denne rutinen gjøres veldig tydelig, noe som kan ses av ytring «19 forts.». I figuren under kan man se hva som blir fortalt gjennom verditabellen. Det eneste som verditabellen alene ikke forteller, er hvilken variabel som er avhengig av den andre, noe som kommer frem av narrasjonene til venstre.

Narrasjoner

Dersom x er lik null, da blir y lik null.

Dersom x er lik én, da blir y lik syv.

Dersom x er lik to, da blir y lik fjorten.

Dersom x er lik tre, da blir y lik tjueén.

Verditabell

X	0	1	2	3
Y	0	7	14	21

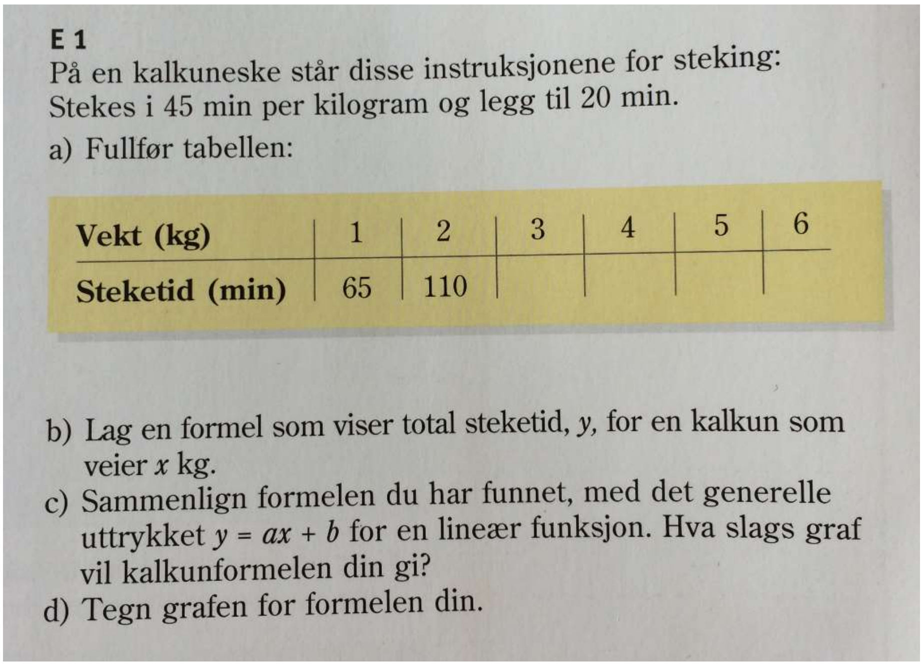
En verditabell kan fungere som en *ikonisk*[4] realisering av en funksjon, og samlingen av narrasjonene vil være en verbal realisering av samme funksjon. Fordelene med tabellen er naturligvis at det er mer effektivt å lese ut informasjon av den, forutsatt at man er fortrolig med hvordan man leser en slik tabell. Foreleser viser tydelig til at det er funksjonsuttrykket

[4] En ikonisk realisering refererer til visuell fremstilling av et matematisk objekt ved bruk av en figur, tegning eller bilde. I tilfellet med funksjoner vil en graf også være en ikonisk realisering.

som bestemmer hva som skjer med verdien som tilordnes x-variabelen, og at resultatet av denne utregningen er det som skal kalles verdien til y-variabelen i det spesifikke tilfellet. Slik produseres narrasjonene til venstre i figuren ovenfor, samtidig som det demonstreres hvordan de skrives inn i verditabellen. Det er på denne måten mulig for elevene å se at verditabellen og funksjonsuttrykket forteller den samme «historien», slik at de kan begynne å knytte de ulike realiseringene sammen under objektet «lineære funksjoner».

4.4 Fjerde sekvens: Kalkunfunksjonen

Fjerde sekvens foregår i samme undervisningsøkt som tredje sekvens. Etter at prosjektor er skrudd av ber lærer alle elevene slå opp læreboka sin. Der finner de en oppgave som handler om stekeanvisningen som finnes bak på en kalkun fra butikken. Oppgaven ser slik ut:



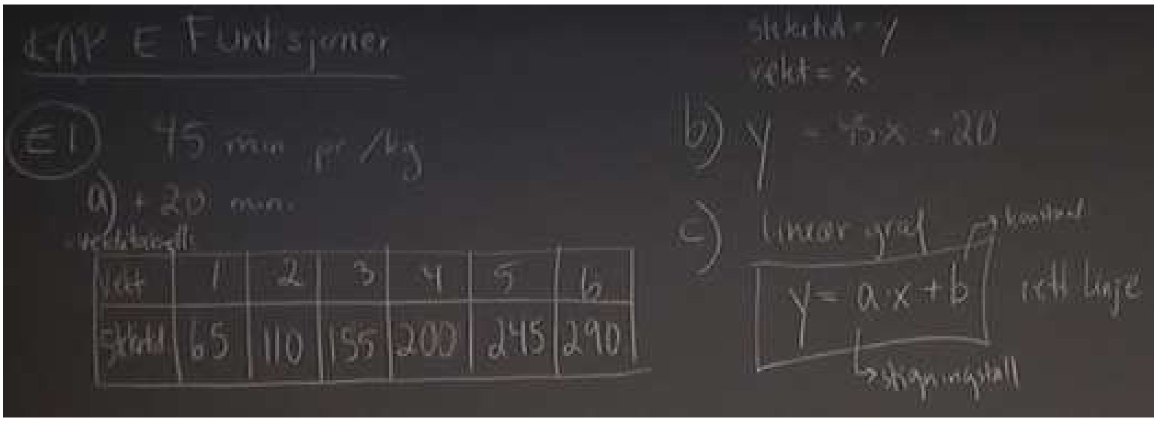
E 1
På en kalkuneske står disse instruksjonene for steking:
Stekes i 45 min per kilogram og legg til 20 min.
a) Fullfør tabellen:

Vekt (kg)	1	2	3	4	5	6
Steketid (min)	65	110				

b) Lag en formel som viser total steketid, *y*, for en kalkun som veier *x* kg.
c) Sammenlign formelen du har funnet, med det generelle uttrykket $y = ax + b$ for en lineær funksjon. Hva slags graf vil kalkunformelen din gi?
d) Tegn grafen for formelen din.

Fjerde sekvens består av at læreren leder klassen gjennom denne oppgaven fra boka. Læreren ber en elev lese høyt oppgaveteksten frem til punkt a). Deretter tegner læreren tabellen på tavla slik den fremkommer av oppgaven. En spørsmål-svar-sekvens følger hvor læreren ber elevene komme med antall minutter steketid for de ulike antall kilogram kalkunen kan være. Tallet på minutter som blir foreslått for en kalkun på tre kilogram stemmer ikke med funksjonen, og det går litt tid med til å rette opp i dette. Denne situasjonen bringer frem noen interessante momenter som vil bli drøftet etter hvert. Under arbeidet med deloppgave b) er det færre elever som deltar aktivt. Her er det særlig én elev som stikker seg frem, og som fremviser en godt utviklet diskurs på algebraisk representasjon av funksjoner. I oppgave c) skriver lærer opp det generelle uttrykket for lineære funksjoner på tavla og forklarer at dette er formelen for en rett linje. Etterpå prøver læreren å gjøre koblinger mellom «a» og «b» i den generelle formelen og «45» og «20» i kalkunformelen. De to tallene får også navn, henholdsvis stigningstall og konstantledd. Lærer slår fast at kalkunformelen vil få en «lineær graf» da den sammenfaller med det generelle uttrykke for rette linjer i koordinatsystemet. Det siste som skjer i denne sekvensen er at lærer repeterer kjapt om koordinatsystemet og de to aksene, samtidig som hun tegner koordinatsystemet opp på tavla. Oppgave d), å tegne grafen, får elevene beskjed om å gjøre selv i bøkene sine. Dette markerer slutten på sekvensen.

Under er et utklipp av hvordan tavla så ut etter at oppgave c) var ferdig:



Hvilken type eksemplifisering er det?

Denne sekvensen inneholder løsning av en oppgave fra læreboka. Det er et eksempel på *hvordan* man løser en slik type oppgave, og er således eksemplifisering av en *rutine*. Innad i oppgaven finner vi mange andre rutiner knyttet til funksjoner, men den overliggende rutinen er hvordan man løser denne type oppgaver. Det er en litt spesiell rutine som man bare finner i matematikkundervisning i skolen. Oppgaven er av typen som ønsker å dekke over så mange aspekter som mulig ved det emnet den handler om. Dette resulterer ofte i at det hele oppleves kunstig. Således kan man si at det er en eksempeloppgave skreddersydd for å få frem rutinens *hvordan*. Den er mindre egnet til å illustrere rutinens *når*, det vil si i hvilke situasjoner det er passende å implementere denne rutinen. Anvendelsen av diskursen på funksjoner i forbindelse med steking av en kalkun, kan man karakterisere som en gjerningsfremmende utforskning. Gjerningen med å bestemme hvor lenge kalkunen skal stekes kan effektiviseres dersom man er i stand til å se situasjonen som en matematisk funksjon. Oppgaven omfatter imidlertid så mye at det ikke virker hensiktsmessig å implementere denne rutinen for å steke en kalkun. Man sitter igjen med en rutine som anses som et redskap for å løse denne typen oppgaver i læreboka.

