FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Master i utdanningsvitenskap – profil: Matematikkdidaktikk	Vårsemesteret, 2020 Åpen/ ~~konfidensiell~~
Forfatter: May Elisabeth Bergheim	……………………………………… (signatur forfatter)
Veileder: Raymond Bjuland	
Tittel på masteroppgaven: En kommognitiv case-studie med fokus på hvordan tidligere erfaringer kan påvirke elevers strategier i møte med brøkaddisjon. Engelsk tittel: A commognitive case study which focus on how previous experiences can affect students' strategies in fraction addition.	
Emneord: Brøk, addisjon, elevstrategier, matematisk diskurs, kommognisjon, diskursanalyse, matematiske rutiner	Antall ord: 37821 + vedlegg/annet: 3318 Stavanger, 11.06.2020 dato/år

Forord

Etter 5 år som student på grunnskolelærerutdannelsen ved Universitetet i Stavanger, markerer denne masteroppgaven slutten på studenttilværelsen for denne gang. Gjennom disse 5 årene har jeg møtt både motgang og medgang, fått mange nye perspektiv, og blitt enda mer glad i matematikkfaget.

Først ønsker jeg å rette en stor takk til min veileder, Raymond Bjuland, som har bidratt til at jeg har klart å fullføre denne masteroppgaven. Jeg har fått gode svar på absolutt alle spørsmål jeg har stilt underveis, fått mange gode tips til relevant litteratur, og du har også bidratt til at jeg kunne stille spørsmål til min egen oppgave og dermed få et bredere perspektiv på både muligheter og begrensninger i oppgaven min. I tillegg må jeg takke alle forelesere, praksislærere og medstudenter som har bidratt til mye læring og positive opplevelser gjennom de siste 5 årene.

Jeg må også takke en fantastisk samboer, Thomas, som har akseptert at leiligheten ble omgjort til en lesesal i innspurten av dette arbeidet, i disse tider med delvis nedstengt samfunn. Både samboer, familie og venner har vært tålmodige, lyttet til mye frustrasjon underveis i arbeidet, og bidratt til at jeg har fått nytt pågangsmot når jeg har hatt aller mest lyst til å gi opp.

Nå er det endelig på tide å få tatt i bruk all erfaring og kunnskap i praksis, etter en velfortjent sommerferie.

May Elisabeth Bergheim

Sandnes, 2020

Innholdsfortegnelse

Sammendrag

Kunnskap om elevenes læringsprosess er viktig, og denne masteroppgaven retter fokuset mot hvordan to utvalgte elever, 6.trinn, tar utgangspunkt i sine tidligere erfaringer i møte med addisjon av brøk med ulik nevner. Gjennom en kommognitiv diskursanalyse av noen utvalgte caser belyses noen mulige faktorer som kan påvirke elevenes valg av strategier og fremgangsmåter i møte med addisjon av brøk med ulik nevner. Forskningsspørsmålene som denne studien forsøker å besvare er «*hvordan kan elevenes tidligere erfaringer innenfor matematikk påvirke elevenes strategier og løsninger i møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*» og «*hvordan kan det kommognitive perspektivet bidra til å få innsikt i elevenes møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*».

Gjennom denne studien blir det utført en dyptgående analyse av to utvalgte elevers individuelle diskurs, og resultatene bidrar til eksisterende kunnskap om elevenes vansker i møte med brøk. Hvis vi ser elevenes strategier gjennom perspektivet til en som er erfaren i matematikk vil det kunne oppleves som overraskende og uventet. Gjennom forsøk på å ta elevperspektivet, kan vi derimot oppdage flere aspekt ved oppgavesituasjonen som elevene står ovenfor som bidrar til at elevenes strategivalg ikke er så uventet. Lærerens bruk av visuelle mediatorer og hvordan læreren legger til rette for en forbindelse mellom ulike sekvenser i undervisningsøkten viser seg å være sentrale element når elevene skal velge strategi for å løse en gitt oppgave.

1. Innledning

Det er blitt økt fokus på elevenes egne strategier og fremgangsmåter i matematikk for grunnskolen de siste årene. Med den nye læreplanen for matematikk, som trer i kraft 01.08.2020, skal elevenes fremgangsmåter og strategier vektlegges mer enn selve løsningen, og elevene skal kunne begrunne sine egne fremgangsmåter og løsninger (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette stiller krav til lærerens kompetanse og kunnskap i faget, hvor læreren må kunne vurdere gyldigheten av løsninger og strategier fortløpende i undervisningen. Mer kunnskap og innsikt i elevenes læringsprosess i matematikk vil kunne gi læreren et bedre kunnskapsgrunnlag for å håndtere denne utfordringen på best mulig måte. Ved å være bedre kjent med læringsprosessen hos elevene, vil læreren muligens kunne tilrettelegge for og veilede elevens læring på en bedre måte.

Undersøkelser av elevenes feilmønster og feil bruk av strategi kan bidra til at lærere bedre forstår elevers resonnering og misoppfatninger når det kommer til brøk (D. Zhang, Stecker & Beqiri, 2017). Forskningen bør derfor sikte på å utvikle mer kunnskap om hvordan elevene skaper forbindelser og sammenhenger i møtene med nye matematiske konsepter og situasjoner. Gjennom denne studien siktes det på å få innsikt i hvordan elevene kan påvirkes av faktorer i læringssituasjonen, som kan bidra til at vi oppnår en bedre forståelse av utfallet av læringsprosessen. En grundig analyse av hvordan elevene møter nye kontekster og former løsninger i møte med nye matematiske situasjoner, kan bidra til å gi læreren mer bakgrunnskunnskap for å både tilrettelegge for, forstå og håndtere resultatet av læringsprosessen hos eleven i matematikk.

Sosiale prosesser som kommunikasjon og tenking er komplekse fenomener, og et teoretisk perspektiv som forsøker å fange opp flere sider av disse menneskelige prosessene er det kommognitive rammeverket til Sfard (2008). Det kommognitive rammeverket, som vil være utgangspunkt for denne studien, vektlegger deltakelsesperspektivet på læring. Det innebærer at det er en gjensidig påvirkning mellom individet og det kollektive i læringsprosessen, i motsetning til tilegnelsesperspektivet hvor individet blant annet tilegner seg kunnskap gjennom sosial samhandling. Det kommognitive rammeverket tar en diskursiv tilnærming til læring, og matematisk læring innebærer at eleven blir i stand til å delta i den matematiske diskursen (Adler & Sfard, 2017). Den matematiske diskursen kjennetegnes av fire egenskaper, som er bruken av matematiske ord, visuelle mediatorer, rutiner og godkjente narrativer (Sfard, 2008).

Det kommognitive rammeverket er inspirert av arbeidet til Vygotsky og hans fokus på de menneskelige aspektene ved atferd. Noe av det som er felles for den kommognitive og sosiokulturelle tilnærmingen er hvordan sosiale, kollektive aktiviteter påvirker individet. Det som derimot skiller de to tilnærmingene, er hvorvidt kognisjon, i form av tenking, og mellommenneskelig kommunikasjon er to ulike ting. Innenfor den sosiokulturelle tradisjonen beskrives tenking som internalisering av ytre tale, hvor det sosiale og kollektive går foran de individuelle mentale prosessene i utviklingen (Lerman, 2001). Sentralt i det kommognitive rammeverket står *kommognisjon*, et begrep introdusert av Sfard (2008) for å fremheve at kognisjon og kommunikasjon er to sider av samme fenomen.

Det kommognitive rammeverket kan bidra til å belyse noen av faktorene som påvirker hvordan elevenes tidligere erfaringer brukes i møte med nye situasjoner, gjennom blant annet beskrivelsen av en rutine som oppgave-prosedyre par (Lavie, Steiner & Sfard, 2019). En tilnærming til dette vil være å se hvordan oppgaven som gis av læreren tolkes av elevene, og hva dette innebærer vil utdypes nærmere i teorikapittelet. Denne studien vil særlig sette søkelyset på perspektivet til en *outsider* (Sfard, 2008). Når forskeren tar perspektivet til en outsider kan den gi mening til de uventede handlingene som elevene bruker i respons til oppgaven som er gitt av læreren (Lavie & Sfard, 2019).

I dette masterprosjektet vil fokuset rettes mot elevers møte med brøk og brøkregning. Læring om brøk har vist seg å være en stor utfordring i matematikk for grunnskolen (Bjerke, Eriksen, Rodal & Ånestad, 2012). I eksisterende litteratur, som vil gjennomgås mer i teorikapittelet, finnes det en del indikasjoner om at flere identifiserte faktorer kan hindre elevene i å utvikle korrekte strategier for brøkregning (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Den store mengden av erfaring elever har med heltall og operasjoner på heltall vil kunne være til hinder for elevenes utvikling av kunnskap i forbindelse med brøk. Samtidig påpekes det at det også er mulig at komplekse, kontekstuelle faktorer i klasserom, som er vanskelig å måle, er med på å påvirke utviklingen av elevenes kunnskap rundt brøkregning (Bailey, Hansen & Jordan, 2017).

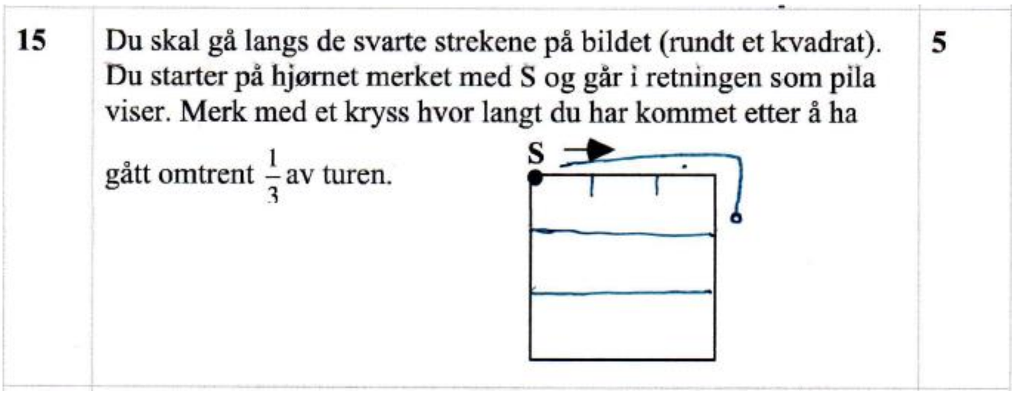
Innenfor noe av den kommognitive forskningen (Heyd-Metzuyanim, 2015) beskrives det at vanskene som elevene opplever i møte med brøk kan skyldes at rasjonale tall involverer flere representasjonsformer, noe som gjør det utsatt for en mekanisk læring. Hvis en elev ikke har *objektivisert* brøk vil dette kunne hindre meningsfull deltakelse i, blant annet, algebradiskursen. Objektivisering er et av de begrepene i det kommognitive rammeverket som vil beskrives nærmere i teorikapittelet.

Før vi nå går videre vil jeg trekke frem et eksempel som kan illustrere bakgrunnen for undersøkelsen som vil utføres i denne studien. Dette eksempelet kan bidra til å belyse hvorfor det er aktuelt å ta elevperspektivet, som en outsider til den matematiske diskursen, for å forstå flere sider av elevenes læringsprosess.

1.1. Utfordringer med brøkbegrepet – en vignett

I forbindelse med brøk som tema ønsker jeg først å trekke frem et eksempel fra min personlige erfaring, som kommer fra mitt møte med en jente som ga uttrykk for at hun opplevde utfordringer med enkelte deler av undervisningen i matematikk etter grunnskolen. Før jeg nå går videre ønsker jeg å tydeliggjøre for leseren at den aktuelle personen, som er over 18 år per dags dato, har gitt sin tillatelse til bruk av eksemplene som følger. Jeg gir vedkommende fiktivt navn som er Helle, og for å ivareta anonymiteten ytterligere har alder blitt utelatt fra beskrivelsene, samt at oppgavebesvarelsene er reprodusert av meg med min håndskrift. Helle har fått tilsendt innholdet i denne beskrivelsen, og har godkjent bruken av innholdet slik det fremstilles under.

Det første som slo meg med Helle var blant annet at hun mestret det jeg vil beskrive som avanserte matematiske algoritmer. Hun kunne tolke oppgaver og velge riktig strategi, som for eksempel faktorisering av 2.gradsuttrykk i algebra og velge riktig bruk av den såkalte *abc-formelen*. Ved oppstarten av vårt arbeid sammen tok Helle tester for nivå 5 og 7 fra kartleggingsredskapet *Alle teller!* (McIntosh, 2007). Når det gjelder brøk mestret hun både oppgaver som ba henne om å skravere en brøkdel av en figur, dele inn brøkdel av en mengde, og plassere en gitt brøk på en tallinje. I tillegg til dette kan vi se på Helles løsning av oppgave 15 fra nivå 7 i figur 1 under.



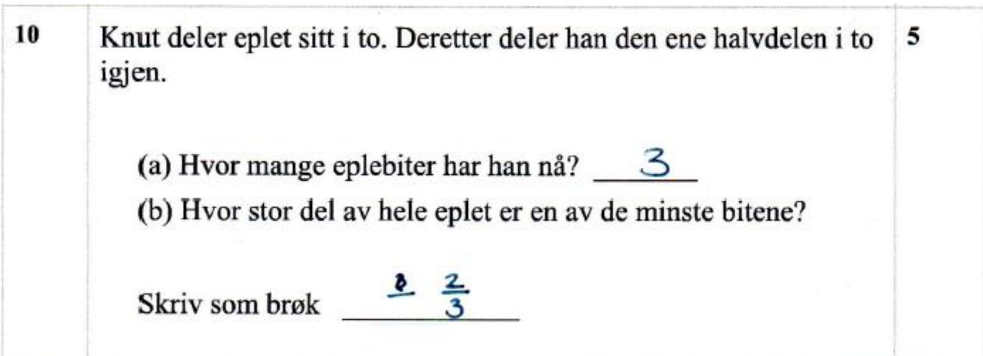
15

Du skal gå langs de svarte strekene på bildet (rundt et kvadrat). Du starter på hjørnet merket med S og går i retningen som pila viser. Merk med et kryss hvor langt du har kommet etter å ha gått omtrent $\frac{1}{3}$ av turen.

5

Figur 1 – Oppgave 15, nivå 7 (McIntosh, 2007)

Etter dette ville jeg tolket at Helle viste god kunnskap om ulike sider ved brøk, og kunne ta i bruk varierte strategier tilpasset ulike oppgaver. Og da ble det spesielt overraskende når hun ga svar sitt på oppgave 10, som illustreres i figur 2 under.



10

Knut deler eplet sitt i to. Deretter deler han den ene halvdelen i to igjen.

(a) Hvor mange eplebiter har han nå? 3

(b) Hvor stor del av hele eplet er en av de minste bitene?

Skriv som brøk $\frac{2}{3}$

5

Figur 2 - Oppgave 10, nivå 5 (McIntosh, 2007)

Denne løsningen fikk meg til å undre meg over hva det er som påvirker i elevenes møte med brøk som gjør at den samme eleven gir de to svarene fra oppgave 10 (Figur 2) og 15 (Figur 1). Det ser tilsynelatende ikke ut til å skyldes at eleven ikke har en forståelse av like deler, brøk som enten mengde, areal, avstand eller tallstørrelse. Fra Helles svar på andre oppgaver finnes indikasjoner om at det verken var firedeler eller tredeler som var en utfordring. Og da står jeg igjen med spørsmålet - hvor kommer elevens svar og strategier fra? Det var for meg en indikasjon om at eksisterende kunnskap om elevers misoppfatninger mangler noe vesentlig. Og at for å kunne finne det som mangler må vi kanskje skifte til elevenes perspektiv, for å kunne se hva det er som kan påvirke valgene de tar i møte med ulike situasjoner og matematiske oppgaver. Dette kan det kommognitive rammeverket muligens bidra til, gjennom å utføre en dyptgående analyse av elevens diskurs med utgangspunkt i diskursens fire egenskaper og perspektivet til en *outsider* (Sfard, 2008).

1.2. Problemstilling

En kommognitiv analyse kan gi innsikt i læringsprosessen som leder frem til løsningen som eleven presenterer (Sfard, 2007), og på denne måten være med å belyse påvirkningsfaktorer til elevens strategivalg i møte med addisjon av brøk. Læringsprosessen er ikke tilgjengelig direkte for utenforstående, men gjennom å se på resultatet av prosessen gjennom elevenes løsninger og strategier med begrunnelser i kommunikasjonen i klasserommet, er det mulig å få indirekte tilgang til deler av denne prosessen. Som følge av dette kan vi gjennom en kommognitiv analyse av elevenes strategier oppnå dypere innsikt i den underliggende læringsprosessen, og dette kan potensielt bidra til å belyse noen av de underliggende mekanismene bak det som tradisjonelt kalles misoppfatninger. Det kommognitive rammeverket er tidligere tatt i bruk for å studere læringsprosessen og ulike former for deltakelse i den matematiske diskursen, og noen eksempler på dette vil nevnes kort her før vi ser nærmere på eksisterende forskning i delkapittel 2.3.

I tillegg til nyere forskning vil også min erfaring med det kommognitive rammeverket (Bergheim, 2019) bidra til at jeg anser det som egnet for å studere læringsprosessen hos elevene. Som en del av kurset MUT303, ved Universitetet i Stavanger våren 2019, ble det samlet inn video- og lydopptak fra to uker med matematikkundervisning i to klasser på 6.trinn. Dette datamaterialet ble benyttet til å skrive forskningspaper, og her var mitt forskningsspørsmål «Hvilke faktorer kan være med på å påvirke elevens valg av fremgangsmåte i møte med brøk i en ny og ukjent kontekst?» (Bergheim, 2019). Noen faktorer som kunne påvirke var elevenes forsøk på å bevare tidligere godkjente narrativer fra heltalls- og brøkdiskursen de hadde individualisert fra før, hvor rutiner for addisjon av heltall og *det hele* fra brøkdiskursen var noe av det elevene kan ha basert seg på når de skulle finne løsninger. Som følge av resultatene fra dette prosjektet satt jeg igjen med nye spørsmål om hvordan elevens tidligere diskursive erfaringer i matematikk kan påvirke valget av løsning og/eller strategi i møte med nye og ukjente kontekster, som jeg ønsker å se nærmere på i dette masterprosjektet.

Lavie og Sfard (2019) peker blant annet på at dersom vi kun ser elevenes handlinger gjennom vår egen «voksen-matematiske-diskurs», perspektivet til en *insider* i den matematiske diskursen (Sfard, 2008), vil vi ikke kunne oppdage det som er en selvfølge for elevene, men samtidig uforståelig for en mer erfaren og voksen observatør. Disse forfatterne har studert utviklingen av en kvantitativ diskurs hos barn ved å følge en gutt over en periode på 18 måneder, og rettet fokuset mot utviklingen i barnets ordbruk og rutiner. I sin studie trekker Heyd-Metzuyanim (2015) avslutningsvis frem at hun selv lærte at som en lærer må hun legge mye mer vekt på å høre elevens måte å se verden på. Berger (2013) har gjennom en case-studie studert hvordan en endring i diskursen påvirker aktiviteten som deltakerne tar del i, og retter noe av fokuset mot bruken digitale redskap i matematikk.

En annen studie av Roberts og Le Roux (2019) har sett på elevenes tenking ved å studere elevens kommunikasjon rundt sine løsninger på lineære likninger gjennom intervju. Sfard (2007) har sett på hvordan det kommognitive rammeverket fungerer for å forstå prosessene i klasserommet, med fokus på endringer i den matematiske diskursen, mens Adler og Sfard (2017) har studert hvordan elevenes deltakelse formes av den typen matematisk diskurs som læreren eksponerer de for, ved å skille mellom rituell og utforskende deltakelse. I sin studie av elevenes rutiner har Lavie et al. (2019) sett på hvordan elevens begynnende deltakelse i matematisk diskurs er rituell og gjennom læringsprosessen gradvis omformes til utforskende gjennom det de beskriver som deritualisering. De har i tillegg sett på hvordan den gradvise utviklingen i løpet av *deritualiseringsprosessen* hos eleven kan identifiseres, noe som vi vil komme tilbake til i kapittel 2.

Vi ser hvordan vi gjennom det kommognitive rammeverket kan få innsikt i den læringsprosessen som ligger bak elevens løsning i matematikk. Dette sammen med mine spørsmål om hvor elevenes svar og strategier kommer fra, leder til problemstillingen for denne oppgaven som er:

> *Hvilke faktorer kan påvirke hvordan elevene skaper strategier og fremgangsmåter i møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*

Den presenterte problemstillingen deles videre opp i to forskningsspørsmål:

S1: *Hvordan kan elevenes tidligere erfaringer innenfor matematikk påvirke elevenes strategier og løsninger i møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*
S2: *Hvordan kan det kommognitive perspektivet bidra til å få innsikt i elevenes møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*

Disse spørsmålene vil danne utgangspunktet for analysen og diskusjonen i denne oppgaven, hvor jeg vil forsøke å besvare S1 gjennom en dyptgående analyse av to utvalgte elever, med utgangspunkt i det kommognitive rammeverket. Deretter vil S2 forsøkes besvart gjennom en diskusjon av resultater fra denne studien i lys av eksisterende forskning.

Formålet med denne studien er å studere elevers læringsprosess i matematikk, og dette vil gjøres gjennom en dyptgående undersøkelse av noen få utvalgte *caser*. Tidligere forskning er i stor grad basert på tilegnelsesperspektivet på elevenes læring, og som følge av dette vil dette masterprosjektet kunne belyse nye sider av fenomener som allerede er studert (Thagaard, 2018). Videre presenteres det nå en kort disposisjon for denne oppgaven.

1.3. Disposisjon for oppgaven

For å besvare problemstillingen for denne oppgaven vil først den sosiokulturelle læringsteorien beskrives i teorikapittelet, og deretter presenteres det kommognitive rammeverket som blant annet tar utgangspunkt i Vygotsky sitt arbeid med det sosiokulturelle rammeverket. Rutiner, som er en sentral egenskap i det som kjennetegner en matematisk diskurs (Sfard, 2008), har en sentral rolle i analysen av elevenes fremgangsmåter og strategibruk i matematikk, og vil derfor være en sentral del av analysen i denne studien. Som følge av dette vil matematiske rutiner bli grundig behandlet i et eget underkapittel under det kommognitive rammeverket. Analysen vil også ta utgangspunkt i flere komponenter fra det kommognitive rammeverket, og på bakgrunn av dette vil en stor del av teorikapittelet vies til beskrivelser av rammeverket.

Etter det teoretiske rammeverket er presentert vil det følge en kort beskrive eksisterende kommognitiv forskning, i tillegg til forskning på brøk og brøkregning. Mot slutten av kapittel 2 vil vi se nærmere på noen av begrepene som er brukt i eksisterende forskning på brøk og brøkregning gjennom det kommognitive perspektivet (Sfard, 2008). Videre vil de metodiske valgene for denne studien presenteres i kapittel 3, før vi går over til analysedelen av oppgaven. Resultater av analysen vil diskuteres nærmere, i lys av eksisterende forskning og forskingsspørsmålene som er stilt, i kapittel 5. Avslutningsvis presenteres en konklusjon hvor det gjøres forsøk på å gi svar på problemstillingen basert på de resultatene som kommer ut fra analysen og den påfølgende drøftingen, i tillegg til implikasjoner for undervisning og videre forskning.

2. Teoretisk bakgrunn

Det kommognitive rammeverket retter fokuset mot hvordan den kollektive aktiviteten påvirker elevenes læring, og arbeidet til Sfard (2008) tar utgangspunkt i det sosiokulturelle perspektivet. Som følge av dette vil det i dette kapittelet først presenteres en beskrivelse av noen sentrale trekk ved den sosiokulturelle læringsteorien med fokus på læring i samspill med omgivelsene. Deretter beskrives det kommognitive rammeverket, før en gjennomgang av eksisterende forskning både innenfor kommognitivt perspektiv og i tillegg forskning på brøk og brøkregning. Kapittelet vil avsluttes med å ta et kommognitivt perspektiv på noen av de sentrale fenomenene som beskrives i eksisterende forskning, som blant annet begrepene *misoppfatning* og *forståelse*.

Innenfor det sosiokulturelle perspektivet beskrives tenking som internalisert ytre tale (Wells, 1999). I motsetning til dette defineres tenking som individualisert versjon av mellommenneskelig kommunikasjon innenfor det kommognitive rammeverket, og beskrives som en form for kommunikasjon med seg selv (Sfard, 2008). Elevens tenking kan beskrives som en indre diskurs hos eleven, som ikke skiller seg fra den mellommenneskelige diskursen (Heyd-Metzuyanim, 2015). Matematisk kommunikasjon er en diskursiv aktivitet som er sentrert rundt matematiske objekt, og fra dette følger det at matematisk tenking handler om å kommunisere matematisk med seg selv (Adler & Sfard, 2017). Ifølge Sfard (2008) kjennetegnes en matematisk diskurs av fire egenskaper, og disse er visuelle mediatorer, narrativer, ordbruk og rutiner. Hver av disse egenskapene blir beskrives nærmere under det kommognitive rammeverket i delkapittel 2.2.

2.1. Fra Vygotsky til Sfard – fra det sosiokulturelle til det kommognitive perspektivet

Ifølge Imsen (2014) hadde arbeidet med den sosiokulturelle læringsteorien sin opprinnelse i Vygotsky sitt ønske om å fjerne det tradisjonelle dualistiske synet som skiller mellom menneskelig atferd og sinn. Vygotsky trakk frem at den menneskelige bevisstheten måtte tas med i vurderingen, og anså de kollektive prosessene som viktige (Wells, 1999). Det ble rettet fokus mot at vi må se både læring og kunnskap i sammenheng med menneskets sosiale aktiviteter og miljø, hvor læring og utvikling skjer i et samspill mellom individet og omgivelsene. All menneskelig tenking har sitt utgangspunkt i en kollektiv sosial aktivitet, hvor det sosiale kommer før det individuelle, og læringsprosessen handler om tilegnelsen av det kollektive. Aktiviteten som eleven deltar i, består av den språklige samhandlingen mellom deltakerne i det gitte sosiale fellesskapet (Wells, 1999).

Språket fikk en sentral rolle i den sosiokulturelle teorien, hvor språket beskrives som et redskap som mennesket bruker til både kommunikasjon og tenking. Språk styres av gitte regler som avgjør hvordan en kan uttrykke seg i en gitt kontekst, og gjennom koder og regler er språket strukturert og regulert (Imsen, 2014). Symboler har en meningsbærende funksjon, og elever i skolen gjør forsøk på å knytte mening til disse symbolene under læringsprosessen. Felles regler og meningsbærende symboler bidrar til deltakelse i det sosiale fellesskapet. Språket er det som utgjør fundamentet for tenking, hvor talespråket utgjør byggesteinene for tenking. Hvordan vi tenker og oppfatter verden vil avgjøres av språket, ettersom det er vi mennesker som avgjør hvordan ord skal forbindes med fenomener og objekter i verden. Vygotsky påstår ikke at språk og tenking er det samme, men at det er to forskjellige system som henger tett sammen. Tenking defineres som en internalisering av ytre tale (Wells, 1999).

Innenfor det sosiokulturelle perspektivet er læring en sosial prosess som skjer gjennom samspill med de sosiale omgivelsene. Læring som en prosess medfører at en retter fokuset mot det samspillet som foregår mellom både personer og objekter, hvor det kan foregå flere typer samspill på en og samme tid. Det vil si at der det oppstår læring, vil det alltid skje gjennom individets samspill med omgivelsene. Læring skjer i en kontekst, og for å kunne forstå læring må en starte med aktiviteten. Proksimal utviklingssone handler om læringspotensialet til eleven, og beskrives som ytre grenser for hva eleven kan få til med hjelp og støtte sammen med andre, som en medelev eller lærer, og deretter selvstendig gjennom gradvis overføring av ansvar (Bakker, Smit & Wegerif, 2015). Læring er resultat av sosialt samspill, og elevene må utfordres innenfor det området de er i stand til å beherske (Wells, 1999).

Lerman (2001) argumenterer for at det er behov for en helhetlig redegjørelse som gjør oss i stand til å undersøke hvordan sosiale krefter påvirker utviklingen av spesifikke former for matematisk tenking. Dette forslår han at vi kan oppnå ved å skape en helhetlig tilnærming som forener det sosiokulturelle med det diskursive, hvor en diskursiv tilnærming til læring vil kunne fylle ut den ensrettede påvirkningen som følger fra det sosiokulturelle perspektivet. I tillegg foreslår han at vi forkaster bruken av begrepet forståelse i forbindelse med forskning, og at vi heller bør rette fokuset mot en komplementær prosess mellom individ og kollektiv.

Som en motsetning til synet om at utviklingen av det kollektive går foran individet, vil det kommognitive rammeverket presenteres i neste delkapittel hvor tenking likestilles med mellommenneskelig kommunikasjon. Individet og det kollektive påvirker hverandre, slik som Lerman (2001) argumenterer for noen år før det kommognitive rammeverket introduseres i Sfard (2008). Det skal nevnes at det ikke er det kommognitive rammeverket han nødvendigvis har i tankene, ettersom han selv introduserer sin tilnærming til dette behovet i teoretiske perspektiv. Det som derimot er felles med det kommognitive rammeverket, er hvordan fokuset rettes mot den ensidige påvirkningen mellom individ og miljø fra det sosiokulturelle perspektivet, og hvordan begrepsbruken i forskningen bør revurderes i enkelte tilfeller.

2.2. Det kommognitive rammeverket

I dette delkapittelet vil det først presenteres en beskrivelse av det kommognitive rammeverket og hva som kjennetegner en matematisk diskurs, før vi ser nærmere på matematiske rutiner. Etter dette rettes fokuset mot de matematiske objektene og elevenes læringsprosess, før vi avslutningsvis ser nærmere på hvordan kommognitiv forskning kan utføres.

Arbeidet til Sfard (2008) tar utgangspunkt i Vygotskys påstand om at historisk etablerte kollektive aktiviteter kommer foran våre individuelle og unike menneskelige evner i utviklingen. Hun bygger også på arbeidet til Wittgenstein, ved å rette fokus mot en nødvendig endring i måten vi tenker og snakker. Noe av utgangspunktet for det kommognitive rammeverket er utfordringene som følger av måten forskere tenker og snakker om fenomener, hvor forskere bruker samme ord for samme fenomen på ulike måter. Sfard (2008) viser innledningsvis til at det var nysgjerrigheten rundt hvorfor elevenes feil ble utviklet likt og på en systematisk måte på tvers av både tid og sted som var motivasjonen til arbeidet som ledet til det kommognitive rammeverket. Dette fenomenet omtales tradisjonelt som *misoppfatninger*, og vil belyses nærmere i delkapittel 2.3.

Underveis i arbeidet rettet Sfard (2008) også fokuset mot hvordan teknologien gir oss komplekse gjengivelser av dagligdagse situasjoner og at forskningen mangler evnen til å fange opp kompleksiteten i menneskelige fenomen. En mulig årsak til denne utfordringen vises til som utilstrekkelige analytiske rammeverk som er i stand til å fange opp kompleksiteten i disse gjengivelsene. En liknende kritikk av tilstanden på utdanningsforskning kan også finnes igjen i arbeidet til Bauersfeld (1980) som peker på klasserommets kompleksitet med fokus på fire skjulte dimensjoner i klasserommet. Den sosiale dimensjonen ved matematisk kunnskapsutvikling, hvor mening dannes gjennom menneskelig samhandling og språkets funksjon, er en av de skjulte dimensjonene. Dette knyttes blant annet til forventninger og tolkninger, hvor vi responderer på vår egen tolkning av en annen persons kommunikative handling. Med andre ord er det ikke handlingen fra den andre personen vi responderer på, men vår egen tolkning av denne handlingen.

En av grunnene til den kritikkverdige tilstanden på dagens utdanningsforskning er også forskernes bruk av ord og begreper, slik jeg tolker Sfard (2008). Et uklart vokabular, hvor samme ord brukes på ulike måter av ulike forskere, kan være årsaken til at forskerne strever med å overkomme ulikheter og bygge videre på hverandres arbeid. En *definisjon* beskrives som hvordan et fenomen pares sammen med ord, og den avgjørelsen er opp til oss mennesker. Det er ikke noe som ligger i naturen (Sfard, 2008). Spesielt av interesse for denne studien er forskernes bruk av begreper som *misoppfatning* og *forståelse*.

Før vi går videre er det viktig å klargjøre definisjoner av noen nøkkelbegrep for den kommognitive forskeren. *Forskning* anses for å være en type kommunikasjon (Sfard, 2008). En *matematist* er den som deltar i en matematisk diskurs, mens *matematisering* vil beskrive selve deltakelsen i matematisk diskurs. Matematisering handler om å kommunisere om matematiske objekter (Heyd-Metzuyanim, 2015). Det er viktig å kunne skifte mellom sitt eget perspektiv som *insider* i diskursen, som er en erfaren deltaker i den matematiske diskursen, og perspektivet til en utenforstående, som en *outsider* i diskursen, for å kunne forstå elevenes aktiviteter (Lavie & Sfard, 2019; Sfard, 2008). Dersom en utelukkende ser gjennom perspektivet til en insider virker elevens handlinger overraskende og uventet. Perspektivet som en *outsider* er noe av kjernen i denne studien, hvor perspektivet til en erfaren deltaker i matematikk muligens hindrer oss i å se hva som er naturlig for en elev å gjøre. Gjennom denne studien vil det gjøres forsøk på å belyse nærmere på hva dette kan bety for lærer og elev i matematikkundervisningen.

2.2.1. Matematisk diskurs

Diskurs defineres som en gitt type kommunikasjon som skiller seg ut ved sitt repertoar av tillatte handlinger og den måten disse handlingene pares sammen med gitte responser (Sfard, 2008). Diskurs er ulike typer kommunikasjon som inkluderer og samler noen individer samtidig som andre ekskluderes, og er multimodal gjennom at kommunikasjonen skjer gjennom både ord, gester, konkrete objekter, bilder og mye mer (Lavie et al., 2019). Det vil si at det ikke utelukkende er verbalt språk som brukes som kommunikasjonsmiddel. Diskurs innebærer kommunikasjonshandlinger som utføres med seg selv eller andre (Heyd-Metzuyanim, 2015). Dersom en elev tar del i matematisk tenking, betyr dette at den tar del i den matematiske diskursen (Lavie & Sfard, 2019).

Det skilles mellom en formell skriftlig og en uformell hverdagsligslig diskurs, hvor den matematiske diskursen i skolen er eksempel på en type formell skriftlig diskurs (Sfard, 2008). En matematisk diskurs kjennetegnes av unike måter å snakke og gjøre ting på (Adler & Sfard, 2017) som kan identifiseres ved hjelp av fire egenskaper. Disse fire egenskapene beskrives under, og er bruken av matematiske ord, visuelle mediatorer, rutiner og godkjente narrativ (Sfard, 2008).

Visuelle mediatorer

Visuelle mediatorer kan være synlige objekter som opereres på som en del av kommunikasjonsprosessen, og brukes for å koordinere kommunikasjonen. En visuell mediator kan brukes til å identifisere objektet for kommunikasjonen. For matematikk innebærer dette ofte symbolske artefakter som er skapt spesifikt for matematisk kommunikasjon (Tabach & Nachlieli, 2016). Det kan være symboler eller konkreter som brukes til å regne eller telle (Lavie & Sfard, 2019). Visuelle mediatorer kan være *ikonisk* i form av tegning, graf eller diagram, *konkret* i form av bilder av eller fysisk tilgjengelige objekt som penger eller brikker, eller *symbolsk* i form av algebraiske symboler (Sfard, 2008).

I analysekapittelet vil vi se eksempler på lærerens og elevers bruk av både ikonisk visuell mediator, i form av en sirkel tegnet opp på tavle, og symbolsk visuell mediator, i form av brøkuttrykk og regnestykker som inkluderer brøk på symbolsk form.

Narrativ

Matematikk har en samling av godkjente narrativer (Heyd-Metzuyanim, 2015). Noen eksempel på godkjente narrativ fra matematikken er teorem, definisjonen og bevis (Sfard, 2008). Narrativ defineres som en sekvens av ytringer som formes som en beskrivelse av objekt, av relasjoner mellom objekt, eller prosesser med eller av objekt, og som kan merkes som sann eller usann ved hjelp av diskurs-spesifikke godkjenningsprosedyrer. Betingelser og kriterier for godkjenning kan variere. Godkjente narrativer er ofte merket som sann, og kan ta form som setninger, *syv er mer enn fem*, eller på symbolform, *7>5* (Lavie & Sfard, 2019).

