Universitetet
i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

BACHELOROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering: Lektor i realfag	Vårsemesteret, 2021 Åpen
Forfatter: Marlene Seljeskog Østebø	……Marlene Seljeskog Østebø……… (signatur forfatter)
Fagansvarlig: Veileder(e): Alexander Ulanovskii	
Tittel på Bacheloroppgaven: Algebraens Fundamentalteorem Engelsk tittel: The Fundamental Theorem of Algebra	
Studiepoeng: 10	
Emneord:	Sidetall: 29 + vedlegg/annet: ………… Stavanger, 15. mai 2021 dato/år

Algebraens fundamentalteorem

Innhold

Introduksjon

Ordet «algebra» kommer fra det arabiske ordet *al-jabr*, som betyr «å restaurere» eller «sette sammen igjen». Det ble først brukt i matematisk kontekst gjennom boken *Al-jabr w'al mûqabala* av Al-Khwarizmi rundt 830, et verk om likningers løsninger. En av grunnene til at det er et arabisk ord som har gitt navnet til matematikkformen, handler om at arabisk matematikk ble utviklet på et tidspunkt hvor det både kunne bli påvirket av Europeisk geometri, - araberne begynte erobringen av deler av Europa – og algebra fra øst. I kontrast til arabisk algebra, var indisk algebra det samme som tallteori og aritmetikk, gresk algebra ble overskygget av geometri, og kinesisk algebra ble ikke introdusert i Vest før det var for sent til at det hadde noen betydning. (Stillwell, 1989, s. 49) Polynomlikninger var et viktig begrep i Europa fra den tid, og i tusen år fremover. Bare på 1800-tallet ble algebra «større» en likningsteori.

I min bacheloroppgave skal jeg fordype meg i matematikkens historie, da i hovedsak innenfor algebra og polynomlikninger, og algebraens fundamentalteorem. Jeg skal først studere algebraens og polynomlikningenes historie, hvor jeg beveger meg fra algebraen i gamle Egypt og Mesopotamia mot araberne og Al-Kwharizmi. Til tross for at gresk matematikk lenge var dominert av geometri, skal jeg også gå innom Diofantus. Etter Al-Khwarizmi flytter vi oss mot Europa og middelalderen, med historien om tredje- og fjerdegradslikningen. Jeg skal også fordype meg i norske Niels Henrik Abel og Carl Friedrich Gauss, og gi en liten introduksjon til komplekse tall og historien bak disse tallene. På slutten av historiedelen gir jeg et historisk overblikk over algebraens fundamentalteorem.

I andre del av oppgaven presenterer jeg analytiske funksjoner, herunder Cauchy-Riemann-likninger og derivasjon av komplekse funksjoner. Videre går jeg over på integrasjon av komplekse funksjoner, med fokus på Cauchys integralformel og Cauchys ulikeheter. Jeg går også gjennom Liouvilles teorem, samt argumentprinsippet og Rouches teorem, før jeg gir tre analytiske bevis for algebraens fundamentalteorem:

Algebraens fundamentalteorem sier at hver polynomlikning av grad n med komplekse koeffisienter har minst én kompleks rot.

Historien om polynomlikninger

Historien om lineære- og andregradslikninger: fra Egypt til Al-Khwarizmi

Algebraens historie kan deles inn i to perioder; den klassiske algebraen og den abstrakte, eller moderne, algebraen. Den første perioden begynner rundt 2000 f.v.t og slutter med arbeidet til Abel, på 1830-tallet, mens den andre perioden begynner med Abel og fortsetter til vår tid. Den klassiske algebraen handler i stor grad om hvordan en løser første-, andre-, tredje-, og fjerdegradslikninger, og forsøkene på å løse femtegradslikninger. (Papatzacos, 2017, s. 171).

Egypt og Mesopotamia

Historien begynner i gamle Egypt, rundt 2000-1800 f.v.t. Rhind-papyrusen og Moskva-papyrusen er de viktigste kildene vi har i dag har som skildrer gammelegyptisk matematikk. Størsteparten av problemene i papyrusene er aritmetiske, og omhandler tallenes egenskaper og metoder til å regne med tall, i hovedsak addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og røtter, men noen av dem er algebraiske på formen $x + ax = b$, altså førstegradslikninger med en ukjent. Her ble det brukt fremgangsmåten den falske antakelsens metode, hvor en gjetter seg frem til en noenlunde riktig løsning, for å så bruke avvikelse til å finne den riktige verdien. (Merzbach, Boyer, 2011, s. 14) Flere av oppgavene i papyrusen ser ut til å være øvingsoppgaver av praktisk natur, selv om det også er noen matematiske utfordringer. Alle de algebraiske problemene fra denne tiden handlet om polynom-likninger, noe som tyder på at egypterne ikke hadde problemstillinger som førte til likninger av høyere grad enn to.

Den falske antakelsens metode legges først frem i Rhind Papyrusen i oppgave 24: «Finn tallet som, addert til en sjudel av seg selv, gir nitten» (Papatzacos, 2017, s. 172):

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

Løst ved den moderne algebraiske metoden blir svaret her $x = 19 \times \frac{7}{8}$. I Rhind-papyrusen blir det i stedet antatt at tallet er 7, hvor summen av tallet og en sjudel av tallet er 8. For å få det riktige resultatet, 19, blir den opprinnelige antakelsen justert, ved å gange den med forholdet mellom det riktige og det gale resultatet: 19/8. (Papatzacos, 2017, s. 173). Den algebraiske metoden er presentert i Moskva-papyrusens oppgave 35: «Finn et tall som er slik at, når den multipliseres med en og en halv, og når fire legges til, er resultatet 10» (Papatzacos, 2017, s. 173):

$$\frac{3}{2}x + 4 = 10$$

Løst med moderne algebra blir svaret $x = 4$. Det første stegene er like den moderne løsningen, før det blir brukt den multiplikative inverse til $\frac{3}{2}$ altså $\frac{2}{3}$, uten at det forklares hvordan den inverse blir funnet. (Papatzacos, 2017, s. 173).

$$\frac{3}{2}x + 4 = 10 \rightarrow \frac{3}{2}x = 6$$
$$\frac{3}{2}x = 6 \rightarrow x = \frac{2}{3}6 = 4$$

Mens de egyptiske tekstene i stor grad inneholder lineære likninger og få kvadratiske, inneholder dokumenter fra Mesopotamia flere kvadratiske likninger. Problemene her er presentert som konkrete geometriske oppgaver, og løsningene som «oppskrifter», som igjen ble brukt senere, da spesielt kvadratrøtter. Andregradslikninger ble løst, i følge Merzbach og Boyers *A History of mathematics,* ved å for eksempel legge til $4ab$ til $(a-b)^2$ og slik få $(a+b)^2$. (Merzbach, Boyer, 2011, s. 28). Babylonerne hadde også metoder for å løse oppgaver av typen $x^2 - x = 870$:

> «Ta halvparten av 1, som er 0;30, og multipliser 0;30 med 0;30, som er 0;15; adder dette til 14;30 og få 14,30;15. Dette er kvadratet av 29:30. Adder nå 0;30 til 29:30, og resultatet er 30, siden av kvadratet» (Merzhbach, Boyer, 2011, s.28 [egen oversettelse])

Dette er likt formelen $x = \sqrt{{}^{p}/_{2}{}^{2} + q} + {}^{p}/_{2}$, en av røttene til $x^2 - px = q$.

Også tredjegradslikninger er behandlet i babylonske dokumenter, hvor likninger som $x^3 = 0;7{,}30$ ble løst ved hjelp av tabeller og tidligere løste oppgaver.