Hvilken type diskursiv endring?

Den fjerde sekvensen er en fortsettelse av hva som har skjedd i tredje sekvens. Da jeg kommenterte på hvilken type diskursiv endring som var sannsynlig i tredje sekvens, viste jeg til at utviklingen av en diskurs på funksjoner i utgangspunktet krever metanivålæring. Basert på elevenes tidligere arbeid med funksjoner gjennom 8. og 9. klasse, valgte jeg allikevel å anse en diskursiv endring på objektnivå som mest sannsynlig. Det er naturlig å videreføre dette resonnementet også i fjerde sekvens.

Eksempeloppgaven i fjerde sekvens brukes for å gjøre elevene kjent med lineære funksjoner og noen sentrale rutiner som går igjen i diskursen på denne funksjonen. I arbeidet med oppgaven trekkes det også frem noen viktige narrasjoner knyttet til lineære funksjoner. Gjennom deltakelse i denne delvis ukjente diskursen er målet at elevene skal bli gradvis mer sentrale deltakere gjennom å automatisere rutiner, godkjenne narrasjoner og konstruere de involverte matematiske objektene i sin egen diskurs – en utvidelse av deres personlige diskurs. Den diskursive endringen som kan oppstå som følge av denne sekvensen vil sannsynligvis være på objektnivå.

Rutiner

Eksempeloppgaven spør etter mye. Først ber den om at kalkunens steketid for ulik vekt settes opp i en verditabell. Man kan si det er å realisere en sammenheng fra en «hverdagslig» situasjon som en funksjon i en matematisk diskurs, ikonisk mediert av verditabellen. Den som er i stand til å gjøre dette på egenhånd utfører en rutine av typen utforskning. Basert på narrasjonen som utgjør stekeanvisningen produseres en rekke nye narrasjon som medieres på en oversiktlig måte i verditabellen. Denne rutinen virker hensiktsmessig, da tabellen gjør det lettere å finne steketid for en gitt størrelse kalkun. Fremdeles befinner vi oss i en del av en matematisk diskurs som og er representert i en dagligdags diskurs. Bruk av tabeller er vanlig for å formidle denne type informasjon på innpakninger av matvarer, eller for å vise ulike prisnivåer på tjenester. Det er ikke gitt at en slik tabell vil oppfattes som noe matematisk. Det ville vært interessant å observere noen fylle ut tabellen fra oppgaven basert på stekeanvisningene bak på en kalkuneske i en annen kontekst. I den aktuelle sekvensen blir det mye frem og tilbake i arbeidet med å fylle den ut. Elever og lærer produserer en rekke narrasjoner som må anses som usanne i en diskurs på funksjoner da de følger andre metadiskursive regler enn det som inngår i den allment aksepterte rutinen for å knytte sammen elementer fra to mengder i henhold til en gitt funksjon. Som man kan se av oppgaveteksten er steketiden for ett og to kilogram gitt på forhånd. Det er interessant å observere at det blir feil allerede på tre kilogram:

30.	Lærer: Nei da, i tabellen her så er det da laget en linje, to linjer (skriver på tavlen). Der det øverst står vekt og steketid. For at dette skal gå raskest mulig, så må vi da se på oppgaven. Hvis du kjøper en kalkun og det står på stekeanvisningen førtifem minutter per kilo pluss tjue minutter, så må vi da se i oppgaven, hvis steken er ett kilo, to kilo, tre, fire, fem og seks. Hvor lenge skal da du steke denne kalkunen? For ett kilo, hva blir det? Da må vi se her.
31.	Elev: Sekstifem
32.	Lærer: Ja (.) To kilo stek?
33.	Elev: Hundre-og-ti
34.	Lærer: Ja, tre kilo stek da? Noen som har regnet det ut?
35.	Elev: Hundre og sytti fem
36.	Lærer: Fire kilo stek? (8s) Ja?
37.	Elev A: To hundre-og-tjue?
38.	Lærer: Syttifem pluss, sekstifem? Stemmer det?
39.	Elev A: Sekstifem? Førtifem
40.	Lærer: Ja, førtifem per kilo og så plusse med tjue minutter

41. Elev A: Plusse med tjue minutter per, greie? For det hadde vi ikke gjort med den første, der er det sekstifem til hundre-og-ti, det er førtifem.

42. Lærer: Ja stemmer, da er det femtifem, førti fem, ja.

Man kan merke seg noe av det som blir sagt i ytring 30: «For at dette skal gå raskest mulig, så må vi da se på oppgaven». Kanskje ønsker læreren at de skal få tid til det som måtte være planlagt for resten av timen. Allikevel formidler det noe om rutinen de skal i gang med; fokuset er å få oppgaven gjort slik at man kan komme seg videre.

I ytring 35 har eleven lagt tallet 65 til forrige verdi som var 110. Læreren aksepterer svaret uten å implementere noen rutine selv for å se om hun kommer frem til samme tall. Som utenforstående virker det logisk å legge til 65 minutter for en stek på ett kilogram mer. Stekeanvisningen sier «45 min per kilogram og legg til 20 min». Øker man vekten på steken med ett kilogram kan dette tolkes som at man skal legge til 45 min for det ene kilogrammet og i tillegg skal man alltid legge til 20 minutter. Læreren virker litt usikker på rutinen selv da Elev A stiller spørsmål ved økningen fra tre kilogram til fire kilogram (39). Jeg har valgt å markere denne eleven med tilnavnet «A» fordi ytringene fra denne eleven er interessante ved flere anledninger.

Det jeg oppfatter som usikkerhet hos læreren i denne situasjonen kan påvirke formidlingen av den sentrale rutinen. I ytring 40 fremviser læreren en feilaktig rutine for å produsere narrasjoner om funksjonen, på samme måte som en utenforstående kunne tenkes å tolke stekeanvisningen. Man kan bare spekulere i om dette kan skyldes at læreren var ukonsentrert i øyeblikket, eller om funksjonsdiskursen ikke er godt nok utviklet. Uansett hva grunnen er, så blir det her produsert narrasjoner om funksjonen som like etterpå avvises uten at det kommenteres på hvorfor de avvises. Her er en mulighet til å forklare og å gjøre eksplisitt noen metadiskursive regler om hvorfor den aktuelle narrasjonen ikke kan godkjennes som en sannhet om funksjonen. En viktig del av det å bli deltaker i en diskurs er å bli trygg på de metadiskursive reglene for godkjenning av narrasjoner om diskursens objekter. Dette kan like gjerne innebære diskusjoner rundt hvorfor enkelte narrasjoner *ikke* blir godkjent. Kanskje kunne det i denne situasjonen være til hjelp for elevene å drøfte hvorfor det var galt å si det som ble sagt om funksjonsverdien i stedet for å la narrasjonen «henge i lufta».

Det finnes en ytring til som er interessant å trekke frem, og som potensielt kan påvirke elevenes arbeid med å bli mer sentrale diskurdeltakere.

45. Elev A: Alt dette her blir jo feil, siden det er feil på tre.

46. Lærer: Er det feil på tre?

47. Elev: Hæ?

48. Lærer: Der skal det være hundre-og (.)

49. Elev A: Femtifem.

50. Lærer: Femtifem ja og så kommer vi til to-hundre-og (2s) for det at da blir det fire kilo, ganger førtifem minutter, så det er nitti pluss nitti, som er ett-hundre-og-åtti pluss tjue det blir to blank ja.

51. Elev: og så to førtifem.

52. Lærer: To hundre minutter og fem, det blir?

53. Elev: To-førtifem.

54. Lærer: Ja, så nå plusser dere bare med konstanten videre sant, og seks timer da? Hvor mange var det som datt vekk nå? Ja, det ante meg at noen datt vekk. Hva må vi gjøre hvis du nå kjøper en svær kalkun stek på seks kilo? Du skal følge den steke anvisningen. Hvordan må du tenke da?

Selv om lærer sier seg enig i at økningen i steketid skal være på 45 minutter for hvert kilogram ekstra (42), blir ikke dette rettet opp i tabellen der og da. Ytringene 45 – 54 viser prosessen med å rette opp i tabellen. Når de nærmer seg ferdige ønsker lærer i ytring 54 å påpeke at stigningen er den samme for hver gang, og viser til at man nå bare «plusser med konstanten videre». Denne bruken av ordet «konstant» bryter med enkelte av metareglene i en matematisk diskurs. Ytringen indikerer at for å gå fra funksjonsverdien ved en vilkårlig x-verdi til den neste skal man legge til konstantleddet fra funksjonsuttrykket. Det er liten sannsynlighet for at læreren ville sagt seg enig i denne påstanden, og den uregelmessige ordbruken bunner antakeligvis i et ønske om å påpeke at *stigningen er konstant*. Sekvensen forsøker å hjelpe elever i å bli tryggere på rutinen med å representere en funksjon gjennom en verditabell. Her prøver lærer å gjøre eksplisitt en del av rutinen med å fylle ut verditabeller for lineære funksjoner, nemlig at når man har identifisert funksjonsverdienes faste stigning, så kan man ganske enkelt legge denne til for hver gang man øker x-verdien med én – man slipper å regne det ut hver gang. Er man uheldig og kaller denne stigningen for «konstanten», som i dette tilfellet, kan man potensielt gjøre ting verre for elevene.

