Universitetet i Stavanger

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Masterprogram i utdanningsvitenskap, matematikkdidaktikk	Vårsemesteret, 2021 Åpen/~~konfidensiell~~
Forfatter: Lise Ådnanes	Lise Ådnanes (signatur forfatter)
Veileder: Raymond Bjuland	
Tittel på masteroppgaven: Elevers strategier i arbeid med likninger Engelsk tittel: Students' strategies while working with equations	
Emneord: Algebra, likning, misoppfatninger, strategier, utfordringer, muligheter, oppgavebaserte intervju	Antall ord: 23354 + vedlegg/annet: 3944 Stavanger, 11. juni 2021

Forord

Helt siden jeg startet på grunnskolelærerutdanningen i 2016 har jeg ønsket å skrive en masteroppgave i matematikkdidaktikk, og etter hvert ble det mer og mer klart for meg at jeg ville skrive om likninger, som jeg selv synes er veldig kjekt og interessant. Etter fem år på dette studiet er jeg nå klar for å levere oppgaven min. Arbeidet med denne oppgaven har vært lærerikt og spennende, men også utfordrende. Under dette arbeidet har jeg også hatt hyggelige stunder på biblioteket med gode venner, god mat og god musikk. De fem siste årene har gitt meg mye kunnskap og mange erfaringer som jeg kommer til å ta med meg videre i livet.

Jeg vil gi en stor takk til min veileder, Raymond Bjuland, for gode tilbakemeldinger og hjelp underveis i arbeidet med oppgaven. Jeg ønsker også å rette en stor takk til læreren og elevene som sa seg villige til å delta i studien min. Deres hjelp har bidratt til verdifullt datamateriale.

Jeg vil også takke medstudenter, venner og familie for støttende og oppmuntrende ord under denne prosessen. En spesiell takk rettes til mamma, pappa og Julian for innspill og korrekturlesing.

Lise Ådnanes, juni 2021

Sammendrag

Kartleggingsundersøkelser fra Trends in International Mathematics and Science Study viser at prestasjonene i algebra til norske elever på 9. trinn er svake. Hensikten med denne studien har derfor vært å undersøke hvilke strategier, utfordringer og muligheter elever har i arbeid med likninger. Forskningsspørsmålene har vært:

1. Hvilke strategier har elever i arbeid med likninger?
2. Hvilke utfordringer og muligheter har elever i arbeid med likninger?

Studien har hatt en kvalitativ tilnærming og har bygget på oppgavebaserte intervju med fem elever på 9. trinn og intervju med deres matematikklærer. Datainnsamlingen ble gjort ved hjelp av strategisk utvalg og ved delvis strukturerte intervju. Analysen ble basert på transkripsjoner av intervjuene.

En av de største overraskelsene i studien var at elevene hadde så mange ulike løsningsstrategier i arbeidet med likninger. Her ligger det store muligheter i å forstå tankegangen til den enkelte elev, og ikke bare presentere en løsningsstrategi. Gjennom oppgavebaserte intervju viste det seg også at elevene klarte å løse oppgavene ut fra sitt ståsted, når de fikk hjelp underveis. Mestringsfølelse er viktig, og holdninger spiller inn. Ikke alle elevene hadde i utgangspunktet en positiv holdning til likninger. Misoppfatninger er blitt viet en stor del gjennom de ulike leddene i studien, og flere misoppfatninger ble registrert hos elevene. Det ligger store muligheter for læring og mestring dersom en kan identifisere misoppfatninger hos elevene. Verdien i repetisjon ble også bekreftet. Med litt hjelp kom flere elever på sporet og var klare for å løse neste oppgave.

Innholdsfortegnelse

Forord ii

Sammendrag iii

Oversikt over figurer vii

1 Innledning 1

1.1 Bakgrunn for studien 1

1.2 Forskningsspørsmål 2

1.3 Oppgavens oppbygning 3

2 Teoretisk innramming 4

2.1 Hva er algebra? 4

2.1.1 Hva er en likning? 5

2.2 Algebra i et historisk perspektiv 6

2.3 Algebra på de tidlige trinn 7

2.3.1 Tidlig algebra 7

2.4 GTG–modellen 8

2.5 Læreplanen 9

2.6 Elevers prestasjoner i algebra 10

2.6.1 Norske elevers prestasjoner i algebra 11

2.7 Misoppfatninger 12

2.7.1 Elevenes utfordringer med bokstavene 13

2.7.2 Forståelsen av likhetstegnet 13

2.7.3 Variabler 14

2.7.4 Flytt og bytt 14

2.7.5 Negative tall i en likning 15

2.8 Kognitive krav 15

2.8.1 Lavere kognitive krav 16

2.8.2 Høyere kognitive krav 16

2.8.3 Oppgavenes ulike faser 17

3 Metode 19

3.1 Forskningsdesign 19

3.2 Forskerrollen 20

3.3 Valg av metode 20

3.3.1 Kvalitativ metode 20
3.3.2 Intervju 22
3.4 Beskrivelse av forskningsprosessen 23
3.4.1 Utvalg 23
3.4.2 Utarbeidelse av intervjuguide 25
3.4.3 Gjennomføring av intervju 26
3.5 Analysering av datamaterialet 27
3.5.1 Transkribering 27
3.5.2 Analyse 28
3.6 Studiens kvalitet 29
3.6.1 Validitet 29
3.6.2 Reliabilitet 29
3.6.3 Kritikk av metode 30
3.7 Forskningsetiske vurderinger 31
3.7.1 Informert samtykke 32
3.7.2 Konfidensialitet 32
3.7.3 Konsekvenser av å delta 33
3.7.4 Meldeplikt 33
4 Resultat 34
4.1 Oppgave 1a – Likning med ukjent på én side av likhetstegnet 34
4.2 Oppgave 1b – Likning med ukjent på begge sider av likhetstegnet 35
4.3 Oppgave 1d – Likning med parentes 36
4.4 Oppgave 1e – Likning med y som ukjent 39
4.5 Oppgave 1f – Likning med brøk 41
4.6 Oppgave 2 – Fra tekstoppgave til oppstilt likning 44
4.7 Oppgave 3 – Hvilken verdi har x i utsagnet? 47
5 Diskusjon 51
5.1 Ulike strategier 51
5.2 Basiskunnskap 52
5.3 Repetisjon – nøkkelen til forståelse 53
5.4 Misoppfatninger 54
5.4.1 Utfordringen med negative tall 55

5.4.2 Innføring av ukjente 56
5.5 Forståelse av symmetri 56
5.6 Sammenhengen mellom mestring og motivasjon 57
5.7 Algebraisk– versus dagligspråk 58
5.8 Oppgavefasene 59
6 Konklusjon og videre forskning 60
6.1 Videre forskning 61
Litteraturliste 63
Vedlegg 1: Godkjenning fra NSD 68
Vedlegg 2: Informasjonsskriv 71
Vedlegg 3: Intervjuguide lærer 75
Vedlegg 4: Intervjuguide elever 77

Oversikt over figurer

Figur 1. Her vises gjennomsnittskår for de ulike emneområdene i matematikk for Norge, Sverige, England og USA (Bergem et al., 2016, s. 36). 12

Figur 2. Ulike faser en oppgave passerer (Stein og Smith, 1998, s. 270). 18

1 Innledning

Gjennom oppgavebaserte intervju av fem elever på 9. trinn, ønsker jeg i studien min å identifisere hvilke strategier elevene har i arbeid med likninger, samt peke på utfordringer og muligheter. Jeg vil i det følgende si mer om bakgrunn for studien og hvilke forskningsspørsmål jeg ønsker å belyse. Avslutningsvis forklarer jeg oppgavens oppbygning.

1.1 Bakgrunn for studien

Fra første stund jeg ble presentert for likninger, har jeg funnet det meningsfylt å arbeide med. Samtidig har jeg erfart at venner og medelever har slitt med temaet. Også gjennom praksisutplasseringer via UiS, har min oppfatning av at mange elever sliter med temaet blitt styrket. Hva er grunnen til at mange elever sliter? Hvilke utfordringer har elevene, og hvilke løsningsstrategier bruker de, som gjør at det stopper opp underveis? Siden jeg selv synes det er så interessant å jobbe med likninger, og også ser den store nytteverdien av å kunne løse likninger, ønsker jeg at flere skal mestre dette. Det er min store motivasjon for å gå i gang med denne studien.

Algebra er en gren av matematikken, og i sin enkleste forståelse defineres algebra som likninger og regning med tall og variabler (Aubert, 2014). Både algebra og likninger kan defineres på ulikt vis. Det viktigste for en elev er å forstå hvilke komponenter en likning består av. I følge Maximum 8, elevenes lærebok, er en likning to algebraiske uttrykk som står på hver sin side av et likhetstegn (Tofteberg et al., 2020). Selv om jeg i studien viser til flere definisjoner av hva en likning er, har de til felles at det skal være et uttrykk på hver side av likhetstegnet.

Margrethe Naalsund (2012) hevder i sin doktorgradsavhandling at norske elever ser på algebra som meningsløs manipulasjon av symboler, og sliter med å forklare hvorfor de regner som de gjør. Også internasjonale kartleggingsundersøkelser fra TIMSS viser at norske elevers prestasjoner i matematikk på 9. trinn kan karakteriseres som middels gode i europeisk perspektiv, men at gjennomsnittsskåren trekkes ned av svært svake prestasjoner i algebra (Bergem et al., 2016). I tillegg tyder resultatene på at trenden har hatt en negativ utvikling fra 2011 til 2015, mens andre emner har utviklet seg positivt (Bergem et al., 2016).

I studien nevnes «tidlig algebra», der algebraiske tanker blir innført tidligere enn før, slik at elevene er mer forberedt på algebraen de møter i ungdomsskolen (Schliemann et al., 2007).

Også Kieran (2007) mener at elevene bør eksponeres for algebraiske ideer samtidig som de aritmetiske ferdighetene utvikles. Videre deler Kieran (2007) skolealgebraen i tre deler, og kaller den GTG–modellen. Utgangspunktet her er at algebra er en aktivitet. Gjennom genererende aktiviteter arbeider elevene med likhetstegnet, variabler og ukjente for å beskrive mønster, forhold og situasjoner. I de transformerende aktivitetene arbeider elevene med manipulasjon av algebraiske uttrykk eller likninger som blant annet faktorisering og utviding av uttrykk. I resonnerende aktiviteter kan algebra bli brukt som verktøy, men det kreves ikke. Problemløsning og modellering er eksempler på aktiviteter som inngår her. Samtidig kan elevene motiveres til å jobbe med genererende og transformerende aktiviteter (Kieran, 2007).

Regjeringen satte i 2016 i gang et omfattende arbeid for å fornye innholdet i skolefagene (Kunnskapsdepartementet, 2018). En viktig endring er at elevene skal jobbe mer med metoder og tenkemåter slik at de får større forståelse for faget. Kjerneelement er et nytt begrep i den nye læreplanen, Kunnskapsløftet 2020. Kjerneelement betegner det elevene må lære for å kunne mestre og bruke faget. I 8. trinn er et av kompetansemålene at elevene skal utforske algebraiske regneregler. Utforsking og problemløsning er kjerneelementet som skal støtte dette kompetansemålet (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Siden læring i matematikk i stor grad bygger på læring av tidligere begreper, er det viktig å identifisere misoppfatninger, det vil si oppfatninger eleven har som er feil (Resell–Hansen, 2014). En feil kommer ofte tilfeldig, men en misoppfatning er ikke tilfeldig, og bygger på en bestemt idé som konsekvent brukes (Brekke, 2002). I studien ser jeg nærmere på vanlige misoppfatninger i algebra. Skal man høyne norske elevers prestasjoner i algebra er det viktig å identifisere og løfte frem elevers misoppfatninger, som i neste omgang vil være en viktig kilde til læring.

1.2 Forskningsspørsmål

Formålet med denne oppgaven er å finne ut av elevers strategier i arbeid med likninger gjennom oppgavebaserte intervju. I kapittel 1.1 begrunnet jeg valg av tema med at mange elever strever i arbeidet med likninger. Ved å se mer på hvilke strategier elevene bruker, kan eventuelle misoppfatninger registreres, utfordringer avdekkes og muligheter åpenbare seg.

Jeg har derfor formulert disse to forskningsspørsmålene:

1. Hvilke strategier har elever i arbeid med likninger?
2. Hvilke utfordringer og muligheter har elever i arbeid med likninger?

For å finne svar på forskningsspørsmålene vil jeg ta utgangspunkt i relevant forskningslitteratur, samt intervjue elever i forbindelse med deres løsningsstrategier i arbeid med likninger.

Studien er kvalitativ, da jeg har valgt å intervjue fem elever på 9. trinn, og deres matematikklærer. Elevene kommer fra samme klasse, og representerer ulike nivå. Det er viktig at utvalget både er representativt og hensiktsmessig (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Forskerens rolle blir omtalt i metodekapittelet. Ikke bare er jeg skriveren som utvikler tekst, jeg er også forskeren som intervjuer, transkriberer og analyserer. Det kan ha både sine fordeler og ulemper å inneha alle disse rollene. Samtidig prøver jeg å være bevisst på forskningsetiske retningslinjer gjennom hele studien.

Undersøkelsen fra TIMMS viser at det ikke er kjønnsforskjeller i matematikk på de aktuelle trinnene i Norge (Bergem et al., 2016). Jeg har derfor også valgt å ikke se nærmere på dette.

1.3 Oppgavens oppbygning

Utenom innledning og konklusjon, inneholder studien fire hoveddeler. I teoridelen redegjør jeg for teorier og forskning som er relevante for forskningsspørsmålene. Algebra og likninger blir definert. Jeg ser på algebraens historie, «tidlig algebra», GTG–modellen, og på norske elevers prestasjoner i algebra. Flere misoppfatninger blir nærmere presentert. Til slutt i denne delen tar jeg opp kognitive krav; krav som er nødvendige for å løse en matematikkoppgave.

I metodekapittelet redegjøres det for valg som er tatt for å sikre forskningsprosessens validitet og reliabilitet. Valg av metode og utvalg presenteres, og hvordan datamaterialet vil bli analysert blir også omtalt. Forskningsetiske vurderinger er alltid viktige når man har med mennesker å gjøre, og blir belyst i siste del.

Resultatdelen presenterer elevenes strategier, muligheter og utfordringer i møte med oppgavene de får utdelt. Oppgavene har ulike vanskelighetsgrader og gjennom transkripsjoner får man innblikk i hvordan den enkelte elev tenker og løser oppgavene.

I diskusjonsdelen løftes de viktigste resultatene frem, og knyttes opp mot teori og forskning som er omtalt. Til slutt kommer jeg med en konklusjon der jeg svarer på forskningsspørsmålene, og reflekterer litt rundt hvordan forskning kan videreføres og utvikles i lys av denne studien.

2 Teoretisk innramming

For å kunne svare på forskningsspørsmålene mine skal jeg i dette kapittelet gjøre rede for relevant teori. Jeg vil starte med å se på hva algebra er, for så å se nærmere på hva en likning er. Algebraens historie vil deretter bli belyst, før jeg ser på algebra på de tidlige trinn. Videre vil jeg presentere Kierans (2007) GTG–modell. For å forstå mer av hvilke utfordringer og muligheter elever har i arbeid med likninger trekkes elevers prestasjoner i algebra frem. Hvor algebra og likninger er plassert i læreplanen kommer også frem. Ved å trekke frem misoppfatninger kan jeg også forstå mer av hvilke strategier elevene bruker under arbeid med oppgavebaserte intervju. Avslutningsvis vil jeg ta for meg Stein og Smiths (1998) kognitive krav.

2.1 Hva er algebra?

Algebra er vanskelig å definere og har flere ulike innfallsvinkler. Ordet algebra ble tidligere brukt om kunsten til å løse likninger. Det har etter hvert fått en videre betydning, og algebra betegner nå området av matematikken som studerer generaliseringer av regneoperasjonene og relasjonene i aritmetikken (Selvik et al., 2002). Aubert (2014) sier at algebra, en gren av matematikk, i sin enkleste forståelse defineres som likninger og regning med tall og variabler, men at det i dag oppfattes mer generelt som studien av algebraiske systemer og avbildninger mellom slike. Ifølge Birkeland, Breiteig og Venheim (2018) er algebra et språk der vi kort og konsist uttrykker og begrunner matematiske sammenhenger og resultater. Det er slik med algebra som med andre språk – det har sin egen grammatikk og sine regler for språkbruk. For mange betyr algebra bokstavregning. Et viktig kjennetegn ved dette området av matematikken er derfor uttrykk satt sammen av bokstaver og tall, og omforming av slike algebraiske uttrykk (Birkeland et al., 2018). Algebra kobles til de mer avanserte delene av matematikken. Aritmetikken, som blant annet består av tall og tallegenskaper, legger et viktig grunnlag for arbeidet med algebra (Kilpatrick et al., 2001).

Kieran (2007) sier at vi har to hovedsyn på algebra. Det er det tradisjonelle og det reformorienterte synet. I det tradisjonelle synet skal ikke algebra og funksjoner blandes, det er to helt ulike felt. Her er altså algebra noe eget. I det reformorienterte synet legges hovedvekten på funksjoner, gjennom å løse problemer fra den virkelige verden, ved å bruke andre metoder enn symbolsk manipulering. Ved å blande algebra og funksjoner fremmes forståelse og bruk av algebra og funksjoner. I de vestlige skolene sitter man igjen med en blanding av disse to synene (Kieran, 2007).

For å svare på spørsmålet om hva algebra er kan man både si hva algebra inneholder, og man kan prøve å gi en definisjon av hva algebra er. Det finnes mange ulike definisjoner. Usiskin (1988) deler algebra inn i fire typer. Generalisert aritmetikk, prosedyrer for å løse visse typer problemer, studiet av relasjoner mellom mengder og studien av strukturer er de fire typene. Tanken om at variablene bidrar til å konstruere eller avlede generaliserte mønstre hører til generalisert aritmetikk. Innenfor prosedyrer for å løse visse typer problemer blir utfordringer som etterspør verdien på en ukjent introdusert. I den tredje typen viser Usiskin (1988) til arealet av en firkant, og sier at man ikke kan løse formelen med de ukjente variablene, men skape en forståelse for at arealet firkanten har, bestemmes av dens lengde og bredde. Studien av strukturer handler om å utlede et nytt uttrykk fra et allerede eksisterende. Poenget her er at det er uttrykket som skal manipuleres (Usiskin, 1988).

2.1.1 Hva er en likning?

Det er flere definisjoner på hva en likning er. For eleven er det viktig å forstå hvilke komponenter en likning består av. Ifølge elevenes lærebok, Maximum 8, er en likning to algebraiske uttrykk som står på hver sin side av et likhetstegn (Tofteberg et al., 2020). I Dictionary of Mathematics skriver Borowski og Borwein (1989, s. 194):

> An equation is a formula that asserts that two expressions have the same value; it is either an Identical equation, which is true for any values of the variables, or conditional equation, which is only true for certain values of the variables.

Ut fra denne definisjonen er ikke 0 = 5 en likning, men ifølge Wolfram Mathworld er det en likning (Attorps & Tossavainen, 2009). Wolfram Mathworld sier nemlig at «an equation is a mathematical expression stating that two or more quantities are the same as one another» (Attrops & Tossavainen, 2009, s. 145).

Det begge definisjonene har til felles er at de mener det skal være et uttrykk på hver side av likhetstegnet. Siden det finnes flere ulike definisjoner av likningbegrepet er det også rimelig at elever har forskjellige oppfatninger av hva en likning er. Ifølge Naalsund (2012) er det vanlig at elever tenker at uttrykk som (4x – 2) er en likning. Denne oppfatningen kan komme av at elever ser på uttrykket basert på at det inneholder størrelser, og ikke likhet (Naalsund, 2012).

2.2 Algebra i et historisk perspektiv

For å forstå mer av hvorfor algebra er slik som det er i dag kan det være greit å orientere seg i hvor algebra kommer fra og hvordan det var før. Ordet algebra kommer fra det arabiske ordet «al–jabr», som betyr gjenoppretting eller sammensetning. Den arabiske matematikeren Mohammad ibn Musa al–Khwarizmi regnes ofte som grunnleggeren av algebra (Selvik et al., 2002). Ifølge Kongelf (2015) deles algebra inn i fire ulike deler. Den første delen, som omtales her, er operasjonell symbolisme, som går ut på hvordan algebra har blitt brukt opp gjennom årene. Igjen deles denne delen inn i tre deler – retorisk, synkopert og symbolsk algebra (Kongelf, 2015). I den retoriske fasen blir matematikken beskrevet verbalt i vanlig språk, med ord og setninger. Ordene blir mer og mer forkortet i den synkoperte fasen, og i den symbolske fasen erstattes forkortelsene med mer abstrakte symboler og et formelspråk. Den formen for algebra vi bruker er altså bare noen få hundre år gammel (Thorvaldsen, 2002).

Perioden med retorisk algebra går frem til Diofantos (250 e.Kr.), men strekker seg 1000 år lengre i de fleste kulturer (Thorvaldsen, 2002). Dette stadiet karakteriseres ved at en bruker vanlige språklige beskrivelser for å løse spesielle typer problemer, og at det ikke blir brukt symboler eller spesielle tegn for å representere ukjente størrelser. Eksempel på dette kan være en tekstoppgave der elevene ikke løser den ved hjelp av symbol. Alt blir altså beskrevet med ord, og ikke tall (Brekke et al., 2000). Innenfor den retoriske tradisjonen brukte ikke Al–Khwarizmi bokstavsymboler i matematikken, men geometriske betraktninger som støtte for sine resonneringer (Thorvaldsen, 2002). Ifølge Harper (1987) velger ofte elever retorisk algebra fremfor symbolsk algebra (Thorvaldsen, 2002).

