Universitetet i Stavanger

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Utdanningsvitenskap - Matematikkdidaktikk	Høstsemesteret, 2021 Åpen/ ~~konfidensiell~~
Forfatter: Håvard Myge	
Veileder: Raymond Bjuland	
Tittel på masteroppgaven: Heuristiske tilnærminger og kognitive krav i lærebøker laget for faget Matematikk 1T Engelsk tittel: Heuristic approaches and cognitive demands in textbooks made for the subject Theoretical Mathematics in upper secondary school	
Emneord: Læringsmuligheter, lærebok, læremidler, heuristikk, heuristiske tilnærminger, utforsking, problemløsing, kognitive krav, matematikkdidaktikk, algebra	Antall ord: 22 987 +Antall vedlegg/annet: 2 768 Stavanger, 10.12.2021 dato/år

Forord

Jeg er veldig glad i matematikk samt å undervise matematikk, og er spesielt opptatt av algebra og problemløsing. Algebra får ofte skylda for hvor vanskelig matematikk er; «Hva skal vi egentlig med bokstaver i matematikken?» Spør fortvilte elever. Algebra handler om mye mer enn regning med bokstaver, og de timene jeg opplever som mest meningsfulle, er når elever arbeider med problem og finner mønster og sammenhenger. Elevene opplever mestring, og algebra er ikke så kjedelig likevel. I 2016 startet jeg på masterstudiet Utdanningsvitenskap – Matematikkdidaktikk på deltid ved UiS. Jeg hadde full jobb på Haugaland videregående skole, men fikk en permisjonsordning i to av de fire årene. Jeg lærte mye nytt i denne utdanningen: Bevis, historie, problemløsing og forskning. Tida kom hvor jeg skulle gjøre et forskningsprosjekt selv. Da planla jeg å gjennomføre en klasseromsundersøkelse på en videregående skole, hvor lærerne på den skolen har hatt et tett samarbeid med matematikksenteret og har hatt fokus på problemløsing. Dette skulle bli gjennomført i slutten av mars 2020 og Norge ble stengt ned 12. mars. Prosjektet mitt ble ikke gjennomførbart, og jeg ble enig med min veileder om at lærebokanalyse var en fornuftig vei å gå med tanke på usikkerhet rundt smittevernsituasjonen.

År 2020 er ikke bare «koronaåret», men også «LK20-året», og i tillegg ble jeg far for første gang. Jeg har måttet prioritere skriving av denne oppgaven mer enn jeg kanskje burde, men nå har jeg kommet i mål, slik at jeg kan bruke tiden på mine nærmeste fremover.

Jeg vil takke min kjære samboer Kathrine for hennes støtte og at hun har tatt ekstra ansvar for Mari når jeg har arbeidet med oppgaven. Takk til min mor for at du er en stor del av Mari sitt liv. Takk til Anita, Svein og Hege for barnepass. Takk til Kjartan for god teknisk hjelp i uka før innlevering. Takk til Tore og Stine som hjalp til med avsnitt som jeg sto fast med, og takk til veilederen min Raymond Bjuland som ledet meg i rett retning.

Sammendrag

Formålet med denne studien er å undersøke hvordan lærebøker i matematikk legger til rette for utforsking og problemløsing, slik at elever får flere muligheter for læring, i tråd med hva fagfornyelsen, LK20, krever.

For å svare på problemstillingen, har jeg analysert heuristiske tilnærminger i eksempler og kognitive krav i oppgaver knyttet til algebraemner i tre lærebøker laget for videregående skole. Resultatene viser at det blir brukt mange heuristiske tilnærminger i eksemplene i alle bøkene. Noen tilnærminger er oftere brukt enn andre, mens noen nesten ikke er brukt i det hele tatt. Mønster 1T skiller seg ut både når det gjelder flere tilnærminger per eksempel, og med en jevnere fordeling av hvilke heuristiske tilnærminger som tas i bruk. Analysen av oppgavene viser at det finnes mange oppgaver med høye nivåkrav i alle tre bøkene, i tillegg til at det finnes mange nye kategorier av oppgaver som legger til rette for utforsking grunnet oppgavenes plassering i læreboken og hvilke kognitive nivåkrav de stiller. Også her skiller Mønster 1T seg ut, med flere oppgaver som stiller høye krav og oppgaver som legger til rette for utforsking.

Abstract

The purpose of this study is to investigate how textbooks within mathematics facilitate inquiry and problem solving, so that students have more *opportunities to learn*, as the new curriculum LK20 requires. In order to answer my thesis question, I have analyzed heuristic approaches in examples, as well as cognitive demands in tasks within algebra in three textbooks made for upper secondary school. The results show the use of many heuristic approaches in the examples from all three textbooks. Some approaches are more widely used than others, whereas some are hardly used at all. Mønster 1T stands out both regarding more approaches per example and a more even distribution of which heuristic approaches that are used. The analysis of the tasks shows that there are many tasks which require a high level of thinking in all three books, and in addition, there are many new categories of tasks which may facilitate exploration due to the placement of the tasks in the textbook and which cognitive demands they require. Again, Mønster 1T stands out, containing more tasks that require a high level of cognition and tasks that facilitate inquiry.

Innholdsfortegnelse

Figurliste

Tabelliste

1. Innledning

Elever lærer matematikk når de tenker, ser mønster, utforsker og løser matematiske problem. Det høres kanskje innlysende ut, men om vi tar for oss regnestykket $6 \cdot 8$, så vil vi som har lært, og kanskje til og med forstått gangetabellen, vite med en gang at svaret er 48. Om man spør en 3. klassing hva $6 \cdot 8$ er, så kan det være annerledes. Eleven vet ikke umiddelbart hva svaret er, men hun har kanskje lært multiplikasjon som gjentatt addisjon opp til 5-gangen, og da kan oppgaven regnes som en rik oppgave. Kanskje hun kan bruke det hun har lært om 5-gangen til å regne ut hva svaret er, eller kanskje hun kan bruke at hun vet at $2 \cdot 8 = 16$. Kanskje hun kan tegne et rutenett som hjelper henne. Kanskje det hjelper å tenke 8 grupper med 6, heller enn 6 grupper med 8. Kanskje hun kan tippe på et svar og sjekke om det stemmer med å dele svaret opp i grupper på 8. Det jeg prøver å illustrere med dette eksempelet er flere ting. For det første er det for å forstå hva et matematisk problem er; man kan ikke bare se på oppgaven og si om det er et problem eller ikke. For det andre er det mange metoder man kan bruke for å komme frem til et fornuftig svar. Det kan være mye lærdom i å sette seg inn i flere måter å tenke på, og selv om man selv foretrekker én metode denne gang, kan de andre metodene hjelpe deg i andre problem. Metodene for å regne ut $6 \cdot 8$ kan virke tilfeldige, men det er faktisk eksempler på generelle problemløsingsmetoder eller heuristiske tilnærminger som kan brukes i problemløsing på alle nivå. Blant disse kan jeg nevne: «Lag en illustrasjon», «Løs deler av problemet», «Løs et lignende problem», «gjett og sjekk» og «Arbeid bakover». Det jeg mener med at $6 \cdot 8$ kan være en rik oppgave, er at hvis elever får diskutere hvordan man kan komme frem til svaret på så mange måter, og læreren bruker diskusjonen til å illustrere noen av de generelle tilnærmingene, så lærer de ikke bare at $6 \cdot 8 = 48$, men de har lært nye strategier til å løse problem.

Problemløsing og utforsking er ett av kjerneelementene i den norske læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020d). Selv om forskning har vist i mange år at elever må arbeide med gode problem og få lov til å utforske matematikk, så tyder klasseromsforskning på at elever fortsatt arbeider med oppgaver som er rutinepreget og lite meningsfulle (Lesh & Zawojewski, 2007; Liljedahl et al., 2016; Schoenfeld, 1985, 1992). Arbeid med slike oppgaver kan hjelpe med å utvikle kompetansen prosedyreevne, som bare er en liten del av matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001). Rike oppgaver som stiller høye kognitive krav, er en forutsetning for å lære matematikk (Liljedahl, 2021). Man gjør ikke elever en tjeneste ved å gi de oppgaver som de kan klare å få til uten å tenke; man tar bort læringsmulighetene deres (Boaler & Dweck, 2016), og læringsmuligheter er den viktigste betingelsen for læring av matematikk.