Den kanskje største utfordringen for elevene i denne oppgaven ligger i deloppgave b). Oppgaven spør etter en algebraisk formel som uttrykker funksjonen. Her finnes utallige hindre for en uerfaren deltaker i diskursen. Først og fremst finner vi igjen problemstillingen ved objektiveringen av variabler. For det andre krever det kjennskap til diskursen som omhandler formler, hvordan disse ser ut og er bygget opp. Til slutt er det viktig å trekke frem at å realisere situasjonen med steketid for kalkunen som en algebraisk formel er alt annet en enkelt. Som utenforstående vil man overhodet ikke kunne se noen likheter mellom disse to diskursene, og allikevel forventes det nå at elevene ser disse to tingene som *det samme*. Elev A har et forslag til løsning:

68. Elev: Det blir, et uttrykk for steketid som da kan være y, som er på en måte svaret på antall minutter vi vil ha, og så fyller vi på med variabelen som er vekten, hvor vi ikke vet hvor mye vekten er, derfor må vekten være x. Da finner vi ut at vi tar her førtifem ganger x pluss tjue da, fordi det er sånn det er.

69. Lærer: Ja, det er konstant. Ok, er alle enige i dette? Ok, er det noen som datt litt av? Opp med hånden. Datt litt av, ja, ja. Y, hva var det vi mente med det? (.) Det er? (4s)

70. Elev: Steketiden

Elev A viser her at diskursen på algebraiske funksjonsuttrykk langt på vei er blitt en «diskurs-for-seg-selv». Eleven er ikke bare i stand til å formulere funksjonsuttrykket, men viser også en objektdrevet bruk av flere nøkkelord i diskursen. Man skal allikevel merke seg hvordan eleven beskriver den uavhengige variabelen: som noe man ikke vet verdien av. Selv om dette ikke er galt å si om en variabel, så er det heller ikke en fullverdig beskrivelse. Ved å bruke en variabel kan man uttrykke en generell formel som taler for en mengde verdier samtidig. Det er annerledes enn i en likning hvor man leter etter den ukjente.

Lærerens svar (69) bekrefter først at «pluss tjue» er konstantleddet. Dette er for øvrig i strid med hva som ble sagt tidligere i forbindelse med utfylling av verditabellen, uten at dette på noe tidspunkt kommenteres. Lærer har nå referert til både «45» og «20» i funksjonsuttrykket som konstanten.

Elev A gir en god beskrivelse av rutinen for å realisere oppgaveteksten som et algebraisk formeluttrykk. Elev A sin rutine og forslag til funksjonsuttrykk aksepteres av lærer og skrives på tavla. Dersom elevene skal akseptere den algebraiske narrasjonen som nå står på tavla som en alternativ representasjon av den konkrete situasjonen, innebærer dette å likestille formeluttrykket og stekeanvisningen. Da det er andre regler som styrer hva som teller som *det samme* i en matematisk diskurs enn i en dagligdags diskurs, er dette noe som bør få oppmerksomhet. Elever viser større aksept for en slik likestilling dersom man kan vise til en steg-for-steg transformasjon fra det ene objektet til det andre, enn dersom det begrunnes ved at de beskriver den samme funksjonen (Sfard, 2008). Hvorfor formeluttrykket må anses for å være en korrekt algebraisk representasjon av funksjonen får lite oppmerksomhet. Det kan se ut som om lærer er i ferd med å starte en forklaring på slutten av ytring 69. Elevene blir spurt om hva som mentes med y-variabelen, og en elev foreslår steketid, noe som er riktig. Etterpå blir imidlertid denne oppklaringen avbrutt av spørsmål angående verditabellen, og lærer vender aldri tilbake til forklaringen på funksjonsuttrykket.

Avslutningen på ytring 68 er verdt å trekke frem. Elev A avslutter sitt forslag til funksjonsuttrykk med «… fordi det er sånn det er». Sfard (2008) forklarer hvordan den matematiske diskurs har blitt slik den er i dag ikke fordi den er nødt for å være slik, men fordi det fungerte best slik. Man kan påstå at for enkelte kommunikasjonsmønstre finnes det ingen begrunnelse annet enn at *det er slik vi gjør det*. Det er litt interessant når en elev bruker dette argumentet for sin påstand. Det er lite sannsynlig at eleven selv har gjort resonnementet som Sfard beskriver, men det kan allikevel tolkes som at eleven ikke ser noen bedre begrunnelse for å skrive funksjonsformelen akkurat på *den* måten, annet enn at det er slik det gjøres.

I oppgave c) blir man bedt om å sammenligne funksjonsuttrykket man kom frem til i b) med den generelle formelen for en rett linje, og man blir bedt om å ta stilling til hvordan grafen til kalkunfunksjonen vil se ut. Lærer skriver opp uttrykket på tavla og slår fast at det er formelen for en «lineær graf». Det legges trykk på at en lineær graf vil være en rett linje i koordinatsystemet. Oppgave c) inviterer til refleksjon over mange sentrale narrasjoner om lineære funksjoner. Oppgaven skaper også behovet for en viktig rutine – identifisering av en bestemt type funksjon. Nedenfor vises oppstarten av arbeidet med oppgaven:

98.	Elev: Sammenlign formelen du har funnet, med den generelle, det generelle uttrykket y er lik a x pluss b for en lineær funksjon. Hva slags graf vil kalkunformelen din gi?
99.	Lærer: Ja, altså, formel for en lineær graf (skriver «lineær graf» på tavla) kan uttrykkes på y er lik a, ganger x pluss b, ser den kjent ut? Den der? (3s)
100.	Elever: Nei
101	Lærer: Nei, ok, men dette er formelen for en lineær graf og hvordan ser en lineær graf ut? Hør lineær graf. Hvordan ser den ut når vi tegner den i koordinatsystemet?
102.	Elev: Som en rett linje
103.	Lærer: En rett linje.
104.	Elev 1: Og da kan den ikke bøyes
105.	Lærer: En helt rett linje (skriver på tavla: rett linje) derav lineær, ok? Så=
106.	Elev 1: =Vent, vent, vent, vent, vent. Så y er lik a ganger x pluss b=
107.	Lærer: =Mm.
108.	Elev 1: Det er formelen for en rett linje?
109.	Lærer: For en rett linje ja.
110.	Elev 1: Hvorfor ikke bare skrive «en rett linje»?
111.	Lærer: Jo, fordi at a heter noe spesielt og b heter noe spesielt og det er det vi skal se på nå. I den her kalkunformelen. Hva var førtifem der?

Selv om det kan fremstå som opplagt at kalkunfunksjonen er en lineær funksjon, kan det være farlig å ta det for gitt. Likheten mellom det generelle uttrykket y=ax+b og y=45x+20 er åpenbar for en erfaren diskursdeltaker, men for en utenforstående er det to forskjellige ting uten noen innlysende kobling. Elevene befinner seg et eller annet sted i mellom disse to rollene; Noen elever ytrer at det generelle formeluttrykket ikke er kjent for dem (100). Dersom formelen er ukjent for en elev og eleven ikke har en velutviklet diskurs på algebraiske formler, vil det være vanskelig for vedkommende å forholde seg til narrasjoner som blir produsert om dette ukjente matematiske objektet. Påstanden om at formelen er et uttrykk for en rett linje er en slik narrasjon, og én elev gir tydelig uttrykk for vanskelighetene med å realisere denne formelen som en rett linje (110). Dette er ikke så rart, tatt i betraktning hvor abstrakt denne delen av funksjonsdiskursen er. Denne realiseringsprosessen krever at den algebraiske diskurs og diskursen på grafer i koordinatsystemet ansees for å være ekvivalente – gjensidig utbyttbare – under visse omstendigheter. Samtidig skal man også håndtere at den generelle formelen ikke er formelen for én rett linje, men for *alle* rette linjer. Den kan på mange måter fungere som en metaregel for hvordan en hvilken som helst linje kan uttrykkes. Kanskje er det uheldig at lærer i denne delen av sekvensen konsekvent sier «lineær graf» i stedet for «lineær funksjon», da dette kan føre til at elever konstruerer formeluttrykket som en realisering kun av grafer, og ikke av funksjoner.

Påstanden om at det blir tatt for gitt at alle ser likheten mellom kalkunfunksjonen og det generelle uttrykket begrunnes i lærerens ytringer i forhold til de to uttrykkene. Nedenfor følger noen av lærerens ytringer i forbindelse med dette:

111. Lærer: Jo, fordi at a heter noe spesielt og b heter noe spesielt og det er det vi skal se på nå. I den her kalkunformelen. Hva var førtifem der?

117. Lærer: Ja, steketid per kilo, sant, det var førtifem (peker på a i generell formel). Så for hvert kilo, så skal du da opp førtifem.

121. Lærer: Ja, og så, men b da, hva var det? Hva var b-en i kalkunformelen?

123. Lærer: Uansett ja, så da kan vi kalle det for en konstant for den må vi ha uansett. Er alle enige i det? Er det noen som detter av her? Nei, er det noen ganger sånn at vi ikke har med det leddet (holder over b-leddet, på tavlen)? (7s) Ja, vi skal se på sånne

oppgaver og. Vi skal se på mange forskjellige, men nå begynte vi på den ene og så står det da i c oppgaven her, sammenlign formelen med det generelle uttrykket y er lik a x pluss b. Hva slags graf vil kalkunformelen gi? Og da ble vi enige om at den ble lineær og a, hva var det det samme som?

