



Universitetet
i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering: Lektor Realfag/Matematikk	Vårsemesteret, 2021 Åpen
Forfatter: Fredrik Myhre Gjerde	 (signatur forfatter)
Veileder: Martin Gunnar Gulbrandsen	
Tittel på masteroppgaven: Generaliseringer av Brianchon og Pascal sine teoremer om kjeglesnitt. Engelsk tittel: Generalizations of Brianchon and Pascal's theorems on conic sections.	
Studiepoeng: 30	
Emneord: Pascal, Brianchon, Kjeglesnitt, Dualitet, Pol & Polar, Prosjektiv Geometri, Kryssforhold, Harmonisk deling, Pensel,	Sidetall: 82 Stavanger, 15.06.2021

Forord

Denne masteroppgaven er et avsluttende arbeid på en femårig integrert lektorutdanning ved Universitetet i Stavanger, med Matematikk som spesialisering.

Jeg skrev en bacheloroppgave om 'kjeglesnitt i det projektive plan' i 2019, og da fikk jeg mitt første møte med Martin Gunnar Gulbrandsen, professor ved UiS. Det skulle vise seg å bli en viktig samarbeidspartner for meg i studiesammenheng. Jeg tok nemlig kontakt med Martin igjen da jeg skulle velge masteroppgave, og da hadde han en artikkel fra 1800-tallet klar til 'analysering'. Denne artikkelen bygget videre på kunnskapen jeg tilegnet meg da jeg skrev bacheloroppgaven innenfor projektiv geometri. Jeg vil gi en stor takk til Martin for all den veiledning han har gitt meg gjennom ukentlige digitale møter og andre medier når det har vært behov. Det å legge til rette for en masteroppgave under pandemiske tilstander ble en mindre utfordring enn jeg hadde forventet, mye takket være hans hjelp og tilgjengelighet.

Oppgaven har på mange måter formet seg selv gjennom alle disse månedene med skriving og veiledning. Jeg har holdt fast ved utgangspunktet som var å redegjøre for og presentere denne 'arkaiske' artikkelen for den moderne leser, men nye stier og spennende omveier ble formet på veien. Egen motivasjon og interesse knyttet til det å skrive om projektiv geometri har vokst eksponentielt gjennom hele skriveprosessen. Jeg har hatt en bratt læringskurve som selvsagt har bidratt til den økte motivasjonen.

Til slutt vil jeg takke familie, jobbkollegaer og venner for en enorm støtte underveis; Det har vært viktig for meg.

Innhold

1 Innledning	3
1.1 Bakgrunn	3
1.2 Problemstilling	4
1.3 Sammendrag	4
2 Teori	6
2.1 Det projektive plan \mathbb{P}^2	6
2.1.1 Referansetrekanten	7
2.2 1-1 korrespondanse	11
2.3 Dualitet	13
2.4 Pensel	16
2.5 Kryssforhold	19
2.6 Harmonisk kryssforhold	25
2.7 Kjeglesnitt i \mathbb{P}^2	26
2.7.1 Skjæring mellom to kjeglesnitt	28
2.8 Polaritet	32
2.9 Mengder og dualitet i det projektive rommet \mathbb{P}^3	37
2.9.1 Mengder og dualitet i høyere dimensjoner	42
3 Salmons artikkel	44
3.1 Pensel av kjeglesnitt på formen $\lambda S - \mu L^2 = 0$	44
3.2 Skjæring mellom $S = 0$ og to kjeglesnitt	49
3.3 De fire linjene av penselen ligger harmonisk	51
3.4 Skjæring mellom $S = 0$ og tre kjeglesnitt	55
3.5 Brianchon sitt teorem	58
3.6 Pascals Teorem	60
3.7 Generalisering av Brianchons teorem til rommet \mathbb{P}^3	65
4 Generalisering til \mathbb{P}^n	77

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

På 1600-tallet kom en mann ved navn Johannes Kepler på banen og diskuterte ideen om ideelle punkt i hans astronomiske arbeid. Stjernene, antatt uendelig langt borte, skulle betraktes som slike punkt. Det menneske kunne se på himmelen som lyste var bare projeksjoner av den virkelige ideelle verden. Girard Desargues, ansett som grunnleggeren av projektiv geometri, studerte disse punktene i en større sammenheng. Hans arbeid fokuserte primært på å undersøke egenskapene til kjeglesnitt, men diskuterte også betydningen og forståelsen av viktige begreper som harmonisk deling, pol og polar, og dualitet. Det var imidlertid for avansert for folk flest å forstå Desargues genialitet, og hans funn ble mer eller mindre bortglemt og skulle ikke få sin renessanse før ca. 200 år senere. Folks oppmerksomhet drev heller mot en annen viktig skikkelse, Descartes, som utviklet en mer moderne analytisk geometri. En som imidlertid skilte seg ut fra mengden og som forstod Desargues' ideer var Blaise Pascal. Han klarte som kun 16-åring å generalisere det første og kanskje mest velkjente teoremet innen projektiv geometri; nemlig Pappos' teorem. Pascal sitt teorem om kjeglesnitt skulle vise seg å være av fundamental betydning innen projektiv geometri. Utviklingen av den analytiske geometrien, som innebar å formulere den ved hjelp av matematiske likninger og innføre koordinater, fikk en bratt kurve på 1800-tallet. I 1810 kom Charles Julien Brianchon, tydelig influert av Pascal, på banen med et interessant teorem om kjeglesnitt. Homogene koordinater ble introdusert av Julius Plücker rundt 1830 og ble særdeles ideelt for den analytiske projektive geometrien. Det dannet grunnlaget for nye horisonter, og man kunne nå grave opp viktige teoremer og studere dem med nye analytiske briller (Wikipedia, 2020).

I denne masteroppgaven skal det redegjøres for en artikkel fra 1843 som omhandler nevnte Pascal og Brianchon sine teoremer om kjeglesnitt. Artikkelen er skrevet av George Salmon og heter "*On the properties of Surfaces of the second degree which correspond to the theorems of Pascal and Brianchon on conic sections*". Det viser seg at de to teoremene korresponderer til hverandre gjennom teoriene om *dualitet* og *polaritet*; begreper som skal gjøres rede for senere. Salmon er kanskje mest kjent for å ha bevist en generalisering av disse teoremene til rommet, og det er nettopp gjennom denne artikkelen at han fremlegger dette. Faktisk var dette den første artikkelen Salmon noen gang skrev. Han ble i 1902 utnevnt til æresdoktor ved Universitetet i Oslo i forbindelse med 100-årsjubileumet til Niels Henrik Abel sin fødselsdag. Hovedkilden som vil bli brukt i henhold til teori og begreper er boka: "*The methods of plane projective geometry based on the use of general homogeneous coordinates*" skrevet av Edwin Arthur Maxwell i 1946.

1.2 Problemstilling

Ved hjelp av nyere og forhåpentligvis mer effektive matematiske verktøy som de ikke hadde sterke begreper for på 1800-1900 tallet, ønsker oppgaven å svare på følgende problemstilling:

Presentere George Salmon sin artikkel: "On the properties of Surfaces of the second degree which correspond to the theorems of Pascal and Brianchon on conic sections" for den moderne leser.

Målet er å sitte igjen med en tekst som går i dybden på alle aspekter ved Salmons artikkel. Det innebærer også å gjøre rede for alt som ligger implisitt hos forfatteren og resultater han konstaterer uten å vise hvordan. Det må tas i betraktning at også Maxwell sin bok, hovedkilden vår, er preget av et arkaisk språk. Vi må derfor 'modernisere' hans formuleringer der det er behov. Når artikkelen i sin helhet er redegjort for går vi egne veier og viderefører arbeidet til høyere dimensjoner.

1.3 Sammendrag

Salmons artikkel blir analysert og redegjort for stegvis i kapittel 3 ved at vi tar for oss avsnitt for avsnitt. I planet \mathbb{P}^2 får vi et oppsett med tre kjeglesnitt, alle med dobbel kontakt til et gitt ikke-degenerert kjeglesnitt S i to og to punkter der hvor tre distinkte linjer (korder) treffer S . Det blir bevist at hvert av disse kjeglesnittene er medlemmer av hver sin pensel. Seksjon 3.1, 3.2 og 3.4 bygger alle opp mot dette endelige oppsettet i planet. En interessant digresjon blir gjort i seksjon 3.3 når vi beviser at de fire skjærings-korder, de som oppstår der hvor to av kjeglesnittene med dobbel kontakt skjærer hverandre, ligger harmonisk. Deretter, i seksjon 3.5, degenererer vi de tre kjeglesnittene med dobbel kontakt til par av tangentlinjer og bruker dette til å bevise Brianchon sitt teorem. Ved hjelp av dualitet (og polaritet) tar vi utgangspunkt i dette teoremet for å kunne bevise Pascals teorem i seksjon 3.6.

Oppsettet fra \mathbb{P}^2 blir videre brukt som fundament for å forstå oss på Salmons generalisering til rommet \mathbb{P}^3 i seksjon 3.7. Vi finner en direkte analogi mellom planet og rommet: Tre kvadriker som representerer hver sin pensel, alle innhyllet av en ikke-singulær kvadrikk S der hvor tre plan skjærer igjennom den. De tre innhyllede kvadrikkene blir så degenerert til kjegler, og vi bekrefter utsagnet til Salmon om at denne milde degenerasjonen sørger for et oppsett som svarer til Brianchon sitt teorem. Dette oppsummeres i *teorem 4*. Det mest iøynefallende med seksjon 3.7 finner imidlertid sted når vi tar opp dualitets-redskapet vårt og bruker det på dette teoremet. Det resulterer nemlig i en (dual) sats; *teorem 5*, som ikke bare har samme oppsett som Pascals teorem, men som også legger til grunn for samme konklusjon i rommet som i planet; Skjæringspunktene ligger fremdeles på linje. Artikkelen stopper her, men vi ser vårt snitt til å videreføre arbeidet til høyere dimensjoner.

I kapittel 4 tar vi for oss en generalisering til \mathbb{P}^n . Vi finner også her en direkte analogi mellom \mathbb{P}^n og arbeidet vårt fra kapittel 3. De samme strategier og metoder som tidligere blir anvendt for å oppnå ønsket resultat i høyere dimensjoner. Nok en gang får vi en situasjon med tre kvadriker, alle medlemmer av hver sin pensel, innhyllet av en ikke-singulær kvadrikk S der hvor tre hyperplan snitter den. Vi degenererer S , akkurat som vi gjorde med kjeglesnittet S i \mathbb{P}^2 og kvadrikken S i \mathbb{P}^3 , til en kjegle på formen $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 0$ i \mathbb{P}^n . Denne likningen tilsvarer nøyaktig en kjegle i rommet \mathbb{P}^3 og et par av linjer i planet \mathbb{P}^2 - akkurat slik vi ønsker. Den direkte analogien gjør at vi nok en gang, i *teorem 7* får et oppsett som svarer til Brianchon sitt teorem i \mathbb{P}^n . I kjent stil bruker vi dualitet for å finne analogien til Pascals teorem. Interessant nok er konklusjonen i Pascals teorem i planet og rommet om at de tre skjæringspunktene alltid vil ligge på linje også gjeldende i \mathbb{P}^n . Dette fremlegges i *teorem 8*.

2 Teori

2.1 Det projektive plan \mathbb{P}^2

I det moderne matematiske språk er det vanlig å definere det projektive plan som mengden av punkter.

Definisjon 1. Det projektive plan over en kropp k , i vårt tilfelle mengden av komplekse tall, er mengden av punkter

$$\mathbb{P}^2 = \{(a : b : c)\} \sim k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

hvor kroppen $k = \mathbb{C}$. Det eksisterer en ekvivalensrelasjon i \mathbb{C}^3

$$(a, b, c) \sim (a', b', c')$$

hvis $\exists \lambda \in k, \lambda \neq 0$, slik at

$$(a', b', c') = (\lambda a, \lambda b, \lambda c).$$

Punkt i \mathbb{P}^2 kalles *homogene koordinater*; man studerer forholdene mellom tre variabler x, y, z , og bruker notasjonen $(x : y : z)$ for et variabelt punkt. Homogene koordinater er uforandret opp til skalering:

$$(x : y : z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z).$$

Ved å ta i bruk homogene koordinater utvides det euklidske konseptet om et plan. Uten å gå inn i noen vide detaljer kan vi sitere Maxwell på hvordan dette skjer (Maxwell, 1946, Kapittel 1): Vi betrakter vanlige kartesiske koordinater, vanligvis angitt av x, y , og uttrykke dem på homogen form:

$$(x, y) \implies (x : y : 1), \quad (x : y : z) \implies \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Når z ikke er lik null kan vi se på koordinatene som definerer punktene i et vanlig euklidsk plan. Men dersom vi i tillegg tillater z å ta verdien null (x, y ikke lik null) må vi legge til det euklidske plan en familie av punkter, nemlig en familie av uendelige koordinater. Dersom vi også tillater x, y, z å ta komplekse verdier, da må vi betrakte planet som videre forstørret av en korresponderende familie av punkter. Dette planet bestående av hele familien av punkter som oppstår gjennom alle mulige sett av verdier x, y, z (ikke alle lik null) kalles det *komplekse projektive plan* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ (Maxwell, 1946, Kapittel 1). Arbeidet i denne oppgaven skal se bort i fra notasjoner som lengder og vinkler.

Definisjon 2. En linje L i \mathbb{P}^2 er en delmengde på formen

$$L = \{(x : y : z) \mid ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{P}^2.$$

Vi ser at dette tilfredsstillers betingelsene for homogene koordinater fordi

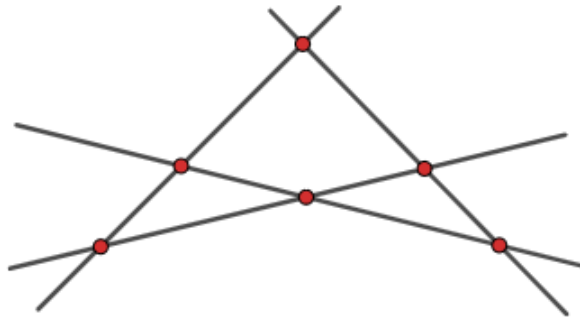
$$ax + by + cz = 0 \iff a(\lambda x) + b(\lambda y) + c(\lambda z) = 0.$$

På samme måte som at vi kan identifisere en linje i \mathbb{C}^2 med \mathbb{C} , er en linje i \mathbb{P}^2 identifiserbar med \mathbb{P}^1 . For å oppnå denne identifikasjonen må vi gjøre en parametrisering. En parametrisering av en linje $L \subset \mathbb{P}^2$ kan uttrykkes ved en projektiv transformasjon

$$\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow L, \quad (u : v) \mapsto (a_0u + b_0v : a_1u + b_1v : a_2u + b_2v),$$

for konstanter $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$. Dette vil vi få bruk for senere i arbeidet vårt.

Definisjon 3. Figuren som er formet av fire linjer hvor tre av dem ikke har felles snittpunkt blir kalt en fullstendig firkant. De fire linjene møtes parvis i seks punkter som impliserer at punktene tre og tre ligger på linje (Maxwell, 1946, Kapittel 8).



Figur 1: Fullstendig firkant

2.1.1 Referansetrekanten

Oppgaven skal nå vise til en alternativ måte å illustrere det projektive plan \mathbb{P}^2 på; et nyttig redskap også Maxwell bruker i boken sin. De homogene koordinatene $X = (1 : 0 : 0)$, $Y = (0 : 1 : 0)$, $Z = (0 : 0 : 1)$ former en trekant vi skal kalle for *referansetrekanten*. Vi skal også tillegge denne trekanten et *enhetspunkt* $U = (1 : 1 :$

1). Maxwell skriver at man finner likningen til en linje gjennom to punkter $(x_0 : y_0 : z_0)$, $(x_1 : y_1 : z_1)$ ved determinanten

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

hvor $(x : y : z)$ er et variabelt punkt. Det gir mening fordi vi vet at dette er den samme fremgangsmåten vi ville brukt for å sjekke om to punkter er kollineære, noe de er hvis og bare hvis determinanten er lik null (Maxwell, 1946, Kapittel 1). Dette er viktig fordi vi ønsker å finne likningene til sidene i referansetrekanten. Linjen L_{YZ} på referansetrekanten kan derfor identifiseres ved

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Løser vi likningen (determinanten) får vi så enkelt som $x = 0$. På samme måte har sidene ZX , XY henholdsvis likninger $y = 0$, $z = 0$.

Merknad 1. Maxwell er litt utydelig i sine formuleringer knyttet til referansetrekanten. Han skriver at dersom referansetrekanten er gitt kan vi ta et system av koordinater som gjør at et vilkårlig angitt punkt U , ikke på en av sidene av referansetrekanten, tar koordinatene $(1 : 1 : 1)$ på følgende måte: Anta at U , i et hvilket som helst koordinatsystem x, y, z , har koordinatene (α, β, γ) , og gjør en transformasjon fra koordinatsystemet x, y, z til et nytt system x', y', z' gjennom forholdene $x' = x/a$, $y' = y/b$, $z' = z/c$. Videre skriver han at hvert punkt i planet da vil bli bestemt i form av x', y', z' , og punktet (α, β, γ) blir punktet $(1 : 1 : 1)$. Referansetrekanten forblir uendret siden linjene $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ henholdsvis blir til linjene $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$. Vi har da et koordinatsystem hvor U er punktet $(1 : 1 : 1)$. Dette punktet kaller han enhetspunktet for dette koordinatsystemet (Maxwell, 1946, Kapittel 1).

La oss utdype og formulere dette på en tydeligere måte. Det er, som også Maxwell gir uttrykk for, gjennom en projektiv transformasjon at vi kan konvertere planet til denne referansetrekanten. En projektiv transformasjon er lineær og bevarer grad. Det vil si at linjer blir sendt til linjer, kjeglesnitt til kjeglesnitt osv. La oss betrakte den projektive transformasjonen

$$\psi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n.$$

Vi vet at $n+1$ punkter ligger i *generell posisjon*. I dette tilfellet betyr generell posisjon at n punkter er lineært uavhengige; de ligger ikke i et hyperplan:

$$P_0 = (a_{00} : a_{10} : \dots : a_{n0})$$

$$P_1 = (a_{01} : a_{11} : \dots : a_{n1})$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ P_n &= (a_{0n} : a_{1n} : \dots : a_{nn}), \end{aligned}$$

hvor $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{P}^n$. I tillegg har vi ett punkt

$$q = (b_0 : b_1 : \dots : b_n) \in \mathbb{P}^n.$$

Dette punktet har ingen restriksjoner om å være lineært uavhengige av P_i . Det kan med andre ord ligge i et hyperplan. Da $\exists!$ projektiv transformasjon ψ slik at

$$\psi(P_0) = (1 : 0 : 0 : \dots : 0)$$

$$\psi(P_1) = (0 : 1 : 0 : \dots : 0)$$

$$\vdots$$

$$\psi(P_n) = (0 : 0 : 0 : \dots : 1)$$

$$\psi(q) = (1 : 1 : 1 : \dots : 1).$$

Vi trenger en matrise A som sender punktene P_0, \dots, P_n på standard basis (opp til skalering) og q på $(1 : 1 : 1 : \dots : 1)$. La oss ta utgangspunkt i ψ^{-1} . Her vil matrisen oppnå første del:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ P_0 & P_1 & \dots & P_n \\ | & | & & | \end{array} \right] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Multipliserer vi matrisen A med standard basis vektorene får vi nemlig punktene P_0, \dots, P_n . Dette kan vi illustrere med et eksempel:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix} = P_0.$$

A er inverterbar som betyr at $\det(A) \neq 0$. Dette impliserer at ingen av punktene P_i ligger på linje, og det eksisterer en lineær uavhengighet mellom disse punktene. Dette vil igjen si at koordinatene til q kan skrives som en lineær kombinasjon av P_i -koordinatene:

$$\lambda_0 \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_{0n} \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

↕

$$A \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

hvor $\lambda_i \neq 0$. La oss nå gjøre om litt på matrisen vår A :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 a_{00} & \lambda_1 a_{01} & \dots & \lambda_n a_{0n} \\ \lambda_0 a_{10} & \lambda_1 a_{11} & \dots & \lambda_n a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_0 a_{n0} & \lambda_1 a_{n1} & \dots & \lambda_n a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Da har vi endelig at

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix} = \text{” } P_0 \text{ opp til skalering ”}.$$

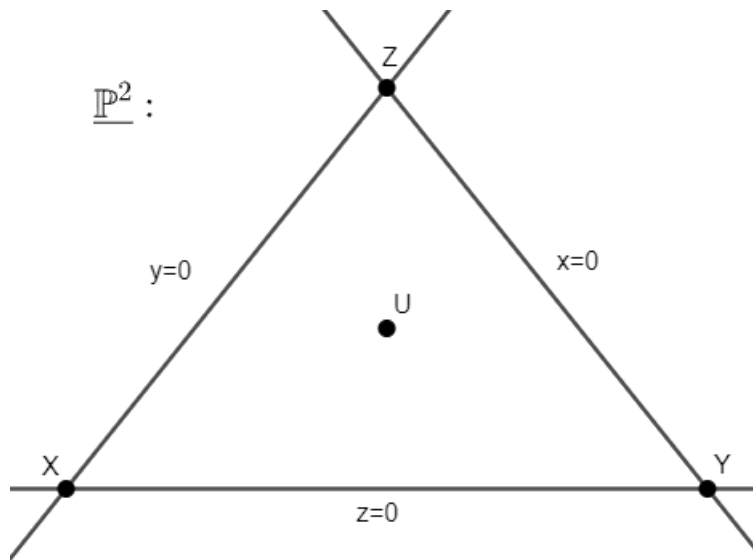
Vi oppnår tilsvarende for P_1, \dots, P_n , og

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \text{” } q \text{ sine koordinater”}.$$

Derfor oppnår vi denne referansetrekanten i \mathbb{P}^2 . Det eksisterer nemlig en projektiv transformasjon $\psi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ (3×3 matrise) som sender P_0, P_1, P_2 på standard basis vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (opp til skalering),}$$

og som sender punktet q på $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



Figur 2: *Trekanten vi skal referere til.* Punktene X, Y, Z representerer henholdsvis de homogene koordinatene $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, og punktet U representerer enhetspunktet $(1 : 1 : 1)$. Linjene L_{YZ} , L_{XZ} , L_{XY} har henholdsvis likninger $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2.2 1-1 korrespondanse

Et begrep som ofte går igjen i Maxwell sin bok og som han bruker et helt kapittel på å forklare, er hva han kaller *(1,1) korrespondanse* (Maxwell, 1946, Kapittel 2). Hans bruk av språk må ses i kontekst av tiden dette ble skrevet i. Idag sier vi at det finnes en 1-1 korrespondanse eller en bijeksjon mellom to mengder. Bruken av parenteser og komma i Maxwell sitt valg av begrepsnavn stammer fra at flere typer korrespondanser ble studert på denne tiden; såkalte (n,k) -korrespondanser. For å kunne si om en avbildning fra en mengde til en annen mengde har en 1-1 korrespondanse må vi kunne si noe om *injeksjon* og *surjeksjon*.

Definisjon 4. En funksjon $f : A \rightarrow B$ er *injektiv* dersom forskjellige elementer i A gir forskjellige funksjonsverdier i B . Mer nøyaktig betyr dette at en funksjon f er injektiv hvis $\forall a, b \in A : a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$

En funksjon $f : A \rightarrow B$ er *surjektiv* dersom $f(A) = B$. Det vil si at $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$.

Definisjon 5. Dersom A, B er to mengder, og hvis avbildingen

$$f : A \rightarrow B$$

er både injektiv og surjektiv, sier vi at f er en bijeksjon. Dette er det samme som at f er en 1-1 korrespondanse.

Merknad 2. Maxwell bruker i sine formuleringer en èn-parameter $\lambda \in \mathbb{C}$, hvor $\lambda = \infty$ er tillatt:

$$\begin{aligned} &\{x + \lambda y = 0\} \\ &\quad \updownarrow \\ \lambda = \infty &\implies \frac{1}{\lambda}x + y = 0 \iff y = 0. \end{aligned}$$

Han behandler 1-1 korrespondanser algebraisk ved følgende likning (Maxwell, 1946, Kapittel 2):

$$axy + bx + cy + d = 0 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Denne formuleringemetoden er nok preget av tiden boka ble skrevet i. En vanligere og mer moderne metode er å bruke en projektiv transformasjon:

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \\ &\quad \updownarrow \\ f(x : y) = (x' : y') &\iff \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &\quad \updownarrow \\ &f(x : y) = (ax + by : cx + dy), \end{aligned}$$

hvor $ad - bc \neq 0$.

Om litt skal vi nemlig vise at Maxwell sin beskrivelse av en 1-1 korrespondanse tilsvarer grafen til en projektiv transformasjon. Vi antar at vi har en 1-1 korrespondanse mellom to mengder A og B . Grafen $G \subset A \times B$ kan da uttrykkes på formen

$$G := \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\},$$

og Maxwell presiserer altså at denne 1-1 korrespondansen kan behandles algebraisk ved likningen

$$axy + bx + cy + d = 0 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

La oss si vi har et punkt $(x : y) \in \mathbb{P}^1$ med $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ og konvensjonene

$$\lambda < \infty \longleftrightarrow (\lambda : 1)$$

$$\lambda = \infty \longleftrightarrow (1 : 0).$$

Da har vi at $(x_1 : x_2), (y_1 : y_2)$ er to punkter i \mathbb{P}^1 , og vi får at $x = \frac{x_1}{x_2}, y = \frac{y_1}{y_2}$. Setter vi inn for våre nye variabler og multipliserer med x_2y_2 på begge sider av likningen får vi

$$ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2 = 0.$$

Påstand. Maxwell sin beskrivelse av 1-1 korrespondanse er ekvivalent med grafen til en projektiv transformasjon $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 &:= \{(x_1 : x_2), (y_1 : y_2) \mid \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\} \quad (\text{opp til skalering}) \\ &\quad \updownarrow \\ & y_2(ax_1 + bx_2) = y_1(cx_1 + dx_2) \\ &\quad \updownarrow \\ & ax_1y_2 + bx_2y_2 - cx_1y_1 - dx_2y_1 = 0. \end{aligned}$$

Vi ser at likningene er like med unntak av at koeffisientene har byttet plasser og ved to anledninger skiftet fortegn uten at det har noe å si for det vi prøver å vise her. Der vi ser på en projektiv transformasjon $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ser Maxwell på en 1-1 korrespondanse gitt av likningen $axy + bx + by + c = 0$ i $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Maxwells 1-1 korrespondanse er grafen til vår f .

