Universitetet i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

BACHELOROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering: **Lektorprogram for trinn 8 til 13 med hovedfag matematikk**	Vårsemesteret, 20 21 Åpen / Konfidensiell
Forfatter: **Mads Herje Strømme**	
Fagansvarlig: Veileder(e): **Alexander Ulanovskii**	
Tittel på bachelorpppgaven: **Algebraens Fundamentalteorem** Engelsk tittel: **The fundamental theorem of algebra**	
Studiepoeng: **10**	
Emneord:	Sidetall: .. 30 + vedlegg/annet: ………… Stavanger, 15/05/21 dato/år

Innholdsfortegnelse

Introduksjon.. 3

1.1 Historien om polynomlikninger fra den klassiske algebraens historie...................4

1.1.1 Fra Egypt til Al-Khwarizmi, historien om lineære- og andregradslikninger...............4

1.1.2 Den falske antakelsens metode..5

1.1.3 Den algebraiske metoden...5

1.1.4 Al-Khwarizmis matematiske betydning...6-7

1.2 Historien om tredje- og fjerdegradslikninger...7

1.2.1 Fibonacci...7-8

1.2.2 Girolamo Cardano...8

1.2.3 Tredjegradslikninger.. 9

1.2.4 Generelle tredjegradslikninger..10

1.2.5 Ferrari og historien om fjerdegradslikninger..10-11

1.3 Abels teorem og betydning...11-12

1.4 Historien om komplekse tall..12-13

1.5 Carl Friedrich Gauss... 13

1.6 Historien til Algebraens fundamentalsetning...14

2.1 Matematisk del, analytiske bevis for Algebraens fundamentalsetning.................14

2.1.1 Deriverbare og analytiske funksjoner...15-17

2.1.2 Cauchys integralformel og integralsetning..17-19

2.1.3 Liouvilles teorem..20

2.2.1 Argumentprinsippet og Rouches teorem...21-23

2.3 Analytiske bevis for algebraens fundamentalsetning..23

2.3.1 Bevis ved motsigelse/ Liouvilles teorem..23-25

2.3.2 Bevis ved argumentprinsippet/Rouches teorem...25-26

3.1 Avslutning.......... 26-27

3.2 Bibliografi...28-29

Introduksjon

Denne oppgaven vil behandle temaet Algebraens fundamentalsetning, og ulike deler av matematikkens historie som viser utviklingen av hovedsakelig algebra som et eget fagfelt innen matematikk.. Besvarelsen vil være todelt i form av en historisk del med underkapitler strukturert som 1.1, 1.2 osv., og en matematisk/analytisk del strukturert som 2.1, 2.2 osv. Besvarelsen vil bygges opp fra den klassiske algebraens historie ved historien om polynomlikninger, til ulike beviser og argumenter for algebraens fundamentalsetning. Innledningsvis vil jeg belyse historien fra Egypt til Al-Khwarizmi om lineære- og andregradsfunksjoner, før jeg går videre til historien om tredje- og fjerdegradslikninger ved å belyse italienske matematikere fra ca. 1200-1550 evt. Som en del av historien om polynomlikninger vil jeg også komme innpå Abels teorem og hans matematiske betydning for ettertiden, etterfulgt av historien om komplekse tall. Disse ulike delene av matematikkens historie viser den kontinuerlige utviklingen innen matematikk og spesielt algebra som jeg skal behandle i denne besvarelsen. Samtlige deler av besvarelsen belyser viktige matematiske oppdagelser og teoremer, der de ulike matematikerne jeg kommer inn på alle spiller en viktig rolle for å forstå den matematiske utviklingen som legger grunnlaget for hvordan vi oppfatter matematikk den dag i dag.

Den matematisk delen av oppgaven vil innledningsvis omhandle essensielle matematiske prinsipper/teoremer som på ulike måter kan benyttes når vi gjør beregninger for å bevise eller løse problemer knyttet til Algebraens fundamentalteorem. Analytiske funksjoner, Cauchys integralsetning og integralformel, samt Liouvilles teorem vil være sentrale temaer innledningsvis i den matematiske delen av besvarelsen. I denne delen vil det vises noen oppgaver jeg finner relevante for temaet for besvarelsen underveis. Avslutningsvis i den matematiske delen av besvarelsen vil jeg også vise litt om Argumentprinsippet og Rouche´s teorem, før det belyses noen analytiske bevis på Algebraens fundamentalteorem.

1.1 Historien om polynomlikninger fra den klassiske algebraens historie

1.1.1 Fra Egypt til Al-Khwarizmi, historien og lineære- og andregradslikninger

Algebraens historie kan gjerne deles inn i to perioder, *den klassiske algebraen* som jeg skal belyse i denne seksjonen av oppgaven, og *den moderne algebraen* som jeg kommer tilbake til senere i besvarelsen. Den klassiske algebraens historie tar for seg oppskrifter og metoder for å finne ukjente størrelser i et matematisk forhold. Disse oppskriftene samt annet kildemateriell knyttet til den gamle egyptiske matematikken, finner vi hovedsakelig gjennom Rhind papyrusen og Moskva papyrusen. Begge disse anslås blant historikere å være fra omtrent 1650 f.Kr. (Papatzacos, 2017, s.177-180).

Matematiske problemstillinger fra den klassiske algebraen har ofte form som om de er konkrete problemstillinger tatt ut fra virkeligheten. Eksemplene kunne blant annet handle om å finne ukjente lengder og bredder i rektangler der arealet eller omkretsen var gitt. En slik oppgave kan eksempelvis i dag løses som et ligningssystem med to ukjente, eller ved å løse en andregradslikning. På denne tiden hadde ikke egypterne matematiske symboler for å løse slike problemstillinger, og oppgavene kan derfor sees på som muntlige eller retoriske. Selv om det kan virke som oppgavene fra den klassiske algebraens historie er konkrete problemstillinger fra virkeligheten, antyder forskning at oppgavenes hensikt var ment som undervisningsmateriale for elever og studenter på denne tiden. Dette kan til dels sammenlignes med hvordan den matematiske undervisningen er bygget opp i dag, der en lærer presenterer et undervisningsmateriale og studentene løser oppgaver knyttet til materialet. Oppgaver der studentene skulle løse andregradslikninger kan sees på som nettopp undervisningsmateriale grunnet at det tilsynelatende var få tilfeller der egypterne brukte andregradslikninger til å løse virkelighetsorienterte problemstillinger. Jeg vil nå se på noen ulike metoder som ble benyttet i den klassiske algebraen fra omtrent 1800 f.kr til Al-Kwarizmi i ca. 820 e.kr.

1.1.2 Den falske antakelsens metode

Metoden presenteres først og fremst i Ahmes papyrusen i oppgave 24, der oppgaven er å finne det ukjente tallet *x* som addert med en syvendedel av seg selv gir 19. Vi kan sette opp problemet som et ligningssystem på følgende måte:

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

Metoden Ahmes og de egyptiske matematikerne på denne tiden benyttet foregikk på følgende måte: Antakelsen er at det ukjente tallet er 7, men dette ser vi ikke stemmer ettersom

$7 + \frac{7}{7} = 8.$ Resultatet av ligningen skulle være 19, så den falske antakelsens metode benyttes ved å endre den opprinnelige antakelsen ved å multiplisere 7 med forholdet mellom det riktige og gale svaret; $7 \times \frac{19}{8}$. De egyptiske matematikerne unngikk i størst mulig grad å benytte uekte brøker, og forsøkte heller å avgi løsninger som en sum av en stambrøk. En klassisk algebraisk formulering av løsningen blant de egyptiske matematikerne ville vært; $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

(Papatzacos, 2017, s.172-173.)