Lærer spør først etter hva «45» betegner i kalkunformelen (111), og får til svar at det er steketid per kilo. Samtidig som hun bekrefter dette, peker hun på «a» i den generelle formelen (117). Dette er eneste gang det uttrykkes at «a» i dette konkrete eksempelet har verdien 45. I ytring 121 spør lærer hva «b» tilsvarer i kalkunfunksjonen. Også dette spørsmålet krever at elevene har sett likheten mellom de to uttrykkene, og at «20» i den konkrete formelen står i stedet for «b» i den generelle formelen. Disse ytringene, sett i lys av at det ikke blir gjort noen form for overfladisk sammenligning av de to formlene, indikerer at læreren ser det som en selvfølge at elevene identifiserer likhetene mellom formlene på egenhånd.

Siste setning i ytring 123 er interessant av en annen grunn. Læreren forklarer at de i fellesskap ble enige om at kalkunfunksjonen måtte være lineær. Elevene blir aldri bedt om å ta stilling til hvilken type funksjon kalkunfunksjonen er, bortsett fra at det står i oppgaven. Det blir altså slått fast at alle var enige om at det her var snakk om en lineær funksjon, en avgjørelse som baserer seg på likheten mellom det konkrete og det generelle funksjonsuttrykket – en likhet som ikke har blitt drøftet eksplisitt.

Narrasjoner

Ved en anledning er det en av elevene som vender tilbake til verditabellen og lurer på om ikke det skulle vært en annen y-verdi for x lik fem. Dette spørsmålet utløser en ny, rask gjennomgang av tabellverdiene, som resulterer i at lærer bestemmer seg for å trekke frem mønsteret i tallrekka:

72. Elev: Skulle det ikke stå to-hundre-og-sekstifem på fem?

73. Lærer: Nei (3s). For du tar fem kilo og ganger med førtifem og så plusser du med tjue. Så egentlig så øker alle her med førtifem minutter. Har alle sett det mønsteret i tallrekken her? (3s)

74. Elev: Nei

75. Lærer: Så alle det at det øker med, hvor mye øker det med fra sekstifem til hundre-og-ti?

76. Elev: Førtifem

77. Lærer: Ja, og fra hundre-og-ti til hundre-og-femtifem?

78. Elev: Førtifem

79. Lærer: Og neste da?

80. Elev: Førtifem

81. Lærer: Ja og fra to-hundre til to-hundre-og-førtifem?

82. Elev: Førtifem

83. Lærer: Ja og da?

84. Elev: Førtifem

85. Lærer: Ja

86. Elev: Men skulle ikke det plusses med tjue?

87. Lærer: Nei, den ligger i bunn her (peker på laveste y-verdi). Den er førtifem pluss tjue, det var det jeg blingset på under det første eksempelet her. For den er ett kilo pluss tjue minutter, så den er sekstifem.

88. Elev: Du starter liksom, uansett hvor mye det veier så steker du i tjue minutter

89. Lærer: Ja

90. Elev: Ååå ja!

Etter å ha sjekket at det er 45 i differanse mellom alle y-verdiene, er det en elev som etterspør de 20 som også skal legges til ifølge stekeanvisningen (86). Læreren svarer (87) med å vise til y-verdien som svarer til x lik én, og forklarer at de tjue «ligger i bunn her». Som mindre sentral deltaker i diskursen på funksjoner kan dette enkelt bli tolket som at konstanten kun er med i den første y-verdien, noe som ikke stemmer. Verdien til konstantleddet «ligger i bunn» i *alle* y-verdiene. Det er derfor verdiene i dette tilfellet stiger med 45, fordi de 20 alltid er *konstant*. På denne måten må man vurdere narrasjonen «konstanten ligger i første y-verdi» som ugyldig i en diskurs på funksjoner. Ytring 88 ser ut til å være oppklarende for enkelte elever (se ytring 90), og er for øvrig en god beskrivelse av konstantleddets funksjon i denne konkrete situasjonen. Det er en narrasjon formulert i en hverdagslig diskurs, og er antakeligvis mer tilgjengelig for godkjenning for flere elever.

Samtidig er det viktig å trekke frem at narrasjonen om mønsteret i tallrekka i seg selv er en meget sentral narrasjon, selv om det til dels blir implementert en ukonvensjonell rutine for å godkjenne det. Narrasjonen beskriver en viktig egenskap ved funksjonen, nemlig den lineære stigningen. Mønsteret, at differansen mellom en vilkårlig y-verdi og den foregående er konstant, er nettopp det som er karakteristisk for de lineære funksjonene, og det er grunnen til at vi kan representere dem som rette linjer.

Som en utenforstående kan man få inntrykk av at verditabellen og funksjonsuttrykkene har veldig lite med hverandre å gjøre. Den eneste gangen det gjøres noen form for kobling mellom dem er under arbeidet med funksjonsuttrykket. Lærer spør hva «45» er, og får til svar at det er steketid per kilo. Dette bekrefter hun og peker på tabellen når hun forklarer hvordan det stiger med 45 hver gang. Her er det mulig å se at økningen på 45 mellom de totale steketidene har en sammenheng med «45» i formeluttrykket. Allikevel er det på ingen måte åpenbart at verditabellen og formeluttrykket representerer den samme funksjonen. Flere narrasjoner man kan ytre om verditabellen vil kunne oversettes til narrasjoner om funksjonsuttrykket i en algebraisk diskurs. For eksempel vil mønsteret med konstant differanse mellom funksjonsverdiene i tabellen dukke opp i diskursen på algebraiske funksjonsuttrykk som narrasjoner om stigningstall. Kanskje vil det kunne hjelpe en ny diskursdeltaker dersom man gjør eksplisitt ekvivalensen mellom enkelte ytringer i de ulike matematiske diskursene.

Ytring 68 må regnes for å være en meget sentral narrasjon i denne sekvensen:

68.	Elev: Det blir, et uttrykk for steketid som da kan være y, som er på en måte svaret på antall minutter vi vil ha, og så fyller vi på med variabelen som er vekten, hvor vi ikke vet hvor mye vekten er, derfor må vekten være x. Da

finner vi ut at vi tar her førtifem ganger x pluss tjue da, fordi det er sånn det er.

Det er en narrasjon som fungerer som en beskrivelse av den konkrete funksjonen i oppgaven, samtidig som ytringen også fungerer som en demonstrasjon av rutinen for å produsere formeluttrykk for en funksjon. Man skal ha en godt utviklet diskurs på funksjoner for å være i stand til å gjøre en vurdering av gyldigheten til denne narrasjonen, noe som har blitt drøftet under avsnittet om rutiner. Det fremstår som om flere av elevene i klassen ikke er i stand til å ta stilling til denne narrasjonen umiddelbart:

69. Lærer: Ja, det er konstant. Ok, er alle enige i dette? Ok, er det noen som datt litt av? Opp med hånden. Datt litt av, ja, ja. Y, hva var det vi mente med det? Det er?

Det er flere som rekker opp hånda for å signalisere at de ikke holder følge med ytringen i 68. Det er mulig at flere av elevene kunne fått mer ut av det dersom en ny gjennomgang hadde funnet sted, hvor narrasjonen hadde blitt plukket litt mer fra hverandre. Forklaringen blir imidlertid raskt avbrutt, og lærer kommer ikke tilbake til det.

<u>Matematiske objekt</u>

Det første matematiske objektet i fokus er verditabellen. Her brukes ikke x og y for å betegne henholdsvis uavhengig og avhengig variabel. Dette gjør at objektet ligger nærmere lignende objekter i en hverdagslig diskurs. Utfordringen med det er at det for en utenforstående kan være vanskeligere å akseptere narrasjoner om forholdet mellom verditabellen og funksjonsuttrykket som dukker opp i oppgave b). Kanskje kunne man etterhvert tilført x og y til «kilo» og «steketid» som en overgang til arbeidet med funksjonsuttrykket, da dette vil kunne gjøre det lettere argumentere for utledningen av formeluttrykket basert på tabellen.

Signifikansene «x» og «y» blir introdusert i oppgave b). Dette er komplekse objekter i en konvensjonell matematisk diskurs som vil kunne ha store mengder realiseringer. I tillegg er det avgjørende at man har godkjent en del narrasjoner som beskriver forholdet mellom disse to objektene, først og fremst hvordan de påvirker hverandre. Det vies ingen oppmerksomhet til disse objektene i seg selv, og det refereres sjelden til dem ved hjelp av signifikansene «x» og «y». I stedet prates det om de situasjonsspesifikke realiseringene «antall kilo» og «steketid». De vil imidlertid ikke kunne fungere som realiseringer av variabelobjektene før disse objektene er konstruert i elevenes diskurs. Det er lite som tyder på at elevene har et objektivert forhold til den uavhengige og avhengige variabelen.