Ordbruk

Matematikk har et unikt vokabular (Sfard, 2008). Dette kan involvere ord som også finnes i andre diskurser, men bruken av ordet vil skille seg ut (Lavie & Sfard, 2019). Noen nøkkelord for den matematiske diskursen kan for eksempel være tallord, begreper som handler om mengder, og ord som fungerer som signifiere for regneoperasjoner. I denne oppgaven er det valgt å bevare opprinnelig engelsk versjon av det kommognitive begrepet *signifier*, og begrepet vil beskrives i underkapittel 2.2.3. Ord som fungerer som signifiere for regneoperasjoner kan være *pluss* som signifier for addisjon eller *minus* for subtraksjon.

En halv er eksempel på ordbruk som elevene sannsynligvis er kjent med fra den hverdagslige diskursen før de møter dette i den matematiske diskursen. Bruken av en halv i matematikk, som nøyaktig, vil skille seg fra den bruken som ofte finnes i hverdagslig diskurs, hvor en halv kan vise til omtrent halvparten av noe. Med andre ord kan det være ord som er nye for eleven eller ord som en har møtt på i andre diskurser, men som brukes annerledes i den matematiske diskursen. Det er bruken av ordet som er avgjørende for om det teller som matematisk eller ei (Sfard, 2008).

Rutiner

En av egenskapene som avgjør om en diskurs er matematisk er bruken av matematiske rutiner (Sfard, 2008). Innenfor hver diskurs finnes visse regelmessige mønstre som opptrer, og det finnes diskursive mønstre som er spesifikke for den matematiske diskursen. Disse er det som innenfor det kommognitive rammeverket omtales som matematiske rutiner, og kan handle om telling eller bevisføring, eller produsere og godkjenne nye narrativer om matematiske objekter. Rutiner beskriver diskursens måte å gjøre ting på (Lavie & Sfard, 2019), og defineres som en samling med regler som beskriver repeterende diskursivt mønster hos matematisten. De kan beskrives som handlingsmønster for utførelse av matematiske oppgaver (Adler & Sfard, 2017), hvor en rutine eksempelvis kan beskrive en elevs fremgangsmåte i møte med en matematisk oppgave.

Det har blitt presentert nye definisjoner av rutinebegrepet i arbeidet som har fulgt etter boken fra Sfard (2008) om det kommognitive rammeverket. Rutiner har en sentral rolle i den kommognitive forskningen, og både den opprinnelige definisjonen (Sfard, 2008) sammen med påfølgende operasjonalisering og revidering av begrepet (Lavie et al., 2019) vil utdypes nærmere i neste underkapittel. Her vil også rutinens form som enten gjerning, ritual eller utforskning beskrives.

2.2.2. Nyere tilnærminger til matematiske rutiner

Lavie et al. (2019) beskriver både praktiske og diskursive rutiner som grunnleggende byggesteiner for alle menneskelige aktiviteter, og utvikling av rutiner forbedrer vår evne til å respondere effektivt på våre menneskelige behov. Kollektiv handling muliggjøres ved at deltakerne følger liknende rutiner og er i stand til å tilpasse egne handlinger til de handlingene som utføres av andre medlemmer i felleskapet. Det er gjennom å individualisere de rutinene som kollektivt praktiseres i det fellesskapet vi skal ta del av at vi blir fullstendige deltakere av dette fellesskapet, og gjennom denne individualiseringsprosessen vil det alltid følge individuelle variasjoner i rutinen.

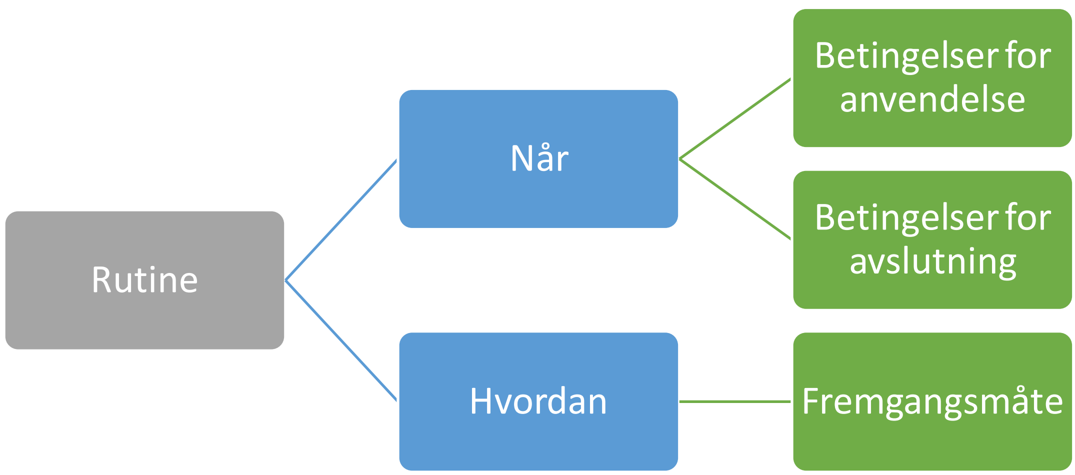
Rutiner ble definert som samling av metadiskursive regler i Sfard (2008), hvor en kan avgjøre typen rutine basert på hva som er målet for utførelsen. Senere har det blitt pekt på at denne definisjonen av rutine-begrepet ikke har vært operasjonalisert godt nok (Heyd-Metzuyanim & Graven, 2019). Den reviderte definisjonen, som presenteres i Lavie et al. (2019), er rutiner som oppgave-prosedyre par, og ved hjelp av konseptene *oppgavesituasjon, precedent* og *deritualisering* utgjør det et tydelig sett med redskaper for analyse av rutiner i undervisning og læring. De to beskrivelsene av en rutine vil vi se nærmere på i dette underkapittelet. I denne studien er det gjort valg om å bevare de engelske versjonene av nøkkelbegrep tilknyttet oppgavesituasjonen, som er *task-setter, precedent-search-space, precedent* og *precedent identifiers*, i mangel på tilfredsstillende norske oversettelser av begrepene i tråd med bruken innenfor det kommognitive rammeverket.

Nå vil vi først se nærmere på beskrivelsen av en rutine som en samling av metadiskursive regler (Sfard, 2008), og deretter på rutinebegrepet i forbindelse med oppgavesituasjon (Lavie et al., 2019).

Rutiner som samling av diskursive regler

Sfard (2008) beskriver hvordan diskursive regler er det som gjør kommunikasjon mulig, på samme måte som trafikkreglene er med på å gjøre det mulig for oss å komme oss dit vi skal. Diskursive regler kan deles inn i *objekt-nivå* regler, som handler om atferden til de matematiske objektene, og *metadiskursive* regler, som handler om avgrensninger i handlingene som er tilgjengelige for matematisten. Individuelle variasjoner følger av at de metadiskursive reglene som regel bare avgrenser hva som vil være passende handlinger i gitte situasjoner, og ikke nødvendigvis forteller matematisten hvor den skal. Eksempelvis kan en oppgave med ordlyden «Finn x» kreve at en er en *insider* i den matematiske diskursen, som kjenner de metadiskursive reglene, for å kunne avgjøre hvilke handlinger som er og ikke er passende i denne situasjonen (Sfard, 2008).

I følge Sfard (2008) er de metadiskursive reglene som utgjør en rutine satt sammen av diskursive regler som handler om *når* og *hvordan* rutinen kan brukes (Figur 3).



Figur 3 – Rutinens når og hvordan. Figur utviklet med utgangspunkt i beskrivelser fra Sfard (2008)

Når rutinen kan anvendes viser til de betingelsene matematisten ser etter som utgjør at en rutine kan tas i bruk, og når matematisten oppfatter signal om at den har fullført en rutine (Sfard, 2008). For noen elever kan avslutningen på å løse en likning være når de har fått løsningen uttrykt som $x = k$, hvor k er et vilkårlig tall. Andre elever kan derimot ha andre betingelser for når de har fullført prosedyren, som eksempelvis når de setter inn k i plassen for x i den opprinnelige likningen og får bekreftet at løsningen stemmer (Sfard, 2007).

Det kan identifiseres en type standard bruk av rutiner hos erfarne matematister, mens hos nybegynnere i diskursen kan det noen ganger dannes *ad hoc* mønster. Dette skjer når ikke noen standard-rutiner vekkes i situasjonen, og disse *ad hoc* mønstrene bygges på noen standard diskursive mønstre som er kjent for eleven fra før (Sfard, 2008). Hvordan denne prosessen foregår vil beskrivelsene av den reviderte definisjonen av rutinebegrepet (Lavie et al., 2019) bidra til å belyse nærmere.

Rutiner rammes inn under gitte diskurser, og kan på denne måten hindres i å være tilgjengelige for eleven i andre diskurser (Sfard, 2008). En kombinasjon av visse signaler vekker en gitt diskurs hos den enkelte elev, og innenfor samme elevgruppe kan det være individuelle variasjoner i hvordan elevene assosierer prosedyrer med oppgaver. For eksempel har mange personer vansker med å ta i bruk matematikk som de har lært på skolen i hverdagslige situasjoner. Som følge av disse variasjonene hos både ulike elever i samme situasjon, men også samme elev i ulike situasjoner, vekkes noen spørsmål som leder opp mot den reviderte definisjonen av en matematisk rutine. I møte med en ny situasjon, hvordan vet vi at en gitt handlingsmåte er passende respons på situasjonen? Hvordan avgjør eleven hvilke element av rutinen som bevares som de er, og hvilke som gjennomgår en endring? Disse spørsmålene følges videre opp i arbeidet til Lavie et al. (2019) og Lavie og Sfard (2019) i forbindelse med konseptet oppgavesituasjon som vi nå skal se nærmere på.

Rutiner som oppgave-prosedyre par

Rutiner handler om å forsøke å dra nytte av det som er gjort i lignende situasjoner før ved å identifisere tidligere hendelser, som omtales som *precedent* (Lavie & Sfard, 2019). Mekanismene bak elevenes avgjørelser i møte med nye situasjoner beskrives av Lavie et al. (2019) som at elevene gjenskaper eller kopierer det som ble gjort i tidligere situasjoner som vurderes som tilstrekkelig like som den nåværende situasjonen. Oppgave defineres som elevens tolkning av en gitt oppgave (Lavie et al., 2019), og oppgaven som utføres er produkt av elevens personlige tolkning av oppgavesituasjonen (Lavie & Sfard, 2019). Denne definisjonen gjør at rutiner ikke lenger er et tidsuavhengig konsept, hvor valg av rutine avhenger både av den aktuelle oppgavesituasjonen og det individet som tolker denne.

Oppgavesituasjonen skapes av den som gir oppgaven gjennom en *task-setter*, som fungerer som en invitasjon til en spesifikk type handling (Lavie et al., 2019). Oppgavesituasjonen definerer noen grenser, som gir et avgrenset utvalg av tidligere erfaringer som kan tas i bruk. Dette utvalget av erfaringer omtales som *precedent-search-space*, forkortet til *PSS* av Lavie et al. (2019). Vanligvis vil eleven søke etter tidligere erfaringer blant de hendelsene som tok sted i samme kontekst som den oppgavesituasjonen de nå står ovenfor. Å identifisere en *precedent* innebærer å identifisere tidligere oppgavesituasjoner som er tilsynelatende lik nok til å rettferdiggjøre en gjentakelse av det som ble gjort da. *Precedent identifiers* fungerer som signaler og viser til egenskapene ved den gitte oppgaven som eleven selv ser på som tilstrekkelig for å se en oppgavesituasjon fra fortiden som *precedent* (Lavie et al., 2019). Ulike elever kan bruke ulike *precedent identifiers* i møte med den samme oppgavesituasjonen. Videre vil vi se på de ulike typene rutiner som elevene kan ta i bruk i møte med oppgaver.

Gjerning, ritual og utforskning

Det finnes ulike typer rutiner som kan beskrives som prosess- eller produktorienterte (Lavie et al., 2019), og disse presenteres i tabell 1 under.

Tabell 1 – Ulike typer rutiner (Lavie et al., 2019, s. 166)

Rutine	**Prosessorientert**	**Produktorientert**
Praktisk	Ritual	Gjerning
Diskursiv	Ritual	Utforskende

En praktisk rutine resulterer i en endring eller omorganisering av fysiske objekter, mens en diskursiv rutine krever kommunikativ handling med seg selv eller andre (Lavie et al., 2019). Ritualer beskrives som prosessorientert gjennom at det er selve utførelsen som verdsettes, ikke utfallet av denne utførelsen. For eksempel utfører vi ritualer dersom vi føler at andre forventer at vi skal utføre handlingen (Sfard, 2008). Gjerninger og utforskende rutiner kan ses på som produksjonshandlinger. Gjerninger viser til en produksjon av eller endring av konkrete objekter, mens utforskende rutiner handler om å produsere eller godkjenne nye narrativer om matematiske objekter (Lavie et al., 2019).

Videre skal vi nå se nærmere på matematiske objekter, og hvordan disse objektene skapes gjennom kommunikasjon. Det finnes både enkle og sammensatte matematiske objekter, hvor sistnevnte skapes gjennom ulike diskursive prosesser (Sfard, 2008).

2.2.3. Matematiske objekter

Den matematiske diskursen handler om matematiske objekter, som beskrives som en diskursiv konstruksjon (Sfard, 2008). Tall er eksempel på en diskursiv konstruksjon, hvor tall er skapt gjennom og for kommunikasjon (Lavie & Sfard, 2019). Et matematisk objekt defineres som en matematisk signifier sammen med alle realiseringene av signfieren hos en person, og en signifier kan ha mange realiseringer. Realisering av en signifier er det objektet som identifiseres når den gitte signifieren brukes. Å ha et matematisk objekt som kalles brøk, betyr blant annet at eleven er i stand til å realisere dette ordet ved hjelp av andre matematiske ord og mediatorer (Adler & Sfard, 2017).

I følge Sfard (2008) er signifiere ord eller symboler som fungerer som substantiv i ytringer, hvor realiseringen av signifieren S viser til objekt som kan opereres på i forsøk på å skape eller godkjenne narrativ om S. Disse objektene kan være visuelt tilgjengelig både fysisk og mentalt for eleven. Realiseringer kan ta mange former, hvor samme signifier kan realiseres visuelt med bruk av ulik mediering. Innenfor den matematiske diskursen kan for eksempel en funksjon realiseres som en tabell, algebraisk formel og graf. Ledende realisering av en signifier kan opptre som objektet i seg selv for en nybegynner i den matematiske diskursen, hvor alle andre realiseringer oppfattes som objektets representasjoner (Sfard, 2008).

Sammensatte diskursive objekt skapes gjennom de diskursive prosessene saming, encapsulating eller tingliggjøring. En forklaring av disse gis under:

- *Saming* betyr at en gir en felles signifier, navn, til flere ting som til nå har vært vurdert som ulike ting. Brøk er eksempel på ett navn på alle symboler på formen $\frac{a}{b}$.
- *Encapsulating* betyr at en gir en signifier til en mengde av objekt, og bruker denne signifieren i entallsform når en snakker om en egenskap som gjelder for alle

medlemmene av mengden når de er tatt sammen. Eksempel kan være brøkuttrykket *tre firedeler*, hvor en samler tre deler som hver representerer en firedel.

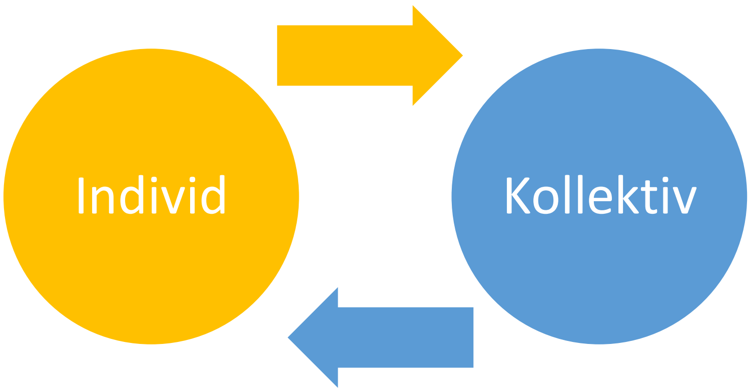
- *Tingliggjøring* betyr at narrativer om prosesser blir nå fortalt som tidløse historier om relasjoner mellom objekt. Det kan være å si at *jeg har ½ av den hele* istedenfor *jeg delte den hele i to og tok en av delene* (Sfard, 2008).

En objektivisert måte å snakke om tall innebærer at ekvivalente talluttrykk kan representere det samme tallet (Heyd-Metzuyanim, 2015), hvor tallet fungerer som et objekt i seg selv og siffersymbolene er representasjoner (Adler & Sfard, 2017). Objektivisering består av to prosesser som er tingliggjøring og fremmedgjøring (Sfard, 2008). Tingliggjøring handler om å gå fra å snakke om prosesser til å snakke om objekter. Tingliggjøring av telleprosessen vil resultere i det tallordet som er sist i tellerekken, og det nye objektet som introduseres er for eksempel tallordet fem. Fremmedgjøring handler om å fjerne mennesket som utfører handlingen, hvor tall kan opptre som noe som eksisterer uavhengig av mennesket. Et eksempel på fremmedgjøring kan være å si at tallet fem er større enn tre. Når tallet er tingliggjort og fremmedgjort opptrer det som om det har et liv på egenhånd, uavhengig av menneskelige prosesser (Adler & Sfard, 2017).

Elevers læring handler om å bli deltakere i den matematiske diskursen (Heyd-Metzuyanim, 2015), hvor deltakelse i en matematisk diskurs betyr at eleven forteller historier om matematiske objekt (Adler & Sfard, 2017). Uten objektivisering av samtale om brøk vil elevene bli værende i en rituell fremfor utforskende deltakelse i den matematiske diskursen. I møte med et nytt matematisk objekt vil elevene møte et paradoks. For å bli i stand til å forstå hva objektet handler om, må de først snakke om det foreløpig ukjente matematiske objektet. Dette fører til at elevene imiterer en mer erfaren deltakers diskurs, samtidig som de aktivt reflekterer over hvilke elementer som bevares og ikke i møte med kravene i en ny situasjon. Elevene blir kjent med gjøremåter og snakkemåter, og dermed tenking, som er typiske for den matematiske diskursen (Lavie & Sfard, 2019).

Tilfeller hvor nye matematiske objekt er involvert vil ikke eleven ha noe annet valg enn å delta i den ukjente diskursen på en rituell måte (Adler & Sfard, 2017), og en rituell deltakelse karakteriseres av en avhengighet av ytre godkjennelse av nytt narrativ (Heyd-Metzuyanim, 2015). Målet vil deretter være en gradvis overgang til utforskende deltakelse, og denne prosessen beskrives som deritualisering. Deritualisering beskriver utviklingen av en rutine fra ritual til utforskende (Lavie et al., 2019). Innledningsvis vil elevene delta rituelt, og deretter er det ønskelig med en gradvis deritualisering frem til rutinen er fullt ut utforskende. Situert læring betyr at elevens rutine ikke har gjennomgått tilstrekkelig deritualisering. Både ritualer og situert læring uunngåelige steg i elevers læring om nye matematiske objekt.

Kjernen i læringsprosessen er repetisjon, hvor eleven gjentar noe som den har sett bli gjort eller selv gjort tidligere i møte med en ny situasjon (Lavie et al., 2019). Individualisering handler om at kollektive aktiviteter blir en del av elevens eget handlingsrepertoar, og når det er individualisert vil det bli en del av elevens tenking (Lavie & Sfard, 2019). Individualiseringsprosessen starter med at elever eksponeres for andres samhandling innenfor den gitte diskursen. Deretter vil eleven delta med støtte fra en mer erfaren deltaker, frem til eleven til slutt er i stand til å delta i den matematiske diskursen selvstendig. Gradvis økende deltakelse i kollektive aktiviteter er en betingelse for læring, hvor elever individualiserer de kollektive handlingsmønstrene og deretter gir tilbake til det kollektive med sine individuelle variasjoner i gjøremåter, som illustreres i figur 4.



Figur 4 – Gjensidig påvirkning mellom det individuelle og det kollektive

Læring kan skje på objekt- og metanivå (Sfard, 2008). Læring på objektnivå handler om å utvide en eksisterende diskurs, ved å bli bedre kjent med eksisterende matematiske objekter (Tabach & Nachlieli, 2016). Dette kan innebære en utvidelse av ordbruk, rutiner, visuelle mediatorer og narrativer som er knyttet til det aktuelle objektet. Læring på metanivå handler om en endring i diskursens metaregler og kan følge av en kommognitiv konflikt. En kommognitiv konflikt følger av at motstridende narrativer kommer fra ulike diskurser, for eksempel diskurser som har ulik ordbruk eller ulike regler for godkjenning av narrativ. Metanivå læring kan være resultat av eksplisitt diskusjon om måten ord brukes i det matematiske fellesskapet, som vil være løsning av en *kommognitiv konflikt* (Sfard, 2008).

For å løse en kommognitiv konflikt som har sin opprinnelse i ulik ordbruk må en gjennom fire steg:

1. Deltakerne må anerkjenne at uenigheten stammer fra ulik bruk av ord.
2. Ulike deltakere må eksplisitt uttrykke sin måte å bruke ord på.
3. Deltakerne må lytte til andres bruk av ordet, og identifisere ulikhetene i ordbruken.
4. Deltakerne må enig om en felles akseptabel bruk, noe som bør være en *insider* i diskursen sin bruk av ordet (Tabach & Nachlieli, 2016).

2.2.4. Den kommognitive forskeren

I denne delen vil vi se nærmere på noen beskrivelser av den kommognitive forskeren, og hvordan kommognitiv forskning kan utføres. Matematisk læring beskrives som en endring i diskursen, som kan identifiseres ved å lete etter forandring i minst en av de fire egenskapene til den matematiske diskursen (Tabach & Nachlieli, 2016). Fokuset i kommognitiv forskning rettes mot hva elevene sier og gjør når de inviteres til å delta i den matematiske diskursen (Lavie & Sfard, 2019), og ett av målene er å gjøre de metadiskursive reglene som styrer en rutine eksplisitte (Sfard, 2008).

Kjernen i forskningsprosessen er å lete etter diskursive mønstre (Heyd-Metzuyanim, 2015), og Sfard (2008) anbefaler at forskere fokuserer på situasjoner hvor rutinebruken avviker fra det som oppfattes som standard bruk. Forskerens konstruksjon av elevens rutine er basert på de mønstre som forskeren er i stand til å oppdage i en elevs diskurs slik den er på det aktuelle tidspunktet i den gitte situasjonen. Diskursive regler er ikke noe deltakerne nødvendigvis har et bevisst forhold til, men vil være observatørens konstruksjon basert på de mønstre en er i stand til å oppdage i den samhandlingen som observeres. Deltakerne kan, gjennom å reflektere over egne handlinger, gi eksplisitt uttrykk for hvilke prinsipper som styrer ens handlinger, og dermed gi forskeren sterkere grunnlag for å tolke de diskursive reglene (Sfard, 2008).

Utvikling av en rutine innebærer at to element, hvor læring innebærer endringer i både prosedyren og elevens tolkning av oppgaven (Lavie et al., 2019), og begge vil være i kontinuerlig endring. Elevens respons på en oppgave knyttet til tall fra en voksen kan handle om noe annet enn tall (Lavie & Sfard, 2019). Denne muligheten er viktig å være bevisst over både som lærer og forsker, hvor vi må forsøke å unngå å se elevenes aktiviteter gjennom vår egen matematiske diskurs. Videre vil det nå beskrives noen endringer i elevens diskurs som kan fungere som et signal om deritualisering av en rutine.

Signal på deritualisering av en gitt rutine kan være ett skifte i fokus fra prosess til produkt hos eleven, fra utførelsen av en rutine til utfallet av rutinen (Lavie et al., 2019). Bevissthet om at hvert steg i utførelsen av oppgaven henger sammen med påfølgende steg, hvor utdata fra det ene steget fungerer som inndata i det neste steget. Innledningsvis vil eleven ikke kunne knytte sammenheng mellom stegene i utførelsen, og kun rigid imitere det som en har sett andre gjøre. En økning i mengden *precedents* som kvalifiseres som mulige i en oppgavesituasjon. Økende antall avgjørelser eleven er i stand til å ta selvstendig underveis i utførelsen av rutinen. Gradvis objektivisering av *precedents* som kvalifiserer, ved at de blir til abstrakte enheter gjennom narrativer om matematiske objekter. Til slutt vil eleven når den møter en oppgavesituasjon som involverer det aktuelle matematiske objektet, kunne hente frem den nødvendige prosedyren fra egenskapene til det matematiske objektet. Og til slutt den måten eleven begrunner eller redegjør for sine fremgangsmåter kan gi signal om tilstanden til rutinen, hvor elevens respons på en forespørsel om begrunnelse kan bekrefte om eleven har fokus på enten prosess eller produkt (Lavie et al., 2019).

2.3. Tidligere forskning

I dette delkapittelet vil det først presenteres et utvalg av forskning som er utført med utgangspunkt i det kommognitive rammeverket. Videre presenteres et utvalg av forskning på brøk og brøkregning, og elevenes vansker i forbindelse med brøk. I en del av forskningen om brøk vises det til begrep som forståelse og misoppfatning, og dette er begrep som kritiseres av Sfard (2008) som ikke godt nok operasjonaliserte til å være i fokus for forskning. Som følge av dette vil vi avslutningsvis se nærmere på disse begrepene fra det kommognitive perspektivet, og hvordan en kan forholde seg til de underliggende fenomenene som en kommognitiv forsker.

2.3.1. Studier med utgangspunkt i det kommognitive rammeverket

Blant eksisterende kommognitiv forskning er fokuset rettet mot hvordan lærerens diskurs påvirker elevenes deltakelse (Adler & Sfard, 2017), elevers feilsvar og løsninger i møte med lineære likninger (Roberts & Le Roux, 2019), læring som endring i ordbruk hos matematisten (Berger, 2013) og endringer i metadiskursive regler som følger av introduksjonen av en ny diskurs (Sfard, 2007). Roberts og Le Roux (2019) beskriver hvordan elevdiskursen er en rik informasjonskilde for læreren, og dermed viktigheten av den typen analyse og kunnskap som det kommognitive rammeverket legger til rette for. Berger (2013) trekker frem en interessant observasjon om at studentene i sin studie godkjenner narrativer om at det kun er penn og papir som er gyldige redskaper i løsningen av matematiske oppgaver, hvor digitale verktøy som Geogebra kun brukes til å verifisere løsningen. I sin studie belyser Sfard (2007) hvordan elevene hindres i å gjennomgå nødvendige endringer i diskursen som følge av at endringen i metadiskursive regler ikke gjøres eksplisitt for elevene. Lavie et al. (2019) fokuserer på videreutviklingen av rutinebegrepet, som er beskrevet i underkapittel 2.2.2. I tillegg vil innholdet fra noen studier beskrives mer utfyllende under, som følge av at disse belyser noen elementer ved det kommognitive rammeverket som står sentralt for arbeidet med denne masteroppgaven.

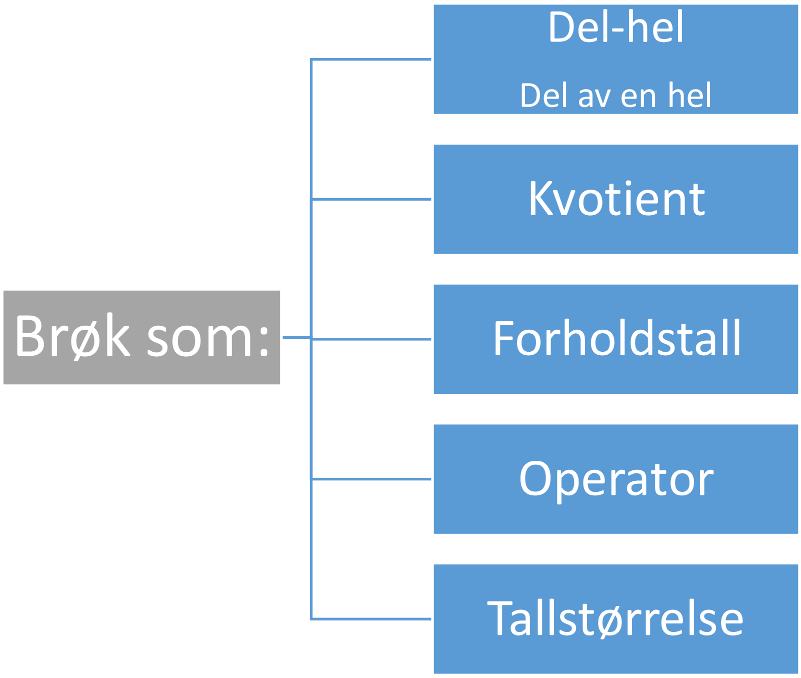
Lavie og Sfard (2019) undersøker utviklingen av barns talldiskurs ved å analysere barnet Milos respons på det de kaller «WiTM»-spørsmål, som står for «*Where is there more*», over en periode på 18 måneder. De finner blant annet at det eksisterer to uavhengige diskurser, *quantitative-non-numerical* og *numerical-non-quantitative* diskurs, parallelt over tid før en begynnende sammenheng utvikles hos barnet. Gjennom analysen beskriver de utviklingen som leder til at Milo skaper forbindelser som gjør at flere rutiner kan vurderes som ekvivalente i møte med WiTM-spørsmål, som for eksempel telling eller oppstilling i rekker, i den forstand at de leder til samme resultat. Dette beskrives som vertikal forbindelse, mellom ulike steg i en rutine, eller horisontal forbindelse, hvor barnet skaper en forbindelse mellom ulike rutiner som kan utføres for samme oppgave. Forfatterne beskrives at det er viktig at eleven blir klar over at det kan finnes flere mulige riktige responser til den samme oppgavesituasjonen.

Heyd-Metzuyanim (2015) har studert utviklingen av en utvalgt elevs vansker i møte med brøk, ved å sette søkelyset på hvordan interaksjonen mellom identifisering og matematisering fungerer i den matematiske læringsprosessen. I denne studien skilles det mellom identifiserende og matematiske narrativer som godkjennes av eleven. Ifølge Heyd-Metzuyanim (2015), så var elevens motiv for aktiviteten å lage narrativer om seg selv, ikke matematikken. Den aktuelle eleven hadde vansker med å se at ulike representasjonsformer av samme brøk er realiseringer av det samme diskursive objektet. Eleven anerkjente for eksempel at både mengde og sirkel var realiseringer av tre firedeler, men manglet derimot *saming* av disse, som er nødvendig steg mot objektivisering av tre firedeler. Heyd-Metzuyanim (2015) trekker avslutningsvis frem at hun selv lærte at som en lærer må hun legge mye mer vekt på å høre elevens måte å se verden.

2.3.2. Brøk

Brøk er et viktig og utfordrende emne i skolematematikken, og det pekes spesielt på brøkregning som utfordring (D. W. Braithwaite, Leib, Siegler & McMullen, 2019; D. W. Braithwaite, Tian & Siegler, 2018). Å lære om heltall er fundamentalt annerledes enn å lære om andre typer tall, som rasjonale tall, og elevenes eksisterende kunnskap om naturlige tall kan fungere som en barriere for læring om brøk (Deringöl, 2019; Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Elevene opplever vansker med å tenke på brøk som et eget tall, og dette skaper en god del utfordringer som vi videre skal se litt nærmere på.

Noen av de vanskene som elevene opplever skyldes et begrenset syn på brøk. Når elevene skal gi mening til brøk involverer det koordinering av flere brøkrelaterte og matematiske deler, hvor brøk på symbolsk form representerer mange aspekt på en og samme tid. Det vises til at elevene må bli i stand til å koordinere flersidige aspekter av brøkrelatert kunnskap, og at overdrevet fokus på bare ett aspekt vil gjøre enkelte sider av brøkbegrepet utfordrende (Tsai & Li, 2017). Kompleksiteten i brøkbegrepet vises til ved blant annet fem aspekter som spiller en rolle i elevens forståelse av brøk (Se figur 5) (Bjerke et al., 2012).



Figur 5 – Fem aspekter ved brøk. Figur laget med utgangspunkt i beskrivelser fra Bjerke et al. (2012).

Del-hel aspektet får mer fokus enn andre tolkninger av brøk (Siegler et al., 2011), selv om det er bare en av mange egenskaper ved brøk. Del-hel kan være et av flere viktige element i forståelsen av brøk (Hansen et al., 2015). Dersom elevene kun møter del-hel aspektet ved brøk vil det være vanskelig for dem å forstå hvordan en kan finne en brøkdel av en brøk (Tsai & Li, 2017), eller uekte brøk (Siegler et al., 2011), senere i læringsprosessen. Det er også viktig at elevene blir i stand til å konvertere fra en representasjon av brøk til en annen (Tsai & Li, 2017).

Innenfor noe av forskningen vises det til at både del-hel og tallstørrelse er viktige aspekter i forståelse av brøk (Hansen et al., 2015), mens andre fokuserer på brøk som tallstørrelse som kan plasseres på en tallinje (Siegler & Pyke, 2013). Dette følger av elevene opplever utfordringer med å skape sammenheng mellom brøk skrevet på symbolsk form og den tallstørrelsen brøken representerer (Siegler, Fazio, Bailey & Zhou, 2013). Brøkens tallstørrelse har betydning for både forståelse av brøk og brøkregning hos elevene. Det er funnet at kunnskap om tallstørrelse korrelerer med aritmetikk, hvor kjennskap til størrelse kan bidra til at eleven lettere kan avvise feil svar eller strategi (Siegler & Lortie-Forgues, 2014). Med kunnskap om tallstørrelse kan elevene lettere avvise feil prosedyre (Siegler & Lortie-Forgues, 2014; Siegler & Pyke, 2013), og prosedyrene for brøkregning huskes riktig i større grad av de elevene som forstår størrelsene (Siegler et al., 2011). Både symbolsk og ikke-symbolsk representasjon av tallstørrelse er viktig for læring om brøk (Hansen et al., 2015). Deringöl (2019) påpeker også at det er viktig at elevene blir i stand til å skape sterke forbindelser mellom ulike uttrykksformer for brøk. Samtidig går elevenes prosess med å skape koblinger mellom symbolske og ikke-symbolske tallstørrelser sakte (Siegler & Lortie-Forgues, 2014).

X. Zhang, Clements og Ellerton (2015) argumenterer for en flersidig tilnærming til brøk som konsept, og kritiserer et for ensidig fokus på arealmodell. De trekker også frem at det er viktig å legge vekt på sammenheng og overganger mellom representasjonsformer for brøk. Når en elev kan integrere flere representasjoner i samme abstrakte konstruksjon, reflekterer dette en konseptuell forståelse. I sin studie finner blant annet Deringöl (2019) at lærere og lærerstudenter oppgir at elevene ikke ser relasjonen mellom teller og nevner, elevene blander sammen teller og nevner, og at dette indikerer at elevene har manglende forståelse for teller og nevner. D. Braithwaite og Siegler (2018) trekker frem at likeverdige brøker med ulik tallstørrelse på heltallskomponentene i teller og nevner ikke representeres som likeverdige av elever. Det vil si at $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{4}$ vurderes som to ulike tall av elevene.

2.3.3. Ost er ost, og tall er tall. Eller er de det?

Tallforståelse involverer ulike typer tall, og i møte med brøk bruker elevene blant annet eksisterende kunnskap fra naturlige tall (Deringöl, 2019). Elevenes overgeneralisering fører til at de anvender egenskaper som de er kjent med fra heltall i møtet med brøk, noe som vil kunne gi utfordringer med å forstå teller og nevner (Tsai & Li, 2017). Når elevene skal lære brøk må de lære å skille mellom egenskapene ved naturlige tall og rasjonale tall, og at egenskaper ved heltall ikke automatisk er gjeldende for alle tall (Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Siegler & Lortie-Forgues, 2014). Elevene må lære om egenskapene som er felles og ikke er felles for de ulike typene tall (Hansen et al., 2015).

Den felles egenskapen som gjelder for alle reelle tall er at de har tallmessig størrelse som kan plasseres på en tallinje (Siegler et al., 2013). Likeverdig brøk er et eksempel på hvordan rasjonale tall er ulikt fra heltall (Hansen et al., 2015), hvor heltall har en-til-en relasjon mellom symbol og tallstørrelse (Siegler & Lortie-Forgues, 2014), mens for brøk finnes det uendelig med muligheter. Ut over dette må elevene lære at egenskaper ved heltall ikke nødvendigvis er gyldige for tall generelt, og møtet med rasjonale tall kan være det første steget i denne prosessen (Siegler & Pyke, 2013). Dette pekes på som en kritisk prosess i utviklingen av elevenes kunnskap om tall, og helt opp til universitetsnivå kan en finne studenter som blander egenskaper til heltall og brøk (Siegler et al., 2011).