1.1.3 Den algebraiske metoden

Denne metoden fra den klassiske algebraens historie finnes i den velkjente Moskva Papyrusen, der oppgaven og metoden lyder følgende; *"Finn et tall som er slik at, når den multipliseres med en og en halv, og når 4 legges til, er tallet 10"* (Papatzacos, 2017, s.176). I følge forfatteren av oppgaven i Moskva papyrusen vil første steg for å løse oppgaven være å finne overskuddet mellom 10 og 4, som er 6. Deretter skal man multiplisere 1 + ½ med et tall som gir 1, altså 2/3. Siste steg er å finne 2/3 av 6, altså 4 som er svaret. En viktig poengtering til den klassiske algebraens notasjon er at de valgte å skrive brøker som blandet tall, i motsetning til slik vi i stor grad benytter uekte brøk som notasjon i matematiske beregninger i moderne tid. Med dagens moderne notasjon kunne vi skrevet oppgaven og deretter løsningen som en likning av første grad på følgende måte: $\frac{3}{2x} + 4 = 10 \;\rightarrow\; \frac{3}{2x} = 6 \;\rightarrow x = 4$

1.1.4 Al-Khwarizmis matematiske betydning

Muhammad Al-Khwarizmi var en persisk matematiker som levde på slutten av 700 tallet frem til ca. 850 e.kr. Han utga spesielt to verker som skulle vise seg å ha innflytelse på matematikken i flere århundrer etter hans død, *Boken om addisjon og subtraksjon etter indernes fremgangsmåte* og *Boken om gjenoppretning og sammenlikning* (Papatzacos, 2017, s.177). Al-Khwarizmi benyttet to begreper i hans matematiske metoder. *Al-jabr* betyr gjenoppretning og benytter samme matematiske notasjon som vi gjør i dag ved beregning av likninger av første grad. Vi kan eksempelvis løse likningen $5x + 3 = 4 - 3x$ som med al-jabr metoden, slik som i dag, blir $8x + 3 = 4$. Videre benytter han sitt andre begrep, *al-muqabala,* som er begrepet for sammenlikning, og som betyr å redusere positive størrelser ved subtraksjon på begge sider av likningen. Dette utgjør da, på liknende måte som i moderne matematikk, følgende resultat: $8x = 1$. Al-Khwarizmis metoder og begreper for å løse førstegradslikninger kan anses som de samme fremgangsmåtene vi benytter i dagens matematikk.

Al-Khwarizmi arbeidet også med andregradslikninger der han klassifiserte disse som likninger bestående av tre størrelser; tall, røtter og kvadrater (O´Connor & Robertson, 1999). *Røtter* blir større ved multiplikasjon med seg selv, og ved at roten multipliseres med seg selv får en et *kvadrat* som resultat. Lengdene i kvadratet kan representeres ved tall. Gjennom sine verker satt han opp seks ulike typer for andregradslikninger. Jeg vil benytte noen av de videre her, ettersom de kan oppfattes som en viktig del av Al-Khwarizmis innflytelse på historien om andregradslikninger.

Den første likningen han klassifiserte kan skrives som **Type 1,** med benevning; Kvadrater = røtter. Han setter likningen opp på følgende måte med betingelser; $a = 1 \ : a´x^2 = b´x$

Her kan vi eksempelvis betrakte likningen $x^2 = 4x$. I dette tilfellet ville han betraktet det som at roten er 4 og kvadratet til likningen er 16, som gir 4 enhetsrøtter. Han sier følgende om operasjon av likninger av Type 1; «*Det som involverer mer enn et kvadrat, eller mindre enn et kvadrat, reduseres til et kvadrat. Du opererer likedan på røttene*»(Papatzacos, 2017, s.179).

Han klassifisere videre andre likningstyper som bl.a. **Type 2,** der kvadrater = tall notert som $a'x^2 = c'$. **Type 3**, der røtter = tall som $b'x = c'$. Han forenkler likninger av Type 2 og 3 på samme måte som type 1, altså skriver han om likningen til $x^2 = \frac{c'}{a'}$ og $x = \frac{c'}{b'}$. Likningen som omtales som **Type 5**, kan historisk sett sees på som den viktigste av de seks likningstypene i algebraens historie. Denne viser at andregradslikninger kan ha to mulige røtter. Likningen **Type 5** sier at et kvadrat og tall er lik røtter med påfølgende notasjon: $x^2 + c' = b'x$. Dersom $b'^2 - 4c' > 0$, er **Type 5** den eneste av de seks likningstypene som kan ha to positive røtter. Disse fremgangsmåtene som klargjorde tydelige regler for løsning av forskjellige likningstyper av første og andre grad, gjorde Al-Khwarizmis verker til et sentralt fundament i matematikkens historie i flere århundrer etter hans død (Papatzacos, 2017, s. 179-181).

1.2 Historien om tredje- og fjerdegradslikninger

Etter den klassiske algebraens periode fra gamle Egypt og Mesopotamia til Al-Khwarizmis bidrag til matematikken, beveger algebraens historie seg videre til senmiddelalder og nærmere bestemt renessansen. Italia ble i større grad skånet fra den europeiske pestpandemien svartedauden som herjet i Europa i perioden fra 1347 e.kr frem til slutten av 1600-tallet. (Papatzacos, 2017, s.185) I denne delen av oppgaven vil jeg belyse noen viktige punker for algebraens fremskritt i denne perioden, og se nærmere på ulike matematikeres bidrag til algebraens historie, jeg vil begynne med en av de første betydningsfulle europeiske matematikerne, Fibonacci.

1.2.1 Fibonacci

Leonardo Pisano, også kjent som Fibonacci, levde store deler av sitt liv i perioden 1170-1250 e.kr (Papatzacos, 2017, s.186). Han var mye på reise sammen med sin far som arbeidet for tollvesenet, og på denne måten tilegnet han seg mye kunnskap blant annet om gresk og arabisk matematikk. Han utga flere matematiske verker, der han i stor grad formidlet kunnskap ved en retorisk fremgangsmåte med likhetstrekk til Al-Khwarizmi. Andre av hans verker som b.la. *Liber quadratorum* viser at han ikke kun var formidler, men også selv en dyktig matematiker. Fibonacci er kanskje mest kjent for Fibonacci-følgen;

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad 89 \quad 144 \quad 233 \quad 377$$

Denne har flere interessante egenskaper som også går utenfor konkret algebra som jeg skal belyse i denne besvarelsen, men det kanskje mest iøynefallende med tallrekken er at hvert tall er lik summen av de to forrige tallene. For å finne neste tall i følgen kunne vi skrevet en rekursjon for rekken som:

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1}, \quad (n \geq 3)$$

Han benyttet det indo-arabiske tallsystemet, og en faktor der han skiller seg fra eksempelvis Al-Khwarizmi var at han skrev brøker slik vi gjør i dag i motsetning til Al-Khwarizmi som skrev brøker som blandet tall. Ettersom Fibonacci er en viktig del av den matematiske utviklingen fra renessansen vil jeg også vise deler av hans notasjon for å se hvordan denne ble benyttet og videreutviklet i senere tid.