Diofantus

Vi beveger oss videre forbi hellenismen og gammelgresk matematikk og geometri, til perioden 250-350 e.v.t. Matematikkens hovedsete var i Alexandria, og en av de siste viktige grekerne fra denne perioden var Diofantus. Han er mest kjent for verket *Arithmetica,* et verk i tretten bøker, som omhandler algebraiske likninger med heltallige koeffisienter og hvor løsningsmengdene skal bestå av hele tall. Diofantus brøt med den greske tradisjonen der geometri var den eneste akseptable formen for matematikk, og skrev om likninger som relasjoner mellom tall, uten å referere til geometriske figurer eller størrelser. Dessuten innførte han begreper for subtraksjon, likhet, den ukjente i nullte, og første-, andre- og tredjepotenser.

(Papatzacos, 2017, s. 175) I likhet med de babylonske tekstene fra Mesopotamia, er ikke *Arithmetica* en oppgavebok, men heller en oppgavesamling om algebraiske metoder, men i motsetning til de egyptiske og babylonske papyrusene, er tallene han anvender abstrakte, og ikke knyttet til fysiske gjenstander eller konsepter. Selv om det er usikkert nøyaktig hvor mye Diofantus påvirket algebraens historie, er oppfatningen at han startet den synkoperte fasen gjennom symbolbruken sin. (Papatzacos, 2017, s. 176)

Al-Kwharizmi

Fra år 622 erobret araberne store deler av Midtøsten, Nord-Afrika, den iberiske halvøy og deler av India, og Islam ekspanderte fra Arabia til Persia, Nord-Afrika og Spania. I 641 ble Alexandria, som i flere år hadde vært matematikkens hovedsete, erobret, og flere bøker i Biblioteket der ble brent. (Merzbach og Boyer, 2011, s. 206) Samtidig som flere eldre matematiske verk ble ødelagt i denne perioden, ga araberne også flere viktige bidrag til utviklingen av matematikken. En av de viktigste matematikerne her var Al-Khwarizmi (780-850) som skrev flere astronomiske og matematiske verk, og spesielt fikk *Boken om addisjon og subtraksjon etter indernes fremgangsmåte* og *Boken om beregning ved gjenoppretting og sammenlikning* stor innflytelse på matematikkens historie. På grunn av hans tilhørighet til Kalifen i Bagdads visdomshus, en institusjon sammenliknbar med Museet og Biblioteket i Alexandria, er det sannsynlig at han kjente til tidligere matematiske bidrag, noe som er synlig i den grad at han, som Diofantus, ser på likninger som relasjoner mellom tall, oppgir løsninger ved hjelp av oppskrifter eller algoritmer som i babylonsk algebra, beviser gyldigheten av disse algoritmene geometrisk likt babylonerne og grekere som Euklid, og bruker en retorisk uttrykksmåte slik som babylonerne.

Al-Khwarizmi argumenterte, i følge Papatzacos' *Notater om Matematikkens Historie* at andregradslikninger er satt sammen av tre størrelser: røtter, kvadrater og tall, hvor en rot er noe som består av flere enheter og som blir større eller mindre når den multipliseres med seg selv, og kvadratet er resultatet av multiplikasjonen av roten med seg selv. (Papatzacos, 2017, s. 178) Videre klassifiserer han andregradslikningene i seks typer:

Type 1: Kvadrater er lik røtter ($a'x^2 = b'x$)

Type 2: Kvadrater er lik tall ($a'x^2 = c'$)

Type 3: Røtter lik tall ($b'x = c'$)

Type 4: En kvadrat og røtter er lik tall ($x^2 + b'x = c'$)

Type 5: En kvadrat og tall er lik røtter ($x^2 + c' = b'x$)

Type 6: Røtter og tall er lik en kvadrat ($b'x + c' = x^2$)

Moderne symboler i parentes, a,b,c er positive tall (Papatzacos, 2017, s. 178)

Al-Khwarizmi presenterte tydelige og klare regler for å løse likninger, noe som gjorde at bøkene hans ble sentrale referanser i flere hundre år. For eksempel, for likninger av type 1, 2 og 3 forenkler han: «Det som involverer mer enn et kvadrat, eller mindre enn et kvadrat, reduseres til et kvadrat. Du opererer likedan på røttene.» (Papatzacos, 2017, s.179) Dessuten, som i Diofantus' oppgaver, ser vi i Al-Khwarizmi at likninger ikke bare er noe som oppstår i arbeidet med å løse ulike praktiske geometri- eller regneproblemer, men det er likningene selv som skal studeres. (Holme, 2004, s. 75)

Alt i alt viser historien om løsningen av andregradslikningen at utvidelsen av rammen av en teori ofte fører til at teoremene og definisjonene blir fri for spesialtilfeller. Forklart av Papatzacos; Al-Khwarizmi bruker rammen $\mathbb{R}^+$, mengden av reelle tall større enn null. Da må han se på fem spesialtilfeller. Utvider vi rammen til $\mathbb{R}$ reduseres antall spesialtilfeller til tre, da likningen $x^2 + bx + c = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) har to løsninger hvis $b^2 - 4c > 0$, én løsning hvis $b^2 - 4c = 0$ og ingen løsning hvis $b^2 - 4c < 0$. Utvider vi rammen videre fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{C}$, har vi ingen spesialtilfeller. (Papatzacos, 2017, s. 180)

Historien om tredje- og fjerdegradslikninger: Italienske matematikere fra 1200-1550

Tredjegradslikningen

Generelt kan tredjegradslikningen skrives $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. På denne tiden ble negative tall stort sett kun brukt i mellomregninger, og null-røtter ble ignorert når en skulle løse en likning. (Papatzacos, 2017, s. 190) Dette medførte at matematikerne måtte se på en rekke spesialtilfeller:

$$p = p', q = q'. \mathit{Likningen\ er}\ x^3 + 3p'x + 2q' = 0. \boldsymbol{Type\ A}.$$

$$p = p', q = -q'. \mathit{Likningen\ er}\ x^3 + 3p'x - 2q' = 0 \rightarrow x^3 + 3p'x = 2q.\ \boldsymbol{Type\ B}$$

$$p = -p', q = q'. \mathit{Likningen\ er}\ x^3 - 3p'x + 2q' = 0 \rightarrow x^3 + 2q' = 3p'x. \boldsymbol{Type\ C}$$

$$p = - + p', q = -q'. \mathit{Likningen\ er}\ x^3 - 3p'x - 2q' = 0 \rightarrow x^3 = 3p'x + 2q'. \boldsymbol{Type\ D}$$

Her har likninger av type A ingen positiv rot, siden venstresiden er positiv og høyresiden null, mens type B og D alltid har en positiv rot.

Europas historie etter år 1000 blir vanligvis inndelt i to epoker: Høymiddelalderen fra 1000-1300 og Senmiddelalderen fra 1300-1500. Første epoke var en periode med økonomisk og kulturell fremgang, hvor for eksempel Spania ble gjenerobret fra Araberne. Senmiddelalderen var derimot en håpløs tid for store deler av Europa, med hundreårskrigen mellom England og Frankrike og Svartedauden. Imidlertid begynte Renessansen i Italia rundt 1300, et land som ikke ble særlig påvirket av pestutbrudd og krig, og her kom de neste fremskrittene innen algebra. (Papatzacos, 2017, s. 185)

Fibonacci var en av de første betydningsfulle europeiske matematikerne, blant annet gjennom boken *Liber Abbaci,* hvor han presenterer det indo-arabiske tallsystemet. Det er imidlertid verket *Flos* fra 1220-tallet, en samling av 15 problemer løst i sammenheng med en matematikk-konkurranse, som er mest relevant for algebraen. Her ble det første eksempelet på en tredjegradslikning presentert: «Finn en kube som, sammen med to kvadrater og 10 røtter gir 20» (Papatzacos, 2017, s. 186), eller: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Fibonacci ser kun på positive røtter, og beviser først at likningen ikke har noen rasjonal rot, før han gir løsningen, uten forklaring. Dette var den mest nøyaktige approksimasjonen av en irrasjonell rot av en algebraisk likning som var sett hittil i Europa.