I perioden med synkopert algebra innførte Diofantos symboler for en ukjent størrelse og potenser av denne. Symbolene var en type forkortelse, ikke operativ bokstavregning slik vi gjør det nå. På grunn av bruken av ordforkortelser i en ellers retorisk fremstilling, blir algebraen til Diofantos kalt synkopert. Denne perioden strekker seg fra Diofantos (250 e.Kr.) til Francois Viète (slutten av 1500–tallet) (Thorvaldsen, 2002). Her ble forkortelser brukt for ord (Brekke et al., 2000).

Det var ved den franske juristen Francois Viète (1540–1603) det tredje stadiet av algebraens utvikling startet. Frem til nå hadde bokstaver i algebra kun stått for den ukjente. Symbolbruken utvides, slik at man også bruker bokstaver for koeffisienter i likninger (Thorvaldsen, 2002). Viète brukte bokstaver til å representere gitte, ukjente størrelser. Det var ikke før nå det var mulig å angi ukjente og variable størrelser og å uttrykke generelle løsninger (Brekke et al., 2002). Store fremskritt i utviklingen av funksjonsbegrepet og analytisk geometri kom av den symbolske algebraen. Siden den tid har det karakteristiske formelspråket vært en viktig og effektiv del av matematikkfaget (Thorvaldsen, 2002).

2.3 Algebra på de tidlige trinn

Ifølge Brekke, Grønmo og Rosén (2000) tilegner elever seg kunnskaper i aritmetikken i starten av grunnskolen. Disse kunnskapene skal generaliseres om til algebra i høyere trinn. Langs denne veien blir noen elever mer fokuserte på å finne rett svar, enn å tenke på det generelle rundt resultatet. Svar uten tallverdier vil gi lite mening for enkelte. Schliemann, Carraher og Brizuela (2007) innførte på bakgrunn av denne problematikken begrepet «tidlig algebra». Poenget med det er at algebraen skal bli sett på som en del av aritmetikken tidligere i skolegangen, i stedet for å flytte dagens algebraundervisning ned til lavere trinn.

Ifølge Carraher og Schliemann (2007) er pre–algebra en tilnærming som fokuserer på overgangen fra aritmetikk til algebra. Den har fokus på grunnleggende aritmetikk som skal forberede elevene på algebra. Dette har tradisjonelt sett vært vanskelig for elever. Gjennom denne tilnærmingen ønsker man å utvide forståelsen for matematiske symbol, blant annet +, –, ·, / og =, som er viktige symbol i algebra og likninger. Meningen er at man tilnærmer seg disse symbolene før man begynner med algebra, slik at overgangen fra aritmetikk til algebra blir lettere for elevene (Carraher & Schliemann, 2007).

2.3.1 Tidlig algebra

Tidlig algebra er en tilnærming for undervisning og læring i matematikk. Det skapes en tilnærming til algebra innenfor de emnene som allerede eksisterer i matematikkfaget på barneskolen. Poenget er å introdusere algebraiske tanker tidligere enn det som har blitt gjort før. Ifølge Cai og Knuth (2011) har aritmetikk tradisjonelt vært i fokus på barneskolen, mens algebra har vært i fokus på ungdomsskolen. Hovedtanken er at aritmetikken inneholder algebra og algebraiske elementer, men uten bruk av algebraisk notasjon (Carraher & Schliemann, 2007). Disse forfatterne ser algebra som en generalisering, som finnes i alle matematiske emner. De ønsker ikke å ha et gap mellom aritmetikk og algebra. Algebraen skal inn i aritmetikken og andre matematiske emner allerede fra den første matematiske opplæringen starter, i stedet for å introdusere algebra som et eget emne (Carraher &

Schliemann, 2007). De peker også på at matematiske symboler brukes på en annen måte i algebra enn i aritmetikk. Da for eksempel hvordan man oppfatter likhetstegnet når man jobber med likninger sammenlignet med aritmetikk.

Cai og Knuth (2011) viser til Kieran (2007) og sier at det er en voksende enighet om at elever kan lære algebra tidligere. De bør eksponeres for algebraiske ideer samtidig som de aritmetiske ferdighetene utvikles. For å utvikle slike algebraiske ideer sier Cai og Knuth (2011) at det er enighet om at måten det skal gjøres på ikke er å dytte ungdomsskolepensum ned i barneskolen. De mener at det kreves en endring i hvordan aritmetikken blir sett på, og hvordan den blir undervist på. Det må utvikles en bedre forståelse rundt de faktorene som er med på å gjøre overgangen fra aritmetikk til algebra så vanskelig for elevene (Cai & Knuth, 2011).

Dersom en elev skal løse oppgaven 13 + 47 kan det trekkes fra 3 på første ledd og legges til 3 på andre ledd. Det nye regnestykket blir da 10 + 50, som er mer håndterlig. Ut fra dette kan eleven foreslå en generalisering som går ut på at når man trekker fra en sum på første ledd og legger til samme sum på det andre leddet får man samme resultat når man legger sammen de to tallene. Forholdet får da det symbolske uttrykket $(a + b) = (a + c) + (b – c)$. Et slikt forhold skal elevene først kunne uttrykke med naturlig språk, for så å senere uttrykke det med et algebraisk språk, og etter hvert kan den algebraiske notasjonen fungere som en støtte for matematiske resonnementer (Carraher et al., 2008).

Når det gjelder løsning av likninger kan man skille mellom pre–algebraiske strategier og algebraiske strategier. På grunn av at «gjett og prøv» ikke betrakter symmetrien i likninger, men forholder seg til likningen på en aritmetisk måte, er dette et eksempel på en pre–algebraisk strategi. Når man ser på sammenhengen mellom de ulike sidene av likhetstegnet, ser man derimot på algebraiske strategier. Å gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet er et eksempel på en slik strategi (Knuth et al., 2006). Knuth, Stephens, McNeil og Alibali (2006) sier at en viktig forskjell mellom disse synene er at pre–algebra kan føre til at elevene erfarer en diskontinuitet mellom aritmetikk og algebra, men at tidlig algebra prøver å bygge bro over denne diskontinuiteten.

2.4 GTG–modellen

Kieran (2007) deler skolealgebraen i tre deler og kaller den GTG–modellen. Hun har utviklet modellen basert på oppfatningen av at algebra er en aktivitet. Kieran (2007) skriver at Lee fant syv forskjellige perspektiver på hva algebra er; et skolefag, generalisert aritmetikk, et språk, et verktøy, en tenkemåte, en kultur og en aktivitet. Det som er gjennomgående i disse perspektivene er at algebra er noe man gjør, altså en aktivitet. Det var med utgangspunkt i dette hun utviklet GTG–modellen, som deles inn i genererende aktiviteter, transformerende aktiviteter og resonnerende aktiviteter (Kieran, 2007).

Ifølge Kieran (2007) skapes mye av forståelsen til algebraiske objekter gjennom arbeid med genererende aktiviteter. Slike aktiviteter dreier seg om forming av likninger og uttrykk. Det arbeides da med likhetstegnet, variabler og ukjente for å beskrive mønster, forhold og situasjoner. En forutsetning for at elever kan arbeide med genererende aktiviteter er at de kjenner til symbolene som inngår, og at de kjenner til det algebraiske språket (Kieran, 2007). Et eksempel på en slik oppgave kan være å finne ut hvor gammel Fredrik er, dersom han er tre år yngre enn Nils. Elevene må da lage et uttrykk som både beskriver hvor gammel Fredrik er, og hvor gammel Nils er. Radford (2001) sier at algebraens rolle i genererende aktiviteter bidrar til å skape et språk som gjør at elevene kan uttrykke mening.

De transformerende aktivitetene blir også ofte regnet som de regelbaserte aktivitetene. Dette på grunn av at en stor del av disse aktivitetene omhandler manipulasjon av algebraiske uttrykk eller likninger for at ekvivalensen skal vedlikeholdes. Manipulasjon av algebraiske uttrykk inkluderer blant annet faktorisering, utviding, forenkle uttrykk, erstatte et uttrykk for et annet eller å løse likninger og ulikheter (Kieran, 2007). Li, Silver og Li (2014) trekker frem at de ulike transformerende aktivitetene stiller ulike krav til ferdigheter, og at disse har ulike roller i matematiske emner.

I de resonnerende aktivitetene kan algebra bli brukt som verktøy, men det kreves ikke. Disse aktivitetene har altså ikke noen krav om at algebra skal brukes, men det kan bli brukt som verktøy for å løse oppgaver eller problemer. Fokuset i resonnerende aktiviteter er generelle matematiske prosesser og aktiviteter. Ved disse aktivitetene kan elever motiveres til å jobbe med genererende og transformerende aktiviteter. Problemløsning, modellering, generaliserende mønster og å se etter strukturer er eksempler på aktiviteter som inngår i resonnerende aktiviteter (Kieran, 2007).

2.5 Læreplanen

I læreplanen Kunnskapsløftet fra 2006 hadde matematikk kompetansemål i grunnskolen etter 2., 4., 7., og 10. årstrinn. Hovedområdene fra 8. – 10. årstrinn var tall og algebra, geometri, måling, statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk og funksjoner (Utdanningsdirektoratet, 2013). Utdanningsdirektoratet skriver at «algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 3).

I 2020 ble læreplanene fornyet og læreplaner fra Kunnskapsløftet 2020 tas nå trinnvis i bruk. 8. og 9. klasse har tatt i bruk nye læreplaner i matematikk, mens 10. klasse skal ta dem i bruk 1. august 2021 (Utdanningsdirektoratet, 2020). Den sentrale endringen fra Kunnskapsløftet 2006 til Kunnskapsløftet 2020 er at det nå er knyttet kompetansemål i matematikk til hvert trinn. Kompetansemålene i den nye læreplanen er færre og tydeligere enn i Kunnskapsløftet fra 2006. Dersom man ser på kompetansemålene for 8. trinn, ser man at en del av målene handler om algebra. Mål for opplæringen på 8. trinn er blant annet at elevene skal utforske algebraiske regneregler, og at de skal beskrive og generalisere mønster både med egne ord og algebraisk (Utdanningsdirektoratet, 2020). På 9. og 10. trinn er det andre kompetansemål, og det er der få kompetansemål som omhandler algebra.

Det som også er nytt fra Kunnskapsløftet 2020 er kjerneelementer. Ifølge Utdanningsdirektoratet (2019) er kjerneelementer det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen. Det er det elevene må lære for å kunne mestre og anvende fagene, og de består av sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer. Innenfor matematiske kunnskapsområder står det at algebra handler om å utforske strukturer, mønstre og relasjoner og at det er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020).

2.6 Elevers prestasjoner i algebra

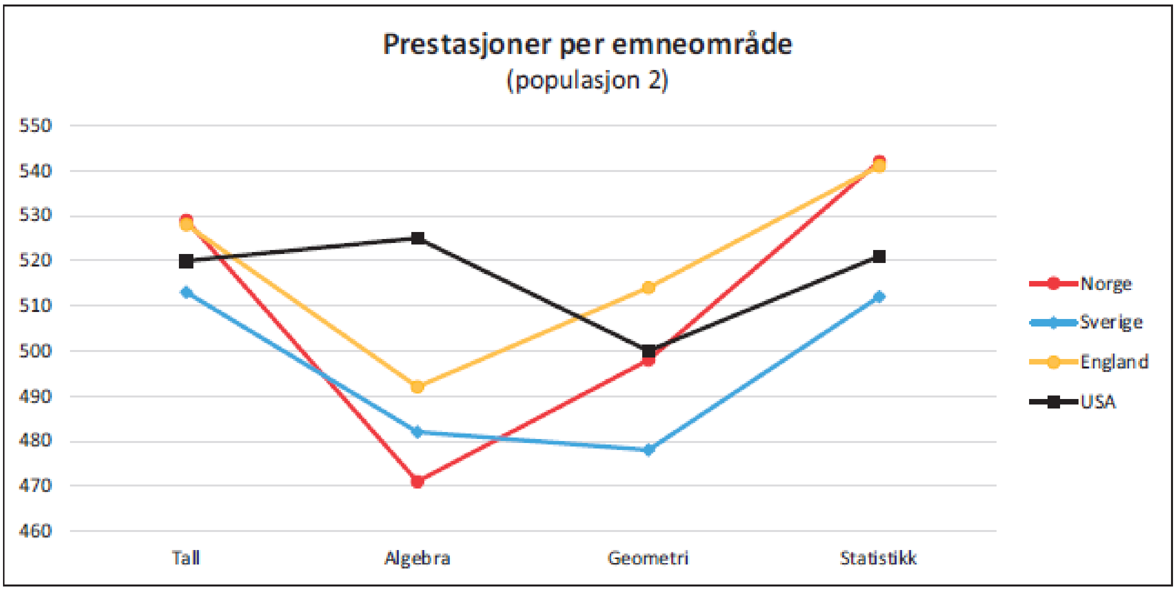
Ifølge Thorvaldsen (2002) ville det vært rimelig å anta at elever ville bruke algebra i enhver mulig kontekst etter at de først har lært det, men flere undersøkelser viser at dette ikke er tilfellet. Ifølge Harper (1987) viser undersøkelser også at dersom elever ikke må bruke symbolsk algebra, velger de ofte retoriske metoder (Thorvaldsen, 2002). I Harpers undersøkelser kommer det også frem at elever har problemer med å bruke Viètes variabler. Da elever ble spurt om å vise om det er mulig å finne to tall dersom summen og differansen er gitt, valgte halvparten av de eldste elevene Diofantos' (synkoperte) metoder fremfor Viètes (symbolske) metoder. Det viser seg at elever ofte løser problemer bedre ved å bruke tall og dagligspråk enn ved å bruke algebra. Algebraisk språk blir ikke uten videre en del av elevenes naturlige måte å tenke på. For at elevene skal synes det er hensiktsmessig å bruke algebra må problemene ha en viss vanskelighetsgrad (Thorvaldsen, 2002).

Det er interessant å se at vi finner de tre stadiene som algebraens historie har gått gjennom i elevenes løsningsstrategier. Forskning viser at elevene går fra retoriske løsningsmetoder til synkoperte, og videre til symbolske løsningsmetoder. Det tok over 1300 år å gå fra synkopert til symbolsk algebra, og i klasserommet forventes det at samme skritt skal bli tatt i løpet av mindre enn fem år (Thorvaldsen, 2002). Algebra er en port til høyere matematikk, men kan også være en barriere i elevers utdanning, og kan dermed gi store didaktiske utfordringer (Birkeland et al., 2018).

Elever har ulike holdninger til matematikk, og ifølge McLeod (1992) kan holdninger til matematikk oppstå på to ulike måter. Den første måten er at allerede eksisterende holdning bringes med til en lignende oppgave eller til et annet tema. Dersom elevene for eksempel har negative holdninger til algebra, kan denne negative holdningen bli overført til arbeid med funksjoner. Holdninger til matematikk kan også oppstå ved gjentakende følelsesmessige reaksjoner på matematikk (McLeod, 1992). Det kan for eksempel skje hvis elever har blitt frustrerte, oppgitte eller sinte i arbeid med algebraoppgaver (Skaalvik & Skaalvik, 2013). Den kan også oppstå dersom elevene har opplevd nederlag i algebra (McLeod, 1992).

2.6.1 Norske elevers prestasjoner i algebra

Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) har blitt gjennomført hvert fjerde år siden 1995. Det er en internasjonal studie i matematikk og naturfag for grunnskolen. Norge har deltatt hver gang utenom i 1999 (Bergem et al., 2016). De norske resultatene fra TIMSS 2015 er basert på data knyttet til 5. og 9. trinns elever, utenom når trender presenteres. Da blir også data fra 4. og 8. trinn benyttet (Bergem et al., 2016). Norske elevers prestasjoner i matematikk på 9. trinn kan karakteriseres som middels gode i et europeisk perspektiv, men gjennomsnittsskåren trekkes ned av svært svake prestasjoner i emneområdet algebra (Bergem et al., 2016). Fra 2007 til 2011 var det en beskjeden, men signifikant fremgang i algebra, men i 2015 var skåren tilbake på 2007–nivå igjen (Bergem et al., 2016). Fra 2015 til 2019 er det ingen signifikante endringer i algebra (Kaarstein et al., 2020). Norge har en svært lav skår i algebra i forhold til de andre emneområdene. Det er ingen kjønnsforskjeller i matematikk på de aktuelle trinnene i Norge (Bergem et al., 2016).



FIGUR 1. HER VISES GJENNOMSNITTSKÅR FOR DE ULIKE EMNEOMRÅDENE I MATEMATIKK FOR NORGE, SVERIGE, ENGLAND OG USA (BERGEM ET AL., 2016, S. 36).

2.7 Misoppfatninger

Begrepet misoppfatninger har nå fått en sentral rolle i den matematikkdidaktiske forskningslitteraturen. En av grunnene til at misoppfatninger knyttes så sterkt til matematikkfaget er at læring i matematikk i stor grad bygger på læring av tidligere begreper (Ay, 2017).

Misoppfatninger er, ifølge Brekke (2002), noe elevene har, og ikke feilene de gjør. Han sier at en feil ofte kommer tilfeldig, men at misoppfatninger ikke er tilfeldige, på grunn av at de bygger på en bestemt idé som konsekvent brukes. Ifølge Resell–Hansen (2014) har en elev en misoppfatning når eleven har en oppfatning, og denne oppfatningen er feil. Dersom eleven skal gjøre en oppgave som tester et konsept eller område av algebra som eleven ennå ikke har lært, eller som eleven ikke kjenner til, har eleven tre muligheter. Eleven kan enten la være å svare på oppgaven, gjette, eller produsere et svar som virker logisk ut fra de kunnskapene og forutsetningene eleven allerede har (Resell–Hansen, 2014). For å være best mulig forberedt på misoppfatninger, er det greit å gjøre seg godt kjent med vanlige misoppfatninger i algebra. I Naalsunds (2012) doktorgradsavhandling ble det identifisert flere misoppfatninger innenfor likningsløsning og manipulering av algebraiske uttrykk:

– Ledd flyttes over i en likning uten at det skiftes fortegn

– 4x tolkes som 4 + x

– Ledd av ulike typer trekkes sammen, f. eks. 3x + 2 = 5x

– Parenteser ignoreres, slik at 3(x–2) blir til 3x – 2

2.7.1 Elevenes utfordringer med bokstavene

Siden det krever en utvidet forståelse for hva bokstaver kan bety, kan overgangen til å tenke algebraisk være utfordrende for elevene. I aritmetikken kan 9 m bety 9 meter og 6 s bety 6 sekunder. I den konteksten er bokstavene forkortelser av navn på enheter. I algebra derimot, står bokstavene for ukjente størrelser, tall eller variabler. 9m betyr da 9 · m. I algebraen vil altså 9m stå for 9 multiplisert med det uspesifiserte tallet m. Det kan friste å tolke 3a + 4a = 7a som tre appelsiner pluss fire appelsiner blir lik syv appelsiner, men dette blir feil. Hvis elevene tolker a som appelsiner og b som bananer, hvordan skal de da tolke a^2 eller ab? (Birkeland et al., 2018)

For noen elever er det vanskelig å se for seg at 3x kan være det samme som 3y. Det kan skyldes at fokuset ligger i at bokstavene skal være ulike og at ulike bokstaver må ha ulik verdi (Birkeland et al., 2018). For mange elever gir uttrykk kun mening ved at de tenker seg bestemte tallverdier for bokstavene. Det gjøres da ofte feil fordi de tror at en bestemt bokstav må stå for en bestemt tallverdi. Å tenke på bokstaver som tallverdier kan både hjelpe og hindre elevene i å lære algebra (Brekke et al., 2000).

2.7.2 Forståelsen av likhetstegnet

Likhetstegnet blir i begynneropplæringen brukt som et symbol på at en operasjon skal utføres. 3 + 4 = leses ofte som «regn ut tre pluss fire», så kommer svaret på høyre side. Elevene oppfatter altså likhetstegnet som et tegn på at en regneoperasjon skal utføres (Birkeland et al., 2018). Man kan ofte se at elever gjør det mange lærere kaller å misbruke likhetstegnet. Da ser man for eksempel ting som: 3 + 9 = 12 : 4 = 3. Når lærere reagerer på dette kan det komme av at de tenker på likhetstegnet på en annen måte. Ikke som en operasjon for å få et svar, men for å påpeke at resultatet av to utregninger gir det samme svaret. Det hjelper heller ikke at bruken av kalkulator støtter den operasjonelle forståelsen for likhetstegnet. På kalkulatoren trykker vi på likhetstegnet for å utføre en beregning (Selvik et al., 2002). Elever leser ofte numeriske uttrykk som _ = 3 + 4 som «tomt rom er lik tre pluss fire», og så vil de si at «det er baklengs», og deretter endre det til 4 + 3 = _ (Behr et al., 1980).

Når elever relaterer likhet med operasjoner betyr det at de vil ha problemer med å lese aritmetiske setninger som ikke har noen operasjon, slik som 5 = 5. Når elevene da forventer en operasjon kan en slik likhet gi lite mening (Behr et al., 1980).

Kieran (1981) trekker frem at elevene påvirkes av læreren, og at lærerens ordvalg i arbeid med likhetstegnet derfor er viktig. Dette kan ha betydning når det kommer til om elever tolker likhetstegnet som en prosess eller et objekt. Man kan for eksempel skille mellom det å si at 4 + 5 blir 9, eller om vi velger å si at 4 + 5 har samme verdi som 9.