2.3 Dualitet

Ideen om dualitet er basert på likheten (symmetri) mellom egenskapene til punkter i forhold til *hyperplan* og egenskapene til hyperplan i forhold til punkter. Et punkt $(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ svarer til et hyperplan H i det *duale plan* $\check{\mathbb{P}}^n$, hvor

$$H = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\} \subset \mathbb{P}^n.$$

I \mathbb{P}^2 svarer likningen til en linje, i \mathbb{P}^3 et plan, og i \mathbb{P}^n for $n \geq 4$, svarer likningen til et hyperplan. Dualitet blir et viktig nøkkelord i vårt videre arbeid da det nettopp er gjennom dualitet at teoremene til Pascal og Brianchon svarer til hverandre. Til hver matematisk sats svarer en *dual* sats, noe vi skal komme tilbake til når de to teoremene skal undersøkes. Maxwell lister opp følgende par av aksiomer for å gi et eksempel på dualitet mellom punkter og linjer (Maxwell, 1946, Kapittel 1):

To punkter bestemmer en linje;

To linjer bestemmer et punkt.

Med andre ord svarer skjæringspunktet mellom to linjer dualt til linjen som er bestemt av to punkter, og vi skal se senere at et kjeglesnitt kan betraktes som bestemt ved sine punkter eller dualt ved sine tangenter (Maxwell, 1946, Kapittel 1 og 5).

Boken til Maxwell tar for seg en nøyaktig tolkning av dualitet ved å bruke koordinater for linjer og punkter. Likningen til en rett linje L kan uttrykkes på formen

$$L : lx + my + nz = 0 \subset \mathbb{P}^2.$$

Linjen er bestemt når vi vet l, m, n , og motsatt, når l, m, n er gitt kan vi bestemme linjen L . Vi kan derfor bruke l, m, n som et koordinatsystem for å bestemme en linje. Disse koordinatene kaller vi *linje-koordinater*. I vårt videre arbeid menes dualitet når vi skriver linje-koordinater. Der vi føler det er behov skal vi også referere til x, y, z som *punkt-koordinater* (Maxwell, 1946, Kapittel 1).

La oss betrakte en linje som i punkt-koordinater har likning på formen

$$ax + by + cz = 0 \subset \mathbb{P}^2.$$

Denne likningen hevder at alle punkt $(x : y : z)$ ligger på linjen med korresponderende linje-koordinater

$$(a : b : c) \in \check{\mathbb{P}}^2.$$

$(a : b : c)$ er altså et punkt i det duale plan. Mer spesifikt har vi:

$$\mathbb{P}^2 \ni p \longleftrightarrow L' \subset \check{\mathbb{P}}^2$$

$$\mathbb{P}^2 \supset L \longleftrightarrow p' \in \check{\mathbb{P}}^2.$$

Et punkt i det projektive plan svarer til en linje i det duale plan, mens en linje i det projektive plan svarer til et punkt i det duale plan.

Setning 1. Hvis $p \in L$ i \mathbb{P}^2 har vi at $p' \in L'$ i $\check{\mathbb{P}}^2$.

Bevis. La $p = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2$ og $L : rx + ty + sz = 0 \subset \mathbb{P}^2$. Da vet vi at $p' = (r : s : t) \in \check{\mathbb{P}}^2$ (linjekoordinatene til L) og at $L' : ax + by + cz = 0 \subset \check{\mathbb{P}}^2$. Da har vi

$$p \in L \iff L(a : b : c) = 0 \iff ra + sb + tc = 0$$

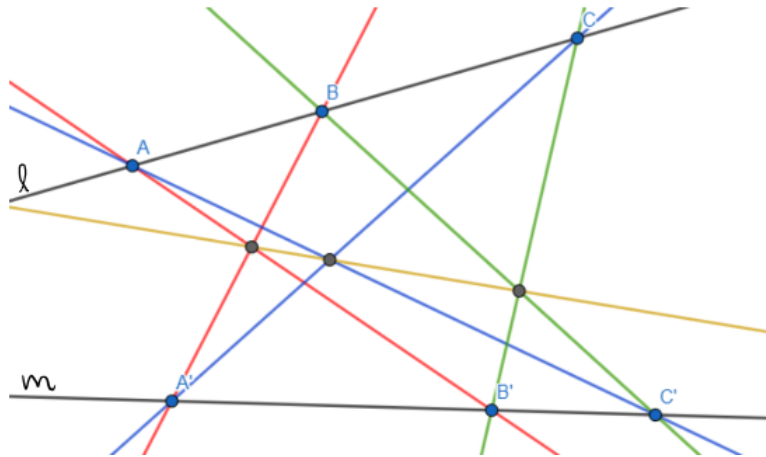
$$p' \in L' \iff L'(r : s : t) = 0 \iff ar + bs + ct = 0.$$

Vi oppnår to identiske likninger og dermed har vi bevist setningen for dualitet mellom punkter og linjer.

Eksempel 1 Vi antar at vi har et punkt $p = (1 : 0 : 0)$ og en linje $L : y = 0$. Siden dette er et punkt og en linje på referansetrekanten vi har redegjort for vet vi at $p \in L$ i \mathbb{P}^2 . Videre vet vi at punktet $p = (1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^2$ dualt svarer til linjen L' med likning $x = 0 \subset \check{\mathbb{P}}^2$, og at linjen med likning $y = 0 \subset \mathbb{P}^2$ dualt svarer til punktet $p' = (0 : 1 : 0) \in \check{\mathbb{P}}^2$. Da er det opplagt at $p' \in L'$ i det duale plan $\check{\mathbb{P}}^2$.

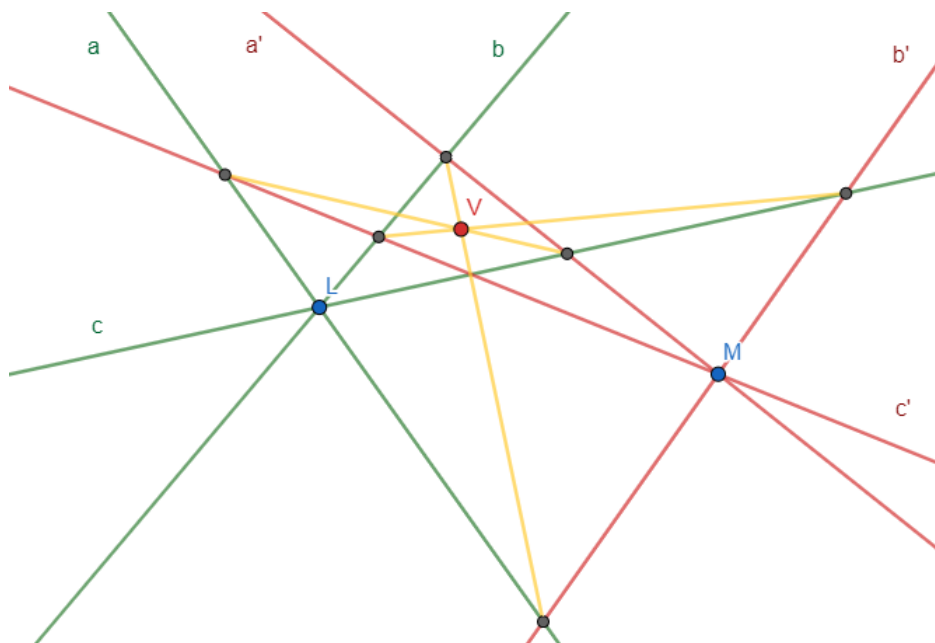
For å få en konkret og mer billedlig forståelse på hva som inngår i dualitet mellom punkter og linjer kan vi ta det første og muligens mest berømte teoremet innenfor projektiv geometri, nemlig Pappos' teorem, og se på det duale resultatet av dette teoremet. Jeg kommer ikke til å bevise teoremet, bare gengi det med en tilhørende figur og formulere den duale satsen. Se for eksempel Bix for bevis (Bix, 2006, S. 103)

Setning 2 (Pappos' teorem). Dersom vi har to linjer l, m og tre punkter A, B, C på l og tre punkter A', B', C' på m , vil skjæringspunktene $L_{AB'} \cap L_{BA'}$, $L_{AC'} \cap L_{CA'}$ og $L_{BC'} \cap L_{CB'}$ alltid ligge på linje (Se figur 3).



Figur 3: Pappos' teorem. Den gule linje viser at de tre skjæringspunktene ligger på linje.

La oss nå forsøke å formulere hva det duale resultatet av setning 1 skal være. Ovenfor tok vi utgangspunkt i to linjer l, m hvor seks punkter A, B, C, A', B', C' tre og tre lå på hver sin linje. Vi bytter rollene til linjene og punktene ovenfor og tar nå utgangspunkt i to punkter L, M hvor tre linjer a, b, c krysses i L , og tre linjer a', b', c' krysses i M . Da vil linjene $(a \cap b')(b \cap a')$, $(a \cap c')(c \cap a')$, $(b \cap c')(c \cap b')$ alle gå igjennom samme punkt V (Se figur 4).



Figur 4: Det duale resultat av Pappos' teorem. De gule linjene krysser hverandre i samme punkt V . Dersom vi eksempelvis betrakter skjæringspunktet ab' vil det motsatte skjæringspunkt være $a'b$.

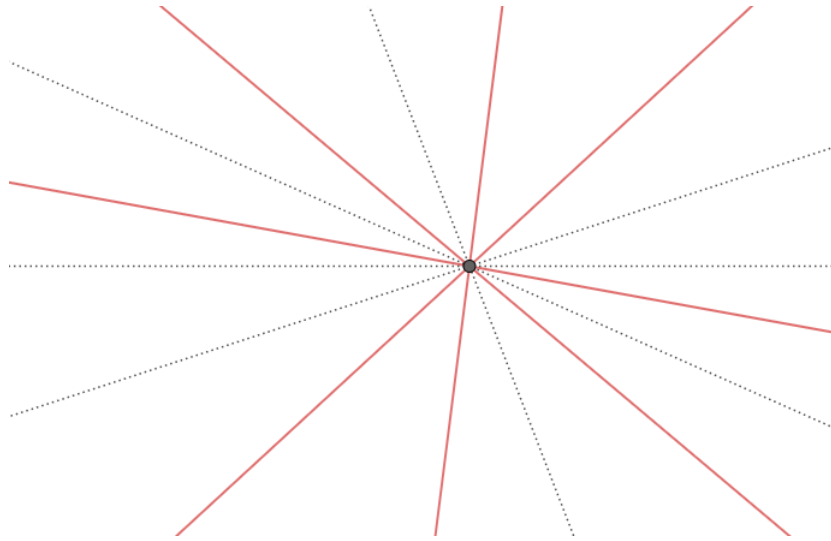
Setning 3 (*Pappos' teorem dualt*). Dersom vi har to punkter L, M og tre linjer a, b, c gjennom L og tre linjer a', b', c' gjennom M , vil linjene som forener de motsatte skjæringspunktene gå igjennom ett felles punkt.

Som en direkte konsekvens av Pappos' teorem oppnår vi altså et nytt teorem i det duale plan.

2.4 Pensel

En familie av kurver i \mathbb{P}^n gitt av et homogent polynom der koeffisientene avhenger lineært av en parameter kalles en *pensel*. I denne oppgaven skal vi innom pensler av linjer, kjeglesnitt og kvadriker.

Merknad 3. Maxwell definerer en pensel av linjer til å være *en familie av linjer som krysser hverandre i et gitt felles punkt* (Maxwell, 1946, Kapittel 3). Vi må være tydelig på forskjellen mellom det Maxwell skriver og moderne formuleringer. Både Salmon og Maxwell har formuleringer som gir uttrykk for at fire linjer danner en pensel. I moderne språkbruk har vi ikke noen 'pensel av n linjer'; Vi tar alltid med alle linjene gjennom skjæringspunktet, og vi skriver heller at fire linjer er en del av penselen som består av alle linjer gjennom et felles punkt.



Figur 5: Alle linjene gjennom punktet definerer en pensel av linjer, og linjene i rødt representerer fire linjer av penselen.

Setning 4. For to vilkårlige linjer $M : l_1x + m_1y + n_1z = 0$, $N : l_2x + m_2y + n_2z = 0$ i \mathbb{P}^2 som krysser hverandre i ett punkt P , vil likningen

$$\lambda M + \mu N = 0,$$

for passende verdier λ og μ , representere penselen av linjer gjennom skjæringspunktet P mellom $M = 0$ og $N = 0$.

Bevis. Vi antar at våre to linjer $M = 0$, $N = 0$, krysser hverandre i punktet P . Da vil

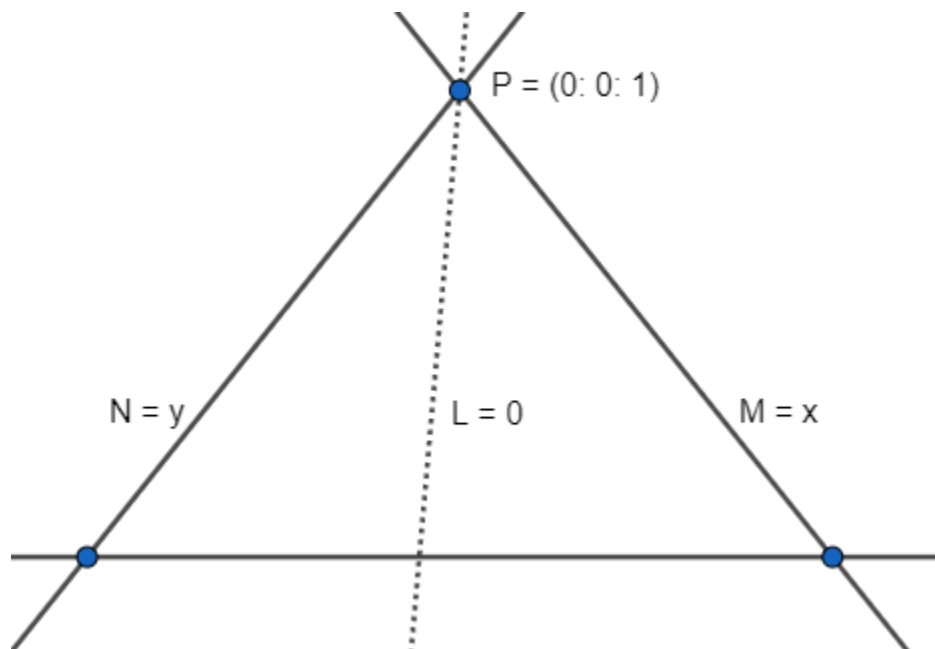
$$M(P) = 0,$$

$$N(P) = 0,$$

og derfor er det opplagt at P ligger på

$$\lambda M + \mu N = 0,$$

For passende $(\lambda : \mu)$. Vi vet at vi kan gjøre en projektiv transformasjon $\psi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ slik at våre to linjer $M = 0$, $N = 0$ kan sendes til to av sidene på referansetrekanten. Da vil $M = x$, $N = y$, og de krysses i det nye punktet $P = (0 : 0 : 1)$. Dermed skal det være mulig å uttrykke alle linjer gjennom P ved hjelp av våre gitte linjer. La oss nå studere en ny linje L og anta at også denne går igjennom P .



Figur 6: $\psi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$

Påstanden nå er at dersom $L(P) = 0$ så er $L = \lambda M + \mu N$ for passende $(\lambda : \mu)$. Vi kan uttrykke likningen til linjen L på formen

$$L : ax + by + cz = 0$$

$$\updownarrow$$

$$L(P) = 0 \iff L(0 : 0 : 1) = 0 \iff c = 0.$$

Derfor vil leddet med koeffisienten c forsvinne, og likningen til linjen L vil nå være på formen

$$L = ax + by,$$

og fordi vi har at $M = x$, $N = y$, kan denne likningen igjen skrives på formen

$$aM + bN = 0.$$

Dermed har vi vist at alle linjer som krysser våre to gitte linjer i skjæringspunktet P kan skrives på formen $\lambda M + \mu N = 0$ for passende $(\lambda : \mu)$, og vi kan konkludere med at alle rette linjer igjennom P representerer en pensel av linjer. *Setning 4* er dermed bevist.

På samme måte, dersom $S = 0$ og $S' = 0$ er to gitte kjeglesnitt, definerer likningen

$$\lambda S + \mu S' = 0$$

en pensel av kjeglesnitt med parametere $(\lambda : \mu)$. Hvert kjeglesnitt i penselen går igjennom punktene som er gitt av $S = S' = 0$ (Maxwell, 1946, Kapittel 9).

2.5 Kryssforhold

Vi skal se at kryssforholdet er et tall vi primært assosierer med fire punkter på en linje i \mathbb{P}^2 . Dette forholdet er invariant, som vil si at kryssforholdet ikke endrer seg under en projektiv transformasjon. Dette skal vi bevise senere i denne seksjonen.

Definisjon 6. Dersom a, b, c, d er fire gitte ordnede verdier sier man at *kryssforholdet* $(a, b; c, d)$ mellom de fire verdiene er gitt ved (Maxwell, 1946, Kapittel 3):

$$(a, b; c, d) = \frac{a - c}{a - d} \Big/ \frac{b - c}{b - d} = \frac{a - c}{a - d} \cdot \frac{b - d}{b - c}.$$

Hvis en av verdiene er ∞ gir brøken fortsatt mening. Kryssforholdet for punkter på $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via $\lambda \mapsto (\lambda : 1)$, hvor $\infty = (1 : 0)$, gir mening for brøken ovenfor med konvensjonen $\frac{\infty}{\infty} = 1$ og $\frac{-\infty}{\infty} = -1$.

Dersom rekkefølgen på verdiene hadde vært en annen ville også kryssforholdet endret seg med hensyn til dette.

Eksempel 2. La oss si at a, b, c, d henholdsvis tar verdiene $0, 1, \frac{1}{2}, \infty$. Da regner vi ut kryssforholdet slik som i definisjonen:

$$(0, 1; \frac{1}{2}, \infty) = \frac{0 - \frac{1}{2}}{0 - \infty} \Big/ \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \infty} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{0 - \infty} \cdot \frac{1 - \infty}{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1.$$

Vi får at kryssforholdet er lik -1 som er en helt spesiell verdi i denne sammenheng, noe vi lar ligge som en 'cliffhanger' enn så lenge. Det trenger ikke nødvendigvis å være tilfellet at alle de fire verdiene er distinkte; kryssforholdet har fortsatt mening dersom to av verdiene sammenfaller (er like). I de tilfellene vil kryssforholdet ta en av de tre spesielle verdiene $1, 0, \infty$ (Maxwell, 1946, Kapittel 3):

$$(A, A; C, D) = (A, B; C, C) = 1$$

$$(A, B; A, D) = (A, B; C, B) = 0$$

$$(A, B; C, A) = (A, B; B, D) = \infty.$$

Setning 5. *Kryssforholdet er bevart under en projektiv transformasjon.*

Bevis. Vi definerer en projektiv transformasjon

$$\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1,$$

hvor

$$\psi(x : y) = (x' : y'),$$

og hvor $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ er gitt av en lineær avbilding mellom to vektorrom:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

med $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Den projektive transformasjonen er lineær og bevarer dermed grad. Matrisen som består av koeffisientene a, b, c, d er en 2×2 inverterbar matrise. Vi introduserer en ny variabel u slik at

$$u = \frac{x}{y} \iff (x : y) = (u : 1),$$

og i tilfellet hvor $u = \infty$ har vi punktet $(1 : 0)$. Vi setter u inn i funksjonen og får

$$\psi(u) = u' = \frac{x'}{y'} = \frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{a\frac{x}{y} + b}{c\frac{x}{y} + d} = \frac{au + b}{cu + d}.$$

Vi vet at kryssforholdet til fire elementer A, B, C, D er gitt ved

$$(A, B; C, D) = \frac{A - C}{A - D} \bigg/ \frac{B - C}{B - D},$$

og vi må vise at kryssforholdet forblir det samme under en projektiv transformasjon. Det vil si at vi må vise at

$$(\psi(A), \psi(B); \psi(C), \psi(D)) = \frac{\psi(A) - \psi(C)}{\psi(A) - \psi(D)} \bigg/ \frac{\psi(B) - \psi(C)}{\psi(B) - \psi(D)} = (A, B; C, D).$$

Vi regner ut ved å putte direkte inn i formelen:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(A) - \psi(C)}{\psi(A) - \psi(D)} \bigg/ \frac{\psi(B) - \psi(C)}{\psi(B) - \psi(D)} &= \frac{\frac{aA + b}{cA + d} - \frac{aC + b}{cC + d}}{\frac{aA + b}{cA + d} - \frac{aD + b}{cD + d}} \cdot \frac{\frac{aB + b}{cB + d} - \frac{aD + b}{cD + d}}{\frac{aB + b}{cB + d} - \frac{aC + b}{cC + d}} = \\ &= \frac{(aA + b)(cC + d) - (aC + b)(cA + d)}{(aA + b)(cD + d) - (aD + b)(cA + d)} \cdot \frac{(aB + b)(cD + d) - (aD + b)(cB + d)}{(aB + b)(cC + d) - (aC + b)(cB + d)}. \end{aligned}$$

Vi multipliserer ut og observerer at leddene $(acAC)$, $(acBD)$, (bd) kan hvikes ut. Dermed står vi igjen med

$$\begin{aligned} &\frac{adA + bcC - adC - bcA}{adA + bcD - adD - bcA} \cdot \frac{adB + bcD - adD - bcB}{adB + bcC - adC - bcB} = \\ &= \frac{A(ad - bc) - C(ad - bc)}{A(ad - bc) - D(ad - bc)} \cdot \frac{B(ad - bc) - D(ad - bc)}{B(ad - bc) - C(ad - bc)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{A-C}{A-D} \cdot \frac{B-D}{B-C} = \frac{A-C}{A-D} \Big/ \frac{B-C}{B-D} = (A, B; C, D).$$

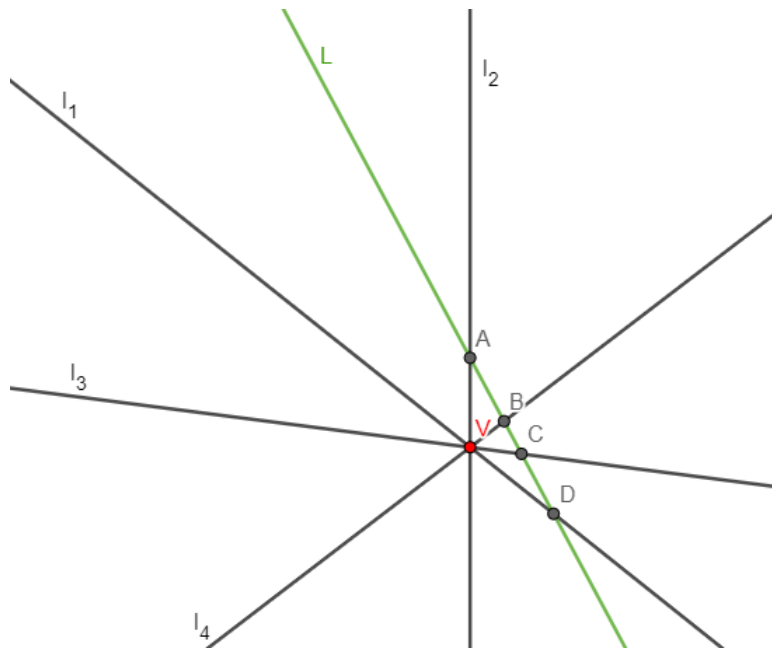
Vi ser at vi ender opp med å forkorte brøken med determinanten $(ad - bc)$ for å til slutt oppnå vårt ønskede resultat. Dermed har vi bevist *setning 5*.

Notasjon 1. I denne seksjonen kommer vi til å bruke notasjonen $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ for parameter-verdiene til fire linjer gjennom et punkt, og A, B, C, D for parameter-verdiene til fire punkter på en linje. Det må være klart for leseren at vi dermed har identifisert linjene og punktene med \mathbb{P}^1 -

Setning 6. *Kryssforholdet mellom fire linjer $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ gjennom ett felles punkt V er ekvivalent med kryssforholdet mellom de fire skjæringspunktene A, B, C, D som oppstår der hvor en transversal linje L skjærer de fire linjene:*

$$(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = (A, B; C, D).$$

Enn så lenge lar vi *setning 6* stå uten bevis. Vi skal nemlig senere, i redegjørelsen av Salmons artikkel (seksjon 3.3), formulere en konkret variant av denne setningen som en påstand med bevis.

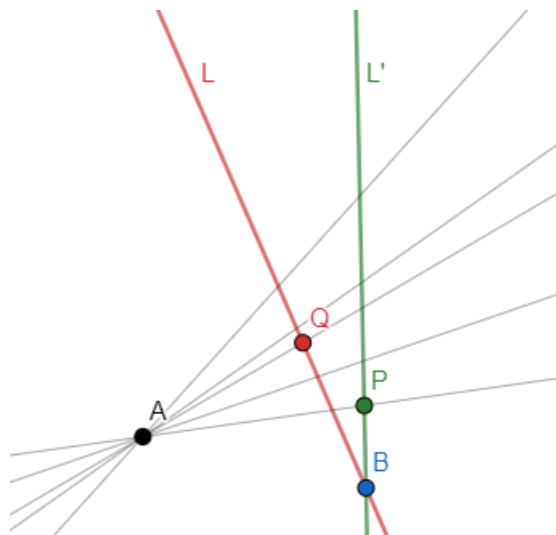


Figur 7: $(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = (A, B; C, D)$.

Setning 7. *En projeksjon fra en linje til en annen linje med senter i et punkt utenfor de to linjene er en projektiv transformasjon.*

Bevis. Vi ønsker å redusere spørsmålet om invarians av kryssforholdet til ett eksempel. Si våre gitte data er ett punkt A og to linjer L og L' i \mathbb{P}^2 . Vi skal projisere fra L til L' ved å bruke linjer gjennom A . Vi må utnytte en projektiv transformasjon til å plassere alle objektene enklest mulig. I dette tilfellet er det nok projektive transformasjoner til å redusere alt til ett eneste eksempel. Vi vet at vi kan plassere fire punkter i generell posisjon (tre av dem ikke på linje) som vi vil. Det vil si det finnes en projektiv transformasjon som sender tre av punktene til hjørnene på referansetrekanten og det siste på enhetspunktet $(1 : 1 : 1)$.