Læreboken har en sentral plass i undervisning av matematikk i hele verden (Fan et al., 2013; Valverde et al., 2002). Disse studiene peker på at lærerens undervisning i stor grad er påvirket av læreboka han bruker, og selv om det finnes lett tilgjengelige digitale ressurser, så er fortsatt læreboka hovedressursen til lærere (Fan et al., 2018; van den Ham & Heinze, 2018). Det viser seg at det har noe å si hvilken lærebok man bruker i undervisningen og Jukka Törnoos (2005) sier at læringsmulighetene i læreboka var den faktoren som hadde størst korrelasjon med elevprestasjoner i matematikk. Tom Rune Kongelf (2019) skriver i sin doktoravhandling at elever i Norge bruker mye av tiden i klasserommet til å gjøre oppgaver i læreboka, og at læreboka definerer ofte hva som skal undervises i løpet av året. Oppgavene i bøkene har ofte et prosedyrepreg og stiller lave nivåkrav (Anda, 2020; Strand & Heimstad, 2018). Kongelf (2011) sin undersøkelse av lærebøker på ungdomstrinnet viser at bøkene bruker heuristiske tilnærminger, men at metodebruken virker tilfeldig og ikke-eksplisitt slik at det er vanskelig for elever å identifisere når slik metoder blir brukt. Forskning viser at hvis man skal lære problemløsingsmetoder, så må metodene navngis og tydeliggjøres eksplisitt (Bills et al., 2006; Hiebert & Grouws, 2007).

1.1. Problemstilling

Med tanke på den sentrale rollen læremidler har knyttet til undervisning, og hvor mye det har å si for elevprestasjoner så vil jeg i denne studien gå gjennom tre lærebøker som er laget for faget Matematikk 1T i videregående skole og se om eksemplene forklarer eller viser heuristiske tilnærminger basert på Kongelf sitt analytiske rammeverk (Kongelf, 2011). Jeg vil også undersøke hvilke kognitive krav oppgaver fra læreboka stiller, og se hvilke læringsmuligheter som finnes i både oppgaver og eksempler. Problemstillingen min er:

Hvordan er elevers læringsmuligheter i algebra påvirket av lærebøker i matematikk 1T skrevet etter fagfornyelsen?

For å svare på denne problemstillingen lager jeg følgende forskningsspørsmål:

1) *Hvilke heuristiske tilnærminger blir brukt i eksemplene i lærebøker for matematikk 1T og hvor ofte blir de brukt?*
2) *Hvilke kognitive krav stiller oppgavene knyttet til eksemplene i algebrakapitlene i lærebøkene?*

Matematikk 1T er matematikkfaget som elever i første klasse på studiespesialiserende retning i videregående skole må ta, for få videre fordypning i realfag. På grunn av omfanget har jeg begrenset studien min til å bare gjelde algebrakapitler i bøkene. Algebra er et sentralt emne i matematikken og det gjenspeiles med fagfornyelsen; at elever skal få dypere forståelse for tall og algebra (Utdanningsdirektoratet, 2021c). For at studien skal være gjennomførbar, tar jeg bort kapitler som handler om funksjoner, derivasjon og trigonometri selv om det kan argumenteres for at emnene er svært nært knyttet til algebra.

1.2. Struktur i oppgaven

I dette kapittelet har jeg aktualisert oppgaven og presentert problemstillingen. I innledningen har jeg brukt en del begrep som blir forklart i starten av kapittel 2 og så trekker jeg inn teori som jeg bruker i analysearbeidet og bakgrunnskunnskap til studien. Her presenterer jeg tidligere forskning på lærebøker i matematikk, hva matematisk kompetanse er og hva læreplanen sier om problemløsing. Deretter viser jeg til tidligere forskning på problemløsing og heuristikk. Til slutt kommer en oversikt over de tre analytiske rammeverkene jeg bruker på eksemplene og oppgavene i bøkene.

I metodekapittelet beskriver jeg først litt om begrunnelser for utvalg av både bøker og kapitler. Deretter presenterer jeg hvordan jeg har kodet de heuristiske tilnærmingene til eksemplene i lærebøkene og viser mange eksempler på hvordan jeg har kodet kognitive krav i oppgavene med to ulike rammeverk samt en korrelasjonstest mellom rammeverkene. Til slutt kommer jeg med noen etiske betraktninger rundt metoden jeg har valgt.

I kapittel 4 legger jeg frem resultatene mine. Først presenterer jeg sider, eksempler oppgaver og karakteristikker i hver lærebok. Så kommer resultatene fra analysearbeidet mitt med eksempler og oppgaver. Både samlet sett i alle lærebøkene, men også hvordan fordelingen er i hver lærebok. I diskusjonskapittelet analyserer jeg resultatene opp mot teori om læringsmuligheter og matematisk kompetanse og avslutter med å oppsummere funnene mine og viser til implikasjoner for videre forskning.

2. Teori

2.1. Begreper

I et hvert forskningsprosjekt er det viktig å tydeliggjøre hva man mener med begrepene man bruker. Jeg bruker mange begrep som er knyttet til undervisning, matematikk og undervisning i matematikk. Begrep som metoder, oppgaver, eksempler, problem og lærebok er vanlige norske ord som leseren har sin egen oppfatning om, men som kan tolkes forskjellig fra hva jeg mener når jeg bruker begrepene.

2.1.1. Lærebok

I denne studien analyserer jeg tre lærebøker, og med begrepet lærebok mener jeg den fysiske, analoge boken som er produsert for undervisning og arbeid i et bestemt fag og klassetrinn i videregående skole. Lærebok er et begrep som tidligere ikke ble problematisert, men som i dag kan være mer tvetydig. Begrepet lærebok er i ny opplæringslov omdøpt til læremiddel (NOU 2019:23). Videre defineres læremidler slik: «Med læremidler menes alle trykte, ikke-trykte og digitale elementer som er utviklet til bruk i opplæringen.» (NOU 2019:23, s. 389). Denne omdøpingen skyldes nok tilgangen til læringsressurser og lærestoff som tidligere bare fantes i lærebøker, men som nå eksisterer digitalt både hos forlagene og private- eller offentlige aktører. Et eksempel på et digitalt læremiddel er Nasjonal Digital Læringsarena (NDLA, 2021). Dette læremiddelet ble opprettet i 2006 da en endring i opplæringsloven (Opplæringsloven, 1998, §3-1) som tredde i kraft i 2007, krevde at læringsmidler i videregående skole skulle bli dekket av fylkeskommunene. Alle fylkene, unntatt Oslo, samarbeidet om prosjektet NDLA, og brukte 20 % av de statlige midlene som skulle gå til opplæringsmateriell, til å finansiere prosjektet (NDLA, 2021). NDLA har nå åpne og gratis læringsressurser i over 100 fag på videregående skole, deriblant flere matematikkfag. Det finnes flere slike digitale læremidler, for eksempel: *Campus inkrement* eller *Kikora* for å nevne noen, men de er ikke gjenstand for mine analyser.

2.1.2. Heuristikk

Begrepet heuristikk blir kalt oppdagelseskunst og er i matematisk kontekst knyttet direkte til problemløsing (Polya, 2014; Schoenfeld, 1992). Heuristiske tilnærminger og heuristikk er noe sammenfallende med andre begrep, også i litteraturen, og jeg vil bruke begreper som tilnærminger, metoder, prosedyrer og strategier om hverandre og vil legge nesten samme betydning i de ulike begrepene, men det er en liten semantisk forskjell. Schoenfeld (1985) skiller metode fra strategi ved å si at en metode er noe man kan prøve en gang, men at en strategi er et mer bevisst bruk av én eller flere metoder. Strategier utvikler man altså over tid. Heuristiske tilnærminger eller heuristikk vil være noe av det samme, men ved å bruke disse begrepene så får begrepet en mer utforskende mening.