2.7.3 Variabler

Brekke et al. (2000) sier at variabelbegrepet inneholder to ulike aspekter. Det første aspektet er inntrykket om at noe varierer – i motsetning til det å være konstant. Selv om elevene ikke kjenner til ordene variabel og konstant, er dette aspektet kjent for de fleste elevene når variabelbegrepet introduseres i skolen. Måten bokstaver brukes for å representere generaliserte tall i matematikk er det andre aspektet. I flere talluttrykk kan en størrelse endre seg, samtidig som andre forblir konstante. Man må regne med at elevene ikke har erfaringer med dette aspektet når de først møter algebra i skolen (Brekke et al., 2000).

Brekke et al. (2000) hadde en undersøkelse der likningen l + m + n = l + p + n ble presentert. Svaralternativene var at det alltid var sant, at det aldri var sant eller at det kan være sant. Halvparten av elevene svarte at det aldri kunne være sant. Dette ble begrunnet med at l, m, n og p representerte ulike verdier, siden de var symbolisert ved ulike bokstaver (Brekke et al., 2000). På bakgrunn av dette kan elevene tro at bokstavene er objekter, som for eksempel at l står for lim og at p står for pære. Når bokstavene står for ulike ord kan de jo ikke være det samme tallet. Dette kan medføre at elever ikke ser på bokstaver som variabler.

2.7.4 Flytt og bytt

Ved flytt og bytt–regelen kan man «flytte» matematiske uttrykk fra en side av likhetstegnet til den andre siden dersom man bytter fortegn. Et eksempel kan være at man har likningen 7x – 3 = 9. For å få x alene på venstre side «flytter» man tretallet over på høyre side og bytter fortegn. Det er viktig å få frem at man legger til eller trekker fra samme verdi på begge sider av likhetstegnet, og ikke bare «flytter». Dersom elever bare husker denne regelen trenger de hverken ha kunnskap om likhetstegnet eller skjønne hva de gjør for at de skal få riktig svar på oppgaven. Dette kan føre til at elever ikke bytter fortegn på x, men heltall, eller motsatt. Det kan også føre til at elevene konsekvent ikke bytter fortegn, men «flytter» tall og uttrykk til den andre siden av likhetstegnet (Sagerup, 2019).

Ifølge Kieran (1989) er ikke denne prosedyren hensiktsmessig dersom det ikke blir vektlagt hvorfor man kan løse likninger på denne måten. Hun begrunner det i at denne metoden ikke understreker at det er symmetri i likningen. For å løse mer avanserte likninger er denne symmetrien vesentlig. Dersom man bruker denne prosedyren uten å reflektere over hvorfor den kan benyttes kan det være begrensende på den algebraiske kompetansen (Kieran, 1989).

2.7.5 Negative tall i en likning

Booth og Davenport (2013) skriver at man ser økning i antall feil elever gjør når negative tall introduseres i en likning. Grunnen til dette er at elever ofte konkluderer feil, og tror at negative tegn bare refererer til subtraksjonsoperasjonen (Booth & Davenport, 2013). Dette kan føre til at elever gjør feil som at de for eksempel trekker fra der de skal legge til. Hvis likningen er $3 - x = 4x + 5$ kan det komme et forslag om at neste steg skal være $3 - x - x = 4x + 5 - x$. Her blir ikke $-x$ sett på som et negativt tall. Elevene ser bort fra at det er et negativt fortegn fremfor x, og de vil så få x–en bort fra venstre side ved å trekke fra. Når elever som bruker flytt og bytt–regelen møter negative tall gjør de i nesten alle tilfeller feil (Vlassis, 2004).

2.8 Kognitive krav

Stein og Smith (1998) har forsket på hvilke kognitive krav som stilles til matematikkoppgaver. De har utviklet et rammeverk for å si noe om hvilke kognitive krav som er nødvendige for å løse en matematikkoppgave. Rammeverket er delt inn i to hovedkategorier, lavere kognitive krav og høyere kognitive krav. Lavere kognitive krav deles igjen inn i memorering og prosedyrer uten forbindelse, mens høyere kognitive krav deles inn i prosedyrer med forbindelse og å gjøre matematikk. Kategoriene er bygd opp hierarkisk, som vil si at oppgavene som inneholder prosedyrer uten forbindelse er mer kognitivt krevende enn oppgavene som hører til memorering (Stein & Smith, 1998). Ved hjelp av et slikt rammeverk kan man studere hvilken type tenkning som kreves av elever i arbeid med ulike oppgaver.

2.8.1 Lavere kognitive krav

Oppgavene innenfor kategorien memorering involverer å gjengi fakta, regler, formler og definisjoner som allerede er lært. I slike oppgaver blir det gjort tydelig hva som skal gjøres, og oppgavene blir direkte forklart. Disse oppgavene skal ikke løses ved hjelp av en bestemt fremgangsmåte, enten på grunn av at tidsrammen som er gitt for å løse oppgaven er for kort eller fordi en slik fremgangsmåte ikke finnes. Elevene ser hva de skal gjøre med en gang de får en slik oppgave. Dette kan knyttes opp mot instrumentell forståelse. Et eksempel på en oppgave innenfor denne kategorien kan være at elever skal gjøre $\frac{1}{2}$ eller $\frac{1}{4}$ om til desimaltall og prosent. Den forventa responsen fra elevene vil da være $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$ og $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$ (Stein & Smith, 1998). På grunn av at tallene som er brukt er så enkle som de er, vil elevene løse denne oppgaven ved hjelp av hukommelsen.

Oppgaver med prosedyrer uten forbindelse er algoritmiske. I oppgaver på dette nivået er det gitte fremgangsmåter som skal brukes, enten ved at de er etterlyst i selve oppgaven eller på bakgrunn av tidligere instruksjoner som er gitt. Denne typen oppgaver setter litt høyere krav til elevenes tenkning enn oppgaver i kategorien memorering, men det kreves heller ikke her forståelse for meningen bak prosedyren. Fokuset i disse oppgavene er å finne rett svar, og det trengs ingen forklaring på hvordan elevene har kommet frem til svaret. Et eksempel på en oppgave med prosedyrer uten forbindelse kan være å gjøre brøken $\frac{3}{8}$ om til desimaltall og prosent (Stein & Smith, 1998). Elevene må bruke algoritmer de kjenner fra før for å løse oppgaven, siden de ikke lenger har memorert hvilket desimaltall som hører til brøken. Elevene vet likevel fortsatt hvilken fremgangsmåte de må bruke, og det kognitive kravet for å løse oppgaven er derfor lavt.

2.8.2 Høyere kognitive krav

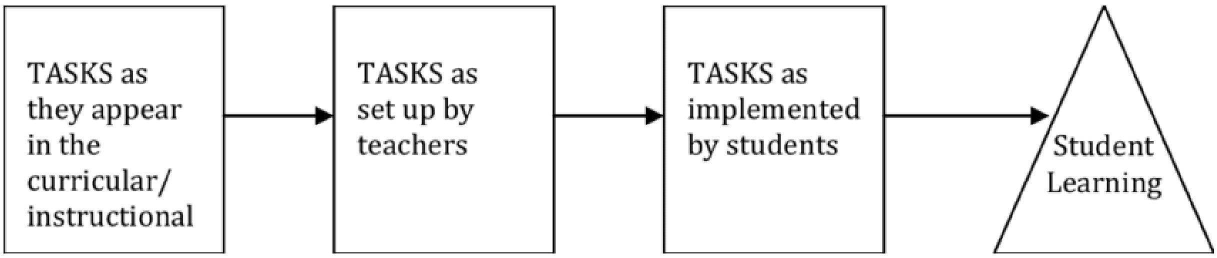
Ved hjelp av oppgaver med prosedyrer med forbindelse skal elevene øke forståelsen for emnet. Det trengs en forståelse av meningen bak prosedyren for å kunne gjøre oppgaven. Det blir foreslått fremgangsmåter som er generelle prosedyrer og som har en tett forbindelse med underliggende begreper. Oppgavene har flere representasjoner som for eksempel konkreter, symboler, tekstoppgaver og visuelle diagrammer. På denne måten øker elevene forståelsen sin. For at elevene skal fullføre oppgaven må de kunne følge prosedyrer, men ikke uten å tenke. De må også bruke underliggende begreper. En slik oppgave kan for eksempel være at elevene skal bruke et rutenett på 10 x 10 for å finne prosenten og desimaltallet tilhørende $\frac{3}{5}$

(Stein & Smith, 1998). For å løse en slik oppgave kreves det en viss grad av kognitiv innsats. Elevene må klare å bruke rutenettet hensiktsmessig, og de må ta egne valg for å få verdiene de trenger.

På nivået «å gjøre matematikk» blir det ikke foreslått en gitt fremgangsmåte som skal brukes for å løse oppgavene. De krever at elevene bruker relevante erfaringer og kunnskap, og at de bruker dette på en fornuftig måte når de arbeider med oppgavene. Elevene må da utforske og forstå matematiske prosesser eller sammenhenger. Et eksempel på å gjøre matematikk kan være at elevene skal fargelegge seks ruter i et rutenett på 4 x 10 og forklare hvordan man kan finne ut hvor stor del som er fargelagt, både som prosent, brøk og desimaltall (Stein & Smith, 1998). For at elevene skal klare å løse denne oppgaven må de kunne ta valg, tolke og finne ut hvilke opplysninger som er nødvendige. Tenkingen som kreves her er kompleks og ikke–algoritmisk. Å gjøre matematikk blir derfor sett på som det høyeste kognitive kravet i oppgaver (Stein & Smith, 1998).

2.8.3 Oppgavenes ulike faser

Ifølge Stein og Smith (1998) har fasene oppgavene passerer stor betydning for hva elevene lærer. De beskriver tre ulike faser. Den første fasen en oppgave passerer er hvordan den fremstilles i lærebøker, digitale plattformer eller annet skolemateriell. Fase to er hvordan lærere presenterer oppgavene. Den siste fasen er hvordan elevene selv arbeider med oppgavene. Oppgavene endres ofte når de går fra en fase til en annen. Med andre ord er ikke nødvendigvis en oppgave i læreboken den samme oppgaven som en lærer presenterer for elevene (Stein & Smith, 1998). Både egenskapene og de kognitive kravene en oppgave har kan endres i overgangen mellom lærerens presentasjon og elevarbeidet (Henningsen & Stein, 1997). Oppgavene som blir presentert av læreren som krever høy kognitiv tenkning kan endre fokus når elevene arbeider med oppgavene. Da kan de gå bort fra meningen bak løsningsstrategiene og bare fokusere på den riktige løsningen. Det vil si at oppgaver med høyere kognitive krav ikke nødvendigvis bidrar til høy kognitiv tenkning, men det er likevel nødvendig med oppgaver på høyt kognitivt nivå siden oppgaver med lave kognitive krav sjeldent bidrar til høy kognitiv tenkning (Stein & Smith, 1998).



FIGUR 2. ULIKE FASER EN OPPGAVE PASSERER (STEIN OG SMITH, 1998, S. 270).

3 Metode

Målet med denne oppgaven er å undersøke hvilke muligheter, utfordringer og strategier elevene på 9. trinn har i arbeid med likninger. For å finne ut av dette har jeg tatt i bruk kvalitativ metode, nærmere bestemt oppgavebaserte intervju. Hensikten med dette kapittelet er å beskrive og begrunne valg jeg har tatt, og med det ønsker jeg å styrke oppgavens reliabilitet og validitet. Jeg vil beskrive valg av metode, utvalg av informanter og analyse av data. Avslutningsvis vil jeg si noe om studiens kvalitet, og komme med forskningsetiske vurderinger.

3.1 Forskningsdesign

Både Maxwell (2008) og Thagaard (2018) peker på at forskningsspørsmålene bør være utgangspunkt for studien, og de valg som tas. Siden jeg er interessert i å se på hvordan de ulike elevene jobber med likninger gav det mening å bruke kvalitativ metode. Denne metoden egnet seg godt for min studie, siden tilnærmingen var fleksibel, og gav informantene større frihet og mulighet til å uttrykke seg enn det en kvantitativ studie kunne gjort (Thagaard, 2018). Ved å bruke en kvalitativ metode har jeg hatt muligheten til å studere datamaterialet i dybden, og elevene har både fått vist og forklart hva de tenkte. Jeg har et elevfokus, og har derfor hatt fem oppgavebaserte elevintervju, og i tillegg et lærerintervju.

Forskeren har en aktiv rolle i både datainnsamling og analyseprosess når det kommer til kvalitativ forskning. Ved at forskeren selv deltar i datainnsamlingen vil han ha førstehåndsinformasjon om både verbal og nonverbal kommunikasjon (Merriam, 2014). Jeg har brukt intervju, lydopptak og video–opptak for å samle inn data. Etter at datamaterialet var samlet inn, ble det transkribert av meg. Valgene som ble tatt under transkribering vil også påvirke datamaterialet.

Thagaard (2018) skriver at case–studier kjennetegnes ved undersøkelsesopplegg som er rettet mot å studere mye informasjon om få caser eller enheter. Hver case representerer en avgrenset kontekst, og i min studie vil det være én lærer og fem elever. Å oppnå rikholdig informasjon om casene studien retter sin oppmerksomhet mot er hovedpoenget i case–studier (Thagaard, 2018). Et av kjennetegnene til case–studier er, ifølge Creswell og Poth (2018), at analysene baserer seg på flere data. I min studie har jeg hatt både lærer– og elevintervju og jeg har hatt video– og lydopptak av disse.

Yin (1984) identifiserer tre ulike case–studier: exploratory, descriptive og explanatory (Cohen et al., 2011). Jeg undersøkte hvilke utfordringer og muligheter elevene møtte i arbeid med likninger, og i tillegg så jeg på hvordan de arbeidet med likninger, og hvilke tanker og holdninger de har til dette. Ut fra det vil jeg si at min studie er en blanding av exploratory og descriptive, altså utforskende og beskrivende.

3.2 Forskerrollen

Forskerens rolle som person er avgjørende for kvaliteten på kunnskapen og de etiske betraktningene man tar i en kvalitativ studie. Forskerens integritet, som er den avgjørende faktoren, øker i forbindelse med intervju, siden intervjueren selv er det viktigste redskapet til å hente inn kunnskap (Kvale & Brinkmann, 2015). I denne studien er jeg ikke bare skriveren som utvikler tekst, men også forskeren som intervjuer, transkriberer og analyserer. Under elevintervjuene var jeg forsker og intervjuer, og samtidig ønsket jeg å være en person elevene ikke var redd for å spørre om hjelp, og som de kunne snakke fritt til. Mitt ønske var at elevene skulle få til alle oppgavene, og at jeg fikk høre tankeprosessene gjennom hele oppgaveløsingen. Noen av elevene trengte hjelp og tips for å komme helt i mål med oppgavene, og jeg var da klar over at dialogen jeg hadde med elevene virket inn på deres svar.

Ifølge Kvale og Brinkmann (2015) har forskerne som bruker kvalitative intervjuer alltid noe å gjøre. Det holder ikke å bare hake av punkt i et skjema og få NSDs godkjenning, siden det kan skje mange uforutsette ting når man forsker på levende, talende og handlende mennesker. Jeg har brukt NESH (2016) sine forskningsetiske retningslinjer gjennom hele prosessen i min studie. I forskningsprosessen er det viktig å ta vare på informantene, men det er også viktig å unngå plagiering av andres tekster, og å være bevisst på bruken av henvisning til andres arbeid (Grønmo, 2016).

3.3 Valg av metode

3.3.1 Kvalitativ metode

Det som kjennetegner kvalitative undersøkelser er at empirien blir samlet inn i de naturlige omgivelsene hvor forskningsdeltakerne befinner seg. Her prøver man å skape en dypere forståelse for det som undersøkes, der det fokuseres på det spesielle, ikke det generelle (Creswell, 2007). For at informantene skulle få være i de omgivelsene de vanligvis er i føltes det naturlig å intervjue dem på den skolen de er tilknyttet. Det er også vanlig å gjøre et lite utvalg av informanter, siden datamaterialet kan være stort og omfattende (Postholm & Jacobsen, 2011). Dette er grunnen til at jeg har valgt å intervjue fem elever og én lærer.

Kvalitativ metode skiller seg fra kvantitativ metode både når det gjelder datainnsamling og når det gjelder tolking av resultater. Den kvantitative metoden har en viss distanse mellom forskeren og informantene, mens kvalitative metoder prioriterer nærhet. Fleksibiliteten som følger av at datainnsamlingssituasjonen ikke er så fast strukturert på forhånd kan gjøre at forskeren får tilgang til kunnskap som ellers kunne vært vanskelig å få tak i. Ved datainnsamlingsmetoder som deltakende intervju eller ustrukturerte intervju kan forskeren selv utnytte sin fagkunnskap i innsamlingssituasjonen. Under strukturerte intervju og systematisk observasjon derimot, kan selve innsamlingen utføres av personer uten spesielt mye fagkunnskap, så lenge de er trente i hvordan innsamlingen skal foregå. I forbindelse med slike metoder er det i forkant av datainnsamlingen, og i etterkant når resultatene skal analyseres og tolkes, at forskerens fagkunnskaper er av betydning (Kleven, 2011). Siden jeg hadde delvis strukturerte intervju, fikk jeg bruk for fagkunnskapen min i matematikk. Elevene hadde mulighet til å spørre om hva de ville mens de jobbet med oppgavene, og det benyttet flere av elevene seg av. Jeg vil derfor si det var nødvendig at jeg hadde fagkunnskaper i matematikk, og da spesielt innenfor likninger.

I min oppgave har jeg valgt å ha individuelle intervju. Grunnen til dette er at jeg ønsket å identifisere den enkelte elevs strategier under arbeid med de ulike likningsoppgavene. Det er også en stor fordel at den som intervjues ikke trenger å ta hensyn til hvordan han eller hun fremstår for andre (Postholm & Jacobsen, 2011). En ulempe med individuelle intervju er derimot at det kommer frem svært mye informasjon i løpet av en samtale, at samtalene må være relativt korte og at man ikke har tid til å snakke med så mange (Postholm & Jacobsen, 2011). Å ha gruppeintervju ville også vært interessant. Jeg kunne da observert mer og elevene kunne kommet frem til et svar sammen, uten mine oppfølgingsspørsmål, men da hadde jeg ikke fått sett hver enkelt elevs løsningsprosess. Jeg hadde heller ikke fått høre tankerekken til hver elev gjennom oppgavene. I et gruppeintervju hadde jeg derimot fått sett hvordan ulike oppgaver diskuteres og utdypes, og det hadde nok fått frem andre refleksjoner og strategier. Å observere elever under arbeid med likninger i en undervisningssituasjon kunne også vært spennende. Ulempen med det er at jeg mister elevenes tanker, og gjerne muligheten til å stille spørsmål.

3.3.2 Intervju

Den metoden som blir mest brukt innenfor kvalitativ forskning er intervju, ifølge Thagaard (2018). Målet med et intervju er å få omfattende kunnskaper om hvordan andre mennesker opplever en situasjon, og hvilke perspektiver og synspunkter de har på intervjuets tema. Intervju fungerer godt for å få innsikt i erfaringer, tanker og følelser personer har (Thagaard, 2018). Hensikten er også å få fyldige beskrivelser, slik at man kan belyse problemstillingen fra flere sider (Johannessen et al., 2016). Strukturen er, ifølge Kvale og Brinkmann (2015), lik den dagligdagse samtalen, men som et profesjonelt intervju involverer det også en bestemt metode og måte å spørre på.

Det er flere måter å strukturere et intervju på. Thagaard (2018) skiller mellom lite strukturert, relativt strukturert og delvis strukturert, mens Postholm og Jacobsen (2011) skiller mellom det ustrukturerte, det semistrukturerte og det strukturerte intervjuet. Det typiske intervjuet er som regel basert på en delvis strukturert intervjuguide. Ved å bruke en delvis strukturert intervjuguide er temaene i hovedsak satt på forhånd, men rekkefølgen bestemmes underveis. I et slikt intervju kan vi både følge med på intervjupersonens fortelling, og samtidig sørge for at temaene som er viktige for forskningsspørsmålene blir belyst i samtalen. Strukturen er fleksibel og spørsmålene kan tilpasses underveis i intervjuet. Det kan også legges til spørsmål som ikke var planlagte på forhånd. Oppsummerende kan det sies at et kvalitativt forskningsintervju som er delvis strukturert er en samtale mellom forsker og informant, som styres av de temaene forskeren ønsker å ta opp, og de temaene informanten tar opp (Thagaard, 2018).

Maher og Sigley (2014) definerer et oppgavebasert intervju som et intervju der et subjekt eller en gruppe snakker samtidig som de jobber med en matematisk oppgave eller et sett med oppgaver. Jeg valgte å ha oppgavebaserte intervju for at jeg skulle få et datamateriale som kunne belyse mine forskningsspørsmål. Ved å bruke denne intervjuformen får man informasjon om elevers matematiske kunnskap og man får innsikt i hvordan de løser matematiske problemer (Maher & Sigley, 2014). Det viktigste i oppgavebaserte intervju er at oppgavene er nøye gjennomtenkt. Siden jeg ønsket å forske på elevers strategier i arbeid med likninger var det også viktig for meg å velge en datainnsamlingsmetode der informantene fikk mulighet til å både forklare og vise hva de tenkte.