Siegler et al. (2011) beskriver at elevene må lære forskjellen på en *karakteristisk* egenskap og en *definerende* egenskap ved ulike typer tall. Definerende egenskaper som elevene feilaktig forventer at skal gjelde for alle tall kan være at hvert tall har en unik etterfølger, at mengder kan telles ved å assosiere tall til objekt en-til-en, at siste tallord i tellerekke representerer kardinaliteten til mengden som ble talt, at de er tellbare, at det finnes et endelig antall tall innenfor et gitt intervall, og at det kan uttrykkes entydig med bruk av enkelt symbol. Når det gjelder egenskaper som påvirker regning med tall vil det handle om en antakelse om at tallenes verdi vil være lik eller øke for multiplikasjon eller addisjon, mens for subtraksjon eller divisjon vil tallenes verdi synke eller være lik. (Siegler et al., 2011)

2.3.4. Hva vet vi om elevenes læring og strategibruk i forbindelse med addisjon med brøk?

Siegler et al. (2013) trekker frem fire årsaker til elevenes vansker i møtet med brøk:

1. Elevene antar at egenskaper ved heltall gjelder for alle tall.
2. Elevene forvirrer relasjon mellom ulike brøkregningsprosedyrer. For eksempel addisjon for lik kontra ulik nevner.
3. Elevene vet ikke når og hvorfor fellesnevnere brukes.
4. Elevene ser ofte på brøk kun som en del av en hel.

Elevenes læring av prosedyrer relatert til brøk læres ofte ved memorering uten en såkalt *konseptuell forståelse* (Siegler & Lortie-Forgues, 2014). For heltall utvikles konseptuell forståelse før regning, mens dette ikke er tilfellet for brøk. Forståelse for brøkregning avhenger av at elevene lærer at egenskaper fra heltall ikke gjelder for alle tall. Det finnes individuelle forskjeller i brøkregning, og samme mønster for strategibruk kan ha ulik opprinnelse (D. W. Braithwaite et al., 2019). Det vises til at addisjon av brøk med ulik nevner er spesielt utfordrende for elevene (Deringöl, 2019). Dette kan skyldes at addisjon av brøk er mer kompleks enn for heltall, fordi det kan kreve at elevene er i stand til å utføre en omforming av brøkene slik at de oppnår fellesnevner (Tsai & Li, 2017).

I studien til D. W. Braithwaite et al. (2018) så de på elevenes konseptuelle forståelse av brøkaddisjon ved å la elevene estimere tallstørrelse for hvert ledd, og deretter estimere størrelse for summen. Selv om noen av elevene hadde riktig estimat for størrelse av leddene hver for seg, ble det ikke riktig estimat for summen. Dette vises til som en indikasjon om dårlig forståelse av brøkaddisjon. For å forbedre dette resultatet foreslås det at elevene må lære det konseptuelle grunnlaget for addisjon på nytt i konteksten med brøk, til tross for at de allerede kan dette i kontekst med heltall. Dette beskrives som at elevene må få forståelse av hva brøkaddisjon gjør.

Elevene blander heltall- og brøkprosedyrer, og ulike elementer fra ulike brøkprosedyrer. Forståelse av brøkregning er avhengig av at elevene skiller mellom egenskaper ved heltall og brøk, samt kan skille mellom strategier for de ulike typene tall (Siegler & Pyke, 2013). Det trekkes frem to vanlige feil bruk av strategi hos elevene, som kalles *separate heltall-strategi* og *feil regneoperasjon-strategi* (D. W. Braithwaite et al., 2019; Siegler et al., 2013). Førstnevnte innebærer at elevene ser heltallskomponentene i brøk hver for seg, mens sistnevnte innebærer at elevene benytter en regnestrategi som ville vært riktig for en annen regneoperasjon med brøk. Ettersom analysen i denne oppgaven baseres på elevers møte med addisjon av brøk med ulik nevner, vektlegges *separate heltall-strategi* videre. Det er ikke sannsynlig at de aktuelle elevene har noe særlig erfaring med regneoperasjonene subtraksjon, multiplikasjon og divisjon i sammenheng med brøk på dette stadiet.

Feilaktige analogier om regnearter, fra erfaringer med heltall, påvirker læring om brøk, som kan resultere i utførelsen av separat addisjon av teller og nevner (Siegler et al., 2011). Ved undersøkelse av elevenes strategibruk i brøkregning ble det funnet at heltallstrategien oftere blir brukt for oppgaver som har ulike nevnere enn for de som har like nevnere (Siegler & Pyke, 2013). Når elevene løste parvis like oppgaver fant Siegler og Pyke (2013) at i 65% av tilfellene brukte elevene en riktig og en feil strategi. En variabel strategibruk hos eleven, som ved å utføre en riktig og en feil strategi på parvis like oppgaver, viser manglende konseptuell forståelse (Siegler et al., 2013). Det belyses at bruk av feil strategi ikke nødvendigvis betyr at eleven tror strategien er riktig, men kan følge av at eleven ikke klarer å huske en riktig strategi (Siegler & Pyke, 2013).

Ved estimat av tallmessig størrelse for brøk, var det 1/3 av elevene som baserte estimat av brøkens størrelse på teller eller nevner alene (Siegler & Pyke, 2013). Dette overlapper med regnestrategier som behandler teller og nevner separat, og det store fokuset på brøkens heltallkomponenter kommer fra elevenes eksisterende kunnskap om heltall (D. Braithwaite & Siegler, 2018). Bruken av regnestrategier for addisjon av brøk opptrer forskjellig i møte med like og ulike nevnere, hvor feil bruk av *separate heltall*-strategi skjer oftere for oppgaver med ulik nevner enn det gjør på oppgaver med lik nevner (D. W. Braithwaite et al., 2019; Siegler et al., 2011). Denne feilen resulterer primært fra overgeneraliseringer.

Elevenes forståelse for likeverdig brøk er essensielt for regning med brøk, og manglende forståelse av likeverdig brøk kan knyttes til elevenes regnefeil i brøk (D. Braithwaite & Siegler, 2018). Addisjon av brøk med ulik nevner krever kjennskap til både fellesnevner og likeverdig brøk, og uten forståelse av likeverdig brøk gir ikke regneprosedyrer for brøk mening for elevene (D. Braithwaite & Siegler, 2018). Samtidig er likeverdig brøk i konflikt med elevens eksisterende kunnskap om tall, hvor hvert tall kan representeres på en entydig måte (Tsai & Li, 2017). Dette byr på utfordringer, som at elevene ser på $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{4}$ som to ulike tall. Bjerke et al. (2012) finner i sin studie at til tross for indikasjoner om at elevene kan likeverdig brøk, ved at elevene kan utvide og forkorte brøk, tar ikke elevene i bruk denne kunnskapen ved brøkregning.

Misoppfatninger

En stor utfordring for elevene i møte med brøk er at de behandler teller og nevner som separate heltall (Deringöl, 2019; Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Dette beskrives som en misoppfatning i form av heltallstenking (Bjerke et al., 2012). Denne misoppfatningen følger av at elevene har en tendens til å fokusere på heltallskomponentene i brøk fremfor å se brøk som en egen tallenhet (D. Braithwaite & Siegler, 2018). Elevene overfører kunnskap om egenskaper ved heltall til brøk, og utfører regneoperasjoner på teller og nevner som om de var egne heltall uten å ta hensyn til forholdet mellom dem. Heltallstenkningen beskrives som et stort hinder for elevenes forståelse av brøk. Elever som har større forståelse for heltall har lettere for å overkomme heltallstenkingen (Hansen et al., 2015). Kunnskap om tallmessig størrelse for en brøk er en indikasjon om at eleven har kommet forbi heltallstenkning (Siegler & Pyke, 2013).

Som vi har sett, gjennom forskningen som er presentert, vises det til at elevene i stor grad trekker fra på forståelsen av heltall når de skal gi mening til brøk, og dette gir opprinnelse til noen såkalte *misoppfatninger* (Siegler et al., 2011). Misoppfatninger får skylden for elevenes feilsvar i forbindelse med brøk, og en del av misoppfatningene kommer fra overgeneraliseringer fra heltall til brøk. Dette beskrives som at elevene overfører egenskaper ved heltall til brøk.

Som beskrevet tidligere må elevene forstå at egenskaper ved heltall ikke er egenskaper for tall generelt, og det samme gjelder regler for heltall og brøk. Elevene forventer at de samme reglene gjelder for brøk som for heltall, og bruker disse reglene feilaktig i konteksten med brøk (Hansen et al., 2015). Dette beskrives som en generalisering fra naturlige tall, eller heltall, til brøk (Deringöl, 2019). Elevene ender opp med å behandle brøk på samme måte som naturlige tall (D. Braithwaite & Siegler, 2018; Siegler & Pyke, 2013).

Som en motsetning trekker Siegler et al. (2011) frem at heltallstenkingen bare er en del av utfordringene med elevenes forståelse av brøkregning. De viser til funn som indikerer at regnefeil ofte reflekterer forvirring om riktig strategi hos eleven, sammen med manglende avgrensning av størrelsen som svaret skal ha. Det trekkes frem at svak forståelse har blitt tilskrevet systematisk misoppfatning i tidligere forskning, spesielt heltallstenking. De finner en større variasjon av elevenes bruk av prosedyrer enn det som kan tilskrives denne misoppfatningen.

En annen type misoppfatning som presenteres i forskningen er en som omhandler effektretningen av regneoperasjoner, hvor elevene har et syn om at effektretningen på svaret er lik for regnearten i forbindelse med alle typer tall (Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Dette viser til hvilken effektretning operasjonen medfører for tallene som regnes med, og en oppfatning av dette kan være at addisjon alltid gjør tallene enten større eller lik. Siegler et al. (2011) finner blant annet at prinsippet om effektretning ved addisjon brytes i 39% av svartilfellene. Elevenes forståelse av effektretning er svakere for brøk enn det er for heltall, noe som følger av at prinsippet brytes ofte for brøk og det sjelden brytes for heltall. Dette tolkes som indikasjon om en manglende konseptuell forståelse av brøkaddisjon hos eleven (D. W. Braithwaite et al., 2018). Det må fokuseres mer på elevenes forståelse av effektretningen for regneoperasjoner (D. W. Braithwaite et al., 2019).

2.3.5. Kommognitivt perspektiv

Store deler av forskningen som er presentert i delkapitlene ovenfor baseres på begrep som forståelse og misoppfatninger. I et kommognitivt perspektiv vil derimot disse begrepene beskrives som lite gunstige i forskningssammenheng (Sfard, 2008). Fenomenet misoppfatninger beskrives av Sfard (2008) som noe som oppstår i møtet mellom gammel og ny diskurs, og for å kunne komme videre og bygge på hverandres arbeid kreves det at denne typen begrepsbruk *av-objektiviseres*. Dette gjøres ved å gi operasjonaliserte definisjoner av nøkkelbegrep for forskningen. I litteraturen som er gjennomgått har det ikke vært mulig å identifisere en operasjonalisert definisjon av «*Whole number bias*» (D. Braithwaite & Siegler, 2018) eller *heltallstenking* (Bjerke et al., 2012). Ved en kommognitiv begrepsbruk kan eksempelvis misoppfatninger i møte med brøk kunne beskrives som at elevenes forsøk på å bevare etablerte narrativer fra heltallsdiskursen hindrer deltakelse i den nye diskursen rasjonale tall.

Forståelse er et begrep som er diskutert mye i kommognitiv litteratur, i retning av hvor nyttig denne typen begrepsbruk er i forbindelse med forskning, samtidig som opplevelsen av forståelse ikke fornektes (Lavie et al., 2019). Dette begrunnes med utgangspunkt i at forståelse er et fenomen som ikke er tilgjengelig for en utenforstående, og at det finnes avvik mellom 1. og 3.personsfortellinger om en persons forståelse. Dette medfører at forståelse ikke kan defineres på en operasjonalisert måte. I Lavie et al. (2019) unngås bruken av det som tradisjonelt beskrives som *grad av forståelse*, og de foreslår at denne ordbruken kan erstattes av rituell og utforskende deltakelse i tråd med det kommognitive rammeverket.

En fordel med denne endringen i ordbruk hos forskere kan være at fokuset flyttes over på egenskaper ved elevens handling, fremfor forskerens forsøk på å si noe objektivt om en persons indre opplevelser (Lavie et al., 2019). Videre utdypes dette av Heyd-Metzuyanim (2015), som tar for seg *procedural* og *conceptual* forståelse, og erstatter disse med beskrivelser av henholdsvis syntaktisk og objektivisert mediering. Den syntaktiske medieringen handler om at elevene ikke knytter noen forbindelse mellom de ulike stegene den utfører, noe som henger sammen med den beskrivelsen av forståelse som *procedural*. Det er først når eleven har objektivisert brøk at eleven er i stand til en objektivisert mediering, hvor de ulike visuelle mediatorene som opereres på knyttes i sammenheng med det matematiske objektet.

2.4. Oppsummering

I dette kapittelet har vi gått gjennom det kommognitive rammeverket, og noen sentrale element er de fire egenskapene til den matematiske diskursen (Sfard, 2008). Disse egenskapene vil videre danne utgangspunktet for analysen i kapittel 4.

Det trekkes frem at begrep som konseptuell læring og forståelse er ikke operasjonalisert godt nok, og en parallell til dette fra det kommognitive rammeverket er å fokusere på den typen mediering elevene bruker når de matematiserer (Heyd-Metzuyanim, 2015). Det meste av forskningen er samstemte om at elevene henter fra kunnskap og erfaringer med heltall i møtet med brøk. Det som derimot er vektlagt i liten grad er hvordan og hvorfor dette skjer, og dette er noe den kommognitive tilnærmingen i analysen forhåpentligvis kan belyse. Gjennom å veksle mellom perspektivet til en outsider og en insider i den matematiske diskursen (Sfard, 2008) vil vi muligens få innsikt i de underliggende prosessene bak elevenes strategier og fremgangsmåter. Fra Siegler et al. (2011) ble det trukket frem at heltallstenkingen bare er en del av problemet med elevenes vansker i møte med brøk, og som følge av dette er virkeligheten muligens mer nyansert enn det som kan beskrives i form av systematiske misoppfatninger. Mye av det som foregår kan muligens forklares med elevenes motstand mot tap av eksisterende narrativer om heltall.

Gjennomgangen av eksisterende forskning på brøk og brøkregning viser at store deler av forskningen tyr til beskrivelser av elevenes fremgangsmåter som ikke følger den standardiserte bruken som misoppfatning. Sfard (2008) peker derimot på misoppfatning som noe som følger av måten forskere snakker om, og at forskningen trenger av-objektivisering. I tillegg identifiseres det noen beskrivelser av ulike strategier som elevene tar i bruk, men det rettes mindre fokus mot å forklare hvordan disse strategiene utvikles. På bakgrunn av dette vil denne studien forsøke å belyse hvordan elevenes strategier utvikles. I neste kapittel vil metodiske valg og refleksjoner for gjennomføringen av denne studien presenteres.

3. Metode

I dette kapittelet presenteres datainnsamling, etiske vurderinger, metodiske valg, analyseprosessen, og refleksjoner knyttet til de valgene som er tatt for denne studien. Studien vil være en kvalitativ diskursanalyse (Thagaard, 2018) med utgangspunkt i det kommognitive rammeverket. Det empiriske materialet som er tilgjengelig for analyse vil være transkripsjoner av lyd- og videoopptak fra undervisning og elevintervju, i tillegg til visuelt innhold i fra videoopptak som vil illustreres ved bruk av bilder eller beskrivelser.

Gjennom arbeidet i Bergheim (2019) fikk jeg personlig erfaring med hva det kommognitive perspektivet kunne belyse, og dette gjorde at jeg ønsket å studere elevenes diskurser i møte med nye og ukjente situasjoner enda grundigere i mitt masterprosjekt. Fremgangsmåten for den kommognitive analysen i denne studien er i utgangspunktet inspirert av arbeidet til Sfard (2007), og deretter videreutviklet basert på kommognitiv forskning og utviklingen av rammeverket som har skjedd i ettertid. Med utgangspunkt i den sentrale rollen kommunikasjon har i alle menneskelige aktiviteter, er kommunikasjonen det som er i fokus for en kommognitiv analyse (Lavie et al., 2019). Diskursen er det som utgjør forskningsobjektet, og rutiner beskrives som analyseenheten. Lavie et al. (2019) løfter frem at rutine er spesielt egnet som analyseenhet ettersom det er observerbart på både individuelt og sosialt nivå i aktiviteten.

Forskningsspørsmålene som avgrenser fokuset for analysen i denne studien er:

S1: *Hvordan kan elevenes tidligere erfaringer innenfor matematikk påvirke elevenes strategier og løsninger i møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*
S2: *Hvordan kan det kommognitive perspektivet bidra til å få innsikt i elevenes møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*

For å svare på forskningsspørsmålene har jeg i hovedsak valgt å observere undervisning ved bruk av lyd- og videoopptak. S1 følger av feltnotater under direkte observasjon, og senere gjennomgang av opptak, av to tilsynelatende ulike strategier fra to elever. Dette leder videre til nye spørsmål, som bidrar til utviklingen av S2. Kommer strategiene fra samme plass? Hva utgjør forskjellen? For å svare på forskningsspørsmålene vil noen utvalgte elevers diskurs analyseres med utgangspunkt i det kommognitive rammeverket, og for å kunne utføre denne analysen kreves det at elevene til en viss grad utdyper sin strategibruk, og eventuelt begrunner valgene sine.

For å kunne svare på problemstillingen for dette masterprosjektet følger det naturlig for meg å ta elevperspektivet i analysen, hvor lærerens diskurs vil belyses for å gi innsyn i kontekstuelle faktorer for elevene. Det er viktig å rette fokuset mot elevenes egne beskrivelser av fremgangsmåte, ettersom det er her vi kan finne indikasjoner på for eksempel det som Sfard (2008) beskriver som kommunikative brudd. En innledende hypotese for denne studien er at elevene forsøker å bevare noen element fra heltallsdiskursen i møtet med brøk. De videre undersøkelsene vil forsøke å belyse nærmere hva disse elementene er, og dette kan forhåpentligvis bidra til at jeg kan tilby en mulig forklaring på hvorfor det skjer på denne måten.

3.1. Datainnsamling

Datamaterialet som ligger til grunnlag for analysen i denne studien er en del av datamaterialet fra et større samarbeidsprosjekt, *MERG19*, som ble utført vårsemesteret 2019. Det består av lyd- og videoopptak fra undervisning og intervju av både lærer og elever. Innsamling av data ble utført i samarbeid mellom studenter og faglærere ved kurset MUT303, *Undervisningskvalitet i matematikk*. Kurset er en del av fagprofilen matematikkdidaktikk for masterstudiet i utdanningsvitenskap ved Universitetet i Stavanger, og rekruttering av deltakere ble utført av ansvarlige faglærere. Læreren og elevene som tok del i prosjektet er fra en grunnskole i Rogaland. Over en periode på to uker ble det samlet inn video- og lyd-opptak fra all matematikkundervisning i to klasser på 6.trinn, samt et intervju med lærer og to intervjuer med elever. Vi følger samme lærer som underviser i disse klassene der det er henholdsvis 28 og 25 elever. Totalt ble det samlet inn data fra 21 undervisningstimer, à 45 minutt, og tre intervjuer.

Innsamlingen av data ble utført som ikke-deltakende observasjon med en åpen tilnærming (Thagaard, 2018). Observasjoner ble utført som ikke-deltakende for å unngå å påvirke den naturlige diskursen i størst mulig grad, og denne avgjørelsen følger av at fokuset for prosjektet var å kunne studere matematikkundervisning i grunnskolen. For hver undervisningstime var det to studenter og en faglærer til stede som observerte samt samlet inn opptak, hvor hver student hadde ansvar for ett videokamera. Kamera-1 ble plassert bak i klasserommet for å fange opp lærer og innhold fra tavlen, og kamera-2 ble plassert i front i klasserommet for å fange opp flest mulig av elevene. Lærer bar lydopptaker med mikrofon på seg gjennom all undervisningstid. Etter opptak var samlet inn, ble disse fordelt mellom studenter for transkripsjon.

Intervjuene ble gjennomført i løpet av den andre uka i perioden for datainnsamling og var lagt opp som halvstrukturerte (Postholm, 2011) eller delvis strukturerte (Thagaard, 2018). Denne tilnærmingen til intervju beskrives som den mest brukte innen kvalitativ forskning, og innebærer at tema for intervjuspørsmålene er fastsatt på forhånd, men at det er åpent for rekkefølge og å følge opp tema som tas opp av informanten underveis i løpet av intervjuene. I forkant av intervjuene ble det utarbeidet intervjuguider av prosjektgruppen i fellesskap, intervjuguide for elevintervju finnes i vedlegg 1. Utvalgte elever til elevintervju ble foreslått av læreren på skolen på bakgrunn av sin kjennskap til elevene. Innholdet i elevintervjuene var spørsmål om matematikk, undervisningsmetode, begrep og utvalgte oppgaver basert på undervisningen de hadde hatt i løpet av perioden. For denne studien har jeg valgt å rette fokuset mot elevenes svar på noen utvalgte spørsmål fra elevintervjuene som er relevante for elevenes arbeid med brøk.

I etterkant av perioden for datainnsamling ble opptak fordelt mellom studentene i prosjektgruppen for transkripsjon med utgangspunkt i en felles transkripsjonsnøkkel. Hver undervisningsøkt skulle først transkriberes av en student, og i etterkant kontrolleres av en annen student for å utføre en kvalitetssjekk av transkripsjonene. Ved behov ble lydopptak brukt som støtte for å fange opp deler av den verbale kommunikasjonen som ikke var fanget opp tilfredsstillende av mikrofon på kamera. Prosjektgruppen ble enig i fellesskap om at ved videre bruk av transkripsjoner i individuelle oppgaver skulle den enkelte student i tillegg kontrollere transkripsjonene opp mot opptak før bruk.

Transkripsjonsnøkkel som er brukt og struktur for presentasjon av transkripsjoner for denne studien beskrives nærmere under delkapittel 3.3. og 3.4. Videre vil jeg nå vise til den delen av datamaterialet som skal benyttes til analysen av elevenes diskurs i denne studien, og dette er dag 2 i datainnsamlingsperioden.

3.1.1. Dag 2 i datainnsamlingsperioden

For denne studien har jeg valgt å rette fokus mot en dag, dette er dag 2 i perioden for datainnsamling. Denne avgrensningen gjør det mulig å utføre en dyptgående analyse av noen utvalgte episoder, hvor vi får gått i dybden av både innholdet i undervisningen og hvordan noen utvalgte elever ser ut til å påvirkes av ulike betingelser i situasjonen når de former strategiene sine. På den aktuelle dagen er det en gruppe sammensatt av elever fra to ulike klasser som er sammen i ett klasserom. Dette følger av at en dag hver uke ble elevene satt sammen i tre grupper av elever på tvers av begge klassene, og de hadde 3 påfølgende undervisningstimer i ett fag. Undervisningen startet fra oppstart av skoledagen, og elevene ha totalt tre undervisningsøkter á 45 minutter, avbrutt av et friminutt á 15 minutter mellom 1. og 2.undervisningsøkt. Som illustrert i tabell 2 hadde hver av gruppene matematikk hver tredje uke. Det betyr at elevene i en gruppe som har tre timer med matematikk i uke 1, har matematikk i denne gruppen neste gang i uke 4.

Tabell 2 – Inndeling i grupper på tvers av 2 klasser

	Fag 1	**Fag 2**	**Fag 3**
Uke 1	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3
Uke 2	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 1
Uke 3	Gruppe 3	Gruppe 1	Gruppe 2

Den aktuelle undervisningsdagen som er valgt ut var jeg selv til stede som observatør i klasserommet samtidig som vi utførte opptak. På denne ukedagen har elevene andre tema enn i den ordinære undervisningen som de tar del i når de er samlet i sin egen klasse, og tema for dag 2 var brøkaddisjon. På grunn av oppdelingen av klassene var både gruppesammensetningen og det matematiske temaet på disse dagene annerledes enn i de resterende timene, og jeg valgte å avgrense fokuset for analysen til brøkregning. I resterende dager med matematikkundervisning i perioden med datainnsamling jobber disse elevene med tema geometri i sine respektive klasser. Ettersom elevens diskurs er situasjonsavhengig (Sfard, 2008), vil det kunne være store skiller mellom elevens diskurs i denne timen og en time hvor eleven er del av sin ordinære klasse og arbeider med geometri. Som følge av dette var det mulig å utføre en dyptgående studie av brøk og brøkregning for elever ved å velge episoder fra kun noen få elever på en undervisningsdag med temaet brøkaddisjon.

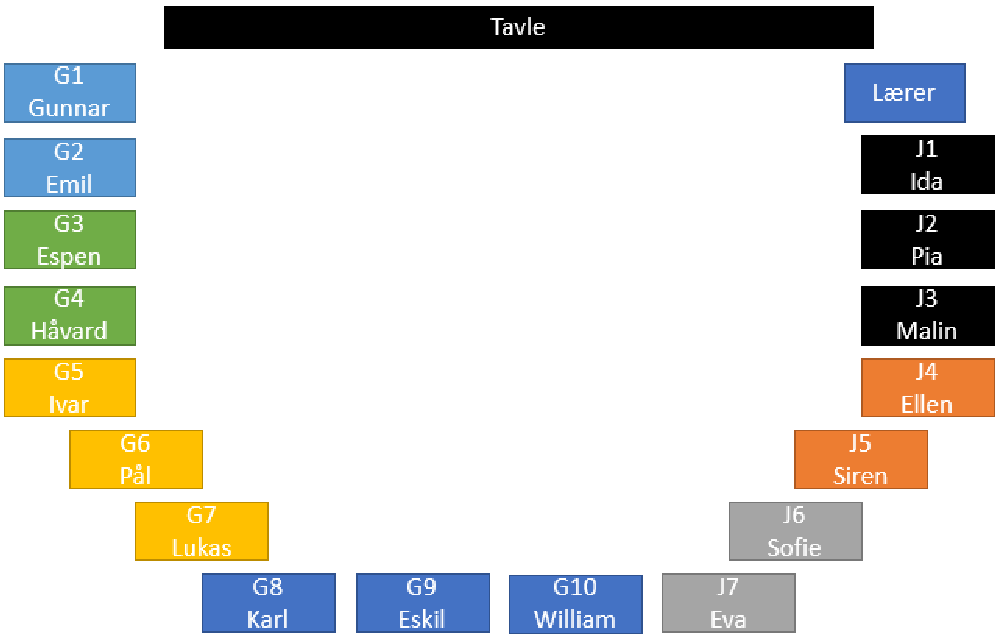
Under observasjonen ble jeg oppmerksom på noen av de ulike strategiene og svarene som elevene kom med, som jeg ønsket å se nærmere på i ettertid. En av oppgavene som var del av undervisningen ble inkludert i intervjuguiden. Jeg var selv ansvarlig for transkripsjon av denne undervisningen, og dette ga meg nok en mulighet til å bli bedre kjent med innholdet. I den gruppen som er til stede i undervisningen dag 2 er det totalt 17 elever, hvor det er 7 jenter og 10 gutter. En oppsummering av undervisningsøkten følger i tabell 3 under. Tidsbruk for hver sekvens som er angitt er rundet av til nærmeste hele minutt, og ytringer som tilhører hver sekvens er oppgitt i form av nummerering. Strukturen for nummerering av ytringer vil beskrives nærmere i delkapittel 3.4.

Tabell 3 – Oversikt over undervisningen

Uke 1		
Sekvens	**Ytringer**	**Innhold**
Time 1		
1 *5 min*	3-001 til 3-056	Oppstart
2 *7 min*	3-057 til 3-116	Oppgave 1 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{5}$ Helklassediskusjon, elevene svarer på hva tre ulike brøkdeler er i antall minutter av en time. Løsninger gis som 20, 10 og 12 minutter.
3 *15 min*	3-117 til 3-255	Oppgave 2 Elevene snakker sammen gruppevis. Lærer får svar på oppgave i plenum. Elevene er med på å diskutere løsningene som presenteres.
4 *15 min*	3-256 til 3-412	Oppgave 3 Elevene snakker sammen gruppevis. Lærer får svar på oppgave i plenum. Elevene er med på å diskutere løsningene som presenteres.

Klassen tar friminutt		
Time 2		
5 *10 min*	4-001 til 4-110	Fortsettelse av oppgave 3, en ny løsning presenteres og diskusjon av løsninger fortsetter.
6	Fra 4-111	Gruppearbeid med «valpesnop-oppgave»

Fokuset for analysen er sekvens 2 til 5, og etter klassen er ferdig med denne delen av undervisningen går de over til en gruppeoppgave som blir jobbet med over en lenger periode. Ved oppstart av timen setter elevene seg i en halvsirkel foran tavlen, som illustrert i figur 6 under, hvor de oppgitte navnene på elevene er fiktive. Den delen av undervisningen som er i fokus følger en IGP-struktur, Individuelt-Gruppe-Plenum, hvor elevene jobber vekselvis i plenum og små samtalegrupper. For hver oppgave som presenteres av læreren får elevene i underkant av ett minutt til å tenke individuelt, før de skal snakke sammen i gruppene og bli enig. Hvor lenge dette pågår varierer, og lærer ber om signal fra elevene med bruk av tommel for å se når alle er klar før plenumdelen starter. Etter dette ber læreren utvalgte elever presentere sin løsning på vegne av sin gruppe. Gruppeinndeling baseres på hvordan elevene selv har valgt å plassere seg i oppstarten av undervisningen. I figur 6 er de elevene som samarbeider markert med samme farge.



Figur 6 – Oversikt over lærer og elevers plassering i klasserommet

Gruppene er gitt navn som JG og GG for henholdsvis jentegruppe og guttegruppe, og en oversikt disse over gruppene presenteres i tabell 4 under.

Tabell 4 – Samarbeidsgrupper for sekvens 2, 3, 4 og 5

Gruppenavn	Deltakere
JG-a	Ida, Pia og Malin
JG-b	Ellen og Siren
JG-c	Sofie og Eva
GG-a	Karl, Eskil og William
GG-b	Ivar, Pål og Lukas
GG-c	Espen og Håvard
GG-d	Gunnar og Emil

Utvalget av elever for analysen i denne studien består av to jenter, Malin og Siren. Utvalgsmetoden kan beskrives som strategisk teoretisk utvelgelse (Thagaard, 2018), som styres av relevant teori, eller informasjonsorientert utvelgelse (Flyvbjerg, 2006). I denne studien innebærer dette at elevene er representative for noen av de vanskene som elever opplever i møte med brøk, som beskrevet i delkapittel 2.3. Et eksempel på dette er at de utvalgte elevene ser ut til å fokusere på heltallskomponentene i brøk. I tillegg er utvalget styrt av det teoretiske rammeverket, i forhold til å sørge for at det finnes tilstrekkelig datamateriale tilgjengelig for å få innsikt i elevenes individuelle diskurs. For å kunne utføre en omfattende analyse er utvalget begrenset til to elever, og noe av bakgrunnen for dette belyses nærmere i delkapittel 3.3.

3.2. Etiske vurderinger

Det empiriske materialet i prosjektet inneholder identifiserende informasjon, og er derfor meldepliktig til NSD (2016). Før prosjektet startet opp ble datainnsamlingen godkjent av NSD (Se vedlegg 2), og alle opptak ble lagret hos en faglærer hvor hver enkelt student hentet ut nødvendig materiale på kryptert minnepinne etter behov. Det ble også hentet inn informert samtykke fra lærer og foresatte til alle elever i forkant (Se vedlegg 3 og 4), hvor deltakelse er frivillig og deltakerne står fritt til å trekke seg fra prosjektet. For å ivareta anonymiteten til den enkelte informant er transkripsjoner normert til bokmål, navn på skole, sted og lærers navn fjernes, og navn på elever er fiktive (Thagaard, 2018).

De tolkningene som kommer frem gjennom denne studien er forskerens egne tolkninger, basert på det som kan observeres i tilgjengelig datamateriale. Potensielle konsekvenser av deltakelse er redusert ved at fremstillingen av empirisk materiale i forbindelse med mine tolkninger og funn forsøkes å bli utført på en måte som gjør at både lærer og elev fremstilles i et best mulig lys. Dette gjøres blant annet ved å beskrive utdypende kontekstuelle faktorer som påvirker, og uten å være overdreven kritisk som forsker. Sistnevnte ivaretas av meg ved grundige refleksjoner over både elevens og lærerens perspektiv i forhold til mitt kommognitive perspektiv (Sfard, 2008) som forsker, samt at jeg vektlegger forskjellen mellom hva som kan stilles av forventninger til en lærer i undervisningssituasjonen i forhold til den dyptgående analysen i denne studien. Som eksempel er funnene fra den analysen som utføres i denne oppgaven langt utenfor det en selv som lærer i et klasserom har både tid og anledning til å oppdage. Mine funn i dette forskningsarbeidet produseres gjennom flere gjennomganger av de samme ytringene for å oppdage nye sider ved situasjonen. Videre vil jeg nå beskrive litt mer om mine metodiske valg i forbindelse med studien.

3.3. Metodiske valg

Allerede under observasjonen ble jeg, som tidligere nevnt, oppmerksom på noen av de elevsvarene som senere ble utgangspunkt for analysen i dette arbeidet. Jeg tok feltnotater av oppgaven og løsningen som ble presentert, og sørget for at vi fikk inkludert denne oppgaven i elevintervjuene som skulle uføres, for å se hvordan flere elever responderer på den samme oppgaven.

Fokuset rettes mot kommunikasjonen i det kommognitive rammeverket, og denne tilnærmingen gir mulighet til å undersøke elevens individuelle diskurs. Min tilnærming kan beskrives som en empiribasert teori (Thagaard, 2018) ved at jeg forsøker å belyse nye sider ved eksisterende oppfatninger av fenomener, og på den måten bidra til utviklingen av teori gjennom en systematisk analyse av data. Studien utføres som en case-studie, med fokus på dyptgående analyser av få enheter. Case-studier beskrives som analyse av «*fenomener i sin naturlige sammenheng*» (Thagaard, 2018, s. 51), og i denne studien handler de ulike casene om elevenes strategivalg i møte med brøkaddisjon. I hovedsak baserer analysen seg på transkriberte utdrag fra video- og lydopptak av undervisningen. Tilleggsdata brukes for å beskrive kontekst for analyse, som for eksempel bilder av det som er synlig på tavle og utdrag fra elevintervju. Dette brukes for å kunne gi leseren innsyn i hvilke påvirkningsfaktorer som eleven kan ha møtt.

3.3.1. Episoder

Her vil inndelingen av datamaterialet i episoder beskrives nærmere, og en episode inneholder alle ytringer fra en elev som kan knyttes til samme oppgave. Ytringer defineres som en språklig kommunikativ handling sammensatt av ord og symboler (Sfard, 2008). Gjennom ytringer produseres språklige konstruksjoner som kalles setninger, og setningen utgjør det produktet av de kommunikative handlingene som kan registreres. For eksempel vil det for Malin bety to episoder, en der Malin presenterer sin løsning på oppgave 2 og en for oppgave 3. Alle typer tilleggsdata som kan belyse Malin sin løsning på oppgave 2 vil tilhøre denne episoden selv om det foregår på et annet tidspunkt i undervisningen.

Jeg har valgt å skille ut noen episoder som jeg mener kan belyse elevens bruk av heltallskomponenter når de møter brøkaddisjon. Episodene kan være representative for det som kan kalles *heltallstenking* (Bjerke et al., 2012), samtidig som de to elevene i første omgang ser ut til å ha ulike fremgangsmåter. Kriterier for å velge ut episoder var først og fremst at innholdet var fanget opp tilfredsstillende av kamera- eller lydopptaker for å kunne bruke det videre i analysen av elevens diskurs. Andre kriterier som spilte inn var blant annet at det følger en dialog sentrert rundt elevenes løsning, som gjør at vi får tilgang til elevens diskurs gjennom begrunnelser eller forklaring av fremgangsmåte.

For å beskrive kriterier for utvelging av episoder kan jeg illustrere med et eksempel. Det var noen tilfeller hvor enkelte elever kort presenterte sitt svar og sin fremgangsmåte gjennom 2-3 setninger, og det var ingen oppfølgende spørsmål eller kommentarer fra verken lærer eller elever. I de fleste tilfellene gjelder dette elever som har benyttet standardstrategi for å løse oppgaven, ved utvidelse til fellesnevner, eller en bruk av «minutt-strategien» som ble presentert av læreren i sekvens 2. En videre gjennomgang av samtalene som foregikk i små grupper viste at læreren ikke var innom noen av disse elevene, slik at vi ikke fikk innsyn i prosessen med å skape strategi og løsning hos disse elevene. Dette medførte at disse elevløsningene ble ekskludert fra potensielle episoder, da det var for lite informasjon om elevens tenking tilgjengelig i den observerbare kommunikasjonen fra opptakene.