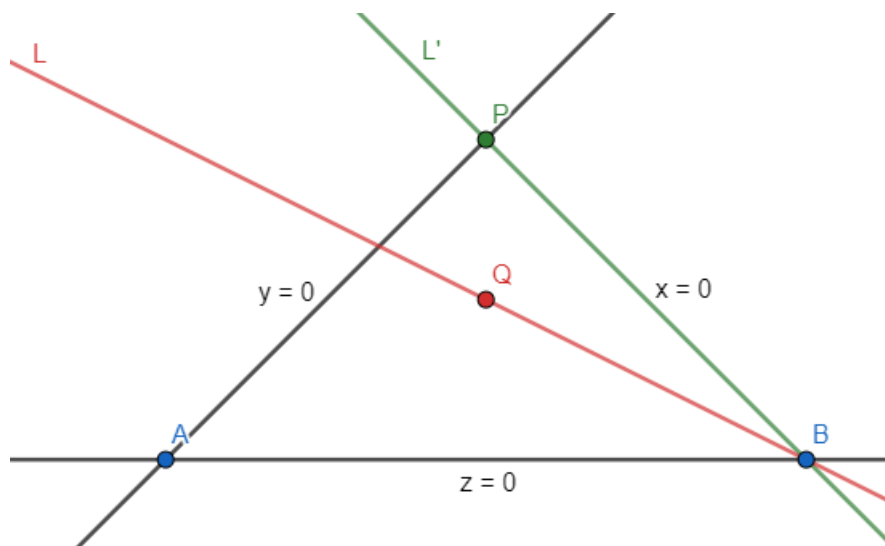
Vi lar B være snittpunktet mellom L og L' , Q være ytterligere et punkt på L og P ytterligere et punkt på L' (Se figur 8).



Figur 8: Våre gitte data.

Nå vet jeg at det finnes en projektiv transformasjon $\phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ som sender A , B , P , Q til henholdsvis $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, $(1 : 1 : 1)$. Linjen L' sendes da til linjen med likning $x = 0$ på referansetrekanten. Det er nemlig de to hjørnene $P = (0 : 0 : 1)$ og $B = (0 : 1 : 0)$ som bestemmer linjen:

$$L' : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x = 0.$$



Figur 9: $\phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$

For å finne ut hva som skjer med linjen L må vi finne likningen til linjen som går igjennom de to punktene $B = (0 : 1 : 0)$, $Q = (1 : 1 : 1)$. Da får vi at

$$L : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - z = 0.$$

Videre må vi parametrisere våre nye linjer L , L' slik at vi kan identifisere dem med \mathbb{P}^1 . La oss først betrakte linjen

$$L \subset \mathbb{P}^2 : x - z = 0 \iff x = z.$$

Dette impliserer at alle punkter på denne linjen ser ut som $(u : v : u)$, og derfor er parametriseringen klar:

$$\mathbb{P}^1 \ni (u : v) \mapsto (u : v : u).$$

$$\psi(u : v) = (u : v : u)$$

Studerer vi nå avbildingen

$$\psi' : \mathbb{P}^1 \rightarrow L',$$

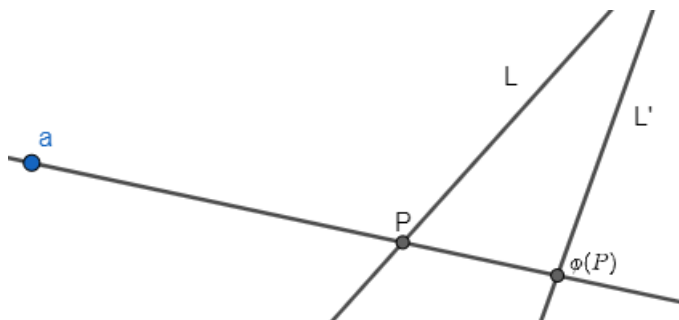
hvor

$$L' \subset \mathbb{P}^2 : x = 0,$$

ser vi at alle punkter på denne linjen er på formen $(0 : u : v)$.

En ny avbilding $\phi : L \rightarrow L'$ med senter i punktet $a = (1 : 0 : 0)$ er definert slik:

Et punkt $\phi(P) \in L'$ er skjæringspunktet mellom linjen L' og linjen gjennom a og $P \in L$ (Se figur 10).



Figur 10: $L \rightarrow L'$.

Påstand. Gitt et punkt $P=(u : v : u) \in L$, vil linjen M gjennom $a = (1 : 0 : 0)$ og $P = (u : v : u)$ treffe linjen L' i et punkt $P' = (0 : v : u)$.

Vi vet allerede om to punkter som bestemmer linjen M ; nemlig a og P , og da vet vi fra tidligere hvordan vi finner likningen til M :

$$\mathbb{P}^2 \supset M = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & u \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff uy - vz = 0, \quad (0 : u : -v) \subset \check{\mathbb{P}}^2$$

$$\implies L' \cap M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & -v \end{vmatrix} = (0 : v : u).$$

Derfor har vi at

$$(u : v : u) \in L \xrightarrow{\phi} L' \ni \phi(u : v : u)$$

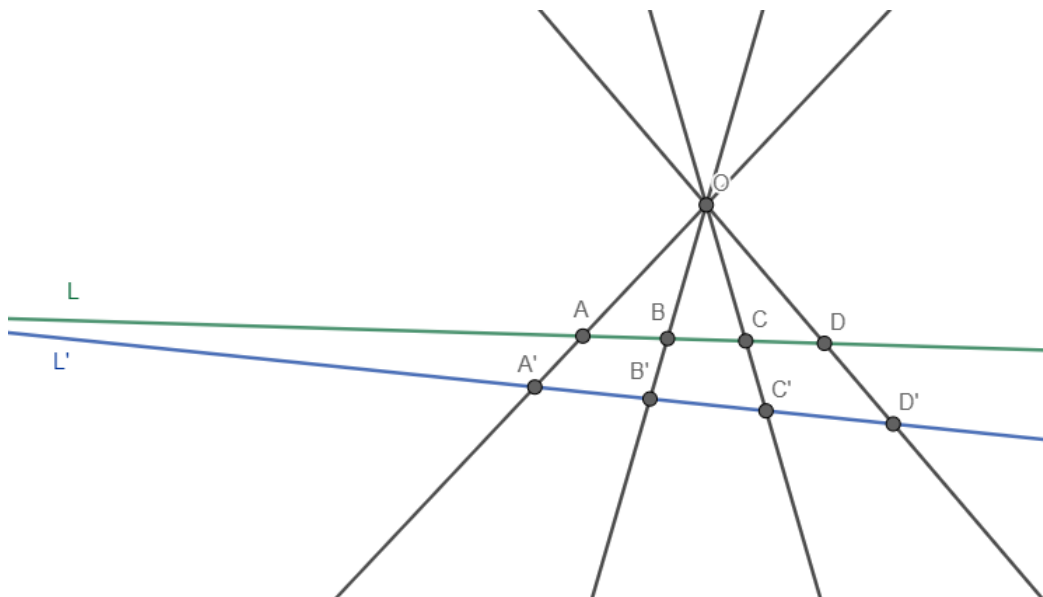
$$\cong \psi \quad \cong \psi'$$

$$(u : v) \in \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \ni (v : u).$$

Vi kan altså konkludere med at en projeksjon fra en linje til en annen linje (med senter i et punkt utenfor de to linjene) er en projektiv transformasjon, og siden vi også har bevist at kryssforholdet er invariant under en projektiv transformasjon, har vi bevist en fundamental setning fra boken til Maxwell (Maxwell, 1946, S. 52):

Setning 8. Dersom A, B, C, D er fire kollineære punkter og O et vilkårlig punkt i planet, og hvis linjene OA, OB, OC, OD møter en linje i punktene A', B', C', D' , er kryssforholdet

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$



Figur 11: $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

Et vesentlig poeng i *Setning 8* er at den transversale linjen kan velges vilkårlig.

2.6 Harmonisk kryssforhold

Dersom $A = (x_1 : y_1 : z_1)$ og $B = (x_2 : y_2 : z_2)$ er to punkter i \mathbb{P}^2 kan et hvilket som helst punkt på linjen AB uttrykkes i form av en parameter λ som

$$(x_1 + \lambda x_2 : y_1 + \lambda y_2 : z_1 + \lambda z_2),$$

og da finnes også et fjerde punkt på formen

$$(x_1 - \lambda x_2 : y_1 - \lambda y_2 : z_1 - \lambda z_2).$$

Vi ser at når $\lambda = 0$ står vi igjen med punkt A og når $\lambda = \infty$ står vi igjen med punkt B . Vi velger oss et bestemt tredje punkt

$$C = (x_1 + \lambda_0 x_2 : y_1 + \lambda_0 y_2 : z_1 + \lambda_0 z_2)$$

og et bestemt fjerde punkt

$$D = (x_1 - \lambda_0 x_2 : y_1 - \lambda_0 y_2 : z_1 - \lambda_0 z_2).$$

Da får vi kryssforholdet

$$(A, B; C, D) = (0, \infty; \lambda_0, -\lambda_0) = \frac{0 - \lambda_0}{0 - (-\lambda_0)} \Big/ \frac{\infty - \lambda_0}{\infty - (-\lambda_0)} = \frac{-\lambda_0}{\lambda_0} = -1.$$

Definisjon 7. Når vi får et kryssforhold lik -1 sier vi at det er et *harmonisk kryssforhold*. Spesifikt har vi at når punktene C, D deler punktene A, B harmonisk, oppnår vi kryssforholdet

$$(A, B; C, D) = -1.$$

Punktene C, D er harmonisk konjugat til hverandre med respekt til A og B (Maxwell, 1946, Kapittel 3).

Gjennom dualitet (linje-koordinater) skal vi kunne få et like imponerende resultat for linjer. Ovenfor hadde vi en situasjon med fire punkter på en linje, hvor punktene lå harmonisk. Dualt til dette er fire linjer gjennom ett punkt, hvor de fire linjene ligger harmonisk. Vi kan vise dette ved å ta utgangspunkt i to gitte linjer $a = (r_1 : s_1 : t_1)$, $b = (r_2 : s_2 : t_2)$ i \mathbb{P}^2 . Da vil de to linjene

$$c = (r_1 + \lambda r_2 : s_1 + \lambda s_2 : t_1 + \lambda t_2), \quad d = (r_1 - \lambda r_2 : s_1 - \lambda s_2 : t_1 - \lambda t_2)$$

for en bestemt λ , krysse linjene a, b i samme skjæringspunkt og dele dem harmonisk. De fire linjene former dermed det Maxwell kaller en *harmonisk pensel* av linjer, hvor linjene c, d er harmonisk konjugat til hverandre med respekt til linjene a, b (Maxwell, 1946, Kapittel 3). Han skriver at de fire linjene danner en harmonisk pensel, men det strider som nevnt i mot dagens matematiske språk og hva vi har definert som en pensel tidligere i oppgaven. Vi korrigerer Salmon og sier at de fire linjene av penselen ligger harmonisk som er ekvivalent med et kryssforhold lik -1 . Maxwell presiserer viktigheten av dette duale resultatet og ser sitt snitt til å spesifisere det i form av punkt-koordinater:

Dersom $r_1x + s_1y + t_1z = 0$, $r_2x + s_2y + t_2z = 0$ er to linjer i \mathbb{P}^2 , vil de to linjene

$$(r_1x + s_1y + t_1z) \pm \lambda(r_2x + s_2y + t_2z) = 0$$

krysse dem i samme skjæringspunkt og dele dem harmonisk (Maxwell, 1946, Kapittel 3, s. 54).

2.7 Kjeglesnitt i \mathbb{P}^2

Den generelle likningen for en kvadratisk kurve er

$$S(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

og $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \mid S(x, y, z) = 0\}$ er et kjeglesnitt i det projektive plan. Alternativt kan vi skrive denne likningen på matriseform ved en radvektor p , en søylevektor p^T og en 3×3 symmetrisk matrise A :

$$S(x, y, z) = [x \quad y \quad z] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0,$$

hvor

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}.$$

Det at A er symmetrisk vil si at $A = A^T$, og mer kompakt har vi at likningen er på formen

$$pAp^T = 0.$$

Maxwell presiserer at et kjeglesnitt generelt kan bestemmes av sine punkter (minimum 5). På den måten kan vi kalle familien av punkter $(x : y : z)$ med koordinater som tilfredsstillers en kvadratisk likning

$$S : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

for det *geometriske stedet* eller *lokus* til et kjeglesnitt. Dualt vil familien av linjer $(l : m : n)$ med koordinater som tilfredsstillers en kvadratisk likning

$$\Sigma' : a'l^2 + b'm^2 + c'n^2 + 2f'mn + 2g'nl + 2h'lm = 0$$

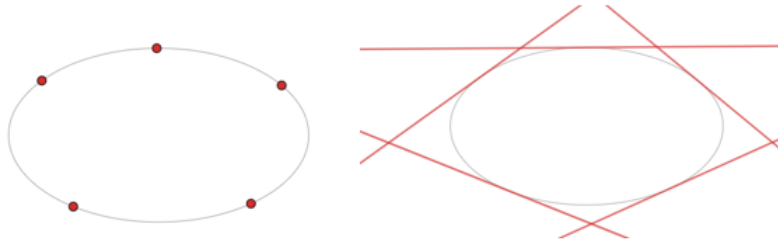
representere en *innhylling* av et kjeglesnitt (Maxwell, 1946, Kapittel 5). Vi skal spesielt tenke på denne likningen som tangentene til det geometriske stedet for kjeglesnittet.

Definisjon 8. Dersom $S \subset \mathbb{P}^2$ definerer et kjeglesnitt med likning $S(x, y, z) = 0$ bestemt av sine punkter, skal vi bruke notasjonen $\check{S} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ for *det duale kjeglesnitt*. Det duale kjeglesnitt \check{S} bestemmes av tangentene i disse punktene og har likning på formen

$$rx + sy + tz = 0,$$

hvor koeffisientene r, s, t representerer de partiell deriverte i punktene.

Vi kan med andre ord bestemme et kjeglesnitt ved sine punkter, eller dualt ved sine tangenter.



Figur 12: $S \subset \mathbb{P}^2$ og det duale kjeglesnitt $\check{S} \subset \check{\mathbb{P}}^2$.

Vi skiller mellom *degenererte* og *ikke-degenererte kjeglesnitt*. Likningen

$$(l_1x + m_1y + n_1z)(l_2x + m_2y + n_2z) = 0$$

er både homogen og kvadratisk når vi multipliserer den ut, noe som impliserer at den tilfredsstiller vår definisjon av et kjeglesnitt i \mathbb{P}^2 . Det likningen representerer er imidlertid unionen av to linjer med homogene likninger av første grad. Dette kalles en degenerering av kjeglesnitt, og vi sier at unionen av de to linjene former et *degenerert kjeglesnitt* (Maxwell, 1946, Kapittel 5). Disse to linjene kan også være like, noe vi skal få et møte med når vi gjør rede for Salmons artikkel, og da vil det degenererte kjeglesnittet være formet av en dobbel linje på formen

$$(lx + my + nz)^2 = 0.$$

Alle *ikke-degenererte kjeglesnitt* er ekvivalente med den homogeniserte enhetssirkelen $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i \mathbb{P}^2 .

2.7.1 Skjæring mellom to kjeglesnitt

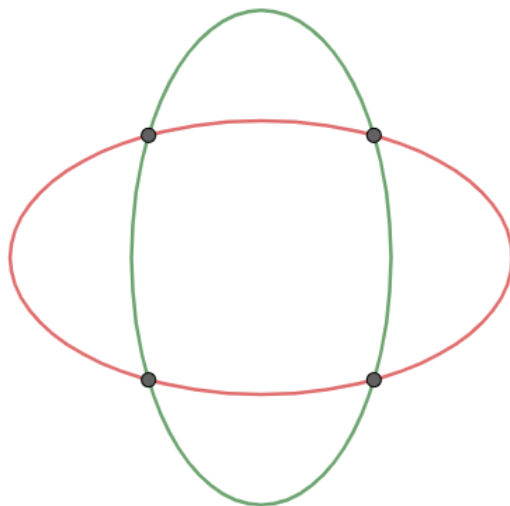
Når vi arbeider i \mathbb{P}^2 vet vi at to linjer ℓ , m alltid vil krysse hverandre i ett punkt; at parallelle linjer møtes i det uendelige, og at vi kan uttrykke en tredje linje gjennom dette punktet som en lineær kombinasjon av de to gitte linjene. På samme måte vil to kjeglesnitt S , S' generelt skjære hverandre i fire punkter, og vi kan uttrykke et hvilket som helst annet kjeglesnitt gjennom disse fire punktene som en lineær kombinasjon av de to gitte (Maxwell, 1946, Kapittel 9). Vi har allerede nevnt at dersom vi lar $S = 0$, $S' = 0$ være to gitte kjeglesnitt vil likningen

$$\lambda S + \mu S' = 0$$

definere en pensel av kjeglesnitt for passende verdier av $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$. Det vil si at et hvilket som helst kjeglesnitt som treffer de to gitte kjeglesnittene i deres fire skjæringspunkt kan uttrykkes ved denne likningen. Vi lar $k = \frac{\mu}{\lambda}$ slik at $(1 : k) = (\lambda : \mu)$ hvor

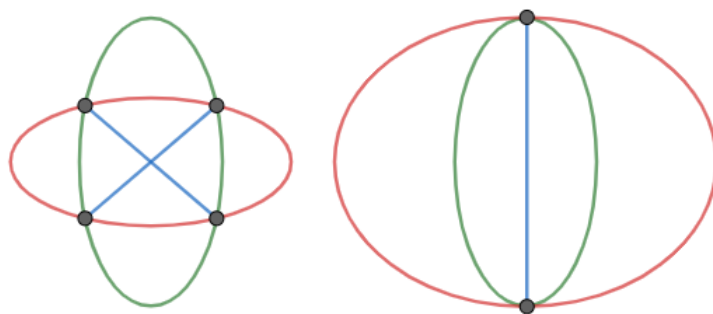
$k = \infty$ naturlig dukker opp som $(\lambda : \mu) = (0 : 1)$.

For hver verdi av k vil det være et femte punkt som tilfredsstiller den resulterende likningen $S - kS' = 0$ og som entydig bestemmer et kjeglesnitt av penselen.



Figur 13: De to ikke-degenererte kjeglesnittene $S = 0$ (rød), $S' = 0$ (grønn) skjærer hverandre i fire punkter.

Definisjon 9. *En korde er en linje som møter en kvadratisk kurve i to punkter* (Maxwell, 1946, Kapittel 4).



Figur 14: Korder

ILLUSTRASJON. Gitt to kjeglesnitt i \mathbb{P}^2 skal vi snakke om *skjærings-korder* og *kontakt-korder*. Til venstre i figur 14 (i blått) ser vi en illustrasjon på hva vi mener med *skjærings-korder*. Det er altså et par av linjer som krysser hverandre og

som går igjennom alle fire skjæringspunktene til de to kjeglesnittene. Vi skal snakke om skjærings-korder i tilfeller med fire distinkte skjæringspunkt mellom to kjeglesnitt.

Til høyre i figur 14 ser vi en illustrasjon på hva som menes med en *kontakt-korde* (i blått). Dette er en linje som forener skjæringspunktene mellom to kjeglesnitt som kun har to skjæringspunkt. Når det kun er snakk om to skjæringspunkt er tangentene til de to kjeglesnittene i de to skjæringspunktene like. Da har vi noe vi kaller *dobbel kontakt*.

Definisjon 10. Dersom A, B, C, D er de fire skjæringspunktene mellom to kjeglesnitt står vi foran et tilfelle med *dobbel kontakt* når A, D er like og B, C er like et annet sted.

Siden likningene $S - k_1 S' = 0$, $S - k_2 S' = 0$ har samme løsninger som likningene $S = 0$, $S' = 0$ følger det at alle par av kjeglesnitt av en gitt pensel har de samme skjæringspunkt (Maxwell, 1946, Kapittel 9).

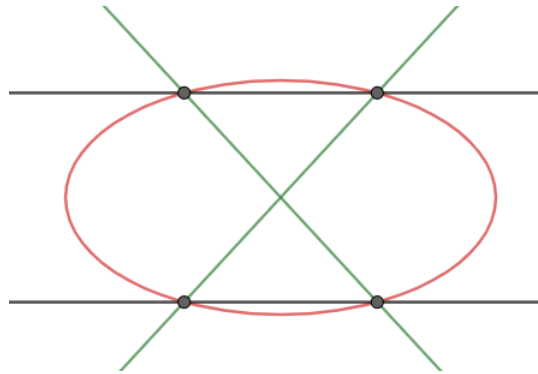
Videre er vi spesielt interessert i verdiene til k når $S' = 0$ representerer et par av linjer. Vi lar $S' = 0$ være unionen av to linjer $\ell : l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0$, $m : l_2 x + m_2 y + n_2 z = 0$ slik at

$$S' : \ell m = 0 \iff (l_1 x + m_1 y + n_1 z)(l_2 x + m_2 y + n_2 z) = 0.$$

Likningen vi skal betrakte videre kan da skrives på formen

$$S - k \ell m = 0.$$

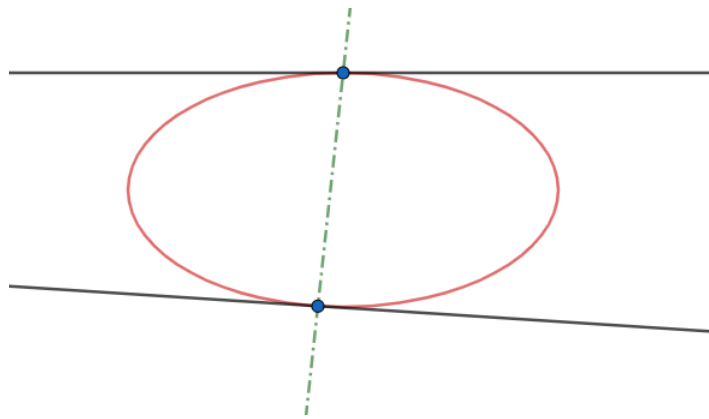
Vi har en situasjon hvor kjeglesnittet $S = 0$ skjæres i fire punkter av to linjer ℓ, m . Disse to linjene representerer et degenerert kjeglesnitt $\ell m = 0$. Da vet vi at et tredje kjeglesnitt $S - k \ell m = 0$ er bestemt som en lineær kombinasjon av $S = 0$ og $\ell m = 0$, og som vil skjære $S = 0$ i samme fire punkter som $\ell m = 0$, bare på en annen måte.



Figur 15: Her ser vi kjeglesnittet $S' = \ell m = 0$ representert av de to kryssende linjene i grønt som skjærer $S = 0$ i fire punkter. Linjene i svart representerer et tredje kjeglesnitt $S - k\ell m = 0$ som er en lineær kombinasjon av de to gitte kjeglesnittene. Dette paret av linjer vil selvsagt også gå igjennom alle de fire skjæringspunktene.

Videre dersom vi antar at de to linjene ℓ og m er like, vil $S' = \ell^2$ (en dobbel linje) og vi går fra fire til to skjæringspunkt. Likningen kan da skrives på formen

$$S - k\ell^2 = 0.$$



Figur 16: Her er kjeglesnittet $S' = \ell^2$ en dobbel linje (i grønt). En viktig observasjon er at linjen ℓ nå er kontakt-korden, og et tredje kjeglesnitt $S - k\ell^2 = 0$ er bestemt som en lineær kombinasjon av $S = 0$ og $\ell^2 = 0$. Dette tredje kjeglesnittet er nå et par av tangentlinjer (i svart).

I denne spesielle situasjonen står vi ovenfor et tilfelle hvor den doble linjen $\ell^2 = 0$ har dobbel kontakt med $S = 0$ i to punkter. Et tredje kjeglesnitt, $S - \ell^2 = 0$, uttrykket som en lineær kombinasjon av de to gitte må da være et par av tangentlinjer i de to

skjæringspunktene $S \cap \ell^2$.

Vi ser fra figur 15 til figur 16 at de seks diagonalene blir til en kontakt-korde og to tangentlinjer. Derfor, for å spesifisere hva vi har kommet frem til her: Alle kjeglesnitt med dobbel kontakt til et gitt ikke-degenerert kjeglesnitt $S = 0$ i to punkter definerer en bestemt pensel. Et viktig funn i denne penselen er at vi har identifisert kontakt-korden (som dobbel linje ℓ^2) med et par av tangentlinjer. Dette blir et viktig hjelperesultat senere i beviset av Brianchon sitt teorem.

2.8 Polaritet

Salmon skriver i artikkelen at Pascal og Brianchon sine teoremer er knyttet sammen gjennom teorien om, direkte oversatt: *gjensidige polarer* (Salmon, 1843). Samtidig har vi allerede annonsert at dualitet blir et nøkkelbegrep for å vise sammenhengen mellom disse teoremene. Dualitet og polaritet har en sterk sammenheng. Vi skal bruke litt tid i denne seksjonen på å vise dette. Det vi skal gjøre rede for i denne seksjonen blir avgjørende i forhold til å bevise Pascals teorem senere i kapittel 3. Vi må imidlertid fylle på med enda litt teori for å ha nok ammunisjon til å komme til kjernen i hva som inngår i polaritet.

Vi vet at et kjeglesnitt C med likning $f(x, y, z) = 0$ er et homogent polynom av andre grad og kan derfor også kalles en kvadratisk form. Venstresiden av likningen til C kan, som vist tidligere, uttrykkes på formen

$$f(x, y, z) = [x \ y \ z] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

hvor A er en 3×3 symmetrisk matrise bestående av koeffisientene til f .

Definisjon 11. Vi sier at q er en *symmetrisk bilinear form* dersom den kan uttrykkes på formen

$$q(x, y, z; x', y', z') = [x \ y \ z] A \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Den er bilinear fordi matriseproduktet er lineært, og A er en symmetrisk matrise. En symmetrisk bilinear form q på et vektorrom V sies å være *ikke-degenerert* hvis og bare hvis A er ikke-singulær og følgende betingelser holder:

$$q(v, w) = 0 \ \forall w \in V \iff v = 0.$$

Når vektorrommet V har dimensjon tre, slik at det er kjeglesnitt i \mathbb{P}^2 vi ser på, så er q ikke-degenerert nøyaktig når den tilhørende kvadratiske formen $f(x, y, z) =$

$q(x, y, z; x, y, z)$ definerer et kjeglesnitt som er ikke-degenerert, altså som ikke er unionen av to linjer.

Setning 9. Hvis $S = 0$ er et kjeglesnitt, finnes det en symmetrisk bilinear form $q(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$ på $V = \mathbb{C}^3$ slik at

$$S(x, y, z) = q(x, y, z; x, y, z).$$

Bevis. Dersom q er en symmetrisk bilinear form så er

$$f(x, y, z) = q(x, y, z; x, y, z)$$

et homogent andregradspolynom. Vi ønsker å gå andre vei; Gitt et homogent andregradspolynom f må vi finne en tilhørende symmetrisk bilinear form q . Løsningen er å bruke definisjonen for en symmetrisk bilinear form. Bytter vi ut kolonnevektoren $[x', y', z']$ med kolonnevektoren $[x, y, z]$ i likningen til den symmetriske bilinear formen q fra *definisjon 11* har vi at

$$q(x, y, z; x, y, z) = [x \ y \ z] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Da er $q(x, y, z; x, y, z) = f(x, y, z)$. Dermed har vi vist at et kjeglesnitt kan identifiseres med en symmetrisk bilinear form. Dette impliserer at ved innføring av en symmetrisk bilinear form som hører til f vil det duale til et kjeglesnitt bare være det opprinnelige kjeglesnittet. Det betyr at vi ikke trenger å tenke på hva som skjer med kjeglesnittet i det duale plan $\check{\mathbb{P}}^2$.