Houssart og Evens (2011) sier at oppgavebaserte intervju kan gjennomføres på to ulike måter – sette og usette. De sette intervjuene innebærer at elevene diskuterer oppgaver de allerede har jobbet med før intervjuene, mens de usette intervjuene innebærer at oppgavene presenteres for første gang i intervjuene (Houssart & Evens, 2011). Selv om noen av oppgavene er hentet fra matematikkboken elevene brukte i 8. klasse, og det da kan være en mulighet at elevene har gjort oppgavene før, vil jeg betegne intervjuformen som usett. Jeg ønsket at elevene skulle ha en spontan tilnærming til oppgaveløsningen, og ville ikke at de skulle øve på oppgavene før intervjuet.

3.4 Beskrivelse av forskningsprosessen

3.4.1 Utvalg

Thagaard (2018) skriver at antall deltakere i kvalitative utvalg ikke bør være større enn at det er mulig å gjennomføre omfattende analyser, siden denne type analyser er både tid– og ressurskrevende. Tid og ressurser setter altså begrensninger for størrelsen på utvalget. Utvalget kan betraktes som tilstrekkelig stort når vi kommer frem til at studier av flere personer ikke gir ytterligere forståelse av det som blir studert (Thagaard, 2018).

Mitt utvalg bestod av fem elever i 9. klasse, og deres matematikklærer. Jeg ønsket en lærer med lang erfaring innenfor algebra, og da spesielt innenfor likninger. Når det kom til elever, ønsket jeg variasjonsbredde. Det vil si at man velger elever som representerer hele spekteret i klassen (Postholm & Jacobsen, 2011). På grunn av at fokuset mitt er på elever, valgte jeg å kun intervjue én lærer. Et poeng i elevintervjuene var at elevene ligger på ulike nivåer i matematikk. Siden det finnes elever på ulike nivåer i alle klasser, så jeg ikke behovet for å hente elever fra ulike skoler. Jeg valgte derfor å kun bruke elever fra én klasse.

Grunnen til at jeg ønsket å intervjue elever i 9. klasse var at jeg fikk vite av læreren jeg intervjuet at elevene på denne skolen hadde vært gjennom likninger i 8. klasse. Læreren fortalte også at det var et helt år siden elevene sist jobbet med likninger. De hadde da så smått blitt undervist om det jeg ønsket at elevene skulle ha vært gjennom. I tillegg fikk jeg vite at elevene bruker matematikkboken Maximum, som ikke har lagt opp til noen kapitler om likninger på 9. trinn. Ifølge læreboken hadde elevene altså forutsetninger til å klare oppgavene de fikk under intervjuene, selv om læreren mente at de mest sannsynlig ikke kom til å huske hvordan.

Læreren uttrykte i intervjuet at elevene ikke har nok kunnskap etter 7. klasse. Hun mener at noen av elevene nesten er blanke i matematikk når de starter i 8. klasse, og at de ikke kan det mest grunnleggende. Det er mange som sliter med multiplikasjon, og enda flere som sliter med divisjon. Læreren sier også at man nå i den nye læreplanen stort sett skal gjøre seg ferdig med emner på hvert av årstrinnene. Hun sier da at man gjør seg ferdig med algebra og likninger på 8. trinn. På grunn av det store pensumet, og at elevene mangler så mye basiskunnskap, føler hun at det ikke blir dybdelæring, men mer overfladisk læring. Hun ser også fordelen det hadde vært med å kunne hente emner opp igjen, for at det skal sitte bedre og for å utvikle forståelsen.

Informantene mine har jeg valgt å kalle Arve, Ronja, Stian, Marit og Bjarne. Arve er den som husker mest fra likninger. Han er også den eneste som sier i intervjuet at likninger er spennende. Det er også han som gjennomfører pilotintervjuet, og han blir så fort ferdig at han får ekstraoppgaver. For Ronja stopper det mer opp. Hun husker ikke hvordan man løser en likning, og det virker som om hun gjetter mye. Selv om hun får tips og hjelp gjennom oppgavene ser det ikke ut som hun forstår, for når hun skal gjøre neste oppgave sitter hun fast igjen. Om oppgavene sier hun at oppgavene med brøk og parenteser var tunge, men at resten av oppgavene gikk greit. Stian er klar for en utfordring. Han er selv klar over at han ikke liker bokstaver i matematikk, og prøver å unngå bokstavene mest mulig. Han ønsker tid til å tenke selv før intervjuer kommer med tips eller kommentarer. Etter hvert som han løser oppgavene ser han mer og mer nytten av likninger. Marit er rolig og konsentrert. Hun husker ikke helt hvordan man løser likninger først, men når hun har fått tips en gang vet hun hvordan hun skal gjøre det i de neste oppgavene også. Mye av regningen skjer kun i hodet hennes, og hun skriver lite på oppgavearket. Hun kommer likevel frem til riktig svar ganske på egenhånd. Når Bjarne kommer inn til intervjuer sier han: «er det her de vanskelige oppgavene er?». Han kommer da inn til en oppfatning om at han skal løse vanskelige likninger. Søken etter tips og hjelp er der, og han trenger ofte bekreftelse på at det han gjør er riktig. Han har forståelse for deler av likningen, men samtidig ikke helt. Selv om han akkurat har løst en likning trenger han tips om å gjøre det samme på begge sider, og hva som skal gjøres.

Siden jeg systematisk valgte personer med egenskaper eller kvalifikasjoner som var strategiske i forhold til min problemstilling, kan vi kalle det et strategisk utvalg (Thagaard, 2018). Utgangspunktet for å velge ut informanter i kvalitative undersøkelser er ikke representative, men hensiktsmessige (Christoffersen & Johannessen, 2012). Dersom målgruppen er homogen trengs det færre informanter enn hvis målgruppen er heterogen (Christoffersen & Johannessen, 2012). På grunn av at elevene var fra samme klasse kan vi si at utvalget er homogent, men når elevene har ulik matematisk kompetanse er det et heterogent trekk. Det er derfor usikkert i hvor stor grad det ble nådd metning i denne studien.

I kombinasjon med at jeg valgte strategisk utvalg, brukte jeg snøballmetoden ved at jeg kontaktet en lærer og ba henne hjelpe meg å finne elever. Snøballmetoden går ut på at jeg velger en informant, og at den informanten igjen hjelper meg med å finne andre informanter som har egenskaper eller kvalifikasjoner relevante for min problemstilling (Thagaard, 2018).

For å få tak i informanter kontaktet jeg en lærer fra en av UiS sine praksisskoler. Hun har lang erfaring fra skolen og har undervist i algebra og likninger i mange år. Jeg spurte om hun var interessert i å delta i studien min, og sendte henne informasjonsskriv og samtykkeskjema. I tillegg til at hun hadde lyst å delta, valgte hun ut fem elever som også var villige til å delta i studien. Mine eneste kriterier til elevene var at de skulle gå i 9. klasse, ha vært gjennom undervisning om likninger og at elevene var på ulike nivåer i matematikk. Informasjonsskriv og samtykkeskjema ble også sendt hjem til foreldrene til de elevene som skulle delta. Dersom elever er under 15 år må det innhentes samtykke fra foreldre, og siden de i 9. klasse kan være under 15 år valgte jeg å få samtykke fra foreldrene til alle de fem elevene (NESH, 2016).

3.4.2 Utarbeidelse av intervjuguide

Ifølge Postholm og Jacobsen (2011) er det viktig at intervjueren lager en liste over tema som skal bli tatt opp under intervjuet, spesielt hvis det er et halvstrukturert intervju. Denne listen trenger ikke ha spesifikke spørsmål som skal stilles i en viss rekkefølge, men bør ha en oversikt over hvilke tema man bør komme inn på. Kvale og Brinkmann (2015) sier også at det i semistrukturerte intervjuer vil være naturlig å lage seg en oversikt over aktuelle emner, og eventuelt lage forslag til spørsmål.

Mine intervjuguider ble utformet basert på mitt teoretiske grunnlag, og mine forskningsspørsmål. Lærerintervjuet beregnet jeg til en time, der jeg hadde seks kategorier med flere spørsmål tilhørende hver kategori. Siden fokuset mitt er på elever ønsket jeg å høre hva læreren tenker om blant annet elevers muligheter, utfordringer, strategier og ferdigheter.

Til elevintervjuene beregnet jeg 35 minutter. Elevene fikk fem oppgaver, der den første oppgaven hadde seks deloppgaver. Det var både oppstilte likninger og tekstoppgaver. Jeg har sett på mange ulike oppgaver som jeg vurderte å gi elevene, både i matematikkbøker og i andre masteroppgaver. Til slutt landet jeg på fire oppgaver fra matematikkboken Maximum for 8. trinn (Tofteberg et al., 2020), og to oppgaver jeg fant i Olav Dalsegg Tokles (2020) masteroppgave. Jeg ønsket varierte oppgaver, slik at jeg fikk se litt større bredde i løsningsstrategier. Noen elever klarer seg best når det er oppstilte likninger, mens andre elever tar tekstoppgaver fortere.

3.4.3 Gjennomføring av intervju

Før jeg gjennomførte intervjuene hadde både lærer og elever fått informasjonsskriv (vedlegg 2) og hadde signert samtykkeskjema. I informasjonsskrivet hadde informantene fått informasjon om blant annet formål, hva det innebærer å delta, at det er frivillig å delta, personvern og rettigheter. Lærerintervjuet varte i 52 minutter, og elevintervjuene varte fra 22 til 39 minutter. Noen elever løste oppgavene med en gang, mens andre elever trengte mer hjelp, og lenger tid til å tenke.

For å kunne gjengi informasjon så korrekt som mulig valgte jeg å bruke lydopptak både under lærer– og elevintervjuene. I tillegg brukte jeg video–opptak under elevintervjuene. Ved å bruke lydopptak kunne jeg konsentrere meg om intervjuets emne og dynamikk. En annen fordel med å bruke lydopptak var at jeg kunne spille det av flere ganger, og høre på ordbruk, pauser og tonefall (Kvale & Brinkmann, 2015). Grunnen til at jeg valgte å bruke video–opptak i tillegg til lydopptak i elevintervjuene var at jeg ønsket å se hvordan elevene løste oppgavene, og hva de skrev mens de snakket. Jeg har ikke tatt opp ansiktet til elevene, kun hva de skriver på arket.

Intervjuene foregikk på skolen der læreren og elevene holder til. Der fikk vi et grupperom som jeg hadde disponibelt så lenge som jeg trengte det. Jeg gjennomførte alle intervjuene på én dag. Lærerintervjuet ble gjennomført først, og deretter de fem elevintervjuene. Da jeg ankom skolen på intervjudagen, var planen å gjennomføre lærerintervjuet og minst ett elevintervju. Jeg ville ha et pilotintervju for å se om oppgavene var for enkle, for vanskelige, eller om noe burde endres. Etter at pilotintervjuet var gjennomført følte jeg at det ikke var nødvendig med noen justeringer, og jeg bestemte meg så for å gjennomføre de fire andre elevintervjuene samme dag. Siden eleven som utførte pilotintervjuet ble så fort ferdig med oppgavene på oppgavearket, fikk denne eleven enda flere oppstilte likninger som jeg hadde klare. I de andre intervjuene var det ikke behov for å gi disse ekstraoppgavene, enten på grunn av tidsbruk eller fordi jeg hadde sett og hørt mye av hvordan de løste de andre oppgavene.

Til lærerintervjuet var det laget en intervjuguide (vedlegg 3) som ble godt brukt. Jeg stilte ikke så mange spørsmål utenfor intervjuguiden, men informanten fikk snakke helt fritt. Under elevintervjuene (vedlegg 4) hadde jeg tre innledende spørsmål, og tre avslutningsspørsmål.

Mellom spørsmålene fikk elevene fem oppgaver de skulle løse. Under oppgavene måtte jeg vurdere når det var naturlig å stille elevene spørsmål. Jeg svarte når de lurte på noe, og stilte spørsmål dersom de satt fast eller om det var noe jeg lurte på. Jeg hadde altså ikke noen faste spørsmål når elevene arbeidet med oppgaver. Jeg holdt også dialogen i gang ved hjelp av et lite «nikk», «mm» eller en pause som viste at informanten skulle fortsette (Postholm og Jacobsen, 2011).

3.5 Analysering av datamaterialet

3.5.1 Transkribering

Intervjusamtalene blir strukturert slik at de egner seg bedre for analyse når de transkriberes fra muntlig til skriftlig form. Materialet blir lettere å få oversikt over, og struktureringen i seg selv er en begynnelse på analysen (Kvale & Brinkmann, 2015).

Ifølge Kvale og Brinkmann (2015) kan man stille seg selv mange spørsmål i transkripsjonsfasen. Bør man transkribere uttalelsene ordrett, ord for ord med alle gjentakelser og ta med alle «eh» –er, eller bør intervjuet omformes til en mer formell, skriftlig stil? Hva med pauser, intonasjonsmessige understrekinger og følelsesuttrykk som sukk og latter? Dersom pausene skal med, hvor mange detaljer skal man ta med? Svarene vil avhenge av hva transkripsjonen skal brukes til, og det finnes ingen korrekte standardsvar på slike spørsmål (Kvale & Brinkmann, 2015).

Da intervjuene var gjennomførte overførte jeg lyd– og video–opptakene til en passordbeskyttet minnepenn som kun jeg har tilgang til. Disse opptakene blir slettet når masteroppgaven er godkjent. Når jeg skulle transkribere intervjuene la jeg lydfilene inn i NVivo. I dette programmet transkriberte jeg alle intervjuene. Jeg har transkribert på normalisert bokmål, og har skrevet det litt om til en mer skriftlig enn muntlig form. Jeg har tatt med «eh» noen ganger der de var veldig lange og tydelige, men har ikke tatt med sukk, latter eller pauser. Grunnen til at jeg har valgt å gjøre det på denne måten er at jeg ønsker å konsentrere meg om innholdet i hva elevene sier, og synes ikke det er hensiktsmessig å ta med latter, sukk og pauser.

Gjennom en masteroppgave er det mange forskningsetiske ting å tenke på, og dette gjelder også i en transkripsjonsprosess. For å skjule informantenes identitet kan det være hensiktsmessig å allerede på transkripsjonsstadiet lage fiktive navn eller kalle dem for tall eller bokstaver. Ifølge Kvale og Brinkmann (2015) kan enkelte informanter kanskje få sjokk som konsekvens av å lese sine egne intervjuer. Dersom intervju er ordrett transkribert til det muntlige språket kan det fremstå som usammenhengende og forvirrende tale, som kan indikere et svakt intellektuelt nivå. Det kan da hende at informanten blir fornærmet, nekter videre samarbeid og forbyr forskeren å bruke dens uttalelser. Det kan derfor være hensiktsmessig å gjengi uttalelsene på en mer sammenhengende måte dersom transkripsjonene skal sendes tilbake til informantene. Om ikke dette lar seg gjøre kan det være nyttig å legge ved informasjon om de naturlige forskjellene mellom det skriftlige og det muntlige språket (Kvale & Brinkmann, 2015).

3.5.2 Analyse

På grunn av all informasjonen som har blitt samlet inn, kan et kvalitativt datamateriale virke overveldende og uoversiktlig. I en analyse ønsker man å trekke ut det som er viktig for sin undersøkelse, og å lage et system som gjør datamaterialet mer oversiktlig (Postholm & Jacobsen, 2011). For at jeg skulle få oversikt over hvordan de ulike elevene hadde løst oppgavene laget jeg en tabell for meg selv. Der skrev jeg inn oppgavenummer, navn, strategi og tidsbruk. Ved å gjøre dette fikk jeg sett på hvordan hver elev hadde løst samme oppgave. Ut fra dette identifiserte jeg elevenes strategier.

Før jeg hadde analysert datamaterialet grundig var planen at jeg kunne velge ut én elev på hver oppgave, som hadde en litt annen strategi enn de andre elevene. Planen var også at de andre elevene da hadde brukt de samme strategiene. Etter hvert som jeg analyserte oppgavene identifiserte jeg mer enn to løsningsmetoder på hver oppgave. Det var derfor ikke mulig å generalisere og kun trekke ut én elev på hver oppgave.

Jeg bestemte meg derfor for å se nøye på hvilke strategier de ulike elevene hadde brukt på hver oppgave, og skrive resultatdelen oppgave for oppgave. Det ble identifisert hva som var løst på samme måte, og hvor elevene hadde sine egne strategier. Jeg trakk da frem de elevene som hadde egne strategier, og kombinerte de elevene som hadde like fremgangsmåter. Samtidig som jeg trakk frem elevenes strategier og fremgangsmåter tenkte jeg på hva både de og læreren hadde svart i intervjuene, og flettet dette inn der det passet.

3.6 Studiens kvalitet

Det kan stilles spørsmål til validitet og reliabilitet i intervjuprosessen i kvalitative studier. Ifølge Thagaard (2018) handler validitet om gyldigheten av de resultatene man kommer frem til, og hvordan man tolker disse. Reliabilitet handler om hvor pålitelig forskningen er.

3.6.1 Validitet

For at forskningsprosessen min skulle bli transparent har jeg fokusert på å beskrive valgene jeg har tatt, så nøye som mulig (Thagaard, 2018). Ved nøyaktig å introdusere metoden for forskningsprosessen, har leserne mulighet til å forstå prosessen i dybden fra begynnelse til slutt. På denne måten kan leserne selv vurdere funn og resultat, og i tillegg vurdere innholdet i studien. Ifølge Thagaard (2018) kan vi presisere begrepet validitet ved å stille spørsmål om de tolkningene vi kommer frem til er gyldige i forhold til virkeligheten vi har studert. Det at jeg selv har analysert hele datamaterialet kan være med på å redusere validiteten. Dersom det var flere elever involvert i studien kunne nok også resultatet sett annerledes ut.

Creswell og Miller (2000) sier at utvalget må være passende med studiens formål, og må bestå av informanter som har kunnskap om temaet og informanter som kan representere utvalget, for å sikre validitet i studien. Ut fra forskningsspørsmålene mine må utvalget bestå av elever som kan vise hvilke utfordringer og muligheter de har når de arbeider med likninger, i tillegg til at de må vise strategiene de bruker når de løser likninger. De fem elevene jeg intervjuet har vært gjennom likninger før og viste både hva som var utfordringer og muligheter, samtidig som de viste hvordan de kom frem til svarene. I tillegg til dette var elevene også på ulike nivåer i matematikk. Dette gjør at disse elevene kan være representanter for utvalget. For å støtte opp om elevenes svar, og for å få vite litt mer om elevene og undervisningen intervjuet jeg også en lærer.

3.6.2 Reliabilitet

Hvilke data som brukes, måten de samles inn på og hvordan de bearbeides knyttes til reliabilitet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Reliabilitet har med troverdighet å gjøre, og behandles ofte i sammenheng med spørsmålet om hvorvidt et resultat kan bli reprodusert av andre forskere på andre tidspunkt, altså om informantene ville ha endret svarene sine i intervju med en andre forskere (Kvale & Brinkmann, 2015).

Min rolle som forsker vil være viktig for studiens kvalitet. Hvordan oppfører jeg meg når jeg intervjuer? Er spørsmålene jeg stiller for ledende? Siden jeg er ny som forsker kan det være en svakhet for studiens pålitelighet. At jeg gjennomførte pilotintervju både for å øve meg på intervjusituasjonen og for å se om oppgavene dekket det jeg var ute etter å finne ut kan derimot gjøre studien mer pålitelig. Ved å bruke lyd– og video–opptak kan også reliabiliteten styrkes, siden det ikke gir rom for tolkning av forskerens egne notater (Thagaard, 2018). Selv om en oppgave har god reliabilitet er det derimot ingen garanti for at data er pålitelige når det kommer til andre feilkilder (Kleven, 2011).

3.6.3 Kritikk av metode

Når man intervjuer elever kan det være lurt å tenke gjennom reliabilitetsspørsmålene Kleven (2011, s. 90–91) kommer med:

1. I hvilken grad er resultatet avhengig av tilfeldige dag–til–dag–svingninger i personens opplevelse av trivsel?
2. I hvilken grad er resultatet avhengig av hvilke konkrete spørsmål som stilles?
3. I hvilken grad er resultatet avhengig av hvem som tolker de svarene eleven gir?

Hvilket humør elevene er i den dagen de intervjues kan påvirke svarene de gir. Det kan hende det akkurat har skjedd noe som gjør at elevene ikke er i humør til å jobbe med oppgaver om likninger. Et annet tilfelle kan være at elevene egentlig er glade i å løse likninger, men at den siste opplevelsen med likninger ikke var positiv, som fører til at elevene er negative til det.

Hvilken måte spørsmål stilles på kan også være med på å påvirke svar. Elevene kan misforstå hva spørsmålet er, eller de kan gjette seg til hva svaret skal være (Kleven, 2011). For å unngå at elevene gjettet seg frem til svaret prøvde jeg å stille oppfølgingsspørsmål som «hvorfor det?» eller «hvordan vet du det?». Jeg var også tydelig på at dersom det var noe elevene lurte på så måtte de spørre. Men det er alltid muligheter for at elevene misforstår, eller at jeg ikke har stilt tydelige nok spørsmål.

Det hadde vært interessant å se om resultatene hadde vært annerledes dersom det hadde vært en annen som tolket og analyserte dem. Siden jeg har både intervjuet og analysert resultatene er det kun mitt syn som kommer frem. Om en annen hadde analysert intervjuene jeg gjennomførte kan det hende den hadde sett noe annet.

Det er alltid lurt å prøve å tenke seg til hvilke feilkilder som kan ha påvirket dataen jeg har samlet inn. Det er ikke mulig å få et sikkert svar på disse tre spørsmålene, men det er mulig å estimere graden av reliabilitet (Kleven, 2011).