Når omfang av innhold i en episode ble satt som kriterium for valg av å inkludere episoden kunne jeg systematisk gå gjennom de episodene som tilsynelatende inneholdt mest informasjon fra den aktuelle eleven, og dermed kartlegge hvor mye innsikt det var mulig å få. Dette beskrives nærmere i neste delkapittel. Enkelte utdrag fra elevintervjuene om temaet brøk tas også med der dette er aktuelt og kan berike analysen av elevenes diskurs. Etter å ha valgt ut aktuelle episoder gikk jeg gjennom innholdet i disse flere ganger, både for å transkribere og å få ny innsikt i datamaterialet. For hver gang jeg gikk over video- og lydopptak oppdaget jeg nye element ved situasjonen, blant annet ble jeg oppmerksom på ordbruk som gjentok seg eller hvordan regnestykkene ble stilt opp tavle. Under vil jeg beskrive mer knyttet til min bruk av transkripsjoner i denne oppgaven.

3.3.2. Bruk av transkripsjoner

Alle ytringer er valgt å normere til bokmål og navn som brukes er fiktive, av hensyn til informantenes anonymitet. For bruk av transkripsjoner i min oppgave vil elevenes ytringer være de som er i hovedfokus. Basert på dette har jeg valgt å redigere bort delene av lange ytringer fra læreren og de elevene som ikke er relevant for analysen av Malin og Siren. Dette er for eksempel gjentatt bruk av *eh* eller andre kommentarer som jeg vurderer at ikke vil være relevant for analysen av de utvalgte elevene. For de to utvalgte elevene som er i fokus har jeg derimot bevart alle ordlyder, og pauser. Disse elementene i elevens ytringer kan muligens indikere nøling, usikkerhet eller at de leter etter ord, og det vil kunne være relevant for analysen. Ved behov har jeg tilføyd klammeparenteser som inneholder kommentarer med mer informasjon, og der dette er gjort er det for at leseren skal få bedre utgangspunkt for å kunne forstå sammenhengen i kommunikasjonen. Transkripsjonsnøkkel som er brukt presenteres i tabell 5 under.

Tabell 5 - Transkripsjonsnøkkel

Symbol	**Betydning**
…	En del av ytringen som ikke er relevant er fjernet av meg.
-	Kort pause, på under 1 sekund
--	Lang pause, på over 1 sekund
[tekst]	Mine kommentarer, for å oppklare sammenheng ved behov
:	Forlengelse av ord. Følger etter bokstav hvor denne trekkes ut.
tekst~ ~tekst	Indikerer overtakelse. Når en person overtar og fortsetter uten å snakke uten at det er pause imellom
tekst	Lav prat
<u>tekst</u>	Indikerer at ord eller setninger blir forsterket.

{ukjent}	Indikerer ukjent innhold, et eller flere ord, som ikke var mulig å høre fra opptak.

Videre vil analyseprosessen beskrives, og hvordan jeg har gått frem gjennom ulike trinn i denne prosessen.

3.4. Analyse

I denne delen vil analysen presenteres i form av trinn, og i den forbindelse presiseres det at analyseprosessen har vært preget av en dynamisk veksling mellom ulike trinn. Det har blant annet vært en kontinuerlig prosess frem og tilbake mellom isolerte ytringer, og situasjonen rundt ytringene. Gjennom analysen vil vi følge to ulike elever gjennom oppgavesituasjonene de møter, og disse elevene har fått fiktive navn som er Malin og Siren. Den aktuelle dagen med undervisning ble valgt på bakgrunn av den innholdsrike dialogen som foregår i hel klasse i undervisningen, og de ulike elevsvarene som kommer frem i løpet av timen. Innholdet i datamaterialet for denne dagen legger til rette for å kunne utføre en dyptgående analyse av elevenes individuelle diskurser.

3.4.1. Trinn 1 – Helhetlig oversikt

I starten av analyseprosessen gikk jeg over hele datamaterialet for å få en oversikt over innholdet og identifisere interessante episoder som kunne være grunnlag for analyse av elevens individuelle diskurs. For å gjøre dette gikk jeg gjennom eksisterende transkripsjoner av undervisningen for å identifisere noen interessante episoder som involverer elevstrategier og samtaler rundt disse. På denne måten bidrar transkripsjonene med å få en innsikt i materialet før jeg videre velger å avgrense fokuset mot enkelte dager. I første omgang ble det valgt ut en dag fra hver av de 2 ukene, som utgjør 6 undervisningsøkter totalt. Begge dagene innebar samme undervisningstema, men med 2 ulike elevgrupper. Jeg identifiserte utdrag som var av interesse for analysen, og fikk tilgang til opptak av disse dagene for å gå gjennom lyd- og videoopptak. Gruppesammensetningen og det matematiske temaet på disse dagene var annerledes enn i de resterende timene, og jeg valgte derfor å ta ett dypdykk i brøkregning som undervisningstema for elevene. For intervju rettet jeg fokus mot innholdet som følger fra spørsmål om brøk.

3.4.2. Trinn 2 – Avgrensninger av datamaterialet

Etter jeg hadde fått opptak og gikk gjennom disse grundigere, kartla jeg de ulike oppgavene og sekvensene for hver av dagene. Jeg endte opp med å velge ut en av de to dagene som skulle brukes videre i analysen. Oppsummert kan innholdet i uke 2 beskrives som at det var mye av elevsvar og strategibruk sentrert rundt lærerens introduksjon til timen i form av minutt av en time, som gjorde diskusjonene blant deltakerne mindre innholdsrike. I uke 1 var det større omfang av ytringer konsentrert rundt elevene sine strategier og løsninger, som gjorde utgangspunktet for analysen av denne dagen innholdsmessig rikere. I tillegg til dette var undervisningen i uke 2 strukturert litt annerledes med bruk av andre oppgaver enn de elevene møtte i uke 1. Sammenligning av elevenes strategier brukt i møte med oppgave på tvers av de to elevgruppene ble med andre ord utfordrende. Basert på dette kunne jeg trekke ut interessante episoder fra uke 1 som ble sentrert rundt den oppgaven de var en del av, og oppgave 2 og 3 var i første omgang en overordnet inndeling av episodene. Med utgangspunkt i denne inndelingen startet jeg transkribering og koding i Nvivo, som beskrives videre i neste trinn.

3.4.3. Trinn 3 – Koding og kategorisering

Kategorisering av datamaterialet, i programvaren Nvivo, startet med utgangspunkt i inndeling av episodene under oppgave 1, 2 og 3. Etter hvert ble det gjort en ny inndeling av episoder basert på de presenterte elevløsningene for hver oppgave. For eksempel er en elevløsning Malin sin løsning på oppgave 2. Når datamaterialet var fordelt på denne måten var det mulig å se at det var i forbindelse med oppgave 2 og 3 at elevene deltok mest i diskusjoner sentrert rundt løsninger som var presentert. Oppgave 1 bar stort sett preg av at elevene kun presenterte sin løsning uten videre diskusjon som følger etter, og som følge av det ble det valgt å fokusere på oppgave 2 og 3 videre i arbeidet.

Etter dette gikk jeg gjennom alt som var knyttet til en elevløsning om gangen, og transkriberte dette. Gjennom dette arbeidet fikk jeg en oversikt over hvilken løsning det var mest informasjon tilgjengelig i datamaterialet, og kunne utvikle koder basert på datamaterialet. Ettersom samme elev deltok i ulike sekvenser, ble det først valgt en innledende kategorisering knyttet til elevenes fiktive navn for å få en helhetlig oversikt over deltakelsen til hver enkelt elev i undervisningen. Jeg så en klar tendens til at det var mest grunnlag for å analysere diskursen til Siren og Malin, siden deres løsninger så ut til å bli fulgt opp av innholdsrike diskusjoner i klasserommet. Et søk i transkripsjonen for hele undervisningstimen på elevens navn viste følgende frekvens (Tabell 6):

Tabell 6 – Søketreff på elevnavn i transkripsjon av hele undervisningen

Hvem	*Antall søketreff*
Siren	41
Malin	11

Basert på disse søketreffene gikk jeg videre gjennom transkripsjonene, og fant andre ytringer fra elevene utover innholdet i de utvalgte episodene som kunne bidra til å belyse elevens diskurs. En del av søketreffene på Siren i transkripsjonene kunne forklares med lærerens ytringer når hun snakket om eller til Siren. De aktuelle ytringene fra hver elev som danner grunnlaget for analysen presenteres i kapittel 4.

Med utgangspunkt i kategorier basert på elevenes navn utviklet jeg videre koder for ordbruk hos de enkelte elevene, både for å sammenligne mellom oppgavene hos samme elev, men også mellom elever. Denne typen koding tar utgangspunkt i teori, fra det kommognitive rammeverket (Sfard, 2008), mens den foregående kategoriseringen i episoder tar utgangspunkt i det empiriske materialet (Thagaard, 2018). De ulike matematiske og brøkrelaterte ordene som eleven brukte ble samlet under koden med navnet *ordbruk*, og denne ble plassert under hver elev i inndelingen basert på elevenes navn. Etter flere gjennomganger av både opptak, transkripsjoner og kategorier ble det identifisert noen sentrale trekk ved hver enkelt elevs deltakelse som åpnet for nye spørsmål. Blant annet var det Siren sin bruk av ordene *det hele* og *en hel*, og Malin sin bruk av heltallsord og manglende bruk av brøkrelaterte ord. Underveis i arbeidet la jeg merke til en spesifikk forskjell i ordbruk hos elevene som jeg ikke var klar over før gjentatte gjennomganger av opptak og transkripsjoner, og dette var forskjellen på eksempelvis en halv og en todel, eller en seksdel og en sjettedel. Dette ble fulgt videre opp av en undersøkelse av sammenhengen for hver type ord, og noe av den mulige bakgrunnen for denne ordbruken hos elevene vil presenteres i analysen.

Underveis i arbeidet merket jeg meg også at læreren satt sammen med noen av de utvalgte elevene i drøftingen før de la frem løsninger i plenum. Ved gjennomgang av opptakene viste det seg at det kun er Malin sin gruppe av de to utvalgte elevene, Malin og Siren, som læreren er innom. Jeg gikk derfor på ny inn i video- og lydopptak, kartla når læreren snakket med gruppen til Malin og transkriberte lydopptakene fra disse samtalene. Dette kan gi et større grunnlag for å uttale seg om hvordan elevene begrunnet sine fremgangsmåter, og vil belyses under analysen av Malin. Etter arbeidet med å fordele datamaterialet som beskrevet ovenfor, var tiden inne for å gjøre forsøk på å se dette i lys av helheten igjen. Dette arbeidet beskrives nærmere under trinn 4.

3.4.4. Trinn 4 – Kartlegge elevens diskurs og tolke

Etter en grundig gjennomgang av innholdet i episodene, ble opptakene av undervisningen gått gjennom flere ganger. Som en del av dette arbeidet ble de utvalgte elevløsningene isolert og deretter ble relevante deler fra resterende undervisning inkludert, da med hensyn til innhold som kunne bidra til å belyse nærmere hvordan disse løsningene ble skapt. Innholdet på tavlen fra de ulike episodene blir inkludert gjennom bruk av bilder, og i tillegg ble undervisningsinnholdet før og etter en diskusjon eller løsning inkludert. Dette ble gjort for å kunne se de isolerte ytringene fra hver elev i en større kontekst, og finne spor etter opprinnelsen eller medvirkende årsaker til utviklingen av strategien som ble brukt.

Hver elev sine ytringer ble deretter sammenfattet, og knyttet til episoder for oppgave 2 og oppgave 3. Ettersom elevenes løsninger og ytringer påvirkes kontinuerlig av den kollektive diskursen i klasserommet, ble også den videre arbeidsprosessen preget av dynamiske skifter. Når noe ble tydeliggjort for min tolkning av Malin, kunne dette også prege tolkningen av Siren og dermed være aktuelt for hennes diskurs, og omvendt. Hver ytring, elev og oppgave ble systematisk gjennomgått etter indikasjoner på hver av de fire egenskapene ved en matematisk diskurs (Sfard, 2008), samt en utvidelse av rutinebegrepet til å inkludere oppgavesituasjonen (Lavie et al., 2019). Rutiner vil med andre ord analyseres med utgangspunkt i begge definisjoner som er presentert i teorikapittelet.

Etter innholdet i transkripsjonene er fordelt, starter arbeidet med analysen av løsningene og strategiene i form av å tolke hva som skjer for hver elev i tilknytning til hver oppgave. I neste underkapittel vil jeg belyse hvordan analysen av elevens diskurs med utgangspunkt i egenskapene videre kan belyse ulike sider av diskursen. Som støtte til tolkninger som presenteres gjennom analysen blir også utdrag fra elevintervju brukt der dette kan belyse ulike sider av tolkningen.

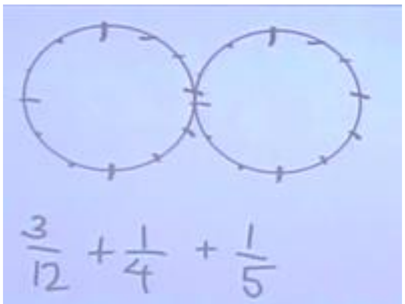
3.4.5. Trinn 5 – Beskrive analyse og funn

Siste steg i analyseprosessen handler om å beskrive analysen og resultater. Som utgangspunkt for beskrivelsen av analyse er elevenes ytringer i tilknytning til hver oppgave, som følges av videre utdyping av funn for hver egenskap. For hver elev presenteres det først en samlet oversikt over ytringene som hører til den aktuelle oppgaven som analyseres, og deretter viser jeg til nummererte ytringer der hvor det er en konkret ytring som ligger til grunn for tolkningen som presenteres. Avslutningsvis i analysekapittelet presenteres det en sammenfattet tolkning av elevenes individuelle diskurs.

I analysen går vi først gjennom visuell mediator, narrativer og ordbruk. For narrativer vil kun de identifiserte narrativene som er vurdert som relevante for å gi innsyn i elevens møte med brøkaddisjon presenteres. Noen av de narrativene som går igjen i diskursen til begge elevene vil nummereres, for å senere kunne utføre en sammenligning og følge disse opp videre i diskusjonskapittelet. Ettersom en rutine er definert som oppgave-prosedyre-par (Lavie et al., 2019), vil elevens rutine beskrives gjennom 3 trinn i analysen. Først vil vi se på den prosedyren som elevene beskriver, og deretter ser vi nærmere på oppgavesituasjonen med elevens tolkning av oppgaven de står ovenfor, i forbindelse med hver av de to oppgavene. Til slutt vil det presenteres en tolkning av hver elev i forhold til hvilken type rutine de utfører i møte med de to oppgavene i oppsummeringen av analysen, før det følger en videre diskusjon av begge elevene i kapittel 5.

For å illustrere hvordan presentasjon av analysen i kapittel 4 vil se ut, presenteres det en ytring fra Malin (3-328) og innholdet fra tavlen (Figur 7) som eksempel på innhold i de ulike egenskapene ved den matematiske diskursen. Med utgangspunkt i ytringen fra Malin under, kan innholdet leses av i følgende rekkefølge: Kolonne 1 viser til nummerering av ytringen, kolonne 2 viser til hvem som snakker og kolonne 3 inneholder den verbale ytringen. Ytringene er nummerert etter følgende system: Første siffer viser til hvor i datamaterialet undervisningstimen befinner seg. Den første timen får nummer 1, og nummer 3 viser da til tredje observerte undervisningstime med den aktuelle læreren. Tallene som følger, er ytringenes nummerering i den rekkefølgen de kommer i for aktuell undervisningsøkt. 3-328 vil for eksempel vise til undervisningsøkt 3 for hele perioden, og ytring nummer 328 for denne økten. Elevintervju vises til som E1 og E2, etterfulgt av nummer på ytring, hvor *E2-328* for eksempel betyr 2. elevintervju og ytring 328 i dette elevintervjuet.

3-328	Malin	Ehm - vi vet ikke helt om førtito tolvdeler er svar fordi tolv det er tolv deler [på figuren som er synlig på tavle]



Figur 7 – Innhold på tavlen i forbindelse med oppgave 3

Malins bruk av visuell mediator inkluderer både figur som er tegnet på tavlen, ikonisk mediator, og symboluttrykkene for brøk i svaret, symbolsk mediator. Dette vises gjennom at hun tar utgangspunkt i tallsymbolet 12 og realiserer dette i form av antallet deler på figuren. Eksempel på narrativ kan være at svaret skal være brøk med tolv deler fordi det er tolv deler på figur, eller at svaret skal oppgis i form av brøk. Ordbruk kan vises til med hvordan Malin beskriver svaret på oppgaven ved bruk av brøkrelaterte ord, førtito tolvdeler, og ord for heltall når hun snakker om nevneren som er tolv i forbindelse med antallet deler på figuren. Prosedyren er vanskelig å illustrere med utgangspunkt i en ytring, men oppgavesituasjonen kan pekes på som blant annet at Malin tolker at oppgaven inkluderer bruk av alle tilgjengelige visuelle mediatorer som er presentert av læreren på tavlen. Videre begrunnelse og utdyping av disse kommentarene kan finnes i analysen av Malin i delkapittel 4.2.

I analysen vil transkripsjonene av ytringene presenteres i en samlet tabell innledningsvis for hver episode, og deretter vil ytringene henvises til videre i analysen ved nummerering. Ytringene er presentert i kronologisk rekkefølge, og nummereringen indikerer om de følger tett på hverandre eller er avbrutt av lengre perioder hvor andre elever har ordet. Lengre avbrudd er i tillegg synliggjort ved å legge inn en tom rad i de tilfellene det er mer enn 10 ytringer mellom elevens ytringer. Andre kommunikative handlinger relatert til ytringene vil eventuelt beskrives nærmere i teksten som følger etter denne fremstillingen.

3.5. Refleksjoner

I utgangspunktet var planen for denne studien å analysere elevenes strategier i begge dagene med brøk som tema. Etter hvert i prosessen ble det vurdert å kun forholde seg til 1. uke for å kunne gå mer i dybden i analysen av elevene som ble valgt ut. Jeg ønsker å påpeke at min forforståelse og tidligere erfaring med analyse av samme undervisningsdag kan ha vært med å påvirke mine tolkninger i denne studien. Det har vist seg at analysen som utføres i denne studien belyser andre sider av elevens diskurs enn hva som ble oppdaget i Bergheim (2019), noe som gir meg et rikere perspektiv på noen av de samme elevene hvor jeg oppdager nye sider av elevenes diskurs. Den største forskjellen er bruken av konseptet oppgavesituasjonen fra Lavie et al. (2019) i tillegg til isolering av enkeltelevene Malin og Siren i analysen, som gjør at en dypere innsikt i deres individuelle diskurser blir tilgjengelig.

3.5.1. Forskningsprosjektets kvalitet

Kvaliteten på et kvalitativt forskningsprosjekt kan uttrykkes ved reliabilitet, validitet og overførbarhet, og kvaliteten henger nært sammen med resultatenes verdi (Thagaard, 2018). Målet med en kvalitativ studie er å formidle en forståelse av fenomen som studeres, slik at tolkningen kan ha relevans i en større sammenheng, noe som også kan beskrives som en analytisk generalisering (Maxwell, 2009). Overførbarhet av resultatene av en kvalitativ studie knyttes til tolkningen av fenomenene, hvor vi stiller spørsmål om samme tolkning kan være relevant i annen sammenheng. Generalisering fra case-studier er avhengig av den utvalgte casen, og hvordan denne er valgt (Flyvbjerg, 2006). Det pekes også på at case-studier kan ha stor verdi uten forsøk på generalisering, i form av at det ofte har bidratt til vitenskapelig nytenking. På bakgrunn av dette har jeg gjort forsøk på å redegjøre grundig for bakgrunnen for mitt valg av case-elever i dette masterprosjektet. Misoppfatninger er et kjent fenomen i forskningen på matematisk læring, og dermed kan min tolkning av elevenes løsning og strategibruk fra denne studien ha verdi i form av å få nye perspektiv på dette fenomenet.

Reliabilitet beskrives som påliteligheten eller troverdigheten til forskningen som er utført, og vil baseres på forskerens redegjørelser for hvordan data er utviklet og den påvirkningen forskeren kan ha hatt på datainnsamling (Thagaard, 2018). Både prosessen for innsamling av data, og den videre bruken av data i analyseprosessen er knyttet til prosjektets reliabilitet. Disse elementene har jeg i stor grad gjort forsøk på å ivareta i beskrivelsen av datainnsamling i dette kapittelet. Gjennom en abduktiv tilnærming (Thagaard, 2018) vil min forforståelse i samspill med analysen av datamaterialet kunne bidra til både forståelse av innholdet i data med utgangspunkt i teori, og videreutvikling av teoretiske perspektiv med utgangspunkt i mønster fra datamaterialet.

I Thagaard (2018) beskrives validitet som gyldigheten av de tolkningene som forskeren er kommet frem til. Maxwell (2009) presenterer validitet som å stille seg selv spørsmålet om hvordan en kan ta feil i de tolkningene som en presenterer, og vektlegger spesielt to typer trusler mot validiteten i kvalitative studier. Dette er forskerens forforståelse, og påvirkningen av forskeren på den situasjonen som studeres. Det er ikke et realistisk mål å eliminere påvirkningen fra forskeren, men målet blir å forstå denne påvirkningen på best mulig måte. Underveis i analysene vil jeg gjøre forsøk på å tydeliggjøre grunnlaget for mine tolkninger, slik at leseren kan vurdere gyldigheten av tolkningene som presenteres. I tillegg vil studiens validitet følge av mine refleksjoner videre i dette delkapittelet om hvorvidt både tilstedeværelse av utstyr for opptak og forskere kan ha påvirket situasjonen i klasserommet. Det pekes spesielt på at intervjusituasjonen har stor påvirkning på det empiriske materialet en får ut, og i lys av dette ønsker jeg å trekke frem intervjuerens kommentar i møte med elevene i elevintervju 2.

E2-251	Intervjuer	… det er bare sånn jeg vil bare vite hva tenker det er ikke noe som er rett eller galt her så det er veldig bra du har til å si noe og

Fra kommentaren i ytring E2-251 ser vi hvordan intervjueren gjør forsøk på å redusere den potensielle påvirkningen av at elevene oppfatter denne som i lærerrollen, ved å poengtere at det ikke er riktig løsning som vektlegges her. For å øke troverdigheten til konklusjonene i dette forskningsarbeidet vil jeg blant annet peke på bruken av opptak som gir tilgang til såkalt *rik data* (Maxwell, 2009), hvor jeg har fått anledning til å gå tilbake til datamaterialet og se over dette i flere omganger underveis i analyseprosessen. Dette gir et bedre utgangspunkt for tolkninger, enn dersom jeg kun hadde basert tolkningene på direkte observasjon og feltnotater. Jeg har hatt mulighet til å gå tilbake og teste hypoteser som er kommet opp underveis i analysen.

For å unngå at avvikende tilfeller i elevenes diskurs utelukkes fra tolkningene, har jeg inkludert alle ytringer fra elevene uten å vurdere på forhånd av analysen hvorvidt disse passer inn med overbevisningene eller hypotesene jeg kan ha hatt på forhånd. Dette har vist seg å gi meg nye perspektiv på begge elevene underveis i arbeidet i forhold til hva jeg forventet når jeg gikk i gang med analysen, hvor jeg flere ganger har måtte revurdere tolkningene mine i lys av andre ytringer fra eleven. I tillegg vil jeg også stille funn fra mine analyser opp mot noen av de resultatene som er presentert fra tidligere forskning i teorikapittelet. Dette kan styrke overførbarheten av resultatene fra denne studien ved at hvis tendensene er like, kan mine tolkninger ligge til grunn for en ny måte å se samme fenomener som tidligere er studert. Når det gjelder forskerens forforståelse er en måte å møte dette problemet på at en gjør forsøk på å utelukke alternative hypoteser (Maxwell, 2009; Thagaard, 2018). Dette vil jeg gjøre forsøk på gjennom analysen av elevene, og vil trekke dette frem der det er relevant.

3.5.2. Mine videre refleksjoner

MERG19-prosjektets åpne tilnærming til datainnsamling har gjort at jeg opplever det som at jeg mangler noe innsikt i elevenes individuelle diskurs i forhold til hva som kunne vært ønskelig. Blant annet kunne det gitt nyttig innsikt dersom jeg hadde tilgang til lydopptak av gruppenes samtaler før de presenterer sine løsninger i fellesskap. Samtidig må en vurdere det slik at den typen elevstrategier og løsninger som analyseres i denne studien er vanskelig å legge til rette for på forhånd ved datainnsamling. Dette leder til en vurdering jeg tok i den innledende fasen av dette masterprosjektet, som handlet om jeg ville samle inn nytt eller mer datamateriale. De strategiene og elevsvarene som kommer frem i den aktuelle undervisningen kan ikke planlegges for på forhånd av datainnsamling, noe som også er deler av årsaken til at de i stor grad er interessante for analyse og forskning. Dermed er det stor usikkerhet knyttet til innsamling av nytt datamateriale.

Refleksjoner i ettertid av datainnsamlingen har også gjort meg bevisst på at selv om jeg allerede samme dag som jeg observerte de ulike elevsvarene visste hvordan jeg ønsket å bruke dette i denne masteroppgaven, ville det ikke nødvendigvis utgjort noen forskjell. Spesielt ettersom dette er et isolert tema i undervisningen en dag, og elevene er gått over til geometri innen jeg kunne ha utarbeidet spørsmål som kunne stilles til den aktuelle eleven. Som følge av dette velger jeg å bruke det datamaterialet som jeg allerede har tilgang til, og forsøke å få innsyn i elevens diskurs gjennom de ytringene som kommer frem i undervisningen. Tross alt inneholder det tilgjengelige datamaterialet mye nyttig informasjon i sammenheng med problemstillingen, og dette vil belyses nærmere gjennom presentasjon av analyse og resultater i denne studien.

Når det gjelder tilstedeværelse av forskeren og påvirkning på lærer og elevers atferd så finnes det flere tilfeller i datamaterialet hvor elevene indikerer at de er oppmerksomme på at det blir utført opptak og at de blir observert. Dette kan illustreres med utgangspunkt i situasjoner hvor enkelte elever flere ganger snur seg og ser rett inn i kamera. Dette skjer derimot kun i de delene av undervisningen hvor elevene venter på å ta del i kollektiv diskurs, eller ved skifter i undervisningen. Når samtale pågår i klasserommet, finnes ingen signaler om at elevene er bevisst på kamera og tilstedeværelse av deltakere fra forskergruppen. Det kan derimot ikke utelukkes at situasjonen påvirkes av tilstedeværelse av både deltakere fra prosjektgruppe og utstyr for opptak (Thagaard, 2018), og innholdet i datamaterialet må ses i lys av hvordan dette kan ha hatt en påvirkning på det vi får innsyn i.

4. Analyse og resultater

I dette kapittelet vil det presenteres utdrag fra datamaterialet som analyseres med utgangspunkt i egenskapene ved en matematisk diskurs, i tråd med det kommognitive rammeverket fra Sfard (2008). Avslutningsvis vil det gjøres forsøk på å trekke noen tråder mellom de kontekstuelle faktorene og elevenes individuelle diskurs, samt løftes frem noen sentrale funn fra analysen, gjennom en oppsummering av hver egenskap. Før vi ser nærmere på diskursen til de to utvalgte elevene vil det i denne delen presenteres en beskrivelse av undervisningen, og deretter konteksten rundt elevenes deltakelse i den matematiske diskursen i form av oppgavesituasjonen (Lavie et al., 2019) og lærerens diskurs.

4.1. Innledning til resultatdel

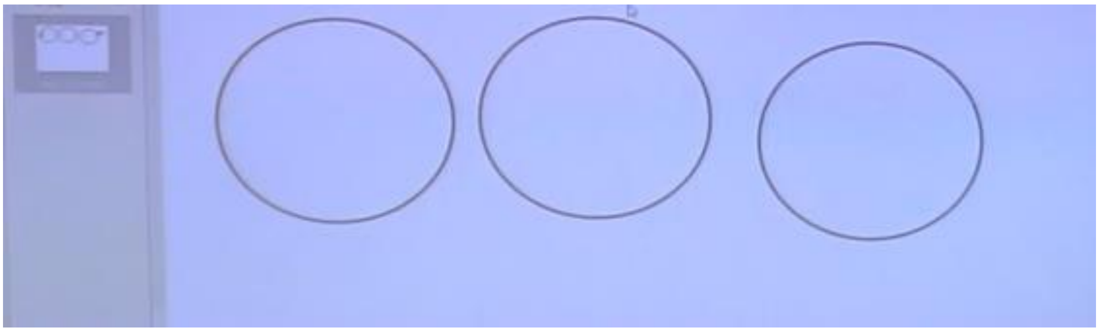
For analysen i denne oppgaven er det en undervisningsdag som vil være i fokus, og datamaterialet for analysen baserer seg på den delen av undervisningen som foregår gjennom hele 1.time og deler av 2.time for elevene i tillegg til noen utdrag fra elevintervju. Det er tidligere presentert en oversikt over undervisningen i underkapittel 3.1.1. (Tabell 3).

4.1.1. Undervisningsopplegg

I denne delen av analysen vil innholdet i hver undervisningssekvens utdypes litt grundigere, ved at det presenteres figur som illustrerer innholdet fra tavlen og relevante ytringer i tillegg til en beskrivelse. Klasserommet er utstyrt med en *smartboard* som tavle, og på den aktuelle dagen opplever læreren noen tekniske utfordringer slik at hun ikke får skrevet rett på tavlen. Læreren blir sittende der hvor datamaskinen er plassert, og hun skriver underveis i undervisningen med bruk av datamus. Videre presenteres nå innholdet i hver sekvens av undervisningen.

Sekvens 1

I sekvens 1 diskuterer klassen med utgangspunkt i lærerens spørsmål om hva de husker fra forrige gang de var i denne gruppesammensetningen, som vil være for omtrent 3 uker siden.



Figur 8 – Tavle fra sekvens 1

Læreren viser til tre sirkler som er synlig for elevene på tavlen (Figur 8), og sier at hver gang de møtes på denne måten så regner de litt sammen først. Sofie svarer læreren (3-034), og denne ytringen viser at elevene tidligere har jobbet med sirkelen som en urskive i forbindelse med brøk.

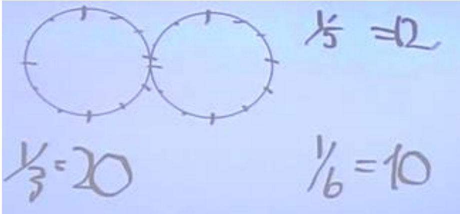
3-034	Sofie	… klokkeslett så sa du at vi skulle dele det inn og finne ut hvor mange minutter det var

Overgangen til 2. sekvens er når læreren sier hun har laget klar noen oppgaver til elevene.

Sekvens 2

3-057	Lærer	… Da vil jeg at du skal snakke med sidemannen din om … hvor mange minutt er en tredel - av urskiven - av en time? …

Ved sekvens 2 har læreren valgt å ha to sirkler synlig på tavlen sammen med brøk på symbolform etterfulgt av likhetstegn, mens elevene oppgir antall minutt av en time hver brøk representerer. På sirklene er det markert 12 punkter (Figur 9), og elevene blir i denne sekvensen kjent med å omgjøre brøk til antall minutter.

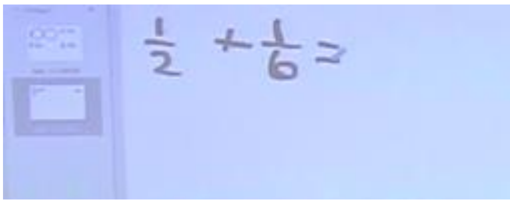


Figur 9 – Innhold fra tavle og elevløsninger presentert i sekvens 2

I figur 9 vises også de ulike løsningene som gis av elevene på de tre deloppgavene. Samtlige elever oppgir løsningene sine som antall minutter, men læreren skriver kun opp tallene på tavlen. Malin svarer 20, og Håvard svarer 10. To elever, Ivar og Ellen, svarer begge 12 med ulike fremgangsmåter som forklaring for løsningen sin.

Sekvens 3

Oppgaven som gis i sekvens 3 omtales videre som *oppgave 2* (Figur 10).

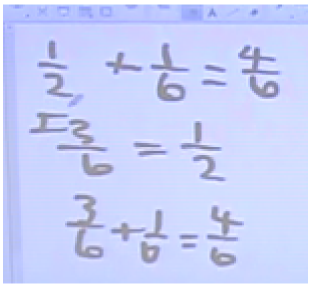


Figur 10 – Tavle fra sekvens 3, oppgave 2

3-117	Lærer	Da tror jeg ikke at jeg tar verken en firedel eller en todel eller en tidel … Men lar dere prøve å regne ut et par eh -- brøkaddisjonsstykket jeg har laget -- Er dere klar? -- Og den første er - en -- todel -- pluss -- en - seksdel.

Læreren hadde muligens forberedt seks ulike brøker i denne sekvensen, men velger bare å bruke tre av disse. Vi kan se at lærer ikke tar med brøkene $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\ og\ \frac{1}{10}$ før hun går over til oppgave 2 (3-117), og hun skriver oppgaven på tavlen uten synlige tegninger av sirkler. Etter oppgave 2 er presentert og elevene snakker gruppevis, er læreren hos Malin, Pia og Ida under samtalen. Innholdet i denne samtalen vil utdypes mer under analyse av Malin i delkapittel 4.2.

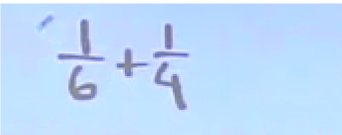
Det presenteres to ulike løsninger på oppgave 2. Først presenterer Eskil løsning 1 (Figur 11).



Figur 11 – Løsning 1, fra Eskil

3-144	Lærer	… så da har vi en løsning her, finnes det andre? …
3-148	Lærer	… Om dere gir dere med en - ei løsning her i dag?

Etter læreren har etterspurt flere løsninger fra elevene (3-144, 3-148), skriver hun først opp en ny oppgave (Figur 12).

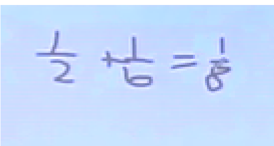


Figur 12 – Oppgave knyttet til lærerens ytring 3-154

Før læreren går videre med den nye oppgaven visker hun bort oppgaven fra tavlen, og spør Malin og Ida om hun kan presentere deres løsning på oppgaven (3-154).

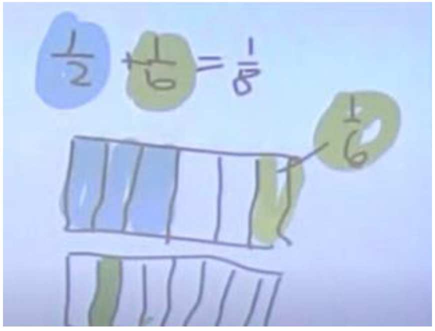
3-154	Lærer	… nei vent litt med denne her … Dere hadde jo en annen løsning -- kan jeg ta og så presentere den eller kan dere si hva dere tenkte? -- Malin og Ida?

Malin presenterer deretter løsning 2 (Figur 13).



Figur 13 – Løsning 2, fra Malin

Videre følger det en diskusjon i klasserommet mellom elevene, sentrert rundt løsning 2 fra Malin. Siren kommenterer at det hele ikke kan forandres på, og viser til en *kake*. Læreren spør om hun skal tegne kaken, og velger deretter å tegne opp kake som to rektangler som videre deles opp i henholdsvis seks og åtte deler (Figur 14).



Figur 14 – Inndeling av kake

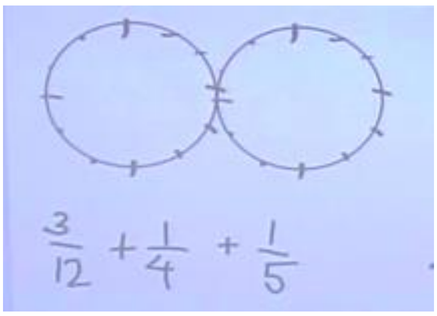
Videre gjentar læreren deler av ytringen til Lukas (3-205), og ber elevene snakke sammen om hva det betyr.

3-205	Lærer	… Kan du ta og snakke med den ved siden av deg om det … svaret [Løsning 2] er mindre enn en halv sier Lukas, hva har det med saken å gjøre?

Etter elevene har fått tid til å snakke sammen følger det en ny samtale i plenum som handler om betydningen av det som ble sagt før læreren går videre til oppgave 3, sekvens 4.

Sekvens 4

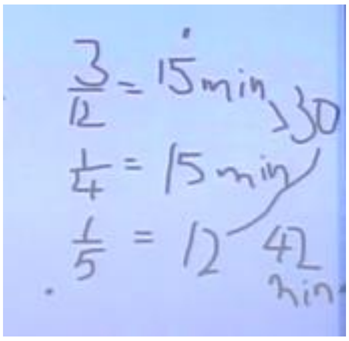
I sekvens 4 skriver læreren oppgave 3 på symbolsk form under sirklene med markeringer (Figur 15).