2.1.3. Læringsmuligheter

Opportunity to learn (OTL) som kan oversettes til *muligheter for læring* eller *læringsmuligheter*, er et begrep som kan ses på som en generell sammenheng mellom undervisning og læring. Jo Boaler (2016) sier at vi vet at OTL er den viktigste betingelsen for læring og bruker det som et argument mot å nivådele matematikkgrupper. Hiebert og Grouws (2007) mener at undervisning, læremateriell, eksempler og oppgaver gir elever spesifikke muligheter til å lære, og man lærer selvsagt ikke noe man ikke har hatt muligheten for å lære. De poengterer videre at konseptet læringsmuligheter er bredere enn at elevene kun blir utsatt for et matematisk emne. «Consider first graders exposed to a lesson on calculus. Do they have an opportunity to learn calculus?» (Hiebert & Grouws, 2007, s. 379).

Jukka Törnroos (2005) viser til store internasjonale studier som SIMS (Second International Mathematics Study) og TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) og peker på at det er vanskelig å koble læringsmulighetene til elevresultater, men studien til Törnroos viser, overraskende nok, at det var høye korrelasjoner mellom læringsmuligheter i læreboka og elevenes prestasjoner. Implikasjonene til denne studien er, og som han skriver i sammendraget, at alle enkle bidrag av lærebokanalyser kan produsere verdifull informasjon i å forklare elevers prestasjoner i matematikk (Törnroos, 2005).

2.1.4. Eksempel

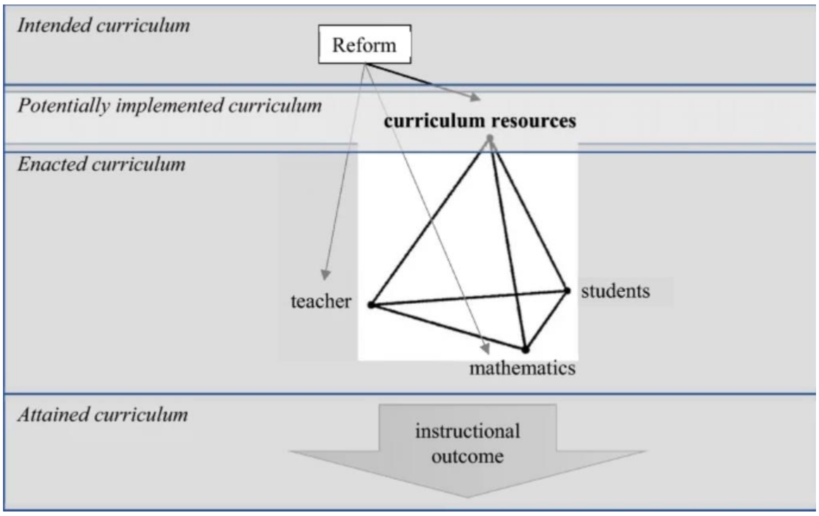
Et eksempel betyr i denne studien, den delen av læreboka som er tydelig merket og avgrenset, og som har tittelen eksempel. I eksemplene vil det være én eller flere oppgaver og tilhørende løsningsforslag. Det innebefatter også tegninger, tabeller og annen info som direkte kan knyttes til eksempelet. I oppgaven bruker jeg også begrepet eksempelrom. Det er en samling av oppgaver som står i læreboka som kan gi eleven mulighet til å se likheter og kontraster knyttet til læringsobjektet (Ronda & Adler, 2017). Disse oppgavene i eksempelrommet kan være i det som jeg har definert som eksempel, men like ofte er det en samling oppgaver som kommer like etter et eksempel. Se MDITx i teorikapittelet for grundigere redegjørelse av eksempel og eksempelrom.

2.1.5. Oppgave

Med begrepet oppgave mener jeg steder i lærebøkene hvor det enten er merket med oppgavenummer eller påstander og spørsmål som krever at leseren må ta en avgjørelse. I denne studien er oppgaver analysert med to rammeverk: Mathematical Tasks Framework, MTF (Stein et al., 2009) og Mathematical Discourse in Instruction for Textbooks, MDITx (Ronda & Adler, 2017). Definering og inndeling av oppgaver fra lærebøkene vil bli presentert i metodekapittelet.

2.2. Forskning på lærebøker

Internasjonal forskning på lærebøker viser at lærebøkene var en sentral og viktig ressurs i matematikkundervisning og forskningen regnes som en del av forskningsfeltet matematikkdidaktikk (Askew et al., 2010). Lærebøkene er ulike i både innhold og pedagogisk syn og vil derfor være med på å påvirke potensialet for læringsmuligheter til elevene (van den Ham & Heinze, 2018). Forskningen har i stor grad vært preget av innholdsanalysestudier på bestemte tema og sammenlignet hvordan lærebøkene behandler temaet både innad i landet og mellom land (Fan et al., 2013). Slike temabaserte studier har også utviklet temaspesifikke analyseverktøy, slik som for eksempel Dole og Shields (2008) studie som handler om hvordan læreboken behandler forholdsregning og proporsjonale størrelser. Det har også vært studier som fokuserer på matematiske prosesser i stedet for emner, slik som for eksempel argumentasjon og bevis (Zhang & Qi, 2019). De to siste tiårene har et nytt forskningsområde dukket opp knyttet til lærebøker (Fan et al., 2018). De peker på utfordringen og mulighetene internett gir til forskning på matematikkundervisning. Den brede tilgangen og delingen av ressurser på internett gjør at en lærer ikke bare tar i bruk læreboka i planlegging av undervisningen, men vil ha digitale element integrert eller som supplement i undervisningen. De regner derfor en lærebok som en komposisjon mellom den fysiske boka og digitale ressurser som hører til, og behandler ikke digitale ressurser for seg selv slik som tidligere forskning (Fan et al., 2013). Læreboken har en viktig rolle i å både representere og oversette læreplanen til hjelp for både lærere og elever (Valverde et al., 2002), men den kan også ses på som en artefakt som er en fjerde dimensjon i tillegg til lærer, elev og matematikken (Rezat & Sträßer, 2012). Disse dimensjonene ble synliggjort i Rezat og Sträßers tetraheder (2012), og Rezat et al. (2021) prøver å knytte modellen til læreplan og utdanningsforskning. Se figur 2.1.



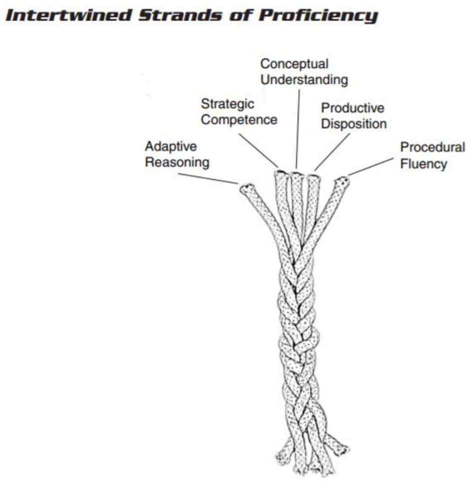
Figur 2.1 Didaktisk tetraheder, (Rezat et al., 2021)

Modellen viser hvordan læremidler (Curriculum resources) har potensial til å påvirke hvordan læreplanen blir transformert slik Valverde m. fl. (2002) peker på.

2.3. Matematisk kompetanse

Kompetansebegrepet er i stadig utvikling og i rammeverket for eksamen i LK06 står det at kompetanse er: «evnen til å løse oppgaver og mestre komplekse utfordringer. Elevene viser kompetanse i konkrete situasjoner ved å bruke kunnskaper og ferdigheter til å løse oppgaver.» (Utdanningsdirektoratet, 2017). I fagfornyelsen, LK20, er kompetansebegrepet blitt utvidet til følgende: «Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning.» (Utdanningsdirektoratet, 2021a).