Lemma 1. Ved å innføre en ikke-degenerert symmetrisk bilinear form q på et vektorrom V av dimensjon tre, oppnår vi en isomorfi som gjør at $\mathbb{P}^2 \cong \check{\mathbb{P}}^2$.

Bevis. Vi starter med et vektorrom $V = k^3 = \mathbb{C}^3$. Da sier vi at det projektive rommet $\mathbb{P}(V)$ kan oppfattes som linjene i V gjennom origo, som innebærer vektorer $v \in V$, $v \neq 0$, modulo skalering (\mathbb{P}^3).

Det duale vektorrommet V^\vee er mengden av lineære avbildinger (funksjoner)

$$V \rightarrow k$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z).$$

$\mathbb{P}(V^\vee)$ kan da oppfattes som mengden av hyperplan i V med $f(x, y, z) = 0$. Det vil si løsningene til en lineær likning. $\mathbb{P}(V^\vee)$ er linjene i det duale projektive rommet.

Punkt i $\mathbb{P}(V^\vee)$ tilsvarer hyperplan i $\mathbb{P}(V)$. Her er det tydelig at at $\mathbb{P}(V)$ og $\mathbb{P}(V^\vee)$ er forskjellige rom.

Videre, dersom vi innfører en symmetrisk bilinear form q , nærmer vi oss det vi ønsker å vise; nemlig at via den symmetriske bilineære formen eksisterer det en isomorfi mellom $\mathbb{P}(V)$ og $\mathbb{P}(V^\vee)$.

Alle bilineære former q på et vektorrom V gir en lineær avbildning

$$V \rightarrow V^\vee$$

ved at $v \in V$ sendes til $q(v, -)$. Vi ønsker at dette skal være en isomorfi, noe det er hvis og bare hvis q er ikke-degenerert. Da har vi at

$$(v, w) \mapsto q(v, w) = 0.$$

og vi oppnår en isomorfi: $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V^\vee)$. Hos oss, slik vi har brukt vår notasjon, er dette ekvivalent med

$$\mathbb{P}^2 \cong \check{\mathbb{P}}^2.$$

Dette er kjernen i hva som menes med *polaritet*; at \mathbb{P}^2 og $\check{\mathbb{P}}^2$ er isomorfe, og dersom q er en versjon av prikkproduktet vil punkter i $\mathbb{P}^2 \rightsquigarrow$ linjer i \mathbb{P}^2 :

$$\mathbb{P}^2 \ni (a : b : c) \rightsquigarrow q(a, b, c; x, y, z) = ax + by + cz = 0 \subset \mathbb{P}^2.$$

Alle punkter og linjer oppfattes å være i ett og samme plan. Da kalles linjen som er dual til ett gitt punkt for *polaren* til punktet, og punktet for *polen* til linjen. Pol og polar er det samme som dualt punkt og dual linje, bortsett fra at vi oppfatter dem som liggende i det samme projektive planet via den symmetriske bilineære formen.

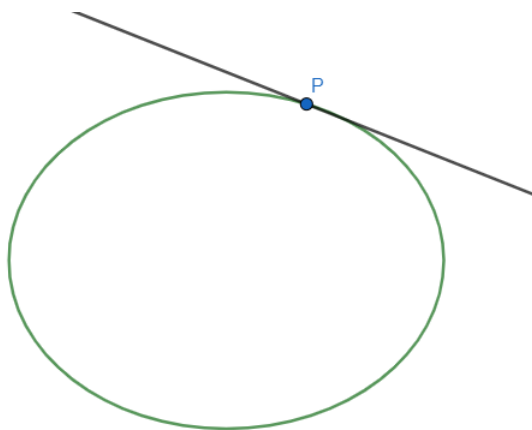
Definisjon 12. Vi holder fast et kjeglesnitt, eller ekvivalent den symmetriske bilineære formen q . For hvert punkt i $\mathbb{P}(V)$ gir dualitet en linje i $\mathbb{P}(V^\vee)$. Men q gir også en isomorfi $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V^\vee)$, og gjennom denne får vi også en linje i $\mathbb{P}(V)$. Dualitet pluss et valg av symmetrisk bilinear form q gir oss for hvert punkt i $\mathbb{P}(V)$ en linje i $\mathbb{P}(V)$. Hver slik linje tilsvarer *polaren* til hvert tilhørende punkt. Tilsvarende gjelder for *pol*.

La oss nå vise en geometrisk versjon av konstruksjonen ovenfor. Vi tar med oss det enkle resonnementet om at dualt punkt og dual linje svarer til pol og polar etter innføring av en ikke-degenerert symmetrisk bilinear form q . Vi tar utgangspunkt i et ikke-degenerert kjeglesnitt $S = 0$ som hører til denne ikke-degenererte symmetriske bilineære formen q og et punkt $P = (x_0 : y_0 : z_0)$. Da har vi tre mulige tilfeller: P ligger på, innenfor eller utenfor S .

Vi antar først at P ligger på kjeglesnittet S . Tidligere i *setning 1* beviste vi at likningen for at et punkt ligger på en linje gjør ingen forskjell på punktkoordinater og linjekoordinater. Vi vet også fra tidligere at et kjeglesnitt kan beskrives ved sine punkter (lokus), eller dualt ved sine tangentlinjer. Derfor vil polaren $\ell(P)$ til et punkt $P = (x_0 : y_0 : z_0)$ som ligger på et ikke-degenerert kjeglesnitt S bare være tangentlinjen i punktet P :

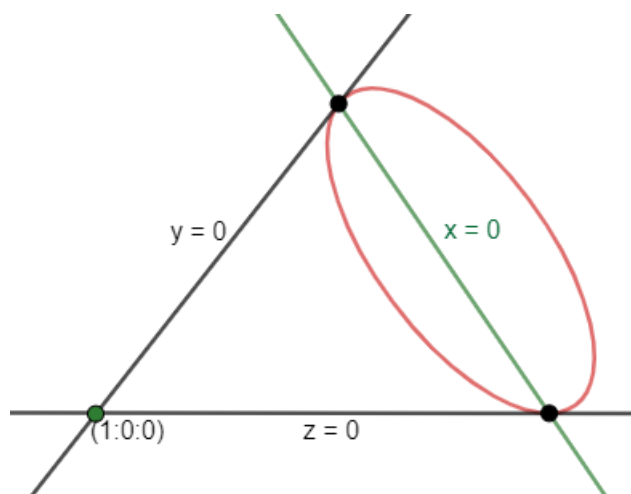
$$\ell(P) = \{(x, y, z) \mid [x \ y \ z] A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = 0\}$$

Vi sier da at punktet P er polen til linjen $\ell(P)$.



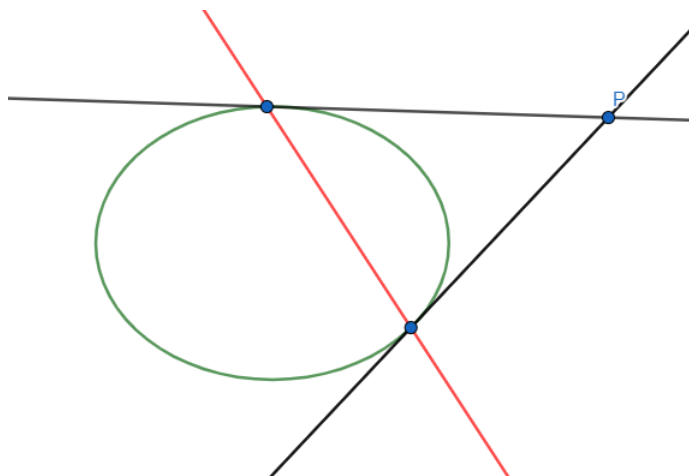
Figur 17: Polaren til punktet P er tangenten til S i P .

Det neste tilfellet er når punktet P ligger utenfor kjeglesnittet S . La oss for et øyeblikk anta at vi har gitt to punkter på S . Da vet vi at dette dualt tilsvarer to tangentlinjer i disse to punktene. Videre vet vi at disse tangentlinjene må krysse hverandre i \mathbb{P}^2 en plass utenfor S . Vi kan derfor oppfatte P som skjæringspunktet mellom to tangenter til S . Da finnes det en projektiv transformasjon som sender punktet P til $(1 : 0 : 0)$ på referansetrekanten, og som en direkte konsekvens av dette vil linjene $y = 0$ og $z = 0$ på referansetrekanten krysses i vår nye P . Disse linjene representerer også to tangentlinjer til kjeglesnittet S (Se figur 18).



Figur 18: Polaren til punktet P er tangenten til C i P .

Videre vet vi at $P = (1 : 0 : 0)$ dualt svarer til linjen $x = 0$, og fordi vi har innført q betyr dette at $x = 0$ er polaren til P . Vi ser på figur 18 at denne linjen er den som forener de to tangenterne på S fra P . Vi ser også at polaren i et slikt tilfelle tilsvare korden av kontakt (Maxwell, 1946, Kapittel 5). Dermed finner vi polaren $\ell(P)$ (den røde linjen på figur 19) til et punkt P utenfor et kjeglesnitt S ved å trekke to tangentlinjer fra P på S og finne linjen som forener de to tangenterne.



Figur 19: Polaren til punktet P er linjen som forener de to tangenterne på kjeglesnittet S .

Det siste tilfellet, at P ligger inni S , er av liten betydning for vår oppgave, og derfor ønskes det ikke en redegjørelse her.

Merknad 4. Maxwell definerer pol og polar på en litt uklar måte, men han ender

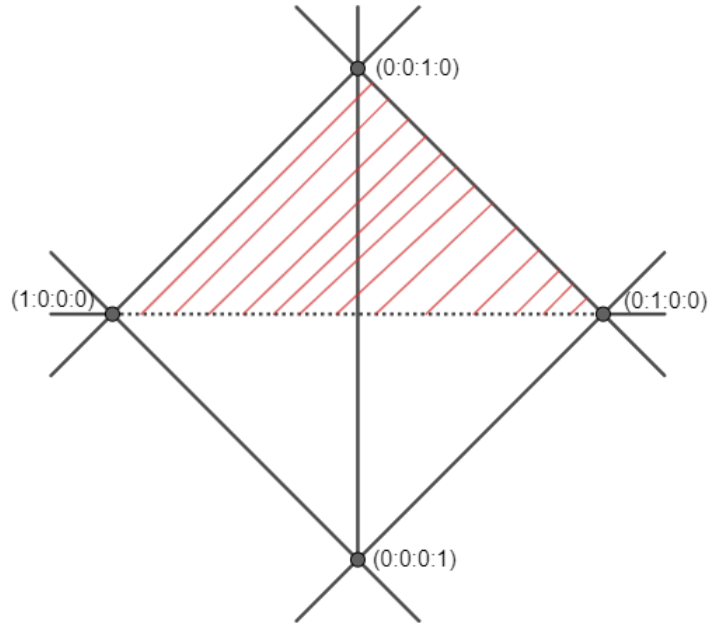
til slutt opp med samme konklusjoner som de vi har trukket ovenfor. Det første han prøver å få frem er et bilde av situasjonen: Vi har gitt et punkt P_1 , og en vilkårlig linje gjennom P_1 møter et kjeglesnitt i to punkter Q_1, Q_2 . Så skriver han at det geometriske stedet til P_2 , den harmonisk konjugerte til P_1 med respekt til Q_1 og Q_2 , kalles for polaren til P_1 med respekt til kjeglesnittet. P_1 blir da kalt for polen til sin polar (Maxwell, 1946, Kapittel 5).

Det kommer egentlig ikke særlig godt frem hva han mener her. Vi må tenke på den vilkårlige linjen gjennom P_1 som variabel og dermed vil også P_2 variere. Da vil P_2 , den variable harmonisk konjugerte til P_1 med respekt til Q_1, Q_2 'forme' en linje. Denne linjen er polaren til P_1 med respekt til kjeglesnittet. Etter mye om og men kommer også Maxwell frem til at hvis P_1 ligger på kjeglesnittet vil dens polar være tangentlinjen i P_1 med respekt til kjeglesnittet, og dersom P_1 ikke ligger på kjeglesnittet vil polaren til punktet P_1 være korden av kontakt mellom tangentlinjene trukket ned på kjeglesnittet fra P_1 (Maxwell, 1946, Kapittel 5).

2.9 Mengder og dualitet i det projektive rommet \mathbb{P}^3

Vi har snart samlet alt vi trenger av kunnskap og redskaper til å gyve løs på artikkelen. Det siste vi skal gjøre rede for er imidlertid kanskje det viktigste for å forstå Salmon. Det er nemlig der han tar et skifte fra planet til rommet at hans innsikt virkelig kommer til syne. Vi går fra kjeglesnitt og linjer i \mathbb{P}^2 til kvadriker og plan i \mathbb{P}^3 .

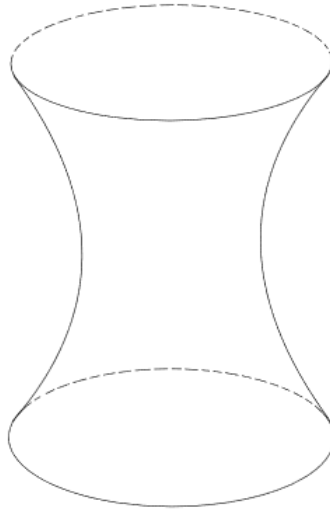
Merknad 5. På samme måte som at referansetrekanten er en representasjon av det projektive plan \mathbb{P}^2 skal vi bruke et *referanse-tetraeder* som representasjon for det projektive rommet \mathbb{P}^3 . I \mathbb{P}^2 fant vi ut at gitt fire punkter i generell posisjon kunne vi finne en entydig projektiv transformasjon som sender de fire punktene til hjørnene av en referansetrekant pluss enhetspunktet. I \mathbb{P}^3 gjelder tilsvarende at gitt fem punkter i generell posisjon kan vi finne en entydig projektiv transformasjon som sender disse til hjørnene av et tetraeder pluss enhetspunktet.



Figur 20: Referanse-tetraeder med hjørner $X = (1 : 0 : 0 : 0)$, $Y = (0 : 1 : 0 : 0)$, $Z = (0 : 0 : 1 : 0)$, $W = (0 : 0 : 0 : 1)$ etter en entydig projektiv transformasjon. Enhetspunktet er ikke tatt med i figuren, men det har koordinater $(1 : 1 : 1 : 1)$. Vi har i tillegg skravert det ene av totalt fire plan med røde linjer; nemlig planet $w = 0$.

Definisjon 13. Den generelle likningen for en kvadrikk $S = 0$ i \mathbb{P}^3 kan skrives på formen

$$S(x, y, z, w) : ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gxw + hyw + izw + jw^2 = 0.$$



Figur 21: Kvadrikk i \mathbb{P}^3 .

Alle ikke-singulære kvadrikker $S = 0$ i det projektive rommet kan skrives på formen

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0.$$

På akkurat samme måte som i \mathbb{P}^2 , hvor likningen $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ representerer et ærlig (ikke-degenerert) kjeglesnitt, kan vi tenke på likningen over som en representasjon på en ærlig kvadrikk i \mathbb{P}^3 .

Definisjon 14. Den generelle likningen for et plan i \mathbb{P}^3 kan skrives som

$$L : rx + sy + tz + uw = 0.$$

Dersom vi tar unionen av to vilkårlige plan får vi en likning som oppfyller betingelsene for en kvadrikk. Dette kan vi illustrere ved å ta unionen av planet L med seg selv:

$$L^2 = (rx + sy + tz + uw)(rx + sy + tz + uw) = 0$$

\Downarrow

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'xy + e'xz + f'yz + g'xw + h'yw + i'zw + j'w^2 = 0.$$

Derfor kan vi si at på samme måte som unionen av to linjer representerer et degenerert kjeglesnitt i \mathbb{P}^2 , vil unionen av to plan representere en degenerert kvadrikk i \mathbb{P}^3 .

Det finnes imidlertid en enda mildere degenerering av en kvadrikk; nemlig en kjegle, og det er nettopp kjegler Salmon bruker i sin generalisering.

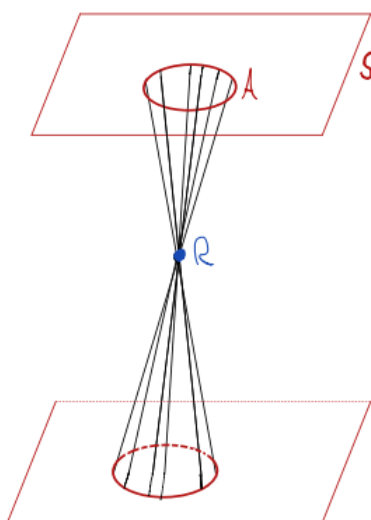
Definisjon 15. En kjegle er en degenerert kvadrikk som ikke består av to plan

eller et dobbeltplan, men som har et singulært punkt, nemlig et toppunkt. Opp til en projektiv transformasjon vil enhver kjegle C ha likning på formen

$$C : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \subset \mathbb{P}^3$$

i koordinater $(x : y : z : w)$.

Selv om vi bruker begrepet kjegle må det være klart for leseren at det er *kvadratiske* kjegler vi til enhver tid bruker. På den måten kan vi si at en kjegle består av linjene gjennom et punkt R og et kjeglesnitt A i et plan S (som ikke inneholder R). Dette punktet R tilsvarer det singulære toppunktet fra *definisjon 15*.



Figur 22: Kjegle i \mathbb{P}^3

I det projektive rommet \mathbb{P}^3 er vi foreløpig sikre på følgende duale korrespondanser:

$$\text{punkt} \longleftrightarrow \text{plan}$$

$$\text{plan} \longleftrightarrow \text{punkt}$$

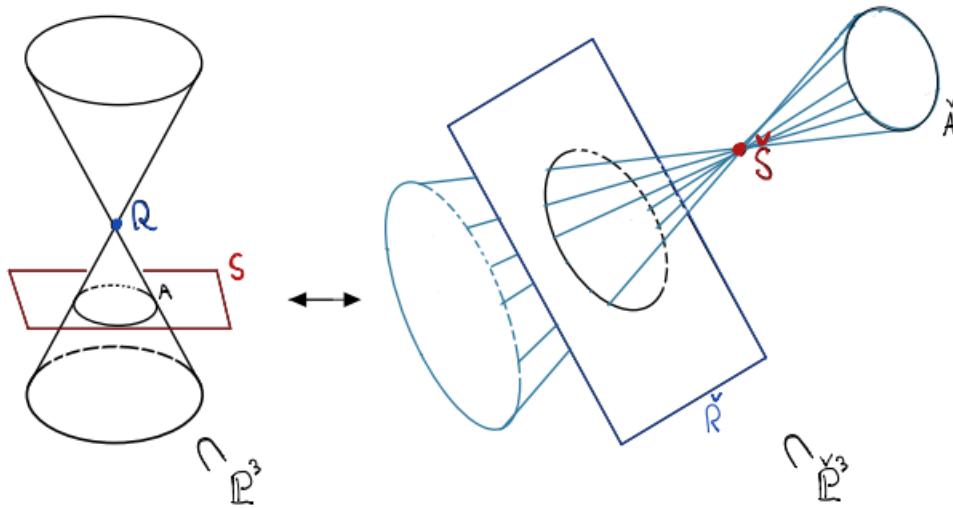
$$\text{linje} \longleftrightarrow \text{linje}$$

$$\text{kvadrikk} \longleftrightarrow \text{kvadrikk}$$

En nøkkel for å forstå Salmons senere resonnementer er imidlertid å finne ut hva det duale til en kjegle i \mathbb{P}^3 er.

Lemma 2. *En kjegle i \mathbb{P}^3 svarer dualt til et kjeglesnitt i $\check{\mathbb{P}}^3$ og motsatt.*

Bevis. Vi kan ta utgangspunkt i definisjonen vår av en kjegle og se på hvert objekt separat for å få en geometrisk forståelse. Toppunktet R svarer til et plan $\check{R} \subset \check{\mathbb{P}}^3$. Planet S svarer på samme måte til et punkt $\check{S} \in \check{\mathbb{P}}^3$ som ikke ligger i planet \check{R} . Linjene som alle går igjennom det singulære punktet R og som definerer kjeglesnittet A må dualt svare til noen linjer som ligger i det duale planet \check{R} . Disse linjene er nøyaktig tangentlinjene til kjeglesnittet A i planet \check{R} . Disse tangentlinjene må gå igjennom punktet \check{S} . På den måten har vi oppnådd et oppsett i det duale rom helt likt det vi startet med i det opprinnelige rommet. Det vil si at hele oppsettet bestående av kjegle, toppunkt og et kjeglesnitt i et plan er dualt til et tilsvarende oppsett i $\check{\mathbb{P}}^3$ (Se figur 23).



Figur 23: Oppsettet i $\check{\mathbb{P}}^3$ er helt likt som i \mathbb{P}^3 .

Men vi har egentlig ikke svart på hva det duale til 'bare' kjeglen er. Vi tenker oss at kun kjeglen er gitt. Den har et entydig toppunkt R , så kjeglen 'husker' R . Men planet S og dermed kjeglesnittet A er tilleggsdata vi har valgt oss; nærmest et verktøy vi brukte for å konstruere kjeglen. Det betyr at kjeglen ikke bestemmer planet S i det hele tatt og derfor heller ikke punktet \check{S} . Vi vet at en kjegle C opp til en projektiv transformasjon kan skrives på formen

$$C : x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

med koordinater $(x : y : z : w)$. Det duale objektet her skal bare være mengden tangentplan, som vi vet er gitt av en lineær likning med de partiell deriverte som koeffisienter. De partiell deriverte i likningen til C er

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial C}{\partial w} = 0.$$

Det duale objektet \check{C} er da representert av alle plan med likning på formen

$$2rx + 2sy + 2tz = 0, \quad (r : s : t : u) \in C$$

\updownarrow

$$(2r : 2s : 2t : 0) \longleftrightarrow (r : s : t : 0)$$

Gitt $(x : y : z : w) \in \check{\mathbb{P}}^3$ må vi se om vi kan skrive det på formen

$$r^2 + s^2 + t^2 = 0.$$

Det oppnår vi når $r = x$, $s = y$, $t = z$, $u = w = 0$. Vi må ikke glemme den andre betingelsen; nemlig $w = 0$. Det betyr at kjeglen vi startet med dualt svarer til et kjeglesnitt $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ i planet $w = 0$. Siden et kjeglesnitt alltid ligger i et plan kan vi være enda mer spesifikke: Det duale til en kjegle i \mathbb{P}^3 er et kjeglesnitt i $\check{\mathbb{P}}^3$. Vi må imidlertid sjekke at dette går begge veier; at et kjeglesnitt i \mathbb{P}^3 dualt svarer til en kjegle i $\check{\mathbb{P}}^3$. Dette er enklere å vise. Vi vet at et kjeglesnitt alltid ligger i et plan. La oss kalle kjeglesnittet for C og planet for R . Dualt får vi noen tangentlinjer \check{C} gjennom et punkt \check{R} i rommet. Disse linjene danner en kjegle med \check{R} som singulært punkt. Vi har dermed bevist lemmaet.

2.9.1 Mengder og dualitet i høyere dimensjoner

Selv om artikkelen til Salmon ikke strekker seg lenger enn til det projektive rommet, ønsker vi å se på mulighetene for å videreføre hans resultater til høyere dimensjoner. Målet er å sitte igjen med et håndfast resultat for \mathbb{P}^n . For å kunne oppnå dette må vi generalisere begrepene vi har gjort rede for spesifikt i planet og rommet.

Definisjon 16. En kvadrikk $q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ i \mathbb{P}^n er homogen og av andre grad. Etter en projektiv transformasjon er q en av følgende:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \tag{1}$$

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 0 \tag{2}$$

\vdots

$$x_0^2 + x_1^2 = 0 \implies (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0 \tag{3}$$

$$x_0^2 = 0 \tag{4}$$

q er altså enten en ikke-singulær kvadrikk (1) eller en av alle mulige degenerasjoner

etter en projektiv transformasjon. Den mildeste degenerasjonen er dermed en kjegle (2) akkurat som i \mathbb{P}^3 . Etter videre degenerasjon får vi et par av plan som nest siste tilfelle, og helt til slutt et dobbelt plan.

Definisjon 17. Likningen til et hyperplan L kan skrives som

$$L : \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

i koordinater $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ og med koeffisienter $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Tar vi unionen av to hyperplan, eksempelvis $L \cup L$ får vi en likning ekvivalent med likningen for en kvadrikk i \mathbb{P}^n slik som vi fikk i planet og i rommet.

Et hyperplan har dimensjon $(n-1)$, og hver gang vi snitter et hyperplan med et nytt hyperplan (lineært uavhengig) vil den nye snittmengden reduseres med en dimensjon. Det vil si at snittmengden mellom tre hyperplan, som ikke er lineært avhengige av hverandre, er et lineært underrom av dimensjon $(n-3)$. Dually vil denne snittmengden svare til et plan. Videre dersom vi ser på par av hyperplan, vil snittmengden mellom dem være et lineært underrom av dimensjon $(n-2)$, og vi vet at det alltid vil finnes et tredje hyperplan, bestemt som en lineær kombinasjon av de to gitte. Disse tre hyperplanene har et spesielt forhold (lineær avhengighet) som gjør at snittmengden bevarer dimensjon. De tre hyperplanene har en felles lineær snittmengde av dimensjon $(n-2)$. Dually svarer dette til en linje.

Lemma 3. En kjegle i \mathbb{P}^n svarer dualt til en kvadrikk liggende i et hyperplan i $\check{\mathbb{P}}^n$.

Bevis. Vi tar utgangspunkt i en kjegle

$$C : x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 0 \subset \mathbb{P}^n.$$

Med dette utgangspunkt må vi finne alle tangent-hyperplanene til C . De partiell deriverte i likningen til C er:

$$\frac{\partial C}{\partial x_0} = 2x_0, \quad \frac{\partial C}{\partial x_1} = 2x_1, \dots, \quad \frac{\partial C}{\partial x_{n-1}} = 2x_{n-1}, \quad \frac{\partial C}{\partial x_n} = 2x_n.$$

Det duale objektet til kjeglen C er da representert av alle hyperplan med likning på formen

$$2\lambda_0 x_0 + 2\lambda_1 x_1 + \dots + 2\lambda_{n-1} x_{n-1} = 0, \quad (\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n) \in C$$

\updownarrow

$$(2\lambda_0 : 2\lambda_1 : \dots : 2\lambda_{n-1} : 0) = (\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_{n-1} : 0).$$

Gitt $(x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n) \in \check{\mathbb{P}}^n$ må vi se om vi kan skrive det på formen

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_{n-1}^2 = 0.$$

Det oppnås når $\lambda_0 = x_0, \lambda_1 = x_1, \dots, \lambda_{n-1} = x_{n-1}$ og $\lambda_n = x_n = 0$.