123. Lærer: Uansett ja, så da kan vi kalle det for en konstant for den må vi ha uansett. Er alle enige i det? Er det noen som detter av her? Nei, er det noen ganger sånn at vi ikke har med det leddet (holder over b-leddet, på tavlen)? (7s) Ja, vi skal se på sånne oppgaver og. Vi skal se på mange forskjellige, men nå begynte vi på den ene og så står det da i c oppgaven her, sammenlign formelen med det generelle uttrykket y er lik a x pluss b. Hva slags graf vil kalkunformelen gi? Og da ble vi enige om at den ble lineær og a, hva var det det samme som? (7s) En spennende caps, eller har du mobilen inni (henvender seg til elev)?

124. Elev: Nei, jeg fant ut at «vans» baklengs er «snav»

125. Lærer: Å ok.

126. Elever: (latter)

127. Lærer: «Elev»?

128. Elev: Det er steketiden per kilo

129. Lærer: Ja

130. Elev: Og så variabelen

131. Lærer: Ja, og den siste der? Det kaller vi for?

132. Elev: Konstanten

133. Lærer: Ja, kaller vi a-en for noe annet?

134. Elev: Variabel

135. Lærer: Ja og?

136. Elev: Ukjent

137. Lærer: Ja, men det er den og som viser hvor mye de stiger med for hvert kilo, sant så a det er stigningstall (skriver «stigningstall» med en pil til «a») og b det er konstant (3s). Og så var det d-en igjen.

Stigningstall og konstantledd får noe mer oppmerksomhet. Disse to objektene er stort sett i fokus gjennom hele sekvensen, først gjennom signifikansene «45 min per kilo» og «legg til 20 min», og senere ved signifikansene «a» og «b» i det generelle uttrykket. På dette tidspunktet er det mulig for elever å knytte disse standard-signifikansene til idéene om stigning og konstante verdier. Det finnes ytringer i sekvensen som beskriver sammenhengen mellom «45 min per kilo», «a» og «stigningstall» (123, 128 og 137). Det kan derfor argumenteres for at sekvensen kan være til støtte for elevene i prosessen med å objektivere idéen om stigning i en lineær funksjon. Likedan med konstantleddet, som refereres til som «de 20 minuttene man må ha uansett», «b» og «konstantledd» (123, 132 og 137). De ulike realiseringene opptrer imidlertid nokså spredt og usystematisk, og særlig introduksjonen av signifikansen «stigningstall» er nokså kort – den blir kun nevnt én gang. Det er en fare for at enkelte elever ikke oppfatter disse ulike signifikansene for stigning og konstantledd som ulike måter å referere til de samme fenomenene på.

I arbeidet med oppgave c) tydeliggjør læreren likheten mellom ordet «lineær» og «linje». Med hverdagsspråk vil man kanskje kalle dette for en «huskeregel». I kommognitivt språk kan man derimot beskrive det som et forsøk på å knytte en ny signifikans til et allerede etablert diskursivt objekt. Det allerede konstruerte objektet vil da være idéen om en linje, som igjen kan fungere som en realisering av en lineær funksjon. På denne måten forsøker man å knytte signifikansen «lineær graf» til objektet lineær funksjon ved å gå via et allerede kjent matematisk objekt.

4.5 Oppsummering

Første og andre sekvens er hentet fra samme klasserom, og er således knyttet til innledende algebraundervisning. Å bli deltaker i en algebraisk diskurs kan beskrives som å bli i stand til å formulere generelle mønstre i aritmetikken (Caspi & Sfard, 2012). Man kan derfor si at det handler om å utvikle nye kommunikasjonsmønstre mer enn å konstruere nye objekt. Basert på dette resonnementet kan man forvente å finne eksemplifisering av rutiner i algebraundervisning. Et viktig objektet som allikevel må konstrueres i en algebraisk diskurs er variabelen. Eksemplifiseringen i de to første sekvensene er hovedsakelig av typen *rutine*. Første sekvens inneholder rutinen med å beskrive en geometrisk figur ved hjelp av variabler. Etterpå eksemplifiseres en ny rutine: å produsere et algebraisk formeluttrykk for omkretsen til en slik figur. I andre sekvens arbeides det hovedsakelig med hvordan man produserer regneuttrykk. En annen type rutine som blir eksemplifisert i andre sekvens er hvordan man produserer enkelte beskrivende narrasjoner *om* regneuttrykkene.

I andre sekvens anvendes en sekvensering av flere konkrete eksempler på regneuttrykk. Man kan derfor si at det også finnes eksemplifisering av *objektet* regneuttrykk i sekvensen. Eksemplene læreren har valgt danner et godt utgangspunkt for en diskurs på regneuttrykk. De fire første eksemplene har samme struktur, noe som gjør det mulig for elever å fange opp et diskursivt mønster, en rutine, for hvordan disse uttrykkene produseres. De to siste uttrykkene sørger for variasjon i struktur på tvers av eksemplene, noe som kan forhindre at elever reserverer «regneuttrykk» som signifikans for uttrykk med en bestemt struktur. I denne sekvensen kan derfor de konkrete eksemplene sies å være av betydning for elevers begynnende konstruksjon av det matematiske objektet regneuttrykk.

Tredje og fjerde sekvens er hentet fra funksjonsundervisningen på 10. trinn. Tredje sekvens inneholder eksemplifisering av et objekt: *den lineære funksjon*. Her drøftes to konkrete eksempler på lineære funksjoner, begge uten konstantledd. Disse eksemplene egner seg derfor dårlig til generalisering av lineære funksjoner, men dette har ikke blitt problematisert da det er grunn til å tro at konstantleddet ville blitt introdusert dersom videoen ikke hadde blitt avbrutt. Eksemplifiseringen av funksjoner demonstrerer tydelig hvordan diskursen består av flere lag. For å kunne eksemplifisere en funksjon, må man samtidig eksemplifisere andre matematiske objekt som *stigningstall* og *skjæringspunkt*, og konstruksjonen av disse underordnede objektene er således en forutsetning for å kommunisere om funksjoner. Sentrale narrasjoner trekkes frem for å beskrive de to funksjonene, og enkelte rutiner inngår også i eksemplifiseringen. Det er allikevel å betrakte som eksemplifisering av et *matematisk objekt*.

Fjerde sekvens har blitt klassifisert som eksemplifisering av en rutine. Rutinen blir beskrevet som særegen for «skolematematikken» da den forekommer som respons på en viss type lærebokoppgaver. Oppgaven etterspør flere sider ved funksjonsdiskursen, flere enn hva som ofte vil være hensiktsmessig å bruke i en «ekte» situasjon. Det har blitt argumentert for at den allikevel danner et rikt utgangspunkt for å snakke om lineære funksjoner. Fjerde sekvens belyser hvordan en læreres flyt i eksemplifiseringen av en rutine kan være av betydning. Uklarhet rundt mønsteret i rutinen, og utrygghet i forhold til de metadiskursive reglene som inngår i rutinen, kan bidra til å «tåkelegge» eksemplifiseringen. I resultatene poengteres det også hvordan eventuelle feil i demonstrasjon av en rutine med fordel kan gjøres til gjenstand for diskusjon. Dette kan fungere som et ikke-eksempel, og kan tydeliggjøre metadiskursive regler i rutinen.

5 Diskusjon

Resultatene av analysearbeidet var ikke som forventet. Som nevnt i innledningen var det forventet at resultatene skulle peke på viktigheten av *hvilke* eksempler som ble tatt i bruk for å formidle generelle matematiske idéer. Basert på analysene gjort i denne studien finnes det ikke grunnlag for å påstå at eksempelvalg er avgjørende for formidlingen av matematikk. Resultatene har imidlertid vist at hva en lærer *sier* og *gjør* i forbindelse med et konkret eksempel er av betydning for hvordan den aktuelle matematiske diskursen fremstår for elevene. Dette fører også til at det oppleves mer hensiktsmessig å bruke ordet *eksemplifisering* enn eksempel, da dette indikerer at man snakker om en menneskelig handling heller enn et diskursivt objekt. Man kan derfor si at læreren har en bestemt *eksemplifiseringsdiskurs* i arbeidet med et konkret eksempel. Denne diskursen defineres blant annet av hvilke rutiner, narrasjoner og matematiske objekt i eksempelet som anses/ikke anses for å være sentrale og hvordan disse presenteres. Eksemplifiseringsdiskursen utgjøres også av lærerens ordbruk, det vil si om de konvensjonelle signifikansene benyttes og om de benyttes på korrekt måte. I tillegg er en sentral del av denne diskursen lærerens evne til å gjøre eksplisitt rutiner knyttet til den generelle idéen som det konkrete tilfellet er et eksempel på. Analysene av den første sekvensen peker også på at det kan være av betydning at læreren er i stand til å formidle enkelte rutiners «hvorfor». Dette betyr ikke at man skal gi en forklaring på hvorfor noen vil ha bruk for de matematiske rutinene i hverdagen, men hvilke motiv den matematiske diskursen hadde for å utvikle disse rutinene.