Etter dette var det lite utvikling rundt algebra før 300 år senere, på 1500-tallet, også i Italia. På denne tiden var det kommet oversettelser av greske og arabiske matematiske verk, etter at Gutenberg fant en måte å masseprodusere trykkede bøker rundt 1450, og disse var allment tilgjengelige. Det første gjennombruddet rundt tredjegradslikningen, etter Fibonacci, kom som følge av en gruppe matematikere; del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli og Ferrari. I 1515 fant del Ferro, som var professor ved Universitetet i Bologna, den algebraiske løsningen av tredjegradslikninger av type B. Imidlertid lot gan være å gjøre det kjent at han hadde løsningen, frem til like før han døde i 1526, da han avslørte den til to av sine elever, Antonio Maria Fiore og Annibale della Nave. Rundt 1530 annonserte Tartaglia at han hadde den algebraiske løsningen for likninger av typen $x^3 + ax^2 = d^2$. Da utfordret Fiore Tartaglia til en matematikkturnering i 1535. De leverte begge 30 oppgaver, med en tidsfrist på 50 dager. Tartaglia laget oppgaver basert på flere matematiake emner, mens Fiores oppgaver gikk ut på å løse likninger av type B. Tartaglia kunne ikke løse slike oppgaver, men fikk det til etter hvert, mens Fiore ikke fikk til noen av Tartaglias oppgaver. (Papatzacos, 2017, s. 191) Alt i alt var altså likninger av typen $x^3 + 3px + 2q = 0$ kjent rundt 1535, men den algebraiske løsningen av den generelle tredjegradslikningen var fremdeles ukjent. Denne overgangen ble funnet av Cardano, som la den frem i *Ars Magna* i 1545.

Fire år etter turneringen mellom Tartaglia og Fiore, altså i 1539, ønsket Cardano å legge frem løsningen til Tartaglia i en bok. Etter hvert fikk han en oppskrift uten innledning av Tartaglia. Imidlertid fant Cardanos sekretær, Ferrari, en metode for å løse fjerdegradslikningen, basert på løsningen av en tredjegradslikning. Cardano fant samtidig ut at løsningen på tredjegradslikningen var blitt funnet ved Universitetet i Bologna før turneringen mellom Fiore og Tartaglia, og la frem løsningen av likningen, sammen med en utledning. (Papatzacos, 2017, s. 192) Av den grunn er det flere som regner året 1545, året løsninger av likninger av tredje og fjerde grad ble allment, som begynnelsen på moderne matematikk.

Fjerdegradslikningen

En fjerdegradslikning kan skrives på formen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, og løses ved hjelp av et variabelskifte som fjerner x^3-leddet, og omforme likningen til $X^4 + pX^2 + qX + r = 2$. Videre skrives likningen om til et produkt av andregradslikninger, og fjerdegradslikningen får fire røtter gjennom to andregradslikninger.

Løsningen til fjerdegradslikningen ble som nevnt tidligere i teksten funnet av Cardanos sekretær Ferrari. Han var et stort talent innen matematikk, og tok i tidlig alder over Cardanos stilling ved Universitetet i Milano. Arbeidet med fjerdegradslikningen begynte med likningen $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. På denne tiden var andregradslikninger blitt løst ved hjelp av geometriske betraktninger, med x^2 som areal, og Cardano brukte x^3 som volum i beviset for tredjegradslikningen. Imidlertid har ikke x^4 noen geometrisk betydning, og må dermed løses på en annen måte, hvor Ferrari brukte algebraiske operasjoner. Det er verdt å merke at null og negative tall fremdeles var lite brukt i matematikk på denne tiden. Merzbach presenterer Cardanos løsning slik:

1. Legg til nok kvadrater og tall på begge sider av likningen, slik at venstre side blir et fullstendig kvadrat.
2. Legg til produkter av en ukjent y til begge sider av likningen, slik at venstresiden enda er et fullstendig kvadrat.
3. Velg y slik at trimoniumet på høyre side blir et fullstendig kvadrat.

4. Resultatet i 3. gir en tredjegradslikning: $y: y^3 + 15y^2 + 36y = 450$, og likningen løses for y.
5. Substituer en verdi fra y fra 4. inn i likningen for x, og løs kvadratroten av begge sider.
6. Resultatet i 5. gir en andregradslikningen, som må bli løst for å finne x.
   (Merzbach, Boyer, 2011, s. 259 [egen oversettelse])

Ferraris løsning av fjerdegradslikningen er slik, fra Pesics *Abels bevis*:

Ta likningen $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ og flytt leddene slik at en får $x^4 + a_3x^3 = -a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$. Så legger en til $\frac{a_3^2}{4}x^2$ til på begge sider, for å lage et fullstendig kvadrat på venstre side av likningen:

$$x^4 + a_3x^3 + \frac{a_3^2}{4}x^2 = (x^2 + \frac{a_3x}{2})^2$$

$$= \left(\frac{a_3^2}{4} - a_2\right)x^2 - a_1x - a_0$$

Dersom høyre side hadde vært et fullstendig kvadrat, kunne vi tatt kvadratroten av de to sidene og redusert likningen til andre grad. Det er imidlertid vanligvis ikke et fullstendig kvadrat, og det må dermed lages, ved å legge til $y\left(x^2 + \frac{a_3x}{2}\right) + \frac{y^2}{4}$ på begge sider av uttrykket:

$$\left(x^2 + \frac{a_3x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{a_3^2}{4} - a_0 + y)x^2 + (-a_1 + \frac{a_3y}{2})x + (-a_0 + \frac{y^2}{4})$$

Vi kan nå gjøre høyre side om til et fullstendig kvadrat ved å justere y. For at dette skal være konsistent må $A = e^2, B = 2ef, C = f^2$, og videre $B^2 - 4AC = (2ef)^2 - 4e^2f^2 = 0$. Så må y tilfredsstille:

$$(-a_1 + \frac{a_3y}{2})^2 = 4(\frac{a_3^2}{4} - a_2 + y)(-a_0 + \frac{y^2}{4})$$

Som er en tredjegradslikning i y, og dermed løsbar. Når vi har bestemt Når vi har bestemt Når vi har bestemt y kan vi videre bestemme e og f:

$$(x^2 + \frac{a_3}{2}x + \frac{y}{2})^2 = (ex + f)^2$$

Som er et fullstendig kvadrat, og gir to annengradsligninger.

$$x^2 + \frac{a_3}{2}x + \frac{y}{2} = ex + f$$

$$x^2 + \frac{a_3}{2}x + \frac{y}{2} = -ex - f$$

> Der e, f, y når er bestemt. Disse to likningene løses ved annengradsformelen, og gir de fire løsningene på fjerdegradslikningen.
> (Pesic, 2005, s. 38-39)

Selv om negative tall, imaginære tall og null var lite brukt i matematikken, i hvert fall som røtter eller løsninger av likninger, er det verdt å merke at Cardano noterer negative røtter, som han kaller fiktive, mens de positive ble kalt ekte. Det var først i 1629 den franske matematikeren Albert Girard, som for øvrig var den første til å formulere algebraens fundamentalteorem, aksepterte negative løsninger. Han forklarte at «det negative i geometri angir en tilbakegang, mens det positive går fremover», slik som på en tallinje. (Pesic, 2005, s. 51) Samtidig var det flere matematikere som nektet å akspetere dette, og kalte dem absurde tall. Selv i det attende århundre var det enkelte lærebøker som benektet at produktet av to negative tall er et positivt tall. Imaginære løsninger ble imidlertid ikke tatt i betraktning av Cardano, og ble kalt for umulige. (Cajori, 2015, s. 146) Imaginære tall ble ikke utforsket i algebraen før Raphael Bomelli, fra Bologna, i 1572.