Man ser at tidligere besto kompetanse av det å bruke kunnskaper og ferdigheter, men at det ligger mer i kompetansebegrepet i skolen i dag. Forståelse, refleksjonsevne og kritisk tenkning er med i kompetansebegrepet slik at begrepet er tydeligere på hva vi ønsker at elevene i skolen skal sitte igjen med. I 2001 ble det laget en modell som skulle illustrere hva matematisk kompetanse er (Kilpatrick et al., 2001). Modellen illustrerer fem komponenter av matematisk kompetanse sammenvevd som tråder se figur 3.2. De fem trådene er flettet sammen fordi alle er avhengig av hverandre. Forfatterne kalte dette rammeverket for Mathematical *proficiency*, fordi de klarte ikke å finne et ord som viste bedre hva det vil si å lære matematikk og samtidig ta høyde for kunnskap, ferdigheter og holdninger som beskrevet i modellen. Kompetanse, med den snevre betydningen begrepet hadde før, var ikke tilstrekkelig, men med den nye definisjonen på kompetanse, våger jeg å kalle trådmodellen for matematisk kompetanse.



Figur 2.2 Trådmodellen av matematisk kompetanser (Kilpatrick et al., 2001, s. 117)

Det at trådene er sammenvevd betyr at det ikke gir mening å undervise bare én eller to av disse trådene. Når elever lærer matematikk så utvikles alle trådene slik at alle trådene må tas høyde for i arbeid med matematikk (Kilpatrick et al., 2001). Trådene er beskrevet under og oversatt til norsk.

Konseptuell forståelse – Begrep, idéer og representasjoner. Man kan representere matematiske situasjoner på forskjellige måter og vet hvordan de ulike representasjonene kan være nyttige: Tegne et bilde, oversette det til en praktisk situasjon, fortegnskjema osv. Med konseptuell forståelse trenger man ikke å pugge eller huske så mye; man kan bruke forståelsen til i andre, både kjente og ukjente situasjoner. Raymond Duval peker på viktigheten med å arbeide med ulike representasjoner for å fremme matematisk forståelse og sier at «Changing representation register is the treshold of mathematical comprehension for learners at each stage of the curriculum» (Duval, 2006, s. 128).

Prosedyreevne – Fleksibel, nøyaktig og til rett tid. Elever skal kunne gangetabellen etter hvert, og det er spesielt viktig å kunne den når man for eksempel skal arbeide med faktorisering eller forkorte- og utvide brøker. Det å kunne gangetabellen er prosedyrekunnskap, men om man har konseptuell forståelse så vet man for eksempel at $5 \cdot 8 = 8 \cdot 5$, slik at man slipper å huske begge regnestykkene, og hvis man sitter fast med regnestykket $7 \cdot 6$, så kan man tenke at svaret er 7 mer en $7 \cdot 5$. Kilpatrick et al. (2001) sier at de to første trådene ofte ses på som motsetninger i skolen, at det er et slags dikotomi som sier at man enten må satse på ferdigheter eller på forståelse. Trådmodellen skal tydeliggjøre at det ikke er noen motsetninger mellom kompetansene, men at de er hver for seg avhengig av hverandre.

Strategisk kompetanse – Identifisere og løse matematiske problem. Denne tråden handler om hvordan man opptrer som problemløser, men den handler like mye om hvordan man modellerer en situasjon i virkeligheten til noe matematisk, for så å løse problemet.

Adaptiv resonnering – Logisk tanke, refleksjon og forklaring. Tråden som samler de tidligere trådene sammen, slik at de gir mening. Resonnering kan bli brukt for å løse uenigheter med bakgrunn av matematikkens spilleregler, og ikke fordi en voksen eller læreren sier hva som er rett. Adaptiv resonnering er en samlebetegnelse av alt fra et barn forklarer hvordan hun eller andre tenker til formelle matematiske bevis. Det er også denne resonneringen som hjelper eleven til å velge en fornuftig heuristisk tilnærming i arbeid med problemløsing

Engasjement – Holdning til matematikk. Denne tråden er også tett sammenvevd med de andre trådene. For at elever i det hele tatt skal utvikle kompetansene beskrevet i de forrige trådene, så må eleven ha tro på at det er mulig å forstå matematikk, og at matematikk ikke er tilfeldig. Med innsats og arbeid kan man lære dette, og at matematikk er nyttig.

2.4. Læreplanene - fagfornyelsen

I 2016 ga regjeringen Solberg en *melding til stortinget* om at samfunnet er i endring og at fagene i skolen bør fornye seg (Kunnskapsdepartementet, 2016). Opplæringen skal legge mer til rette for dybdelæring og forståelse i alle fag. For å oppnå dette ble det iverksatt planer for å gjennomføre denne fornyelsen og denne prosessen ble delt inn i to faser (Utdanningsdirektoratet, 2021c). I fase 1 skulle man definere hva som er kjerneelement i hvert fag, og disse kjerneelementene skulle være det viktigste elevene skulle lære i faget. Dette kunne være kunnskap, ferdigheter, metoder, begreper, tenkemåter eller uttrykksformer som er helt sentrale i akkurat det faget. Etter mange høringer og tilbakemeldinger fra lærere, skoler, kommuner, fylkeskommuner, høgskoler og universitet, landet vi på 6 kjerneelement i matematikk i 2018:

- Utforsking og problemløsing
- Modellering og anvendelser
- Resonnering og argumentasjon

- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder

I seg selv er ikke kjerneelementene kontroversielle eller overraskende, og man kan si at de dekker, i mer eller mindre grad, hva det vil si å arbeide med matematikk. Det som ikke kommer frem i resultatet, er at det var en del uenigheter knyttet til om programmering, skulle være en del av matematikkfaget, og hvilke prioriteringer som skulle gjøres. Mange innspill fra lærere handlet om å sammenligne med LK06; altså hva skal bort når det nye kommer inn. Det var også en del spørsmål knyttet til om *matematiske kunnskapsområder* burde være et eget kjerneelement eller om de andre 5 skulle være overordnet i hvert av kunnskapsområdene.

Dette er spørsmål som blir adressert i senere faser, men retningen i skolefaget matematikk var satt: Det skulle bli større fokus på tall, tallforståelse og algebra, og arbeidsmetodene skulle bli bedre og legge til rette for forståelse og dybdelæring gjennom utforsking og problemløsing (Utdanningsdirektoratet, 2021c).

I fase 2 startet utviklingen av selve læreplanene. Det var et mål at læreplanene ikke bare skulle være kompetansemål, men at de fikk et helhetlig uttrykk som speilet den overordnede delen. Alle fagene har en tekst som heter fagrelevans og sentrale verdier, hvor det skal stå hvordan de enkelte fagene bidrar til å bygge opp under verdier og prinsipp med opplæringen. (Utdanningsdirektoratet, 2021c). I tillegg skulle man beholde de grunnleggende ferdighetene i alle fag, men at ansvaret for enkelte ferdigheter skulle være mer fornuftig fordelt mellom fagene. Et eksempel som gjelder matematikk er at den grunnleggende ferdigheten *Regning* er en sentral og selvsagt del av matematikkfaget, men er kanskje ikke så sentral i språkfag. Slik at matematikkfaget har fått et ekstra ansvar for den ferdigheten, og på samme måte har norskfaget fått et ekstra ansvar for den grunnleggende ferdigheten: *å uttrykke seg skriftlig*.

Kjerneelementene er som nevnt de sentrale delene av faget, og for at hele læreplanen skulle være relevant, måtte hvert kompetansemål være knyttet til minst ett kjerneelement i tillegg til at de samlet sett skulle gjenspeile fagrelevansen og de sentrale verdiene. Dette førte til at læreplanen i matematikk 1T skriver eksplisitt ordet problemløsing mange plasser, ofte i sammenheng med utforsking. Jeg vil trekke frem de ulike kapitlene i læreplanen for matematikk 1T og belyse hva den sier om hva elevene skal lære om utforsking og problemløsing (Utdanningsdirektoratet, 2020b)

2.4.1. Fagrelevans og sentrale verdier:

Dette kapittelet i læreplanverket er en relativ kort oppsummering av hva elevene skal lære i faget og hvorfor de skal lære det, og knytter innholdet inn mot verdigrunnlaget i opplæringa. Her står det blant annet:

> «Faget skal gi elevane høve til å utvikle **problemløysingsstrategiar**…»
> «Matematikk skal bidra til at elevane utviklar evne til å jobbe sjølvstendig og samarbeide med andre gjennom **utforsking** og **problemløysing**»
> «Når elevane får høve til å **løyse problem** … bidreg dette til å utvikle uthald og sjølvstende»
> (Utdanningsdirektoratet, 2020a)

Det viser seg, naturlig nok, at problemløsing er sentral del av faget og det poengteres at det ikke er en statisk metode eller fremgangsmåte som skal læres, men at elevene skal utvikle strategier som kan brukes til å løse nye problem.