Som nevnt tidligere var hans verker skrevet retorisk i stor grad. For en ukjent variabel *x* benyttet han ordet *res* for rot. For x^2 brukte han *census,* og *cubus* for x^3. Han hadde ingen konkret benevning for likninger av høyere grad, kanskje i og med at dette heller ikke var noe han i større grad benyttet i sine verker. Eksempelvis x^4 ville han skrevet som *census census.* (Papatzacos, 2017, s.186)

1.2.2 Girolamo Cardano

Cardano var en italiensk fysiker og matematiker (1501-1576) med over 200 verker innen forskjellig vitenskap. Han var også en ivrig gambler, og er en av de første som la et fundament for matematisk utregning av sannsynlighet. Han hadde stor kunnskap om ulik vitenskap, men mest aktuelt for dette temaet er kanskje *Ars Magna* fra 1545, oversatt til «Great Work». Dette viser til et av de mest gjennomførte og systematiserte verkene fra denne perioden om tredje- og fjerdegradslikninger. På lik måte som Fibonacci og Al-Khwarizmi arbeidet han med en retorisk metode der han ikke anerkjente negative koeffisienter, og han beviste også sine fremgangsmåter ved geometri i likhet med matematikere fra gamle Egypt og Mesopotamia. I og med at han ikke anerkjente negative koeffisienter, kunne han heller ikke skape en fullverdig notasjon for generelle tredjegradslikninger.(Papatzacos, 2017, s.35-36)

1.2.3 Tredjegradslikninger

Historien om tredjegradslikningen består av en indre statuskamp mellom ulike matematikere i tiden rundt 1500 e.kr. Kjente matematikere og akademikere på denne tiden som Tartaglia, del Ferro, Cardano, Ferrari, Bombelli og flere la frem sine utregninger gjennom ulike verker i denne tidsepoken. Tartaglia hevdet å kunne løse tredjegradslikningen av typen $x^3 + ax^2 = d^2$, og ble utfordret av Fiore til matematisk turnering i 1535. Disse turneringene var vanlige under renessansen og var en måte for akademikere og matematikere til å vise sine egenskaper og tilegne seg akademisk status. De leverte hver 30 oppgaver som skulle løses innen 50 dager. Tartaglia godtok utfordringen, og laget 30 oppgaver med et bredt omfang innen forskjellige matematiske emner. Fiore laget et oppgavesett utelukkende bestående av likninger på formen kjente som *Type B* på denne tiden, $x^3 + 3p'x - 2q' = 0$. Tartaglia hadde ikke klart å løse slike oppgaver tidligere, men hevdet 12. februar 1535 at han hadde kommet frem til en løsning. Samtidig som Fiore ikke klarte å løse noen av Tartaglias oppgaver innen fristen avslørte Tartaglia at han i løpet av noen timer hadde kommet frem til en løsning på oppgavene samt en løsning på tredjegradslikninger skrevet på andre måter. Tartaglia vinner duellen, og gir i fortrolighet løsningen til Cardano som avgir sitt løfte om og ikke publisere løsningen. I 1543 blir Cardano opplyst om del Ferros løsning av tredjegradslikningen, og føler seg ikke lenger bundet til sitt løfte til Tartaglia ettersom han mener Tartaglia ikke utelukkende fant løsningen på tredjegradslikningen selv. I 1545 bryter Cardano sitt løfte da han utgir løsningen i sitt verk *Ars Magna*, der han samtidig hevder at Tartaglia ga han tillatelse til å dele sitt verk. Før dette, allerede i 1540 klarer Ferrari, som var Cardanos elev, å finne en løsning på en likning av fjerde grad. I 1546 utgir Tartaglia sitt verk *Questi*, her hevder han at Cardano brøt sitt løfte om å ikke utgi løsningen på tredjegradslikningen og starter med dette en kamp mot Cardano og hans elev Ferrari ved matematisk turnering. Tartaglia blir utfordret til turnering av Ferrari i 1548 og Ferrari vinner turneringen og avslutter med dette striden mellom de to matematikerne. (Papatzacos, 2017, s.189-192)

1.2.4 Generelle tredjegradslikninger

Vi kan generelt skrive en likning av tredje grad på følgende måte: $x^3 + ax^2 + Bx + y = 0$

For å kunne skrive om tredjegradslikningen må vi gå tilbake til de to generelle typene for en andregradslikning, og benytte disse til å løse tredjegradslikningen med samme fremgangsmåte. Vi kan kategorisere generelle andregradslikninger med to generelle notasjoner: **Type 1** som $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2 = \mathbf{0}$ og **Type 2** som: $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}^2 = \mathbf{0}$**.**

Ved å benytte de to typene fra andregradslikningen kan vi på samme måte definere to typer tredjegradslikninger ved samme fremgangsmåte som for andregradslikninger.

Vi kan sette opp den generelle tredjegradslikningen på følgende måte:

$$x^3 + ax^2 + Bx + y = (x + \frac{a}{3})^3 - \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} + Bx + y$$

Ved å gjøre dette kan vi også skrive den generelle likningen av tredje grad nevnt øverst i avsnittet som: $(x + \frac{a}{3})^3 + \left(B - \frac{a^2}{3}\right)x + y - \frac{a^3}{27} = 0$

Likningen består nå av tre ledd, der vi videre kan definere de ulike leddene som x, p og q;

$x = x + \frac{a}{3}$, $p = B - \frac{a^2}{3}$, $q = y - \frac{a^3}{27}$. Likningen kan på denne måten skrives om til

$X^3 + pX + 2q$.(Papatzacos, 2017, s.187-188)

1.2.5 Ferrari og historien om fjerdegradslikninger

Historien om fjerdegradslikninger begynner som med tredjegradslikninger også i Italia og nærmere bestemt hos Ludovico Ferrarri. Dette er samme mann som utfordret Tartaglia til turnering i 1548, og med dette avsluttet kampen mellom Cardano og Tartaglia. Allerede i en alder av 14 år ble Ferrari ansett som en dyktig matematiker og han ble ansatt av Cardano. 20 år gammel vant han over Zuanne de Coi i matematisk turnering og tok over Cardanos stilling. I sitt verk *Ars Magna* skriver Cardano at han ble tilsendt en likning av fjerde grad som Coi ikke hadde klart å løse, Ferrari derimot fant løsningen. En faktor som gjorde fjerdegradslikningene vanskeligere enn de foregående andre- og tredjegradslikningene, var at en ikke kunne sette fjerdegradslikningen i geometrisk sammenheng som hadde vært brukt som en forklaring på matematiske problemer i mange århundrer. Andregradslikninger kunne bli sett på som areal med x som en ukjent side, og tredjegradslikninger kunne bli sett på som volum i geometrisk sammenheng. Ferrari og de andre matematikerne på denne tiden innser at fjerdegradslikninger ikke har noen geometrisk sammenheng, og hans løsning på likningen blir derfor utført og vist frem algebraisk (Papatzacos, 2017, s.192).

1.3 Abels teorem og betydning

Abels teorem er oppkalt etter en av Norges mest kjente matematikere, Niels Henrik Abel. Abels teorem går ut på at en potensrekke har en grenseverdi som utgjør summen av koeffisientene. Her kommer en liten utledning av Abels teorem og dets betydning i matematisk historie.

[1] Vi setter opp følgende formel som en konvergent serie der A er summen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$

[2] Videre definerer vi $f(z)$ for potensrekken.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad [z] < 1$$

[3] Deretter setter vi grensen for funksjonen fra x → 1 der vi antar at x er et reelt tall.