Figur 15 – Oppgave 3

3-256	Lærer	… Tre tolvdeler … så har jeg skrevet ned altså en firedel igjen … tar jeg en femdel …

Læreren sier at hun tar *en firedel igjen* (3-256), noe som kan indikere at hun tenker på oppgaven som hun skrev opp og deretter fjernet igjen i sekvens 3 (3-154). Fra elevenes perspektiv har ikke en firedel vært del av oppgavene de har jobbet med før oppgave 3. Etter oppgaven er gitt får elevene først tid til å tenke selv, og skal etterpå snakke sammen gruppevis om løsning på denne oppgaven. Mens elevene snakker sammen gruppevis er læreren hos GG-c og GG-d.

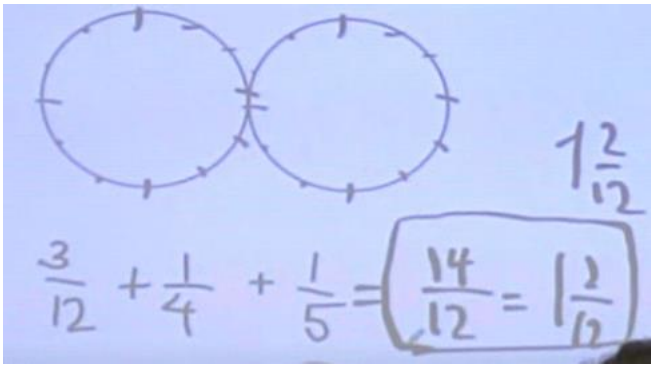


Figur 16 – Løsning 1, fra Malin

Det presenteres tre ulike løsninger på denne oppgaven. Løsning 1 kommer fra Malin (Figur 16) og lærer oppsummerer deres løsning (3-353).

3-353	Lærer	… Førtito minutt fikk dere i svar - og så er dere litt usikker på hvordan den brøken skal skrives og så skrev dere den som førtito tolvdeler? …

Løsning 2 (Figur 17) presenteres deretter av Ellen og Siren.



Figur 17 – Løsning 2, fra Ellen og Siren

Løsning 2 følges opp av en helklassediskusjon rundt strategien som Siren og Ellen har brukt, hvor læreren (3-372) vektlegger at medelevene skal forsøke å forstå hvordan jentene har tenkt før de ytrer seg om det er riktig eller feil.

3-372	Lærer	… Hvis du ser på fjorten tolvdeler er det det samme som en hel og to tolvdeler? …

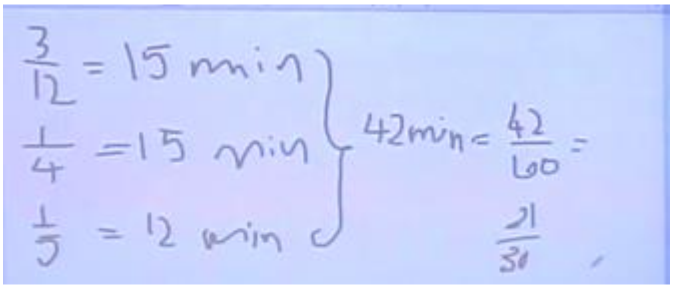
Denne samtalen varer frem til friminutt starter for elevene.

Sekvens 5

Når undervisningen starter opp etter friminutt bruker klassen først tid på å snakke om usikkerhet i forhold til tema de jobber med og ansvar rundt egen og andres læring.

4-055	Lærer	… Nå skal jeg spare på den løsningen din Siren og Ellen -- så kommer vi tilbake til den - så vil jeg ha … Ivar og Lukas og Pål sin løsning på tre tolvdeler pluss en firedel pluss en femdel.

Etter dette presenteres løsning 3 på oppgave 3 fra Ivar (Figur 18) på forespørsel fra læreren (4-055).



Figur 18 – Løsning 3 fra Ivar

Når løsning 3 er presentert, kommenterer Siren at hun nå tror de har tatt feil med løsning 2. Avslutningsvis gir Pål en kommentar om fremgangsmåten som er brukt for løsning 2 før undervisningen går over til sekvens 6.

En oppsummering av de ulike løsningene som er oppgitt i beskrivelsen ovenfor på oppgave 2 og 3 finnes i tabell 7 under. Hver løsning er blitt kodet med navn som beskriver oppgave- og løsning-nummer, basert på den rekkefølgen de er presentert i undervisningen. O2-L1 viser til løsning 1 på oppgave 2, som ble presentert av Eskil. Disse kodene vil brukes videre i denne oppgaven når de ulike løsningene omtales.

Tabell 7 – Oversikt over elevenes løsninger for oppgave 2 og 3

Oppgave-løsning	*Hvem*	*Løsningen*
Oppgave 2		
O2-L1	Eskil	$\frac{4}{6}$
O2-L2	Malin	$\frac{1}{8}$
Oppgave 3		
O3-L1	Malin	$\frac{42}{12}$
O3-L2	Siren	$1\frac{2}{12}$
O3-L3	Ivar	$\frac{42}{60}=\frac{21}{30}$

Videre i dette kapittelet vil det utføres en dyptgående analyse av diskursen til Malin og Siren. Før dette presenteres først oppgavesituasjonen for hver av oppgavene, og deretter lærerens diskurs. Dette er sentralt fordi det elevene kan lære er avhengig av hva de eksponeres for av blant annet læreren (Adler & Sfard, 2017). Vi vil derfor først se nærmere på oppgaven som blir gitt av lærer, og de mulighetene som kan ligge tilgjengelig for elevene gjennom både oppgave og lærerens diskurs.

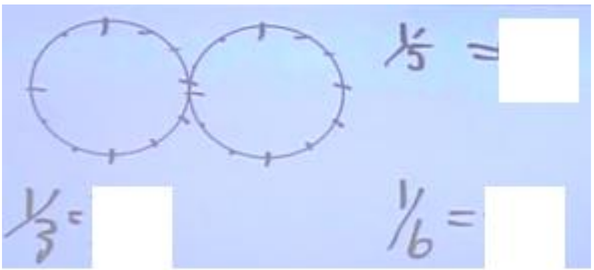
4.1.2. Oppgavesituasjonen

I dette underkapittelet vil vi se nærmere på *PSS* for oppgavesituasjonene (Lavie et al., 2019). Det kan beskrives litt som et søk i en database, hvor den forestilte databasen som utgjør *PSS* er samling av tidligere erfaringer som har vært del av tilsvarende kontekst som den elevene står i nå. Det vil i denne situasjonen tilsvare matematikkundervisning på skolen den siste tiden for elevene, med den aktuelle læreren. For hver oppgave vil foregående sekvens av undervisningen også kunne inkluderes i PSS. Med andre ord vil det bety at for oppgave 3 kan både sekvens 2 og 3 av undervisningen være inkludert i grunnlaget for elevens leting etter tidligere erfaringer som kan være utgangspunkt for situasjonen de nå står ovenfor.

Precedent identifiers for hele undervisningen samlet kan være helklassediskusjon, regning uten skrivebøker, brøk og gruppesammensetningen av elever på tvers av to klasser. Det finnes også en del identifiseringselementer i hver del av undervisningen, og disse vil videre kalles signaler ettersom det viser til signaler som tolkes av elevene. Signalene vil vi se nærmere på i sammenheng med *task-setter* (Lavie et al., 2019) for hver oppgave, som i disse tilfellene kan bestå av lærerens ytring sammen med det som er synlig for elevene på tavlen. Task-setter er beskrevet, i teorikapittelet, som det som skaper en oppgavesituasjon, og fungerer som en invitasjon til en spesifikk type handling.

Oppgave 1

Task-setter for oppgave 1 illustreres med lærerens spørsmål (3-057) og figur 19. Løsningene fra elevene er fjernet av forskeren, for å illustrere hvordan de ulike deloppgavene så ut for elevene før løsningene ble gitt.



Figur 19 – Oppgave 1

Fra tavlen (Figur 19) finner vi signaler i form av tegning og matematiske symboler. Dette er blant annet sirkelfigur med markeringer, brøkuttrykk etterfulgt av likhetstegn, like heltall for tellere og ulike heltall for nevnere for alle tre brøkene. Oppgaven, slik den er presentert ved bruk av matematiske symboler, består av en brøk etterfulgt av likhetstegn.

3-057	Lærer	… hvor mange minutt er en tredel av urskiven, av en time? …
3-065	Lærer	… da må jeg ta det litt verre … en -- seksdel …
3-071	Lærer	… Okei da gjør jeg det litt verre og sier en - femdel …

For oppgave 1 var det kun den første deloppgaven som ble formulert som et spørsmål fra læreren (3-057), og deretter skrev hun opp brøken på tavlen og sa *en seksdel* (3-065) og *en femdel* (3-071) uten å formulere spørsmål. Dette kan tolkes som at ordet *tredel* i opprinnelig spørsmål kan erstattes av de to andre brøkene som oppgis.

Fra lærerens ytring 3-057 finner vi følgende verbale signaler som kan være tilgjengelig for elevene:

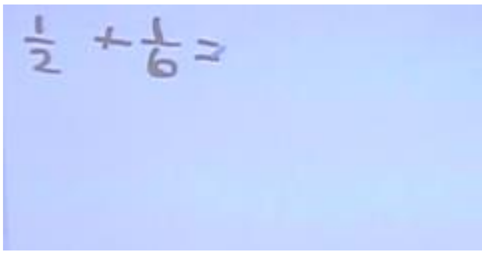
1. Hvor mange
2. Minutt
3. En tredel av...
    a. Urskiven
    b. En time

Oppgave 2

I sekvens 3 kan vi skille mellom to oppgavesituasjoner.

3-117	Lærer	… Lar dere prøve å regne ut … et par eh brøkaddisjonsstykket jeg har laget -- Er dere klar? -- Og den første er en -- todel -- pluss -- en -seksdel.

Den første er innledende task-setter presentert av lærer ved ytring 3-117 og symboler fra figur 20. Den andre er en oppgave som ikke nødvendigvis settes av læreren med intensjon, men som følger naturlig av elevenes møte med to ulike svar på samme oppgave (Se figur 21 lenger ned). Dette kan beskrives som en kommognitiv konflikt (Sfard, 2008), hvor deltakerne må bli enig om hvilke av de to motstridende løsningene som skal godkjennes for å kunne løse konflikten.



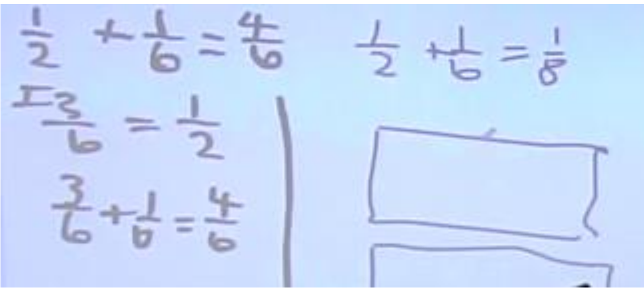
Figur 20 – Oppgave 2 slik den ble presentert på tavle av lærer

For denne oppgaven finnes det kun symboler. Med andre ord finnes det ingen tegning av sirkel eller annen geometrisk figur. Symbolene inkluderer tegn for addisjon og likhet, og det er brukt heltall, brøkstrek, ulik nevner og like tellere.

I starten av 3. sekvens ser vi at læreren ikke formulerer eksplisitt spørsmål til elevene, annet enn om de er klar. Om de er klar virker i denne sammenhengen til å handle om at læreren vil sjekke om alle elevene følger med på det læreren gjør og sier i neste steg. Dermed kan det være symbolet = som fungerer som igangsetter for elevene her. Som vi kan se i ytring 3-117 bruker læreren ikke ord som minutt av urskive eller time.

Verbale signaler fra læreren (3-117):

1. Regne ut
2. Brøkaddisjonsstykker. Ordet kan være sammensatt av følgende kjente ord for elevene:
    a. Brøk
    b. Addisjon
    c. (regne-)stykker
3. En todel pluss en seksdel



Figur 21 – Oppgave 2 med to ulike løsninger

Igangsetter for diskusjonen som følger av løsning 2 kan være at elevene har kommet med to ulike løsninger, og læreren har ikke kommet med noen evaluering av de to løsningene. Fra figur 21 kan vi se at det nå er synlig en tegning på tavlen igjen i tillegg til symbolene. Her finnes noen nye signaler som rektangulær figur sammen med det samme regnestykket oppgitt to ganger, med to ulike løsninger. De to løsningene som er oppgitt har både ulik teller og nevner

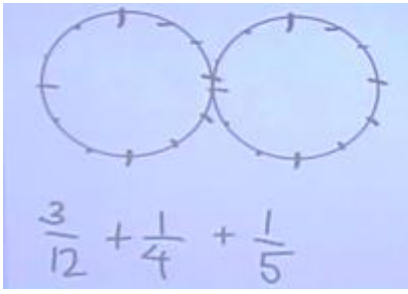
3-144	Lærer	… så da har vi en løsning her, finnes det andre? …

3-148	Lærer	… Om dere gir dere med en - en løsning her i dag?

Det som derimot finnes av verbale signal fra lærerens ytringer 3-144 og 3-148, som forekommer før løsning 2 presenteres, indikerer at en situasjon med flere løsninger kan være kjent for elevene i undervisningen.

Oppgave 3

Oppgave 3 presenteres i sekvens 4 og deretter fortsetter klassens arbeid med denne oppgaven i sekvens 5 etter friminutt. *Task-setter* for oppgave 3 er blant annet lærers ytringer og innholdet fra tavle som vises i figur 22.



Figur 22 – Oppgave 3

I denne sekvenser er sirkelfigur med markeringer sammen med symboler synlig på tavle, tilsvarende de figurene som var til stede i sekvens 2. Det er regnestykke på brøkform, tilsvarende sekvens 3 utenom at det er lagt til ett ekstra ledd. Denne oppgaven inkluderer både ulike nevnere og ulike tellere.

3-254	Lærer	…Da får dere neste oppgave…
3-256	Lærer	Da får du … Tre tolvdeler … så har jeg skrevet ned altså en firedel igjen … tar jeg en femdel …

Her formuleres ingen eksplisitte spørsmål fra læreren rettet til elevene (3-254, 3-256), og det finnes heller ingen likhetstegn (Figur 22). Det er derimot noen likhetstrekk med hvordan læreren presenterte påfølgende oppgaver i sekvens 2, med tanke på at det nye regnestykket som presenteres her kan erstatte regnestykket i oppgaven fra sekvens 3. Ordbruken *neste oppgave* (3-254) kan støtte denne tolkningen. Læreren bruker ikke ordet *pluss* i noen sammenheng, men skriver opp symbolet. Likhetstegnet er fraværende, både i ordbruk og symbol.

Lærerens ordbruk fra ytring 3-256 er:

1. Da får du..
    a. Tre tolvdeler
    b. En firedel
    c. En femdel

Videre vil vi se nærmere på lærerens diskurs i forbindelse med undervisningen.

4.1.3. Lærerens diskurs

Læreren starter undervisningen med å introdusere brøk realisert som minutt av en time ved hjelp av en figur som skal illustrere en urskive. Her introduseres en ikonisk visuell mediator (Sfard, 2008), som er relatert til det matematiske objektet brøk. Ut over dette benytter læreren seg av symbolske mediatorer. Sirens referanse til en kake tolkes som en rektangulær form av læreren. Dette kan følge av noe læreren har overhørt Siren snakke om, at elevene har jobbet med brøk som en kake med utgangspunkt i rektangelform tidligere, at læreren ønsker å skape skille mellom urskive og kake ved å velge en annen geometrisk form enn sirkel, eller andre forklaringer her. Lærerens ordbruk er konsekvent, ved at hun beskriver alle brøkdelene som todel, firedel, seksdel etc. De eneste tilfellene av ordbruken åttendedel, sjettedel, en halv etc. forekommer når hun gjentar noe elevene sa med egne ord.

Brøkregning med klokka

Lærerens ordbruk *la dere prøve å regne ut* (3-117) kan være signal om at dette er noe nytt for elevene, noe de ikke forventes å kunne fra før. Dette kan bety at elevene ikke nødvendigvis har en tilgjengelig prosedyre for å løse oppgaven de står ovenfor. Det er indikasjoner om at læreren ønsker at elevene benytter *brøk som minutt* som en inngangsport til addisjon av brøk med ulik nevner, og gjennom denne inngangsporten skal elevene selv utvikle en strategi for addisjon av brøk med ulik nevner. Det kan tenkes at læreren ønsker følgende realisering hos elevene $\frac{a}{b}$ $hvor\ a: antall\ minutt\ og\ b: 60\ minutt\ i\ en\ time.$ Denne tolkningen kan styrkes av at alle brøkene som læreren bruker i oppgavene kan utvides til fellesnevner 60.

Læreren bruker likhetstegnet som signal om å gå i gang, eller utføre operasjoner, ikke som ekvivalensrelasjon. Dette vises allerede i sekvens 2, hvor læreren ikke sier eksplisitt hva som mangler for å oppnå en sann ekvivalens i uttrykkene som skrives opp på tavlen. Dette ville vært for eksempel $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$, mens læreren aldri trekker inn 60. Det er på denne måten mer som støtter tolkningen av lærerens bruk av likhetstegnet som en operasjon, enn en ekvivalensrelasjon.

Oppgave 2 inneholder en brøk som elevene kan kjenne igjen fra oppgave 1, en seksdel, og en brøk som læreren selv ga uttrykk for at hun ikke tok med i sekvens 2 (3-117), en todel. Her er det mulig at læreren hadde planer om at elevene på første oppgave skulle møte to kjente brøker, mens ved gjennomføring var bare en brøk kjent. Fra lærerens perspektiv kan også situasjonen i sekvens 3 være tilstrekkelig lik sekvens 2, i tillegg til at hun muligens forventer at *en halv* er godt kjent for elevene, slik at de vil kunne skape denne overgangen selv. Dette kan for eksempel være ordbruken *en halv time* fra hverdagsdiskursen.

Oppgavesituasjonen slik læreren gir den til elevene er i kronologisk rekkefølge

1. Tenke ut en mulig løsning på oppgaven selv
2. Snakke sammen i små grupper om løsning
3. Presentere en løsning
4. Lytte til løsningen som presenteres og forstå tankemåten
5. Enten a eller b
    a. Presentere en annen løsning
    b. Gi tilbakemeldinger på løsningen gitt
6. Reflektere over egen løsning i lys av samtalen

Oppsummert kan det beskrives som at sekvens 2 handler om å introdusere en ny prosedyre for elevene gjennom oppgave 1, og at oppgave 2 og 3 handler om å kunne ta i bruk denne nye prosedyren i en ny situasjon som innebærer addisjon. Dette krever at elevene skaper en vertikal forbindelse (Lavie & Sfard, 2019) mellom addisjonsprosedyren de kjenner fra før, og den nye prosedyren de ble introdusert for i sekvens 2. Gjennom undervisningen får vi se at brøk blant annet realiseres som symboler på formen $\frac{a}{b}$, antall minutt av en time, en del av urskive og kake eller biter av en kake.

4.1.4. Hva sier elevene om brøk i intervjuene?

I denne delen presenteres noen utdrag fra elevintervjuene som kan være med å belyse noen av de sidene ved Malin og Sirens diskurs som kommer frem gjennom analysen i dette kapittelet. Intervjuspørsmålene som elevene i denne sammenhengen forholder seg til er hvordan de vil beskrive brøk, hvordan de beskriver begrep som brukes i sammenheng med brøk, og hvordan de vil løse oppgave 3, som blir presentert for elevene under intervjuet. Oppgave 3 er samme oppgave som er presentert i sammenheng med undervisningen ovenfor. Formulering av spørsmål, og oppfølgingsspørsmål, kan leses i sin helhet i intervjuguide (Vedlegg 1). Utvalgte ytringer fra elevintervju 1 og 2 presenteres under.

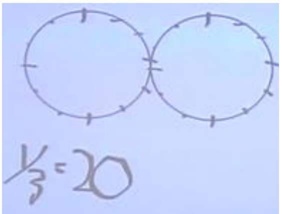
Elevintervju 1		
E1-090	Felix	… jeg tenker for eksempel en todel. Så tenker jeg liksom strek, da tenker jeg den streken mellom de to tallene.
E1-099	Ingeborg	En sirkel her med fire deler, så er dette her tre firedeler. [tegner og skraverer tre firedeler av en sirkel]
E1-127	Ingeborg	… Jeg tror ikke det går an å plusse de der [oppgave 3]
E1-130	Felix	Ja du må ta den størst er det ikke? At du tar den største av de nederst fem tolvdeler fordi det er den største
E1-154	Ingeborg	Også teller oppe
Elevintervju 2		
E2-231	Sofie	Hvis du har en kake … en brøkdel av den kaken
E2-239	Tiril	Hvis du har en pizza og det er veldig vanlig eksempel …
E2-241	Tiril	… Åtte åttendeler som er det hele
E2-319	Tiril	… fjerdedel var femten minutt så er det femten pluss femten er tretti pluss tolv er~
E2-320	Sofie	~førtito
E2-340	Tiril	… Nå må jeg huske hva som er hva nevner nederst teller topp
E2-354	Tiril	Ja for du kan jo huske n'en er nederst
E2-355	Sofie	Og t er topp
E2-368	Elisabeth	Nevneren er det hele

Fra elevintervju 1 og 2 har er det valgt ut noen av elevenes ytringer som er presentert ovenfor. Hvis vi først ser på intervjuspørsmål som handler om hva brøk er, ser vi at elevene beskriver brøk som isolerte heltall med brøkstreken som skille mellom tallene (E1-090), brøk som sirkel (E1-099), brøk som kake (E2-231) og brøk som pizza (E2-239). For begrep relatert til brøk ser vi en huskeregel for teller og nevner som går igjen i begge intervjuene, denne kan leses ut av ytringen E2-340. I E1 kan det kort oppsummeres at når intervjuer ber elevene om å peke på nevneren, sier begge elevene nede og peker. Deretter følger Ingeborg opp med ytring E1-154. I tillegg trekker Elisabeth (E2-368) inn *det hele* som det samme som nevneren.

Når elevene møter oppgave 3 i intervjusituasjonen finnes det indikasjoner om at oppgaven er ukjent for Felix og Ingeborg fra E1, som følge av dette vil det kun legges vekt på hvordan elevene fra E2 møter denne oppgaven. Innholdet i E1 kan oppsummeres ved at elevene bruker lang tid, er usikker på løsningen av denne oppgaven, og kommer med flere løsninger som kan tolkes som gjetting på riktig svar i håp om å få signal fra intervjuer. Dette kan videre tolkes som signal om at disse elevene ikke møtte denne oppgaven i undervisningen, eller at det har gått for lang tid siden. Ved en gjennomgang av deltakerne i de ulike elevgruppene vises det at Felix ikke er en del av de to gruppene som vi får observere gjennom datainnsamlingen, og Ingeborg er med i elevgruppen som har brøkaddisjon i uke 2. Oppgave 3 var ikke en del av undervisningen i uke 2.

4.2. Malin

Malin samarbeider med Ida og Pia, og i sekvens 2 er det Malin som presenterer løsning på oppgave 1a. Empirisk materiale til grunn for analyse av Malins diskurs utgjøres av Malin sin forklaring av løsning på oppgave 2 og oppgave 3. Først presenteres innholdet fra sekvens 2 under (Se ytring 3-064 og figur 23), mens innholdet i sekvens 3 og 4 presenteres i egne underkapitler.



Figur 23 – Malins løsning i sekvens 2

3-064	Malin	Eh tjue minutt

I tillegg til ytringene fra Malin inkluderes deler av samtalen mellom lærer og elever når de snakker sammen før presentasjon av løsningen på oppgave 2. Her får vi innsikt i Pia sitt forslag til strategi, som kan være med å belyse deler av endringen vi vil se skjer med valg av strategi fra oppgave 2 til oppgave 3. For både oppgave 2 og 3 handler Malin sin deltakelse om sin egen løsning på oppgaven, hun er ikke verbalt aktiv i samtaler som omhandler andre løsninger eller tema.

Videre i dette delkapittelet vil nå Malins deltakelse i den matematiske diskursen analyseres med utgangspunkt i egenskapene som utgjør en matematisk diskurs (Sfard, 2008). Malin har to tilsynelatende ulike fremgangsmåter for løsning av de to oppgavene, og gjennom analysen vil det gjøres forsøk på å identifisere faktorer som kan være medvirkende til denne forskjellen. Først presenteres analyse av oppgave 2 og oppgave 3 før det følger en kort oppsummering av noen sentrale funn fra denne analysen før vi ser nærmere på diskursen til Siren.

4.2.1. Oppgave 2 - Brøk handler om heltall

3-155	Malin	Eh:m vi hadde: en åttendedel
3-156	Lærer	… En todel pluss en seksdel er en åttendedel -- kan dere forklare hvorfor dere tenker at det blir en åttendedel?
3-157	Malin	Ehm - i hvert fall jeg tok seks pluss to~
3-158	Lærer	…
3-159	Malin	~som var åtte. Også tenker jeg å bare ha en siden liksom det bare er en på åtte og seks.
3-160	Lærer	… Tenker du sånn at … enten teller eller nevner skal bare bevares som den er?
3-161	Malin	Eh ja
3-162	Lærer	Så her vil du ha en og ikke to åttendedeler?
3-163	Malin	Mm

Malin sin forklaring av fremgangsmåte for oppgave 2 er presentert ovenfor, sammen med noen utdrag fra lærerens ytringer som oppklarer en del av sammenhengen for hvordan forklaringen ble presentert. I tillegg til dette inkluderes et utdrag fra gruppesamtalen som tok sted før løsningen ble presentert av Malin, som presenteres under.

3-118	Malin	En åttendedel
3-119	Lærer	…
3-120	Pia	Ehm … eller en toendedel det er jo en halv
3-122	Pia	Så pluss en seksdel som er ti minutter
3-123	Lærer	… En todel hvor mange minutt var det?
3-124	Pia	Eh det var tretti
3-125	Lærer	Ja så hva tenker du løsningen er?
3-126	Pia	Eh kanskje fire
3-127	Lærer	Kanskje fire hva for noe?
3-128	Pia	Jeg vet ikke
3-129	Lærer	Ikke helt sikker - Ida?
3-130	Ida	Jeg tror at det er en åttendedel

I dette utdraget er også hele dialogen tatt med for å illustrere sammenhengen mellom de ulike ytringene fra elevene, som følger etter lærerens spørsmål. Læreren henvender seg først til gruppen og spør hva de har kommet frem til, hvor Malin svarer (3-118). Etter dette følger lærer videre opp med å spør om alle var enig (3-119), hvor Pia rister på hodet. Deretter følger Pia sin forklaring av hva hun tenker om oppgave 2. Denne samtalen vil videre kunne belyse deler av diskursen til Malin i forhold til hvordan hun møter begge oppgavene. Blant annet kan det allerede pekes på lærerens forespørsel om å få presentert løsningen til gruppen, hvor hun navngir Malin og Ida (3-117). Dette skjer til tross for at Pia sitter plassert mellom disse to jentene, som illustrert i figur 6 i underkapittel 3.1.1. Dersom læreren antok det var to jenter på gruppen, ville det vært naturlig å anta at dette var Ida og Pia, eller eventuelt Malin og Pia. Dette styrker tolkningen om at læreren bevisst utelater Pia, fordi hun muligens er klar over at Pia ikke hadde samme fremgangsmåte som den Malin presenterer i klasserommet. Under følger en analyse av de ulike egenskapene ved den matematiske diskursen.

Visuell mediator

Når Malin forklarer fremgangsmåten for løsningen (3-157, 3-159) viser hun kun til heltall, hvor regneoperasjonene beskrives som at de utføres på symbolene som representerer de ulike heltallene. I ytringene finnes det ingen indikasjon om at Malin har utført operasjoner på noe annet enn symbolsk visuell mediator, hvor det verken i forklaringen eller selve prosedyren er indikasjoner om at hun har brukt sirkulær figur eller *urskive* i løsningsprosessen. Som eksempel på hvordan dette kunne kommet til syne kan vi se hvordan Pia kan forholde seg til urskiven når hun beskriver en todel som tretti minutt (3-124). Denne typen ytringer finnes det ikke spor av hos Malin, og når det gjelder løsningen som presenteres indikerer også denne et fokus på symbolene. Dette følger av at hun presenterer løsningen som brøkdel, og ikke brøkdel av noe, i samsvar med hvordan elevene og lærer navngir brøk på symbolform gjennom hele undervisningen.

Narrativ

Noen av de narrativene som vi kan finne indikasjoner på at Malin gir uttrykk for er som følger:

M-N1: Svaret skal oppgis som brøk på symbolsk form. (3-155)

M-N2: Tallet 1 skal bevares som det er. (3-159)

M-N3: I matematikk utføres regneoperasjoner på symboler.

Narrativ N1 følger av selve løsningen som presenteres av Malin (3-155), hvor svaret skal oppgis som brøk på formen $\frac{a}{b}$. For å finne løsningen skal en utføre operasjoner på symbolene for heltall. Tallet 1 skal bevares som det er (3-159), og tar plassen til a i brøken. Tallene 2 og 6 adderes og summen plasseres nede, tilsvarer b. Forbindelsen mellom tallene som utgjør brøk er illustrert med farger under, samme farge indikerer at disse hører sammen ved utføring av operasjonene. Det er ingen indikasjon om at Malin skaper noen forbindelse mellom tallene 1 og 2, eller 1 og 6.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$$

Når det gjelder N2 kan dette tolkes på minst to ulike måter, ved at enten skal tallet 1 bevares i forbindelse med brøkregning eller så bevares like tall. Begge tolkninger kan ha sin opprinnelse i brøkdiskursen, hvor både like tall bevares i addisjon med lik nevner og tallet 1 kan representere *en hel*. For N3 kan en manglende overgang til andre representasjonsformer av brøk, som sirkelfiguren, indikere at regneoperasjonene skal utføres på symbolene. Men dette uttrykkes aldri eksplisitt av Malin, og den eneste indikasjonen om at dette narrativet eksisterer følger av det som ikke er til stede i forklaringen.

Ordbruk

Ord som brukes av Malin i forbindelse med oppgave 2 er i hovedsak tallord. Ord for heltall brukes av Malin når hun skal beskrive selve utregningen som ledet til svaret, og ord for brøkdel dukker kun opp som svar på selve oppgaven. Hun bruker aldri ord fra brøkdiskursen som eksempelvis todel, seksdel, teller eller nevner for å omtale de ulike symbolske komponentene synlig på tavlen. Fremgangsmåten for å løse oppgaven presenteres som en fortelling om egne handlinger med utført med heltall. Vi finner ordbruk som *jeg tok* (3-157), *som var* (3-159) og *bare ha* (3-159). Dette indikerer at Malin har fokus på prosessen, fremfor produktet som kommer ut av løsningsprosessen. Læreren etterspør en forklaring av *hvorfor* de tenker at dette er svaret, mens responsen fra Malin retter fokuset mot *hvordan*. Det eneste tilfellet av et forsøk på en redegjørelse på *hvorfor* fra Malin ligger i bevaringen av en, som følger av ordbruken *fordi* (3-159), men her følger ikke en forklaring av hvorfor denne bevares som kan vurderes av utenforstående.

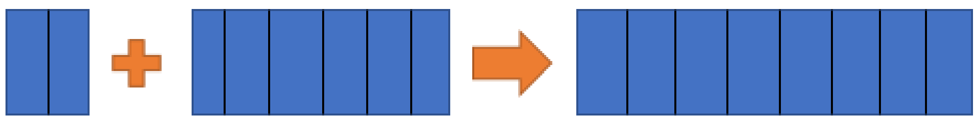
Prosedyre

I tabell 8 presenteres prosedyren Malin bruker for oppgave 2 slik den beskrives av Malin, med utdrag fra ytringene i kolonnen i midten. I høyre kolonne er tolkningen av innholdet i ytringene oversatt til symbolsk form, og i venstre kolonne er nummerering på ytringene som de ulike utdragene er hentet fra.

Tabell 8 – Malins prosedyre for oppgave 2

	Ytring	**Symbol**
3-155	*Vi hadde en åttendedel*	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$
3-157	*Seks pluss to*	$6+2$
3-159	*Som var åtte*	$\frac{?}{8}$
	…bare ha en	$\frac{1}{8}$

Starten på prosedyren består av å beskrive sluttresultatet først. Deretter går Malin frem ved å behandle nevnerne i oppgaven først, disse adderes og summen uttrykkes som åtte. Siden hun først har presentert svaret på oppgaven, så kan det at hun stopper ved tallet 8 indikere at dette tallet tar plassen nede i svaret. Videre i prosedyren tar Malin stilling til hva hun skal gjøre med tallene oppe, og her velger hun å bevare tallet 1. Dersom Malin tenker på tallet 1, så gir ikke ytringen hennes om å ha en fordi det bare er en på hver nødvendigvis mye mening (3-159). Med tanke på fremgangsmåten for addisjon av nevnere, ville det være naturlig å legge sammen de to 1-tallene også. Dette vises også ved at lærer som spør om de vil ha en og ikke to åttendedeler (3-162). Det er mulig at Malin assosierer tallet 1 med en hel eller det hele i brøk, og derfor bevarer det. En alternativ tolkning av Malin sin påstand om å ha en her kan være som illustrert under (Figur 24).



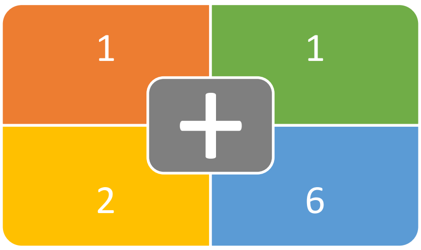
Figur 24 – To og seks deler blir til åtte deler

Her må det vektlegges at figuren er laget uten noen indikasjon fra Malin om at en slik figur eksisterer, men brukes som illustrasjon på en mulig måte Malin kan ha tenkt om tallet 1 i forbindelse med brøk. Hvis vi går tilbake til Malin sin begrunnelse for å bevare tallet 1 (3-

159), så kan vi se at to biter sammen med seks biter utgjør åtte, og siden det bare er en bit så vil hun bare ha en av disse åtte bitene i sluttproduktet.

Oppgavesituasjon

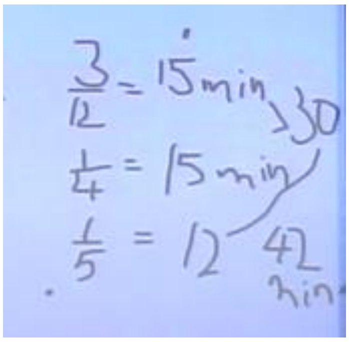
For Malin kan det se ut til at oppgaven handler om å ta i bruk alle symbolene som er synlig på tavlen til å skape, eller gjenskape, en strategi som gir to heltall, som skal plasseres henholdsvis oppe og nede i svaret. Svaret skal deretter uttrykkes som en brøk på symbolform, og dette er signal om at oppgaven er utført. Gjennom forklaringen fremgangsmåten kan vi se at hun sørger for å inkludere alle heltallene som er oppgitt på tavlen. Addisjonssymbolet kan være signal om at tall skal legges sammen og telles opp. Brøkstreken skiller mellom de ulike tallene, og tallene ovenfor brøkstreken skal behandles separat fra de under. Bak likhetstegnet skal det stå symbol på samme form som leddene i oppgaven. Det er en mulighet for at Malin for eksempel forholder seg til tallene på en måte som illustreres i figur 25 under. Uten mer detaljert innsyn i diskursen til Malin vil det være vanskelig å uttrykke seg om.



Figur 25 – En mulig tolkning av heltallkomponentene i brøk

Oppgavesituasjonen i sekvens 2 og sekvens 3 kan vurderes som forskjellige av Malin. I gruppesamtalen ser vi at det var to mulige utgangspunkt for oppgavesituasjonen, hvor Pia tok utgangspunkt i erfaringene hun hadde fra sekvens 2. Det som derimot kan ha påvirket Malin her er at med utgangspunkt i sekvens 2 skaper de ikke svar på brøkform, og dermed velger hun kanskje å avvise sekvens 2 som precedent og leter blant andre erfaringer. At urskive eller sirkel ikke er synlig kan også være medvirkende til at sekvens 2 ikke kvalifiserer som precedent for Malin i denne situasjonen. En indikasjon om at hun henter noe erfaring fra møter med brøkdiskursen er hennes valg om å bevare tallet 1. Dette indikerer at hun har valgt å beholde et element fra sine tidligere erfaringer i møte med liknende situasjoner, og dette elementet er kanskje at nevneren bevares som den er for addisjon med lik nevner. *Precedents* kan innebære situasjoner som inneholder addisjonssymbolet +, og tilfeller hvor regnestykker skulle resultere i brøkuttrykk. I begge disse tilfellene er det mulig at heltall skulle legges sammen og telles opp, noe som kan samsvare med den strategien Malin beskriver for oppgave 2.