5.1 Hvilke typer eksemplifisering?

I forskningslitteraturen deles eksemplene i ulike typer, deriblant eksempler på matematiske begrep og eksempler på matematiske prosedyrer (Bills et al., 2006). Resultatene av mine analyser har vist eksemplifiseringer av matematiske *objekt* og *rutiner*. Et matematisk objekt og et matematisk begrep kan potensielt omfatte mye av det samme, men det er vanskelig å si da jeg ikke finner en definisjon av «mathematical concept» noe sted i litteraturen. Det gis imidlertid eksempler på hva et slikt matematisk begrep kan være, som de rasjonelle tallene eller en sum (Bills et al., 2006; Zaslavsky, 2010). En sum vil også være et matematisk objekt i kommognitiv forstand. Det er allikevel ikke gitt hvorvidt et matematisk begrep og et matematisk objekt omfavner det samme.

En matematisk prosedyre får heller ingen formell definisjon i litteraturen, men eksemplifiseres ved aktiviteter som å finne arealet av en trekant, avgjøre om et heltall er delelig med tre eller hvordan man løser likninger (Bills et al., 2006). Dette er samtidig eksempler på matematiske *rutiner*, men igjen er det ikke gitt om begrepet *prosedyre* har samme omfang. En tendens i eksempellitteraturen er at en prosedyre refererer til en gitt sekvens av handlinger som leder frem til løsningen på en gitt problemstilling, noe som minner om en rutines *hvordan*. Det er uklart hvorvidt en prosedyre innebærer mer enn dette, som regler for *når* den kan anvendes. Denne uvissheten om hva som ligger i begrepet *prosedyre* gjør det vanskelig å bruke. Sfard (2008) problematiserer denne type usikkerhet rundt hva ord «betyr». Diskursen på læring og utvikling er preget av utstrakt objektivering og bruk av ord uten klare definisjoner forankret i observerbare fenomen. Dette skaper vanskeligheter da alle individer sitter med hver sin personlige konstruksjon av disse ordene. Et kommognitivt perspektiv er et forsøk på å deobjektivere denne diskursen slik at man kan komme forbi dette hinderet for kommunikasjonen.

Forskningslitteraturen deler eksemplene inn i generiske eksempler, mot-eksempler og ikke-eksempler. Det eneste ikke-eksempelet gitt med hensikt i datamaterialet finnes i tredje sekvens, hvor foreleseren forklarer hvordan grafen til en lineær graf *ikke* kan bøye seg. I resultatene fra fjerde sekvens beskrives arbeidet med å fylle ut tabellverdier basert på kalkunfunksjonen. Her produseres en rekke gale verdier, da en uregelmessig rutine blir implementert for å komme frem til verdiene. En mulighet som åpner seg i en slik situasjon er å prate om hva det var som gikk galt, og gjøre eksplisitt hvilke diskursive handlinger som ikke følger etablerte mønstre i den aktuelle diskursen. Dersom dette gjøres vil den feilaktige rutinen kunne fungere som et ikke-eksempel som kan være med å tydeliggjøre den ønskede rutinen. I fjerde sekvens blir feilen rettet opp, men årsaken til hvorfor det ble feil får ingen oppmerksomhet. En effekt av dette kan være at avviket fra rutinen oppleves som «støy» som gjør den ønskede rutinen vanskeligere å legge merke til.

Eksempeloppgaven i fjerde sekvens kan beskrives som generisk, da den leder til et «typisk» lineært funksjonsuttrykk som senere tvinges mot generalisering ved at oppgaven ber om at uttrykket sammenlignes med det generelle formeluttrykket for en rett linje. Fokuset på å se det generelle gjennom et spesielt tilfelle på denne måten har blitt brukt som kjennetegn på gode eksempler tidligere (Bills et al., 2006; Zaslavsky, 2010). Et av funnene til Bills et al. (2006), basert på gjennomgang av forskning på eksempler i matematikkundervisning, var at det manglet kunnskap om hvordan elevers oppmerksomhet kunne ledes mot å se det eksemplariske ved et eksempel. Dette antyder at det til en viss grad er lærerens ansvar å sørge for at et konkret eksempel kommuniserer det generelle prinsippet. Denne idéen støttes av analyseresultatene fra fjerde sekvens. Eksempeloppgaven om kalkunfunksjonen omfatter flere sentrale objekt, narrasjoner og rutiner knyttet til lineære funksjoner, og kan derfor brukes for å fremheve mye av denne diskursen. Læreren styrer i stor grad retningen på diskursen i klasserommet når det undervises fra tavla, og i den konkrete sekvensen er det lærer som styrer blant annet hvor mye tid som brukes på ulike rutiner og deler av oppgaven, og hva som avgjør om en rutine kan regnes som avsluttet. En lærers eksemplifiseringsdiskurs blir viktig i denne sammenheng. Dersom en lærer ikke kan rette fokuset mot og reflektere over de rutiner, narrasjoner og matematiske objekt som er sentrale i eksempelet *og* i den aktuelle diskursen, vil mange gode eksempler kunne miste mye av sitt potensiale. For eksempel vil det være viktig å reflektere over det matematiske objektet *stigningstall* i et eksempel på en lineær funksjon fremfor å kun snakke om den konkrete tallverdien i eksempelet. Chick (2009) trekker frem begrepet *potential affordances* som omhandler mulighetene som finnes *i* et eksempel, og forklarer videre at «Important teaching opportunities may be lost if a teacher overlooks what an example has to offer» (s. 29). Dette underbygges også av Zaslavsky (2010) som argumenterer for at måten læreren retter oppmerksomheten mot et eksempel vil ha betydning for kvaliteten på eksemplifiseringen.

Det dukker ikke opp noen mot-eksempler i datamaterialet, en type eksempler som riktig nok er blitt omtalt som sjeldne (Zodik & Zaslavsky, 2008). Det er interessant at denne typen eksempler brukes lite. Det er en grunnleggende rutine i matematikken å komme med påstander som man så forsøker å motbevise ved hjelp av et mot-eksempel. Dersom ønsket er at elevers matematiske diskurs skal nærme seg en konvensjonell matematisk diskurs vil det være viktig å få erfaringer med slike karakteristiske rutiner.

5.2 Hvilke diskursive endringer er sannsynlige?

I resultatene fra de ulike sekvensene har jeg argumentert for *potensielle* diskursive endringer både på objektnivå og metanivå. En diskursiv endring på objektnivå kjennetegnes ved utvidelse av en eksisterende diskurs (Sfard, 2008). En eksemplifiseringssekvens kan sies å ha skapt en endring på objektnivå dersom eleven viser tegn til en utvidelse av vokabular, konstruksjon av nye rutiner eller godkjenning av nye narrasjoner. I andre sekvens handler det om regneuttrykk, og siste del av sekvensen dreier seg rundt en samling eksempler på ulike regneuttrykk. Det er mulig å benytte variasjonsteori for å prøve å beskrive hvilke *variasjonsdimensjoner* som gjøres synlig på tvers av denne sekvenseringen av eksempler (Marton et al., 2004). Regneuttrykkene alene kommuniserer allikevel lite om hva som er typisk for et regneuttrykk, da det ikke finnes noe som holdes konstant i samtlige uttrykk. Et av de fundamentale prinsippene i variasjonsteorien er nettopp at for å kunne identifisere noe, må det kunne observeres at dette «noe» endrer seg i forhold til omgivelsene, eller omvendt. I andre sekvens varierer alt på tvers av uttrykkene, og det er således vanskelig å identifisere ulike deler av et regneuttrykk basert på eksemplene alene. På den annen side har regneuttrykk ingen karakteristisk struktur, det vil si, det finnes ingenting som *kan* holdes konstant. Dersom man «løfter blikket» og heller ser på den mønstrete aktiviteten å *produsere* regneuttrykkene som ulike eksemplifiseringer av en *rutine*, vil man kunne se at enkelte deler av kommunikasjonsmønsteret som leder frem til uttrykkene holdes konstant; identifiseringen av de konkrete objektene av betydning i situasjonen og prisen forbundet med disse, i tillegg til den symbolske medieringen av mengdene og prisene uten benevninger bak tallene for pris. Rutinen holdes konstant, men produktene av rutinen varierer. Slik er det mulig for elever å oppdage det diskursive mønsteret i aktiviteten, og på grunnlag av dette begynne å konstruere den nye rutinen og som en konsekvens av dette utvide sin matematiske diskurs.

Den nye rutinen i andre sekvens er det imidlertid *læreren* som demonstrerer. Lærerens eksemplifiseringsdiskurs er derfor avgjørende. Hvilke deler av det diskursive mønsteret som blir fremhevet og hvilke metadiskursive regler som blir gjort eksplisitt vil ha betydning for formidlingen av den overliggende strukturen i rutinen. Eksemplene er heller ikke uten betydning i denne sekvensen. Det ville blant annet vært uheldig dersom samtlige regneuttrykk som ble produsert hadde samme struktur, noe som kunne ledet elever til å produsere og godkjenne feilaktige narrasjoner om objektet som at det har en bestemt struktur eller utseende.

Det er mulig å tolke uttrykkene i andre sekvens som et begynnende «personal example space» for elevene, eller at det er mulig for elevene å abstrahere et «concept image» basert på disse eksemplene på regneuttrykk (Bills et al., 2006). Disse teoriene later allikevel ikke til å ha rom for det diskursive handlingsforløpet som leder til produksjonen av disse uttrykkene med utgangspunkt i dagligdagse situasjoner. Et «concept image» sammenfaller i stor grad med hva som beskrives som et matematisk objekt. Elever som skal konstruere et matematisk objekt kan ikke gjøre seg bruk av dette uten å samtidig bli kjent med andre deler av diskursen på dette objektet – blant annet sentrale rutiner.