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = A$$

Betingelsen for grensen om at potensserien er konvergent avhenger av at konvergensradien til serien i [2] er minst 1, dermed gir også definisjonen for $f(z)$ mening. (Eremenko, A. 2020)

Abel blir fortsatt den dag i dag sett på som en av matematikkhistoriens fremste matematikere til tross for at han kunne ble 26 år gammel. Han hadde et usedvanlig talent for matematikk og løste problemer og oppgaver som det hadde vært stilt spørsmåltegn ved i flere århundrer. Abel jobbet med mange forskjellige områder innen matematikk, blant annet femtegradslikninger som han kanskje er mest kjent for, men også halvderiverte som hadde vært fundert over i lang tid før hans tid som akademiker. Det dukker stadig opp nye papirer fra Abels arbeider som har vært ukjent før nå, og hans arbeider har blitt anerkjent og videreutviklet i lang tid etter hans død.

1.4 Historien om komplekse tall

Ettersom de egyptiske matematikerne i den klassiske algebraens historie ikke godtok komplekse løsninger på matematiske problemer, ble det heller ikke videreført i den matematiske historien før vi kan lese om det i Cardanos verk *Ars Magna* fra 1545. Han innfører komplekse tall ved å se på en oppgave som går ut på å finne to tall som til sammen har summen 10 og produkt av tallene lik 40. Vi kan sette det ene tallet som x og det andre som $10 - x$. For å finne løsningen kan vi sette problemet som en andregradslikning $x(10 - x) = 40$, og vi får likningen som gir oss de to løsningene:

$$-x^2 + 10x - 40 = 0, \qquad\qquad 5 \pm \sqrt{-15}$$

Cardano kaller det mental tortur i Ars Magna, men han anerkjenner at summen av de to tallene blir 10 og produktet utgjort av $25 - (-15) = 40$, og dermed godkjenner han andregradslikningens løsninger (Papatzacos, 2017, s.43). Den mulige første teorien om komplekse tall ble utgitt av Bombelli i sitt verk *L´Algebra i 1572.* Teorien ble senere videreutviklet og konkretisert i 1714 av Roger Coates, men den bidro i samtiden til å synliggjøre muligheten for røtter av negative tall. Nevnte Coats publiserte i 1714 det som senere ble kjent som Coatesformelen:

$$\sqrt{-1}\phi = \log_e(cos\phi + \sqrt{-1}sin\phi$$

Euler ga ut en lignende formel i 1748, der den eneste forskjellen er at han benytter *e* i stedet for logaritmefunksjonen (noe som er en ekvivalent lovlig matematisk operasjon) i sin fremstilling av teoremet. Flere andre matematikere i årene etter Eulers fremstilling utga verker om komplekse tall, blant andre norske Casper Wessel. Komplekse tall ble sett på som en nærmest utelukkende teoretisk beregning, og på denne måten lite anvendelig til beregning av praktiske problemer. Dette var før Gauss gjennom sine verker underbygde påstanden om at komplekse tall kunne ha flere nyttige funksjoner, bl.a. i fysikken ved elektrisitet og elektromagnetisme for å nevne noen bruksområder. Komplekse tall anvendes også ved beregning av fjerdegradslikninger.

1.5 Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss var en anerkjent matematiker og fysiker som har hatt stor innflytelse på ulike akademiske områder som blant annet magnetisme, tallteori, astronomi m.m. Han ga ut flere akademiske verker som har hatt stor betydning for ettertiden. Allerede i tidlig alder utmerket Gauss seg som en talentfull matematiker. Selv om Gauss ´privatliv var preget av tragedie i form av at hans far og kone døde i perioden 1807-1808, stoppet ikke dette Gauss i sine akademiske fremskritt. Før dette hadde han allerede publisert sitt første verk *«Disquisitiones Arithmeticae»,* som i stor grad omhandlet tallteori. Til tross for et vanskelig privatliv publiserte han sitt andre verk *«Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium»* i 1809 (O ´Connor & Robertson, 1996). Gauss benyttet det meste av sin tid i sitt eget observatoriet der han studerte ulike felter innen matematikk og fysikk. I sitt andre verk fra 1809 belyste han differensialligninger samt utledninger om hvordan man på ulike måter kunne beregne og estimere planeters baner og bevegelser. Gauss mest relevante verk for denne besvarelsen ansees å være beviset for algebraens fundamentalteorem. Teoremet ble forsøkt bevist av kjente matematikere som bl.a. Laplace og Euler, men ettersom disse bevisene var basert på antakelsen om at det eksisterte minst en kompleks rot ble de oppfattet som ufullstendige. I 1799 var Gauss den første til å legge frem et bevis som ikke var basert på eksistensen av røtter. Selv om dette beviset også bestod av hull blir dette anerkjent som det første fullstendige beviset av algebraens fundamentalteorem (Kveen, 2019).

1.6 Historien til Algebraens fundamentalsetning

Algebraens fundamentalteorem forteller at ethvert polynom med reelle eller komplekse koeffisienter har minst en kompleks rot. Formuleringen av teoremet slik vi oppfatter det i dag er et resultat av beregninger med ulike beviser og motbeviser fra flere århundrer tilbake i tid. Allerede på starten av 1600-tallet eksisterer en tidlig formulering av teoremet som ifølge Jens Erik Kveen i sin fagartikkel «Algebraens fundamentalteorem» fra 2019, lyder som følgende: «*Alle polynomlikninger av n-te grad kan ha n løsninger* (Kveen, 2019). Helt siden de greske matematikerne beskrev og løste enkle første- og andregradslikninger for flere tusen år siden, har algebra som et eget felt innen matematikken i hovedsak bestått av å beskrive og løse likninger av ulik grad. På denne måten kan det også antas som logisk at teoremet som på en generell måte beskriver polynomlikninger og deres løsninger, kalles Algebraens fundamentalteorem. Et viktig hjelpemiddel når en skal bevise ulike teoremer og antakelser i matematikk, går ofte utpå og først forsøke å motbevise antakelsen/teoremet. Som nevnt tidligere ble de første forsøkene på å bevise teoremet oppfattet som ufullstendige, ettersom samtlige av disse baserte seg på antakelsen om at alle polynomer hadde minst en kompleks rot. Da Gauss publiserte det som oppfattes som det første fullstendige beviset av teoremet i 1799 forkastet han de tidligere bevisene som ufullstendige, og hans bevis står i dag over 200 år etter det ble publisert, som et holdbart bevis for Algebraens fundamentalteorem (Remeslennikov, 2011).

2.1 Matematisk del, analytiske bevis for Algebraens fundamentalsetning

Dette er den matematiske delen av oppgaven, og her vil jeg fremlegge ulike teoremer og beviser som anerkjennes som viktige matematiske prinsipper. Innledningsvis vil jeg belyse analytiske funksjoner, Cauchys integralsetning og integralformel, samt Liouvilles teorem før jeg vil gå videre til argumentprinsippet og Rouche´s teorem. Som avslutning på den matematiske delen av besvarelsen vil jeg vise og begrunne to analytiske for algebraens fundamentalteorem

2.1.1 Deriverbare og analytiske funksjoner

Vi kan si at en funksjon er definert å være analytisk dersom den er deriverbar for ethvert punkt $Z \in f$. Før jeg begynner med definisjon og utledning av analytiske funksjoner vil jeg begynne med deriverbare funksjoner, ettersom dette danner grunnlaget for å kunne gjøre beregninger med analytiske funksjoner.