Innenfor utdanningsforskning kan det være store utfordringer med å få tilgang til informanter (Christoffersen & Johannessen, 2012). At læreren jeg intervjuet skaffet meg informanter kan ha både positiv og negativ effekt på min innsamling av data, og jeg valgte derfor å gi læreren noen krav til hvilke elever jeg ønsket. Siden læreren har kjennskap til elevene kunne hun velge ut elever som lå på ulike nivåer i matematikk. Jeg ønsket dette for å se på muligheter, utfordringer og strategier uavhengig om elevene hadde høy eller lav karakter i matematikk.

Jeg valgte å intervjue fem elever på grunn av tiden jeg hadde til rådighet, og på grunn av størrelsen på oppgaven. Om jeg hadde hatt flere informanter kunne det kanskje ha vært med på å styrke oppgaven. På den andre siden mener jeg at fem elever er nok for å få svar på forskningsspørsmålene mine. Thagaard (2018) skriver også at antall deltakere i kvalitative utvalg ikke bør være større enn at det er mulig å gjennomføre omfattende analyser.

Det er nok flere ting i denne oppgaven jeg kunne gjort annerledes, og som også kunne resultert i andre, og gjerne mer omfattende resultat. Valg av oppgaver har stor betydning, og jeg tror blant annet at jeg kunne fått sett andre muligheter, utfordringer og strategier elevene har under arbeid med likninger dersom jeg hadde valgt andre oppgaver. Når elevene løste oppgavene ønsket jeg å se hva som skulle til for at alle elevene skulle komme i mål. På grunn av dette stilte jeg mange spørsmål, og noen av dem var nok litt ledende. Jeg tror derfor at jeg hadde fått sett noe annet dersom jeg bare observerte og hørte på elevenes refleksjoner, uten å stille noen spørsmål selv. Samtidig tror jeg at mange av elevene hadde stått fast og ikke kommet i mål med oppgavene. Jeg lærte mye omkring deres strategier ved å bruke delvis strukturerte intervju.

3.7 Forskningsetiske vurderinger

Det etikk i hovedsak dreier seg om er forholdet mellom mennesker, og spørsmålet om hva vi kan og ikke kan gjøre mot hverandre (Johannessen et al., 2016). I en forskningsprosess er det spesielt tre typer hensyn en forsker må tenke gjennom. Det er informantens rett til selvbestemmelse og autonomi, forskerens plikt til å respektere informantens privatliv og forskerens ansvar for å unngå skade (Johannessen et al., 2016). Både Kvale og Brinkmann (2015) og Thagaard (2018) presenterer etiske usikkerhetsområder innenfor intervjuforskning, som normalt dekkes av etiske retningslinjer. Disse områdene er informert samtykke, konfidensialitet og konsekvenser av å delta.

3.7.1 Informert samtykke

«Når forskningen omhandler personopplysninger, må forskeren både informere og innhente samtykke fra dem som deltar i forskningen eller er gjenstand for forskning. Samtykket må være fritt, informert og uttrykkelig» (NESH, 2016, s. 14). Samtykket skal baseres på informasjon informantene har fått om studiens formål, metode, risiko, mulig ubehag og andre konsekvenser som kan ha betydning for dem (NESH, 2016). Å ha et informert samtykke betyr også at man sikrer seg frivillig deltakelse, og informerer dem om deres rett til å trekke seg når som helst (Kvale & Brinkmann, 2015).

I forkant av intervjuene sendte jeg ut informasjonsskriv til informantene. Jeg brukte Norsk senter for forskningsdata (NSD) sin mal for informasjonsskriv, og informantene fikk blant annet informasjon om formål med studien, hvem som er ansvarlige, hvorfor de får spørsmål om å delta, hva det innebærer å delta, personvern og rettigheter. I tillegg til informasjonsskrivet fikk både lærer og elever samtykkeskjema som måtte signeres før intervjuene ble gjennomført. Som hovedregel kan mindreårige som har fylt 15 år selv samtykke til at forskeren kan hente og bruke deres egne personopplysninger, men siden elevene jeg intervjuet går i 9. klasse og da kan være 14 eller 15 år valgte jeg å få foresatte til å signere samtykkeskjemaene (NESH, 2016).

3.7.2 Konfidensialitet

Prinsippet om konfidensialitet refererer både til at deltakerne anonymiseres i presentasjon av resultatene, og til at opplysninger om identifiserbare enkeltpersoner lagres på en forsvarlig måte (Thagaard, 2018). Informantene skal kunne delta med visshet om at det ikke kommer ut informasjon som kan tilbakeføres til dem (Johannessen et al., 2016). Ifølge Thagaard (2018) skal ikke informantenes navn eller andre identifiserbare opplysninger forekomme på forskerens datamaskin. Jeg har ikke navnene til informantene mine lagret noen andre plasser enn i samtykkeskjemaene, som er i papirformat. I transkripsjonene jeg har lagret på datamaskinen min har jeg nummerert elevene, slik at ingen andre enn jeg vet hvem som er hvem. Lyd– og video–opptakene har jeg lagret på en passordbeskyttet minnepenn, og heller ikke der står det navn på informantene. Jeg kommer ikke til å opplyse om hvem informantene mine er, eller hvilken skole jeg har forsket på. Det jeg vil si om mine informanter er at det er elever i 9. klasse, som går i samme klasse, og deres matematikklærer. Dette vil jeg informere om siden det er relevant for oppgaven min.

Thagaard (2018) skriver at man må bruke pseudonymer eller kodenummer når man transkriberer intervjuer, for å beskytte informantenes privatliv. Informantene mine ble tildelt fiktive navn og kjønn i selve oppgaven, og jeg har valgt å kalle dem Arve, Ronja, Stian, Marit og Bjarne. Siden kjønn ikke har noen betydning for min analyse er denne tildelingen tilfeldig.

3.7.3 Konsekvenser av å delta

Ifølge NESH (2016) har forskeren ansvar for å unngå at informantene blir utsatt for alvorlig skade eller andre alvorlige eller urimelige belastninger som følger av forskningen. De som deltar i studien skal altså ikke utsettes for hverken fysisk eller psykisk skade, eller belastninger som en konsekvens av deltakelsen. Forskeren har ansvar for å handle ut fra en grunnleggende respekt for menneskeverdet (Thagaard, 2018). Jeg som forsker må også tenke på om det vil gi informantene større risker enn fordeler ved å delta i studien (Kvale & Brinkmann, 2015). I mine intervjuer har jeg ikke gått inn på noen personlige eller sensitive spørsmål, men det kan oppleves ulikt for hver enkelt. Jeg opplevde at alle informantene synes det var hyggelig å få bidra i studien min, og jeg håper alle satt igjen med en god følelse etter intervjuene. Spesielt for elevene tror jeg det føltes godt at de kom i mål med oppgavene, enten med eller uten tips.

3.7.4 Meldeplikt

Siden studien min behandler personopplysninger, er det meldepliktig. For forsknings– og studentprosjekter som gjennomføres ved universitet skal prosjektene meldes til NSD. Jeg måtte søke om tillatelse til å gjennomføre studien min ved å fylle inn informasjon i et skjema som er laget for dette formålet. NSD er personvernombud for min institusjon, og vurderte prosjektet mitt i forhold til gjeldende forskningsetiske regler (Thagaard, 2018). Grunnen til at studien min er meldepliktig er at jeg lagrer personopplysninger ved lyd– og video–opptak (Johannessen et al., 2016).

4 Resultat

I dette kapittelet vil jeg presentere hvordan elevene har løst et utvalg oppgaver fra de oppgavebaserte intervjuene. De første oppgavene som blir presenterte er oppstilte likninger. Jeg presenterer så hvordan elevene har gått fra tekstoppgave til oppstilt likning, og den siste oppgaven som blir presentert handler om hvilken verdi x har i et utsagn.

4.1 Oppgave 1a – Likning med ukjent på én side av likhetstegnet

$2x + 1 = 8 + 1$

Dette var den første oppgaven elevene fikk, og det var variert hvor mye elevene husket om hvordan man løser en likning. Læreren sa at det var et helt år siden elevene jobbet med likninger sist, og at de da fikk ganske lite innføring i likninger. Hun viste bekymring for om elevene har de basiskunnskapene de trenger for å løse likninger. Den største utfordringen, ifølge læreren, er at de ikke forstår likhetstegnet, og det at det skal være likt på begge sider. Det er også mange begrepsfattige elever, og det å trekke fra, legge til, multiplisere eller dividere på begge sider i en likning er også en stor utfordring. Hun mener de mangler forståelsen. Når det kommer til muligheter for læring i arbeid med likninger sa hun at elevene vil få bruk for likninger i mange ulike situasjoner. Hun sa også at de alltid vil få bruk for likninger, og det å kunne regne med likninger. Dersom de kan regne med likninger har de økt forståelse for matematikken videre.

Verken Ronja eller Bjarne husket hvordan man løser en likning, og fikk hjelp gjennom hele oppgaven. Arve trakk med en gang fra 1 på begge sider, dividerte så på 2 og fant ut at $x = 4$. Stian sa at han bare tok høyre side som var to tall og pluss, i stedet for å fokusere på den vanskelige delen. Han så da at høyre side ble 9, og forsto at da måtte $2x + 1$ også bli 9. Ut fra dette sa han at x skal være 4. Marit så også med en gang at høyre side av likningen ble 9, men hun lurte på om $2x + 1$ kunne bli til $3x$. Når hun fant ut at det ikke gikk fikk hun et tips om å samle x–ene på en side. Da husket hun hvordan hun skulle gjøre det, og løste likningen på samme måte som Arve.

4.2 Oppgave 1b – Likning med ukjent på begge sider av likhetstegnet

5x + 1 = 2x + 19

Både Arve og Marit tok oppgaven greit alene, og samlet x–ene på samme side, trakk fra 1, for så å dividere. For Arve gikk det litt fort frem, og han glemte å trekke fra 1 på høyre side, og stod da igjen med 3x = 19. Han tenkte ikke noe mer over det og fant ut at x ble 6,3. Marit gjorde mange av regnestykkene i hodet uten å skrive dem ned på arket. Det eneste hun skrev på denne oppgaven var 3x = 18 og x = 6. Hun trakk altså fra 1 og 2x på begge sider uten å skrive det ned. Når Ronja så oppgaven, fikk hun også en tanke om hvordan hun ville gjøre det.

Intervjuer:	Hva tenker du at du må gjøre her?
Ronja:	Ehm, ta fem x minus en, og så må jeg ta to x minus en på begge sider
Intervjuer:	Hvorfor vil du ta minus en på begge sider?
Ronja:	Ehm, fordi vi gjorde det i forrige oppgaven og så vet jeg ikke helt hvordan vi skal gjøre det annerledes
Intervjuer:	Vet du hvorfor vi gjorde det i forrige oppgave?
Ronja:	For at vi skulle få x–en på, stå alene

Her ser vi at Ronja ønsket å trekke fra 1 på begge sider av likningen, siden det var det som ble gjort i den forrige oppgaven. Når Ronja trakk fra 1 på begge sider stod hun igjen med 5x = 18 + 2x. Da lurte hun på om hun skulle dividere med 2, siden det også ble gjort i den forrige oppgaven. Gjennom resten av oppgaven stilte intervjuer ledende spørsmål, som Ronja av og til svarte riktig på, og av og til ikke. Hun ble også fortalt når det skal skrives likhetstegn, og hva som skal stå på hver side av likhetstegnet. Når hun kom frem til at man har 3x på den ene siden og 18 på den andre siden, stilte hun spørsmål til at det skulle settes lik hverandre. For å få x alene ønsket hun å ta 18 – 18, men så foreslo intervjuer å heller dividere, og da kom hun frem til at $\frac{18}{3}$ = 6. Her er løsningen til Ronja på denne likningen:

$5x+1 \quad 2x-1+19$

$5x = 18 + 2x$

$2x - 2x + 18 \quad 5x - 2x$

$= 18 = 3x \quad 18 : 3 = 6$

$x = 6$

For at Stian skulle forstå oppgaven bedre skrev han den opp på ny, da med multiplikasjonstegn mellom tall og x–er, altså f.eks. 5 · x i stedet for 5x. Dette gjorde han med alle regnestykker som inneholdt et tall multiplisert med x. Han husket ikke hvordan man løser en oppstilt likning slik som dette, og fikk tips om å få x–ene alene på den ene siden, for så å starte med å trekke fra 2x på begge sider. Etter en forklaring på hvorfor 5x – 2x = 3x og ikke bare 3, gikk han videre til å trekke fra 1 på begge sider. Han stod igjen med 3x = 18 og sa at han måtte dividere med 3 for å få x alene.

4.3 Oppgave 1d – Likning med parentes

25(x–1) = 2x + 90

Ronja, Marit og Arve visste at det første de måtte gjøre i denne oppgaven var å løse opp parentesen, men det var kun Marit som visste hvordan, uten å få hint. Bjarne foreslo å først trekke fra eller legge til 1, siden det var et ettall i likningen og Stian foreslo å trekke fra 25 på begge sider.

Marit var den som løste denne oppgaven på kortest tid. Hun kom fort frem til at venstre side ble 25x – 25, trakk fra 2x og fikk 23x – 25 = 90. Hun ønsket så å trekke fra 25 på begge sider, men fikk noen hint om at det kanskje ikke skulle trekkes fra. Når Marit kom frem til at hun måtte legge til 25 på begge sider, kom hun fort frem til at 23x = 115, og at hun måtte dividere 115 på 23 for å finne ut hva x var. Marit regnet mesteparten i hodet, og dette var alt hun skrev på denne oppgaven:

$25x - 25 =$

$23x \qquad 23x = 115$

$\underline{115 : 23} = 5$

Når Ronja begynte på oppgaven sa hun altså at hun vil begynne med å regne ut parentesen først. Hun mente at x – 1 = – x. Hun fikk beskjed om at det ikke kan regnes ut på den måten, og hun sa at det var multiplikasjon mellom 25 og parentesen. Hun ønsket så å multiplisere 25 med x – 1 og fikk da 24x. Intervjuer kom så med en kommentar om at 25 må ganges med begge tall inne i parentesen, og da svarte Ronja: «Så jeg må gange det med x først og så minus x, nei minus en?». Hun kom etter hvert frem til at det ble 25x – 25.

Intervjuer: For hva står på venstre siden din nå?
Ronja: Ehm, tjuefem, nei nå står det minus tjuefem
Intervjuer: Hva mer?
Ronja: Minus tjuefem x
Intervjuer: Pluss eller minus tjuefem x?
Ronja: Minus
Intervjuer: Hvorfor står det minus?
Ronja: For du ganget det med minus en
Intervjuer: Du ganget bare tjuefem
Ronja: Å, ja, ja
Intervjuer: Men, du ganget tjuefem med x, hva fikk du da?
Ronja: Da fikk jeg tjuefem x, nei da fikk jeg bare tjuefem

Selv om Ronja kom frem til 25x – 25 var det ikke helt tydelig for henne hvordan. Videre ønsket intervjuer å få Ronja til å legge til 25 på begge sider, noe Ronja kom frem til etter å ha foreslått å trekke fra 24 eller å trekke fra 25.

Ronja: Minus tjuefem pluss tjuefem

Intervjuer: Ja. Er lik?

Ronja: Er lik x, nei null. Det er null

Intervjuer: Men hvis du skriver er lik det som står på den andre siden av likningen

Ronja: Er lik det?

Intervjuer: Det som står der, for det er det det er likt som

Ronja: Tjuefem x

Intervjuer: To x pluss nitti. Og så la du jo til tjuefem på den ene siden

Ronja: Så jeg skal skrive tjuefem her?

Etter denne sekvensen sa Ronja at hun stod igjen med 2x + 115, og prøvde litt forskjellig for å få x–ene på samme side. Etter en stund sa hun at hun faktisk ikke visste hvordan hun skulle gjøre det. Når intervjuer sa: «Jo, det er det vi har gjort her oppe, og på de andre oppgavene, for at du skal få det til å bli null, hva må du legge til da? Eller trekke fra» svarte Ronja: «da må jeg trekke fra to, slik?». Ved hjelp av noen ledende spørsmål kom hun frem til at hun stod igjen med 23x = 115, og kom selv frem til at man dividerer 115 med 23 for å finne ut hva x blir. Det viser både i det Ronja sa og i det hun skrev at det mangler forståelse for likhetstegnet, og hun trengte veldig ledende spørsmål for å komme frem til svarene.

$$25 \cdot x = 25x \cdot -1 = -25$$
$$25x - 25 + 25 = 2x + 90 + 25$$
$$2x + 115 = 25x$$
$$2x - 2x = x + 115 = 25x = 23x$$
$$23x = 115 = 5 \quad x = 5$$

Bjarne var den som brukte lengst tid på denne oppgaven. Han kom også frem til at x = 5 til slutt, men støtte på noen utfordringer underveis. Den første utfordringen han møtte på var at han ikke visste hva x–en var, når intervjuer spurte hva 25 multiplisert med x var. Han ble usikker og spurte hva man skriver når man ikke vet hva x er. Når Bjarne fikk beskjed om å multiplisere 25 med – 1 lurte han på hva som skjer når man multipliserer med et negativt tall.

Når intervjuer spurte hva han selv trodde, svarte han: «pluss, blir det ikke? Nei, det blir bare negativt igjen, blir det ikke?». Han spurte mye og så mye opp på intervjuer, for bekreftelse. Etter hvert kom det også spørsmål om hvilken av sidene det skulle legges til 25 på. Når intervjuer svarte at det skulle gjøres på begge sider, kom Bjarne selv frem til at han stod igjen med 25x – 25 + 25 = 2x + 90 + 25, og at det igjen ble til 25x = 2x + 115. For å få 2x bort fra høyre side ønsket han å dividere med 2, og lurte på hva han skulle gjøre når han fant ut at det var feil strategi. Selv om det ble foreslått å trekke fra 2x på begge sider, tok det litt tid før han var enig i det. Når han kom frem til 23x = 115 og skulle finne ut hva x var, foreslo han først å trekke fra 23, så legge til 23, og til slutt dividere med 23.

4.4 Oppgave 1e – Likning med y som ukjent

5y + 2 = 3y – 8

Siden Ronja brukte nesten ni minutter på oppgave 1d, og jeg hadde satt intervjuet til å vare i 35 minutter valgte jeg å la henne hoppe over oppgave 1e og 1f. Spørsmålene på de andre oppgavene var også såpass ledende, og jeg tenkte det var demotiverende for henne å fortsette med disse oppstilte likningene. Jeg hadde allerede fått sett hvordan hun arbeidet med slike oppgaver. Det alle de andre elevene gjorde til felles på denne oppgaven var at de blandet x og y, i varierende grad.

Stian var den som tok denne oppgaven raskest, og startet med å trekke bort 3y fra begge sider. Han stod da igjen med – 8 på høyre side og 2y + 2 på venstre side. Han ønsket så å trekke fra 2 på begge sider, slik at det ble en tier på høyre side. Det kom så frem at «da er, eh, nei, ikke x, y er lik minus fem». Arve hadde en litt annen fremgangsmåte.

Arve:	Ehm, da vil jeg ta her eh fem y pluss to, minus to på begge sider. Nei, jeg gjør ikke det. (Visker). Okei, vi har fem y pluss to, og så da tar jeg da minus, nei, det går jo ikke (visker), jeg tar pluss. Pluss to og minus to, så får nullet det ut, så har jeg tre y minus åtte minus to, så da blir det en parentes der da tror jeg. Da blir det fem y er lik tre y minus seks, går det an?
Intervjuer:	Skal vi se, det er minus åtte minus to
Arve:	Så tar jeg en parentes her så blir det tre y minus seks?
Intervjuer:	Mm, nei, for det er fortsatt bare minus fremfor åttetallet, for du trenger ikke ha parentes der

Arve: Okei, så da blir det uten parentes, som i tre y minus seks?

Intervjuer: Minus ti

Arve: Minus ti?

Intervjuer: For det er minus åtte og så er det minus to i tillegg

Arve: Å, ja, da plusser du på ja

Arve brukte litt tid i starten av oppgaven på å finne ut om han skulle legge til eller trekke fra 2. Når han hadde 5y + 2 – 2 = 3y – 8 – 2 ønsket han å sette en parentes rundt (8 – 2) slik at det ble –6. Når intervjuer sa at han ikke trengte parentes rundt, fjernet han parentesene og stod igjen med 5y + 2 – 2 = 3y – 8 – 2. Han skrev fortsatt 5y = 3y – 6 på neste linje. Når intervjuer sa at det var minus åtte og i tillegg minus to endret han tegnet mellom 8 og 2 til pluss, slik at han endet opp med 5y + 2 – 2 = 3y – 8 + 2 på den øverste linjen, og endret den neste linjen til å bli 5y = 3y – 10. Videre trakk han fra 3y på begge sider, dividerte med 2 og stod igjen med x = – 5. Intervjuer spurte om det var noen forskjell på å bruke x eller y, og da svarte han: «å, ja, nei det», og så visket han ut hva han hadde skrevet. Han sa så: «skal skrive y der siden jeg brukte den, bare en vane å bruke x».

Det var ikke bare Arve som fikk – 8 – 2 til å bli – 6. Det gjorde også Marit og Bjarne. Når intervjuer sa: «hvis du har – 8 – 2», sa begge to at det ble – 10. I starten av oppgaven lurte også Bjarne på om y–en var x, og ønsket å omtale y–en som det. Han lurte også på hvordan man regner med y.

Bjarne: Ja, slik ja. Og nå er vi på y–er også. Okei, okei. Fem y pluss to er lik tre y minus åtte, så, hvordan skal man starte dette her? Fem y pluss to det blir. y–en er x, sant? Ja, det er bare annerledes skrevet. Sier bare x på den fremdeles. Fem x pluss to blir vel, det er ikke noe blir vel, men som er lik tre x minus åtte. Hva er y?