Abels teorem og dets betydning

Niels Henrik Abel

Etter at likninger av tredje og fjerde grad var blitt løst, var det lite tvil om at også likninger av høyere grad kunne løses. Likevel ble ikke løsningen funnet, og Niels Henrik Abel kom frem til at det å finne algebraiske løsninger til likninger høyere enn fjerde grad kunne regnes som utopisk. (Cajori, 2015, s. 146)

Niels Henrik Abel var en norsk matematiker, født i Rogaland i 1802. Allerede før han var student ble han regnet til å være en av landets mest lovende vitenskapsmenn, men ingen i Norge hadde tilstrekkelig matematisk innsikt til å forstå betydningene av bevisene hans. (Stubhaug, 1996, s. 11) Han gikk på Christiania Katedralskole, og begynte sommeren 1818 å vise et stort talent innenfor matematikk. Han ble student i 1821, med middels karakterer foruten i matematikk, og ble omtalt som et sjeldent matematisk talent som kunne være med på å gi både universitetet og Norge et godt rykte utenlands.

Allerede som elev ved Katedralskolen arbeidet han med et av tidenes mest populære matematiske problem: Hvordan finne røttene i en alminnelig femtegradslikning ved hjelp av de klassiske regneoperasjonene; addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og røtter. Som student løste han dette problemet, eller, han beviste at det var umulig å finne noen slik løsning innenfor de gitte, klassiske rammene. (Stubhaug, 1996, s. 15) Måten han kom frem til dette var å undersøke om den form røttene i en generell femtegradslikning nødvendigvis må ha, kan tilfredsstille likningen. Videre gjennomfører han beviset ved å finne det alminneligste uttrykk som kan dannes av koeffisientene i femtegradslikningen ved hjelp av addisjon, subtraksjon, divisjon, multiplikasjon og røtter, for å så sette dette inn for x i likningen. Han bruker videre Cauchys beviser om antallet av forskjellige verdier en rasjonal funksjon av flere variabler kan anta når disse variablene byttes om på forskjellige måter. (Stubhaug, 1996, s. 287)

Abel slet hele livet med økonomi og finansiering både av boplass, studier og matematiske utenlandsreiser, og måtte i 1824 selv bestille trykking av avhandlingen om femtegradslikningen. For å gjøre utleggene hos boktrykkeren minst mulig var beviset skrevet på seks sider, med kun hovedpunktene. Avhandlingen ble omsider også sendt til matematikeren Gauss, som blir omtalt senere i oppgaven, som skal ha uttalt seg negativt og sagt at han selv nok skulle kunne bevise mulighetene av en oppløsning av femtegradslikningen. Selv om Gauss senere sa seg enig med Abel, ga ikke avhandlingen om femtegradslikningen Abel noen «adgang» til det lærde Europa. Abel tok opp igjen avhandlingen to ganger, i Crelles Journal i 1826 og i et manuskript i hans etterlatte papirer, hvor han ga et fyldigere versjon av beviset. (Stubhaug, 1996, s. 292)

Utenom femtegradslikningen, oppdaget også Abel elliptiske funksjoner, beviste et fundamentalteorem om addisjon og dannet grunnlaget for abelske funksjoner. Abel døde ungt, i 1829, og var da lite kjent i utlandet. I dag hører han til de mest berømte matematikerne som har levd de siste 200 årene, og er regnet som en av Norges fremste matematikere, sammen med Sophus Lie.

Abels teorem

Abels bevis dreier seg om løsning av algebraiske likninger på formen $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, hvor x er den ukjente variabelen og $a_n, a_{n-1}, \dots\ a_0$ er konstante koeffisienter. Som sett tidligere, blir algebraiske likninger klassifisert etter den høyeste potensen, n. Dersom n=1 er likningen av første grad, og har én rot. Første-, andre-, tredje-, og fjerdegradslikninger er løsbare ved rotutdragning.

I beviset bruker Abel metoden *reductio ad absurdum,* der han begynner med å anta at den generelle femtegradslikningen er løsbar ved hjelp av de algebraiske operasjonene addisjon, subtraksjon, divisjon, multiplikasjon og røtter, og viser at dette fører til en selvmotsigelse.. Først og fremst spesifiserer han hvilken form en løsning på ha. Gitt en likning av n-te grad

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

beviser Abel en generell påstand om enhver funksjon: alle algebraiske funksjoner y kan uttrykkes på formen

$$y = p + R^{\frac{1}{n}} + p_2 R^{\frac{2}{n}} + \cdots + p_{n-1} R^{\frac{n-1}{n}}$$

der p, p_2 ... er endelige summer av uttrykk som enten er polynomer i koeffisientene til den opprinnelige likningen, eller (n-1)te røtter av slike polynomer. (Pesic, 2005, s. 90)
Det vil si at hvis y er løsningen på en algebraisk likning av n-te grad, kan y uttrykkes som en rekke med ledd som inneholder røtter av røtter med koeffisienter. Dermed må løsningen på femtegradslikningen enten ha denne formen, ellers så finnes det ingen slik løsning i røtter. Videre viser Abel at dette er en selvmotsigelse. Først og fremst går en ut fra at alle algebraiske funksjoner y kan skrives som en sum av funksjoner hvor hver er en rasjonal funksjon av røttene i likningen, altså at vi kan uttrykke y ved røtter i stedet for de opprinnelige koeffisientene i likningen. I neste steg blir de hypotetiske løsningene begrenset, med at en antar at hvis en rasjonal funksjon av fem størrelser antar færre enn fem verdier når de fem objektene permuteres, kan den bare anta to forskjellige verdier, eller én verdi. Dette er hentet fra Cauchys arbeid, og er basert på at vi ser på de forskjellige måtene vi kan permutere røttene av likningen på. (Pesic, 2005, s. 93) Abel benytter seg også av algebraens fundamentalteorem, som jeg skal komme tilbake til senere; at en femtegradslikning må ha minst én men ikke mer enn fem forskjellige røtter. Dette teoremet ble bevist av Gauss i 1799. Cauchys resultat krever at *p* bare kan anta én, to eller fem verdier når røttene permuteres. Dette gir Abel muligheten til å vise at løsningen ikke kan fungere. (Pesic, 2005, s. 94)

Alt i alt sier Abels teorem at den generelle femtegradslikningen ikke kan løses ved hjelp av de algebraiske operasjonene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon, og røtter. Med andre ord, det er umulig å løse den generelle femtegradslikningen i rottuttrykk. (Pesic, 2005, s. 94)

Historien om komplekse tall

I følge Agarwal, Perera og Pinelas' *History of Complex Numbers*, var komplekse tall et problem allerede i 75 e.v.t, da Heron av Alexandria forsøkte å finne arealet av et frustum av en pyramide, noe som krevde kvadratroten av $81 - 144$. (Agarwal et al, 2011, s. 323) Vel og merke var heller ikke negative tall «lov» på denne tiden. Vi går litt frem i tid, tilbake til Cardano på 1540-tallet. I tredjegradslikninger unngikk Cardano eksempler med kvadratrøtter av negative tall, men han skrev for første gang i historien *ned* kvadratroten av et negativt tall.