Definisjon: Funksjonen $f: (a - r, a + r) \to \mathbb{R}$ er deriverbar i punktet a dersom følgende grense eksisterer: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{k}$.

Vi lar $B((a, b), (r))$ være enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$ med sentrum i (a, b) med radius *r.* Vi lar videre funksjonen betegnes som $f: B\big((a, b), (r)\big) \to \mathbb{R}$.

Videre kan den partiell deriverte til f med henhold på x i punktet (a, b) defineres ved:

$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$, vi gjør dette med forbehold om at grensen eksisterer. Den partiell deriverte av f med henhold på y i punktet (a, b) kan på lignende måte defineres ved:

$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$, dette også med forbehold om at grensen eksisterer.

Analytiske funksjoner avhenger av at det eksisterer en grense ettersom at funksjonen da også er deriverbar for alle heltall $\mathbb{Z} \in f$. En generell definisjon for analytiske funksjoner kan beskrives følgende:

Dersom funksjonen $f: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ er deriverbar i hvert punkt $z \in B(z_0, r)$ sier vi at funksjonen f er *analytisk* i $B(z_0, r)$.

Gitt at vi benytter samme funksjon $f: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ kan vi si at dersom grensen eksisterer er også f deriverbar i z_0 : $f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$. Vi kan benytte denne grensen for å vise at en gitt funksjon er deriverbar for alle $z_0 \in f$.

Oppgave 1: Vis at $f(z) = z^2$ er deriverbar for alle *(heretter* $\forall$) $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beregning: $f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)^2 - {z_0}^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{{z_0}^2+2z_0h+h^2-{z_0}^2}{h} \quad = \lim_{h\to 0}(2z_0+h) \quad = 2z_0.$

Av løsningen kan vi se at $(z^2)' = 2z, \qquad z \in \mathbb{C}.$

Funksjonen f er altså deriverbar $\forall\ z_0 \in \mathbb{C}$, og vi har en analytisk funksjon.

Vi kan gå videre med analytiske funksjoner ved å definere følgende:

Dersom $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er deriverbar for ethvert punkt $z \in \mathbb{C}$ betegnes funksjonen f som en *hel* funksjon. At en funksjon f er *hel* vil si at den er analytisk i hele det komplekse planet $\mathbb{C}$. Jeg vil nå gjennomgå en oppgave der det skal bevises at en gitt funksjon f ikke er deriverbar i noen punkter $z_0 \in \mathbb{C}$, og dermed kan heller ikke grensen til funksjonen eksisterer.

Oppgave 2: Vis at funksjonen $f(z) = \bar{z}$ ikke er deriverbar for noen punkter $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beregning: Det skal altså vises at funksjonen ikke er deriverbar, og dermed heller ikke har noen eksisterende grense. Vi benytter grensefunksjonen fra analytiske funksjoner, og dersom grensen ikke eksisterer er heller ikke funksjonen deriverbar for noe punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Det skal vises at grensen; $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ ikke eksisterer.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\lim_{h\to 0}\left(\overline{z_0+h}\right) - \overline{z_0}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{(z_0\ ) + h - z_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

Videre kan vi anta at $h = x \to 0 \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\bar{x}}{x} = 1$

Vi kan også anta at $h = iy \to 0 \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h} = \lim_{y\to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = -1.$ Med dette kan vi konkludere med at grensen ikke eksisterer, og funksjonen $f(z) = \bar{z}$ er dermed heller ikke deriverbar i noe punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

2.1.2 Cauchys integralformel og integralsetning

Cauchys integralformel er en svært viktig formel innen kompleks analyse i matematikk, men kan også anvendes i andre matematiske fagfelt. Restsetningen som brukes for å finne enkelte integraler i analytiske funksjoner er et resultat av Cauchys integralformel, og kan sammenlignes med Argumentprinsippet som jeg kommer tilbake til i punkt 2.1.4. Integralformelen er en analytisk funksjon, og som vist tidligere i oppgaven innebærer dette da at funksjonen er deriverbar for alle $z \in f$.

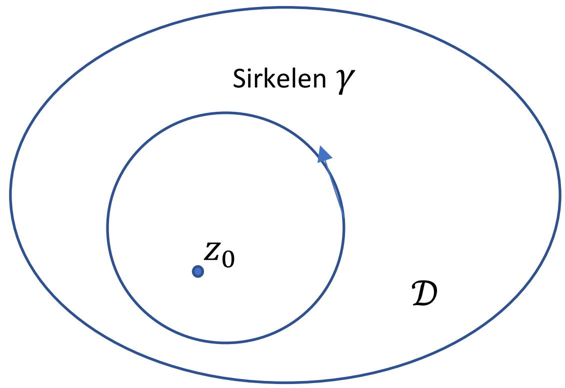
Integralsetningen

Vi kan tenke oss en sirkel vi betegner som γ der radien er definert som $|z - a| = r$. Videre antar vi at funksjonen er analytisk, og dermed deriverbar innenfor et gitt område $\mathcal{D}$ som inneholder hele funksjonsområdet til sirkelen, altså $|z - a| \leq r$. Cauchys integralsetning sier da at integralet til sirkelen γ kan skrives som $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Vi lar sirkelen γ betegnes som en enhetssirkel i positiv retning:

$\gamma = \{z : |z| = 1\}$. Siden z er en analytisk og hel funksjon i det komplekse planet $\mathbb{C}$, altså deriverbar for enhver $z \in \mathbb{C}$, kan vi skrive integralet som: $\int_\gamma z\,dt = 0$. Fordi e^z er en hel analytisk funksjon kan vi skrive integralet til sirkelen γ som $\int_\gamma e^z\,dz = 0$. Cauchys integralsetning er gjeldende for alle glatte lukkede kurver, altså kurver uten *«spisse hjørner»*, eller mer matematisk formulert som en kurve med kontinuerlige deriverte punkter. Vi kan ved hjelp av integralsetningen vise at $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$.

Integralformelen



Cauchys integralformel kan introduseres ved en illustrasjon som vist til høyre. Det er gitt en sirkel γ orientert i positiv retning og et større definisjonsområde $\mathcal{D}$ som inneholder sirkelen γ. Det kan defineres en funksjon kalt $f(z)$ som antas å være analytisk i $\mathcal{D}$ og dermed er også $f(z)$ analytisk innenfor sirkelen. Punktet z_0 er definert innenfor γ. Men denne illustrasjonen kan Cauchys integralformel vises følgende:

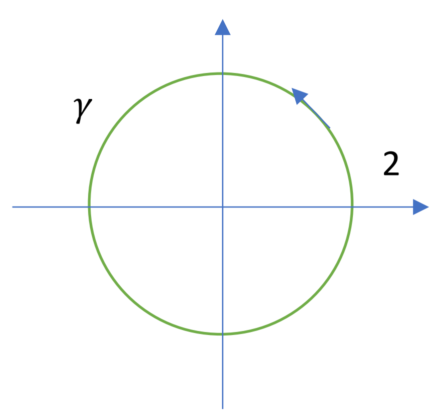
$$\boldsymbol{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz}$$

Variabelen z_0 kan også betegnes som a, men jeg har valgt å benytte z_0 ettersom dette blir enklere for videre utregninger. En viktig bemerkning ved integralformelen er at Definisjonsområdet $\mathcal{D}$ må være såkalt «uten hull», også kalt enkelt-sammenhengene.