Intervjuer: y er bare en ukjent som du må regne med

Bjarne: y er ukjent ja, det er x. Hvordan er det jeg skal starte dette her igjen?

Videre gjennom oppgaven stilte Bjarne mange spørsmål, så mye opp og ønsket bekreftelse på at det han gjorde var riktig.

4.5 Oppgave 1f – Likning med brøk

$$\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4}x + 3$$

Alle elevene, bortsett fra Ronja, arbeidet med denne oppgaven, og de løste den på ulike måter. Jeg vil derfor vise hvilke strategier de ulike elevene brukte i denne oppgaven.

Det første Marit tenkte når hun så oppgaven var at hun vil utvide brøken til åttendedeler. Men det første hun gjorde var å trekke fra 1 på begge sider, slik at hun stod igjen med $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x + 2$. Hun tenkte på hvordan hun skulle fjerne den ene brøken, og var klar over at hun måtte gjøre det samme på begge sider. Hun bestemte seg for å få fellesnevner på brøkene og utvidet til $\frac{4}{8}x = \frac{2}{4}x + 2$. For å komme videre fikk hun tips om å samle x–ene på en side.

Intervjuer: Men hvis du vil samle x–ene dine på en side

Marit: Mhm

Intervjuer: Hva må du gjøre da?

Marit: Jeg kan flytte den over der

Intervjuer: Hvordan gjør du det?

Marit: Da må jeg plusse den

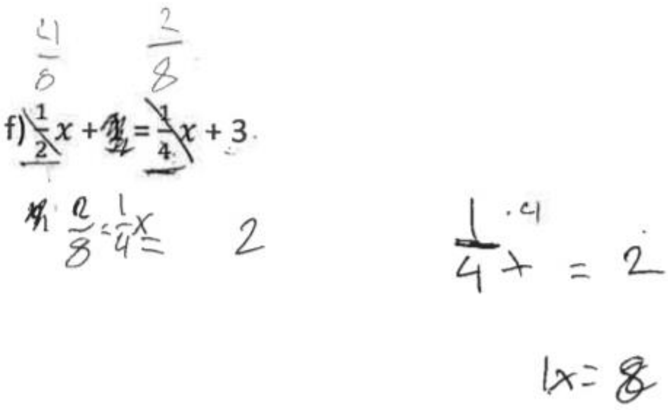
Intervjuer: Er den negativ?

Marit: Den er ikke negativ

Intervjuer: Så hvis du skal fjerne den fra den siden, må du pluss eller minus da?

Marit: Minus på den siden også

Hun fant ut at hvis hun trakk fra $\frac{2}{8}x$ på begge sider så stod hun igjen med $\frac{2}{8}x = 2$, og det er det samme som $\frac{1}{4}x = 2$. Når intervjuer spurte hvordan hun nå kunne få x alene, foreslo hun å gjøre om til desimaler. Hun fikk tips om at hun kunne multiplisere med et tall, og kom frem til at hun kunne multiplisere med 4. Da sa hun: «så da blir det gange fire, som blir en hel, så da blir det en er lik to». Intervjuer spurte hva som skjer når hun multipliserer på den ene siden, og Marit svarte at hun også måtte multiplisere på den andre siden. Svaret hennes ble da at x = 8. Marit førte oppgaven slik:



Bjarne startet oppgaven med et sukk.

Bjarne: Ja, nå var det denne her

Intervjuer: Den du har gledet deg til?

Bjarne: Nei. En halv x pluss en er lik en fjerdedel av en x pluss tre. Off, hvordan skal jeg starte på dette her da? En halv x pluss en. Er det slik?

Han sa selv at han ønsket å samle x–ene på en side, og startet med å trekke fra 1 på begge sider. Da kom han frem til $\frac{1}{2}\mathrm{x} = \frac{1}{4}\mathrm{x} + 2$. Bjarne sa at han så hvordan det var riktig, men at han ikke visste hvordan han skulle fortsette. Han fikk et tips om å samle x–ene på en side, og for å få til det trakk han fra $\frac{1}{4}\mathrm{x}$ på begge sider. Da skrev han opp $\frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{1}{4}\mathrm{x} = \frac{1}{4}\mathrm{x} + 2 - \frac{1}{4}$ x.

Bjarne så at han stod igjen med to brøker på venstre side av likningen, og lurte på hva han skulle gjøre så. Intervjuer foreslo måten hun selv ville ha løst oppgaven på, og det var å multiplisere alle ledd i likningen med samme tall. Bjarne fant ut at hvis han multipliserte med 4 så «forsvant» brøkene. Flere ganger fikk han beskjed om at alle ledd måtte multipliseres med 4, og han skrev det opp slik: $\frac{1}{2}\mathrm{x} \cdot 4 - \frac{1}{4}\mathrm{x} \cdot 4 = 2 \cdot 4$. Han fant da ut at han stod igjen med 2x – 1x = 8, og kom frem til at x = 8. Selv om Bjarne fikk hjelp og tips flere ganger syntes han ikke at noen av oppgavene var vanskelige, det var bare noen som så vanskelige ut, slik som denne. Han sa også at det gikk bedre enn forventet, siden han ikke trodde det skulle gå så veldig bra.

For Arve var dette den vanskeligste oppgaven. Han sa det var vanskelig fordi det stoppet litt opp, og han visste ikke hvordan han skulle komme seg videre, siden det ikke var trent nok på, eller at han ikke visste nok om det. Når Arve satte i gang med oppgaven tenkte han også å starte med å trekke fra 1 på begge sider av likningen. Han tenkte så at han kunne multiplisere begge sider med det samme tallet, men la den idéen fra seg igjen. Når han hadde skrevet opp $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + 2$ tegnet han opp «kakestykker» som symboliserte brøkene. Han tenkte først at $\frac{1}{4} =$ 3, siden han har glemt at han har trukket fra 1, men fikk et tips om at det bare står 2 igjen der.

Arve: Åja, pluss to, det var jo to ja, jeg tok jo en minus ja, to, det betyr jo at en av dem er to, gjør det det? Nei. Eh, så en halv fjerdedel x er jo en av fire av halvparten, som er der, og da er den slik, og da kan man jo dele den slik også

Intervjuer: Mm

Arve: Men betyr ikke det at en av dem da er to?

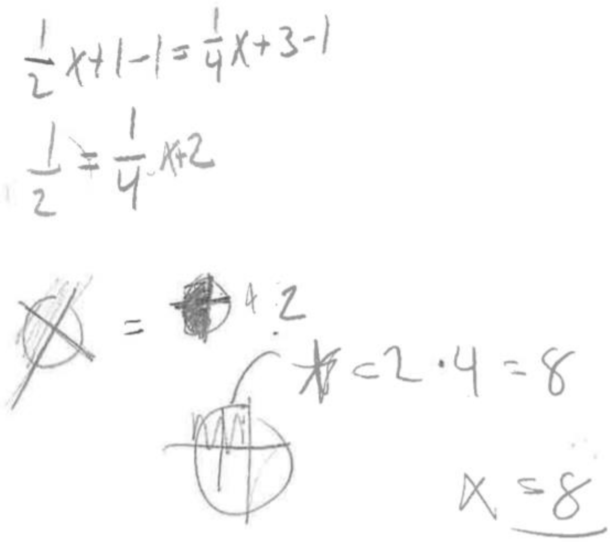
Intervjuer: Hva kommer du frem til som svar da?

Arve: At x er to, så hvis du sa en av dem her er x. Hvis en av dem her er fire, hvis ett kakestykke er x, så er det to

Intervjuer: Men du har bare en fjerdedel av x

Arve: Så da er x, så hvis du ganger det med fire da, så er det åtte, da, x er åtte

Når Arve tegnet «kaken» fant han ut at ett av fire «stykker» var 2. Han trodde da at et «kakestykke» var x. Men når han fikk beskjed om at et «kakestykke» bare var en fjerdedel av x fant han ut at han måtte multiplisere med så mange «kakestykker» han hadde, som var 4. Han kom da frem til at x = 8. Han løste det på denne måten:



Stian hadde en annen tilnærming til denne oppgaven enn det de andre elevene hadde. Strategien hans minner om Marit sin, men han ønsket ikke å utvide brøkene. Hans ønske var å trekke $\frac{1}{4}$x bort fra $\frac{1}{2}$x, slik at han stod igjen med $\frac{1}{4}$x på venstre siden. Når han trakk bort $\frac{1}{4}$x fra venstre siden, måtte han også gjøre det på høyre side, og likningen så nå slik ut: $\frac{1}{4}x + 1 = 3$. Han sa så at x var nødt til å være 2, siden 1 + 2 = 3. Stian prøvde så å resonnere seg frem til hva x–en kunne være, men kom ikke helt i mål. Intervjuer spurte hva brøken kunne multipliseres med for at brøken skulle «forsvinne». Han svarte da at han kunne multiplisere med 4 og fikk beskjed om at han måtte multiplisere alle ledd med 4. Likningen var da x + 4 = 12, og Stian så at x måtte være 8.

4.6 Oppgave 2 – Fra tekstoppgave til oppstilt likning

Tre gutter er til sammen 48 år. Sander er dobbelt så gammel som Lukas. William er 4 år eldre enn Lukas. Lag et algebraisk uttrykk for hvor gamle de er til sammen, og finn ut hvor gamle hver av guttene er.

Denne oppgaven løste Bjarne, Marit og Ronja ganske likt, ved å gå rett på å løse oppgaven algebraisk. Alle tre valgte Lukas som x, William som x + 4 og Sander som 2x. Ronja ble tipset om hvem hun kunne velge som x, og fant basert på det ut hvilke uttrykk hun skulle gi de andre, med litt hjelp.

Ronja: Så da er det en x og to x

Intervjuer: Ja, og hva er William da?

Ronja: William er tre x, nei, x

Intervjuer: Hvorfor?

Ronja: Fordi han er den tredje

Intervjuer: Men han er jo fire år eldre enn x

Ronja: Fire x, så han er fire x

Intervjuer: Da blir han jo fire ganger så gammel, men han er bare fire år eldre

Ronja: Så da blir det en x pluss fire

Hun kom frem til likningen 1x + 4 + 2x + x = 48 og fant ut at det var fire x–er her. For å få x–ene alene trakk hun fra 4 på venstre side av likningen, og ble tipset om at det måtte gjøres likt på begge sider. Hun kom så frem til at 4x = 44.

Intervjuer:	Ja, så hva blir da x?
Ronja:	x blir førtifire, nei, x blir, skal jeg dele det? Må dele det på tre, nei ikke det
Intervjuer:	Du skal få x alene
Ronja:	Bare x?
Intervjuer:	Mhm
Ronja:	Da må jeg ta fire x minus fire, fire x minus fire x
Intervjuer:	Da står du igjen med null x, du vil ha en x igjen
Ronja:	Det er fire x minus tre x, det blir en x, gjør det ikke?
Intervjuer:	Jo, det stemmer, men hvor skal du få tre x fra?
Ronja:	Fra
Intervjuer:	For hvis du legger til, eller trekker fra tre x på ene siden så må du også gjøre det på andre siden
Ronja:	Å, ja

Intervjuer sa etter dette at hun kunne prøve å dividere med 4, og Ronja fikk beskjed om å dividere på begge sider av likhetstegnet. Det kom så fra Ronja: «så da er x elleve?». Intervjuer spurte så hvem vi bestemte skulle være x. Ronja svarte da Lukas, og sa at Sander var 22 år og at William var 15 år.

Marit lagte selv uttrykk for alle de tre guttene. Hun trengte litt hjelp til hvordan hun skulle stille det opp til en likning, og etter hvert hvor mange x–er hun hadde på venstre side av likningen. Etter at intervjuer stilte en del ledende spørsmål, kom hun frem til at hun hadde fire x–er, og at det stod 4x + 4 = 48 i likningen.

Intervjuer: Ja, hva gjør du nå for å løse den videre?

Marit: Jeg vil ha det. Helst skulle jeg hatt den over på den siden, men det er jo ikke slik det fungerer her

Intervjuer: Er det ikke? Hvorfor ikke?

Marit: For det er på en måte summen

Intervjuer: Men for å løse likningen så kan du gjør det du føler

Marit: Jo jeg kan ta bort fire her, så kan jeg ta bort fire der, så får jeg fire x er lik førtifire

Intervjuer: Og hva blir da x?

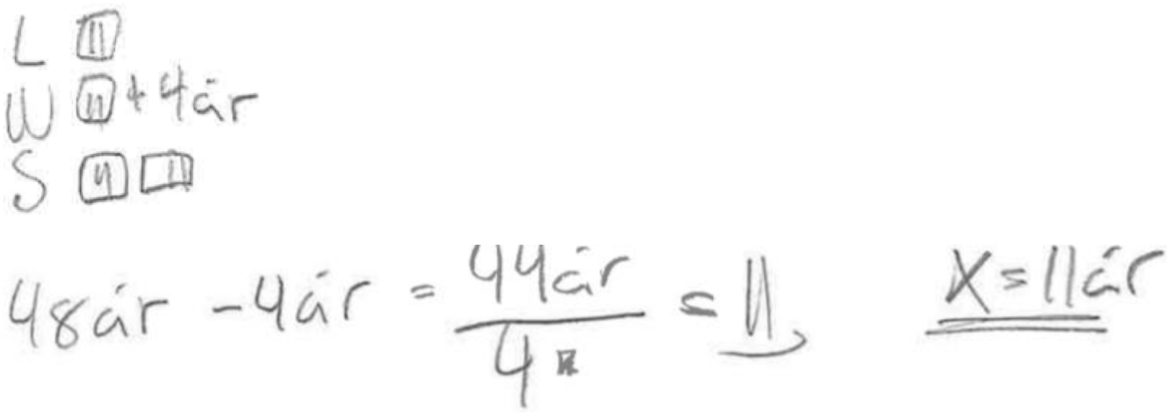
Marit: Da må jeg dele førtifire på x, som blir elleve

Marit tenkte først at hun ikke kunne trekke fra 4, siden 48 var summen av hvor gamle de tre guttene skulle være. Når hun fikk tenkt seg om fant hun ut at det gikk, og at x = 11. Hun fant så ut hvor gamle hver av guttene var. Ifølge Marit selv var denne oppgaven ekstra utfordrende, siden hun ikke hadde fått tid til å sette seg ordentlig inn i det. Bjarne tok denne oppgaven kjappere enn Marit, men løste den på samme måte. Det eneste han stusset på var hva et algebraisk uttrykk er. Når intervjuer svarte at det kunne være en likning, sa han at det høres så avansert ut, og at han syntes algebraisk uttrykk hørtes bedre ut. Arve løste denne oppgaven på en annen måte.

Arve: Det jeg alltid har begynt med da er sette opp navn. Da setter jeg opp L for Lukas, W for William og S for Sander. Og Sander er dobbelt så mange år som Lukas, så da tar jeg to firkanter der på en måte, så tar jeg en der, og William er fire år eldre enn Lukas. Eh, nei vent litt. Sander ja, pluss fire år

Intervjuer: Ja

Arve: Ehmm, og til sammen så er de førtiåtte år, så deler jeg da, tar jeg først minus fire, fire år, for da har jeg tatt ut det her og da har vi førtifire år igjen, så deler jeg det på fire, som da er lik elleve, så hver boks er elleve år. Og da er Lars, nei Lukas elleve år, William er femten og Sander er tjueto



Arve startet med å skrive opp L, W og S. Han tegnet opp en boks for Lukas, en boks pluss fire år for William og to bokser for Sander. Siden guttene skulle være 48 år til sammen skrev han så opp dette. Han trakk fra de 4 årene som stod ved siden av boksen til William og endet opp med 44 år. På grunn av at det var fire bokser til sammen, fant han ut at de 44 årene måtte divideres med 4, og han fant ut at en boks måtte være 11 år. Han satte 11 inn i hver boks og fant ut hvor gamle hver av guttene var. Etter at han har løst det slik så han at det stod at han måtte lage et algebraisk uttrykk. Han valgte så å skrive S = 2L, W = 4 + L og S + L + W = 48 år.

Stian lager også bokser, slik som Arve, men han skriver x–er inne i alle boksene siden han ikke vet verdien av dem. Han setter så opp uttrykk for hver av guttene, og kommer frem til likningen L + L + 4 + L · 2 = 48. Med litt hjelp får han løst likningen og finner ut hvor gamle guttene er. Når Stian senere i intervjuet får spørsmål om hva han synes om likninger svarer han at han synes de er irriterende og at han ikke liker bokstaver i matematikk, men at det kan være veldig hjelpsomt når det kommer til slike oppgaver som dette.

4.7 Oppgave 3 – Hvilken verdi har x i utsagnet?

x · x = 16

Hvilken verdi har x i utsagnet? Vis hvordan du tenker. Kan x ha andre verdier?

Arve brukte kun 30 sekunder på å svare på denne oppgaven, og svarte at x · x kan være 4 · 4, 3 · 6, 8 · 2 og at man kan bruke desimaler. Han fikk ingen oppfølgingsspørsmål her, selv om han svarte at 3 · 6 = 16. På grunn av at han løst de andre oppgavene slik som han gjorde, valgte jeg å bare la det gå, og tenkte at det bare gikk litt fort for han. Stian tenkte ganske likt som Arve, og ramset opp flere multiplikasjonsstykker som blir 16.

Intervjuer: Men x–en ser jo akkurat lik ut, kan x være forskjellige tall?

Stian: Nei, sant det. Nei, det kan det ikke. Fordi da hadde det vært andre – da hadde det for eksempel vært x ganger y og sånt. Så glem det jeg sa om dette, det er fire ganger fire. Det kan ikke være andre tall

Intervjuer: Kan det være noen negative tall?

Stian: Det kan sikkert være negative tall ja. Hvis minus for eksempel, minus fire gange minus fire eller ja, mm. Fordi alle vet jo at minus pluss minus, eller minus og minus blir pluss, og pluss og pluss blir minus

Intervjuer: Blir pluss og pluss minus?

Stian: Eller nei, glem det

Når intervjuer spurte oppfølgingsspørsmål kom han på at x–en ikke kunne være forskjellig og at x–en også kunnen være et negativt tall. Ronja fik også oppfølgingsspørsmål, men kom ikke like fort frem til at x–ene skulle være det samme tallet.

Intervjuer: Er det forskjell på x–ene?

Ronja: Ja

Intervjuer: Hvorfor?

Ronja: For du kan ikke gange, vent, vet ikke hvordan jeg forklarer det. Så når jeg ser at x ganger x er lik seksten så tenker jeg med en gang at fire ganger fire

Intervjuer: Ja

Ronja: Så de er like

Intervjuer: Kan du ha noen andre tall for x enn fire?

Ronja: Åtte ganger to

Intervjuer: Er x–ene like da?

Ronja: Nei

Intervjuer: Skal de være like?

Ronja: Nei

Intervjuer: Hvorfor ikke?

Ronja: Det står ikke noe om det, og de trenger ikke

Intervjuer: Okei. Kan det ha noen andre verdier?

Ronja: Ehm, to ganger åtte, nei det er det samme

Intervjuer: Ja, men du har rett i det for så vidt

Ronja: Seksten ganger en

Intervjuer: Men nå tenker du at x–ene er forskjellig, men er ikke det egentlig samme tall? Må det ikke være det?

Ronja: Jo, da er det eneste fire ganger fire

Intervjuer: Hvordan kom du nå på at de måtte være samme tall?

Ronja: Fordi at, hvordan skal jeg forklare det. For begge to er bare x, ikke to x, tre x og slikt

Ronja gikk litt frem og tilbake på om x måtte være det samme tallet eller ikke, og fikk mer og mer ledende spørsmål. Bjarne kom selv på at x måtte være det samme tallet, og var fokusert på det.

Bjarne: x er bare ett tall, ikke sant? Så da må du ta det blir vel en slik, hva heter det, det der tallet som har komma bak seg?

Intervjuer: Desimaltall?

Bjarne: Desimaltall ja, det blir et desimaltall, blir det ikke det?

Intervjuer: Blir det?

Bjarne: Ja, hvis x ganger x. Oi. Fire ganger fire blir det da

Intervjuer: Ja

Bjarne: Ja. Og vis hvordan du tenker. Det står ikke at du må tenke algebraisk, nei, da er det bare å ta, dele seksten på hva det eneste du kan gange med seg selv

Når intervjuer spurte om det ikke kunne være noen andre tall svarte han igjen at x bare var ett tall, så nei, han trodde ikke det gikk. Intervjuer spurte om det kunne være et negativt tall, og da kom han på at det også kunne være $-4 \cdot -4$. Marit hadde akkurat samme fremgangsmåte som Bjarne.

5 Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg se mer på hvilke strategier elevene bruker, og knytte disse opp mot relevant teori. Jeg vil også fokusere på utfordringer og muligheter i arbeid med likninger. På bakgrunn av funnene vil det første delkapittelet omhandle ulike strategier. Videre vil jeg se nærmere på basiskunnskaper, og repetisjon – nøkkelen til forståelse. Jeg vil så diskutere ulike misoppfatninger som har blitt identifisert. Deretter ser jeg på forståelse av symmetri, og sammenhengen mellom mestring og motivasjon. Avslutningsvis ser jeg på algebraisk– versus dagligspråk, og helt til slutt ser jeg på oppgavefasene.