En fullstendig avklaring av dette kom først mot slutten av 1700-tallet, hvor blant annet Gauss bidro. Imidlertid kom en delvis avklaring i 1572, utformet av Bombelli i sin bok *L'Algebra.* På 1550-tallet arbeidet den italienske matematikeren Bombelli med en bok om algebra, da han ble gjort oppmerksom på Diofantus' *Arithmetica.* Manuskriptet var bevart på Universitetet i Roma, og Bombelli bestemte seg for å oversette dette. Bombelli blir klar over tall av en ny type, kvadratrøtter av negative tall, som hverken er positive eller negative. I følge Papatzacos' *Notater om Matematikkens Historie* innførte han betegnelsene

$$\text{pluss av minus, for } \sqrt{-1} \text{ (som i dag blir betegnet } i\text{)}$$

$$\text{minus av minus, for } -\sqrt{-1} \text{ (som i dag blir betegnet } -i\text{)}$$

(Papatzacos, 2017, s. 195)

Han definerer også multiplikasjonstabellen til disse tallene:

$$i * i = -1$$

$$i * (-i) = 1$$

Bombelli tvilte selv på eksistensen av slike tall, men klarte å vise at en av røttene gitt av Cardanos likninger blir et reelt tall ved hjelp av slike notasjoner. Hvis vi ser på en tredjegradslikning med kjente, reelle røtter:

$$(x-4)\left(x+2-\sqrt{3}\right)\left(x+2+\sqrt{3}\right) = 0$$

$$(x-4)[(x+2)^2 - 3] = 0$$

$$(x-4)(x^2+4x+1) = 0$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Dersom vi bruker Cardanos metode for løsning av tredjegradslikninger, får vi:

$$x = (2 + 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (2 - 11\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

Bombelli viste at denne likningen kan skrives som

$$x = (2 + 11i)^{\frac{1}{3}} + (2 - 11i)^{\frac{1}{3}}$$

og videre:

$$(2+11i)^{\frac{1}{3}} = a+bi, (2-11i)^{\frac{1}{3}} = a-bi$$
$$2+11i = (a+bi)^3 = a(a^2-3b^2) + ib(3a^2-b^2)$$
$$a(a^2-3b^2 = 2$$
$$b(3a^2-b^2) = 11$$

(Papatzacos, 2017, s. 195)

Bombelli prøvde ikke å løse dette systemet generelt, men så i stedet etter løsninger i naturlige tall, som gir $a = 2, b = 1$. Imidlertid var Bombellis metode *foreløpig* til liten hjelp, ettersom en måtte vite en av røttene på forhånd for å anvende metoden hans. (Merzbach, 2011, s. 261) Alt i alt var den mest betydningsfulle innsatsen til Bombelli at han grep de imaginære tallene med en vesentlig større grad av presisjon enn det Cardano gjorde, i den grad at presiserte at slike tall er satt sammen av en virkelig, reell del, og en innbilt, imaginær del.

Senere noterte John Wallis, som levde på 1600-tallet, negative tall på som punkter tallinjen fra 0, hvor positive tall går mot høyre og negative tall mot venstre fra 0. Han gjorde også fremgang innen den geometriske representasjonen av $\sqrt{-1}$. (Merino, 2006, s. 3) Mot slutten av 1600-tallet formulerte Abraham de Moivre det vi i dag kjenner som de Moivres teorem:

$$((\cos(\theta) + isin(\theta))^n = \cos(n\theta) + isin(n\theta)$$

Matematikeren Euler bidro også til utviklingen av komplekse tall, og introduserte notasjonen $i = \sqrt{-1}$, og visualiserte komplekse tall som punkt med koordinater. (Merino, 2006, s. 4) Han definerte også den komplekse eksponentialfunksjonen, og ga et bevis for det vi nå kaller Eulers formel:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

Slike tall ble etterhvert kalt sammensatte, eller komplekse, i 1831 innførte Carl Fredrich Gauss begrepet «komplekse» tall, og ga dermed de komplekse tallene en slags legitimitet. Han publiserte også en geometrisk representasjon av komplekse tall som punkt i planet. Likevel ble ikke de komplekse tallene generelt akseptert før Cauchy (1789-1857) og Abel brukte komplekse tall i sine beregninger og bevis. (Agarwal et al, 2011, s. 324)

Carl Friedrich Gauss

Johan Carl Friedrich Gauss ble født i 1777 i Tyskland, og ifølge Audun Holmes *Matematikkens Historie 2* fortelles det at Gauss som liten oppdaget feil i farens utregninger av lønninger, og at han kunne regne før han kunne snakke. (Holme, 2004, s. 366) Familien til Gauss hadde nylig flyttet til byen fra omlandet, noe som gjorde at Gauss kunne få skolegang. Holme beskriver videre at Gauss imponerte lærerne, blant annet ved at en gang matematikklæreren hans skulle ha fred ville han sette elevene til å addere alle tall fra 1 til 100, og at Gauss rakk opp hånden i været med rett svar, før de andre elevene en gang hadde begynt. Gauss imponerte videre i skolegangen, fikk stipend av hertugen av Braunschweig og lå ofte i forkant av undervisningen. I løpet av sin skolegang var Gauss den første som ga en teoretisk begrunnelse for minste kvadratsums metode, utviklet sin egen metode for forenkling av store likningssystemer – Gaussisk eliminasjon -, og konstruerte den regulære 17-kanten med passer og linjal. Senere tok han doktorgrad på en avhandling om algebraens fundamentalteorem, og gir, etter å ha funnet hull i Eulers bevis, riktig bevis for resultatet. (Holme, 2004, s. 373)

Gauss løste flere av den tids store matematikkproblemer, deriblant periodisiteten til enkelte elliptiske funksjoner og generell dobbel-periodisitet. Flere kilder, inkludert W. W. R. Balls *A History of the Study of Mathematics at Cambridge*, sier at Gauss vegret seg for å publisere noe annet enn det som ikke kunne kritiseres, etter at et av hans første verk *Disquistiones Artihmeticae* mottok sterk kritikk fra The French Academy of Sciences. E. T. Bell sier derimot at akademiet aldri tok imot dette verket, og at Gauss i stedet publiserte lite fordi han ikke hadde noe spesifikt ønske om å bli publisert – matematikken kom først, publisering siden. (Bell, 1965, s. 229) Gauss etterlot seg også kun ferdige verk, som ikke kunne redigeres uten å ødelegge verket, og ville derfor perfeksjonere ett verk flere ganger, enn å publisere så mange som mulig.

Historien til Algebraens fundamentalteorem

I 1629 formulerte matematikeren Albert Girard at enhver polynomlikning har så mange komplekse røtter som dens grad, altså at en andregradslikning har to røtter, en tredjegradslikning har tre, og en n-te gradslikning har n komplekse røtter. (Pesic, 2005, s. 56) Også Descartes fremsatte dette teoremet, uten at det ble fremstilt noe bevis. Mot midten av 1700-tallet ble det arbeidet mye med dette, i tillegg til spørsmålet om hvorvidt alle likninger har minst én løsning. Det er dette generelle spørsmålet som kalles Algebraens fundamentalteorem. I 1748 la Jean Le Rond d'Alembert frem et bevis, det samme gjorde Euler året etter, men ingen av bevisene var tilstrekkelige. (Pesic, 2005, s. 69) Euler var i stand til å angi mange metoder for å faktorisere likninger av høyere grad til produkter av likninger av lavere grad, men kunne ikke gi et fullstendig generelt resultat. Det klarte imidlertid Carl Friedrich Gauss, som anga fire beviser for algebraens fundamentalteorem, det første i doktoravhandlingen hans i 1799. Han tok blant annet i bruk komplekse tall, hvor han i et av bevisene tillater at x er et komplekst tall med både en reell og en imaginær del, og tillater også at koeffisientene er komplekse. (Pesic, 2005, s. 70) Denne bruken av komplekse tall gir muligheten til å begrunne generelle påstander. Gauss brukte også det vi nå kaller Cauchys integralformel i et av bevisene.