Dersom enhver lukket sirkel ($\sim\text{kurve}$) kalt γ er orientert i positiv retning er Cauchys gjeldene og kan benyttes i utregningen. Jeg vil nå vise et eksempel der en gitt sirkel γ er orientert i positiv retning, og vi kan benytte integralformelen.

Oppgave 3:

Vi lar sirkelen γ være definert i positiv retning med $|z| = 2$ som illustrert til høyre. Vi skal regne ut integralet $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z-1} dz.$



Beregning: $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z-1} dt = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$

Vi definerer $f(z) = e^z$ som en analytisk og hel funksjon for de komplekse tallene $\mathbb{C}$, og utifra illustrasjonen kan det også merkes at $z_0 = 1$ ligger innenfor sirkelen γ

Cauchys integralformel kan benyttes videre for å finne ut for hvilke $z \in f$ funksjonen er analytisk for:

- $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz \Longrightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

$$= 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i \;\; e^z |\, z = 1$$

$$= 2\pi i * e^1 = 2\pi i\, e.$$

- Videre betegner vi $f(z) = e^z$ og $z_0 = 3.$

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-3} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Det bemerkes at $z_0 = 3$ befinner seg utenfor definisjonsområdet til sirkelen γ, som videre mefører at $\frac{1}{z-3}$ er analytisk $\forall \;\; z, \;\; |z| < 3.$ Ifølge Cauchys integralformel er integralet:

$\int_\gamma \frac{e^z}{z-3} dz = 0$, og $\frac{e^z}{z-3}$ er analytisk innenfor $|z| < 3.$

Oppgave 4:

Sirkelen γ er definert som $|z-1| = 2$ orientert i positiv retning. Regn ut integralet $\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz.$

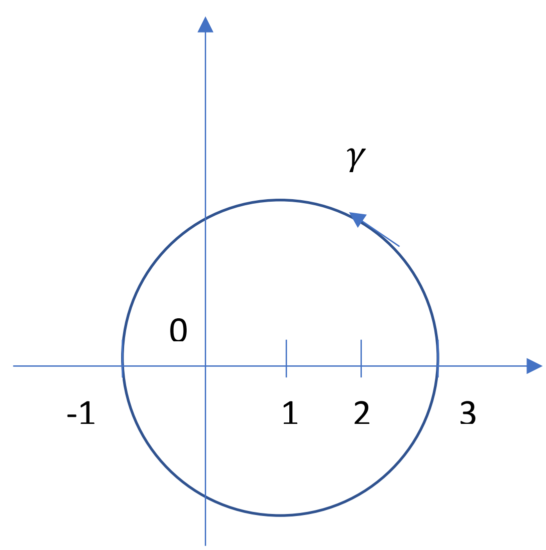
Beregning:

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

Der $f(z) = \cos z$ og $z_0 = 0$, vi kan merke oss at punket z_0 eksisterer innenfor sirkelen γ. Videre benytter vi Cauchys integralformel:

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cos z \,|\, z = 0$$

$$\underline{\underline{= 2\pi i}}$$

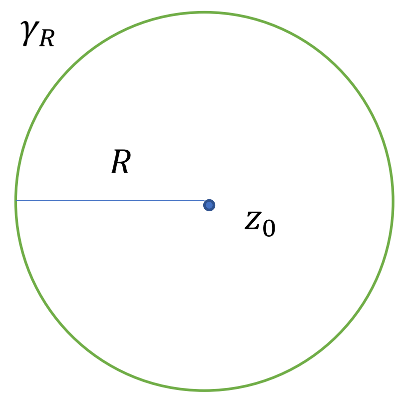


2.1.3 Liouvilles teorem

Liouvilles teorem er et viktig matematisk prinsipp innen kompleks analyse, og kan blant annet brukes til å bevise algebraens fundamentalsetning ved motsigelse som jeg kommer tilbake til i punkt *2.3* av besvarelsen.

Vi antar at $f(z)$ er en hel funksjon. Altså er funksjonen analytisk og dermed deriverbar for alle $z \in f(z)$ i det komplekse planet $\mathbb{C}$. Vi antar videre at det eksisterer et tall kalt $M > 0$ slik at absoluttverdien til $f(z)$ er mindre eller lik null M; $|f(z)| \leq M \; \forall \; z$. Da kan det sies at $f(z)$ er en konstant funksjon $\forall \; z \in f(z)$, og vi noterer dette som $f(z) = c$, der c er et gitt tall.

Teoremet kan bevises ved å betegne en sirkel, kalt γ_R, med et tilfeldig valgt punkt z_0 i sirkelen. Sirkelen γ_R kan dermed betegnes som $|z - z_0| = R$.



I og med at $|f(z)| \leq M \quad \forall z \implies |f'(z_0)| \leq \frac{n}{R}$.

Dersom vi videre antar at $R \to \infty$ ser vi også at den deriverte til funksjonen med hensyn på det vilkårlig valgte punktet z_0 går mot null, $f'(z_0) = 0$, og det merkes at $f'(z) = 0 \; \forall \; z$.

Dersom betingelsene for Liouvilles teorem nevnt over eksisterer, kan vi si at et tall c finnes slik at $f(z) = c \; \forall \; z$ og funksjonen $f(z)$ er konstant. Liouvilles teorem forteller at de eneste *avgrensede* og *hele* funksjonene er **konstanter**.

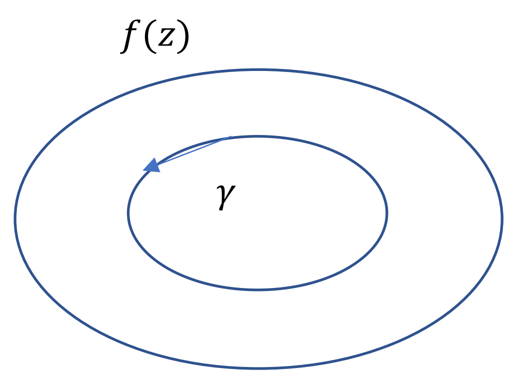
2.2.1 Argumentprinsippet og Rouches teorem

Argumentprinsippet er et nyttig verktøy i matematikken, og kan brukes til b.la. bevis av Algebraens fundamentalteorem. Argumentprinsippet kan også anvendes dersom det er ønskelig å finne posisjonen til ulike nullpunkter, eller punkter i det komplekse planet som ikke eksisterer innenfor funksjonens definisjonsområde. Argumentprinsippet sammenfatter det vi kaller *«winding number»* på kurven, med antall nullpunkter og punkter innenfor kurven som ikke er definert ved funksjonen (Orloff, Topic 11; Argument principle). Det *«Svingete tallet»* (winding number) på en lukket kurve i planet rundt et gitt punkt, er et heltall som representerer totalt antall ganger som kurven beveger seg i positiv orientert retning (Weisstein, 2002). Dette svingete tallet kan defineres fra Cauchys formel, og dersom γ er en lukket kurve kan vi definere dette tallet (også kalt indeks) rundt z_0 som: $Ind(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{z-z_0}\, dz$

Dette kan utledes i større grad, men jeg velger å stoppe her ettersom dette blir en digresjon for oppgaven.

Definisjon argumentprinsippet*:* Vi kan tenke oss en gitt en enkel lukket glatt kurve γ orientert i positiv retning. At kurven er glatt betyr at det eksisterer en tangent for ethvert punkt på kurven.