I tredje sekvens kan man blant annet se hvordan foreleser produserer en rekke sentrale narrasjoner om det matematiske objektet *stigningstall* for beskrive selve objektet og prosesser tilknyttet objektet. En generell definisjon på stigningstall blir ytret, deretter forløper en sekvens av ytringer som beskriver stigningstallets påvirkning på konkrete tallverdier. I resultatdelen drøftet jeg hvordan idéen om et stigningstall kan tolkes som en objektivering av en slik sekvens av ytringer som beskriver en ikke-tilfeldig sammenheng mellom to mengder. En deobjektivering av matematiske objekt kan gjøre dem mer tilgjengelig for nye diskursdeltakere, og det er med på å sikre at diskursdeltakere sitter med samme oppfatning av hva som menes med signifikansen «stigningstall». Med utgangspunkt i den deobjektiverte samlingen av ytringer vil det være mulig for elever å konstruere objektet på ny i sin egen diskurs.

Eksemplifisering som potensielt kan føre til diskursiv endring på metanivå kan man se i første sekvens i datamaterialet. Et sentralt mål for aktiviteten som utspiller seg i denne sekvensen er å begynne å uttrykke seg algebraisk om forhold i geometriske figurer. Dette innebærer blant annet endring i metadiskursive regler for produksjon og godkjenning av narrasjoner om lengder i geometriske figurer. Elevenes ønske om å måle lengdene med linjal på spørsmål om hvor lange de er underbygger påstanden om at «lengde» frem til dette tidspunktet har vært realisert som konkrete tallverdier. I første sekvens kan det hende at det eksisterer en *kommognitiv konflikt*; en situasjon hvor ulike diskursdeltakere bruker samme ord i henhold til ulike metadiskursive regler (Sfard, 2008). Elevene i første sekvens møter en diskurs hvor variabler brukes for å beskrive lengder og forholdet mellom lengder i geometriske figurer. For å godkjenne denne type narrasjoner må objektet *variabel* konstrueres. Både godkjenning av de nye narrasjonene og konstruksjonen av variabelobjektet krever endring i elevenes metadiskursive regler.

Zaslavsky (2010) peker på at ulike eksempler stiller ulike krav til læreren. Jeg vil argumentere for at eksemplifiseringer som legger opp til en metadiskursiv endring hos elever vil være mest krevende for en lærer. For at læreren skal kunne hjelpe elever med å løse en kommognitiv konflikt, krever det at læreren er bevisst sin egen diskurs, noe som er utfordrende. Denne evnen vil være en viktig del av en læreres eksemplifiseringsdiskurs knyttet til denne type eksemplifiseringer.

6 Konklusjon

Denne masteroppgaven foreslår at bruk av det kommognitive rammeverket for å studere læreres arbeid med konkrete eksempler i matematikkundervisning kan kaste nytt lys over denne delen av læreres undervisningsarbeid. Utgangspunktet var, i tråd med den tidligere forskningen, å undersøke *hva* som gjør et eksempel til et godt eller mindre godt eksempel, og hvordan det kan påvirke elevers læring av matematikk. I den forbindelse formulerte jeg problemstillingen «Hvilken rolle spiller lærerens bruk av eksempler for endring av elevers matematiske diskurs?». Gjennom analysene av datamaterialet ble det tydelig at hva en lærer *sier* og *gjør* med et konkret eksempel ser ut til å ha minst like stor betydning for elevers læring som selve eksempelet. Dette ledet til utviklingen av begrepet *eksemplifiseringsdiskurs*, som betegner diskursen læreren fremviser i arbeidet med et konkret eksempel i undervisningssammenheng. Også andre har argumentert for betydningen av hva som blir sagt i forbindelse med eksemplifisering i matematikkundervisning, men de aller fleste er mest opptatt av læreres *valg* av eksempler heller enn hva de gjør med dem (e.g. Rowland, 2008; Zaslavsky, 2010; Zodik & Zaslavsky, 2008).

Idéen om en eksemplifiseringsdiskurs stemmer godt overens med rammeverket *Mathematical Discourse in Instruction* (Adler & Ronda, 2015) hvor eksempler og tilhørende forklaringer sammen med interaksjonsmønstre utgjør en læreres matematiske *instruksjonsdiskurs*. MDI-rammeverket er opptatt av i hvilken grad ordbruken til lærere kan karakteriseres som matematisk, og hvordan lærere veksler mellom en dagligdags diskurs og en matematisk diskurs for å hjelpe elevene inn i den nye diskursen. I tillegg er det et fokus på hvilken type argumenter som brukes for å etablere matematiske sannheter. Konkrete eksempler blir i dette rammeverket analysert i lys av variasjonsteori. I mine analyser har jeg forsøkt å plukke fra hverandre eksemplifiseringssekvenser for å trekke frem sentrale rutiner, narrasjoner og matematiske objekt. I tråd med et kommognitivt perspektiv på hvordan en diskurs konstrueres og endres har jeg forsøkt å kommentere på hvordan læreren gjennom eksemplifisering legger til rette for at elever kan bli mer sentrale deltakere i en matematisk diskurs. Hvordan en lærer kommuniserer om et matematisk objekt, hvilke signifikanser som brukes, hvilke narrasjoner knyttet til objektet som trekkes frem og hvordan disse godkjennes vil spille en rolle for hvordan elever starter deltakelsen sin i diskursen. Det samme kan sies om hvilke rutiner som anvendes i forhold til objektet eller for å godkjenne narrasjoner om objektene, samt lærerens bevissthet omkring rutinen og evne til å reflektere over denne. Det finnes eksempler med ulik *forklaringsevne* hvor noen kan regnes som bedre enn andre (Bills et al., 2006; Rowland, 2008), men eksemplenes rolle i endring av en matematisk diskurs avhenger også i stor grad av lærerens eksemplifiseringsdiskurs. «It is not examples as such which are important to mathematicians, but what is done with those examples, how they are probed, generalised, and perceived» (Bills et al. 2006, s. 6).

Kunnskap om valg av gode eksempler som illustrerer generelle idéer hevdes å være en del av en læreres *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball et al., 2008; Chick, 2009). Kommognitiv teori problematiserer kunnskapsbegrepet da det er vanskelig både å definere og å operasjonalisere (Sfard, 2008). En diskursiv variant av MKT-rammeverket har i lys av dette blitt foreslått: *Mathematical Discourse for Teaching* (Cooper, 2014). Idéen om en lærers eksemplifiseringsdiskurs kan ses som en integrert del av en matematisk undervisningsdiskurs, og således en del av den typen matematisk diskurs som kreves for å *undervise* i faget.

Noen implikasjoner for lærere og matematikkundervisning følger av resultatene i denne oppgaven. En diskursiv tilnærming til matematikkfaget kan synliggjøre hittil ukjente sider ved prosessen det er å bli en sentral deltaker i den matematiske diskursen. Som en konsekvens av et kommognitivt perspektiv og en idé om en eksemplifiseringsdiskurs, vil det i planlegging av undervisning være sentralt å ha et fokus på hvilke matematiske objekter, narrasjoner og rutiner man ønsker å formidle til elevene. I forbindelse med objektene, vil det være verdifullt å på forhånd ha sett for seg hvilke utfordringer det er sannsynlig at elever vil møte i forbindelse med konstruksjonen av dette/disse objektene. Ved å være forberedt på utfordringer knyttet til objektiveringen som likestilling eller urealiserte signifikanser, vil man kunne legge opp eksemplifiseringen for å imøtekomme disse problemstillingene. Et bevisst forhold til hvilke rutiner man ønsker å eksemplifisere vil også kunne være en fordel. Slik kan rutinen selv bli emne for diskusjon, og karakteristiske metadiskursive regler kan gjøres eksplisitt. På denne måten kan det styrke matematikkundervisningen dersom lærere blir mer bevisst sin egen eksemplifiseringsdiskurs.

Denne masteroppgaven kommer med et forslag til en diskursiv analyse av eksemplifisering i matematikkundervisning. Denne metoden krever mer utforskning og må videreutvikles.

Resultatet av analysene gjør det blant annet interessant å forsøke å kartlegge hvilke narrasjoner en lærer presenterer for å beskrive sammenhengen mellom et generelt matematisk objekt som $y = ax + b$ og et konkret eksempel på et slikt objekt. På denne måten kan man studere hvordan læreren gjør generaliseringen eksplisitt for elevene. Det vil også være viktig å undersøke eksemplifiseringsdiskursen til lærere på barnetrinn i forhold til ungdomstrinn. For å teste hypotesen om viktigheten av lærerens eksemplifiseringsdiskurs over det konkrete eksempelet, ville det vært interessant å konstruere en studie hvor ulike eksempler blir prøvd ut i eksemplifisering av den samme matematiske idéen, og hvor eksemplene var klassifisert som gode og mindre gode i henhold til forskningslitteraturen.