Algebraens fundamentalteorem sier altså at ethvert polynom på formen

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Hvor koeffisientene er reelle eller komplekse tall, har minst én rot i det komplekse planet. Dermed følger det videre at et slikt polynom av grad *n* har *n* røtter. (Burton, 1994, s. 494)

I 1814 publiserte også Argand et uperfekt bevis, basert på et mindre perfekt bevis av d'Alembert fra 1746. Flere andre bevis for teoremet har kommet siden, og vi kan dele opp bevisene i tre kategorier. Første kategori er topologiske bevis, som for eksempel Gauss' første teorem. Neste kategori er analytiske bevis, som er relatert til Liouvilles resultat om at en ikke-konstant funksjon på $\mathbb{C}$ er ubegrenset. Siste kategori er algebraiske bevis, som bruker ideen om at hvert odde polynom med ekte koeffisienter har ekte røtter, og ethvert komplekse tall har en kvadratrot.

Tre analytiske bevis for AF

Analytiske funksjoner

For å kunne bevise algebraens fundamentalteorem analytisk, krever det anvendelse av kompleks analyse. En kompleks funksjon $w = f(z)$ er en funksjon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, hvor $w, z \in \mathbb{C}$ og kan kalles komplekse variabler. Enhver kompleks funksjon er sammensatt av to reelle funksjoner $w = f(z) = u(z) + iv(z)$, hvor $u(z)$ er den reelle delen av $f(z)$, og $iv(z)$ den imaginære delen. (Fine, Rosenberger, 1997, s. 36)

Eks: Dersom vi har en kompleks funksjon $f(z) = z^2$. Da vil den reelle og den komplekse delen være:

$$z = x + iy$$
$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

Reell del: $x^2 - y^2$ og kompleks del: $2xy$

Som med vanlige tall, følger aritmetiske operasjoner av komplekse tall standardreglene:

$Addisjon$: $(5 + 4i) + (7 + 3i) = 12 + 7i$

$Subtraksjon$: $(5 + 4i) - (7 + 3i) = -2 + i$

$Multiplikasjon$: $(5 + 4i)(7 + 3i) = 35 + 14i + 28i + 12i^2 = 23 + 42i$ $(siden\ 12i^2 = -12$

Før jeg utdyper divisjon av komplekse tall, vil jeg introdusere den komplekskonjugerte:

$\overline{x + iy} = x - iy$

Eks: $\overline{5 + 4i} = 5 - 4i$

Fra den komplekskonjugerte, følger:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

Hvor $x^2 + y^2$ blir et reelt tall. Den komplekskonjugerte kan blant annet brukes i divisjon av komplekse tall.

Eks: $\frac{5+4i}{1+2i} = \frac{5+4i}{1+2i} * \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{13-6i}{5} = \frac{13}{5} - \frac{6}{5}i$

En analytisk funksjon er en funksjon som alltid kan deriveres, altså at den deriverte eksisterer for hvert punkt i funksjonens definisjonsområde. Dermed er også de essensielle konseptene av kalkulus; kontinuitet, deriverbarhet og integrerbarhet, som alle handler om grenseverdier, viktige konsepter i bevisene av algebraens fundamentalteorem og generelt i kompleks analyse.

Def: Gitt en funksjon f. f er kontinuerlig i z_0 dersom $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Lemma: Dersom $f(z) = u(z) + iv(z) \rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} u(z) + i \lim_{z \to z_0} v(z)$ (Fine, Rosenberger, 1997, s. 37)

Eks: Dersom $f(z) = (x^2 + y^2) + i(2xy)$. Finn grenseverdien $\lim_{z \to 1+i} f(z)$:

$$\lim_{z \to 1+i} f(z) = \lim_{(x,y) \to (1,1)} (x^2 + y^2) + i \lim_{(x,y) \to (1,1)} 2xy = 2 + 2i$$

Deriverbarhet er også et viktig konsept:

Def: Funksjonen $f: (a - r, a + r)$ er deriverbar i punktet a dersom grensen eksisterer:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Eks: Vis at funksjonen $f(z) = z^2$ er deriverbar for alle $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(z_0+h)^2 - {z_0}^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{{z_0}^2 + 2z_0h + h^2 - {z_0}^2}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} 2z_0 + h = 2z_0$$

Altså er $(z^2)' = 2z, z \in \mathbb{C}$. Dermed er funksjonen deriverbar i hvert punkt i funksjonens definisjonsområde, og derfor en analytisk funksjon.

Eks: Vis at funksjonen $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ikke er deriverbar i noe punkt $z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq 0$:

Hvis $f'(z_0)$ eksisterer, vil $f'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = 2x_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 2y_0$. Dette er bare mulig dersom $x_0 = y_0$, og den deriverte eksisterer da kun langs linjen $y = x$, og er ikke analytisk ved z_0.

Cauchy-Riemann likninger

Cauchy-Riemann likninger, oppkalt etter matematikerne Cauchy og Riemann, er et system av to partiellderiverte likninger, som gjør det lettere å bekrefte om en funksjon er analytisk eller ikke. (Agarwal et al, 2011, s. 37)

Anta at $f(z)$ er deriverbar i z_0, altså at grensen eksisterer: $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$. Denne funksjonen kan skrives om til $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, hvor $u(x,y)$ er den reelle delen, og $iv(x,y)$ er den imaginære delen av $f(z)$. Hvis vi antar at $f(z)$ er differensierbar i z_0, og lar $h = x \to 0$, får vi:

$$f'(z_0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x_0+x, y_0) + iv((x_0+x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{u(x_0+x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x} + i \lim_{x \to 0} \frac{v(x_0+x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Hvis vi i stedet antar at $h = iy \to 0$, får vi:

$$f'(z_0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(x_0, y+y_0) + iv(x_0, y+y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{iy}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + y) - u(x_0, y_0)}{iy} + i \lim_{y\to 0} \frac{v(x_0, y_0 + y) - v(x_0 y_0)}{iy}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

Da får vi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\ og\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Som kalles Cauchy-Riemann-likningene. I motsatt retning kan en vise at dersom en funksjon $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ har kontinuerlige partiellderiverte som tilfredsstiller Cauchy-Riemann-likningene i det komplekse plan, så er $f(z)$ analytisk over alt.

Eks: La $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Vis at $f(z)$ er analytisk over alt.

$$u(x, y) = e^x \cos y\ \ og\ v(x, y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

Vi ser at $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$ og $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y = -e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}$ for alle punkt i $\mathbb{C}$, og $f(z)$ er dermed analytisk i hvert punkt i $\mathbb{C}$.

Eks: Vis at $f(z) = z^2$ er analytisk over alt.

$$z = x + iy. f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2\ og\ v(x, y) = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

Vi ser at $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$ og $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -2y = -\frac{\partial u}{\partial y}$ for alle punkt i $\mathbb{C}$. Funksjonen tilfredsstiller betingelsene for Cauchy-Riemann-likningene, og er derfor analytisk over alt.