2.4.2. Kjerneelement

Som nevnt tidligere er det produsert seks kjerneelement i læreplanen for matematikk som gjelder for alle matematikkfag i både grunnskole og videregående skole, men utdypingen av kjerneelementene er forskjellige i de ulike trinnene eller retningene. Jeg velger kun å trekke frem det ene kjerneelementet *Utforsking og problemløsing*, og selv om de andre kjerneelementene også er til dels relevant, så treffer dette kjernen i min studie av lærebøker.

Utforsking og problemløysing:

> Utforsking i matematikk T handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing. Elevane skal leggje meir vekt på strategiane og framgangsmåtane enn på løysingane. Problemløysing i matematikk T handlar om at elevane utviklar ein metode for å løyse eit problem dei ikkje kjenner frå før. Algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategiar og framgangsmåtar for å løyse problem og inneber å bryte ned eit problem i delproblem som kan løysast systematisk. Vidare inneber det å vurdere om delproblema best kan løysast med eller utan digitale verktøy. Problemløysing handlar òg om å analysere og forme om kjende og ukjende problem, løyse dei og vurdere om løysingane er gyldige. (Utdanningsdirektoratet, 2021b)

Dette kjerneelementet peker på at prosessene og arbeidsmåtene er det som er viktigst og ikke hvilken metode eller hvilken kunnskap man sitter igjen med. Det er også tydelig at elevene skal lære noen heuristiske tilnærminger (Kongelf, 2019) som f.eks. «Løs deler av problemet», «Tenk på et lignende problem» og «Bruk et digitalt hjelpemiddel».

2.4.3. Grunnleggende ferdigheter:

De grunnleggende ferdighetene som eksplisitt nevner utforsking eller problem er tatt med under:

> *Munnlege ferdigheiter*: «… kommunisere idear og drøfte matematiske **problem, strategiar** og løysingar»
> *Å kunne skrive*: «…å kunne **løyse problem** med eit presist matematisk språk»
> *Å kunne rekne:* «… kjenne att **problem kan løysast** med matematikk»
> *Digitale ferdigheiter*: «Digitale ferdigheiter i matematikk T inneber å kunne bruke grafteiknar, rekneark, CAS, dynamisk geometriprogram og programmering til å **utforske og løyse** matematiske problem»
> (Utdanningsdirektoratet, 2020b)

Ferdighetene som elevene skal ha *skriftlig* og ved *regning*, handler mye om å løse problem, men de *muntlige* og *digitale ferdighetene* handler mer om prosessen rundt løsingen av problemene. Man skal kunne komme med ideer, drøfte og utforske strategier, løsninger og problem i tillegg til å løse problemet.

2.4.4. Kompetansemål etter matematikk 1T

- formulere og løyse **problem** ved hjelp av algoritmisk tenking, ulike **problemløysingsstrategiar**, digitale verktøy og programmering
- **utforske** samanhengar mellom andregradslikningar og andregradsulikskapar, andregradsfunksjonar og kvadratsetningane og bruke samanhengane i **problemløysing**
- lese og forstå matematiske bevis og **utforske** og utvikle bevis i relevante matematiske emne
- identifisere variable storleikar i ulike situasjonar, setje opp formlar og **utforske** desse ved hjelp av digitale verktøy
- **utforske** strategiar for å løyse likningar, likningssystem og ulikskapar og argumentere for tenkjemåtane sine
- **utforske** og beskrive eigenskapane ved polynomfunksjonar, rasjonale funksjonar, eksponentialfunksjonar og potensfunksjonar

(Utdanningsdirektoratet, 2020b)

Kompetansemålene henger sammen med resten av læreplanen og viser like tydelig, om ikke enda tydeligere, at arbeidsmåten i faget skal være utforskende og at eleven skal utvikle strategier i arbeid med, og for problemløsing. Dette vises også i neste kapittel som handler om underveisvurdering og standpunktvurdering.

2.4.5. Vurdering:

«… Elevane viser og utviklar kompetanse når dei jobbar **utforskande**, **problemløysande** og med modellering…»

«Læraren skal leggje til rette for elevmedverknad og stimulere til lærelyst ved at elevane får **utforske** matematikk og **løyse matematiske problem** … Læraren skal vere i dialog med elevane om utviklinga deira i programmering og strategiar for å **løyse problem**.»

«… ved å bruke matematiske uttrykksformer, bruke **problemløysingsstrategiar** og reflektere over og argumentere for løysingar og modellar»
(Utdanningsdirektoratet, 2020b)

Det ser ut til at læreplanen på mange måter synliggjør hvordan man bør arbeide med matematikk. Forskning på matematikkundervisning er stort sett enig om hva man trenger mer av i matematikktimene (Boaler & Dweck, 2016; Liljedahl, 2021; Liljedahl et al., 2016; Schoenfeld, 1985, 1992, 2020). Elevene må bli engasjert i matematikken, de må tenke selv, de må prøve og feile og de må utforske. De må oppdage mønster, strukturer og sammenhenger selv og sammen med andre. Dette er ikke ny forskning og det er vanskelig å være uenig med dette, men tidligere læreplaner har ikke vært så tydelig på hvilke arbeidsmåter man skal ha for å nå ulike kompetansemål som f.eks.:

Fra LK06 «Omforme uttrykk og løyse likningar, ulikskapar og likningssystem av første og andre grad …»

Fra LK20: «**Utforske strategiar** for å løyse likningar, likningssystem og ulikskapar og argumentere for tenkjemåtane sine»

(Utdanningsdirektoratet, 2020b)

Man ser at det matematiske innholdet er relativt likt, men at LK06 er mer presis på hva eleven skal lære, så er fagfornyelsen mer presis på hvordan de skal lære det.

2.5. Problemløsing og heuristiske tilnærminger

For å kunne si noe om hva problemløsing er må man definere hva et matematisk problem er. En generelt akseptert definisjon på hva et problem er i matematikken kan være: Et problem er en situasjon hvor man prøver å finne en løsning, men at man ikke umiddelbart vet hvordan man skal gjøre det (Kongelf, 2019, s. 27). Dette tyder på at et problem er subjektivt, dynamisk og individbasert slik at en oppgave kan være en rutine for noen og et problem for andre. Man kan ikke bare se på oppgaven og si om det er et problem eller ikke. George Polya er en av de første i litteraturen som skriver at man kan lære å bli en god problemløser, og i boka *How to solve it* (Polya, 2014) skriver han om hvordan man kan gå frem for å løse et problem. Polya beskriver en firetrinnsmodell og gir etterpå en heuristisk ordbok som kan regnes som ulike strategier for å hjelpe oss i å bli bedre problemløsere. De fire trinnene i prosessen hans er:

1. Forstå problemet
2. Lag en plan
3. Gjennomfør planen
4. Se tilbake

Disse trinnene kan ses på som generelle normer i arbeid med å løse problem, og i sin heuristiske ordbok, deler han konkrete strategier som kan tenkes å være spesifikke til de aktuelle situasjonene, men likevel gjelde i andre lignende situasjoner. Ordet heuristikk sies å ha kommet fra Arkimedes selv da han oppdaget loven om oppdrift når han tok et bad (Liljedahl et al., 2016). Eureka! Ropte han, og på gammelgresk så har eureka samme røtter som heuristikk. Oppdagelseskunst, kaller noen det og Polya (2014) selv sa at heuristikk handler om å løse oppgaver og målet med heuristikk er å fremheve generelle forklaringer og øyeblikk som kan hjelpe oss å finne en løsning på et problem. Flere har prøvd å videreføre og forbedre oppskrifter for problemløsing med bakgrunn i Polyas heuristikk, deriblant Alan Schoenfeld (1985, 1992), Hans Erik Borgersen (1994) og Tom Rune Kongelf (2011).