Gitt en funksjon $f(z)$ som er analytisk innenfor og på kurven γ kalt $f(z)$. Kurven γ er altså den innerste sirkelen og den ytterste sirkelen representerer $f(z)$.



Argumentprinsippet kan utledes med følgende formel:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N(f,\gamma)$$

, der $N(f,\gamma)$ er antall nullpunkter som $f(z)$ har innenfor kurven.

Som en følge av argumentprinsippet kommer vi til *Rouche´s teorem*. Dette er et nyttig hjelpemiddel i flere deler av matematikken, og kan eksempelvis brukes dersom det er ønskelig å finne antall røtter i et polynom. Rouche´s teorem blir her definert på følgende måte:

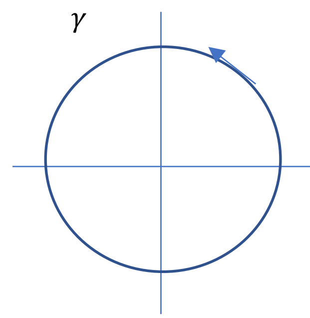
Gitt en enkel lukket glatt kurve γ og to funksjoner $f(z)$ og $g(z)$ som begge er analytiske innenfor og på γ. Det antas at $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall\, z \in \gamma$.

Da er $N(f+g,\gamma) = N(f,\gamma)$. Dette betyr at $f(z)$ og $f(z)+g(z)$ har likt antall nullpunkter innenfor kurven γ.

Oppgave 5: Vis at polynomet $p(z) = z^5 + z^4 - 5z - 5$ har nøyaktig 5 røtter innenfor sirkelen γ med $|z| = 2$.

Beregning:

Vi kan tenke oss sirkelen γ som en lukket glatt kurve med $|z| = 2$.



i) $f(z) = z^5$ har nullpunkt i origo, $N(f,\gamma) = 5$

ii) La $g(z) = z^4 - 5z - 5$.

$p(z) = f(z) + g(z) \Longrightarrow p(z) = z^5 + z^4 - 5z - 5$

iii) $|z| = 2 \implies |f(z)| = |z^5| = |z|^5 = 2^5 = 32$

$$f(z) = z^5, \quad g(z) = z^4 - 5z - 5$$

$$|g(z)| = |z^4 - 5z - 5| \leq |z^4| + |5z| + |5| = |z|^4 + 5|z| + 5$$

$$\Longrightarrow 2^4 + 5 * 2 + 5 = 31 \cong |g(z)| = 31 \leq 32 = |f(z)|$$

Ser da at $|f(z)| = |z^5| = 32\,, \quad |g(z)| \leq 31\,, \quad z \in \gamma$

Ser ved Rouche´s teorem at $f(z) = z^5$ og $f(z) + g(z) = p(z)$ har samme antall nullpunkter innenfor sirkelen γ, altså 5 nullpunkter.

Den neste oppgaven som fremlegges behandler algebraens fundamentalteorem i form av å finne nullpunkter til et gitt polynom med komplekse koeffisienter.

Oppgave 6:

Gitt $e^z = e^{x+iy}$ der $|e^z| = e^x$, finn antall nullpunkter til følgende funksjon:
$f(z) = 3e^z - z$ innenfor sirkelen γ $|z| = 1$.

Beregning:

La $z \in \gamma$.

$$|3e^z| = |3e^{x+iy}| = 3e^x \geq 3e^{-1} > 1, \qquad |z| = 1.$$

Ser da at $|3e^z| > |z|$. Ifølge Rouches teorem er da:

$3e^z - z = f(z)$ og $3e^z$ har samme antall nullpunkter innenfor sirkelen γ. Vi kan da konkludere med at $f(x)$ ikke har nullpunkter innenfor sirkelen.

2.3 Analytiske bevis for algebraens fundamentalsetning

Algebraens fundamentalteorem ble lagt frem og bevist av Carl Friedrich Gauss i 1799. Det er et velkjent teorem som forteller at ethvert polynom av n-te grad med komplekse koeffisienter har n antall røtter i de komplekse tallene. Algebraens fundamentalteorem legger grunnlaget for beregninger med polynomlikninger, og viser hvordan ethvert polynom kan brytes ned til minst en kompleks rot. I denne delen av oppgaven vil jeg belyse ulike bevis av algebraens fundamentalteorem.

2.3.1 Bevis ved motsigelse/ Liouvilles teorem

Teorem:

Vi lar polynomet $P(z)$ med grad $n \geq 1$ være;

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ \dots + a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, der $a_n \neq 0$. Med disse betingelsene kan det sies at polynomet $P(z)$ minst har ett nullpunkt.

Bevis:

Det antas at det ikke eksisterer noen nullpunkter for polynomet, $P(z) \neq 0 \;\; \forall \;\; z$. Funksjonen $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ er da analytisk og deriverbar $\forall\; z,\;\; f'(z) = \frac{P/(z)}{P^2(z)}$. $f(z)$ kan sies å være en kompleks funksjon som er analytisk og dermed deriverbar $\forall$ endelige punkter i det komplekse planet, altså en *hel* funksjon. Vi kan videre se på absoluttverdien til funksjonen $f(z)$ mot polynomet $P(z)$ som antas og ikke ha noen nullpunkter, $P(z) \neq 0$:

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} = \frac{1}{|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \; \dots + a_0|}$$

$$= \frac{1}{|z|^n} \quad \frac{1}{\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \; \dots + \frac{a_0}{z^n}\right|}$$

Dette viser at absoluttverdien til $f(z)$ går mot null når $|z|$ går mot uendelig;

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| = \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \longrightarrow 0, \text{der } |z| \longrightarrow \infty$$

Når $|z| \longrightarrow \infty$ kan vi også vise at $\left|\frac{a_{n-k}}{z^k}\right| \longrightarrow 0 \;\; \forall \;\; k = 1,2, \dots, n$

Dette medfører videre at

$$\frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \; \dots + \frac{a_0}{z^n}} \longrightarrow \frac{1}{|a_n|} \text{ der } |z| \longrightarrow \infty$$

Absoluttverdien til $f(z)$ går mot null når n går mot uendelig, tilsvarende som når $|z|$ går mot uendelig, altså: $|f(z)| = \frac{1}{|z|^n} \; \frac{1}{\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right|} \longrightarrow 0$ når $n \longrightarrow \infty$. Dette medfører at det eksisterer en gitt $R > 0$, slik at; $|f(z)| \leq 1 \;\; \forall \;\; z$ der $|z| \geq R$.

Videre kan vi definere en funksjon $f(z)$ som; $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, og benytte denne til å definere en representasjon av absoluttverdien til funksjonen;

$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$. Funksjonen under rottegnet, $u^2(x,y) + v^2(x,y)$, er en funksjon av to variabler, x og y. Vi anvender videre «*Avgrenset verdi teoremet*» som sier at dersom en funksjon er kontinuerlig på $|x,y|$, er funksjonen også avgrenset på $|x,y|$. Teori om kontinuerlige funksjoner sier at enhver kontinuerlig funksjon i $\mathbb{R}^2$ oppnår max-verdi innenfor samtlige sirkler der $x^2 + y^2 \leq \mathbb{R}^2$. Det kan dermed sies at det eksisterer et gitt tall M slik at absoluttverdien til den kontinuerlige funksjonen $f(z)$ er mindre eller lik M;

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} \leq M \quad \forall \quad (x,y).$$

Dermed kan vi observere at:

$|f(z)| \leq M$ når $|z| \leq R$ og $|f(z)| \leq 1$ når $|z| \geq R$

Med dette kan det sies at $|f(z)| \leq M + 1 \quad \forall \quad z$.