Dermed har vi at det duale objektet $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^n$ til kjeglen C er representert av likningene

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 0, \quad x_n = 0.$$

Dette tilsvarer en glatt kvadrikk (med en mindre dimensjon) liggende i hyperplanet $x_n = 0$. Vi ser at dette samsvarer med det vi fikk i \mathbb{P}^3 .

3 Salmons artikkel

Vi har nå dannet oss nok kunnskap vedrørende teori og notasjoner til at vi kan gjøre rede for Salmons artikkel. Jeg vil steg for steg ta for meg hvert avsnitt i artikkelen, og selv om noe av det han skriver er digresjoner i forhold til hovedpoengene i artikkelen, vil det fortsatt være av interesse for oss å gå i dybden på det. Salmon starter teksten nærmest i brevform hvor han oppsummerer hva som sålangt er blitt gjort av analytiske demonstreringer knyttet til Pascal og Brianchon sine teoremer om kjeglesnitt før han tilbyr sin hjelp.

3.1 Pensel av kjeglesnitt på formen $\lambda S - \mu L^2 = 0$

Noe av det første Salmon hevder er at dersom man lar $S = 0$ være likningen til et gitt kjeglesnitt og $L = 0$ likningen til en rett linje, vil det være 'lett' å se at $S - L^2 = 0$ er likningen til et nytt kjeglesnitt som har dobbel kontakt med det gitte kjeglesnittet S nøyaktig i de to skjæringspunktene mellom $S = 0$ og linjen med likning $L = 0$. (Salmon, 1843)

Salmon konstaterer dette uten å vise hvordan eller hvorfor det har seg slik. Vi skal derfor fjerne all tvil ved å vise at det han skriver er riktig. Implisitt hos Salmon er at dersom vi har et gitt kjeglesnitt $S = 0$ og en linje $L = 0$ som skjærer $S = 0$ i to punkter P, Q , kan alle kjeglesnitt som har samme tangent som S i punktene P, Q skrives på formen

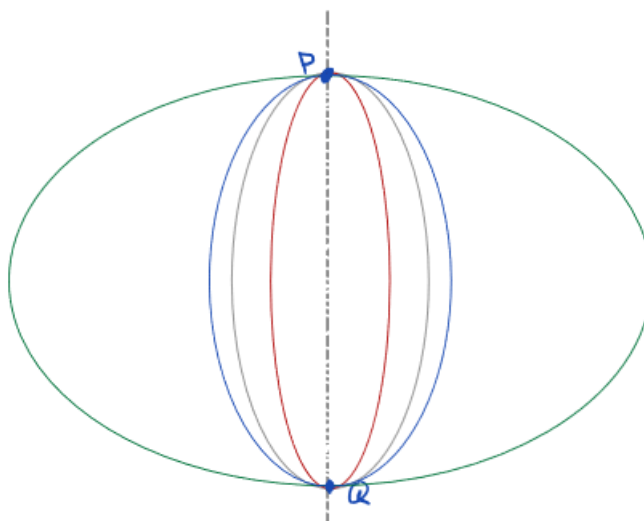
$$\lambda S - \mu L^2 = 0,$$

hvor $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$.

I artikkelen ser vi at Salmon studerer ett slikt kjeglesnitt, med $(\lambda : \mu) = (1 : 1)$ slik at likningen tar formen

$$S - L^2 = 0.$$

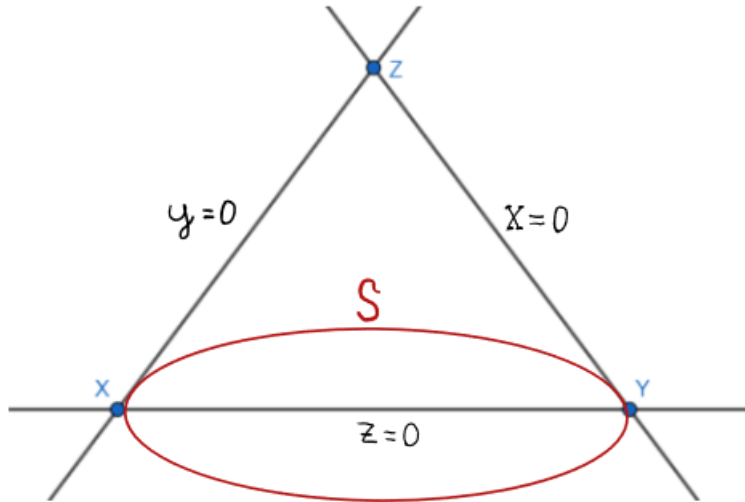
Siden likningen for en kurve kan skaleres uten at kurven forandres er det en slags skjult parameter i formuleringen til Salmon. Dersom man skalerer S eller L endres ikke linjen $L = 0$ eller kjeglesnittet $S = 0$, men det andre kjeglesnittet, $S - L^2 = 0$ blir endret på slik at det vil lønne seg å gjøre parameteren eksplisitt.



Figur 24: Pensel av kjeglesnitt på formen $\lambda S - \mu L^2 = 0$

Setning 10. Dersom $S = 0$ er et gitt kjeglesnitt og $L = 0$ linjen som treffer S i to punkter P, Q , kan alle andre kjeglesnitt som har dobbel kontakt med S i punktene P, Q skrives på formen $\lambda S - \mu L^2 = 0$. De danner en pensel av kjeglesnitt.

Bevis. Vi vet at det finnes en projektiv transformasjon som sender våre to punkter P, Q og derfor også linjen L til henholdsvis to punkter og en linje på referansetrekanten. Derfor kan vi redusere beviset av *setning 10* til ett eksempel. Vi velger oss to av hjørnene av trekanten, si X og Y , som henholdsvis har de homogene koordinatene $(1 : 0 : 0)$ og $(0 : 1 : 0)$. Vi skal fra nå av referere til dem som punktene $X(1 : 0 : 0)$ og $Y(0 : 1 : 0)$. Tangenten i punktet $X(1 : 0 : 0)$ vil på grunn av den projektive transformasjonen være linjen med likning $y = 0$ og tangenten til punktet $Y(0 : 1 : 0)$ er på samme måte linjen med likning $x = 0$.



Figur 25: Illustrasjon av vårt eksempel.

Likningen for et hvilket som helst kjeglesnitt S i \mathbb{P}^2 kan skrives på den kvadratiske formen

$$S(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

Setter vi inn våre valgte homogene koordinater for x, y, z , får vi

$$S(1 : 0 : 0) = 0 \iff a = 0,$$

og

$$S(1 : 0 : 1) = 0 \iff b = 0.$$

Dermed tar likningen formen

$$S : cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

Tangenten til $X(1 : 0 : 0)$ er linjen XZ på referansetrekanten (se figur 25) som har likning $y = 0$. Tangenten til et punkt $(x_1 : y_1 : z_1)$ kan generelt uttrykkes ved likningen

$$\frac{\partial S(x_1 : y_1 : z_1)}{\partial x} x + \frac{\partial S(x_1 : y_1 : z_1)}{\partial y} y + \frac{\partial S(x_1 : y_1 : z_1)}{\partial z} z = 0$$

\Downarrow

$$x(2ax_1 + 2gz_1 + 2hy_1) + y(2by_1 + 2fz_1 + 2hx_1) + (2cz_1 + 2fy_1 + 2gx_1) = 0$$

\Downarrow

$$x(ax_1 + gz_1 + hy_1) + y(by_1 + fz_1 + hx_1) + z(cz_1 + fy_1 + gx_1) = 0,$$

og setter vi inn $X(1 : 0 : 0)$ og tar med at $a = b = 0$ får vi

$$hy + gz = 0.$$

Siden vi allerede vet at likningen for tangenten skal være $y = 0$ må $g = 0$ også være tilfellet for å oppnå balanse i likningen.

Tangenten til $Y(1 : 0 : 1)$ er linjen YZ med likning $x = 0$, men vi vet nå at vi også kan finne likningen for tangenten på samme måte som ovenfor, og da får vi at

$$hx + fz = 0 \iff f = 0.$$

Vi har altså at koeffisientene a, b, f, g alle er lik null, og vår opprinnelige likning S kan nå skrives på formen

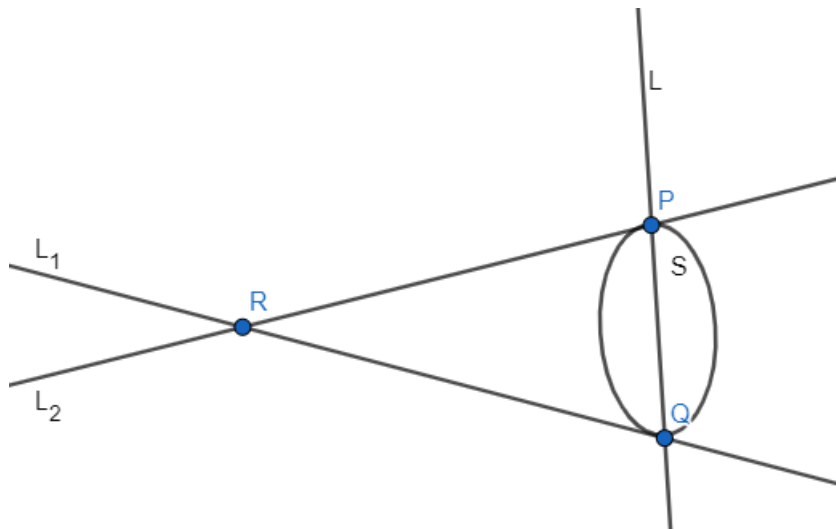
$$cz^2 + 2hxy = 0.$$

Videre kan vi sette $t = c/2h$ slik at likningen blir

$$\boxed{xy + tz^2 = 0.}$$

Vi har nå bevist at dette er likningen for alle kjeglesnitt som har tangenter med likninger $x = 0$ og $y = 0$ i de to punktene $X(1 : 0 : 0)$ og $Y(1 : 0 : 1)$.

Det neste steget er å vise at dette tilsvarer likningen $\lambda S - \mu L^2 = 0$. La oss først se for oss det generelle tilfellet (Se figur 26) hvor vi har to tangentlinjer L_1, L_2 som krysses i et punkt R i \mathbb{P}^2 og treffer et gitt kjeglesnitt S i to tangentpunkter P, Q , og hvor L er polaren til punktet R , altså linjen som forener de to tangentpunktene (kontakt-korden).



Figur 26: Det generelle tilfellet.

Det finnes en projektiv transformasjon $\psi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ slik at:

$$\psi(R) = (0 : 0 : 1)$$

$$\psi(P) = (1 : 0 : 0)$$

$$\psi(Q) = (0 : 1 : 0),$$

som automatisk sørger for

$$L_1 \mapsto x = 0$$

$$L_2 \mapsto y = 0$$

$$L \mapsto z = 0.$$

Avbildingen ψ sender punktene og linjene til nøyaktig de punktene og linjene i eksempelet vårt. Dette er fordi en projektiv transformasjon som nevnt er lineær og bevarer dermed grad. Vi kan med andre ord, som påstått, la vårt konkrete eksempel tale for det generelle tilfellet.

Salmon sier at dersom $S = 0$ er ett slikt kjeglesnitt som kan skrives på formen $xy + tz^2 = 0$, så kan alle andre kjeglesnitt av penselen skrives på formen

$$\lambda S - \mu L^2 = 0.$$

Siden avbildingen ψ sender linjen $L = 0$ til linjen $z = 0$ på referansetrekanten vil vi i vårt tilfelle måtte studere likningen

$$\lambda S - \mu z^2 = 0.$$

Vi antar at $S = 0$ er ett slikt kjeglesnitt og velger dermed

$$S = xy + t_0 z^2.$$

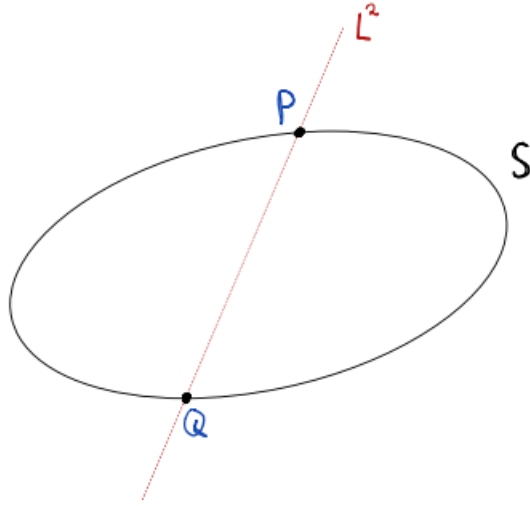
Vi må undersøke om

$$xy + tz^2 \stackrel{?}{=} \lambda S - \mu z^2.$$

Vi regner ut og får

$$xy + tz^2 = \lambda(xy + t_0 z^2) - \mu z^2.$$

Velger vi $\lambda = 1$ og $\mu = (-t + t_0)$ ser vi at vi får likt på begge sider av likningen. Vi kan derfor konkludere med at vi har konvertert den formen vi fikk på likningen i vårt eksempel til den generelle formen $\lambda S - \mu L^2 = 0$. Det er nå bevist at vi får en pensel av kjeglesnitt på denne formen, hvor den doble linjen L^2 representerer et degenerert kjeglesnitt.



Figur 27: Den doble linjen $L^2 = 0$ er det degenererte kjeglesnittet som treffer $S = 0$ i P, Q .

Den doble linjen $L^2 = 0$ vil fortsatt tilfredsstillte betingelsen om å ha samme tangent som S i P, Q . Dette fordi at likningen til tangenten til en hvilken som helst kurve $F = 0$ i et punkt P er $ax + by + cy = 0$, hvor a, b, c er verdiene til de partiell deriverte i punktet P . Dersom $F = L^2$ vil 'tangenten' i ethvert punkt P ha likning $0 = 0$, og man kan tenke på det som at alle linjer er tangenter til L^2 . Med andre ord vil tangentlinjene til $S = 0$ være tangentene til $L^2 = 0$, slik som alle andre linjer også er tangent til $L^2 = 0$. Dette har vi allerede regnet ut for å sjekke: Selv om vi ikke skulle godta $L^2 = 0$ som et 'ordentlig' kjeglesnitt, men bare spør om hvilke (ordentlige) kjeglesnitt som har riktig tangent i P og Q , fant vi nettopp ut at svaret på det er penselen av kjeglesnitt på formen

$$\lambda S - \mu L^2 = 0,$$

og da dukker $L^2 = 0$ naturlig opp som tilfellet hvor $\mu = \infty$ likevel:

$$\frac{S}{\mu} - L^2 = 0, \mu = \infty \iff L^2 = 0.$$

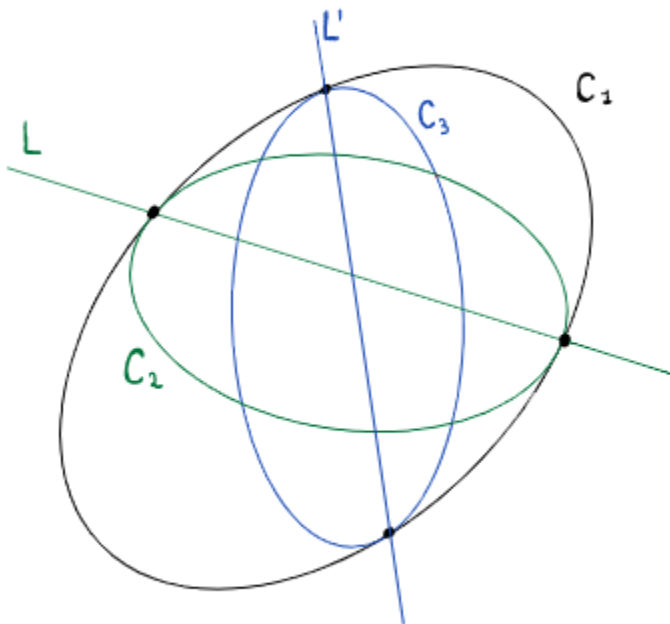
3.2 Skjæring mellom $S = 0$ og to kjeglesnitt

Videre skriver Salmon at vi lar $S - (L')^2 = 0$ være likningen til et nytt kjeglesnitt som også har dobbel kontakt med $S = 0$ (Salmon, 1843). Ved akkurat samme tankeprosess som i seksjon 3.1 oppnår vi en pensel av kjeglesnitt på denne formen. Hos Salmon er det implisitt at $L' = 0$ er kontakt-korden, altså linjen som forener de to

skjæringspunktene mellom $S - (L')^2 = 0$ og $S = 0$. Vi har altså en situasjon med tre kjeglesnitt; nemlig

$$C_1 : S = 0, \quad C_2 : S - L^2 = 0, \quad C_3 : S - (L')^2 = 0,$$

hvor både C_2 og C_3 har dobbel kontakt med C_1 .



Figur 28: De to kjeglesnittene C_2 , C_3 har dobbel kontakt med det gitte kjeglesnittet C_1 i de fire punktene hvor linjene $L = 0$ og $L' = 0$ treffer C_1 .

Setning 11. *De fire kordene $L = 0$, $L' = 0$, $L + L = 0$, $L - L = 0$ har ett felles snittpunkt.*

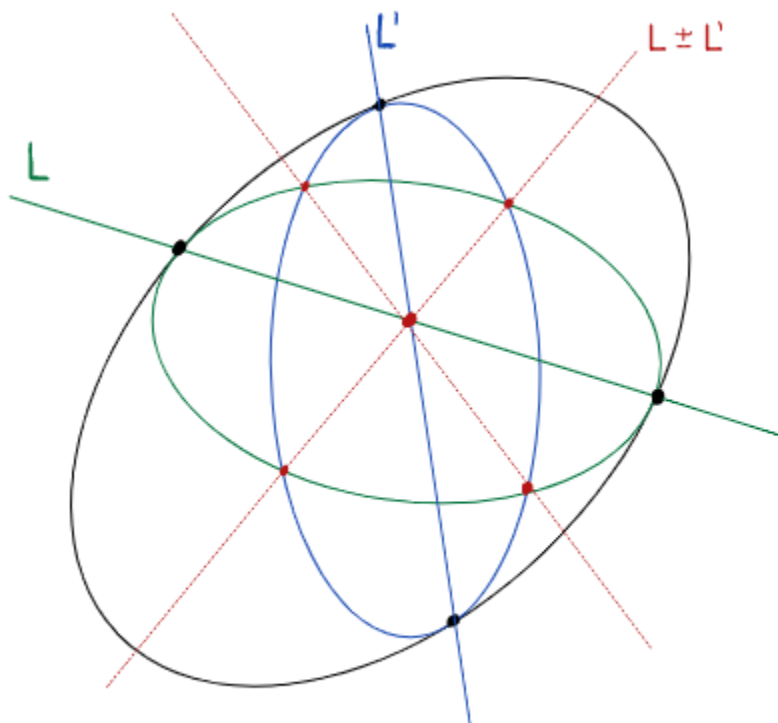
Bevis. Salmon skriver at vi oppnår snittet $C_2 \cap C_3$ ved å subtrahere likningene deres (Salmon, 1843). Det han mener er selvsagt at man finner snittet mellom to kurver - i dette tilfellet de to kjeglesnittene C_2 , C_3 - ved å løse likningen $C_3 = C_2$. Da får vi

$$S - (L')^2 = S - L^2 \iff (S - (L')^2) - (S - L^2) = 0 \iff L^2 - (L')^2 = 0 \iff (L - L')(L + L') = 0.$$

Dermed kan vi konstatere at likningen til de to skjærings-kordene som går igjennom alle skjæringspunktene til C_2 og C_3 er

$$L - L' = 0, \quad L + L' = 0.$$

Disse skjærings-kordene må også gå igjennom skjæringspunktet til de to kontakt-kordene fordi de er tilfredsstilt av betingelsene $L = 0$ og $L' = 0$ (Salmon, 1843). Alternativt vet vi fra tidligere arbeid at alle disse linjene er medlemmer av penselen $\lambda L + \mu L' = 0$ gjennom ett felles punkt. Dermed har vi bevist *setning 11*.



Figur 29: De fire linjene har ett felles snittpunkt.

3.3 De fire linjene av penselen ligger harmonisk

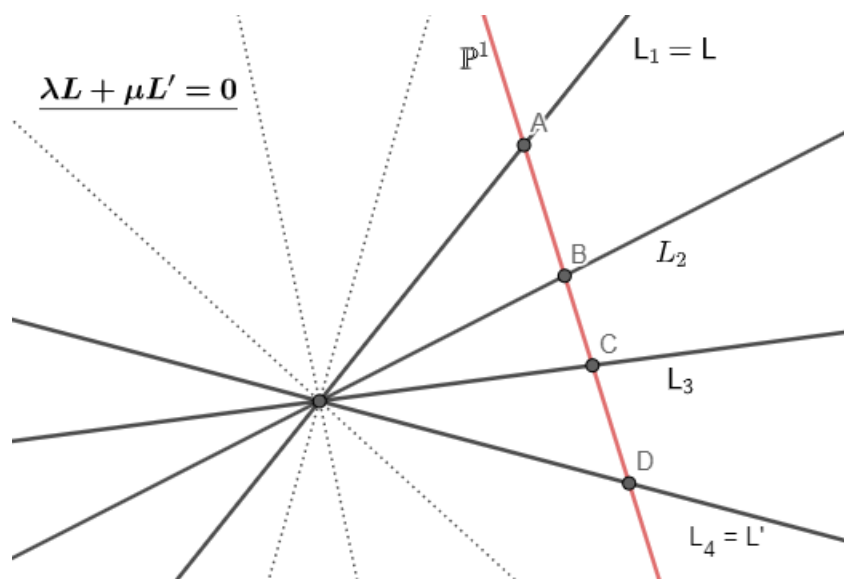
Salmon hevder så at likningene til de fire linjene $L = 0$, $L' = 0$, $L + L' = 0$, $L - L' = 0$ danner en harmonisk pensel, men at det ville ledet ham inn i for mange detaljer dersom han skulle bevist dette (Salmon, 1843). Vi har nå dannet oss såpass med kunnskap vedrørende kryssforhold, dualitet og pensler til at dette er noe vi kan vise. Først og fremst må vi nok en gang modernisere språket til Salmon ved å presisere at fire linjer ikke danner en pensel, men at fire linjer av penselen kan ligge harmonisk.

Tidligere, i seksjon 2.5, ble det bevist at kryssforholdet er bevart under en projektiv transformasjon og at en projeksjon fra en linje til en annen linje med senter i et punkt utenfor de to linjene er en projektiv transformasjon. Vi reduserte spørsmålet

om invarians av kryssforholdet til ett enkelt eksempel hvor vi brukte en projektiv transformasjon $\psi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. Denne projektive transformasjonen sendte punkter i generell posisjon til punkter på referansetrekanten. På grunn av dette tidligere arbeidet vårt skal vi se at mye allerede er gjort for å avgjøre om det Salmon hevder kan settes to streker under.

Setning 12. *De fire kordene med likninger $L = 0$, $L' = 0$, $L + L' = 0$, $L - L' = 0$ har et harmonisk kryssforhold.*

Bevis.



Figur 30: Transversal linje som skjærer de fire linjene av penselen i fire punkter A, B, C, D .

I figur 30 ser vi en illustrasjon av penselen av linjer med likning $\lambda L + \mu L' = 0$. Den fremhever de fire linjene L_1, \dots, L_4 og skjæringspunktene A, B, C, D mellom disse fire linjene og den transversale linjen i rødt. Videre har vi identifisert våre linjer L, L' med henholdsvis L_1, L_4 . Neste steg er å regne ut hvilke parameter-verdier de fire linjene av penselen har:

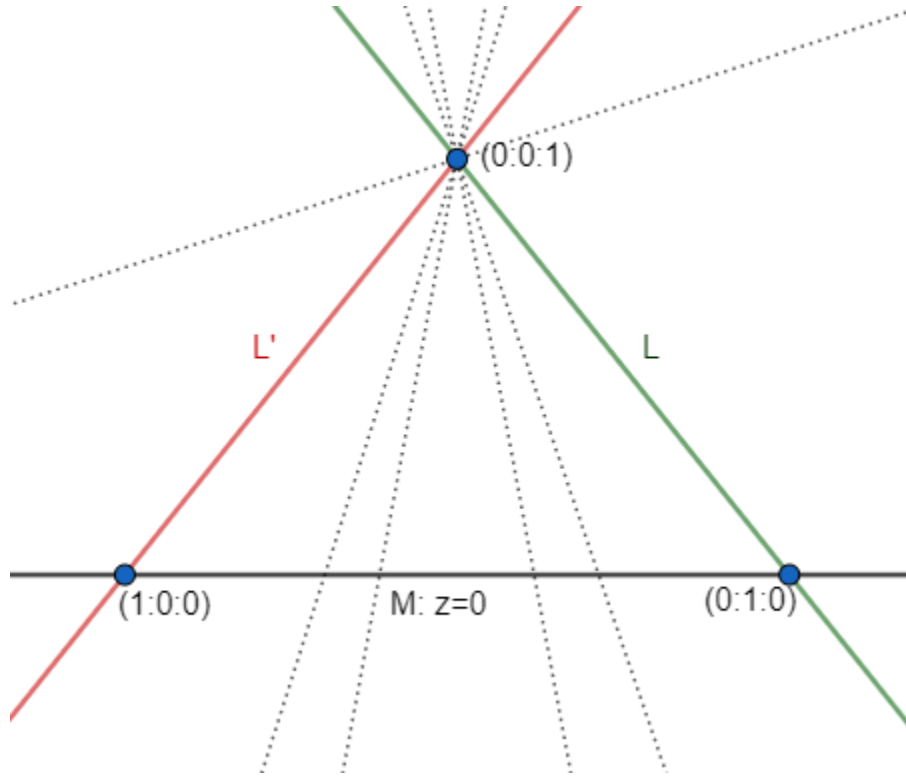
$$L_1 = L = 0 \iff 1 \cdot L + 0 \cdot L' = 0 \iff (\lambda : \mu) = (1 : 0) = \infty$$

$$L_2 = 0 \iff \lambda_1 L + \mu_1 L' = 0 \iff (\lambda : \mu) = (\lambda_1 : \mu_1) = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$$

$$L_3 = 0 \iff \lambda_2 L + \mu_2 L' = 0 \iff (\lambda : \mu) = (\lambda_2 : \mu_2) = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

$$L_4 = L' = 0 \iff 0 \cdot L + 1 \cdot L' = 0 \iff (\lambda : \mu) = (0 : 1) = 0.$$

Vi vet nå at det eksisterer en projektiv transformasjon som sender L til linjen med likning $x = 0$ og L' til linjen med likning $y = 0$ på referansetrekanten.