For å arbeide med og mestre matematikk, mener Schoenfeld (1985, 1992) at man må arbeide utforskende og med problemløsning. Når Polya blir sett på en av de første som satte problemløsing i et teoretisk rammeverk, så er Schoenfeld den som har tatt problemløsing videre i praksis (Lesh & Zawojewski, 2007). I klasseromsstudier undersøkte han elevers løsningsprosess, og prøvde å forstå hvordan elever tenker når du arbeider med matematiske problem. I disse studiene kom han frem til at problemløsingsstrategier ikke er nok til å bli en god problemløser. Han peker på fire kategorier, senere fem (Schoenfeld, 1992, s. 348–363) som en teoretisk forståelsesramme for matematisk tenkning en person må ha for å lykkes med å løse problemer: Ressurser, heuristikker, kontroll og matematisk holdning (Schoenfeld, 1985, s. 15). Disse fire kategoriene går kort sagt ut på hva som skal til for å arbeide med problemløsing. Ressursene er hva personen kan fra før av matematiske prosedyrer eller fakta; dette kan være hvordan man løser en likning, at $a \cdot a = a^2$ eller at hvordan man lager en tangent. Heuristikk er strategier eller metoder for problemløsing som for eksempel å lage en illustrasjon, eller å se etter mønster. Disse heuristikkene kommer jeg tilbake til med Tom Rune Kongelf (2011) sitt rammeverk. Kontroll er metakognitive ferdigheter som går ut på å monitorere sin egen prosess i problemløsingen; hvordan man fordeler tiden man bruker og sjekker underveis om man er på rett spor. Matematisk holdning er et mer overordnet personlig blikk over hva matematikk er eller hvordan man arbeider med bestemte matematiske emner. Det handler både om når man velger å ta i bruk en av ressursene eller strategiene i problemløsingen og hvilke ressurser eller strategier man i det hele tatt tar i bruk.

2.6. Heuristiske tilnærminger i eksempler

Selv om den rådende definisjonen på et problem i matematikken er generelt akseptert, så bruker ofte forskere en annen, mer analysevennlig, definisjon når de analyserer oppgaver i lærebøker (Kongelf, 2019). Kongelf bruker, sammen med andre internasjonale forskere som studerer problem i lærebøker (Fan & Zhu, 2007), følgende definisjon om problem i sin avhandling: «Et problem er en situasjon som krever en avgjørelse og/eller løsning, uavhengig om problemløseren har en umiddelbar måte å få det til på» (Kongelf, 2019, s. 27). I tillegg til å definere problem på en analysevennlig måte, så lager Kongelf en definisjon av heuristiske tilnærminger også, for å gjøre de mer analysevennlige: «Tommelfingerregler for å kunne løse problemer med hell, generelle tilnærminger som hjelper personen til å forstå problemet bedre og/ eller gjøre fremskritt i retning av løsningen» (Kongelf, 2019, s. 27).

Kongelf (2011) gjorde i forbindelse med sin doktoravhandling, analyser av eksempler i lærebøker knyttet til 9.trinn i norsk grunnskole og kom frem til ni kategorier som han mente var dekkende for problemløsing og i tillegg var uavhengige av hverandre:

1. Se etter mønster
2. Lag en tabell
3. Lag en illustrasjon
4. Gjett og sjekk
5. Løs deler av problemet

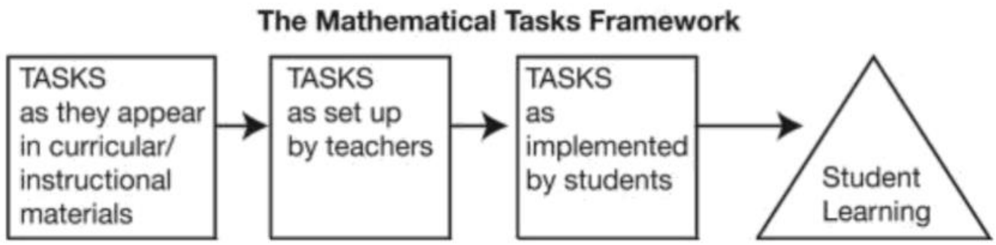
6. Arbeid baklengs
7. Tenk på et lignende problem
8. Forenkle problemet
9. Se problemet fra en annen side

Fritt oversatt fra (Kongelf, 2011).

Jeg har etter inspirasjon av Harder (2013) supplert denne listen med en ekstra kategori; «Bruk digitale hjelpemiddel». Ved å definere problem på den analysevennlige måten, så fant Kongelf ut at heuristiske tilnærminger ble i stor grad brukt i eksemplene, men noen tilnærminger var mer fremtredende enn andre og noen var nesten ikke til stede i det hele tatt. I Fan og Zhu (2007) sin studie av lærebokeksempler fant de ut at det var overraskende lav frekvens av heuristikker og forklarte det med at flesteparten av problemene i eksemplene kunne løses med enkle rutineprosedyrer og krevde ikke problemløsingsheuristikker. Kongelf (2011) ble overrasket over hvor mange velkjente tilnærminger han fant i sin analyse av eksempler, selv i enkle rutineoppgaver, og peker på at tilnærmingene i seg selv har et større bruksområde enn tidligere antatt (Kongelf, 2019, s. 82). Det skriver han som kontrast til Schoenfeld (1985) som forutsetter en grad av matematisk modenhet for å drive problemløsing slik som Polya (2014) skisserer. Schoenfeld (1985) sier likevel at barn skal drive med problemløsing i hele sin matematiske utdanning «Younger students can recognize, appreciate, and mimic the use of such strategies» (1985, s. 75). Kongelf (2019) konkluderer med at heuristiske tilnærminger er noe alle elever i alle aldre bør lære om i matematikken, og ønsker at fremtidige lærebøker bør være mer eksplisitt i bruk av løsningsmetoder, og at de i tillegg navngir de aktuelle heuristikkene.

2.7. Kognitive krav

I starten av 90-tallet ble det utført en klasseromsstudie over fem år som prøvde å undersøke hvilke faktorer som spilte inn på hvilket inntrykk elevene hadde av matematikk og hva de lærte av matematikktimene (Smith & Stein, 1998). Forskerne undersøkte faktorer som gruppearbeid, arbeid med konkreter og hvordan de matematiske oppgavene ble gitt til elevene. Det de fant ut var at oppgavene elevene løste hadde stor innvirkning på hva de lærte og at det ikke bare var hvilken oppgave som ble gitt, men hvordan den ble gitt og hvordan elevene arbeidet med den.



Figur 2.3 Transformasjon av oppgaver (Smith & Stein, 1998)

Figuren over viser at oppgaver tolkes på ulike nivå. Forfatterne har kanskje én plan med oppgaven, så kan læreren legge til eller fjerne informasjon i oppgaven slik at den ikke er slik den var tiltenkt av forfatterne. Når elevene så arbeider med oppgaven, kan den ha et helt annet fokus enn det både læreren og forfatterne hadde og til slutt, etter arbeid med oppgaven, sitter eleven igjen med noe som kan kalles læring.

Det som er poenget med figuren er at oppgaver som kan ha høye kognitive krav i seg selv, kan endres til å stille lave kognitive krav i arbeid med oppgaven, ved at f.eks. læreren gir hint som lukker oppgaven eller at eleven bruker et hjelpemiddel som ikke er tiltenkt oppgaven. En oppgave som stiller lave kognitive krav kan også endres til høye kognitive krav ved å stille tilleggsspørsmål eller spørsmål med generalisering (Stein et al., 2009). Siden dette er en lærebokstudie har jeg bare mulighet til å undersøke det første nivået, men jeg vil ta med noen betraktninger om hvordan oppgaver kan brukes i undervisning i diskusjonsdelen.

Oppgaver i lærebøker kan regnes som problem med den definisjonen av problem jeg har skissert tidligere. Det er likevel stor forskjell på hva en oppgave krever av den som skal løse oppgaven. Oppgaven kan løses ved at man husker noe man har gjort eller lest tidligere eller oppgaven kan løses ved at man husker en fremgangsmåte som fungerer på lignende oppgaver. Disse oppgavene krever lite tenking fra oppgaveløseren. De oppgavene som krever tenking er oppgaver hvor man kan bruke en prosedyre man har lært, i en litt annerledes situasjon, slik at man må forstå konseptuelt, hva som gjør at prosedyren fungerer eller ikke, eller de oppgavene som ikke kan løses med en kjent prosedyre og man må gjerne bruke ulike strategier til å løse oppgaven.