4.2.2. Oppgave 3 - Jakten på heltallene



Figur 26 – Løsning 1 fra Malin

3-328	Malin	Ehm - vi vet ikke helt om førtito tolvdeler er svar fordi tolv, det er tolv deler [på figuren]
3-330	Malin	Fo:rdi ehm tre tolvdeler er femten~
3-332	Malin	Femten minutt
3-336	Malin	Vi delte: eller hvert fall jeg delte klokka
3-340	Malin	Jeg tok fem minutt
3-346	Malin	Ehm en fjerdedel er og femten minutt
3-350	Malin	Ehm så plussa vi det sammen som ble tretti. Så tok vi en femdel som er tolv. Også plussa vi det

Malin sin forklaring av fremgangsmåte for løsningen på oppgave 3 er presentert ovenfor, og løsningen slik den ble skrevet opp av lærer på tavle vises i figur 26. Her er det viktig å se figur 26 i sammenheng med ytringene til Malin som beskriver fremgangsmåten, ettersom det ikke nødvendigvis er det samme som vises på tavle som er det Malin selv mentalt utførte. I denne delen kommer det tydelig frem hva Malin gir uttrykk for gjennom hennes egne ytringer, ettersom de er mer utfyllende, og dermed er andre ytringer enn de som kommer fra Malin fjernet i denne fremstillingen for å redusere omfanget av ytringer til det som er sentralt for analysen.

3-353	Lærer	… Førtito minutt fikk dere i svar - og så er dere litt usikker på hvordan den brøken skal skrives og så skrev dere den som førtito tolvdeler? …

I tillegg inkluderes lærerens oppsummerende kommentar (3-353) som følger etter Malin har forklart løsningen sin, som også er presentert i sammenheng med beskrivelse av undervisningen tidligere i dette kapittelet. Denne kommentaren tas med fordi den kan være med å belyse tolkningen av hvordan de ulike tallene brukes av Malin i prosedyren.

Visuell mediator

Malin sin forklaring av fremgangsmåte indikerer en dynamisk overgang mellom symbolsk og ikonisk visuell mediator. Hun går fra brøk på symbolform over til tegningen av urskive, og fra tegningen tilbake til symbolform ved heltall som antall minutt. Bruken av ikonisk visuell mediator kan illustreres med sirkelen som en *klokke* (3-336). Det er mulig at Malin har utført operasjoner på symbolene og urskiven mentalt, ettersom elevene ikke har skriveutstyr tilgjengelig der de sitter og hun blir sittende på plassen sin gjennom hele undervisningen. Det er interessant å merke seg hvordan Malin bruker sirkelen her, denne brukes kun til å omforme brøkuttrykk til heltall som hun kan utføre videre regneoperasjoner på. Den brukes ikke til addisjon, der brukes det symboler i form av heltall på lik linje med oppgave 2.

Narrativ

I møte med oppgave 3 kan vi finne spor av to narrativer som er kjent fra før, og ett nytt narrativ.

> M-N1: Svaret skal oppgis som brøk på symbolsk form (3-328).
> M-N3: I matematikk utføres regneoperasjoner på symboler (3-350).
> M-N4: Brøk kan omgjøres til heltall ved å utføre operasjoner på figurer (3-336).

Svaret skal uttrykkes på formen $\frac{a}{b}$, hvor a og b er heltall. For å finne b kan en se etter hvor mange deler det er på figuren, her 12. Summen av heltallene i form av antall minutt utgjør a. Svaret har sammenheng med figuren presentert med oppgaven på tavlen.

Ved brøkregning kan både symbolsk og ikonisk mediator opereres på, men i ulike sammenhenger. Dette følger av at for å addere brøk må en først omgjøre til heltall, hvor klokka kan brukes til hver enkelt brøk separat. Hvert ledd kan uttrykkes som heltall i form av antall minutter. Heltallet finner du ved å dele opp urskiven og se hvor mange minutt dette utgjør, eller ved å hente dette frem fra hukommelsen. Deretter adderes heltallene som står for antall minutt.

Ordbruk

Tallord brukes i forbindelse med utregningen, som antall minutt. I tillegg får vi se at hun knytter tallordet tolv til antallet deler i begrunnelsen for svaret hun oppgir, og skaper en forbindelse mellom antallet deler på figuren og tolvdeler som brøkord. Brøkord reserveres som merkelapp for leddene i regnestykket og svaret på oppgaven. Det eneste tilfellet av sammenligning er at hun sier at både tre tolvdeler (3-330) og en fjerdedel (3-346) er femten minutt, men det finnes ingen indikasjon om *saming* av de to brøkene. Hun peker med andre ord aldri på at de to brøkene er *det samme.* Vi ser en form for *saming* av nevner og antall deler, gjennom løsningen som $\frac{a}{12}$ og tilknytningen til figuren med 12 deler, og av $\frac{1}{12}$ og 5 minutter.

Malin snakker annerledes om at en fjerdedel er femten og de ulike regneoperasjonene som utføres. Når brøk gjøres om til minutt formes det som en rapport om hva tallene produserer. Her ser vi bruk som tre tolvdeler *er* femten minutt, som handler om egenskapene til brøken. For inndeling av figuren og addisjon formes ytringene som en fortelling om egne handlinger. Ordet *plussa* brukes som verb (3-350), og er en beskrivelse av handlingene hun selv utfører. *Jeg tok* (3-340) og *jeg delte* (3-336) viser at det er hun som utfører operasjoner med symbolene eller figuren, og resultatet av handlingene beskrives som *som ble* (3-350).

Prosedyre

I tabell 9 presenteres tolkningen av prosedyren som Malin bruker i møte med oppgave 3, slik den beskrives av Malin.

Tabell 9 – Malins prosedyre for oppgave 3

	Ytring	Symbol
3-328	*Førtito tolvdeler er svar*	$\frac{42}{12}$
3-330	*Tre tolvdeler er femten*	$\frac{3}{12} = 15$
3-346	*En fjerdedel er og femten minutt*	$\frac{1}{4} = 15$
3-350	*Plussa vi det sammen som ble tretti*	$15 + 15 = 30$
	En femdel som er tolv	$\frac{1}{5} = 12$
	Og så plussa vi det	$30 + 30 + 12 = 42$

Første steg i prosedyren handler også her om å oppgi løsningen, og deretter beskrive valget av en nevner som skal bevares. Videre går hun frem ved å omgjøre $\frac{3}{12}$ og $\frac{1}{4}$ til heltall i form av antall minutter, muligens ved å ta utgangspunkt i tegningen av sirkelen som illustrasjon av en klokke. Når hun viser til med inndeling i deler på 5 minutt hver, kan vi se at denne fremgangsmåten ikke vil fungere for leddet $\frac{1}{5}$ siden 5 ikke er en faktor i 12. Hvordan hun går frem videre fra dette kan tolkes på to ulike måter. Den ene er at hun bruker hukommelse til å hente frem heltallet, fordi inndelingen i 12 deler med 5 minutt i hver ikke fungerer. Den andre tolkningen er at av de 3 leddene som er presentert, så er femdel den eneste kjente brøken fra sekvens 2. Og da kan hun ha startet med å gjenkalle minutt-løsningen på denne fra sekvens 2, og deretter ha utforsket en mulig måte for å omgjøre de to resterende leddene til heltall. Uavhengig av rekkefølgen på behandlingen av leddene, ser vi at hun har to tilgjengelige måter å omgjøre brøk til heltall. En fra hukommelse, og en med utgangspunkt i figur.

Oppgavesituasjonen

Oppgaven for Malin her kan oppsummeres som:

1. Velge en nevner i form av et heltall som bevares
2. Merke hvert ledd som antall minutt
3. Addere antall minutt
4. Presentere svar som symbolsk brøk på formen $\frac{a}{b}$

I møte med denne oppgaven ser det ut til at Malin har valgt å gå bort fra strategien hun benyttet seg av i oppgave 2. Dette kan følge av at hun tolker en generell sammenheng i matematikkundervisning mellom feil svar på en oppgave og den strategien som er brukt, og at strategien da ikke kan brukes igjen. Det ser ut til at hun tar utgangspunkt i det som er tilgjengelig på tavle til å skape en ny strategi, hvor også denne oppgaven handler om å skape en prosedyre som tar i bruk alle tall og symboler, samt figuren, som er synlig på tavlen.

Malin ser ut til å inkludere både sekvens 2 og 3 som precedent. Fra sekvens 3 kan vi finne forsøk på å gjenta noe hun har sett andre gjøre før, hvor prosedyren hun har benyttet seg av har likhetstrekk med O2-L1 (Tabell 7). Det som derimot kommer til syne gjennom den prosedyren hun utfører er at Malin kanskje mangler noe av informasjonen, dette er informasjon om hvordan GG-b kom frem til at en halv er det samme som tre seksdeler for oppgave 2. Det hun kan ha hentet ut fra denne erfaringen er at brøkene slik de er uttrykt må manipuleres på et vis før hun kan utføre addisjon. Så leter hun etter erfaringer med omforming av brøk, og da følger en naturlig sammenheng til sekvens 2. Malin blir derimot usikker når hun har addert antall minutt, og vet ikke hvordan hun skal gå videre for å oppgi svaret som en brøk.

I denne oppgaven ser vi at oppgavesituasjonen for sekvens 2 og 4 vurderes som tilstrekkelig like av Malin, slik at hun tar utgangspunkt i erfaringer fra sekvens 2 i møte med oppgave 3. En annen mulig tolkning av situasjonen er at Malin tar utgangspunkt i prosedyren hun utførte for oppgave 2, men velger å utføre operasjoner som omformer tallene før hun legger dem sammen. Noe som derimot er motstridende med denne tolkningen er begrunnelsen for å bevare 12 som nevner. Dersom dette skulle være i samsvar med oppgave 2, begrunnet hun valget av tallet 1 som nevner fordi det bare er en (3-159). Her er begrunnelsen med utgangspunkt i antallet deler på figuren (3-328).

4.3. Siren

Ellen og Siren samarbeider, og i sekvens 2 presenterer Ellen deres fremgangsmåte for å finne ut hva en femdel av en time er. Empirisk materiale som legges til grunn for analysen av Sirens deltakelse i den matematiske diskursen er ytringer som handler om Malins løsning for oppgave 2, og egen løsning for oppgave 3.

3-082	Ellen	Vi tok eh ti gange fem som er femti, og så visste vi at da eh hvis det var tolv så visste vi at vi bare manglet to og til sammen så:nn og da tok vi bare eh når vi hadde femti så tok vi bare to~
3-084	Ellen	~Så det ble - ehm femtito femtifire femtiseks femtiåtte og så seksti.

Siren har tilsynelatende ulike måter å snakke om matematikk og brøk i møte med de to oppgavene. Som følge av dette vil det gjøres forsøk på å identifisere hvilke element som gjør denne forskjellen i diskurs for Siren gjennom analysen. Først presenteres oppgave 2, og deretter oppgave 3 før funn fra analysen av Siren oppsummeres kort.

4.3.1. Oppgave 2 - Det er ikke mulig fordi kakestykkene blir større

Alle ytringene fra Siren i forbindelse med oppgave 2 er presentert samlet under, i tillegg til ytring 3-171 fra Ellen som kan bidra til å oppklare noe av det som ligger bak Siren sin påstand om det hele (3-165).

3-165	Siren	Det er hvert fall det jeg tenkte med den det er jo at - du kan jo egentlig ikke forandre på det hele
3-167	Siren	Sånn hvis du ha:r - hvis du har for eksempel en eller annen kake da~
3-169	Siren	~eh da kan du ikke forandre eh, da kan du ikke - eh hvis du har *vent litt*
3-171	Ellen	… Eh du har en seksdel og en todel. Så mener hun [Siren] at hun ikke kan endre på det sekstallet …
3-183	Siren	Ja e:hm seks kanskje
3-187	Siren	E::h - eh en seksdel
3-232	Siren	Det [*En åttendedel*] kan jo egentlig ikke gå fordi det er mindre enn en halv
3-234	Siren	Det måtte~
3-235	Siren	~Det må jo være mer fordi at en halv eh det er jo - på en åttendedel det er jo fire åttendedeler. Men fire seksdeler det er jo mer enn en halv - så da måtte det vært mer - så det går ikke fordi at det er - det er ikke en halv

3-247	Siren	Ja det Lukas sa at altså at en sjettedel er jo større enn en åttendedel. Fordi at eh hvis du tar en kake {ukjent} da må du dele det i mindre biter. Men en sjettedel så får du mye større biter.

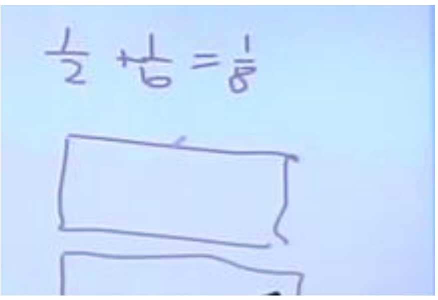
Når det kommer til oppgave 2 presenterer ikke Siren sin løsning på denne oppgaven, men tar del i en diskusjon som handler om Malin sin løsning (O2-L2). Vi får også senere i undervisningen vite hva Sirens løsning på oppgave 2 var, noe som trekkes frem under.

4-084	Siren	Vi hadde fire seksdeler

Fra ytring 4-084 kommer det frem at Siren ikke har samme løsning som Malin på denne oppgaven, noe som er sentralt for den videre analysen av Sirens diskurs. Læreren kan ha antatt at Siren selv har samme løsning som Malin har presentert, mens Siren korrigerer dette og peker på at hun hadde løsningen fire seksdeler på oppgave 2. I delkapittel 4.4. vil det demonstreres hvordan den prosedyren som Ellen og Siren benytter på oppgave 3 også kan gi riktig løsning for oppgave 2, og at det er en mulighet for at denne gruppen har benyttet samme fremgangsmåte for begge oppgavene.

Visuell mediator

Siren viser til en kake når hun skal begrunne påstanden om *det hele* i forbindelse med O2-L2 (3-167). Ettersom det kun er symboler som er synlig på tavlen i oppgave 2 er det vanskelig å vurdere hvordan Siren forestiller seg denne kaken. Dette kan være sirkel eller rektangulær kake, eller annen mental forestilling av en kake. Det som kan trekkes frem i denne sammenheng er at ettersom det er sirkel som har vært synlig på tavlen i sekvens 2 før Siren nevner kake, er det en mulighet for at det er sirkelen hun viser til.



Figur 27 – Rektangel tegnet av lærer i forbindelse med O2-L2

I figur 27 illustreres rektanglene som lærer tegner på tavle etter Siren har nevnt kake (3-167). På grunn av kameraets plassering var det ikke mulig å få med hele figuren som er nederst i utsnittet. Videre veksler Siren mellom symbol og tegning i argumentene sine. Etter ordet kake er brukt av Siren og læreren tegner opp rektangel, blir operasjoner utført på rektangelfigur som er tegnet opp på tavlen. Samtidig forholder hun seg også til symbolene, hvor hun utfører operasjoner på disse. For eksempel sier hun at *en sjettedel er større enn en åttendedel* (3-247) fordi du deler i mindre biter. Dette indikerer at Siren bruker både symbolsk og ikonisk visuell mediator i kommunikasjonen, hvor størrelsen for symboluttrykkene for hver brøkdel sammenlignes basert på inndelingen av rektangulær figur.

Narrativ

Under presenteres narrativ som Siren gir uttrykk for. S-N3 presenteres under oppgave 3, ettersom dette er første tilfelle hvor Siren gir uttrykk for samme narrativ som M-N3.

S-N1: Svaret skal oppgis som brøk på symbolsk form (4-084).
S-N2: Det hele skal bevares som det er (3-165).
S-N4: For brøk brukes figurer til å begrunne påstander om størrelse (3-167).

Ut over disse narrativene kan vi se at for en brøk på formen $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ er **a** antall biter av en kake som er delt i **b** like store biter. En bit av en kake delt i **b** like store biter er $\frac{1}{\boldsymbol{b}}$ (3-187). Størrelsen på en brøk kan avgjøres av å se på størrelsen på bitene. I tillegg er et av narrativene som Siren tar stilling til O2-L2, hvor det narrativet som Siren godkjenner er tolket og fremstilt på symbolsk form under.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\neq\frac{1}{8}$$

Analysene så langt kan tyde på at dette er det sentrale narrativet for Siren i oppgave 2, og at de resterende narrativene som følger handler om begrunnelser for hvorfor nettopp dette narrativet bør godkjennes av medelevene. Noen av disse vil beskrives videre, flere kan leses ut av prosedyren som beskrives litt lenger ned i dette underkapittelet, som for eksempel at svaret på oppgaven må være større enn en halv og en seksdel. Både symbol og tegning kan brukes for godkjenning av nye narrativer, hvor symbolene gir informasjon som kan brukes i operasjoner på ikonisk mediator. Siren skaper narrativer som involverer alle de seks ulike brøkene som er involvert i både O2-L1 og O2-L2.

Siren presenterer narrativet *det hele kan ikke forandres*, S-N2. At *det hele* ikke kan forandres, kan handle om tallet 6 eller inndelingen av kaken som ikke kan forandres på. Tallet 6 kan vi se at representerer det antallet deler du skal dele en kake inn i (3-183). Ettersom Siren aldri virker til å fullføre forklaringen sin på *det hele* (3-169), må vi se til det som Ellen tilbyr i sin forklaring (3-171). Hun peker på at Siren mener tallet 6 er det som ikke kan forandres. Siden de to jentene samarbeider, og vi fra ytring 4-084 kan se at det er 6 som bevares som nevner i løsningen på oppgave 2 er det en mulighet at denne forklaringen fra Ellen stemmer. Mangelen på protest fra Siren er med på å styrke denne tolkningen.

Ordbruk

Ord for heltall brukes i forbindelse med antallet deler på figuren, og antallet brøkdeler. Brøkord brukes som merkelapp på de ulike symboluttrykkene for brøk (3-235), til å beskrive inndeling av kake (3-187) og for å sammenligne de ulike brøkuttrykkene (3-235). Dette er indikasjoner om at brøkord kan handle om å dele inn i kake, og heltall kan handle om antallet av noe. Siren bruker også *en halv* (3-235), noe som kan være hentet fra hverdagsdiskurs som for eksempel del av en kjent frase i form av «en halv kake». *Det hele* er nytt matematisk uttrykk som introduseres av Siren (3-165), og hun viser til *det hele* som en egenskap ved brøken som ikke kan forandres på.

3-232	Siren	Det [En åttendedel] kan jo egentlig ikke gå fordi det er mindre enn en halv
3-235	Siren	… Fire seksdeler det er jo mer enn en halv …
3-247	Siren	Ja det Lukas sa at altså at en sjettedel er jo større enn en åttendedel. Fordi at eh hvis du tar en kake … da må du dele det i mindre biter. Men en sjettedel så får du mye større biter.

I ytringene fra Siren kan vi finne en del sammenligningsord som *mindre enn* og *mer enn* en halv, samt *mindre* og *større* biter. Noen utdrag som eksempel på dette er presentert ovenfor. Som vi kan se blir ordet *mindre* blir knyttet til både *større* og *mer* av Siren. Bruken av ordet *mindre* kan vise til enten liten som motsetning til stor, eller lite i motsetning til mye. Når Siren snakker om *mer* (3-235), kan det virke som at hun mener mer av figuren. Da vil *mindre* fungere som det motsatte av *mer*, og det er mulig at hun beskriver hvor stor del av hele figuren hver brøkdel representerer (3-232). Når Siren snakker om *større* (3-247), finner vi indikasjoner på at hun retter fokus mot heltallet på plassen til nevneren i brøken, og størrelsen på en bit når en deler inn figuren i det antallet biter som nevneren angir. Her er ikke hele brøken i fokus lenger, men relasjonen mellom teller, nevner og størrelsen på brøken. Hun knytter ordene mindre og større til biter av figuren, og bruker aldri ordene teller eller nevner. For å se mer på bruken av sammenligningsord hos Siren kan vi se dette i lys av Lukas sin bruk av sammenligningsord fra samme situasjon, som presenteres under.

3-241	Lukas	… er større enn en åttendedel
3-243	Lukas	Fordi en sjettedel er en større bit, holdt jeg på å si - enn en åttendedel

Her ser vi at i de tilfellene hvor Siren knytter <u>mer</u> med uttrykket <u>enn</u>, kobler Lukas <u>større</u> sammen med <u>enn</u>. Dette kan være indikasjoner om at der hvor Lukas ser på brøk som eget objekt med sin «egen størrelse», ser Siren på figuren, i form av en kake, for å kunne begrunne sine påstander. For Siren kan brøksymbolet være en representasjonsform av kaken, noe som samsvarer med beskrivelsen om at ledende realisering kan opptre som objektet i seg selv for en nybegynner i diskursen, mens andre realiseringer fungerer som representasjoner av dette objektet (Sfard, 2008).

Siren sine ytringer formes som fortellinger om hva mennesket kan gjøre med det hele eller en kake, som vi har sett at muligens kan være to ord for samme sirkel, eller så formes ytringene som en rapport om brøkens egenskap i form av størrelse når hun vurderer en brøk i forhold til annen brøk. Det hele kan ikke *forandres* handler om hva mennesket kan gjøre. Når du skal lage en del av en hel kake, så er det mennesket som utfører inndeling ved *da må du dele det i mindre biter* og *du får større biter* (3-247). I motsetning er beskrivelsene om at en halv *er* fire åttendedeler, og at fire seksdeler *er* mer enn en halv, objekt-nivå ytringer som kan forbindes med objektet kake. Vi ser her tilfeller av *saming* for en bit av rektangelfiguren og brøk på symbolform, og en halv og fire åttedeler.

Prosedyre

I tabell 10 presenteres en tolkning av Siren sin prosedyre for å vise at O2-L2 må være feil løsning.

Tabell 10 – Sirens prosedyre for oppgave 2

	Ytring	Symbol
3-232	*Det er mindre enn en halv*	$\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$
3-235	*En halv på en åttendedel det er jo fire åttendedeler*	$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$
3-247	*Fire seksdeler det er jo mer enn en halv*	$\frac{4}{6} > \frac{1}{2}$
	Det er ikke en halv	$\frac{4}{6} \neq \frac{1}{2}$
	Da må du dele det i mindre biter … En sjettedel så får du mye større biter	$\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$

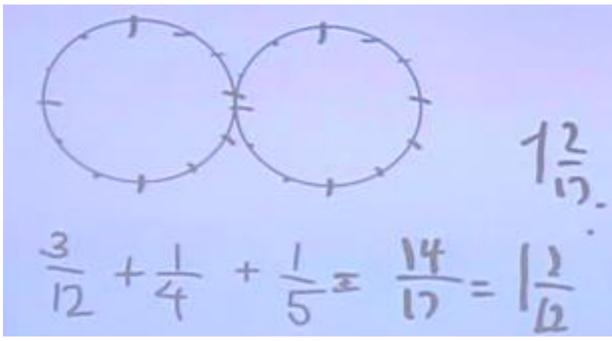
Prosedyren ser ut til å handle om å vise at begge leddene er større enn O2-L2, og at svaret $\frac{1}{8}$ dermed ikke kan være riktig. Siren påpeker aldri dette eksplisitt, men det er underliggende i resonnementet hennes. Spørsmålet blir kanskje om de andre elevene forstår denne resonneringen, og er villig til å akseptere den når ikke regelen som styrer Sirens kommunikative handlinger her er uttrykt eksplisitt. Det er en mulighet for at Siren omgjør en halv til fire åttedeler for å begrunne at fire seksdeler er mer enn en halv. Da kan Siren i så fall være avhengig av å få lik teller, illustrert gjennom samme antall biter av figuren, for å avgjøre hvilken brøk, eller bit, som er størst.

Oppgavesituasjon

For Siren ser det ut til at oppgaven handler om å velge hvilke av de to løsningene som skal godkjennes, og deretter overbevise klassen om valget. Dette kan beskrives som godkjenning av narrativ (Sfard, 2008). For å overbevise argumenterer hun for størrelsen på hver brøkdel, som en bit av en kake. For eksempel viser hun til at en åttedel er mindre enn en halv (3-232), og bruken av mindre enn i denne ytringen har vi sett, i forbindelse med ordbruk, at kan relateres til figur og størrelse på bitene. Hun gir aldri noe direkte argument om at fire seksdeler er riktig svar, og som følge av dette kan oppgaven som Siren utfører handle om å vise hvilket svar som ikke kan være riktig og deretter følger det indirekte at O2-L1 blir riktig. Oppgaven ser ut til å være utført når hun har presentert argumenter for hvorfor begge ledd i oppgaven er større enn O2-L2.

Basert på Siren sine argumenter i forbindelse med O2-L2, finnes ingen spor om at hun tar utgangspunkt i minutter eller urskive, som er det som ble presentert av læreren i sekvens 2. Ut fra dette er det mulig at Siren ikke ser sekvens 2 som *precedent* for denne oppgavesituasjonen, og dermed i møte med oppgavesituasjonen leter blant andre erfaringer med brøk som kan resultere i at hun beskriver brøkdelene som kake.

4.3.2. Oppgave 3 - Høyeste nevner må bevares



Figur 28 – Løsning 2 fra Siren

3-360	Ellen	Ja vi kom hvertfall frem til eh en hel og to tolvdeler
3-368	Siren	Ja -- Eh hvertfall den måten jeg tenkte på det var jeg - tok vare på eh den tolven, altså nevneren da - Eh og så tok jeg fire pluss fem som er ni, pluss de to eh tellerne ovenfor som er elleve, pluss tre er fjorten, og fjorten tolvdeler går jo ikke så da må jeg ta - da får jeg en hel og tre tolvdeler siden jeg må ta bort tolv av de fjorten - fordi at det blir en hel. Så tar jeg to eh tolvdeler *fordi det var det jeg fikk*

Ovenfor er Siren sin ytring (3-368) i sammenheng med løsningen på oppgave 3 presentert. Det inkluderes også en ytring fra Ellen (3-360), ettersom det først er Ellen som beskriver hva løsningen er mens læreren skriver denne opp på tavlen (Figur 28). Deretter beskriver Siren hvordan de kom frem til løsningen. Siste del av ytring 3-368, som er indikert av lav snakking, er rettet mot en elev som virker til å rette spørrende uttrykk mot Siren når hun forklarer fremgangsmåten.

4-071	Lærer	Siren -- var du med på den tanken til Pål?
4-072	Siren	Ja: nå tror jeg det er vi som har feil
4-074	Siren	Fordi alle de har sagt det
4-076	Siren	Ja fordi jeg er litt usikker på hvordan ma:n skal plusse
4-078	Siren	Eh ja det er liksom - Så jeg gjorde på en måte det vi gjorde første gangen - Den der seks~
4-082	Siren	Nei ikke en åttendedel
4-084	Siren	Vi hadde fire seksdeler
4-086	Siren	Ja så jeg eh gjorde likt

Ut over beskrivelse av fremgangsmåten for O3-L2 deltar Siren på nytt i dialogen i klasserommet etter lærerens spørsmål rettet til henne (4-071). De aktuelle ytringene knyttet til dette er presentert ovenfor, og følger etter O3-L3 er presentert fra Ivar på vegne av GG-b. Her ser vi hvordan Siren knytter det som har foregått i klasserommet i etterkant av sin løsning opp mot en revurdering av egen løsning.

Visuell mediator

Slik fremgangsmåten for løsningen på oppgave 3 presenteres av Siren, finnes det ingen indikasjon om at hun benytter seg av andre mediatorer enn symbolene fra oppgaven. Operasjonene her beskrives som utført på symbolene uten en overgang til verken tegningen av en sirkel eller kake, som vi så i hennes ytringer fra oppgave 2. En alternativ tolkning kan være at tegningen av to sirkler delt inn i 12 deler (Figur 28) brukes til å verifisere at svaret skal ligge ett sted mellom 1 og 2. Denne tolkningen støttes ikke direkte av ytringene fra Siren, og det kan dermed være like sannsynlig at hun ikke har forholdt seg til tegningene av sirklene i det hele tatt.

Narrativ

Noen av de narrativene som Siren gir uttrykk for i forbindelse med oppgave 3 er:

> S-N1: Svaret skal oppgis som brøk på symbolsk form (3-368).
> S-N2: Tallet 12 skal bevares som det er (3-368).
> S-N3: I matematikk utføres regneoperasjoner på symboler (3-368).

Siren tar stilling til bevaring av tallet 12 for denne oppgaven, S-N2. Nevneren realiseres som tallsymbolet 12, og denne skal bevares som den er. Tellerne er 1 og 1, og disse skal legges sammen med resten av tallene som ikke får merkelapp i form av teller eller nevner. Siren ser ut til å forholde seg til samme narrativ som Malin gjorde i oppgave 2 ved at kun symboler kan brukes i utregning, her vist til ved S-N3.

Siren sitt valg av fremgangsmåte for å løse oppgaven ser ut til å handle om å gjenta det som ble gjort tidligere (4-078), med tanke på prosedyre som produserte løsningen som ble godkjent for oppgave 2. For Siren kan dette være indikasjon om at hun ved første forsøk i oppgave 2 har funnet riktig fremgangsmåte, og da må denne prosedyren bevares som den er. Siren sier også at *fjorten tolvdeler går ikke* (3-368), noe som indikerer at hun har godkjent narrativet om at telleren ikke kan være høyere enn nevneren i en brøk. Dette er også kjent som *uekte brøk* i matematikk.

Ordbruk

Her finner vi ingen sammenligningsord, i motsetning til for oppgave 2 hvor hun brukte en god del slike ord. Ord for heltall dukker opp i forbindelse med utregningen, og brøkord brukes kun med referanse til leddene i oppgaven og svaret hun gir. Se eksempel under fra Sirens ytring 3-368.

«*Fjorten tolvdeler går jo ikke så da må jeg ta … En hel og to tolvdeler siden jeg må ta bort tolv av de fjorten fordi at det blir en hel*»

I tillegg bruker Siren noen matematiske ord for brøk som nevneren, tellerne og en hel. Svaret beskrives som en hel og to tolvdeler, mens når hun skal utføre operasjoner er det tolv fra fjorten som tas bort, ikke tolv av fjorten tolvdeler. Når hun begrunner valget om å ta bort tolv, kan vi igjen se spor av antallet deler, hvor tolv deler utgjør en hel, som indikerer saming av realiseringene $\frac{12}{12}$ og 1 med felles signifier *en hel*. Nevneren og tellerne virker til å være aktivert av lærerens bruk av disse ordene, hvor ordbruken fra Siren kan handle om å vise at hun vet hva som er hvor. Dette kan også støttes av flere ytringer fra elevintervju, presentert i underkapittel 4.1.4., om hvordan elevene har lært seg huskeregler for begrepene teller og nevner. For eksempel ytring E2-340. I tillegg kan vi se at Siren uttrykker nevneren som *den tolven* (3-368), og dette kan bety at hun viser til symbolet synlig på tavlen. Hadde det derimot handlet om kake eller sirkel i tolv deler ville ordbruken muligens vært mer lik Malins ordbruk for tolv som nevner fordi det er tolv deler (3-328), mens Siren viser aldri til figuren eller antallet deler i sin forklaring.

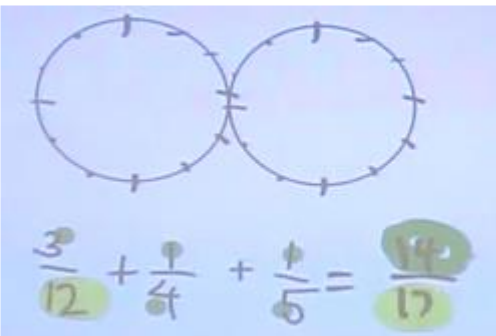
Forklaringen er formet som en fortelling om egne handlinger, hvor tallene kun eksisterer som en del av regneprosessen som utføres (Sfard, 2008). Som eksempel sier hun *tok vare på*, *tok jeg*, *som er*, *da får jeg* og *jeg må ta bort* (3-368). Kommentarene hennes mot slutten av timen inkluderer også ytringer som *hvordan man skal plusse* (4-076) og *vi hadde* (4-084), hvor menneskets handlinger står i fokus, og *vi hadde* indikerer at de har laget noe eller har noe.

Prosedyre

I tabell 11 presenteres en tolkning av prosedyren for løsning av oppgave 3, slik den beskrives av Siren. Tolkningen av prosedyren er gjort med utgangspunkt i ytring 3-368 og innholdet fra tavlen som er illustrert i figur 29. I denne figuren vises det hvordan læreren har markert hver av de ulike heltallskomponentene med samme farge basert på om de tilhører nevner eller teller i svaret som oppgis.

Tabell 11 - Sirens prosedyre for oppgave 3

	Ytring	**Symbol**
3-368	*jeg tok vare på den tolven, altså nevneren da*	$\frac{?}{12}$
	og så tok jeg fire pluss fem som er ni	$4+5=9$
	pluss de to eh tellerne ovenfor som er elleve	$9+1+1=11$
	pluss tre er fjorten	$11+3=14$
	jeg må ta bort tolv av de fjorten	$\frac{14}{12}-\frac{12}{12}=\frac{2}{12}$
	fordi at det blir en hel.	$\frac{12}{12}=1$
	Så tar jeg to tolvdeler.	$\frac{14}{12}=1\frac{2}{12}$



Figur 29 – Siren og Ellen sin prosedyre

Først viser Siren til hva hun velger å bevare i møte med oppgave 3, som er heltallet 12 og som tildeles merkelappen *nevneren*. Videre adderes de resterende fem heltallene som finnes i oppgaven. Når Siren har oppgitt løsningen som fjorten tolvdeler ser vi at hun fortsetter prosedyren ved å fjerne tolv, og oppgir at dette representerer *en hel*. Svaret oppgis deretter som blandet tall. Oppsummert kan vi si at prosedyren består av å operere på alle heltallene som finnes i oppgaven.

Oppgavesituasjon

Oppgaven som Siren utfører handler om å lage en prosedyre selv, og det er selve utførelsen av prosedyren som utgjør oppgaven. I møte med oppgave 3 kan det se ut til at sekvens 3 teller som precedent, i form av at Siren kan ha gjentatt den prosedyren hun utførte for oppgave 2 (4-078, 4-086). Med andre ord gjentar hun noe hun selv har gjort før. Dette vises også ved at Siren ikke tar i bruk sirkelfiguren som er synlig på tavlen i forbindelse med oppgave 3 (Figur 29), hvor denne ikke ser ut til å ha stor nok betydning til at den får være med å påvirke valg av precedent. I tillegg finner vi ingen signal om at hun henter fra erfaringer i sekvens 2, ved at hun verken viser til figur, eller ord som klokke, urskive eller minutter.

4.4. Hvordan ble møtet mellom elevene og urskiven?

I dette delkapittelet vil den utførte analysen av elevenes diskurs oppsummeres gjennom egne underkapittel for hver egenskap, i tillegg til en kort beskrivelse av elevens rutine, før en diskusjon av resultatene følger i kapittel 5. Det matematiske objektet i fokus for undervisningen er brøk, og den nye diskursen for elevene er addisjon av brøk med ulik nevner.

4.4.1. Visuell mediator

Gjennom analysen har vi fått innsyn i hvordan elevenes valg av strategi kan påvirkes av de visuelle mediatorene som er synlig på tavlen. Malin ser ut til å bli påvirket av hvilke typer visuell mediator som er synlig, mens Siren ser ut til å påvirkes i hovedsak av de symbolske visuelle mediatorene. Til tross for at det kun er symboler synlig på tavlen når Siren viser til en kake, er det mulig at hun henter fra tidligere erfaringer og mentalt forestiller seg denne kaken. Når læreren presenterer sirklene for første gang i sekvens 1 er det mulig at Siren allerede her tolker sirkelen som en kake istedenfor urskive. En alternativ mulighet kan være at klassen har snakket om kake i forbindelse med brøk tidligere i undervisningen, og da som rektangulær form.

Symbolsk mediator er tilsynelatende det som skal brukes for utregninger for begge elevene, hvor de utfører regneoperasjonene på tallsymbolene for heltall. Ikonisk visuell mediator kan fungere som hjelpemiddel, i form av omgjøring til heltall eller areal som kan sammenlignes, mens operasjoner for addisjon ikke utføres på ikonisk visuell mediator. Til tross for at begge elevene tar utgangspunkt i figurer, for å gjøre om brøk til heltall eller til å forme begrunnelser, får vi aldri se dem bruke figurene til å utføre regneoperasjoner. I forbindelse med oppgave 2 er det interessant å se hvordan Siren tar i bruk ikonisk visuell mediator for å argumentere for størrelsen til de ulike brøkene som er synlig på tavlen, mens når det gjelder oppgave 3 er denne resonneringen fraværende.