Figur 31: Penselen av linjer gjennom $(0 : 0 : 1)$.

Vi har tidligere bevist at vi kan velge den transversale linjen vilkårlig, og derfor kan vi velge linjen med likning $z = 0$ som den transversale linjen M . Alle punkter på denne linjen har koordinater $(\lambda : \mu : 0) \iff (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$. Vi finner skjæringspunktene A, B, C, D fra figur 30 på følgende måte:

$$A = L \cap M = (x = 0) \cap (z = 0) \iff (0 : 1 : 0) \iff (0 : 1) \in \mathbb{P}^1$$

$$B = L_2 \cap M = (\lambda_1 L + \mu_1 L' = 0) \cap (z = 0) \iff (\mu_1 : -\lambda_1 : 0) \iff (\mu_1 : -\lambda_1) \in \mathbb{P}^1$$

$$C = L_3 \cap M = (\lambda_2 L + \mu_2 L' = 0) \cap (z = 0) \iff (\mu_2 : -\lambda_2 : 0) \iff (\mu_2 : -\lambda_2) \in \mathbb{P}^1$$

$$D = L' \cap M = (y = 0) \cap (z = 0) \iff (1 : 0 : 0) \iff (1 : 0) \in \mathbb{P}^1.$$

Dette impliserer videre at de fire skjæringspunktene tar følgende verdier:

$$A = 0, \quad B = -\frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad C = -\frac{\mu_2}{\lambda_2}, \quad D = \infty.$$

Påstand. Kryssforholdet mellom verdiene til de fire linjene L_1, \dots, L_4 er likt kryssforholdet mellom verdiene til de fire skjæringspunktene A, \dots, D

Merk at påstanden er en variant av *setning 6* som vi lot stå uten bevis i seksjon 2.5. Vi sjekker påstanden enkelt og greit bare ved å regne ut de to forskjellige kryssforholdene og sjekker om de samsvarer:

$$(L, L_2; L_3, L') = \left(\infty, \frac{\lambda_1}{\mu_1}; \frac{\lambda_2}{\mu_2}, 0\right) = \frac{\infty}{\infty} \Big/ \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{\lambda_2}{\mu_2}}{\frac{\lambda_1}{\mu_1}} = \dots = \frac{\mu_2 \lambda_1}{\mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2},$$

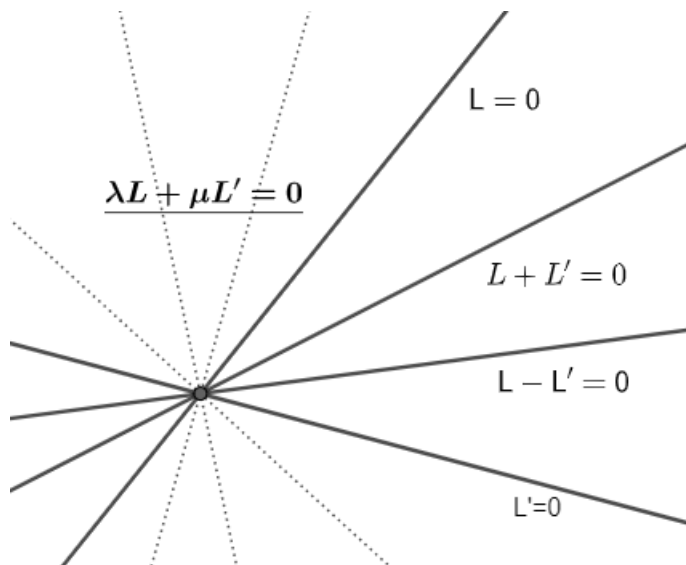
$$(A, B; C, D) = \left(0, -\frac{\mu_1}{\lambda_1}; -\frac{\mu_2}{\lambda_2}, \infty\right) = \frac{\frac{\mu_2}{\lambda_2}}{-\infty} \Big/ \frac{\frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}}{-\infty} = \dots = \frac{\mu_2 \lambda_1}{\mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2}.$$

De er som påstått identiske, og vi har dermed vist at kryssforholdet mellom fire linjer identifisert med \mathbb{P}^1 er ekvivalent med kryssforholdet mellom fire skjæringspunkt som oppstår der hvor en transversal linje krysser de fire linjene av penselen. Påstanden er dermed bevist, og vi kan derfor bevege oss tilbake til beviset for *setning 12*.

Likningen til en pensel av linjer kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av, i vårt tilfelle, de to gitte linjene $L = 0$, $L' = 0$ på formen

$$\lambda L + \mu L' = 0,$$

hvor $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$.



Figur 32: Penselen $\lambda L + \mu L' = 0$.

Dette impliserer følgende:

$$L = 0 \iff (\lambda : \mu) = (1 : 0) = \infty$$

$$L' = 0 \iff (\lambda : \mu) = (0 : 1) = 0$$

$$L + L' = 0 \iff (\lambda : \mu) = (1 : 1) = 1$$

$$L - L' = 0 \iff (\lambda : \mu) = (1 : -1) = -1.$$

Vi regner ut kryssforholdet mellom de fire verdiene og får

$$(\infty, 0; 1, -1) = \frac{\infty - 1}{\infty - (-1)} \bigg/ \frac{0 - 1}{0 - (-1)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

De fire linjene av penselen ligger med andre ord harmonisk og vi har dermed bevist *setning 12*.

3.4 Skjæring mellom $S = 0$ og tre kjeglesnitt

Til nå har vi studert skjæringen mellom et gitt kjeglesnitt $S = 0$ og to kjeglesnitt som har dobbel kontakt med $S = 0$. Salmon trekker så opp ytterligere et kjeglesnitt fra hatten, slik at vi har en situasjon med tre kjeglesnitt, alle med dobbel kontakt til $S = 0$.

Lemma 4. *Dersom tre kjeglesnitt alle har dobbel kontakt med et fjerde ikke-degenerert kjeglesnitt vil deres skjærings-korder tre og tre gå igjennom samme punkt.*

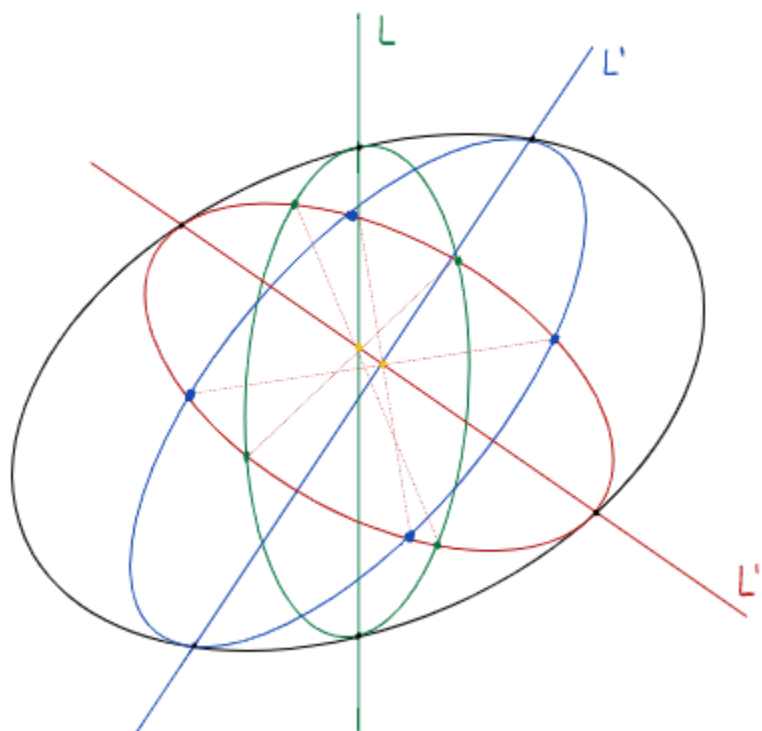
Vi tar med oss de tre kjeglesnittene C_1, C_2, C_3 fra vårt tidligere arbeid og betrakter i tillegg et nytt kjeglesnitt C_4 som også har dobbel kontakt med det gitte kjeglesnittet $S = 0$ i de to punktene hvor linjen $L'' = 0$ (kontakt-korden) treffer det. På samme måte som tidligere oppnår vi en pensel av kjeglesnitt på formen $S - (L'')^2 = 0$. Våre fire kjeglesnitt er derfor

$$C_1 : S = 0, \quad C_2 : S - L^2 = 0 \quad C_3 : S - (L')^2 = 0, \quad C_4 : S - (L'')^2 = 0.$$

Vi må også ta med skjærings-kordene som oppstår der hvor C_4 snitter C_2 og C_3 : De vil ha likninger

$$L - L'' = 0, \quad L + L'' = 0, \quad L' - L'' = 0, \quad L' + L'' = 0.$$

For at vi skal unngå og gjenta samme argumenter om og om igjen refererer vi nå bakover i teksten til seksjon 3.2. Kordene $L \pm L'' = 0$ krysser hverandre i skjæringspunktet $L \cap L''$, og kordene $L' \pm L'' = 0$ krysses i skjæringspunktet $L' \cap L''$ (Se figur 33).



Figur 33: Tre kjeglesnitt med dobbel kontakt til et gitt kjeglesnitt S . De striplete røde linjene representerer skjærings-kordene til C_4 der hvor det skjærer C_2 (grønn) og C_3 (blå), og den røde hele linjen representerer kontakt-korden som går igjennom de to punktene hvor C_4 har dobbel kontakt med det gitte kjeglesnittet C_1 . De gule punktene viser at skjærings-kordene parvis krysser hverandre i skjæringspunktene mellom kontakt-kordene $(L'' \cap L$ og $(L'' \cap (L')$.

I figur 34 har jeg for ordens skyld illustrert alt vi har til nå i en ny figur. Det vil si at skjærings-kordene som oppstår i snittet mellom C_2 og C_3 (fra tidligere) også er tatt med. Da blir det lettere å forstå at tre og tre linjer er tilfredsstillt for samme punkt. Mer spesifikt skriver Salmon at kordene $L - L' = 0$, $L' - L'' = 0$, $L - L'' = 0$ og kordene $L - L' = 0$, $L' + L'' = 0$, $L + L'' = 0$ tre og tre tilfredsstillt ett og ett punkt. Han stopper her og skriver: "...og på samme måte med resten" (Salmon, 1843). Vi skal selvsagt sette de siste brikkene på plass ved å vise hvordan vi oppnår alle linjene som tre og tre går igjennom samme punkt. Først og fremst må vi si noe om hvorfor vi med sikkerhet kan si at tre og tre korder krysser hverandre og tilfredsstillt ett og ett punkt, og det er fordi vi betrakter linjene som lineært avhengige av hverandre. Det vil si at vi kan uttrykke en av kordene som en lineær kombinasjon av to andre korder. Vi kan altså sette opp en lineær likning på formen

$$l + km = 0,$$

hvor l, m er to linjer og $k \in \mathbb{C}$. La oss gjøre et eksempel med kordene $L' + L'' = 0$ og

$$L - L'' = 0:$$

$$(L' + L'') + k(L - L'') = 0, \quad k = 1 \iff L + L' = 0.$$

Vi får at de to likningene er en lineær kombinasjon av $L + L' = 0$. Vi kan sjekke at dette stemmer ved å la en av de andre likningene, si $L - L'' = 0$, være 'ukjent':

$$(L' + L'') + k(L + L'), \quad k = -1 \iff L - L'' = 0,$$

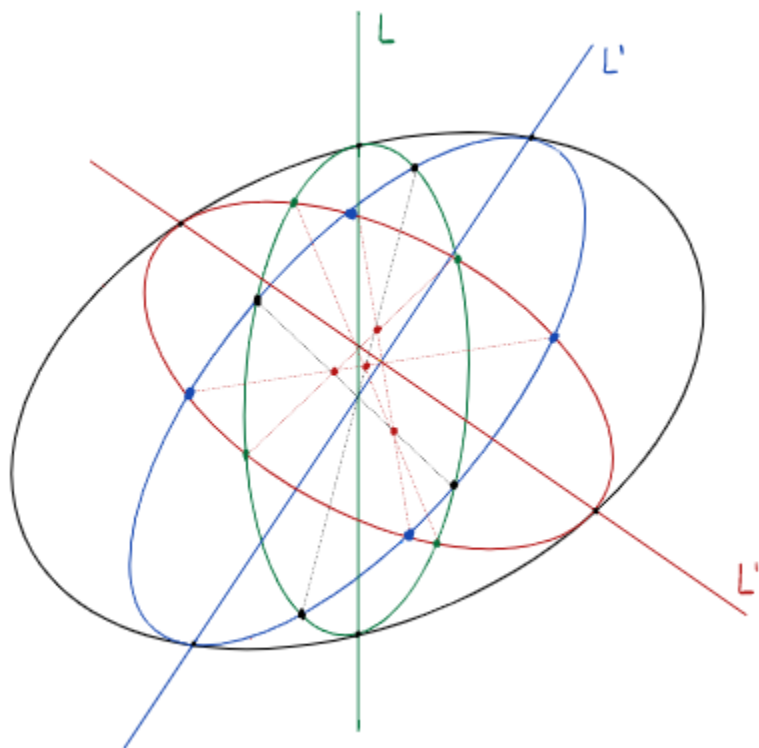
og vi ser at vi får det vi ønsker. Dermed kan vi med sikkerhet si at kordene $L + L' = 0$, $L' + L'' = 0$, $L - L'' = 0$ vil krysse hverandre i ett felles punkt. Fortsetter vi på akkurat samme måte finner vi at følgende tre og tre korder tilfredsstillers ett og ett punkt:

$$L - L' = 0, \quad L' - L'' = 0, \quad L - L'' = 0$$

$$L - L' = 0, \quad L' + L'' = 0, \quad L + L'' = 0$$

$$L + L' = 0, \quad L' + L'' = 0, \quad L - L'' = 0$$

$$L + L' = 0, \quad L' - L'' = 0, \quad L + L'' = 0$$



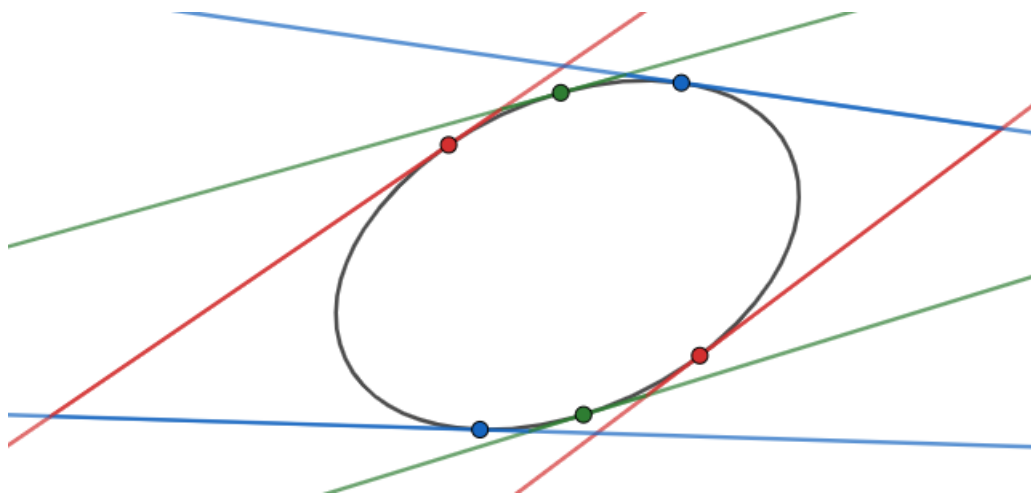
Figur 34: Her har vi også tatt med de to skjærings-kordene vi fikk når vi studerte snittet mellom C_2 og C_3 i svarte striplete linjer. Vi ser at tre og tre korder faktisk tilfredsstillers ett og ett rødt punkt.

Dermed har vi bevist *Lemma 4*. For ordens skyld kan vi nevne at Salmon formulerer dette som et teorem (i kursiv) i artikkelen (Salmon, 1843). De ulike 'trione' av korder representerer alle mulige linjer gjennom par av disse fire punktene. Lar vi nå hvert av disse kjeglesnittene degenereres til par av rette linjer har vi ifølge Salmon *Brianchon sitt teorem* (Salmon, 1843). Dette skal vi undersøke og legge til grunn for i neste seksjon.

3.5 Brianchon sitt teorem

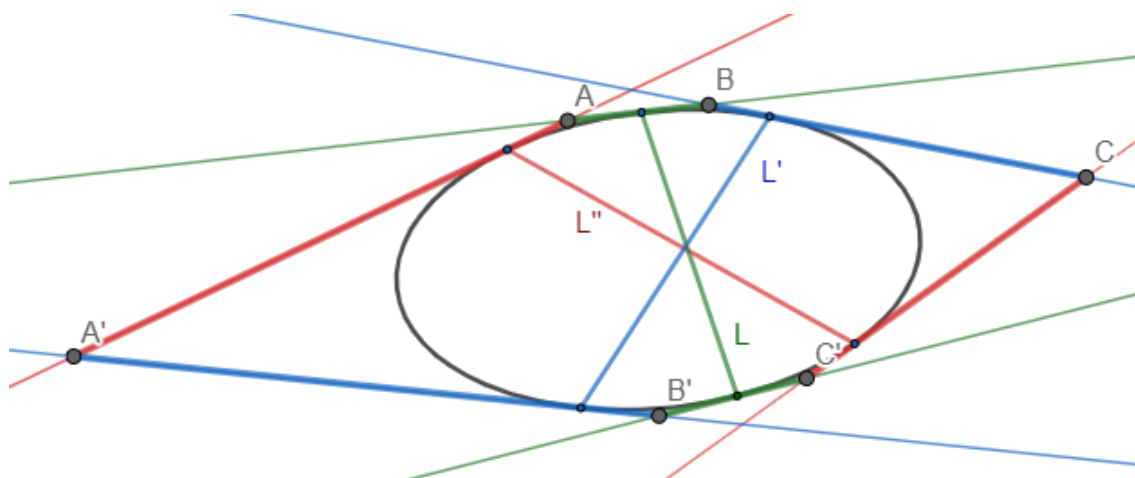
Teorem 1 (*Brianchon*). *For alle heksagon som omskriver et kjeglesnitt vil hoveddiagonalene, de som forener motsatte hjørner, krysse hverandre i ett punkt.*

Bevis. Vi kan se på teoremet som et spesielt tilfelle av *lemma 4*. Salmon påstår altså at ved å erstatte kjeglesnittene C_2 , C_3 , C_4 med par av rette linjer oppnår vi Brianchon sitt teorem (Salmon, 1843). Vi degenererer de tre kjeglesnittene til tre par av linjer (tangentlinjer med respekt til C_1) slik som på figur 35. På denne måten vil disse parene av linjer være degenererte kjeglesnitt som alle har dobbel kontakt med C_1 . Hvert par av tangentlinjer oppstår i skjæringspunktene mellom kontakt-kordene (L , L' , L'') og det gitte kjeglesnittet $S = 0$.



Figur 35: Tre par av tangentlinjer med respekt til $S = 0$ (i svart).

Fra dette har vi oppnådd tre par av tangenter som, når de krysser hverandre, former de seks sidene av en heksagon som omskriver kjeglesnittet $C_1 : S = 0$.



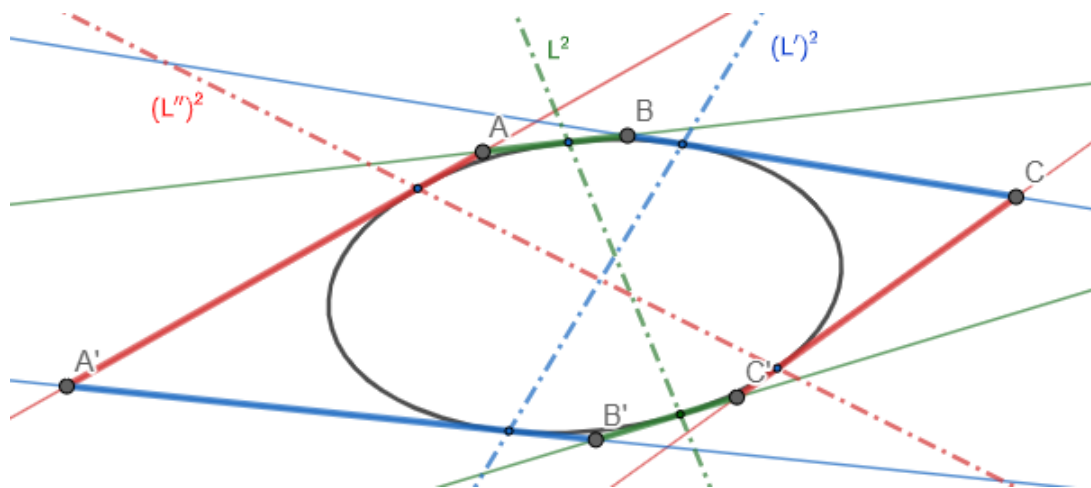
Figur 36: Skjæringen mellom de seks tangentlinjene danner de seks hjørnene A, B, C, A', B', C' av en heksagon som omskriver kjeglesnittet $S = 0$.

Tidligere ble det vist at dersom vi dobler linjen som representerer kontakt-korden vil vi fortsatt få et par av linjer (degenererte kjeglesnitt) som tilfredsstill betingelsene for penselen av kjeglesnitt med samme egenskaper. Derfor kan vi også representere parene av tangentlinjer i form av deres kontakt-korder. Det vil igjen si de tre dobbeltlinjene

$$L^2 = 0, \quad (L')^2 = 0, \quad (L'')^2 = 0.$$

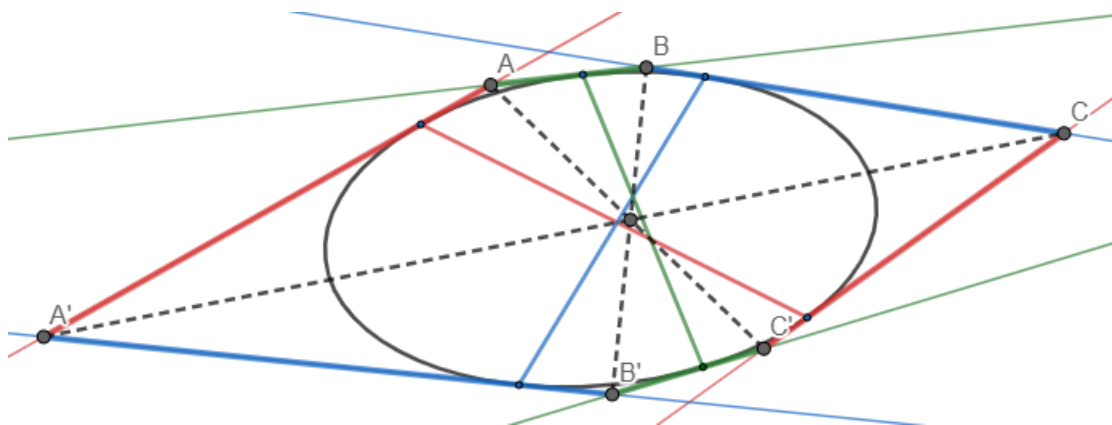
Dermed oppnår vi fire kjeglesnitt på akkurat den formen vi trenger for å bruke *lemma 4*:

$$S = 0, \quad S - L^2 = 0, \quad S - (L')^2 = 0, \quad S - (L'')^2 = 0.$$



Figur 37: Brianchons teorem

Vi har nå identifisert en heksagon som omskriver kjeglesnittet C_1 , og det naturlige neste steg ville vært å gjøre rede for hoveddiagonalene som nevnes i teoremet. Dette ville imidlertid krevd et helt nytt argument som ikke følger fra Salmons synsvinkel. Salmons versjon av både Brianchon og Pascal sine teoremer sier ikke noe om akkurat hoveddiagonalene, men om konfigurasjonen dannet av alle diagonalene. Det har seg slik at hoveddiagonalene faktisk vil være en av de fire trioene av skjærings-korder fra *lemma 4*, men siden dette ikke følger fra Salmons perspektiv lar vi dette stå som en antakelse. Nå som vi har antatt at de tre hoveddiagonalene er en av disse kombinasjonene fra *lemma 4*, vet vi at de må ha ett felles snittpunkt på grunn av deres lineære avhengighet. I vår illustrasjon har vi en heksagon $ABCC'B'A'$ (i denne sykliske rekkefølgen) som omskriver et kjeglesnitt, hvor hver blokkbokstav representerer et hjørne av heksagonen. Med hensyn på denne rekkefølgen kaller vi A og C' , B og B' , C' og A for motsatte hjørner.



Figur 38: Brianchons teorem: De tre hoveddiagonalene $A'C$, AC' , BB' har ett felles snittpunkt.

For å fullbyrde beviset trenger vi bare å vise at for en vilkårlig heksagon som omskriver et kjeglesnitt kan vi ta tre kjeglesnitt (par av linjer) som hvert står for to av de seks sidene. Sidene er av natur tangenter til det gitte kjeglesnittet som vi igjen kan identifisere med kordene av kontakt og fortsette slik som vi har gjort ovenfor. På den måten har vi, ved hjelp av *lemma 4* fra forrige seksjon, vist at hoveddiagonalene må krysse hverandre i ett punkt og Brianchons teorem er bevist.

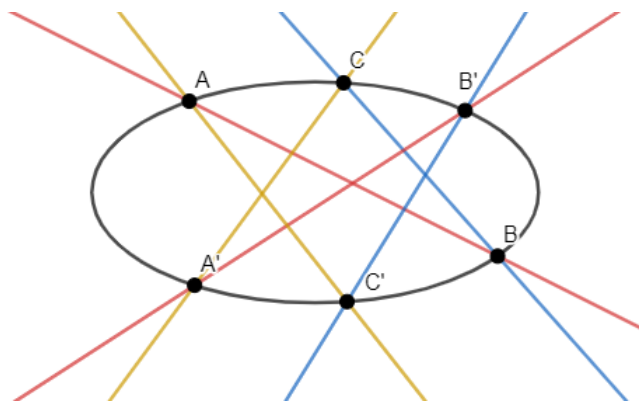
3.6 Pascals Teorem

Salmon skriver i artikkelen at det er nok å kun bevise Brianchon sitt teorem slik vi har gjort, ved så å bruke polaritet for å bevise Pascals teorem. Vi har allerede sett hvilken sterk sammenheng det er mellom polaritet og dualitet. Påstanden er at den duale satsen til Brianchons teorem direkte resulterer i Pascals teorem (og motsatt). Vi tar med oss *lemma 1* fra seksjon 2.8 som et viktig hjelperesultat for å kunne bevise

dette velkjente teoremet ved hjelp av polaritet.