Disse nivåene i kognitive krav i oppgaver er systematisert i et analytisk verktøy som heter «Task Analysis Guide» (Stein et al., 2009) som er en del av rammeverket «Mathematical Tasks Framework» (Smith & Stein, 1998), som vil heretter bli kalt MTF. I dette verktøyet er det laget fire kategorier som illustrerer økende kognitive krav i oppgaver. Oppgaver som blir plassert i de to første kategoriene blir ansett som oppgaver som stiller lave kognitive krav til problemløseren og oppgaver i de to siste kategoriene stiller høye kognitive krav.

Memorering

Oppgaver som ikke kan løses med en prosedyre og som ikke krever at man skal forklare struktur, mønster eller konsepter. Oppgavene er som regel helt spesifikke, slik at det ikke er noen tvil om hva man skal gjøre og krever at man husker et resultat, formel, regel eller definisjon.

Prosedyrer uten forbindelser

Oppgaver som går ut på at man skal gjennomføre en prosedyre eller en algoritme man skal følge. Disse oppgavene er ofte slik at de sier hvilken fremgangsmåte, enten eksplisitt eller implisitt, man skal bruke, og krever ikke noen forklaring på hva man har funnet ut eller hvorfor man kan bruke algoritmen. Oppgavene fokuserer på svaret og ikke forståelse og det er som regel ikke noen tvil om hva man skal gjøre for å løse oppgaven

Prosedyrer med forbindelser

Oppgaver som krever en bestemt prosedyre, men fokuserer på forståelsen rundt prosedyren; om det er relatert til andre tema, andre representasjoner, andre prosedyrer, konsepter eller idéer. Man blir ofte bedt om å forklare hvorfor eller hvorfor ikke noe gir mening i ulike situasjoner.

Gjøre matematikk

Oppgaver som man ikke kan løse med en bestemt algoritme, men som likevel krever at man må forstå hva oppgaven spør om og finne ut av hvordan man skal begynne å løse oppgaven. Man må ofte utforske problemet ved prøving og feiling, lete etter mønstre eller andre heuristiske tilnærminger. Disse oppgavene kan ofte løses på mange mulige måter og det hjelper som regel ikke å se på tidligere eksempel for å finne en strategi. (Stein et al., 2009)

Forskning på oppgaver viser at læringsmulighetene til elevene er formet mest av hvilke oppgaver elevene vil få (Tekkumru-Kisa et al., 2020). Det er klart at elever må få mulighet til å interagere med oppgaver som har høye kognitive krav, men det er praktisk utfordrende for både elever og lærere. Utfordringen er både kulturell og didaktisk. Tekkumru- Kisa et al. (2020) peker på at lærere trenger kursing i hvordan man bruker oppgaver med høye krav i undervisningen slik at læringsmulighetene kommer til syne. Den kulturelle utfordringen oppsummerer Liljedahl (2021) godt i boka «Building thinking classrooms in mathematics».

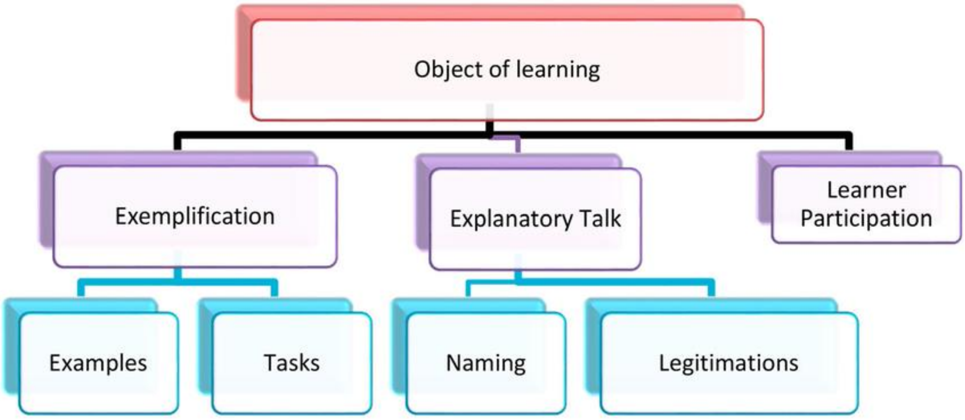
Han påstår at flesteparten av elever i «vanlige» klasserom ikke tenker. De som gjør det godt i matematikktimene, er de som klarer å kopiere (mimic) tankene og prosedyrene læreren underviser. Han påstår at de ikke tenker, men kopierer og sier videre at om man skal lære matematikk, eller noe i det hele tatt, må man tenke. Liljedahl (2021) kommer med mange tips for å få elevene til å tenke, men den første og kanskje viktigste faktoren er å ha gode meningsfulle oppgaver. Med disse oppgavene mener han oppgaver som kan sammenlignes med de norske LIST- oppgavene (Matematikksenteret, 2021).

- alle klarer å begynne med oppgaven (Lav inngang)
- oppgaven kan løses på flere måter (Åpen oppgave)
- Om det finnes et svar, kan oppgaven utvides og generaliseres (Stor takhøyde, rik oppgave)

Selv om gode oppgaver er viktig, så er det dessverre ikke tilstrekkelig å ha gode oppgaver med til elevene i undervisningen (Liljedahl, 2021), og det er én av utfordringene til det didaktiske forskningsfeltet. Å kopiere er mindre krevende enn å tenke selv, så elever vil prøve å få læreren til å fortelle hvordan man løser oppgaven. Liljedahl (2021) gir oss mange andre tips for å endre denne kulturen, men siden min studie er en analyse av lærebøker, så går jeg ikke videre inn på dette her.

2.8. MDI – lærebokversjon

Gjennom studier av Sørafrikanske klasserom utviklet Adler og Ronda (2015) et rammeverk som kan hjelpe forskere å beskrive diskursen i en matematikktime. Dette rammeverket har de endret og videreutviklet til å være brukende til å analysere lærebøker også, MDITx (Ronda & Adler, 2017). MDI- rammeverket som illustreres i figur 2.3, ser foruten elevdeltakelse, helt likt ut i MDITx. Elevdeltakelse er tatt bort fordi man ikke kan måle dette ved å se i en lærebok. Noen endringer er også gjort i de andre delene av figuren for at koding av en lærebok skal passe eller gi mening. Sentralt i rammeverket er det de kaller for «object of learning», læringsobjekt, og poengterer at det ikke er det samme som «Lesson goals», læringsmål. Denne subtile forskjellen understreker at det er både det faglige innholdet og hvordan den lærende engasjerer seg i dette innholdet som definerer arbeidet i en matematikktime (Adler & Ronda, 2015). I lærebokversjonen vil læringsobjektet ofte være en overskrift for et kapittel eller delkapittel, men en overskrift er ikke mer enn et navn. Læringsobjektet vil bli synlig ved å se på hvilke eksempler, hvilke oppgaver og hvilke forklaringer læreboken legger frem.



Figur 2.4 MDI- rammeverket (Adler & Ronda, 2015, s. 239)

Videre vil mulighetene for å nå læringsobjektet nås gjennom tre kategorier: *Eksemplifisering*, *forklaringer* og *elevdeltakelse*, se figur 2.3. Hva man sier og hvordan man snakker om matematikk betyr noe, Adler og Ronda støtter seg til Anna Sfard (2008) som sier at man kan, og bør ha, en hverdagslig diskurs i innlæring av nye matematiske emner og tema, men at man må komme mer og mer inn på formell matematisk diskurs etter hvert. Sfard går så langt som å si at det å delta i den formelle matematiske diskursen som er et tegn på at den lærende har lært det matematiske innholdet (Sfard, 2008), og det er det som er målet med *elevdeltakelse*.