5.1 Ulike strategier

Før jeg begynte å skrive resultatdelen var planen at jeg for hver av oppgavene skulle trekke frem én av elevene, som hadde valgt en litt annen strategi enn de andre elevene. Etter hvert som resultatene ble studert fant jeg ut at flere elever hadde brukt ulike strategier på hver oppgave, og det ble vanskelig å kun trekke frem én elev på hver oppgave. En av grunnene til flere ulike løsningsstrategier kan være fordi elevene har forskjellige oppfatninger av hva en likning er, og det er da naturlig at de også løser likninger forskjellig. Noen elever tenker gjerne at en likning er to algebraiske uttrykk som står på hver sin side av et likhetstegn (Tofteberg, 2020), mens andre elever tenker at uttrykk uten likhetstegn er en likning (Naalsund, 2012).

Ved å identifisere så mange forskjellige strategier avdekkes det både utfordringer og muligheter. Elevene ønsker helst å løse oppgavene uten å få hjelp. Siden det er lenge siden elevene sist jobbet med likninger, prøver de å bruke de strategiene de husker. De kan da støte på utfordringer, men det gir også muligheter. Det ligger store muligheter i at de kan utforske og løse oppgavene på måter hverken de eller læreren hadde tenkt på. På den annen side kan utfordringene bli så store at det stopper helt opp, og elevene kan kjenne på utilstrekkelighet. Ved at elevene bruker strategiene de husker, kan man avdekke misoppfatninger, siden disse bygger på en bestemt idé som konsekvent brukes, og ikke er tilfeldige feil (Brekke, 2002).

Det er interessant at alle elevene har løst likningen om brøk forskjellig. Det viser at det er mange muligheter, og at elever tenker forskjellig og har ulike strategier for å komme frem til riktig svar. For at elevene skal ha denne muligheten for læring også i klasserommet er det viktig å peke på at det ikke bare er én riktig løsningsstrategi. Dersom likningen med brøk hadde vært gitt til en klasse kunne det vært en mulighet at både Stian, Marit, Arve og Bjarne viste fremgangsmåtene sine for hele klassen. Kanskje satt det en elev i klasserommet som var skuffet over å ikke skjønne hva læreren gjorde, og dermed opplevde liten mestring. Når eleven skjønte nettopp Marit sin løsningsstrategi, kunne det gi håp og motivasjon til å fortsette arbeidet. Dersom man åpner opp for det, er det mange muligheter for læring her. Samtidig kan det være godt å ha en mulig løsningsstrategi, og slipper å være forvirret på hvilken fremgangsmåte man skal bruke.

5.2 Basiskunnskap

I den første oppgaven sa Stian at han bare tok høyre side som var to tall og pluss, i stedet for å fokusere på den vanskelige delen. Han var altså kun opptatt av å finne riktig svar, og ønsket å gjøre dette på den måten som var enklest for han. Ifølge Brekke et al. (2000) kan elever som holder på å generalisere aritmetikk om til algebra fokusere mer på å finne riktig svar enn å tenke på det generelle rundt resultatet. Thorvaldsen (2002) sier at det ville vært rimelig å anta at elever ville bruke algebra i enhver mulig kontekst etter at de først har lært det, men at flere undersøkelser viser at dette ikke er tilfellet. Mine resultater viser også at dette ikke er tilfellet. Så lenge de slipper å tenke algebraisk blir oppgavene lettere å løse. På en side er dette forståelig, siden det er relativt nytt for dem å ha bokstaver med i regnestykkene, som betyr at de må lære seg noe nytt. Mens det på den andre siden er litt uforståelig, for når man først har lært seg å bruke algebra kan dette være nyttig i mange sammenhenger.

Siden norske elevers prestasjoner betraktes som svært svake i emneområdet algebra (Bergem et al., 2016), kan det tenkes at det ikke bare er Stian som synes det er vanskelige deler i en likning. Ifølge læreren kan likninger være vanskelige for elever fordi de mangler basiskunnskapene de trenger for å gå videre. Hun mener også at den største utfordringen de har under arbeid med likninger er at de ikke forstår likhetstegnet, og det at det skal være likt på begge sider. Det kan også være utfordrende for elever å se at de må trekke fra, legge til, multiplisere eller dividere på begge sider i en likning. Dette kan man også se at informantene hadde problemer med. De må ofte minnes på at de må gjøre de samme regneoperasjonene på begge sider av likningen.

Elevene blir undervist i å addere, subtrahere, multiplisere og dividere fra tidlig på barneskolen. Brekke, Grønmo og Rosén (2000) sier også at elever tilegner seg kunnskaper i aritmetikken i starten av grunnskolen, og at disse kunnskapene skal generaliseres om til algebra i høyere trinn. I oppgaven som skulle gå fra tekstoppgave til oppstilt likning hadde

Marit likningen 4x + 4 = 48. Hun ville helst hatt firetallet over på den andre siden, men sa at det ikke var slik det fungerte der. Når hun fikk spørsmål om hvorfor det ikke fungerte slik der svarte hun: «for det er på en måte summen». Man kan da lure på hvordan hun tenkte. Tenkte hun at hun ikke kunne gjøre noe med 48, siden det var alderen de tre guttene ble til sammen? Selv om det var en oppstilt likning tenkte hun ikke at det var greit å gjøre de samme regneoperasjonene på begge sider av likningen. Hun så ikke på dette regnestykket som en likning.

I tidlig algebra er poenget å introdusere algebraiske tanker tidligere enn det som har blitt gjort før, og at aritmetikken skal inneholde algebra og algebraiske elementer, men uten bruk av algebraisk notasjon (Carraher & Schliemann, 2007). Ifølge læreren til elevene har ikke elevene nok kunnskap etter 7. klasse. Hun påstår at noen av elevene nesten er blanke i matematikk når de starter i 8. klasse. De kan ikke det mest grunnleggende. Mange kan ikke divisjon, og det er også mange som sliter med multiplikasjon. Det gir mening at elever strever med likninger når basiskunnskapene ikke er på plass. Dersom dette også gjelder resten av landet er det ikke rart at norske elever presterer slik i algebra som de gjør. Her er det store muligheter for forbedringer. Hvis elevene tidligere og tidligere har aritmetikk som inneholder algebra og algebraiske elementer har de muligheter for å lære seg algebraiske strategier og tenkemåter før de starter å arbeide med likninger. Thorvaldsen (2002) uttrykker at det tok over 1300 år å gå fra synkopert til symbolsk algebra, og at det i klasserommet forventes at det samme skrittet skal bli tatt i løpet av mindre enn fem år. Selv om elevene ikke får 1300 år på å lære seg algebra, kan det hjelpe med tidlig algebra. Dess flere år de har på å lære seg det, dess større muligheter har de på å lykkes innenfor dette feltet.

5.3 Repetisjon – nøkkelen til forståelse

Det viste seg under flere av de oppgavebaserte intervjuene at det var lite som skulle til for at elevene husket strategier man bruker i likningsløsning. Når elevene fikk den første likningen stod det litt stille for noen. Noen løste den ved resonnering, og noen løste den som en likning. For Marit, som fikk et tips om at x–ene måtte samles på samme side, hjalp det veldig med et lite tips i oppgave 1a, for at hun husket hva hun skulle gjøre i oppgave 1b. Det betyr at hvis elevene jobber jevnlig med et tema, så er det enklere å huske, og det kan gi en dypere forståelse. Når man ser på den nye læreplanen i matematikk kan dette by på utfordringer. Ifølge læreren skal man stort sett gjøre seg ferdig med emner på hvert av årstrinnene. Det betyr for eksempel at man gjør seg ferdig med likninger på 8. trinn. På grunn av det store pensumet, og at elevene mangler så mye basiskunnskaper, mener læreren at det ikke blir dybdelæring, men mer overfladisk læring. Hun ser også fordelen det hadde vært med å kunne hente opp igjen emner, for at det skal sitte, og for å utvide forståelsen.

5.4 Misoppfatninger

I oppgaven med likning med ukjent på begge sider av likhetstegnet kan man identifisere flere misoppfatninger hos Ronja. Ifølge Resell–Hansen (2014) har en elev en misoppfatning når eleven har en oppfatning, og den oppfatningen er feil. Når Ronja ønsket å trekke fra 1 på begge sider, og så dividere med 2, kun fordi det ble gjort i forrige oppgave, må det betegnes som en misoppfatning. Hun tenker at det alltid er de tallene man skal bruke. I kombinasjon med dette kommer det misoppfatninger knyttet til likhetstegnet. Dersom hun ikke ser på hva som står i den aktuelle likningen, og kun tenker på hvilke tall som har blitt brukt før, tenker hun ikke på ekvivalens i likningen. I likningen med parentes ser man også at det ikke er tydelig for Ronja hva som er ekvivalent. Hun skrev bare opp tall etter hvert som hun snakket med intervjuer, og når intervjuer sa at hun måtte skrive hva det var likt som stilte hun spørsmål ved det. Ronja tenkte nok at likhetstegnet er en operasjon for å få et svar, og ikke at resultatet av to utregninger gir det samme svaret (Selvik et al., 2002). Bjarne, derimot, sa i arbeid med likningen med y som ukjent: «fem x pluss to blir vel, det er ikke noe blir vel, men som er lik tre x minus åtte». Her ser det ut som at han ikke tenkte på likhetstegnet som en operasjon, men at han så at begge sidene av likhetstegnet har samme verdi. Selv om Bjarne her antydet at han forstod betydningen av likhetstegnet, er det ikke sikkert at det gjelder i alle oppgaver. Det er heller ikke slik at Ronja alltid tenker på likhetstegnet som en operasjon, selv om hun gjør det i flere av disse oppgavene.

Kieran (1981) peker på at elever påvirkes av lærerens ordvalg i arbeid med likhetstegnet, og at man for eksempel kan skille mellom å si at 4 + 5 blir 9, og å si at 4 + 5 har samme verdi som 9. Det kan diskuteres hvor stor vekt lærere legger på dette i undervisningen. For mange lærere kan det være en vane å si at 4 + 5 blir 9. Det kan også hende at de selv har denne holdningen til likhetstegnet. Når man bruker kalkulator er det også dette man ser. Likhetstegnet blir brukt for å utføre en beregning (Selvik et al., 2002). For mange elever er det kun tall og bokstaver som skal settes opp mot hverandre på et papir. Elever kan ha problemer med å se for seg en skålvekt, eller hva det betyr at det skal være likt på begge sider. Folk lærer på forskjellige måter, og har ulike veier å gå mot forståelse. For noen elever kunne det nok hjulpet å få et bilde på hva likhetstegnet betyr, eller at de selv fikk jobbe med konkreter der de fikk se hva som skjer hvis man kun legger til noe på den ene siden av likhetstegnet, og hva som kan gjøres for at det skal bli likt på begge sider.

En misoppfatning som viste seg flere ganger var at ledd av ulike typer kan trekkes sammen (Naalsund, 2012). Dette viste blant annet Stian når han ikke forstod hvorfor 5x – 2x er lik 3x. Han tenkte 5x – 2x var lik 3. Ronja hadde også utfordringer med at hun trakk ledd av ulike typer sammen. Når hun skulle multiplisere 25 med x – 1 gikk hun litt fort frem, og ledd av ulike typer ble trukket sammen, siden hun fikk 25(x – 1) til å bli 24x. Hvilken strategi Ronja brukte for å komme frem til det svaret er ikke identifisert, men det kan tenkes at hun har multiplisert 25 med x og fått 25x, for så å trekke fra 1, og at hun da har tenkt at 1 er 1x. Dersom hun har gjort dette har hun også hatt enda en av misoppfatningene Naalsund (2012) har identifisert. Om hun har brukt den strategien har hun også ignorert parentesen som stod rundt (x – 1) (Naalsund, 2012).

5.4.1 Utfordringen med negative tall

I arbeid med likningen med y som ukjent svarte både Arve, Marit og Bjarne at – 8 – 2 = – 6. Ifølge Booth og Davenport (2013) ser man en økning i antall elevfeil når negative tall introduseres i en likning. Flere av elevene har innarbeidet at minus og minus blir pluss. Dette nevnte blant annet Stian under arbeid med oppgave 3. Det kan da være rimelig å anta at elever blander, og ikke husker at det kun er minus multiplisert med minus som blir pluss, og at det er det som har skjedd i likningen med y som ukjent. Vlassis (2004) skriver at når elever som bruker flytt og bytt–regelen møter negative tall gjør de i nesten alle tilfeller feil. Dette kan skyldes at elevene ser bort fra negative fortegn. Det kan også skyldes at de er vant til at de må trekke fra for at det skal gå i null på den ene siden. I likningen med parentes støtte Marit på dette problemet. Hun brukte flytt og bytt–regelen og stod igjen med likningen 23x – 25 = 90. Det hun så ønsket å gjøre var å trekke fra 25 for at hun skulle få x–en alene på venstre side. Dette kan komme av at hun tenker at et negativt tegn bare refererer til subtraksjonsoperasjonen (Booth & Davenport, 2013). Eller at hun i de andre oppgavene har byttet fortegn til minus når hun har «flyttet» tall over til den andre siden. En utfordring flere elever har er at de er så vant til å gjøre det samme i flere oppgaver, at de glemmer å tenke. De følger bare en oppskrift.

5.4.2 Innføring av ukjente

Brekke, Grønmo og Rosén (2000) legger frem at for mange elever gir kun uttrykk mening ved at de tenker seg bestemte tallverdier for bokstavene. Når Bjarne løste likningen med parentes hadde han utfordringer med dette. Han visste ikke hva x–en var, og lurte på hva han skulle gjøre når han ikke visste hva x–en var. Før dette hadde han allerede løst tre likninger med x, der han ikke lurte på hva x–en var. Man kan undre seg over hvorfor han lurte på det nå. Kan det være fordi x skulle multipliseres med et høyere tall? Eller kan det være på grunn av at det nå var en oppgave med parentes, og at det var to ledd inne i parentesen? Det kan også hende at han er vant til å bruke bokstaver som a og b, og at han tenker at dette står for appelsiner og bananer (Birkeland, 2018). Når han da må arbeide med bokstaven x kan det være vanskelig å se for seg hva det kan stå for.

Under arbeid med likning med y som ukjent blandet alle elevene x og y. Når Arve fikk et hint om at det var y han jobbet med sa han: «skal skrive y der siden jeg brukte den, bare en vane å bruke x». Et aspekt med variabelbegrepet er hvordan bokstaver brukes for å representere generaliserte tall i matematikk (Brekke et al., 2000). I starten av denne oppgaven lurte Bjarne på om y–en var x, og han ønsket å omtale y–en som x. På bakgrunn av det kan man stille spørsmål ved hvordan bokstaver faktisk brukes for å representere generaliserte tall i matematikk. Man ønsker at elevene skal forstå at det er det samme om man bruker x, y, f eller g, men da må man bruke andre variabler enn bare x i matematikktimene på skolen. For at elevene skal ha muligheten til å få en bedre forståelse for dette er det viktig å variere på hvilke variabler som er i likningene.

5.5 Forståelse av symmetri

Når en elev skal gjøre en oppgave som eleven ennå ikke har lært eller som eleven ikke kjenner til, har eleven tre muligheter. Eleven kan la være å svare på oppgaven, gjette, eller produsere et svar som virker logisk ut fra de kunnskapene og forutsetningene eleven allerede har (Resell–Hansen, 2014). I likningen med parentes kom Bjarne frem til at 23x = 115. For å få x alene foreslo han først å trekke fra 23, så å legge til 23, og til slutt dividere med 23. Bjarne kjente til likninger fra før, men det så fortsatt ut som han enten gjettet eller prøvde å produsere et logisk svar ut fra hva han hadde gjort i de forrige likningene. Bjarne visste at det mest sannsynlig var en av de fire regneartene, og prøvde seg derfor frem helt til intervjuer sa at det var riktig. Ifølge Knuth et al. (2006) betrakter ikke «gjett og prøv» symmetrien i en likning, men forholder seg til likningen på en aritmetisk måte. Når Bjarne foreslo to strategier før han fant riktig strategi kan dette også tyde på at han ikke så symmetrien i denne likningen.

5.6 Sammenhengen mellom mestring og motivasjon

I det Bjarne fikk øynene på oppgave 1d – likning med brøk sa han med et sukk: «ja, nå var det denne her». Like etter sa han «off, hvordan skal jeg starte på dette her da?». Det var ikke en veldig munter elev som startet på denne oppgaven. Han var heller ikke alene om å få litt store øyne når han så denne oppgaven. Ifølge McLeod (1992) kan holdninger til matematikk oppstå ved gjentakende følelsesmessige reaksjoner på matematikk. Det kan virke som om Bjarne tidligere har hatt dårlige opplevelser med brøk eller brøk i likning, siden han reagerte slik på oppgaven. Skaalvik og Skaalvik (2013) sier også at elever kan ha slike holdninger dersom de har blitt frustrerte, oppgitte eller sinte i arbeid med algebraoppgaver. Dette kan også være tilfellet for Bjarne. Som nevnt tidligere spurte Bjarne med en gang han kom inn på intervjuet: «er det her de vanskelige oppgavene er?». Dette utsagnet kom av at de andre elevene som ble intervjuet sa det var vanskelige oppgaver. Når man starter på oppgavene med en slik forutinntatt holdning kan det gjøre at oppgavene blir mer utfordrende enn de egentlig er. Det kan virke demotiverende. Samtidig kan det bli motiverende om man likevel opplever å få det til.

Det som var oppmuntrende for Bjarne, og som kan gjøre at han ikke føler det slik neste gang han skal gjøre en likning med brøk, var at han kom i mål med oppgaven og klarte å løse den, med litt hjelp. Til tross for at Bjarne trengte tips og hjelp gjennom oppgavene syntes han ikke noen av oppgavene var spesielt vanskelige. Det var bare noen av oppgavene som så vanskelige ut. Han var også fornøyd med at det gikk bedre enn forventet, siden han ikke hadde forventet at det skulle gå så veldig bra. Når han gikk fra intervjuet med denne følelsen kan det tenkes at han ser litt lysere på likninger neste gang.

En utfordring i skolen er at det er mange elever med ulike behov, og ofte kun én lærer. Under intervjuene hadde elevene mulighet til å spørre om alt, og ønsket til intervjuer var at alle elevene skulle få til alle oppgavene og føle mestring. Noen av elevene kom enklere og mer selvstendig frem til svarene enn andre, men mitt inntrykk, som intervjuer, var at alle elevene gikk ut av rommet med en god følelse. På denne måten kan elevene ha lyst til å arbeide med matematikk og likninger, også i fremtiden. Når elevene selv har lyst til å arbeide med oppgaver kan de utvikle flere løsningsstrategier, og det kan vise seg flere muligheter enn utfordringer.

I 2020 ble kjerneelement innført i læreplanen. Kjerneelementer er det elevene må lære for å kunne mestre og anvende fagene, og de består av sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer (Utdanningsdirektoratet, 2019). Ved hjelp av kjerneelementene kan elevene få større forståelse for faget. De får da hjelp til hvordan de skal oppnå kompetansemålene. Gjennom å øve på blant annet begrepet, metoder og tenkemåter har elevene store muligheter for å lære. Ved å lære mer kan elever også både finne flere løsningsstrategier, og lære seg flere løsningsstrategier. Når elever da får en oppgave kan de velge blant flere løsningsmetoder, hvilken løsningsmetode som er mest hensiktsmessig å bruke.

5.7 Algebraisk– versus dagligspråk

Thorvaldsen (2002) sier at elever ofte løser problemer bedre ved å bruke tall og dagligspråk enn ved å bruke algebra, og at algebraisk språk ikke uten videre blir en del av elevenes naturlige måte å tenke på. Etter at Bjarne svarte $4 \cdot 4$ på hvilken verdi x har i utsagnet $x \cdot x$ så han at det stod «og vis hvordan du tenker». Han var da ganske kjapp med å si «det står ikke at du må tenke algebraisk». Det var tydelig et ønske å slippe å tenke algebraisk. Thorvaldsen (2002) skriver også at for at elevene skal synes det er hensiktsmessig å bruke algebra, må problemene ha en viss vanskelighetsgrad. Man kan likevel stille seg spørsmålet hvordan elevene skal klare å løse de vanskelige oppgavene ved hjelp av algebra, dersom de ikke lærer seg å bruke det på enklere oppgaver. Når Stian fikk spørsmål om hva han synes om likninger svarte han at det er irriterende, og at han ikke liker bokstaver i matematikk, men at det kan være veldig hjelpsomt når det kommer til for eksempel oppgaven om de tre guttene. Dette viser at han ser at det kan være hensiktsmessig å bruke, og at han derfor ønsker å bruke det. Samtidig sa han i den første oppgaven at han valgte å ikke fokusere på den vanskelige delen, og løste da ikke oppgaven som en likning ved å trekke fra på begge sider for så å dividere.

I oppgave 2 skulle elevene gå fra tekstoppgave til oppstilt likning. Elevene brukte her flere ulike strategier for å finne ut hvor gamle de tre guttene var. I en slik oppgave er det en forutsetning at elevene kjenner til symbolene som inngår, og at de kjenner til det algebraiske språket, siden de må lage et uttrykk som beskriver hvor gamle hver av guttene er (Kieran, 2007). I de resonnerende aktivitetene Kieran (2007) beskriver, kan algebra bli brukt som verktøy, men det kreves ikke. Gjennom disse aktivitetene kan elever motiveres til å jobbe med genererende og transformerende aktiviteter (Kieran, 2007). Arve løste denne oppgaven ved å lage bokser for hver av de tre guttene. For å finne ut hvor mange år det var i hver boks trakk han 4 år fra 48 år, og delte så 44 år på 4, siden det var fire bokser. Han valgte altså her å bruke algebra som verktøy der han så det som nødvendig, men løste resten av oppgaven ved bokser. Stian tegnet også opp bokser først, men fant så ut hvor gamle de var ved å sette opp uttrykk for alle guttene, og satte uttrykkene sammen i en likning. Som tidligere nevnt sa Stian etterpå at han så det var hjelpsomt å kunne likninger når han kom til slike oppgaver. Denne oppgaven motiverte altså han til å ha lyst å kunne likninger.