Vi ser en økning i antall kommognitive studier av undervisning (e.g. Adler & Ronda, 2015; Cooper, 2014; Sfard, 2012). Kanskje kan det være denne type perspektiv på læring og utvikling som kan bringe forskningsfeltet videre. Deobjektiveringen av sentrale begrep i diskursen på menneskelig utvikling gjør at kommunikasjonen blir mer presis og at enkelte uløste spørsmål som en konsekvens av dette kan bli besvart (Sfard, 2008). Denne masteroppgaven er et lite bidrag til denne utviklingen.

7 Litteratur

Adler, J., & Ronda, E. (2014). An Analytical Framework for Describing Teachers' Mathematics Dicourse in Instruction. I C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (red.), *Proceedings of the Joint Meeting 2 - 9 of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 2* (s. 9–16). Vancouver, Canada: PME.

Adler, J., & Ronda, E. (2015). A framework for describing Mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 19*(3), 237–254.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389–407.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. I J. Novotna, H. Moraova,M. Kratka, & N. Stehlikova (red.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 1* (s.126–154). Prague, Czech Republic: Charles University.

Bills, L., & Watson, A. (2008). Editorial introduction. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 77–79.

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous Meta-Arithmetic as a First Step toward School Algebra. *International Journal of Educational Research, 51*(3), 45–65. doi: 10.1016/j.ijer.2011.12.006

Chick, H. L. (2007). Teaching and learning by example. I J. Watson & K. Beswick (red.), Mathematics: essential research, essential practice. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (s. 2–21). Sydney: MERGA.

Chick, H. L. (2009). Choice and use of examples as a window on mathematical knowledge for teaching. *For the Learning of Mathematics*, *29*(3), 26–30.

Cooper, J. (2014). *Mathematical Discourse for Teaching: A Discursive Framework for Analyzing Professional Development*. I C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (red.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 2* (s. 337-344). Vancouver, Canada: PME.

Guttu, T., & Langdalen, A. (1993). *Norsk illustrert ordbok: moderat bokmål og riksmål*. Oslo: Kunnskapsforlaget.

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2004). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (2. utg.). Oslo: Abstrakt forl.

Kalleberg, R., & De Nasjonale forskningsetiske, k. (2006). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Oslo: Forskningsetiske komiteer.

Leksikon, S. N. (2009, 14. februar). Ledd: matematikk. from https://snl.no/ledd.%2Fmatematikk

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On Some Necessary Conditions of Learning. *The Journal of the Learning Sciences, 15*(2), 193–220.

Marton, F., Tsui, A. B., Chik, P. P., Ko, P. Y., & Lo, M. L. (2004). *Classroom discourse and the space of learning.* London: Routledge.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Growing Mathematical Objects in the Classroom – The Case of Function. *International Journal of Educational Research, 51*(3), 10–27. doi: 10.1016/j.ijer.2011.12.007

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Combined edition). New York, NY: Wiley.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 149–163.

Rowland, T., & Zaslavsky, O. (2005). Pedagogical example-spaces. Notes for the miniconference on Exemplification in Mathematics, Oxford University, June 2005

Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362–389.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing* (1. utg.). New York, NY: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse – Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51*, 1–9.

Silverman, D. (2011). *Interpreting qualitative data: a guide to the principles of qualitative research* (4. utg.). Los Angeles, CA: SAGE.

Skemp, R. (1969). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth, UK: Penguin.

Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, learning and action*. Chichester, UK: Wiley.

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Venkat, H., & Adler, J. (2012). Coherence and connections in teachers' mathematical discourses in instruction: original research. *Pythagoras, 33*(3), 1–8.

Wangensteen, B. (2004). *Bokmålsordboka : definisjons- og rettskrivningsordbok* (2. utg., 4. oppl. [i.e. 3. utg.]). Oslo: Kunnskapsforl.

Watson, A., & Mason, J. (2002a). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. I A. Cockburn & E. Nardi (red.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, s. 377–385). Norwich, UK: PME.

Watson, A., & Mason, J. (2002b). Student-generated examples in the learning of mathematics. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2(2), 237–249.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: The role of learner generated examples*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching. I M. K. Stein & L. Kucan (red.), *Instructional explanations in the disciplines* (s. 107–128). New York: Springer.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 67–78.

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 195–208.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69(2)*, 165–182.

8 Vedlegg

Vedlegg 1

Informasjonsskriv vedrørende forskningsprosjekt i skolen

Jeg vil her informere deg/dere som foreldre til barn i (NAVN PÅ KLASSE/SKOLE) om forskningsprosjektet som vi ønsker å gjøre i klassen. Prosjektet er en del av et kurs på Masterstudiet i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger (UiS), hvor to forskere og åtte masterstudenter deltar. Målet med prosjektet er å studere klasseromsdiskurs i matematikk. Arbeidet vil dreie seg om sammenhenger mellom lærers og elevers diskurs omkring sentrale matematiske begreper.

Det er derfor ønskelig at vi får anledning til å observere klassen (3–10 skoletimer) og samle inn data som feltnotater, intervju og oppgaveanalyse. Det vil bli gjort video- og lydopptak fra undervisningen og intervjuene. Alle observasjoner og kommentarer fra lærer og elever vil bli behandlet konfidensielt, og datamaterialet vil bli anonymisert ved prosjektslutt slik at det ikke vil kunne spores tilbake til elevene, klassen eller skolen.

All medvirkning i dette prosjektet er basert på frivillighet, og dere står selvsagt helt fritt til å velge om deres barn skal være med eller avstå fra å delta i prosjektet eller ikke. Dersom dere ikke ønsker at deres barn skal delta i prosjektet, vil kamera og lydopptakere plasseres slik at disse elevene ikke blir synlige i video-opptakene. Eventuelle ytringer som disse elevene kommer med underveis vil ikke transkriberes og brukes som en del av det videre datamaterialet i prosjektet.

Observasjonene vil fortrinnsvis foregå i løpet av februar/mars, etter nærmere avtale med klassens matematikklærer. Video- og lydopptak vil bli oppbevart på en sikker måte. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning ved NSD. Alle involverte parter fra UiS er underlagt taushetsplikt, og data vil bli behandlet deretter. Alle opptak vil bli slettet/destruert når prosjektet er avsluttet. (Dato for prosjektets slutt er satt til 31. desember 2016)

Det ferdige arbeidet vil bli presentert i en skriftlig rapport som senere kan videreutvikles til en publiserbar artikkel. Hverken skolen, læreren eller elevene vil kunne gjenkjennes i eventuelle publikasjoner.

Nærmere informasjon om prosjektet kan fås ved henvendelse til Reidar Mosvold (tlf. 51 83 23 42 og e-post: reidar.mosvold@uis.no) som er ansvarlig for dette prosjektet. Vi håper på positiv tilbakemelding fra deg/dere.

Vennlig hilsen

Reidar Mosvold

Førsteamanuensis i matematikkdidaktikk, UiS

Svarslipp:

Jeg tillater at deltakere i forskningsprosjektet fra UiS observerer (og eventuelt intervjuer) vårt barn.

Underskrift av foresatt(e): ....

Jeg godtar også at det blir samlet inn data som beskrevet ovenfor.

Ja Nei (sett ring rundt valg)

Vedlegg 2

Informasjonsskriv til lærer vedrørende forskningsprosjekt i skolen

Jeg vil her informere om forskningsprosjektet som vi ønsker å gjøre i klassen din. Prosjektet er en del av et kurs på Masterstudiet i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Stavanger (UiS). Målet med prosjektet er å studere klasseromsdiskurs i matematikk. Arbeidet vil dreie seg om sammenhenger mellom lærer og elevers diskurs omkring sentrale matematiske begreper.

Det er derfor ønskelig at vi får anledning til å observere klassen (3–10 skoletimer) og samle inn data som feltnotater, intervju og oppgaveanalyse. Det vil bli gjort video- og lydopptak fra undervisningen og intervjuene. Alle observasjoner og kommentarer fra lærer og elever vil bli behandlet konfidensielt og anonymisert slik at de ikke vil kunne spores tilbake til elevene. Gjennom hele prosessen (innsamling, bearbeidelse, analyse og presentasjon av data) vil vi være bevisste på å anonymisere datamaterialet. Det vil derfor ikke være mulig å vite hvem som har gjort eller sagt hva eller hvilken klasse og skole forskningen har foregått ved. All medvirkning i dette prosjektet er basert på frivillighet, og deltakerne har mulighet til å trekke seg fra prosjektet når som helst.

Observasjonene vil fortrinnsvis foregå i løpet av februar/mars – etter nærmere avtale med deg som lærer. Video- og lydopptak vil bli oppbevart på en sikker måte. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning ved NSD. Alle involverte parter fra UiS er underlagt taushetsplikt, og data vil bli behandlet deretter. Alle opptak vil bli slettet/destruert når prosjektet er avsluttet.

Det ferdige arbeidet vil bli presentert i en skriftlig rapport som senere kan videreutvikles til en publiserbar artikkel. Hverken skolen, læreren eller elevene vil kunne gjenkjennes i eventuelle publikasjoner.

Nærmere informasjon om prosjektet kan fås ved henvendelse til Reidar Mosvold (tlf. 51 83 23 42 og e-post: reidar.mosvold@uis.no) som er ansvarlig for dette prosjektet. Vi håper på positiv tilbakemelding fra deg/dere.

Vennlig hilsen

Reidar Mosvold

Førsteamanuensis i matematikkdidaktikk, UiS