Notasjon 2. Vi skal kalle de seks punktene A, B, C, A', B', C' for hjørnene av en heksagon innskrevet av et kjeglesnitt. For denne rekkefølgen av punkter vil sidene av heksagonen være $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A$ (Maxwell, 1946, Kapittel 10). De motstående sidene er de som skilles av en bokstav når hjørnene er skrevet i syklisk rekkefølge. Derfor, fra den sykliske rekkefølgen vi har valgt oss; nemlig $ABCA'B'C'$, får vi følgende par av motstående sider:

$$AB, A'B'; BC, B'C'; CA, C'A.$$



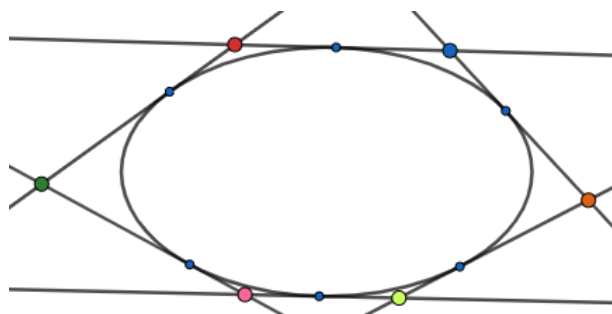
Figur 39: Illustrasjon av de motstående sidene i en heksagon innskrevet i et kjeglesnitt.

Teorem 2 (Pascal). *De tre skjæringspunktene mellom de motstående sidene av en vilkårlig heksagon innskrevet i et kjeglesnitt ligger på linje.*

Bevis. Salmon skriver tidlig i artikkelen at de to teoremene er knyttet sammen gjennom teorien om *reciprocal polar* (Salmon, 1843). Vi skal tenke på dette begrepet som projektiv dualitet. Vi har vist at polaritet er det samme som dualitet pluss en innføring av en ikke-degenerert symmetrisk bilinear form q som gir isomorfi $\mathbb{P}^2 \cong \check{\mathbb{P}}^2$. Når vi har identifisert q med den tilhørende kvadratiske formen kan punkter, linjer og kjeglesnitt oppfattes å være i ett og samme plan. Der vi tidligere ville sagt at et gitt punkt P dualt svarer til linjen L , vil vi nå betrakte L som polaren til punktet P , og P for polen til linjen L . På samme måte vil den kvadratiske formen som svarer til q bare være kjeglesnittet S som beskrives i teoremet. Dette kjeglesnittet er selvdualt som vil si at dets duale tilfelle er seg selv. Med et slikt språk skal vi nå kunne oversette direkte mellom Brianchon og Pascal sine teoremer.

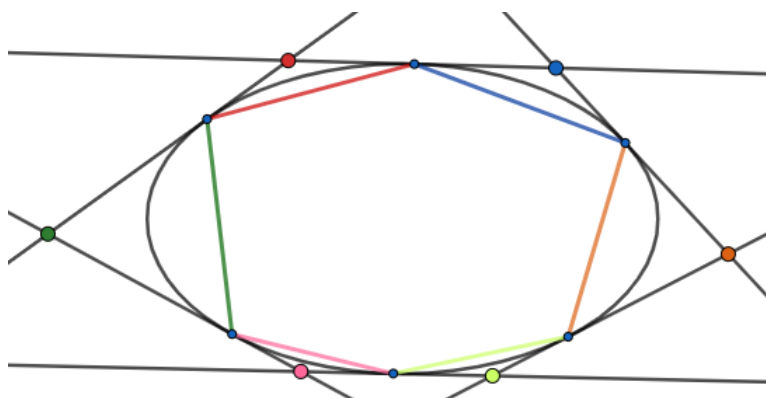
Brianchons teorem gjelder for alle heksagon som omskriver et kjeglesnitt. En heksagon består utelukkende av punkter og linjer, altså mengder vi har gode verktøy

for. I figur 40 har jeg forsøkt å fargekode hjørnene til en heksagon som omskriver et kjeglesnitt slik som i Brianchons teorem.



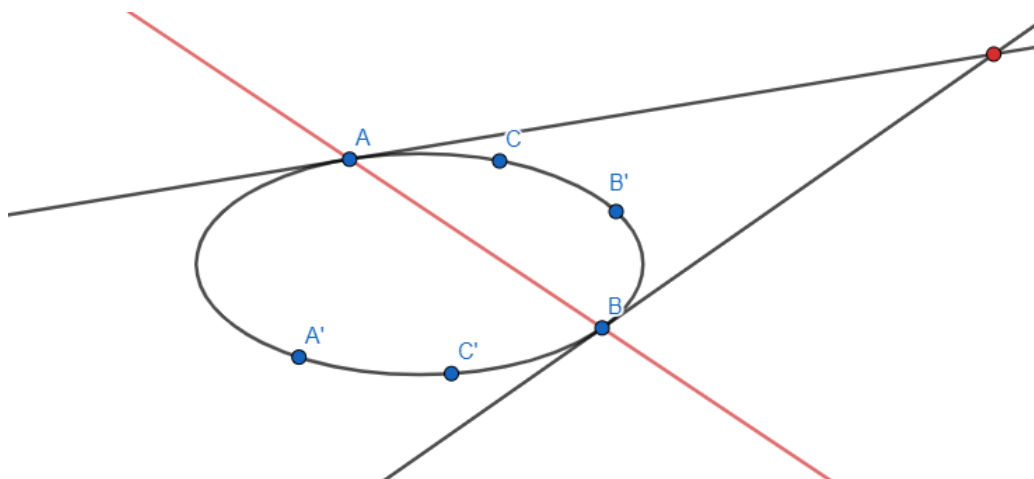
Figur 40: Brianchon vs. Pascal

Vi vet at disse hjørnene dualt kan oppfattes som seks linjer. Siden vi har innført q er disse linjene per definisjon polarene til de seks hjørnene. De seks polarene danner en ny heksagon, nemlig en som 'ligger inni' kjeglesnittet. I figur 41 illustreres dette ved å fargekode både hjørnene og de tilhørende polarene.



Figur 41: Brianchon vs. Pascal

Dette viser at ved bruk av polaritet kan vi gå fra en heksagon som omskriver et kjeglesnitt til en heksagon innskrevet av et kjeglesnitt. Vi ønsker imidlertid og oppnå en heksagon som oppfyller oppsettet fra *notasjon 2*. Derfor går vi litt bort i fra å betrakte hjørnene til Brianchons heksagon og fokuserer heller på tangentlinjene som former disse hjørnene. De seks tangentene vil alltid krysse hverandre to og to i ett punkt i \mathbb{P}^2 . Dette punktet vil per definisjon være polen til linjen som forener det gjeldende paret av tangentpunkter.

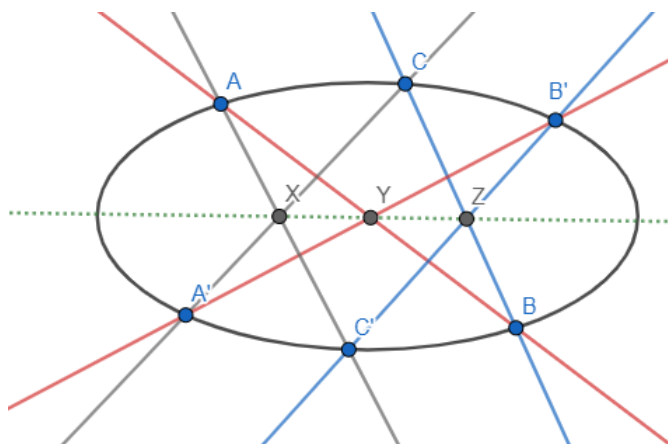


Figur 42: Brianchon vs. Pascal

I figur 42 har vi illustrert et enkelt tilfelle hvor tangentene i A og B krysser hverandre i planet og hvor polaren til dette snittpunktet danner siden AB av vårt ønskede heksagon. De resterende sidene av heksagonen finner vi på akkurat samme måte, og dermed har vi oppnådd en heksagon innskrevet av et kjeglesnitt nøyaktig slik som på figur 39 i *notasjon 2*.

Hos Brianchon vil linjene (hoveddiagonalene) man oppnår ved å forene motsatte hjørner av en heksagon som omskriver et kjeglesnitt alltid møtes i ett punkt. Vi har nettopp vist at hjørnene til en heksagon som omskriver et kjeglesnitt gjennom pol og polar svarer til sidene av en heksagon som er innskrevet av et kjeglesnitt. Motsatte hjørner i Brianchons teorem svarer til motstående sider i den duale satsen. Samtidig vet vi fra vårt tidligere arbeid at tre linjer gjennom et punkt dualt svarer til tre punkt på en linje.

Vi har nå kommet til det stadiet at vi kan direkte oversette Brianchons teorem ved hjelp av polaritet: ”*For alle heksagon som er innskrevet av et kjeglesnitt, vil de tre skjæringspunktene mellom motstående sider, være kollineære (ligge på linje)*”. Der vi har brukt understrek spesifiserer hvor polaritet har tredd i kraft, og vi ser at dette bare er Pascals teorem. Teoremet er dermed bevist.



Figur 43: Pascals Teorem. Vi kaller linjen bestående av skjæringspunktene X , Y , Z for Pascals linje.

Et alternativ til å bruke pol og polar slik vi har gjort i beviset ovenfor er å studere et kjeglesnitt i \mathbb{P}^2 og hva som skjer med det i det duale plan $\check{\mathbb{P}}^2$. Siden vi da jobber i to forskjellige plan; det opprinnelige og det duale, må vi trekke opp av hatten et kjeglesnitt også i det duale plan. Det finner man ved å studere alle tangentene til kjeglesnittet i det opprinnelige plan. La oss illustrere dette ved et eksempel.

Eksempel 3. Gitt et kjeglesnitt

$$S : x^2 + yz = 0 \subset \mathbb{P}^2.$$

Det duale kjeglesnitt $\check{S} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ skal da være alle tangentlinjene til S . En tangentlinje L i et punkt P kan uttrykkes på formen $ax + by + cz = 0$, hvor koeffisientene representerer de partiell deriverte i punktet. Vi må finne de partiell deriverte for likningen til S :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = y$$

Det duale kjeglesnitt \check{S} er da representert av alle linjer med likning på formen

$$2ux + wy + vz = 0, \quad (u : v : w) \in S$$

\Downarrow

$$(2u : w : v).$$

Gitt $(x : y : z) \in \mathbb{P}^2$ må vi se om det kan skrives på formen

$$u^2 + vw = 0.$$

Det oppnår vi når $u = \frac{1}{2}x$, $v = z$, $w = y$, og da har vi funnet likningen for det duale kjeglesnittet som kan uttrykkes på formen

$$\check{S} : \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + yz = 0 \subset \check{\mathbb{P}}^2.$$

Om vi nå likevel innfører en symmetrisk bilineær form som over for å identifisere de to planene så er påstanden at kjeglesnittet og dets duale vil sammenfalle. Matriksen A , som består av koeffisientene i likningen til kjeglesnittet S , er på formen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi uttrykke den symmetriske bilineære formen q :

$$q(x, y, z; x', y', z') = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = xx' + \frac{1}{2}yz' + \frac{1}{2}zy'.$$

Gitt at vektorrommet er $V = k^3$ ønsker vi å finne ut om $S \cong \check{S}$. Et punkt $(a, b, c) \in V$ sendes til $\psi \in V^\vee$, $\psi : V \rightarrow k$.

$$\psi(x, y, z) = q(a, b, c; x, y, z) = ax + \frac{1}{2}bz + \frac{1}{2}cy,$$

som gir linjekoordinater $(a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c)$. Da har vi at $(a : b : c) \in S$, og vi ønsker å finne ut om $(a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c) \in \check{S}$.

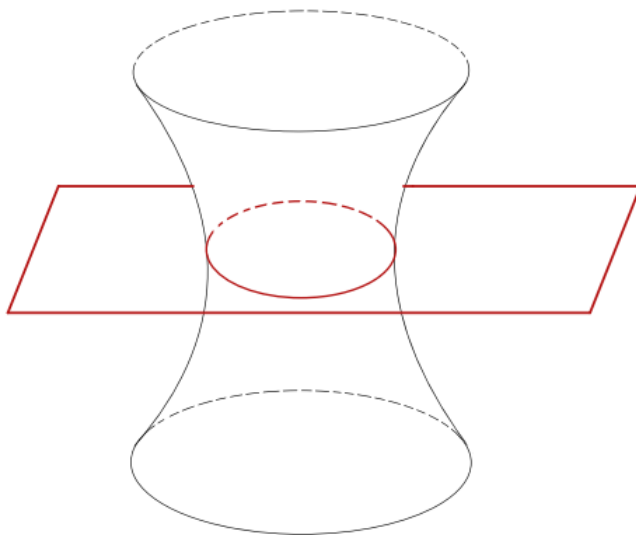
$$(a : b : c) \in S \iff a^2 + bc = 0 \implies \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}c\right) = \frac{1}{4}(a^2 + bc) = 0.$$

Dermed har vi illustrert et eksempel hvor $\mathbb{P}^2 \ni S \cong \check{S} \in \check{\mathbb{P}}^2$. Via den symmetriske bilineære formen sammenfaller det opprinnelige kjeglesnittet S og dets duale kjeglesnitt \check{S} .

3.7 Generalisering av Brianchons teorem til rommet \mathbb{P}^3

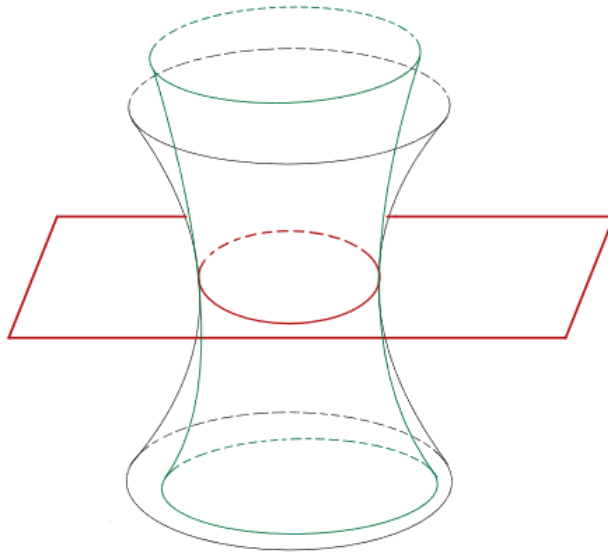
Salmon kommer så med et interessant resonnement; nemlig at alt av hva som har blitt sagt til nå om kjeglesnitt og linjer kan så å si direkte oversettes til kvadriker og plan i rommet. I stedet for å la $S = 0$ være et gitt kjeglesnitt sier han nå at det skal være en gitt kvadrikk, og det som tidligere var en gitt linje $L = 0$ er nå et gitt plan i \mathbb{P}^3 (Salmon, 1843).

Vi skal se at det som i planet omhandlet tre kjeglesnitt som alle har dobbel kontakt med et fjerde ikke-degenerert kjeglesnitt $S = 0$ er analogt med tre kvadrikk i rommet som alle er *innhyllet* av en fjerde kvadrikk $S = 0$. En kvadrikk som er innhyllet av en annen kvadrikk S langs et plan L betyr bare at den har felles tangentplan langs $S = L = 0$. Vi tar utgangspunkt i en ærlig ikke-singulær kvadrikk $S = 0$, og et plan $L = 0$ som skjærer igjennom den. Implisitt hos Salmon er at snittet mellom en kvadrikk S og et plan L i \mathbb{P}^3 alltid vil være et kjeglesnitt (Se figur 44). Vi kan dermed oppfatte dette kjeglesnittet som en kopi av \mathbb{P}^2 .



Figur 44: Planet $L = 0$ skjærer igjennom $S = 0$. Vi ser at snittkurven er et kjeglesnitt.

Så sier Salmon at en ny kvadrikk, som berører den gitte kvadrikken $S = 0$ langs planet $L = 0$, vil ha likning på formen $S - L^2 = 0$. Det han mener er at denne nye kvadrikken representert av $S - L^2 = 0$ er innhyllet av $S = 0$ (se figur 45).



Figur 45: Den nye kvadrikken $S - L^2 = 0$ i grønt er innhyllet av $S = 0$ og har derfor samme tangentplan langs $S = L = 0$.

Da er det nærliggende å tenke at dette er penselen av kvadrikker $\lambda S - \mu L^2 = 0$ slik som vi fant ut for kjeglesnitt i planet.

Setning 13. $\lambda S - \mu L^2 = 0$ representerer penselen av kvadrikker med et dobbelt plan L^2 og en entydig kjegle som degenererte elementer.

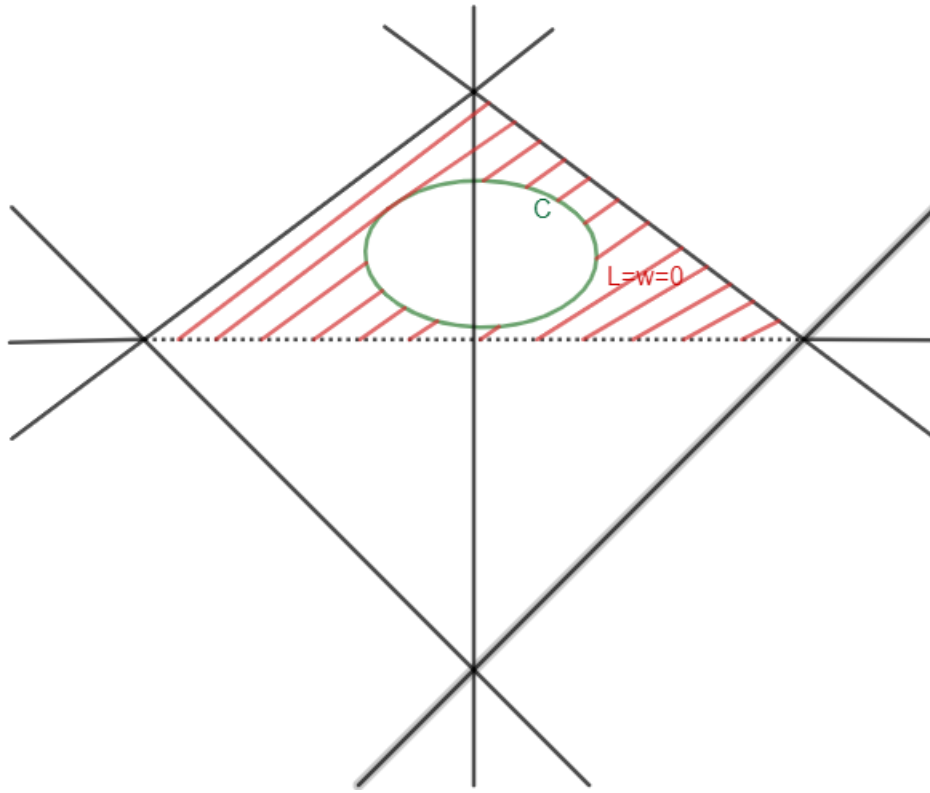
Bevis. For å bevise setningen må vi igjennom to steg. Det første er å finne alle kvadrikker innhyllet av en gitt ikke-singulær kvadrikk $S = 0$ der hvor et plan $L = 0$ snitter S . Det vil si alle kvadrikker med kjeglesnittet C som snittkurve med planet $L = 0$. Siste steg blir å finne ett degenerert element (entydig kjegle) i tillegg til det doble planet $L^2 = 0$.

Vi lar $q(x, y, z, w)$ være en kvadratisk form, og $L = 0$ et plan. Etter en projektiv transformasjon kan vi anta at $L = w$, hvor $w = 0$ er et plan på vårt referansetetraeder. Vi kan anta at opp til en projektiv transformasjon er kjeglesnittet C på standardform slik at

$$C = q(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$\updownarrow$$

$$q(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w(ax + by + cz + dw).$$



Figur 46: Referanse-tetraeder med C liggende i planet $w = 0$.

Vi ønsker å studere to kvadrikker

$$q_1(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w(a_1x + b_1y + c_1z) + d_1w^2 = 0$$

$$q_2(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w(a_2x + b_2y + c_2z) + d_2w^2 = 0$$

og finne ut om de har samme tangentplan i et punkt $(x : y : z : 0)$ langs $C : x^2 + y^2 + z^2 = 0$. De partiell deriverte med betingelsen $w = 0$ er da:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial q_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial q_1}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial q_1}{\partial w} = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial q_2}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial q_2}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial q_2}{\partial w} = a_2x + b_2y + c_2z.$$

Samme tangentplan i $(x : y : z : 0)$ med $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \iff$

$$(2x : 2y : 2z : a_1x + b_1y + c_1z) = (2x : 2y : 2z : a_2x + b_2y + c_2z).$$

Videre ønsker vi å finne ut om dette impliserer

$$(1 : a_1 : b_1 : c_1) = (1 : a_2 : b_2 : c_2).$$

Opp til skalering har vi at

$$a_2x + b_2y + c_2z = \lambda(a_1x + b_1y + c_1z)$$

$$\updownarrow$$

$$a_2 = \lambda a_1, \quad b_2 = \lambda b_1, \quad c_2 = \lambda c_1$$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{q_2 = \lambda q_1 + \mu w^2.}$$

Dette er penselen vi er ute etter, og vi vet nå at penselen består av alle kvadriker definert av et polynom på formen

$$q = x^2 + y^2 + z^2 + w(ax + by + cz) + dw^2$$

der a, b, c er fiksert og d varierer. Her tar vi akkurat ikke med dobbeltplanet som svarer til $d = \infty$. Om vi velger én slik q_1 i penselen så kan alle andre skrives på formen

$$q_2 = q_1 + tw^2$$

for en passende verdi av t , nettopp fordi det bare er w^2 -koeffisienten som skiller q_1 og q_2 . Og for å få med dobbeltplanet skriver vi det i stedet som

$$q_2 = \lambda q_1 + \mu w^2$$

der $(1 : t) = (\lambda : \mu)$ og hvor vi naturlig får $t = \infty$ som $(\lambda : \mu) = (0 : 1)$.

Siden d kan variere fritt kan vi like godt velge q_1 som tilfellet $d = 0$. Da har vi

$$q_1 = x^2 + y^2 + z^2 + w(ax + by + cz).$$

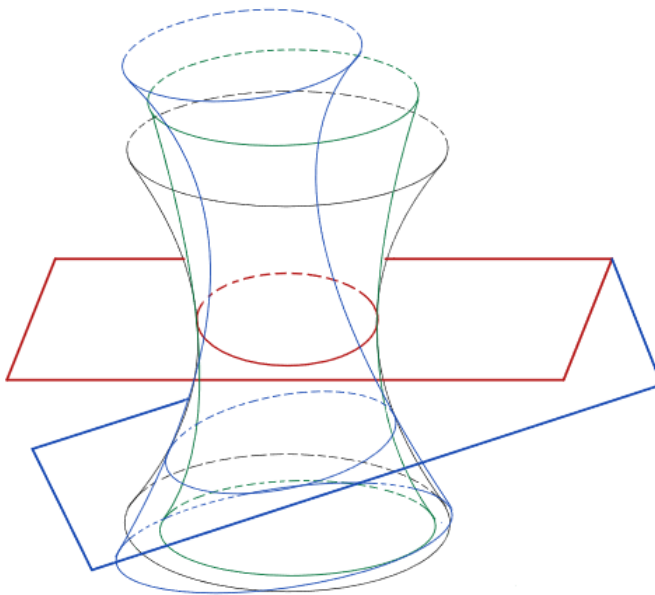
Vi tenker på denne q_1 som et fritt valgt element i penselen; alle andre kan som før skrives som $q_2 = q_1 + tw^2$ og siden w^2 -koeffisienten i q_1 nå er null så er tw^2 nøyaktig w^2 -leddet i q_2 . Nå gjenstår det bare å identifisere singularitetene, noe man oppnår ved sette alle de partiell deriverte lik null. Da skal vi få ingen singulariteter bortsett fra i to tilfeller; hvor det ene er det doble planet, og det andre er kjeglen. Etter litt regning finner vi ut at det doble planet er gitt av $(\lambda : \mu) = (0 : 1)$, og den entydige kjeglen er gitt av $(\lambda : \mu) = (1 : \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2))$.

Helt generelt har vi en pensel av kvadriker

$$q = \lambda q_0 + \mu w^2$$

der vi tenker på q_0 som et fiksert polynom og q som et varierende element i penselen. Vi har dermed bevist *setning 13*.

Videre skriver Salmon at en ny kvadrikk som også er innhyllet av $S = 0$ har likningen $S - (L')^2 = 0$. Det ligger implisitt hos forfatteren at et plan $L' = 0$ må skjære igjennom $S = 0$ for å oppnå denne likningen. Nå kan vi si med sikkerhet at vi får en ny pensel av kvadrikker på formen $S - (L')^2 = 0$ med felles tangentplan langs $S = L' = 0$.

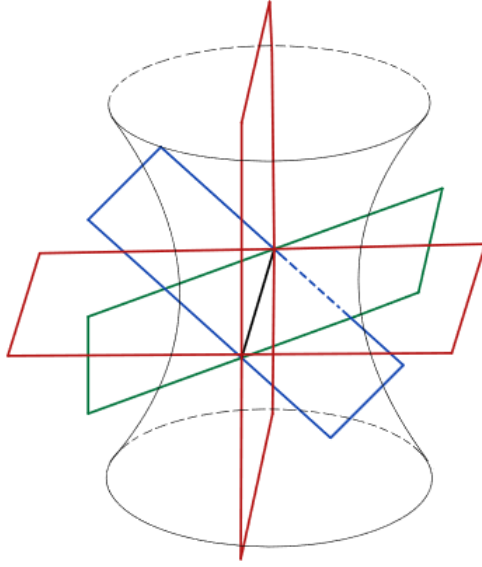


Figur 47: Oppsettet vi har sålangt. To kvadrikker representert av likningene $S - L^2 = 0$ og $S - (L')^2 = 0$ som begge er innhyllet av $S = 0$.