Cauchys integralformel

Før vi kan bruke Cauchys integralformel i beviset av algebraens fundamentalteorem, må det komplekse integralet defineres:

Def: Dersom $f(t) = u(t) + iv(t)$er en kontinuerlig kompleks funksjon på intervallet$t_0 \leq t \leq t_1$, kan vi definere:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt + i\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

(Fine, Rosenberger, 1997, s. 62)

Ellers gjelder de vanlige integrasjonsreglene vi kjenner fra kalkulus også for komplekse funksjoner:

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \qquad c \in \mathbb{C}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), der\ F'(x) = f(x)$$

Videre trenger vi også et av Cauchys andre teorem, som sier at dersom $f(z)$ er analytisk gjennom et enkelt, lukket domene U og γ er en lukket kurve under U. Da er

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Dette teoremet impliserer også at enhver analytisk funksjon er den deriverte av en annen analytisk funksjon. Ved å videreføre dette teoremet, får vi teoremet som kalles Cauchys integralformel:

La $f(z)$ være analytisk i et enkelt, lukket domene U, som inneholder en lukket kurve γ. Hvis z_0 er ethvert punkt inni γ, da er

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_o}dz$$

Hvor integralet går mot klokken rundt γ. Dette teoremet impliserer at verdien av en funksjon som er analytisk i U innenfor en kurve γ i U, er bestemt av verdien til grensen av γ. (Fine, Rosenberger, 1997, s. 66)

Eks: Evaluer $\int_\gamma \frac{dz}{z^2-9}$ hvor γ er en enkelt, lukket kurve som ikke inneholder $z = -3$.

Hvis vi lar $f(z) = \frac{1}{z+3}$. Hvis γ ikke inneholder $z = -3$, er $f(z)$ analytisk på γ. Fra Cauchys integralformel:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-9} = \int_\gamma \frac{dz}{(z+3)(z-3)} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-3}dz = 2\pi i\, f(3) = \frac{2\pi i}{6}$$

Videre, fra kalkulus vet vi at hvis $g(x,t)$ er en differensierbar funksjon av to variabler, og

$$f(t) = \int_a^b g(x,t)dx$$

Da er

$$f'(t) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\, dx$$

Altså, hvis en funksjon er definert ved å integrere en deriverbar funksjon av to variabler med hensyn på en variabel, da er den deriverte integralet av den partiell-deriverte med hensyn til *den* variabelen. Dette kan vi bruke i Cauchys integralformel for å finne et uttrykk for den deriverte av en analytisk funksjon:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_o}dz$$

Hvis vi finner den deriverte inni integralet med hensyn på z_0 får vi

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

Deriverer vi igjen, får vi

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

Generelt gir dette:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Cauchys integralformel gir videre Cauchys ulikheter.

Anta at $f(z)$ er analytisk i et enkelt, lukket område U, som inneholder sirkelen C_0 med radius r_0 og sentrum z_0. Hvis M er maksimalverdien av $|f(z)|$ på C_0, da er

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!\,M}{r_0^n}$$

Fordi:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{Mn!}{2\pi}\left|\int_{C_o} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right|$$

(Fine, Rosenberger, 1997, s. 69)

Agarwal et al presenterer et noe lettere bevis i *An Introduction to Complex Analysis:*
La f være en analytisk funksjon inni og på en sirkel γ_R med radius R og sentrum i z_0. Dersom $|f(z)| \leq M$ for alle z på γ_R, gjelder følgende ulikhet:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!\,M}{R^n}, n = 1, 2, \ldots$$

Fordi

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R = \frac{n!\,M}{R^n}$$

(Agarwal et al, 2011, s. 120)

Liouvilles teorem

Basert på Cauchys ulikheter kan vi bevise Liouvilles teorem, som kan brukes til å bevise algebraens fundamentalsetning ved motsigelse. Liouvilles teorem går ut på at hvis en antar at $f(z)$ er en hel funksjon, altså at den er analytisk i det komplekse plan, og at det finnes et tall $M > 0$ slik at $|f(z)| \leq M \; for \; alle \; tall \; z$, da er $f(z)$ en konstant, $f(z) = c$ for alle z.

Dette bevises ved å velge et vilkårlig punkt z_0. La γ_R være sirkelen $|z - z_0| = R$, og siden $|f(z)| \leq M \; for \; alle \; Z \rightarrow \; |f'(z_0)| \leq \frac{n}{R}$. La $R \rightarrow \infty \; \Rightarrow f'(z_0) = 0 \; for \; alle \; z$. Dette medfører at $f(z)$ er en konstant funksjon, altså at det finnes et tall C slik at $f(z) = c, for \; alle \; z$.

Argumentprinsippet

For å kunne presentere Rouches teorem, trenger vi først argumentprinsippet. Argumentprinsippet omhandler meromorfe og holomorfe funksjoner, hvor en holomorf funksjon er en funksjon som er analytisk i et område, mens en meromorf funksjon er en funksjon som er analytisk på et område foruten et sett av isolerte punkter. (Orlof, 2018, s. 2)

Teoremet sier at hvis vi lar $f(z)$ være meromorf inni og på en positivt-orientert kurve γ (en enkelt lukket kurve hvor man alltid har kurvens indre på venstre side når en beveger seg med kurven). Videre, la $f(z) \neq 0$ på γ. Da er

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f$$

Hvor Z_f er antall nullpunkter og P_f er antall poler inni γ. (Agarwal et al, 2011, s. 247)

Eks: $f(x) = \frac{(z-2)^3(x-1)^7 z^3}{(z-i)^4(z+3)^5(z-2i)^7}$ hvor $\gamma\colon |z| = 2.5$. Her ser vi at $z_f = 3+7+3 = 13$ og $P_f = 4+7 = 11$. Dermed er $Z_f - P_f = 2$

Rouches teorem

Rouches teorem handler om null-lokasjoner og punkter av meromorfe funksjoner, og kan utledes ved hjelp av argumentprinsippet og følgende lemma:
Anta at $f(z)$ er kontinuerlig og kun antar heltall på et domene S. I så fall er $f(z)$ en konstant på S. (Agarwal et al, 2011, s. 248)

Rouches teorem: Anta at γ er en enkel, lukket kurve, og at $f(z), g(z)$ er analytiske funksjoner på og inni γ, foruten et sett av isolerte punkter, at $|f(z)| > |g(z)|\ for\ alle\ z$ på γ, og at $g(z)$ ikke har noen null på γ. Da er

$$Z_f - P_f = Z_{f+g} - P_{f+g}$$

(Agarwal et al, 2011, s. 248)

Dette gir videre et korollar, som sier at hvis en antar at $f(z), g(z)$ er analytiske funksjoner i et domene S, hvis $f(z) > g(z)$ for alle z på γ, hvor γ er en enkel, lukket kurve i S, da har $f(z)$ og $f(z) + g(z)$ samme antall nullpunkter inni γ. (Agarwal et al, 2011, s. 249)

Eks: Vis at funksjonen $ø(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ har tre nullpunkter i $1 \leq |z| \leq 2$. Her setter vi $f(z) = -6z^2$ og $g(z) = 2z^5 + z + 1$ på $|z| = 1$, slik at $|f(z)| = 6$ og $|g(z)| \leq 2 + 1 + 1 = 4$. Dette gir at $|f(z)| > |g(z)|$ på $|z| = 1$. Fra korollaret har vi da at $ø(z)$ har to nullpunkter i $|z| < 1$. Videre lar vi $f(z) = 2z^5$ og $g(z) = -6z^2 + z + 1$ på $|z| = 2$. Da er

$|f(z)| = 64$ og $|g(z)| \leq 24 + 2 + 1 = 27$. Siden $|f(z)| > |g(z)|$ på $|z| = 2$. Dermed har $ø(z)$ fem nullpunkter i $|z| < 2$. Dermed har $ø(z)$ tre nullpunkt i $1 \leq |z| \leq 2$.

Tre analytiske bevis for AF

Algebraens fundamentalbevis sier at dersom $p(z)$ er et komplekst polynom med grad ≥ 1, da har $p(z)$ minst én kompleks rot. Som nevnt tidligere i oppgaven kan bevisene for teoremet deles inn i tre forskjellige kategorier. Jeg skal fokusere på analytiske bevis, som stort sett er relatert til og utledet fra Liouvilles teorem.