5.8 Oppgavefasene

Stein og Smith (1998) beskriver tre faser oppgaver passerer. Det er hvordan en oppgave fremstilles i lærebøker eller annet skolemateriell, hvordan lærere presenterer oppgaver og hvordan elevene selv arbeider med oppgavene. Oppgavene endres ofte når de går fra en fase til en annen (Stein & Smith, 1998). Ut fra dette er det interessant å se på elevene sine muligheter for læring. Når elevene fikk oppgavene utdelt var det naturlig å tenke at elevene kom til å ta i bruk mange av de samme strategiene, i hvert fall i arbeid med de oppstilte likningene. I likningen med brøk hadde alle elevene ulike fremgangsmåter for å komme frem til svaret. Det var overraskende og interessant. Dette viser at oppgaven går gjennom en fase fra den står på oppgavearket til hvordan eleven tenker på oppgaven. For Bjarne ble intervjuers fremgangsmåte presentert. Dersom dette også hadde blitt gjort for de andre elevene kunne de ha blitt farget av det. Nå kom det frem at det har noe å si hvordan oppgavene ble presenterte, i forhold til hvordan elevene løste oppgavene.

I arbeid med oppgaven med brøk ble det lagt merke til måten Arve valgte å løse oppgaven på. For å bruke Arve sin strategi kreves det forståelse av meningen bak prosedyren som gjøres. For at eleven skal fullføre oppgaven, må han kunne følge prosedyrer, men ikke uten å tenke (Stein & Smith, 1998). Arve startet med å trekke fra 1 på begge sider av likningen, og stod etter hvert igjen med $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + 2$. Når han hadde denne likningen tegnet han «kaker» for å finne ut hva x var lik. Denne strategien førte til at Arve måtte bruke underliggende begreper, og det krevdes en viss grad av kognitiv innsats (Stein & Smith, 1998).

6 Konklusjon og videre forskning

Hensikten med denne studien har vært å identifisere elevers strategier i arbeid med likninger. Gjennom oppgavebaserte intervju har jeg arbeidet med forskningsspørsmålene:

1. Hvilke strategier har elever i arbeid med likninger?
2. Hvilke utfordringer og muligheter har elever i arbeid med likninger?

For det første henger utfordringer og muligheter sammen. Det som er utfordringer for eleven, kan også føre til muligheter for læring. Misoppfatninger er viet relativ stor plass i studien, både i teoridel, resultatdel og diskusjonsdel. Mange misoppfatninger er registrerte, både når det gjelder likhetstegnet, variabler, flytt og bytt, negative tall og elevers utfordringer med bokstavene. Det ligger store muligheter for læring og mestring, dersom lærer kan identifisere misoppfatninger hos elevene. Det er derfor viktig å gjøre seg godt kjent med vanlige misoppfatninger i algebra.

Verdien av å repetere er også blitt påpekt i studien. Det var et år siden elevene jobbet med likninger sist, og flere elever hadde glemt hvordan likninger skulle løses. Med litt hjelp kom flere på sporet, og det gikk greit å løse neste oppgave. Dersom elevene jevnlig jobber med et tema, kan det gi dypere forståelse, og det blir enklere å løse en oppgave. Det er en utfordring at man i den nye læreplanen stort sett gjør seg ferdig med likninger på 8. trinn. Det er store muligheter i å repetere temaet ofte, slik at algebra ikke blir så avskrekkende for flere elever. Spesielt én elev gav uttrykk for at arbeidet med likninger var av typen «off, nå var det denne her». Om man gjentatte ganger har opplevd å ikke få det til, kan slike holdninger lett oppstå. Samme elev ønsket også å unngå å løse en oppgave algebraisk, hvis han ikke måtte. Studier (Thorvaldsen, 2002) viser også at elever ofte løser problemer bedre ved å bruke tall og dagligspråk enn ved å bruke algebraisk språk. Det er ikke uten videre en del av elevens naturlige måte å tenke på. Tidlig algebra blir presentert i studien. Her er poenget å introdusere algebraiske tanker tidligere enn det som er blitt gjort før, og at en i aritmetikken bruker element fra algebra uten bruk av algebraiske notasjoner. Gjennom en slik arbeidsmåte er det store muligheter for at algebra ikke er så fremmende, og en kan over tid skape mer positive holdninger til algebra.

Et av de store overraskelsesmomentene var at elevene brukte så ulike løsningsstrategier i arbeidet med likningene. I oppgaven om brøk har de fire elevene som gjorde denne oppgaven benyttet ulike løsningsstrategier. Selv om jeg ikke går nevneverdig inn på hvorfor i denne studien, pekes det likevel på at en av grunnene kan være at elevene har forskjellige oppfatninger av hva en likning er. At elever bruker ulike løsningsstrategier, og tenker så ulikt, betyr at det også bør være større mulighet for læring dersom elevene får presentert ulike løsningsstrategier. En løsningsstrategi som er gjenkjennelig og forståelig for en, er det gjerne ikke for en annen. Et annet, og gjerne ikke så overraskende, funn i studien var at når alle elever fikk mer eller mindre hjelp ut fra sitt eget ståsted, så klarte de å løse oppgavene. Det var min opplevelse at alle elevene gikk fra de oppgavebaserte intervjuene med mestringsfølelse. Det sier noe om nødvendigheten av individuell hjelp i algebra, men stiller også store og gjerne uoverkommelige krav til ressurser i skolen.

Det er flere faktorer i denne oppgaven som kunne ført til andre resultater. Dersom jeg blant annet hadde valgt en annen intervjuform hadde nok ikke datamaterialet blitt det samme. Om jeg hadde valgt andre oppgaver og hatt andre informanter kan det være naturlig å tenke at resultatet hadde blitt annerledes. At det er jeg som har intervjuet, transkribert og analysert er også av betydning. I tillegg tror jeg man hadde sett andre resultater dersom jeg ikke hadde stilt elevene spørsmål under intervjuene. Det er viktig å være klar over at disse faktorene vil kunne påvirke funn og resultat. Selv om jeg her har vært kritisk til metodene jeg har brukt, mener jeg at funnene mine er relevante for forskningsprosjektet og gir gode muligheter for videre forskning.

6.1 Videre forskning

I en studie av denne størrelse får man akkurat dukket så mye ned i forskningsspørsmålene, at man blir nysgjerrig på å finne ut mer. På grunn av oppgavens omfang er det gjennomført oppgavebaserte intervju med kun fem elever, og intervju av deres lærer. Selv om elevene er i samme klasse, er nivået ulikt og jeg opplever utvalget hensiktsmessig i forhold til de forskningsspørsmålene jeg ønsket å finne svar på. Likevel kunne en liknende studie gjerne vært gjennomført med flere elever, i ulike klasser, og gjerne på ulike trinn i ungdomsskolen. I tillegg kunne det vært veldig interessant å gjennomføre en longitudinell studie, der elever og deres utvikling i algebra følges over tid, gjerne flere år. I dette arbeidet kunne det også vært interessant å se hvor mange som til slutt mestrer løsning av likninger ved individuell oppfølging ut fra sitt ståsted.

I arbeidet med studien har det vært interessant å identifisere så mange ulike løsningsstrategier. Hvor mange løsningsstrategier ville man for eksempel identifisert i en klasse med 25 elever? Og hva er årsaken til de ulike løsningsstrategiene?

Misoppfatninger har blitt viet en del oppmerksomhet i studien. Hvordan oppstår de, og hvordan kan man jobbe videre med disse på en mest mulig konstruktiv måte?

De tre fasene en oppgave går gjennom har stor betydning for hva elevene lærer. Oppgavene endres ofte når de går fra en fase til en annen (Stein & Smith, 1998). Her er det også store muligheter for videre forskning i forhold til elevenes læring på alle trinn; hvordan fremstilles oppgaven i læreboken? Hvordan presenterer læreren oppgaven og hvordan arbeider eleven selv med oppgaven?

Elevens holdning til algebra har også vært et tema i studien. Hva er det som former holdningen, og hvordan kan vi forme denne positivt over tid?

Litteraturgjennomgang i forbindelse med denne studien, viser at det er flere studier som retter søkelyset på algebra og relevante spørsmål omkring løsningsstrategier, misoppfatninger og andre utfordringer, samt muligheter. Like fullt er det et felt det trolig aldri blir nok forskning på.

Litteraturliste

Attorps, I. & Tossavainen, T. (2009). Is there always truth in equation? I: Winsløw, C. (red) *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08 in Copenhagen, April 21–April 25, 2008,* s. 143–149. Sense Publishers https://doi.org/10.1163/9789087907839_021

Aubert, Karl Egil. (2018). *Algebra*. https://snl.no/algebra

Ay, Y. (2017). A review of research on the misconceptions in mathematics education. I D. M. Shelley & D. M. Pehlivan (Red.), *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2017* (s. 21–31). ISRES.

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13–16.

Bergem, O. K., Kaarstein, H., Nilsen, T. (Red.). (2016). *Vi kan lykkes i realfag, resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Universitetsforlaget.

Birkeland, P. A., Breiteig, T., Venheim, R. (2018). *Matematikk for lærere 1* (6. utg.). Universitetsforlaget.

Booth, J. L. & Davenport, J. L. (2013). The role of problem representation and feature knowledge in algebraic equation–solving. *The journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 415–423. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.003

Borowski, E. J. & Borwein, J. M. (1989). Dictionary of mathematics. Collins.

Brekke, G., Grønmo, L. S., Rosén, B. (2000). *Veiledning til algebra: F, H og J*. Nasjonalt læremiddelsenter.

Brekke, G. (2002). Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk. Læringssenteret (LS).

Cai, J., & Knuth, E. (Red.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM: The international journal on mathematics education, 40*(1), 3–22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: Vol. 2* (s. 669–705). Information Age.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Abstrakt forlag AS.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry & research design: choosing among five approaches* (2. utg.). Sage Publications.

Creswell, J. W., Miller, D. L. (2000). Determining Validity in Qualitative Inquiry. *Theory into Practice, 39*(3), 124–130. https://doi.org/10.1207/s15430421tip3903_2

Creswell, J. W. & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry & research design: choosing among five approaches* (4. utg.). Sage Publications.

Cohen, L., Manion, L. og Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7. utg.). Routledge.

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom–Based Factors That Support and Inhibit High–Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524 –549. https://doi.org/10.2307/749690

Houssart, J. & Evens, H. (2011). Conducting task–based interviews with pairs of children: consensus, conflict, knowledge construction and turn taking. *International Journal of Research & Method in Education*, *34*(1), 63–79. https://doi.org/10.1080/1743727X.2011.552337

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg.). Abstrakt forlag.

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A. C., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). *TIMSS 2019, Kortrapport*. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levers: Building meaning for symbols and their manipulation. I F. K. Lester (Red.), *Second*

Handbook of research on mathematics teaching and learning: Vol. 2 (707–762). Information Age.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Kleven, T. A. (Red.). (2011). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode, en hjelp til kritisk tolkning og vurdering* (2.utg.). Unipub.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education 37(*4), 297–312.

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3–4). 83–110.

Kunnskapsdepartementet. (2018, 26. juni). *Fornyer innholdet i skolen* [Pressemelding]. https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervjuet* (3. utg.). Gyldendal Norsk Forlag.

Li, Y., Silver, E., & Li, S. (2014). *Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices.* Springer.

Maher, C. A. & Sigley, R. (2014). Task–based interviews in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 579–582. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_147

Maxwell, J. A. (2008). Designing a qualitative study. I Bickman, L. & Rog, D. J. (Red.), *The SAGE handbook of applied social research methods* (2. utg., s. 214–253). Sage.

McLeod, D. B. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 575–596). Macmillan.

Merriam, S. B. (2014). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation*. Jossey –Bass.

NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. De nasjonale forskningsetiske komiteene.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult: A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Oslo.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011) *Læreren med forskerblikk, innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Høyskoleforlaget

Radford, L. G. (2001). The Historical Origins of Algebraic Thinking. *Perspectives on School Algebra*, 13–36. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_2

Resell–Hansen, R. (2014). *Kan norske elever på 8. trinn noe algebra i det hele tatt?: En studie av oppgavebesvarelser i algebra fra TIMSS 2011 med fokus på feilsvar* [Masteroppgave]. Universitetet i Oslo.

Sagerup, S. (2019). *Elevers forståelse av lineære likninger: En kvalitativ studie av elevers arbeid med én tradisjonell og én utforskende oppgave i matematikk* [Masteroppgave]. Universitetet i Tromsø.

Schliemann, A. D., Carraher, D. & Bricuela, B. M. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Selvik, B. K. (Red.), Rinvold, R., Høines, M. J. (2002). *Matematiske sammenhenger. Algebra og funksjonslære* (2. utg.). Caspar Forlag

Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2013). *Skolen som læringsarena: selvoppfatning, motivasjon og læring* (2 utg.). Universitetsforlaget.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3* (4), 268 –275. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse, en innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Fagbokforlaget

Thorvaldsen, S. (2002). *Matematisk kulturhistorie.* Eureka forlag

Tofteberg G. N., Tangen, J., Bråthe, L. T., Stedøy, I., Alseth, B. (2020). *Maximum 8* (2. utg.). Gyldendal Norsk Forlag

Tokle, O. D. (2020). *Er elever, i misoppfatning, selv klar over at de er i misoppfatning?: En kvanitativ studie av elever på ungdomstrinnet* [Masteroppgave]. Norges teknisk –naturvitenskapelige universitet.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. I Coxford, A. F & Schulte, A. P. (Red). *The ideas of algebra, K–12,* 8–19. National Council of Teachers of Mathematics

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1–04). https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1. – 10. Trinn* (MAT01–05). https://www.udir.no/lk20/MAT01-05

Vlassis, J. (2004). Making Sense of the Minus Sign or Becoming Flexible in "Negativity". *Learning and Instruction, 14*(5), 469–484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012

Vedlegg 1: Godkjenning fra NSD

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Elevers refleksjoner i møte med arbeid med ligninger på 9.trinn

Referansenummer

974291

Registrert

16.01.2021 av Lise Ådnanes - l.adnanes@stud.uis.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Stavanger / Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora / Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Raymond Bjuland, raymond.bjuland@uis.no, tlf: 51833494

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Lise Ådnanes, l_i_s_e_96@hotmail.com, tlf: 46845633

Prosjektperiode

28.01.2021 - 11.06.2021

Status

18.02.2021 - Vurdert

Vurdering (1)

18.02.2021 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet den 18.02.2021 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 11.06.2021.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om elevene. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Simon Gogl
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 2: Informasjonsskriv

Vil du delta i forskningsprosjektet

"elevers refleksjoner i møte med arbeid med likninger på 9.trinn"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i en masteroppgave hvor formålet er å se på refleksjoner elever på 9. trinn har i møte med arbeid med likninger. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for oppgaven og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Målet er å utforske hvordan elever arbeider med likninger på 9. trinn.
Forskningsspørsmålene som skal besvares er:

1. Hvilke muligheter/utfordringer har elever under arbeid med likninger?
2. Hvilke refleksjoner har elevene under arbeid med likninger?

Forskningen skal brukes i en masteroppgave som hører til Universitetet i Stavanger. Det er én student og én veileder som deltar i innsamlingen og analysen av forskningsdataen.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet, og studenten som forsker er Lise Ådnanes. Veileder for prosjektet er Raymond Bjuland, professor ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Vi ønsker å intervjue en lærer med lang erfaringen innenfor algebra, og da spesielt innenfor likninger. Lærer er valg strategisk fordi vi har grunn til å tro at denne læreren har noe å komme med og ønsker å besvare forskningsspørsmålene. Vi ønsker også å intervjue fem elever på 9. trinn som denne læreren hjelper oss med å velge ut.

Hva innebærer det for deg å delta?

Det blir holdt ett og ett intervju, og vil bli gjort lydopptak under alle intervjuene. Under elevintervjuene vil elevene bli bedt om å gjøre fem oppgaver. Det blir tatt opp både lyd- og videoopptak under arbeid med oppgavene, men det skal ikke filmes personer. Intervjuene blir halvstrukturerte, som vil si at det brukes en intervjuguide, men at det også er åpent for å snakke fritt utenfor intervjuguiden. Hvis lærer eller foreldre vil se intervjuguiden på forhånd kan de ta kontakt med student/veileder.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Opplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet vil kun være tilgjengelig for studenten som intervjuer og dens veileder. Opptakene vil under prosjektperioden lagres på ekstern harddisk som blir forsvarlig lagret og innelåst. I alle skriftliggjøringer av datamaterialet vil både elever, lærere og skoler bli gitt fiktive navn. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjoner.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Masteroppgaven skal leveres inn 11. juni 2021. Når den er godkjent blir alle lyd- og video-opptak slettet, og kun anonymiserte tekster vil bli tatt vare på.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Stavanger har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Universitetet i Stavanger ved professor Raymond Bjuland (tlf. 51 83 34 94)
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Raymond Bjuland	*Lise Ådnanes*
(veileder)	(student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «elevers refleksjoner i møte med arbeid med likninger på 9.trinn», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ at ________________________________ (navn på barnet) kan delta i elevintervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av foresatte, dato)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «elevers refleksjoner i møte med arbeid med likninger på 9.trinn», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i et lærerintervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3: Intervjuguide lærer

Intervjuguide lærer

Tidsramme: Ca. 1 time

1. Intro (10 min)

Hva tenker du kjennetegner god undervisning?

– Kan du gi eksempler?

Hvordan gjør denne klassen det i matematikk?

– Og likninger? Når arbeidet denne klassen med likninger sist?

Hvilken lærebok bruker dere i matematikk? Hvordan synes du denne er?

Ta utgangspunkt i noen av oppgavene jeg tenker å gi til elevene

2. Utfordringer (15 min)

Hva tenker du er elevenes utfordringer under arbeid med likninger?

- Hvorfor?
- Hvor stopper det opp for elevene?

Hva kan du gjøre for å minske disse utfordringene?

Hva gjør du dersom en elev har løst en oppgave feil?

– Hvorfor gjør du det på denne måten?

3. Muligheter (5 min)

Hvilke muligheter (for læring) ser du i arbeid med likninger?

Hva mener du er viktig at elevene mestrer innen likninger?

4. Undervisning (15 min)

Hvordan legger du opp undervisning i arbeid med likninger?

- Hvorfor?

Hvilken type oppgaver gir du elevene?

Hvilke aktiviteter synes du fungerer i arbeid med likninger?

- Hvorfor?

Hvordan burde vi undervise om likninger?

5. Ferdigheter (5 min)

Hvilke ferdigheter mener du er sentrale for elevenes forståelse for likninger?

- Er det noen av disse ferdighetene som du opplever at elevene synes er særlig utfordrende? Hvorfor?

6. Diverse (10 min)

Hvordan finner du ut hva elevene kan om likninger?

Synes du elevene har nok kunnskap etter syvende trinn?

– Hvilke kunnskaper mangler elevene? Hvorfor tror du de mangler kunnskap?

Hva synes du om hvordan den nye læreplanen har lagt opp matematikkfaget?

Vedlegg 4: Intervjuguide elever

Intervjuguide elever

Tidsramme: 35 minutter

Intro (5 min)

$3x + 4 = 5x - 36$

Når du hører ordet likning – hva tenker du da?

I likninger og matematiske oppgaver ser man ofte dette symbolet: =. Vet du hva det betyr?

I likninger er det ofte én eller flere x–er. Hva representerer x–en i en likning?

Oppgave 1 (10 min)

Løs likningene

a) $2x + 1 = 8 + 1$

b) $5x + 1 = 2x + 19$

c) $3x + 7 = -5$

d) $25(x - 1) = 2x + 90$

e) $5y + 2 = 3y - 8$

f) $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4}x + 3$

Oppgave 2 (5 min)

Tre gutter er til sammen 48 år. Sander er dobbelt så gammel som Lukas. William er 4 år eldre enn Lukas. Lag et algebraisk uttrykk for hvor gamle de er til sammen, og finn ut hvor gamle hver av guttene er.

Oppgave 3 (5 min)

$x \cdot x = 16$

Hvilken verdi har x i utsagnet? Vis hvordan du tenker. Kan x ha andre verdier?

Oppgave 4 (5 min)

Noen elever skal finne verdien til x i utsagnet $x + x + x = 12$

Marit svarte: $x = 2$, $x = 5$ og $x = 5$

Therese svarte: $x = 9$, $x = 2$ og $x = 1$

Astrid svarte $x = 4$

Vurder om svaret til hver enkelt er riktig eller galt

Oppgave 5 (5 min)

Forklar fremgangsmåten steg for steg.

$3x – 7 = 5x + 1$

$3x – 5x – 7 = 5x – 5x + 1$

$–2x – 7 = 1$

$–2x – 7 + 7 = 1 + 7$

$–2x = 8$

$\frac{-2x}{-2} = \frac{8}{-2}$

$x = – 4$

Hvis det er mer tid igjen:

g) $\frac{3+x}{5} = 4$

h) $\frac{1}{4} = \frac{3}{x}$

Hva synes du om likninger?

Var det noen av disse oppgavene du syntes var spesielt enkle eller spesielt vanskelige?

- Hva gjør at du synes dette er enkelt eller vanskelig?

Hvordan synes du undervisningen er når dere har om likninger?