De to innhyllede kvadrikkene skjærer hverandre langs planene med likninger $L \pm L' = 0$ nøyaktig slik vi fikk for linjer i \mathbb{P}^2 . Snittkurven mellom de to kvadrikkene er en 4. grads-krve. Alternativt kan vi si at snittet mellom $S - L^2 = 0$ og $S - (L')^2 = 0$ ligger på par av plan hvor snittkurven er et kjeglesnitt på hvert av planene. Vi viste i *setning 11* at de fire linjene $L = 0$, $L' = 0$, $L + L' = 0$, $L - L' = 0$ har ett felles snittpunkt i planet. På nøyaktig samme måte, uten at vi trenger å bevise det, vil de fire planene $L = 0$, $L' = 0$, $L + L' = 0$, $L - L' = 0$ ha en felles snittlinje i \mathbb{P}^3 . Vi har nå gjort rede for det neste teoremet Salmon kommer med.

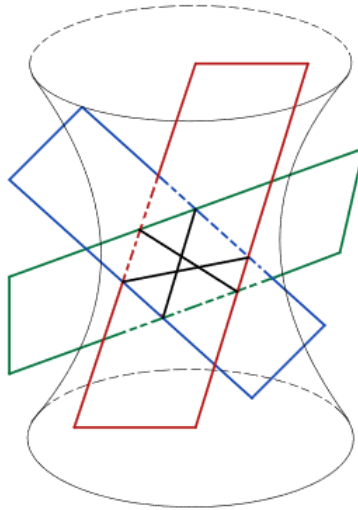
Teorem 3. *Dersom to kvadrikker av andre grad begge er innhyllet av en tredje (ikke-singulær) kvadrikk vil de skjære hverandre i et par av plan-krver (kjeglesnitt), og skjærings-planene vil snitte hverandre i samme linje som den kontaktplanene har til felles.*

Det som står i parantes i teoremet ovenfor er tilleggsinformasjon som ligger implisitt hos Salmon, men som jeg ville ta med for å være tydelig på hva som menes.



Figur 48: Illustrasjon på hvordan de fire plan har felles snittlinje

På samme måte som vi gjorde med kjeglesnitt i \mathbb{P}^2 betrakter vi videre en tredje kvadrikk som også er innhyllet av S (slik som de andre to). Denne kvadrikken vil ha likning $S - (L'')^2 = 0$, og dens skjærings-plan vil ha likninger $L \pm L'' = 0$, $L' \pm L'' = 0$ helt analogt med det vi regnet ut for linjer i planet. Salmon sier så at alle de seks skjærings-plan $L \pm L' = 0$, $L \pm L'' = 0$, $L' \pm L'' = 0$ vil gå igjennom snittet mellom de tre kontaktplanene fordi alle likningene er tilfredsstilt av likningene $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0$ (Salmon, 1843). Det kan imidlertid virke litt misvisende å uttrykke det på denne måten som Salmon gjør, da 'snittet' mellom de tre kontaktplanene ikke er én snittlinje, men tre snittlinjer.



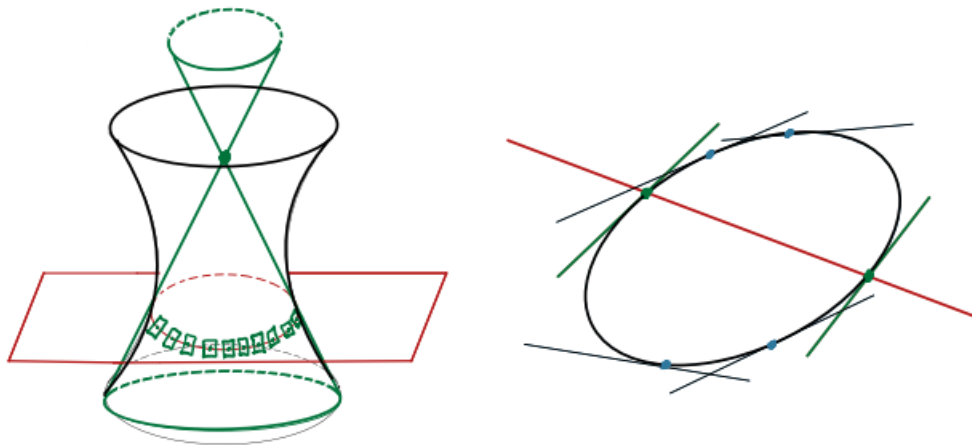
Figur 49: Kontaktplanene $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0$ har tilsammen tre snittlinjer

Det vi nå kan si er at de seks skjærings-plan alle vil gå igjennom en av disse snittlinjene mellom kontaktplanene. De vil, på akkurat samme måte som i \mathbb{P}^2 med skjærings-korder og felles snittpunkt, tre og tre gå igjennom en og en snittlinje. Dette kan vi konstatere på grunn av den lineære avhengigheten mellom planene. Dersom vi for eksempel studerer skjæringen mellom planet $L + L'' = 0$ og planet $L - L' = 0$ trenger vi bare å subtrahere likningene for å finne et nytt plan som også går igjennom samme snittlinje:

$$L + L'' - (L - L') = 0 \iff L' + L'' = 0$$

Vi vil få akkurat samme oppsett med trioer av plan som vi fikk med trioer av linjer i \mathbb{P}^2 , noe vi redegjorde for i *Lemma 4*. De seks skjærings-plan vil i tillegg ha et felles punkt, nemlig der hvor $L = L' = L'' = 0$.

Nå kommer vi til selve kjernen av Salmons generalisering. Dersom vi degenererer de tre innhyllede kvadrikkene $S - L^2 = 0$, $S - (L')^2 = 0$, $S - (L'')^2 = 0$ til kjegler vil vi få et teorem som svarer til Brianchons teorem (Salmon, 1843). Det må imidlertid presiseres at det er oppsettet vi får som er analogt med Brianchons teorem i planet.



Figur 50: Analogien mellom Brianchon i planet og det vi oppnår i rommet

I planet jobbet vi med tre kjeglesnitt som alle har dobbel kontakt med et gitt ikke-degenerert kjeglesnitt $S = 0$ i de punktene hvor tre distinkte linjer $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0$ treffer det gitte. Da degenererte vi de tre kjeglesnittene med dobbel kontakt til par av tangentlinjer for å bevise Brianchons teorem. Til høyre i figur 50 illustreres ett slikt par av tangentlinjer i grønt. Vi kan anta at den røde linjen som skjærer $S = 0$ er $L = 0$, og den har samme tangent i de to punktene som det degenererte kjeglesnittet (tangentlinjene i de to punktene). Vi får et analogt oppsett i \mathbb{P}^3 . I rommet har vi tre kvadrikker som alle er innhyllet av en gitt ikke-singulær kvadrikk $S = 0$ der hvor tre distinkte plan skjærer igjennom den gitte kvadrikken. Vi degenererer så de tre innhyllede kvadrikkene til kjegler. Til venstre i figur 50 illustreres et slikt degenerert element (kjegle) i grønt. Vi antar at det røde planet som skjærer igjennom $S = 0$ er $L = 0$, og vi oppnår et felles tangentplamt langs $S = L = 0$. Analogien er med andre ord klar, og det er tre slike par av degenererte elementer i begge tilfeller. Dette er så langt vi kommer med tanke på Brianchons teorem generalisert til rommet, og man lurer gjerne på hva som er så interessant og 'banebrytende' med dette, men alt gir mening når vi videre skal studere analogien til Pascals teorem.

Salmon lar imidlertid være å formulere teoremet som skal svare til Brianchon i \mathbb{P}^3 . Han 'hopper over' dette og fokuserer heller på det duale teoremet. Før vi redegjør for det duale teoremet han beskriver må vi derfor formulere et teorem som viser våre foreløpige resultater. Dette finner vi nødvendig fordi man ikke kan formulere en dual sats uten at vi har en opprinnelig en. Teoremet har vi allerede bevist ovenfor.

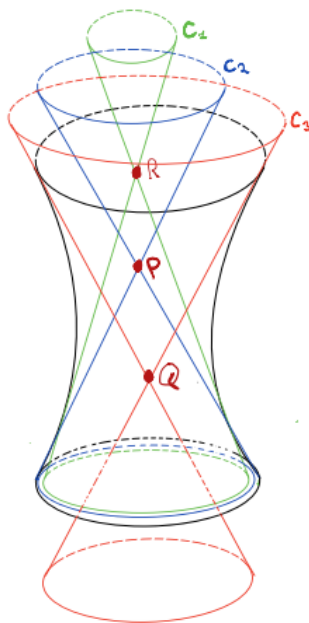
Teorem 4. *Ta tre vilkårlige kjegler innhyllet av en ikke-singulær kvadrikk i \mathbb{P}^3 . Disse innhyllede kjeglene vil skjære hverandre i par av plankurver (kjeglesnitt), og deres seks skjærings-plan vil tre og tre snitte hverandre i samme linje. De seks nevnte planene*

har ett felles punkt der hvor kontaktplanene til de innhyllede kjeglene møtes.

Nå som vi har formet en sats som vi kan stå inne for skal vi på nøyaktig samme måte som tidligere kunne oppnå en dual sats. Og det er nettopp en dual sats til *Teorem 4* Salmon formulerer som artikkelens siste teorem. (Salmon, 1843).

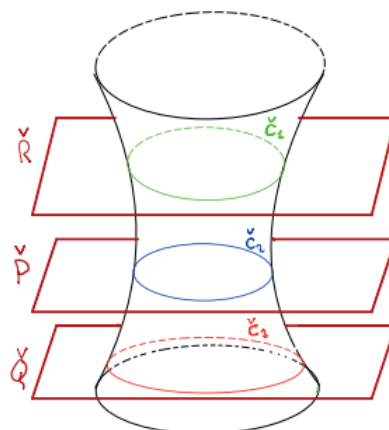
Teorem 5. *Ta tre vilkårlige plansnitt (kjeglesnitt) av en kvadrikk. Gjennom to hvilke som helst plansnitt kan et par av kjegler konstrueres. De seks toppunktene til kjeglene ligger i samme plan, og tre og tre av dem ligger på samme linje.*

Bevis. Vi tar utgangspunkt i informasjonen fra *teorem 4*, og ved hjelp av dualitet skal vi kunne bevise *teorem 5*. De tre innhyllede kvadrikkene er nå blitt erstattet av tre kjegler, også innhyllet av en ikke-singulær kvadrikk $S = 0$.



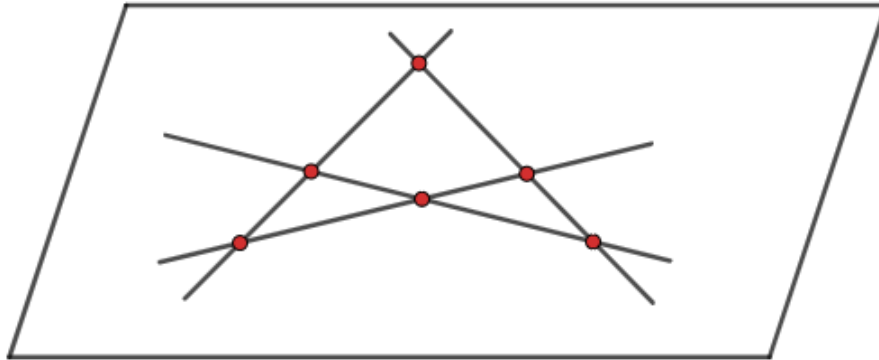
Figur 51: Tre kjegler C_1 , C_2 , C_3 med hvert sitt toppunkt R , P , Q som er innhyllet av en ikke-singulær kvadrikk.

Vi har tidligere vist at det duale til en kjegle i \mathbb{P}^3 er et kjeglesnitt (i et plan) i $\check{\mathbb{P}}^3$. Vi vet også at en kvadrikk dualt svarer til en kvadrikk. Dermed kan vi konstatere at det duale til tre kjegler innhyllet av en ikke-singulær kvadrikk er tre kjeglesnitt (snittkurver) liggende i hvert sitt plan som skjærer igjennom den ikke-singulære kvadrikken. Planene disse kjeglesnittene ligger i svarer dualt til de opprinnelige kjeglenes toppunkt.



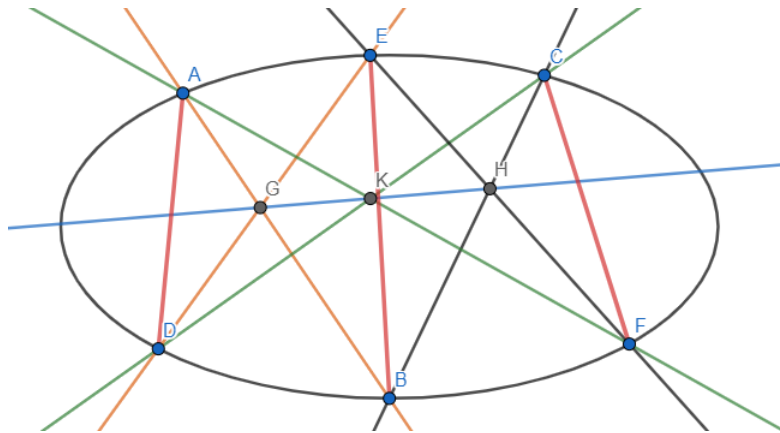
Figur 52: De tre kjeglene svarer dualt til tre kjeglesnitt \check{C}_1 , \check{C}_2 , \check{C}_3 liggende i hvert sitt plan \check{R} , \check{P} , \check{Q} i $\check{\mathbb{P}}^3$. De tre planene er som nevnt den duale korrespondansen til de tre toppunktene til kjeglene i det opprinnelige rommet.

Ifølge Salmon kan vi nå konstruere par av kjegler gjennom to og to av plansnittene (vilkårlig), og de 'nye' kjeglenes toppunkt vil tre og tre ligge på linje (Salmon, 1843). La oss forklare dette. Først og fremst har vi et oppsett i $\check{\mathbb{P}}^3$ ekvivalent med oppsettet i det opprinnelige rommet. Dersom dette er uklart refererer jeg bakover i teksten til *lemma 2* hvor vi fant ut at hele oppsettet bestående av kjegle, toppunkt og et kjeglesnitt i et plan er dualt til et tilsvarende oppsett i $\check{\mathbb{P}}^3$. Fra *teorem 4* fikk vi at de seks skjærings-plan tre og tre har en felles snittlinje, og at alle seks har ett felles punkt der hvor $L = L' = L'' = 0$. Seks plan som tre og tre har en felles snittlinje svarer dualt til seks punkter som tre og tre ligger på linje. Dette vet vi fordi $\mathbb{P}^3 \supset \text{plan} \longleftrightarrow \text{punkt} \in \check{\mathbb{P}}^3$ og $\mathbb{P}^3 \supset \text{linje} \longleftrightarrow \text{linje} \subset \check{\mathbb{P}}^3$. De seks punktene må ligge i ett og samme plan fordi de seks skjærings-plan i det opprinnelige rommet har ett felles punkt. Dermed har vi bevist *teorem 5* ved hjelp av dualitet. Det at de seks punktene tre og tre ligger på linje i et plan forteller oss at de ligger på en fullstendig firkant (Se definisjon 3).



Figur 53: De seks punktene må ligge på en fullstendig firkant i ett plan. Punktene er den duale korrespondansen til de seks skjærings-plan, og planet svarer dualt til punktet de seks planene har til felles der hvor $L = L' = L'' = 0$.

Salmon ber så leseren om å forme en figur for å kunne anerkjenne analogien til Pascals teorem i billedlig format (Se figur 54) (Salmon, 1843).



Figur 54: Salmons figur

Salmons heksagon $ABCDEF$ i figur 54 er på helt lik form som det vi har brukt som notasjon for en innskrevet heksagon tidligere (ref *notasjon 2*). På samme måte er de tre punktene G, H, K tre skjæringspunkt mellom motstående sider slik vi tidligere har vist ved syklisk rekkefølge. Salmon ber oss så om å forestille oss at kjeglesnittet representerer en kvadrikk. Da vil AD, BE, CF være tre plansnitt og $ABGDE, BCHEF, CDKFA$ være tre kjegler som inneholder disse plansnittene. Så konkluderer Salmon med at teoremet vi nettopp har gjort rede for legger til grunn for at de tre toppunktene G, H, K fortsatt ligger på linje; de representerer nemlig en av trioene

av punkter som ligger på den fullstendige firkanten vi nettopp redegjorde for. Vi får med andre ord et teorem i rommet som fullstendig svarer til Pascals teorem i planet.

4 Generalisering til \mathbb{P}^n

Vi er nå ferdige med å redegjøre for Salmons artikkel, men vi ønsker å se om vi kan oppnå noen resultater ved å videreføre det vi har konstatert i planet og rommet til n dimensjoner. Det gikk overraskende knirkefritt å oversette direkte fra planet til rommet ved hjelp av et par matematiske redskaper (dualitet, polaritet, etc.). Jeg mistenker at vi fint kan 'oversette' videre til høyere dimensjoner \mathbb{P}^n slik vi har gjort til nå. Det vi før har kunnet illustrert ved hjelp av figurer er nå ikke lenger mulig.

Vi tar utgangspunkt i en kvadrikk $S : q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ og et hyperplan $L = 0$ i \mathbb{P}^n som snitter S . Akkurat som tidligere vil en ny kvadrikk q_1 representert av likningen $S - L^2 = 0$ være innhyllt av S der hvor L snitter den. Det vil si at q_1 har samme tangentplan langs $S = L = 0$. Igjen må vi kunne bevise at vi får en pensel av kvadrikker, denne gang i \mathbb{P}^n .

Setning 14. $\lambda S - \mu L^2 = 0$ representerer penselen av kvadrikker i \mathbb{P}^n med et dobbelt plan L^2 og en entydig kjegle som degenererte elementer

Bevis. Vi tar utgangspunkt i en kvadrikk $S : q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ og et hyperplan $L = 0$. Snittet $S \cap L$ er en kvadrikk C , og etter en projektiv transformasjon kan vi anta at

$$L = x_n,$$

der x_n er et hyperplan i vårt *referanse-simpleks*. I n dimensjoner har vi et høyere-dimensjonelt tetraeder som heter n -simpleks (referanse-simpleks), helt analogt med en trekant i planet og et tetraeder i rommet.

Videre kan vi anta at C er på standardform:

$$\begin{aligned} C = q(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0) &= x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \\ &\updownarrow \\ q(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, n) &= x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i \right) + \lambda_n x_n^2 \end{aligned}$$

Vi betrakter to kvadrikker $q_1, q_2 \subset \mathbb{P}^n$ og må finne ut om de har samme tangenthyperplan i et punkt $(x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_n)$ langs $C : x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 0$. Vi har at

$$q_1 = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i \right) + a_n x_n^2,$$

$$q_2 = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x_i \right) + b_n x_n^2.$$

De partiell deriverte etter vi har satt inn betingelsen $x_n = 0$ er

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_0} = 2x_0, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_1} = 2x_1^2, \dots, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_{n-1}} = 2x_{n-1}^2, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i$$

og

$$\frac{\partial q_2}{\partial x_0} = 2x_0, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_1} = 2x_1^2, \dots, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_{n-1}} = 2x_{n-1}^2, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x_n} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_i$$

De to kvadrikkene har samme tangent-hyperplan i $(x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : 0)$ langs C hvis og bare hvis

$$(2x_0 : 2x_1 : \dots : 2x_{n-1} : \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i) = (2x_0 : 2x_1 : \dots : 2x_{n-1} : \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_i),$$

og på samme måte som vi gjorde i \mathbb{P}^3 må vi finne ut om

$$(1 : a_0 : a_1 : \dots : a_{n-1}) = (1 : b_0 : b_1 : \dots : b_{n-1}).$$

Opp til skalering har vi at

$$b_0 x_0 + b_1 x_1 + \dots + b_{n-1} x_{n-1} = \lambda (a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1})$$

$$\Downarrow$$

$$b_0 = \lambda a_0, \quad b_1 = \lambda a_1, \quad \dots, \quad b_{n-1} = \lambda a_{n-1}.$$

$$\Downarrow$$

$$q_2 = \lambda q_1 + \mu x_n^2.$$

Dette er likningen for penselen av kvadrikker som alle har felles tangent-hyperplan langs C . Kvadrikkene i penselen er alle definert av et polynom

$$q = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i \right) + \lambda_n x_n^2,$$

der $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ er fiksert og λ_n varierer. Jeg ønsker nå å referere bakover i teksten; spesifikt til når vi fant penselen av kvadrikker i \mathbb{P}^3 . De videre resonnementer er nemlig helt analoge med de vi foretok oss i rommet. For å konkludere har vi en pensel av kvadrikker

$$q = \lambda q_0 + \mu x_n^2,$$

der q_0 er et fiksert polynom og q et varierende element i penselen. Vi har dermed bevist *setning 14*. Enda viktigere; Dette er en generalisering av det vi har foretatt oss i planet og rommet om pensel av henholdsvis kjeglesnitt og kvadrikk.

Tar vi nå stilling til et nytt hyperplan $L' = 0$ som også skjærer igjennom S oppnår vi ytterligere en kvadrikk $q_2 \subset \mathbb{P}^n$ med likning $S - (L')^2 = 0$. De to kvadrikkene (som begge er innhyllet av S) vil skjære hverandre langs hyperplanene som har likninger $L \pm L' = 0$. Det vil si at $q_1 \cap q_2$ ligger på par av hyperplan hvor snittet er en kvadrikk på hvert av hyperplanene. Ved akkurat samme resonneringer som tidligere kan vi konstatere at de fire hyperplanene $L = 0, L' = 0, L \pm L' = 0$ har en felles snittmengde i \mathbb{P}^n . Dermed kan vi gjøre som tidligere og bruke all denne informasjonen til å formulere et teorem slik som Salmon har gjort i artikkelen sin for både \mathbb{P}^2 og \mathbb{P}^3 .

Teorem 6. *Dersom to kvadrikk (homogen, grad 2) i \mathbb{P}^n begge er innhyllet av en gitt ikke-singulær kvadrikk S vil de skjære hverandre i et par av hyperplan-kurver (kvadrikk), og snittmengden mellom skjærings-hyperplanene vil være lik den som kontakt-hyperplanene har til felles; nemlig et lineært underrom av dimensjon $(n - 2)$.*

La oss nå følge samme prosedyre som tidligere og innføre en tredje og siste kvadrikk $q_3 \subset \mathbb{P}^n$ også innhyllet av S . Denne er representert av $S - (L'')^2 = 0$, hvor L'' er et nytt hyperplan gjennom S . Dens skjærings-hyperplan har likninger $L \pm L'' = 0$ og $L' \pm L'' = 0$. De totalt seks skjærings-hyperplan $L \pm L' = 0, L \pm L'' = 0, L' \pm L'' = 0$ vil gå igjennom snittmengden mellom de tre kontakt-hyperplanene fordi alle likningene er tilfredsstillt av $L = 0, L' = 0, L'' = 0$. Og akkurat som tidligere vil de seks skjærings-hyperplan tre og tre gå igjennom en og en snittmengde $L \cap L' \cap L''$; et lineært underrom av dimensjon $(n - 2)$. Samtidig vil alle de seks nevnte hyperplanene snitte hverandre i et lineært underrom av dimensjon $(n - 3)$ der hvor $L = L' = L'' = 0$. For å unngå å repetere tidligere konstaterte resonneringer referer vi bakover i teksten dersom noe av dette virker uklart for leseren. Frem til dette punkt har vi altså et helt analogt oppsett som det vi fikk i planet og rommet. Lar vi nå de tre kvadrikkene degenereres til kjegler, altså det geometriske objektet med tilhørende likning $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 0$, skal vi få et teorem som svarer til Brianchon i \mathbb{P}^n .

Teorem 7. *Ta tre vilkårlige kjegler innhyllet av en ikke-singulær kvadrikk i \mathbb{P}^n . Disse innhyllede kjeglene vil skjære hverandre i par av hyperplan-snitt, og deres seks skjærings-hyperplan vil tre og tre snitte hverandre i et lineært underrom av dimensjon $(n - 2)$. Disse seks hyperplanene har også én felles snittmengde; et lineært underrom av dimensjon $(n - 3)$.*

Videre ønsker vi å oppnå en analogi til Pascals teorem i \mathbb{P}^n . Metoden vi skal bruke er ikke noe annerledes fra det vi har gjort tidligere; vi må formulere en dual sats

til *teorem 7*. Vi vet fra tidligere fremlagt teori at det duale til en kjegle i \mathbb{P}^n er en kvadrikk liggende i et hyperplan, hvor hyperplanet er det duale objektet til kjeglens toppunkt. Med andre ord vil en kjegle innhyllet av en ikke-singulær kvadrikk dualt svare til et hyperplan som snitter denne ikke-singulære kvadrikken. Videre hadde vi seks skjærings-hyperplan som tre og tre skjærer hverandre i et lineært underrom av dimensjon $(n - 2)$ og som alle har én felles snittmengde av dimensjon $(n - 3)$. Dualt til dette har vi seks punkter som tre og tre ligger på linje i ett og samme plan. La oss formulere det duale teorem.

Teorem 8. *Ta tre hyperplan-snitt av en gitt ikke-singulær kvadrikk i \mathbb{P}^n . Gjennom to vilkårlige hyperplan-snitt kan et par av kjegler konstrueres. De seks topp-punktene til kjeglene ligger i samme plan og vil tre og tre ligge på linje.*

De seks topp-punktene må ligge slik at de former en fullstendig firkant på samme måte som vi redegjorde for i rommet. Ganske fantastisk får vi et teorem helt i tråd med resultatene våre fra \mathbb{P}^2 og \mathbb{P}^3 : Tre hyperplan-snitt tilsvarer nøyaktig tre punkter i planet og tre linjer i rommet. Det må nok en gang presiseres at en kjegle i \mathbb{P}^n er objektet representert av likningen

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 0.$$

I \mathbb{P}^2 representerer denne likningen imidlertid et par av linjer akkurat slik vi ønsker:

$$x^2 + y^2 = 0 \iff (x + iy)(x - iy) = 0.$$

Dermed har vi oppnådd en generalisering til n dimensjoner. Vi ser at dersom Salmon hadde byttet ut ordet plan med hyperplan i sin generalisering ville også hans teoremer vært gjeldende for \mathbb{P}^n . Det hevdes at etterpåklokskap er den mest eksakte vitenskap. Det at Salmon selv ikke generaliserer til \mathbb{P}^n må nok ses i kontekst; Det kan tenkes at det på den tiden ikke var interessant å eksperimentere lenger enn til det projektive rommet.

Referanser

- Bix, R. (2006). *Conics and Cubics - A concrete introduction to algebraic curves (Second edition)*. Springer-Verlag New York.
- Maxwell, E. A. (1946). *The methods of plane projective geometry based on the use of general homogeneous coordinates*. Cambridge: university press.
- Salmon, G. (1843). On the properties of surfaces of the second degree which correspond to the theorems of pascal and briançon on conic sections. *Philosophical Magazine and Journal*, 24(156).
- Wikipedia (2020). Projektiv geometri. Hentet 27. Mai 2021 fra https://no.wikipedia.org/wiki/Projektiv_geometri#Nyere_tid.