4.4.2. Narrativer

Som følge av narrativer om at svaret skal uttrykkes som en brøk på formen $\frac{a}{b}$ (S-N1, M-N1), og at et heltall skal bevares (S-N2, M-N2), kan elevenes strategivalg være sentrert rundt å finne to heltall som skal plasseres i løsningen. Det er derimot noe usikkerhet forbundet med hva som skal bevares, og læreren gir aldri eksplisitt uttrykk for hvilket tall som skal bevares. I møte med oppgave 3 velger begge elevene å bevare nevneren 12. Malin begrunner valget. Siren gir i dette tilfellet ikke en eksplisitt begrunnelse for valget om å bevare 12, men gjennom analysen har vi sett at dette kan være basert på det største heltallet. Denne tolkningen kan styrkes av ytringer fra både Ellen (3-171) og Felix (E1-130). På bakgrunn av dette kan vi se at det er en mulighet for at også Malin har valgt 12 fordi det er største heltall, og deretter forsøkt å finne en begrunnelse for dette i figuren. Med andre ord er det ikke sikkert at det var inndeling av sirkelen som var hovedårsaken til valg om bevaring, selv om Malin viser til dette i begrunnelsen.

Som vi har sett gjennom bruken av visuelle mediatorer så har elevene en oppfatning om at regneoperasjoner skal utføres på symboler (S-N3, M-N3), og figurer brukes til å begrunne påstander (S-N4) eller for å omgjøre brøk til heltall (M-N4). Malin sin beskrivelse indikerer at hun får heltall ved å dele klokka i tolv deler og deretter telle antall minutt. Hun bruker sirkelfiguren for å finne både teller og nevner i svaret, hvor nevner finnes i antall deler og teller utgjøres av totalt antall minutt. På denne måten produserer hun symbolsk form heltall ved å operere på figur. Vi ser eksempler på Siren godkjenner narrativer med utgangspunkt i en kake, hvor godkjenningsrutinen består av inndeling av kaken i biter og deretter sammenligne størrelsen på bitene. Dette følger derimot av at det er presentert to ulike løsninger på oppgave 2, og det finnes ingen indikasjon om at en godkjenningsprosedyre er tatt i bruk av Siren for oppgave 3.

Begge elevene inkluderer alle element som presenteres av læreren på tavlen i løsning av oppgaven. Siren begrenser dette til å inkludere alle symboler, mens Malin også inkluderer sirkelen når denne er synlig. Den måten de forholder seg til heltallskomponentene indikerer at elevene ikke har individualisert det matematiske objektet brøk tilstrekkelig for å kunne hente ut nødvendige narrativer fra egenskapene ved dette objektet. Dette er også forbundet med elevenes objektivisering, som vi skal se nærmere på i neste underkapittel. I tillegg er det relevant å trekke frem at elevene ikke ser ut til å se sine egne løsninger på oppgavene som matematiske narrativ som må godkjennes, og dette kan følge av at likhetstegnet ikke behandles som ekvivalens. En erfaren matematist vil kunne se narrativ på denne formen som mulig å godkjenne eller avvise etter matematiske godkjenningsprosedyrer.

4.4.3. Ordbruk

Ordbruken indikerer at både Siren og Malin retter fokuset mot heltallskomponentene når de utfører addisjon, og at navnet på brøkdelene er reservert som merkelapper for å vise til de symbolske brøkuttrykkene. Dette indikerer at de matematiske objektene elevene forholder seg til er heltallskomponentene i brøk, og at bruk av ord som seksdel eller sjettedel foreløpig ikke har noen betydning for elevene. Dette vises igjen både i fremgangsmåtene presentert av Malin og Siren, i begge elevintervjuene med henvisning til huskeregler for at teller er på topp og nevner er nede, og at høyeste heltall skal bevares.

I tillegg bruker Siren *det hele* som et brøkrelatert uttrykk, og hva hun mener *det hele* er har vært utfordrende å identifisere. Fra elevintervju ser vi at Elisabeth (E2-368) viser til at nevneren er det hele, og dette kan ses i sammenheng med Siren sin påstand om at det hele ikke forandres på (3-165). Dette kan styrke tolkningen av at elevene ser det hele som nevneren og at Siren derfor mener at tallet 6 ikke kan forandres, som Ellen ga uttrykk for (3-171).Vi finner også bruken av ordet nevneren og tellerne hos Siren, og noe av det som er interessant her er at det bare er en av de tre nevnerne i oppgaven som her kvalifiserer for å få merkelappen nevneren, og to av de tre tellerne som får merkelappen tellerne. Dersom vi ser på hvilke heltall som bevares, i forbindelse med begge oppgavene, kan nevneren se ut til å realiseres som det høyeste heltallet i oppgaven, noe som kan støttes av Felix (E1-130).

Sirens ledende realisering av brøk ser ut til å være en kake, hvor ordbruken viser at hun tenker på brøk som en bit av figuren som representerer kaken. Det som må påpekes her er at kake kan realiseres som noe annet enn rektangel. Dette følger av Siren sin nøling i ytring 3-183 og 3-187, sirkel som har vært synlig i sekvens 2, og at det er læreren som velger rektangulær figur uten at Siren gir uttrykk for hvilken geometrisk form hennes mentale forestilling av en kake har. Det kan være at tilstedeværelsen av sirkelen indikerer at kake er del av oppgaven for Siren, og dette medfører at hun kanskje ikke ser en urskive slik læreren har tiltenkt denne figuren. Denne tolkningen støttes i tillegg av at Siren aldri refererer til minutt i sine ytringer.

Elevenes begrunnelser formes som en forklaring av fremgangsmåten, og når elevene presenterer fremgangsmåten som en fortelling om egne handlinger indikerer dette at de foreløpig ikke har objektivisert brøk. De fokuserer på menneskets handlinger, og ikke egenskaper ved det matematiske objektet brøk. Når det gjelder objektivisering kan vi også se hvordan begge elevene kun forholder seg til brøk når de refererer til symbolene som er synlig på tavlen, i tillegg til at Siren sin bruk av <u>mer enn</u> og <u>mindre enn</u> indikerer at brøk ikke er objektivisert. Ved nærmere undersøkelser ser vi at hun tilsynelatende er avhengig av kake og inndeling i biter, samt et menneske som utfører inndelingen. Dette indikerer at brøk ikke er objektivisert av Siren.

4.4.4. Prosedyre

For begge oppgavene handler prosedyren om å finne to heltall som skal plasseres oppe og nede i svaret, og det ser ut til at nevneren i svaret skal identifiseres og plasseres først. Malin forholder seg til ulike prosedyrer i møte med de to oppgavene, mens Siren kan ha brukt den samme. I møte med oppgave 2 har ingen av elevene en tilgjengelig prosedyre, mens når Siren møter oppgave 3 har hun allerede tilgjengelig prosedyre fra oppgave 2 (4-086). Ettersom det ikke gis noen beskrivelse for en løsning av oppgave 2 fra Siren kan vi ikke med sikkerhet si at hun bruker samme prosedyre for begge oppgaver, men den prosedyren som brukes for oppgave 3 vil kunne gi riktig svar for oppgave 2. Hvordan dette kan ha vært utført demonstreres under.

$$\frac{1+1+2}{6} = \frac{4}{6}$$

Dette svaret så ut til å være det som ble godkjent av klassen i forbindelse med oppgave 2, og dette kan ha forsterket gjenbruk av prosedyren for Siren. Valget av prosedyre kan også støttes av at andre elever også valgte å bevare 6 som nevner i oppgave 2, og 12 som nevner i oppgave 3. Alt dette kan ha fungert som signaler om at prosedyren var riktig, og dermed ble beholdt som den var.

Gjennom prosedyren får vi også innsikt i elevens individualisering av brøkdiskursen. Siren forklarer blant annet at en halv er det samme som fire åttedeler (3-235), noe som kan indikere at hun er kjent med likeverdig brøk. Malin derimot virker ikke til å skape forbindelse mellom en firedel og tre tolvdeler, til tross for at hun er klar over at begge utgjør 15 minutt av urskiven (3-330, 3-346). Vi ser at utfordringen for Malin kan ligge i overgangen fra totalt antall minutt til brøk på symbolsk form. Også fra 2. elevintervju (E2-319) kan vi se at elevene her stopper samme sted som Malin gjorde i sin fremgangsmåte for oppgave 3. Strategien som brukes av elevene i intervjuet har klare likhetstrekk med den prosedyren som Malin beskriver i forbindelse med oppgave 3 (3-350), og de stopper også opp ved 42 som svar (E2-320).

4.4.5. Oppgavesituasjon

Den oppgaven som ble utført av Malin og Siren var ikke nødvendigvis den samme oppgaven som ble gitt av læreren. Elevenes tolkning av oppgaven kan ha blitt påvirket av for eksempel manglende ord som *minutt*, *av en time* og *urskive/klokke* fra læreren, som ble brukt i forbindelse med oppgave 1. I tillegg til dette var det kun en brøk etterfulgt av likhetstegn i oppgave 1, mens addisjonssymbolet var inkludert i påfølgende oppgaver. Figur 30 og 31 er utviklet av meg, i forsøk på å illustrere hvordan symbolske uttrykk fra tavlen kan ha sett ut gjennom perspektivet til en outsider i diskursen.

$$\frac{\square}{\square} = \square$$

Figur 30 - Oppgave 1

$$\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$

Figur 31 - Oppgave 2

Her kan vi også se hvordan elevene kan påvirkes av at svaret på oppgaven skal oppgis som brøk, noe som indikerer at tilsynelatende små detaljer i undervisningssituasjonen kan påvirke elevenes strategivalg. Dette kan medføre at elevene forkaster oppgave 1 som *precedent* i møte med oppgave 2, noe som ser ut til å være tilfelle for både Malin og Siren. Dersom oppgave 1 skulle kvalifisert som precedent i forbindelse med dette, er det mulig at elevene må finne ut hvordan de går videre fra antall minutt til en brøk. Allerede under gruppesamtalene i forbindelse med oppgave 2 får vi indikasjoner om at Pia mangler en forbindelse (3-128), hvor Pia tar utgangspunkt i sekvens 2 ved å omgjøre brøk til antall minutter. Hun uttrykker derimot usikkerhet om hvordan hun skal komme seg tilbake til brøk. Det kommer tydelig frem gjennom analysen at både Malin og Siren er usikre på hva som skal være nevneren i oppgavene. Illustrert med figur 32 er den grønne boksen den manglende forbindelsen, fra prosedyren som ble introdusert i sekvens 2, som kan gjøre det utfordrende for elevene.

Figur 32 – Den manglende forbindelsen

For læreren, som en *insider* i den matematiske diskursen, vil denne overgangen muligens følge naturlig fra den første ved å reversere overgangen fra brøk til antall minutt. For en *outsider* ser vi at dette er en helt ny type oppgave, ettersom flere tilsynelatende ulike brøker kan gi samme antall minutter. På bakgrunn av dette er kanskje det siste steget fra minutt til brøk det mest krevende for elevene.

Noen flere eksempler på hvordan elevene tar i bruk tidligere erfaringer er at elevene velger å bevare et heltall, noe som kan indikere at de henter erfaringer fra en precedent som involverer brøk. Videre kan det at begge elevene utelukkende forholder seg til heltallskomponenter indikere at disse erfaringene hentes fra addisjon av brøk med lik nevner. Som vi har sett kan Siren ha benyttet samme prosedyre for begge oppgavene, noe som indikerer at hun ser sekvens 3 og 4 som tilstrekkelig like til å rettferdiggjøre en gjentakelse av det som ble gjort i sekvens 3 når hun står ovenfor oppgave 3 i sekvens 4. Den diskursive endringen vi ser hos Malin mellom oppgave 2 og 3 kan følge av at hun tolker feil svar på oppgave 2 som signal om at hun må bruke en ny strategi i møte med oppgave 3. Dette medfører at hun søker blant tidligere erfaringer på ny, og synligheten av sirklene kan medføre at sekvens 2 nå er gyldig som precedent.

4.4.6. Rutine

Vi kan se at Malin bruker informasjonen som gis av oppgaven i form av heltall til å utføre regneoperasjonene. For oppgave 2 er det utelukkende selve utførelsen av prosedyren som er i fokus, hvor hun tilskriver lite verdi til løsningen som oppgis, og det er manglende sammenheng mellom de ulike stegene i prosedyren. I møte med oppgave 3 ser vi tegn til en begynnende vertikal forbindelse mellom prosedyren for omgjøring fra brøk til minutt og prosedyren for addisjon av brøk med lik nevner (Lavie & Sfard, 2019). Opprinnelsen til denne begynnende forbindelsen følger muligens av Pia sitt fokus på brøk som minutt i løsningen fra oppgave 2 (3-122). Dette indikerer en utvikling i rutinen hos Malin, noe som kan beskrives som del av deritualiseringsprosessen. Rutinen mangler derimot en forbindelse mellom hvordan antallet minutt videre skal brukes i brøken som oppgis som svar på oppgaven, hvor heltallet 42 plasseres som teller i svaret uten å ta stilling til forholdet mellom teller og nevner i en brøk. At det mangler en sammenheng mellom stegene i løsningen indikerer at det kan være forsøk på å gjenta noe hun har sett eller gjort før. Når Malin ikke tilskriver handlingene sine noen mening indikerer dette en form for imitasjon, som kan beskrives som en rituell rutine.

Rutinen som kan identifiseres i forbindelse med oppgave 2 for Siren, ser ut til å handle om å argumentere for eller imot løsningen som er gitt. Ettersom denne rutinen handler om å godkjenne en av to løsninger, som også kan beskrives som matematiske narrativ, kan rutinen bære preg av å være utforskende (Sfard, 2008). Det som kan stride mot tolkningen av rutinen som utforskende er Siren sin realisering av brøk som en kake, hvor kake kan tolkes som et konkret objekt og ikke et matematisk objekt. Det er mulig at hun forestiller seg en form for representasjon av en kake, og rutinen kan dermed ikke beskrives som fullstendig utforskende. For oppgave 3 bærer rutinen tydelige preg av å være ritual. Siren beskriver selv at hun var usikker på hvordan hun skulle utføre regneoperasjonene (4-076), og dermed kan motivet for utførelsen være sosial tilhørighet. Avslutningsvis kan det bemerkes at i begge oppgaver former Siren begrunnelsene sine som en beskrivelse av utførelsen, noe som kan indikere at hun har fokus på prosess fremfor produkt. Dette følger av både inndeling av en kake for å vise hvorfor en brøk er større enn den andre, og når hun beskriver egen løsning på oppgave 3. Siren ser derimot ut til å ha et større fokus på prosess i møte med oppgave 3 enn det som er identifisert i forbindelse med oppgave 2.

Oppsummert kan vi si at både Malin og Siren sine rutiner i hovedsak kan beskrives som ritualer, hvor det er en mulighet for at Malin har kommet lenger i deritualiseringsprosessen enn Siren på dette tidspunktet.

5. Diskusjon

I dette kapittelet vil funn fra analyse diskuteres i lys av eksisterende forskning og forskningsspørsmålene som er presentert i innledningen. Disse forskningsspørsmålene er:

S1: *Hvordan kan elevenes tidligere erfaringer innenfor matematikk påvirke elevenes strategier og løsninger i møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*
S2: *Hvordan kan det kommognitive perspektivet bidra til å få innsikt i elevenes møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*

Først vil vi se nærmere på hvordan analysen av de ulike egenskapene har bidratt til å gi svar på S2, og etter dette drøftes eksisterende forskning i lys av funn. Kapittelet avsluttes med å belyse kunnskapen som denne studien har bidratt med, og hvilke spørsmål som fortsatt står ubesvarte. Implikasjoner vil videre presenteres i konklusjonen av oppgaven. Forskningsspørsmålene som skal diskuteres i denne delen presenteres under.

5.1. Hvordan har det kommognitive perspektivet bidratt til innsikt i elevenes møte med addisjon av brøk med ulik nevner?

En sentral del av det kommognitive rammeverket for den analysen som er utført vil være bevisstgjøringen på forskjellen mellom perspektivet til en insider og en outsider. I teorikapittelet ble det beskrevet hvordan insider-perspektivet viser til en erfaren deltaker i den aktuelle diskursen (Sfard, 2008). Begge elevene fra analysen står tilsynelatende fortsatt som outsidere til denne diskursen, hvor de ikke er kjent med reglene eller det nye matematiske objektet som diskursen er sentrert rundt. Fra lærerens perspektiv, og forskeren, kan en sammenheng mellom innholdet i de ulike sekvensene være åpenbar. Dersom en forsøker å se elevenes løsninger og strategier utelukkende gjennom dette perspektivet, vil disse oppleves som både uventet og uforklarlige (Lavie et al., 2019). Hvorfor tar ikke elevene utgangspunkt i urskiven for å løse oppgavene? Hvorfor adderer Siren alle heltallene utenom det ene hun velger å bevare som nevner? Hvorfor velger Malin å bevare tallet 1 i oppgave 2? Rekken med spørsmål kan fortsette. Ved å både ta perspektivet til en insider og en outsider, samt veksle mellom disse perspektivene gjennom analysen, kommer det til syne hvordan elevenes valg i utgangspunktet kanskje ikke er så overraskende som det først ser ut til. Elevene gjør blant annet forsøk på å kombinere regler for addisjon av heltall med eksisterende kunnskap om brøk.

5.1.1. Visuell mediator

Gjennom analysen har vi sett hvordan visuelle mediatorer kan bidra til elevenes tolkning av oppgaven og hvordan de identifiserer precedents (Lavie et al., 2019) som de henter erfaringer fra. Elevene tok i bruk visuelle mediatorer som var synlig fysisk i undervisningen, men det var også indikasjoner om at blant annet Siren benyttet seg av mentale forestillinger. En visuell mediator kan brukes til å identifisere objektet for kommunikasjonen, og kan være synlige objekter som brukes for å koordinere kommunikasjonen (Sfard, 2008).

Visuelle mediatorer som ble presentert på tavlen påvirket elevens strategi ved at begge elevene inkluderte alle symbolske mediatorer i sine strategier, i tillegg til at Malin også inkluderte ikonisk visuell mediator når dette var synlig. Dette kan indikere at elevene tolker situasjonen som at innholdet på tavlen er sentralt for den oppgaven de står ovenfor. Det som derimot ikke er så enkelt for elevene å tolke er hvordan dette innholdet skal brukes, og som følge av det kan det være viktig å tydeliggjøre denne forbindelsen for elevene. For å illustrere med eksempel fra undervisning kan vi se hvordan læreren aldri ser ut til å gi eksplisitt uttrykk for at elevene skal benytte prosedyre fra oppgave 1 videre for å kunne løse oppgavene. Her kan det se ut til at elevene trenger mer støtte for å finne sammenhengen mellom urskive og minutt over til regnestykkene som presenteres i påfølgende oppgaver.

Et uventet og overraskende resultat fra analysen er elevenes tilsynelatende motstand mot å bruke figurer i utregning. Kan denne motstanden fungere som hindring for elevenes læring?

5.1.2. Narrativer

Under presenteres det noen av de narrativene som kan ligge til grunn for elevenes narrativer. I denne delen vil det kort diskuteres hvordan hver av de aktuelle narrativene kan hindre elevenes læringsprosess i brøk. De følgende narrativene er forskerens egen fortolkning av meningsinnholdet i elevenes diskurs:

> N1: Løsningen på en oppgave skal uttrykkes på samme form som leddene i oppgaven.
> N2: For addisjon av brøk med lik nevner skal nevneren bevares som den er.
> N3: I matematikk skal fremgangsmåte for løsningene beskrives med bruk av symboler.
> N4: Brøk kan representeres som heltall ved å vise til del av noe.

N1 kan hindre elevene i å se oppgaven som addisjon av rasjonale tall. Dette følger av at begge elevene tolker at oppgaven krever at de kommer frem til to separate heltall og så lenge elevene sitter med oppfatningen om at de skal produsere to uavhengige heltall, vil de ikke kunne se brøk som egen tallenhet. N2 kan hindre elevene i møte med addisjon av brøk med ulik nevner. Elevenes usikkerhet forbundet med hva som skal bevares, og hvorfor, gjør at de feilaktig bruker dette i møte med ulike nevnere. Dette kan føre til at elevene godkjenner narrativer (Sfard, 2008) som at største heltall eller nevner skal bevares, noe som kan gi eleven utfordringer når de møter addisjon med ulik nevner.

N3 ser ut til å være det som kan hindre elevene i å hente løsningen ut fra figuren som er tilgjengelig. Det hadde vært mulig for elevene å finne summen ved å legge sammen hver brøkdel i form av antall minutt på figuren, og deretter lese av løsningen som førtito sekstideler direkte fra figur. N4 viser at når elevene ikke blir gjort oppmerksom på hva brøkdelen er en del av, avgjør de selv. Så lenge de ikke blir gjort klar over at antallet minutter er brøkdelen av 60 minutt, vil dette hindre elevene i å se forholdet mellom teller og nevner. Istedenfor ser de det som del av antallet markeringer på figuren. Dette påvirker også bruken av likhetstegnet.

Et resultat som ikke var forventet, var hvor lite som indikerer at elevene bevarer narrativ fra heltallsdiskursen som ikke går overens med brøkdiskursen. N1 og N3 kan ha sin opprinnelse i heltallsdiskursen, men vil ikke automatisk være til hinder for elevenes læring i møte med addisjon av brøk. Det eneste identifiserte narrativet fra heltallsdiskursen som kan være problematisk er at regneoperasjonen addisjon ser ut til å handle om heltall. Dette narrativet må forkastes før elevene er i stand til å skape forbindelser mellom stegene i prosedyrer for addisjon av brøk. Siden dette narrativet ikke nødvendigvis påvirker elevens deltakelse i addisjon av brøk med lik nevner, kan dette forsterkes gjennom elevens erfaring her.

5.1.3. Ordbruk

Analysen av ordbruk illustrerer hvordan elevene kan realisere det matematiske objektet som handlingene utføres med, hvor ordbruken hos elevene i denne studien indikerte at de eneste matematiske objektene elevene hadde individualisert var heltall (Sfard, 2008). Gjennom analysen fikk vi se at de fokuserte på heltallskomponentene i utregninger, hvor brøkbegrep ble reservert som merkelapp for ulike kombinasjoner av tallsymboler på brøkform. At brøkrelaterte begrep fungerte som merkelapper indikerte blant annet at det ikke er brøk som er objektet de opererer på, mens elevenes bruk av tallord for heltall derimot viste at det var heltall som var det matematiske objektet. Dette viser at elevens fokus er rettet mot heltallskomponentene fremfor forholdet mellom teller og nevner, og brøk som egen tallenhet.

I analysen ble det illustrert hvordan bruken av nøkkelbegrep som det hele, nevner, teller og navn for brøk og heltall kan gi nyttig informasjon om elevens diskurs. Realiseringer viser seg å være sentralt for å forstå hvordan elevene har utviklet strategien, noe som kan illustreres med utgangspunkt i eksempel fra hvordan begge elevene bevarer nevneren 12 med utgangspunkt i ulike realiseringer. I tillegg ble ledende realisering (Sfard, 2008) spesielt viktig i Siren sitt tilfelle, hvor dette var en kake. Dette kan ha medvirket til at sirkelen ikke ble sett på som en urskive. Analysen av elevens diskurs i forbindelse med ordet kake viser hvor viktig det er å forsøke å høre hva eleven egentlig sier, og få innsyn deres måte å se verden på. Videre spørsmål som følger av dette kan være hvordan læreren kan tilrettelegge for elevenes ledende realiseringer. Det ble også tydelig hvor viktig det er å legge merke til hvilke ord som ikke brukes, som at Siren ikke navngir alle tellerne som tellere.

I tillegg er elevenes begrunnelser viktige for å få innsikt i elevenes tenking. Så lenge elevene retter fokuset mot hvordan de har gått frem når de skal begrunne løsningene sine vil det være vanskelig for både forskeren, læreren og medelevene å få innsikt i elevens tenking. Lærere bør være bevisst på disse ulike måtene å begrunne løsninger på, slik at de kan rette fokuset hos eleven over på de valgene som tas underveis i en strategi og vektlegge at eleven forklarer hvorfor dette valget tas. Det er for eksempel kun gjennom forklaringen av hvorfor tallet 12 er bevart at vi får innsikt i hvordan Malin tenker. Når Siren bevarer tallet 12, ser vi at hun ikke begrunner hvorfor og vi blir stående igjen med tolkninger av meningsinnholdet. Læreren kan ved et enkelt spørsmål muligens oppklare om dette handler om største heltall. Denne informasjonen kan videre bidra til å få innsikt i hvordan eleven utnytter tidligere erfaringer, et eksempel kan være at største tall bevares.

5.1.4. Rutine

Til tross for at læreren, sett gjennom et insider-perspektiv (Sfard, 2008), legger opp undervisningen til at elevene skal skape strategi for addisjon av brøk med ulik nevner med utgangspunkt i minutt av en time, er elevenes tolkning av oppgaven (Lavie et al., 2019) en helt annen. Vi ser hvordan elevene påvirkes i større grad av det som er synlig på tavlen for den aktuelle oppgaven, enn det som ble gjort i undervisningssekvensen før. Det er også gitt en mulig forklaring på hvorfor elevene ikke tok i bruk prosedyren som ble introdusert i oppgave 1, og dette var mulig gjennom en analyse av oppgavesituasjonen. Her ble det belyst hvor viktig det er å være eksplisitt om de diskursive reglene som ligger bak ulike handlinger i matematikk (Sfard, 2007).

Oppgavesituasjonen som konsept (Lavie et al., 2019) har vist seg spesielt nyttig i å forklare forskjellene i elevenes strategivalg. Det bidrar til å belyse mekanismene bak hvor elevene henter fra erfaringer, og hva som tas i bruk. Gjennom analyse av oppgavesituasjonen ble det mulig å få innsikt i hvordan ulike elever i samme situasjon kan tolke signaler på ulike måter. I tillegg får vi innsikt i hvordan en liten endring i oppgavesituasjonen, tilstedeværelsen av ikonisk visuell mediator, kan skape en relativt stor endring i strategibruken gjennom analysen av Malin. Dette er indikasjoner om at det ikke nødvendigvis er utelukkende elevenes kunnskap som er utfordringen, men hvordan elevene tar i bruk tidligere erfaringer basert på signaler i situasjonen. Hvilke signaler som påvirker, og i hvilken grad, må undersøkes videre.

5.2. Eksisterende forskning

Noe av det som har blitt belyst gjennom analysen av Siren og Malin støtter funn fra studien til Roberts og Le Roux (2019), hvor kilden til elevenes narrativer og valg av rutine påvirkes av utseende på oppgaven som gis. Det finnes også indikasjoner om at elevene ser betingelse for avslutning av rutinen (Sfard, 2008) som at svaret er oppgitt, ikke at det er ekvivalens.

«*They perform their routines for and with others using the … visual appearance and spatial organisation as the source of their narratives. … For all learners the closing condition is the appearance of the solution.*» (Roberts & Le Roux, 2019, s. 13)

Når det gjelder elevenes tilbakeholdenhet i å bruke figurene som en del av regneoperasjonen, kan vi finne spor av tilsvarende funn i Berger (2013) sin studie. På lik linje med analysen i denne oppgaven, stilte hun seg spørsmål rundt studentenes manglende utnyttelse av de mulighetene som lå i digitale redskap og kom frem til at en mulig årsak var holdninger innenfor matematikk. Vi har sett hvordan elevene ikke utnytter mulighetene som ligger i figuren som læreren presenterer til tross for at elevene er i stand til å benytte figuren, noe som ble illustrert gjennom deres deltakelse i oppgave 1. Spørsmålet om hvorfor de ikke utnytter figuren kunne spores til blant annet narrativ om at det kun er symboler som brukes i regning, kombinert med at elevene ikke så en tydelig forbindelse mellom oppgave 1 og de påfølgende oppgavene.

En av årsakene bak hvorfor brøk er en stor utfordring i dagens matematikkundervisning kan muligens følge av tendensen til å se dette gjennom insider-perspektivet. Først når vi tar posisjonen til en outsider vil vi kunne se hva som egentlig ligger til grunn for elevens uventede respons på en oppgave, noe som tidligere er blitt belyst gjennom studien til Lavie og Sfard (2019). Forskerne tilbyr her sin tolkning av hvorfor barnet ikke velger å telle når de skal svare på WiTM-spørsmål, «*Where is There More*». Det som er uventet gjennom insider-perspektivet, har med andre ord potensielt en logisk og naturlig forklaring når en tar outsider-perspektivet. Lærerens posisjon som insider i den matematiske diskursen kan bidra til at en ikke vektlegger ulikhetene mellom addisjon av heltall og andre typer tall, og dermed kan læreren ubevisst bidra til at elevene tar utgangspunkt i erfaringer med heltall.

Analysen i denne oppgaven har identifisert noen potensielle påvirkningsfaktorer som lærere kan være bevisst på, og som et eksempel har vi sett hvordan elever i samme klasse bruker samme visuelle mediator på ulike måter og dermed ender opp med å snakke om ulike prosesser. Det samme gjelder for forskningen. Så lenge ulike fenomen plasseres under samme begrep vil det være vanskelig å bygge videre på hverandres arbeid. Misoppfatning er et eksempel, hvor Siegler et al. (2011) er en av de som peker på at det finnes større variasjon i strategibruken enn det som kan tilskrives en systematisk misoppfatning som heltallstenking. Dette er et eksempel på hvordan begrepsbruken kan skjule ulike underliggende prosesser. Gjennom det kommognitive perspektivet vil elevenes motstand mot tap av eksisterende narrativ være en uunngåelig del av læringsprosessen.

5.2.1. Fokus på heltallskomponentene

I forbindelse med eksisterende forskning på brøk kan potensielt Malin og Siren plasseres under den mer generelle kategorien for misoppfatninger som er beskrevet som heltallstenking (Bjerke et al., 2012), eller «*whole number bias*» (D. Braithwaite & Siegler, 2018). Denne beskrives som at elevene har fokus på heltallskomponentene i brøk fremfor å se brøk som egen tallenhet. Til tross for at dette ikke har vært i fokus for analysen i denne studien kan vi se hvordan dette kan være tilfelle for begge elevene, hvor de enten fokuserer på heltallskomponentene som svaret skal bestå av eller på heltallskomponenter i både oppgave og svar.

Gjennom analysen har vi sett hvordan motstand mot tap av eksisterende narrativ (Sfard, 2008) om addisjon kan bidra til heltallstenking, hvor elevenes eksisterende narrativ om addisjon med heltall må forkastes i møtet med den nye diskursen. Motstanden mot tap av eksisterende narrativ vises igjen i elevenes forsøk på å bruke egenskaper og regler fra heltall i forbindelse med brøk. I møte med addisjon av brøk så vi hvordan elevene kan forbinde addisjonssymbolet med heltall, noe som kan gjøre elevene mer tilbøyelige til å se brøk som en form for oppstilling av heltall. Det er først når brøk er objektivisert at elevene kan forbinde addisjonssymbolet med brøk, som en egen tallenhet. Med andre ord kan beskrivelsen om at kunnskap om heltall fungerer som en barriere for å lære om brøk (Siegler et al., 2011) være en konsekvens av at elevene utfører regneoperasjoner med det matematiske objektet heltall frem til brøk er objektivisert.

I samsvar med funn fra tidligere forskning ser vi også at elevene i møte med ulik nevner bruker en strategi som kan plasseres under det som beskrives som *separate heltall*-strategi (Siegler et al., 2013). Fra analysen kan vi se at denne typen strategibruk også kan ha sin opprinnelse i prosedyren for addisjon av brøk med lik nevner. Det finnes også variasjon i hvordan de ulike elevene forholder seg til heltallskomponentene. Opprinnelsen til denne typen strategibruk, med fokus på heltallskomponentene i brøk, ser vi at kan ligge i møtet mellom to inkommensurable diskurser hvor de nye metadiskursive reglene ikke er kjent for elevene. Elevenes forsøk på å kombinere regler fra begge diskursene leder til noen typiske mønster som inkluderer element fra både heltall- og brøkdiskursen, hvor det finnes stor variasjon mellom hvordan reglene kombineres av de ulike elevene.

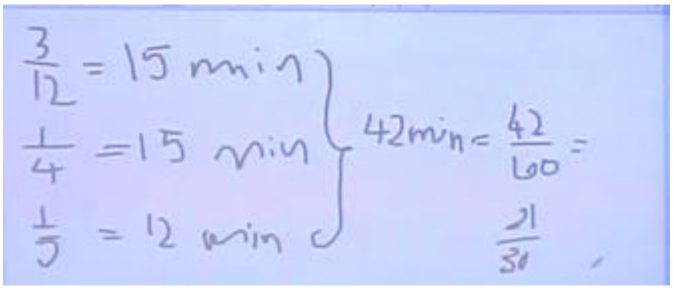
Forslaget fra D. W. Braithwaite et al. (2018) om at elevene bør lære det konseptuelle grunnlaget for addisjon på ny i møte med brøk støttes av resultatene fra analysen i denne studien. Regneoperasjoner har sin opprinnelse i praktiske rutiner, som gjerninger, hvor utviklingen av regnestrategier som tar utgangspunkt i bruk av symboler har foregått gjennom en omfattende diskursiv utvikling (Lavie et al., 2019). Som følge av dette er det mulig at elevene bør introduseres for brøkaddisjon gjennom gjerninger, og deretter videreutvikle dette til utforskende rutiner hvor de matematiske symbolene kan representere det abstrakte diskursive objektet brøk. Når elevene møter symbolsk form først, møter de den representasjonsformen av brøk som er mest kompleks (Tsai & Li, 2017). Som alternativ er det mulig at elevene bør bli kjent med både det nye matematiske objektet og regneoperasjoner utført med dette objektet gjennom andre tilnærminger før de eksponeres for den symbolske formen.

5.2.2. Brøk på symbolsk form som utfordring

Gjennom analysen ser vi hvordan den symbolske uttrykksformen for brøk kan være utfordrende for elevene. Det som er belyst gjennom analysen er hvordan elevene kan realisere det samme symbolet på ulike måter, og dermed snakke om ulike prosesser. Dette indikerer en kommognitiv konflikt, som kan gjøre kommunikasjonen mellom deltakerne utfordrende dersom konflikten ikke anerkjennes og løses. Som følge av dette kan det være hensiktsmessig å vektlegge ikke-symbolske representasjonsformer (Siegler & Lortie-Forgues, 2014) av brøk innledningsvis. Det er mulig at en tilnærming hvor elevene lærer seg regneprosedyrer med utgangspunkt i andre representasjonsformer enn symboler kan bidra til å åpne for at addisjon videre utvides til å gjelde andre typer tall. Med andre ord er det mulig at det er den symbolske uttrykksformen for brøk som utgjør en stor hindring. Dette følger av at elevene allerede i møte med addisjon av brøk med lik nevner kan forsterke oppfatningen om at regneoperasjonen utføres med heltallskomponentene og ikke brøken som helhet.

En annen mulighet er at læreren tar ledende diskurs i klasserommet, og løser den kommognitive konflikten ved å bli enig om en kollektiv realisering av symbolene eller ordene i den aktuelle situasjonen. Elevene kunne potensielt hatt et bedre utgangspunkt både for å forstå hverandres løsninger, men også å bygge videre på hverandres diskursive handlinger dersom alle snakket om de samme prosessene.

Dette kunne eksempelvis blitt gjort ved å vektlegge at elevene skulle bruke minutt-realiseringen av brøk til å løse oppgave 2 og 3 i undervisningen. Når Malin bruker denne realiseringen som utgangspunkt for sin løsning av oppgave 3, ser vi hvordan løsningen som presenteres av Ivar, på vegne av GG-b, i ettertid bygger på den samme tankemåten som Malin har presentert, og at de i tillegg utvider prosedyren til å inkludere hva som skal være nevneren i denne situasjonen (Figur 33). Denne gjensidige påvirkningen mellom individuell og kollektiv aktivitet er kun mulig dersom alle deltakerne snakker om de samme diskursive prosessene.



Figur 33 – Løsning fra Ivar på oppgave 3

5.2.3. Hva er årsaken til de vanskene elevene opplever?

Noen av de vanskene som elevene opplever i møte med addisjon av brøk (Siegler et al., 2013) kan se ut til å ligge i erfaringer med addisjon. Gjennom analysen har vi sett at begge elevene i denne studien i hovedsak har tolket oppgaven som at de skal identifisere heltall som de deretter kan addere. Ingen av elevene så ut til å tilnærme seg oppgaven med en oppfatning om at brøk var egne tall som kunne adderes. Av dette følger det at vanskene til elevene kan se ut til å stamme fra manglende objektivisering (Sfard, 2008), noe vi har sett at kan identifiseres ved å se nærmere på elevens ordbruk.