Ettersom funksjonen $f(z)$ antas å være en kontinuerlig og avgrenset funksjon strider dette mot Liouvilles teorem som sier at de eneste hele avgrensede funksjonene er konstanter, og dermed $f(z) = c$.

Dette motsier antakelsen om at $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ ... + a_0, \dots, a_n$ der $\boldsymbol{n > 0}$, ikke er 0 for noe komplekst tall z. Dermed konkluderes det med at det må eksistere minst én rot av z slik at $P(z) = 0$.

2.3.2 Bevis ved argumentprinsippet/Rouches teorem

Teorem:

Gitt et polynom av n-te grad;

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ ... + a_0$, a_n , $a_{n-1}, \dots, a_0$ er komplekse tall der $a_n \neq 0$.

Da har $p(z)$ nøyaktig n komplekse røtter.

Bevis:

Antar at $a_n = 1$ fordi polynomet $\frac{p(z)}{a_n} = z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}$ har samme antall røtter som $p(z)$. γ representerer sirkelen med $|z| = R$.

Videre lar vi $f(z) = z^n$ og $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ slik at

$p(z) = f(z) + g(z)\,,\;\; z \in \gamma\; og\; |z| = R.$

$|f(z)| = |z^n| = |z|^n = R^n$

$$|g(z)| = |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \;\leq\; |a_{n-1}z^{n-1}| + |a_{n-2}z^{n-2}| + \cdots + |a_0|$$

$$= |a_{n-1}|\,|z^{n-1}| + |a_{n-2}||z^{n-2}| + \cdots + |a_0|$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$R^{n-1} \qquad\qquad R^{n-2}$$

Her antar vi at $R > 1 \Rightarrow R^{n-1} > R^{n-2} > \cdots$

$$= |a_{n-1}| * R^{n-1} + |a_{n-2}| * R^{n-2} + \cdots + |a_0| = R^{n-1} < R^n.$$

Velger deretter en $R > |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|$. Observerer at $|f(z)| > |g(z)|$ på sirkelen γ med $|z| = R. \Longrightarrow f(z)$ og $g(z) = f(z) + g(z)$ har samme antall røtter innenfor sirkelen γ med $|z| = R$. Ettersom $f(z) = z^n$ har nøyaktig n røtter har $f(z)$ nullpunkt av n-te grad i origo! $\Longrightarrow p(z)$ har nøyaktig n røtter innenfor sirkelen γ.

3.2 Avslutning

Algebra som et eget matematisk fagfelt har gjennomgått en kontinuerlig utvikling fra den den klassiske algebraens tid, og frem mot slik vi behandler og tolker matematikk i moderne tid. Egyptiske matematikere helt tilbake til ca. 1650 f.kr. benyttet algebra hovedsakelig som et hjelpemiddel for å løse praktiske problemer, før Al-Khwarizmi grunnla et system basert på regler og klassifiseringer av ulike likningstyper. Gjennom matematiske turneringer og dueller i renessansen tok algebraen videre steg ved bl.a. Cardano og Ferrari som viste at fjerdegradslikninger ikke kunne løses ved bruk av geometri som ofte var brukt for å illustrere løsninger på en praktisk måte, men måtte heller løses algebraisk. I nettopp denne perioden utvikler matematikken seg fra et nærmest utelukkende praktisk verktøy, til en større grad av akademisk og teoretisk lære. Niels Henrik Abel utførte på 1800-tallet gjennom sin korte levetid matematiske beregninger som hadde vært fundert over i århundrer da han presenterte sine beviser for femtegradslikninger og halvderiverte. Underveis i sitt 26 år gamle liv gjorde han oppdagelser og beregninger innen matematikk som i dag fortsatt benyttes i moderne matematikk.

Algebraens fundamentalteorem som forteller at alle polynomer med komplekse koeffisienter har minst én kompleks rot, hadde før Gauss la frem sitt aksepterte fullstendige bevis i 1799 vært fundert over i en årrekke. En rekke dyktige matematikere forsøkte å bevise teoremet, men da Gauss presenterte sitt godkjente bevis forkastet han samtlige tidligere bevis og antakelser.

Denne måten å bearbeide matematikk på strekker seg utenfor kun algebraens fundamentalteorem, og kanskje til og med matematikk på generelt grunnlag. Et interessant fenomen gjennom arbeidet med denne besvarelsen var å se på utviklingen fra den klassiske algebraens historie og frem til moderne matematikk. Ikke nødvendigvis gjennom konkrete matematiske metoder, men kanskje heller hvordan matematikere fra ulike tidsperioder evnet å ta til seg tidligere anerkjent informasjon, bearbeide og anvende den til ny kunnskap, for så å presentere en ny opparbeidet mening/konklusjon.

Algebraens fundamentalteorem kan sees på som et anerkjent matematisk fenomen som har blitt bearbeidet, utviklet og forbedret gjennom århundrer. Da Gauss presenterte sitt bevis i 1799 analyserte han tidligere matematiske beregninger. Han benyttet allerede eksiterende kunnskap, forkastet og gjorde egne utregninger basert på annen informasjon, før han presenterte sitt fullstendige bevis. Moderne matematikk presenterer mange ulike bevis for algebraens fundamentalteorem, og disse er på samme måte som gjennom historien basert på tidligere informasjon, bearbeidet og analysert, til ny anerkjent viten.

Bibliografi

[1] Birkeland, B. (matematikk.org). *Carl Friedrich Gauss.* Hentet fra:

https://www.matematikk.org/biografi.html?tid=62388

[2] Corry, L. (2021). *Algebra.* Hentet fra:

https://www.britannica.com/science/algebra#ref230956

[3] Eremenko, A. (2020). *Abel´s theorem.* Hentet fra:

https://www.math.purdue.edu/~eremenko/dvi/abel.pdf

[4] Gies, F C. (2021). *Fibonacci,* Italian mathematician. Hentet fra:

https://www.britannica.com/biography/Fibonacci

[5] Kveen, J E. (2019). *Algebraens fundamentalteorem.* Hentet fra:

https://fagkom.wordpress.com/portfolio/jens-erik-kveen/

[12] Merzbach, C & Boyer, C B. (2011). *A History of Mathematics.* London: John Wiley Sons Inc

[6] Orfloff, J. (2018). *Topic 11 Notes; Argument principle.* Hentet fra

https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic11.pdf

[7] O´Connor, J, & Robertson,. (1999). *Abu Ja´far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi.* Hentet fra: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/

[8] Papatzacos, P. (2017). *Notater om matematikkens historie.* Stavanger: Universitetet i Stavanger

[9] Remeslennikov, V N. (2011). *Algebra, the fundamental theorem of.* Hentet fra:

https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Algebra,_fundamental_theorem_of&oldid=16030

[10] Schep, A R. (2008). *A simple complex analysis and an advanced calculus proof of the fundamental theorem of algebra.* Hentet fra:

https://people.math.sc.edu/schep/fundamental.pdf 2

[11] Weisstein, E W. (2021). *Contour Winding Number.* Hentet fra:

https://mathworld.wolfram.com/ContourWindingNumber.html