Første bevis

Første bevis for algebraens fundamentalsetning kan utledes fra Liouvilles teorem: $f(z)$ er en hel funksjon, altså at den er analytisk i det komplekse plan, og at det finnes et tall $M > 0$ slik at $|f(z)| \leq M\ for\ alle\ tall\ z$, da er $f(z)$ en konstant, $f(z) = c$ for alle z.

Hvis vi lar $p(z)$ være et komplekst polynom, og lar $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Dersom $p(z)$ ikke har en kompleks rot, vil $f(z)$ være en hel funksjon. Siden $|p(z)| \to \infty$ når $|z| \to \infty$, vil det finnes $M, r\ > 0$ slik at $|p(z)| > M\ hvis\ |z| > r$. Dette impliserer at for

$$|z| > r, |f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} < \frac{1}{M}$$

Hvis $f(z)$ var en hel funksjon, ville den vært kontinuerlig og begrenset på settet $|z| \leq r$, og videre, hvis $f(z)$ var en hel funksjon, ville den vært begrenset på $\mathbb{C}$. Fra Liouvilles teorem følger det videre at $f(z)$ da er en konstant. Men, da er $p(z)$ også en konstant, noe som er en motsigelse. Av den grunn må $p(z)$ være null for minst én verdi av $z \in \mathbb{C}$.

■

Dette beviset sier at dersom $f(z)$ er en ikke-konstant, hel funksjon hvor $|f(z)| \to \infty$ og $|z| \to \infty$, da har $f(z)$ minst et nullpunkt i $\mathbb{C}$. Altså har funksjonen et punkt $z_0 \in \mathbb{C}, f(z_0) = 0$. (Fine, Rosenberger, 1997, s. 71)

Andre bevis

Algebraens fundamentalteorem kan også bevises gjennom motsigelse på en annen måte:

Anta at $p(z)$ ikke har nullpunkter, $p(z) \neq 0$. Da er funksjonen $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ deriverbar for alle z, $f'(z) = \frac{p\prime(z)}{p^2(z)}$, og $p(z)$ er en hel funksjon.

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} = \frac{1}{|a_n z^n + \cdots + a_0|}$$
$$= \frac{1}{|z|^n} \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}}$$

Vi ser at $\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| = \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \to 0$ når $|z| \to 0$, og tilsvarende $\left|\frac{a_{n-k}}{z^u}\right| \to 0$ når $|z| \to \infty$, for alle $k = 1, \ldots, n$. Dette viser at

$$\frac{1}{\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|} \to \frac{1}{|a_n|}, |z| \to \infty$$

Vi kan konkludere med at

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^u} \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}} \to 0 \; når \; u \to \infty$$

Dette betyr at det finnes $R > 0$ slik at $|f(z)| \leq 1$ for alle $z, |z| \geq R$.

Hvis vi har funksjonen $f(z) = u(x,y) + i(x,y) \Longrightarrow |f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$. Funksjonen $u^2(x,y) + v^2(x,y)$ er en kontinuerlig funksjon av to variabler x, y. Et resultat fra teorien om kontinuerlige funksjoner sier at enhver funksjon som er kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$ oppnår sin maksimumsverdi innenfor enhver sirkel $x^2 + y^2 \leq r^2$. Dette viser at det finnes et tall M slik at

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} \leq M$$

Vi ser da at $|f(z)| \leq M$ for $|z| \leq R$ og at $|f(z)| \leq 1$ for $|z| \geq R$
$\Rightarrow |f(z)| \leq M + 1$ for alle z.

I følge Liouvilles teorem er $f(z)$ en konstant funksjon $f(z) = c$. Dette blir en motsigelse.

Altså kan en si at gitt et komplekst polynom $p(z)$ av n-te grad:

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0, a_0 \ldots a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

Så finnes det n komplekse tall $z_1 \ldots z_n$ slik at

$$p(z) = a_n(z - z_1) * \ldots * (z - z_n)$$

■

Tredje bevis

Algebraens fundamentalteorem kan også bevises gjennom Rouches teorem og et korollar utledet fra det. Rouches teorem sier, som nevnt tidligere, at dersom γ er en enkel, lukket kurve, og at $f(z), g(z)$ er analytiske funksjoner på og inni γ, foruten et sett av isolerte punkter, at $|f(z)| > |g(z)|\ for\ alle\ z\ på\ \gamma$, og at $g(z)$ ikke har noen null på γ. Da er

$$Z_f - P_f = Z_{f+g} - P_{f+g}$$

(Agarwal et al, 2011, s. 248)

Korollaret sier at dersom en antar at $f(z), g(z)$ er analytiske funksjoner i et domene S, hvis $|f(z)| > |g(z)|$ for alle z på γ, hvor γ er en enkel, lukket kurve i S, da har $f(z)$ og $f(z) + g(z)$ samme antall nullpunkter inni γ. (Agarwal et al, 2011, s. 249)

Hvis vi lar $f(z) = a_n z^n$ og $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ på $|z| = R$, slik at $|f(z)| = |a_n|R^n$ og $|g(z)| \leq |a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots + |a_1|R + |a_0|$. Da er $|f(z)| > |g(z)|$ på $|z| = R$ dersom vi velger $R > 1$ slik at

$$\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|a_n|} + \frac{|a_0|}{|a_n|} < R$$

Siden $f(z)$ har *n* nullpunkt i $|z| = R$, har $P_n(z) = f(z) + g(z)$ også nøyaktig *n* nullpunkt i $|z| = R$. (Agarwal et al, 2011, s. 249)

■

Bibliografi

- Agarwal, R. P., Perera, K., Pinelas, S. (2011) *An Introduction to Complex Analysis.* Boston, MA: Springer US
- Bell, E. T. (1965) *Men of Mathematics: The lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré.* New York: Simon & Schuster
- Burton, D. M. (1994) *Burton's History of Mathematics: An Introduction.* (3. Utgave) New Hampshire: Wm. C. Brown Publishers
- Cajori, F. (2015) *A history of Mathematics.* London: FB&c
- Fine, B., Rosenberger, G. (1997) New York: Springer
- Heath, T. L (1910) *Diophantus of Alexandria: A study in the history of Greek Algebra.* 2. Utgave) Connecticut: Martino Publishing
- Holme, A. (2001) *Matematikkens historie: Fra Babylon til mordet på Hypatia*. Bergen: Fagbokforlaget
- Holme, A. (2004) *Matematikkens historie: Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel*. Bergen: Fagbokforlaget
- Holme, A. (2015) *Matematikkens historie: Fra Abels tid*. Bergen: Fagbokforlaget
- Katz, V. J. (2007) *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sourcebook.* New Jersey: Princeton University Press.
- Katz, V. J. (1998) *A History of Mathematics: An Introduction.* (2. Utgave) Boston: Addison-Wesley Educational Publishers
- Kline, M. (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern times: Volume 1*. New York: Oxford University Press
- Kline, M. (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern times: Volume 2*. New York: Oxford University Press

- Kline, M. (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern times: Volume 3.* New York: Oxford University Press
- Merino, O. (2006) *A Short history of Complex Numbers.* University of Rhode Island
- Merzbach, U., Boyer, C. B. (2011) *A History of Mathematics* (3. Utgave) New Jersey: John Wiley & Sons
- Orlof, J. (2018) *Residue Theorem.* Massachusetts: MIT
- Papatzacos, P. (2017) *Notater om matematikkens historie*. Stavanger: Universitetet i Stavanger
- Pesic, P. (2005) *Abels Bevis: Å løse det uløselige.* Oslo: Athene forlag
- Stillwell, J. (1989) *Mathematics and its History.* New York: Springer
- Stubhaug, A. (1996) *Et foranskutt lyn: Niels Henrik Abel og hans tid.* Oslo: Aschehoug
- Struik, D. J. (1963) *Matematikkens historie.* København: P. Haase & Søns