Det er også mulig at noen av vanskene kan følge av at elevene identifiserer brøk basert på visuelle egenskaper, som fokus på heltallskomponentene i brøk. Dette gir vansker som for eksempel hvordan like tellere kan ha gjort at Malin feilaktig har tatt i bruk prosedyre fra addisjon av brøk med lik nevner, og endret den delen av prosedyren som ikke passer med nåværende situasjon. Når og hvorfor fellesnevner brukes kan også være uklart for elevene så lenge de ikke er kjent med de praktiske handlingene som ligger til grunn for dette.

At elevene ofte ser brøk som en del av en hel kan potensielt forklares gjennom ledende realisering. Innenfor det kommognitive rammeverket pekes det på at ledende realisering hos nybegynnere i diskursen kan opptre som objektet i seg selv, hvor resterende realiseringer fungerer som representasjonsformer av dette objektet (Sfard, 2008). Den realiseringen som ofte blir ledende realiseringer hos nybegynnere i en diskurs, er ofte den første realiseringen av det nye objektet som eleven individualiserte. Under analysen kom det frem hvordan Siren tilsynelatende har en ledende realisering av brøk som en kake, noe som illustrerer del-hel aspektet ved brøk. Dette medfører at Siren ser den symbolske representasjonsformen for brøk som en representasjon av objektet kake, ikke det matematiske objektet brøk.

5.3. Hvilke faktorer påvirker elevenes valg av strategier?

I møtet med addisjon av brøk med ulik nevner ser det ut til at elevene lager strategier for å løse oppgavene med utgangspunkt i tidligere erfaringer i møte med brøk og heltall. Vi har sett hvordan det kan være regneoperasjonen addisjon som gjør at elevene i dette tilfellet henter erfaringer fra heltall. Samtidig har vi sett hvordan elevene kan ta utgangspunkt i erfaringer fra brøk også, noe som vises igjen i bruken av ordene teller, nevner og det hele. Bevaringen av et heltall i oppgavene indikerer også at noe av erfaringene hentes fra addisjon av brøk med lik nevner, hvor nevneren skal bevares som den er mens regneoperasjonen utføres med de resterende heltallene som representerer teller. Implikasjoner av dette kan være at introduksjon av regneprosedyre for addisjon med lik nevner faktisk kan fungere som hindring for videre læring, hvor elevenes fokus på heltallskomponentene står i veien for å se brøk som eget tall.

I tillegg har det blitt identifisert flere potensielle påvirkningsfaktorer gjennom analysen. Brøk uttrykt på symbolsk form kombinert med oppstilling som regnestykke kan bidra til at elevene henter fra erfaringer med heltall. Spesielt dersom elevene fortsatt ser brøk som kombinasjon av to separate heltall, og at addisjon forbindes med heltall, virker det nærmest uunngåelig at elevene tar utgangspunkt i disse erfaringene og reglene når de skal løse oppgaven. Dette er en konsekvens av at elevene møter andres objektiviserte bruk av brøk, og at elevene kanskje bør individualisere brøk som eget matematisk objekt før de introduseres for symbolske regneoperasjoner.

En stor utfordring vil være at elevene ikke har anledning til å se verdien av den nye diskursen før de har fått erfaringer med diskursen. En måte å introdusere elevene for regneoperasjonene før de har objektivisert brøk vil kunne være å la elevene lære brøkregning gjennom gjerninger. Med utgangspunkt i gjerninger vil også elevene bli kjent med hva som er årsaken til at nevneren bevares som den er for addisjon og subtraksjon med lik nevner, men ikke for ulik nevner. Dette er en av de vanskene som Siegler et al. (2013) peker på. Videre kan elevene ta utgangspunkt i disse praktiske rutinene når de eksponeres for den symbolske formen for brøk, og da kan det potensielt være lettere for dem å overkomme, eller kanskje til og med fullstendig unngå, feil bruk av en type *separate heltall*-strategi. Elevene kan også lære å omgjøre brøk mellom symbolsk og ikonisk visuell mediator, i begge retninger, før de eksponeres for regneprosedyrer. Deretter kan regneoperasjoner med symboler introduseres med den alternative medieringen som en støtte frem til elevene er klar til å selvstendig utføre regneoperasjonene uten disse overgangene.

Elevens diskurs er en rik informasjonskilde for læreren (Roberts & Le Roux, 2019). Blant annet kan vi gjennom Malins individuelle diskurs identifisere at det som mangler for at hun skal kunne skape en sammenheng mellom addisjon og den prosedyren som ble introdusert i innledningen er hva minutt er del av. Dette kommer tydelig frem i valget av 12 som nevner kombinert med 42 minutt som utgangspunkt for teller. På samme måte kan elevenes diskurs være informasjonskilde når de ikke bruker den visuelle mediatoren som tiltenkt. At denne realiseres som kake er informasjon om elevenes individuelle diskurs som læreren kan bygge videre på, i forhold til at den aktuelle eleven må eksponeres for flere ulike realiseringer av brøk. Spesielt viktig blir det når kake trekkes inn uten at det har vært del av undervisningen, hvor dette kan signalisere at eleven henter fra andre erfaringer med brøk.

5.3.1. Oppsummering

Det kommognitive rammeverket har vist seg å være nyttig for å få innsikt i elevenes læringsprosess og de underliggende mekanismene. Oppgavesituasjonen bidro til at vi kunne få innsikt i hvordan elevene velger ut erfaringer som skal brukes i forbindelse med nye og ukjente situasjoner, og elevenes individuelle diskurs inneholder informasjon som læreren med fordel kan utnytte med hensyn til tilpasset opplæring.

Vi har fått se ulike faktorer som kan påvirke elevenes valg av strategier i møte med en ukjent oppgave. Av spesiell interesse er den måten eleven påvirkes til å tilsynelatende hente erfaringer fra både heltall og addisjon av brøk med lik nevner når de møter addisjon av brøk med ulik nevner. Dette har bidratt til å belyse flere av de potensielle underliggende mekanismene som bidrar til elevenes fokus på heltallskomponentene i brøk, hvor elevperspektivet har vist seg å være sentralt når vi skal forsøke å gi mening til elevenes diskursive handlinger. Outsider-perspektivet ga nyttig innsikt i hvordan elevene bruker sine tidligere erfaringer, og gjennom dette har vi sett at det som i utgangspunktet var overraskende respons på en oppgave ikke lenger var så uventet med utgangspunkt i elevens tidligere erfaringer.

Et av spørsmålene som det ikke har blitt presentert en overbevisende tolkning av er hvorfor Malin bevarer tallet 1 i forbindelse med oppgave 2. Den tolkningen som virker mest overbevisende med utgangspunkt i det tilgjengelige datamaterialet er at hun tar utgangspunkt i prosedyren for addisjon av brøk med lik nevner. Ettersom vi ikke har tilgang på elevens møte med addisjon av brøk med lik nevner, kan dette spørsmålet ikke gis svar på i denne studien. Dette gir implikasjoner for videre forskning, hvor det kan være interessant å studere sammenhengen mellom addisjon med lik og ulik nevner gjennom det kommognitive perspektivet.

6. Konklusjon

I denne delen vil det gjøres forsøk på å besvare oppgavens problemstilling. Deretter vil det pekes på noen praktiske og teoretiske implikasjoner som følger av analyse og diskusjon. Avslutningsvis følger det noen refleksjoner over egen læring i forbindelse med arbeidet med denne masteroppgaven.

De to forskningsspørsmålene som er drøftet i forrige kapittel danner grunnlaget for problemstillingen, som er:

> *Hvilke faktorer kan påvirke hvordan elevene skaper strategier og fremgangsmåter i møte med addisjon av brøk?*

Problemstillingen ble innledningsvis avgrenset ved hjelp av to forskningsspørsmål, som er:

S1: *Hvordan kan elevenes tidligere erfaringer innenfor matematikk påvirke elevenes strategier og løsninger i møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*
S2: *Hvordan kan det kommognitive perspektivet bidra til å få innsikt i elevenes møte med addisjon av brøk med ulik nevner?*

Gjennom denne studien har vi fått innsikt i hvordan elevene henter fra eksisterende kunnskap og erfaringer med heltall i møte med brøk, med utgangspunkt i forskningsspørsmålet S1. Det er gjort forsøk på å belyse hvilke faktorer som kan påvirke hvordan elevene tar i bruk sine tidligere erfaringer, med utgangspunkt i forskningsspørsmålet S2, som videre vil kunne bidra til at lærere kan tilrettelegge undervisningen.

Det kommognitive rammeverket har vist seg å være hensiktsmessig for å identifisere ulike potensielle påvirkningsfaktorer, og hvordan disse påvirkningene virker inn på elevenes læringsprosess. Perspektivet som en outsider sammen med konseptet oppgavesituasjonen har gitt nyttig innsikt i elevens måte å se situasjonen på, og hvordan ulike faktorer påvirker elevens bruk av tidligere erfaringer i møte med addisjon av brøk med ulik nevner. Vi har sett hvordan addisjon av brøk med lik nevner potensielt kan forsterke elevenes fokus på heltallskomponentene i brøk, og senere vil det være krevende å unngå at eleven bruker denne erfaringen i møte med addisjon av brøk med ulik nevner.

Det er som nevnt identifisert flere mulige påvirkningsfaktorer for strategivalg i møte med addisjon av brøk med ulik nevner, og i tillegg har det blitt presentert noen mulige tolkninger om hvordan disse faktorene kan ha påvirket de aktuelle elevene. Det er derimot behov for mer arbeid på dette området før dette resultatet kan ha overføringsverdi, som hvordan utformingen av undervisningen påvirker elevenes strategivalg. Bidraget fra denne studien kan derimot ses på som indikasjoner på hvilke faktorer både forskere og lærere kan rette fokus mot i undervisningen for å bedre forstå hvordan elevenes læringsprosess fungerer, og hvilke mekanismer som påvirker valgene elevene tar i møte med oppgavesituasjonen.

Det kommognitive rammeverket har vist seg å være et nyttig teoretisk og analytisk rammeverk for å forstå mer av mekanismene bak elevenes strategivalg, hvor en kan studere læringsprosessen uten å vise til elevers forståelse. Fenomenet som tradisjonelt omtales som *misoppfatninger* er muligens en kombinasjon av både uunngåelige faser i læringsprosessen og den måten elevene tolker signaler i oppgavesituasjonen. I forbindelse med dette er det nødvendig å presisere at misoppfatning er et begrep som kritiseres av Sfard (2008), og dermed ikke brukes i forbindelse med det kommognitive perspektivet. Til tross for dette ser vi hvordan eksisterende forskning om elevenes misoppfatninger i matematikk, kan danne et grunnlag for videre undersøkelser av de underliggende mekanismene.

Vi har blant annet sett hvordan tilstedeværelsen av heltall i den symbolske uttrykksformen for brøk kombinert med addisjonstegn kan medføre at elevene henter fra erfaringer med heltall. En potensiell løsning på denne utfordringen kan ligge i en tilnærming hvor elevene ikke møter symbolsk form for brøk før de er gjort kjent med gjerningene som ligger til grunn for regneoperasjonene med det nye matematiske objektet brøk. Dersom elevene møter regneoperasjoner gjennom andre former for mediering først, vil de muligens har større erfaringsgrunnlag å hente fra når de første gang møter brøk uttrykt på symbolsk form. Så lenge elevene ikke har objektivisert brøk, vil heltall kunne være det matematiske objektet når de jobber med den symbolske formen og dermed vil også erfaringer fra heltall kunne påvirke. Samtidig er det mulig at denne foreslåtte tilnærmingen kan bidra til nye utfordringer som gir like mye vansker som symbolsk form, og dette er noe som bør utforskes videre.

Hvis vi tenker på praktiske implikasjoner for undervisningsarbeidet er det ikke realistisk at læreren skal kunne identifisere alle potensielle tolkninger av det visuelle innholdet på forhånd.

Det som derimot er en viktig implikasjon er at lærere bør være bevisst over at elevene kan tolke innholdet på tavlen på helt andre måter enn tiltenkt, og som følge av dette være forberedt på elevens indikasjoner om at de har tolket annerledes og kan følge opp disse underveis i undervisningen. Hvis læreren er klar over at de visuelle mediatorene kan ha spilt en avgjørende rolle i elevens tolkning av oppgaven, kan læreren bidra til å gjøre elevenes tanker tydelig gjennom å vise til realiseringer av ordene elevene bruker med utgangspunkt i eventuelle figurer og symboler. Dersom ikke dette tydeliggjøres, blir det opp til de ulike deltakerne i diskursen å tolke hva som menes med de ulike ordene, og dette kan tolkes ulikt av ulike individer. På denne måten vil læreren kunne fremheve og løse en kommognitiv konflikt som kan følge av ulike realiseringer, og dermed tilrettelegge for at diskusjonen mellom elevene ikke påvirkes av kommunikative brudd. For at elevene skal ha best mulig læringsutbytte av helklassediskusjoner er det viktig at alle elevene snakker om samme prosess.

Avsluttende kommentar

Etter å ha utført analysen og blitt klar over den potensielle påvirkningen fra elevenes eksisterende erfaring med addisjon av brøk med lik nevner når de møter addisjon av brøk med ulik nevner, ser jeg at det hadde vært stor verdi i å utføre en undersøkelse som har data fra elevenes møte med addisjon av brøk med lik nevner i tillegg til ulik nevner. På den måten ville det vært større grunnlag for å skille mellom hvilke erfaringer eleven henter fra heltall, og hvilke som indirekte kommer fra heltall ved å først bli brukt i møte med addisjon av brøk med lik nevner. Videre kunne det også vært aktuelt å se nærmere på om heltallstenkingen er tilstedeværende i større grad hos elever som møter addisjon av brøk med lik nevner før de møter addisjon med ulik nevner.

En ting som har kommet tydelig frem for meg gjennom denne masteroppgaven, er hvordan misoppfatning som begrep i forskningen kan bidra til å skjule underliggende variasjoner hos ulike elever (Sfard, 2008). Gjennom denne studien har det blitt gjort forsøk på å se elevenes strategier og løsninger uavhengig av en potensiell misoppfatning, og med dette har det blitt tydelig hvor store variasjoner i elevenes bruk av tidligere erfaringer fra både brøk og heltall som kan skjules under en type misoppfatninger. Dersom konseptet misoppfatning skal bidra til kunnskap om undervisningsarbeid og elevers læring, er det ikke formålstjenlig at så store variasjoner kan skjules under det samme begrepet. For de to elevene som er utvalgt for denne studien kan det være totalt ulike didaktiske tilnærminger som vil være hensiktsmessig for å bidra til videre læring.

Den kommognitive analysen som er utført i denne studien har gitt meg mange nye perspektiv på viktigheten av å reflektere over innholdet i undervisningen, både når det gjelder brøk og andre matematiske tema. På samme måte som Heyd-Metzuyanim (2015) konkluderer jeg med at det er viktig for læreren å gjøre forsøk på å forstå hvordan elevene ser verden.

7. Referanseliste

Adler, J. & Sfard, A. (2017). *Research for educational change : transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning*. London, England ; New York, New York: Routledge.

Bailey, D. H., Hansen, N. & Jordan, N. C. (2017). The Codevelopment of Children's Fraction Arithmetic Skill and Fraction Magnitude Understanding. *Journal of Educational Psychology, 109*(4), 509-519. https://doi.org/10.1037/edu0000152

Bakker, A., Smit, J. & Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review. *Mathematics Education, 47*(7), 1047-1065. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0738-8

Bauersfeld, H. (1980). Hidden Dimensions in the So-Called Reality of a Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 23-41. https://doi.org/10.1007/BF00369158

Berger, M. (2013). Examining mathematical discourse to understand in-service teachers 'mathematical activities. *Pythagoras, 34*(1), 1-10. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v34i1.197

Bergheim, M. E. (2019). Et nærmere blikk på elevens individuelle diskurs i møte med en ny og ukjent kontekst, og hvordan dette kan påvirke utviklingen av den nye diskursen addisjon av brøk. Universitetet i Stavanger.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2012). Når brøk ikke er tall - eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I I. Perliussen, B. B. Moen, R. A. & T. Solhaug (Red.), *FoU i praksis* (s. 28-36). Trondheim: Tapir akademisk forlag.

Braithwaite, D. & Siegler, R. (2018). Developmental Changes in the Whole Number Bias. *Developmental Science, 21*(2), 1-13. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/desc.12541

Braithwaite, D. W., Leib, E. R., Siegler, R. S. & McMullen, J. (2019). Individual differences in fraction arithmetic learning. *Cognitive Psychology, 112*, 81-98. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2019.04.002

Braithwaite, D. W., Tian, J. & Siegler, R. S. (2018). Do children understand fraction addition? *Developmental Science, 21*(4), 1-9. https://doi.org/10.1111/desc.12601

Charalambous, C. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *An International Journal, 64*(3), 293-316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi* (4. utg.). Oslo.

Deringöl, Y. (2019). Misconceptions of Primary School Students about the Subject of Fractions. *International Journal of Evaluation and Research in Education, 8*(1), 29-38. https://doi.org/10.11591/ijere.v8i1.16290

Flyvbjerg, B. (2006). Five Misunderstandings About Case-Study Research. *Qualitative Inquiry, 12*(2), 219-245. https://doi.org/10.1177/1077800405284363

Hansen, N., Jordan, N. C., Fernandez, E., Siegler, R. S., Fuchs, L., Gersten, R. & Micklos, D. (2015). General and math-specific predictors of sixth-graders' knowledge of fractions. *Cognitive Development, 35*(C), 34-49. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2015.02.001

Heyd-Metzuyanim, E. (2015). Vicious Cycles of Identifying and Mathematizing: A Case Study of the Development of Mathematical Failure. *Journal of the Learning Sciences, 24*(4), 504-549. https://doi.org/10.1080/10508406.2014.999270

Heyd-Metzuyanim, E. & Graven, M. (2019). Rituals and explorations in mathematical teaching and learning: introduction to the special issue. *An International Journal, 101*(2), 141-151. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09890-x

Imsen, G. (2014). *Elevens verden* (5. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Lavie, I. & Sfard, A. (2019). How Children Individualize Numerical Routines: Elements of a Discursive Theory in Making. *Journal of the Learning Sciences, 28*(4-5), 419-461. https://doi.org/10.1080/10508406.2019.1646650

Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *An International Journal, 101*(2), 153-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Lerman, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: A Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. *An International Journal, 46*(1), 87-113. https://doi.org/10.1023/A:1014031004832

Maxwell, J. A. (2009). Designing a Qualitative Study. I L. Bickman & D. J. Rog (Red.), *The SAGE handbook of applied social research methods* (2. utg., s. 214-253). Los Angeles: SAGE.

McIntosh, A. (2007). *Alle teller! : Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen*. (u.s.): Matematikksenteret. (*Oversatt til norsk av Settemsdal, May R. & Stedøy-Johansen, Ingvill M.*)

Postholm, M. B. (2011). *Læreren med forskerblikk : innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Roberts, A. & Le Roux, K. (2019). A Commognitive Perspective on Grade 8 and Grade 9 Learner Thinking about Linear Equations. *Pythagoras, 40*(1), 1-15. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v40i1.438

Sfard, A. (2007). When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. *Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565-613. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating : human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H. & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences, 17*(1), 13-19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 107*(3), 909-918. https://doi.org/10.1037/edu0000025

Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2014). An Integrative Theory of Numerical Development. *Child Development Perspectives, 8*(3), 144-150. https://doi.org/10.1111/cdep.12077

Siegler, R. S. & Pyke, A. A. (2013). Developmental and Individual Differences in Understanding of Fractions. *Developmental Psychology, 49*(10), 1994-2004. https://doi.org/10.1037/a0031200

Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Tabach, M. & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: prologue. *An International Journal, 91*(3), 299-306. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9638-7

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Tsai, T.-L. & Li, H.-C. (2017). Towards a Framework for Developing Students' Fraction Proficiency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(2), 244. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1238520

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn* (MAT01-05). Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Wells, C. G. (1999). *Dialogic inquiry : towards a sociocultural practice and theory of education*. New York: Cambridge University Press.

Zhang, D., Stecker, P. & Beqiri, K. (2017). Strategies Students With and Without Mathematics Disabilities Use When Estimating Fractions on Number Lines. *Learning Disability Quarterly*, *40*(4), 225-236. https://doi.org/10.1177/0731948717704966

Zhang, X., Clements, M. & Ellerton, N. (2015). Conceptual mis(understandings) of fractions: From area models to multiple embodiments. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(2), 233-261. https://doi.org/10.1007/s13394-014-0133-8

8. Vedlegg

Vedlegg 1 – Intervjuguide

Elevintervju

XX: Intervjuer 1 (den som leder samtalen med elevene)

YY: Intervjuer 2 (filmer)

Innledning

Mitt navn er XX og dette er YY. Vi er begge masterstudenter ved Universitetet i Stavanger. Vi er med i et prosjekt der vi ønsker å lære mer om elevenes læring i matematikk og lærerens undervisning. Det har vært veldig spennende for oss å observere mattetimene disse to ukene. I denne samtalen har vi lyst til å snakke med dere om det dere har jobbet med i undervisningen disse to ukene. Vi takker for at dere har sagt dere villige til å være med, og vi håper det er greit for dere at vi tar opp denne samtalen med lyd og filmopptak. Deres deltakelse er basert på frivillighet, og dere har derfor full rett til å trekke dere dersom dere ønsker det. Men vi håper selvsagt at dere er villige til å være med på denne intervjusamtalen! Når prosjektet vårt er over, så vil alt av opptak slettes, og dere kan være trygge på at dette blir brukt på en slik måte at dere ikke blir gjenkjent.

Spørsmål

Da er vi klar til å begynne!

- Kan dere si litt om hva dere tenker om matematikk? Hvordan lærer dere matematikk best mulig (Alene/sammen med andre? Arbeidsmåter)?
    - Hvordan er en god matematikktime?
    - Hva er en god matematikklærer?
    - Er mattetimene med Guri annerledes enn med matematikklærere dere har hatt tidligere? Kan dere gi et eksempel?
- Hva tenker dere om å sitte i par eller i grupper og diskutere oppgaver sammen?
    - Blir det snakk om matematikk?
- Deltar dere aktivt i diskusjoner i hel klasse?
        - Hva kan gjøre at dere ikke deltar i diskusjonene?
- Hvordan pleier klassen å arbeide i matematikktimen?
- Hva har dere jobbet med i matematikktimene dette året?
- Hvordan forbereder dere til matematikktimen hjemme? Hva pleier dere å gjøre hvis det er noe som dere synes er forvirrende eller vanskelig?

Brøkoppgave - intervjuer tar med notatark til eleven, og ark med en blank sirkel som kan representere urskive:

- I forrige uke jobbet dere med brøk. I starten av timen så dere på brøkdeler av en klokketime. Kan du si litt om hva en brøk er?
  - Kan du forklare hvordan du vil gå frem for å finne ⅕ av en time?
    - Hvorfor velger du å oppgi svaret i minutter? (Gitt at eleven gjør dette.)
  - Hvordan vil du løse (3/12)+(⅕)+(¼)? (Be eleven forklare hvert steg underveis i løsningen sin, og begrunne valgene.)
    - Kan du løse denne på flere måter?
  - Kan du forklare [begrep]? Begrep som eleven bruker i forklaringen sin, f.eks. fellesnevner, utvide, nevner, teller. Når og hvordan lærte du dette begrepet? ("Begrep" eller annet ord som eleven forstår.)
  - Er det noen begrep fra arbeidet med brøk som var vanskelig å forstå? Kan du forklare hva du tror [begrep som er vanskelig] er?

Geometrioppgave:

- Gi elevene arket med figurer
  - Hvilke av figurene er rektangler?
  - Be elevene begrunne svaret. Hvorfor er den figuren et rektangel? Hvorfor er den ikke et rektangel?
  - Hva er definisjonen på et rektangel?
    - Oppfølging: Hvilke egenskaper har rektangler?

- Da var vi ferdige. Tusen takk for at dere stilte opp!

Vedlegg 2 – Meldeskjema

Meldeskjema 502242

Sist oppdatert

14.01.2019

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

Navn (også ved signatur/samtykke) Bilder eller videoopptak av personer Lydopptak av personer

Type opplysninger

Skal du behandle særlige eller strafferettslige personopplysninger?

Nei

Prosjektinformasjon

Prosjekttittel

Lede matematiske samtaler

Prosjektbeskrivelse

En sentral del av matematikkundervisningen er å initiere og lede matematiske samtaler. Dette er et krevende arbeid hvor læreren må ta både faglige og relasjonelle hensyn. I dette prosjektet studerer vi det komplekse arbeidet med å initiere og lede matematiske samtaler. Fokuset er særlig på hvilke samtaletrekk lærere bruker og hvordan, og hvilke muligheter elevene gis til å delta og til å fremstå i et positivt lys. I tillegg er det et fokus på hvilke krav dette komplekse undervisningsarbeidet stiller til læreren. Det overordnede målet med prosjektet er å bidra til konseptualisering av det matematiske undervisningsarbeidet, og til å utvikle kunnskap om de utfordringene og kravene dette komplekse arbeidet stiller til lærere.

Prosjektet vil foregå i perioden 2019-2021. I denne perioden vil det samles inn kvalitative forskningsdata i utvalgte klasser. Datainnsamlingen i hver klasse vil foregå over 2-3 uker, og vi vil i løpet av prosjektet samle inn data i flere valgte klasser. Det vil også være mulig å samle inn data i samme klasse eller hos samme lærer i flere perioder, men dette vil da avtales på nytt for hver gang. Forskningsdata vil bli samlet inn i form av feltnotater, intervjuer, oppgaveanalyse og klasseromsobservasjoner. Det vil bli gjort video- og lydopptak fra matematikkundervisningen og intervjuene. Det vil ikke bli samlet inn direkte personidentifiserende opplysninger i prosjektet. Alle observasjoner og kommentarer fra lærer og elever vil bli behandlet konfidensielt, og både elever, lærere og skole vil bli gitt fiktive navn. Ved prosjektets slutt vil alle lyd- og video-opptak bli slettet, og kun anonymiserte transkripsjoner og feltnotater vil bli oppbevart.

Fagfelt

Matematikk og naturvitenskap

Dersom opplysningene skal behandles til andre formål enn behandlingen for dette prosjektet, beskriv hvilke

Det vil i forbindelse med prosjektet ikke bli samlet inn personopplysninger. Datamaterialet som samles inn i prosjektet vil kun være tilgjengelig for analyser i en forskergruppe bestående av 2-3 seniorforskere og ca. 20 masterstudenter. Datamaterialet vil brukes til analyser som vil ende opp som forskningsrapporter, og resultater fra prosjektet vil også kunne publiseres i tidsskriftartikler, konferansepaper og/eller bok-kapitler.

Begrunn behovet for å behandle personopplysningene

Prosjektet har fokus på matematikkundervisning og ikke på enkeltlærere eller elever. Det er et mål i prosjektet å utvikle teori heller enn å generalisere til en større populasjon av elever eller lærere. Derfor anser vi det som unødvendig å samle inn personopplysninger i prosjektet. Det vil naturligvis være nødvendig å forholde seg til en viss form for personopplysninger i form av kontaktinformasjon med lærer og skole, men det vil ikke bli lagret personopplysninger som del av forskningsdata i prosjektet.

Ekstern finansiering

Andre

Annen finansieringskilde

Prosjektet finansieres av forskernes egne FoU-tid, og masterstudentenes bidrag er knyttet til deltakelse i masterutdanningen.

Type prosjekt

Forskerprosjekt

Behandlingsansvar

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Stavanger / Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora / Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Reidar Mosvold, reidar.mosvold@uis.no, tlf: 51832342

Skal behandlingsansvaret deles med andre institusjoner (felles behandlingsansvarlige)?

Nei

Utvalg 1

Beskriv utvalget

Utvalget vil bestå av strategisk valgte lærere og deres matematikk-klasser. Utvalg 1 er definert som lærerne.

Rekruttering eller trekking av utvalget

Utvalget vil rekrutteres gjennom universitetets praksisnettverk. Prosjektleder vil ta kontakt med lærer og skoleledelse.

Alder

21 - 67

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 1

Navn (også ved signatur/samtykke) Bilder eller videoopptak av personer Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 1

Personlig intervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Ikke-deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Informasjon for utvalg 1

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?

Ja**Hvordan?**

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Utvalg 2

Beskriv utvalget

Utvalg 2 defineres som elevene i de strategisk valgte matematikk-klassene. Studien fokuserer på grunnskolen.

Rekruttering eller trekking av utvalget

Det er lærerne som trekkes, og elevene blir dermed utvalgt i kraft av å være i de valgte lærernes klasser. Førstegangskontakt vil skje mellom prosjektleder og lærer/skoleledelse.

Alder

6 - 15

Inngår det voksne (18 år +) i utvalget som ikke kan samtykke selv?

Nei

Personopplysninger for utvalg 2

Navn (også ved signatur/samtykke)

Bilder eller videoopptak av personer Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 2

Gruppeintervju

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Ikke-deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Informasjon for utvalg 2

Informerer du utvalget om behandlingen av opplysningene?

Ja**Hvordan?**

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Tredjepersoner

Skal du behandle personopplysninger om tredjepersoner?

Nei

Dokumentasjon

Hvordan dokumenteres samtykkene?

Manuelt (papir)

Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?

Samtykke kan trekkes tilbake ved å ta kontakt med prosjektansvarlig. Dette er opplyst om i informasjonsskriv.

Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet opplysninger om seg selv?

Det vil ikke bli samlet inn noen personopplysninger, og det vil derfor ikke være behov for å få rettet opplysninger. Deltakerne i studien kan når som helst få innsyn i datamateriale ved å ta kontakt med prosjektleder.

Totalt antall registrerte i prosjektet

1-99

Tillatelser

Skal du innhente følgende godkjenninger eller tillatelser for prosjektet?

Behandling

Hvor behandles opplysningene?

Mobile enheter tilhørende behandlingsansvarlig institusjon Fysisk isolert maskinvare tilhørende behandlingsansvarlig institusjon

Hvem behandler/har tilgang til opplysningene?

Prosjektansvarlig Student (studentprosjekt) Interne medarbeidere

Tilgjengeliggjøres opplysningene utenfor EU/EØS til en tredjestat eller internasjonal organisasjon?

Nei

Sikkerhet

Oppbevares personopplysningene atskilt fra øvrige data (kodenøkkel)?

Ja**Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?**

Opplysningene anonymiseres Adgangsbegrensning

Varighet

Prosjektperiode

01.01.2019 - 31.12.2021

Skal data med personopplysninger oppbevares utover prosjektperioden?

Nei, data vil bli oppbevart uten personopplysninger

Vil de registrerte kunne identifiseres (direkte eller indirekte) i oppgave/avhandling/øvrige publikasjoner fra prosjektet?

Nei

Tilleggsopplysninger

Vedlegg 3 – Informasjonsskriv til lærer

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Lede matematiske samtaler»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan lærere leder matematiske samtaler i klasserommet og hvilke muligheter det gir elevene til å fremstå som flinke i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Prosjektet vil foregå i perioden 2019-2021, og målet er å utforske viktige sider ved undervisningsarbeidet i matematikk. Prosjektet har et særlig fokus på det å lede matematiske samtaler i klasserommet, og vi undersøker her hvordan lærere gjennomfører denne delen av undervisningen, hvilke krav dette arbeidet kan stille til læreren og hvilke muligheter elevene gjennom samtalene får til å fremstå som flinke i matematikk. Det overordnede målet med prosjektet er å bidra til større forståelse for den komplekse matematikkundervisningen. Dette er et forskningsprosjekt som ledes av erfarne forskere ved Universitetet i Stavanger, og masterstudenter deltar i innsamling og analyse av forskningsdata. Resultatene av studien vil kunne formidles i forskningsrapporter, tidsskriftartikler, bok-kapitler og konferansepaper.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet, og prosjektet ledes av professor Reidar Mosvold ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Vi har spurt lærere/klasser i universitetets praksisnettverk om å delta i prosjektet, og lærer/klasse er valgt strategisk fordi vi har grunn til å tro at dette er lærere/klasser som har et spesielt fokus på å utvikle gode samtaler i matematikk-klasserommet.

Hva innebærer det for deg å delta?

I løpet av de 2-3 ukene prosjektet foregår i klassen vil grupper av forskere og masterstudenter observere matematikkundervisningen og gjøre lyd- og videoopptak av denne. Forskerne vil også skrive feltnotater under observasjonene. Intervju med lærer vil gjøres etter avtale, og i løpet av perioden vil vi også gjennomføre intervju med to elevgrupper. Disse elevgruppene vil velges ut i samsvar med lærer, og dette vil bli avklart med foreldre. Det vil også bli gjort lyd- og video-opptak under intervjuene. Lærer vil få intervjuguide på forhånd, og foreldre kan få se intervjuguiden på forhånd ved å ta kontakt med lærer.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Dette kan gjøres ved å ta kontakt med prosjektansvarlig. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Opplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet vil kun være tilgjengelig for de ansvarlige forskerne i prosjektgruppen, og for de masterstudentene som deltar. Opptakene vil under prosjektperioden lagres på ekstern harddisk som blir forsvarlig lagret og innelåst. I alle skriftliggjøringer av datamaterialet vil både elever, lærere og skoler bli gitt fiktive navn. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjoner.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes 31. desember 2021. Alle lyd- og video-opptak blir da forsvarlig slettet, og kun anonymiserte tekster vil bli tatt vare på.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Stavanger har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved professor Reidar Mosvold (tlf. 51 83 23 42).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Reidar Mosvold

Prosjektansvarlig

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Lede matematiske samtaler», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i undervisning som observeres
- ☐ å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 31. desember 2021.

(Signert av foreldre/foresatte, dato)

Vedlegg 4 – Informasjonsskriv til foreldre

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Lede matematiske samtaler»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan lærere leder matematiske samtaler i klasserommet og hvilke muligheter det gir elevene til å fremstå som flinke i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Prosjektet vil foregå i perioden 2019-2021, og målet er å utforske viktige sider ved undervisningsarbeidet i matematikk. Prosjektet har et særlig fokus på det å lede matematiske samtaler i klasserommet, og vi undersøker her hvordan lærere gjennomfører denne delen av undervisningen, hvilke krav dette arbeidet kan stille til læreren og hvilke muligheter elevene gjennom samtalene får til å fremstå som flinke i matematikk. Det overordnede målet med prosjektet er å bidra til større forståelse for den komplekse matematikkundervisningen. Dette er et forskningsprosjekt som ledes av erfarne forskere ved Universitetet i Stavanger, og masterstudenter deltar i innsamling og analyse av forskningsdata. Resultatene av studien vil kunne formidles i forskningsrapporter, tidsskriftartikler, bok-kapitler og konferansepaper.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet, og prosjektet ledes av professor Reidar Mosvold ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Vi har spurt lærere/klasser i universitetets praksisnettverk om å delta i prosjektet, og lærer/klasse er valgt strategisk fordi vi har grunn til å tro at dette er lærere/klasser som har et spesielt fokus på å utvikle gode samtaler i matematikk-klasserommet.

Hva innebærer det for deg å delta?

I løpet av de 2-3 ukene prosjektet foregår i klassen vil grupper av forskere og masterstudenter observere matematikkundervisningen og gjøre lyd- og videoopptak av denne. Forskerne vil også skrive feltnotater under observasjonene. Intervju med lærer vil gjøres etter avtale, og i løpet av perioden vil vi også gjennomføre intervju med to elevgrupper. Disse elevgruppene vil velges ut i samsvar med lærer, og dette vil bli avklart med foreldre. Det vil også bli gjort lyd- og video-opptak under intervjuene. Lærer vil få intervjuguide på forhånd, og foreldre kan få se intervjuguiden på forhånd ved å ta kontakt med lærer.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Dette kan gjøres ved å ta kontakt med prosjektansvarlig. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Opplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet vil kun være tilgjengelig for de ansvarlige forskerne i prosjektgruppen, og for de masterstudentene som deltar. Opptakene vil under prosjektperioden lagres på ekstern harddisk som blir forsvarlig lagret og innelåst. I alle skriftliggjøringer av datamaterialet vil både elever, lærere og skoler bli gitt fiktive navn. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjoner.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes 31. desember 2021. Alle lyd- og video-opptak blir da forsvarlig slettet, og kun anonymiserte tekster vil bli tatt vare på.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Stavanger har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved professor Reidar Mosvold (tlf. 51 83 23 42).
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personvernombudet@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Reidar Mosvold

Prosjektansvarlig

(Forsker/veileder)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Lede matematiske samtaler», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ at ____ (navn på barnet) kan delta i undervisning som observeres
- ☐ at ____ (navn på barnet) kan delta i elevintervju (i gruppe med 2-5 elever)

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 31. desember 2021.

(Signert av foreldre/foresatte, dato)