Forklaringer som videre er delt inn i navngiving og legitimeringer, handler om hvilke ord man bruker og hvordan man begrunner påstander. Navngiving henger sammen med om man bruker matematiske eller hverdagslige ord og uttrykk i samtale med eleven, men det har også noe å si om man bruker verb eller substantiv for å forklare en prosess. «For å løse likningen…» eller «Løsningen på likningen…» vil blir kodet forskjellig fordi det førstnevnte eksempelet fokuserer på en handling og den sistnevnte fokuserer på løsningen som et objekt. Legitimering kan være grunnløse, definisjonsbasert, vist gjennom eksempler eller bevist matematisk, men i lærebokversjonen så skiller de mellom at forfatteren påstår noe uten å gi en grunn for påstanden, påstanden blir støttet av et eksempel eller at påstanden blir støttet av å vise til definisjoner, ekvivalente representasjoner, eksempelrom som viser kontraster, ekstreme tilfeller og generaliteter eller bevis. Disse *forklaringene* er med på å definere hva som menes med læringsobjektet.

Helt til venstre i figur 2.3 er eksemplifisering som videre er delt inn i eksempler og oppgaver. Det er i spesielt *oppgaver*-delen jeg vil fokusere på når jeg analyserer lærebøkene, men oppgavene kan ikke ses på isolert fra det andre og henger spesielt sammen med eksemplene som er knyttet til samme læringsobjekt. Eksemplene som blir tatt frem enten av en lærer i klasserommet eller eksempler i lærebøker vil vise hva det matematiske innholdet i timen skal være (Ronda & Adler, 2017). I MDITx støtter de seg til Zodik og Zaslavsky's (2008) definisjon på hva et eksempel er: «a particular case of a larger class, from which one can reason and generalise» som igjen støtter seg til Mason og Pimm (1984) vitenskaplige artikkel: «Seeing the general in the particular».

I lærebøker er det som regel en gjennomgang av teori, gjerne med et eksempel innebygd i teorien som skal vise at tankemåten kan gjelde for mange andre tilfeller også, enten det er for å lære en algoritme, metode eller konsept. Deretter kommer eksempler med løsningsforslag som viser andre variasjoner og gjerne ekstreme tilfeller og til slutt kommer den en rekke med oppgaver som skal løses av leseren på bakgrunn av eksemplene og teorien. Alt dette kan tolkes som eksempler eller eksempelrom i MDITx. Et eksempel som er merket med «eksempel» i læreboka er selvsagt et eksempel eller et eksempelrom, men ofte så er eksemplene delt inn i flere deloppgaver for å vise likheter eller kontraster.

Ved å se på likheter i eksempler, har man mulighet for å generalisere, og ved å innføre nye element ved å beholde noe likt, gir man mulighet for en høyere grad av generalisering. Kontraster viser rekkevidden av generaliseringene; i hvilke tilfeller kan man bruke idéene fra eksempelet. Oppgavene som blir gitt kan også ses på som ett eller flere eksempelrom, hvor personer som løser oppgavene f.eks. får oppdage at et likningssett har én løsning, ingen løsning og uendelig mange løsninger. Selv om oppgavene kan ses på som eksempler, så ser man også på de som oppgaver.

Her deler Ronda og Adler (2017) oppgavene i tre koder. Kjent prosedyre eller fakta, KPF (Known procedure or fact) blir koda til oppgaver i boka som ikke direkte kan kobles til læringsobjektet. Disse oppgavene kan man løse med metoder og huskeregler man har lært tidligere. Neste kode hører til oppgaver som er direkte knyttet til læringsobjektet, CTP (Current topic or procedure), og siste kode, AMC (Application or Making Connection tasks), handler om oppgaver som er knyttet til læringsobjektet, men som enten går i dybden eller bredden av det matematiske innholdet. Det kan være at man skal evaluere en løsningsmetode fra en fiktiv person eller det kan være at man blir bedt om å løse en oppgave med strategier som tidligere har fungert godt i andre sammenhenger, men som kanskje ikke er presentert i forbindelse med dette emnet.

2.9. Horisontal og vertikal analyse

For å se på likheter og forskjeller i lærebøker som kan si noe om hvilke læringsmuligheter de legger til rette for, kan man se på hva som står i teorien, hvilke eksempler som gjennomgås, hvilke typer oppgaver som gis og hvilke krav de stiller, men man kan også se på antall sider, hvilke kapitler som finnes, hvilke figurer som brukes og mye mer. Charalambous et al. (2010) fant, gjennom å undersøke internasjonal forskning på lærebøker, ut at de kunne dele analysen inn i tre brede kategorier: Horisontal-, vertikal- og kontekstuell analyse.

Horisontal analyse handler om å se på læreboken som en helhet. Da kan man se hvor mange sider som er tilegnet hvert matematiske emne, hvilken rekkefølge emnene kommer i og andre strukturelle aspekter ved boken. Et eksempel på dette kan være om andregradsulikheter kommer før eller etter læreboka har introdusert funksjoner. Det kan avgjøre om løsningen(e) er hovedsakelig algebraiske eller om det er blanding av grafisk og algebraisk.

Vertikal analyse handler om hvordan et spesifikt matematisk emne blir behandlet av læreboka. Her analyserer man kanskje bare en del av boka og går nøye gjennom hvilke oppgaver, hvilke eksempler, hvilke eksempelrom og hvilken teori som er til stede, og hvordan disse underbygger læringsmuligheter for leseren.

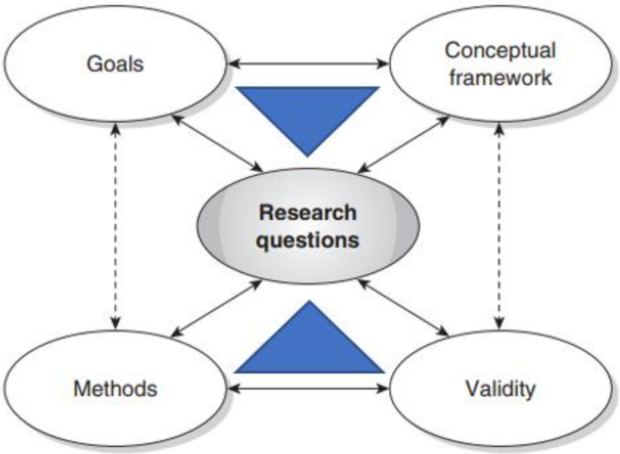
Kontekstuell analyse handler om hvordan læreboka blir brukt som et kulturelt verktøy i undervisningen, men det kommer ikke til å være mitt fokus i denne studien, da jeg analyserer lærebøker og ikke undervisning.

Charalambous et al. (2010) viser til kritikk av studier som bare bruker en av kategoriene. Studiene med vertikal analyse er gode på identifisere muligheter for læring i et bestemt emne, men mangler ofte et helhetlig bilde av hvordan emnene relateres til andre emner og studier med horisontal analyse har god oversikt over hvilke emner som er med, og til hvilken tid, men mangler informasjon om hvordan enkeltemnene blir behandlet (Charalambous et al., 2010). De foreslår at å kombinere analysene vil gi en innsikt som tar det beste fra «begge verdener».

MDITx (Ronda & Adler, 2017) er et rammeverk som egner seg godt til vertikale analyser, men kanskje ikke så godt til horisontale analyser. Oppgaver i lærebøker kan analyseres med kodene KPF, CTP og AMC, så lenge man definerer et læringsobjekt. Dette læringsobjektet bruker jeg også når jeg analyserer oppgaver med MTF (Stein et al., 2009). Siden både MTF og Kongelfs heuristiske tilnærminger (Kongelf, 2011) egner seg for storskala dataanalyser, vil MDITx bli brukt til å gå inn i enkeltblokker i lærebøkene.

3. Metode

Helt siden jeg bestemte meg for å foreta en lærebokanalyse, har jeg vurdert ulike analytiske rammeverk og funnet ulike tilnærminger til å angripe målet mitt med denne oppgaven. Målet er også endret underveis fra å sammenligne noen lærebøker, til å se på hvilke problemløsingsstrategier lærebøkene legger til rette for og til å se på kognitive krav som oppgavene stiller. Joseph Maxwell (2012) har laget en modell som viser dynamikken i en kvalitativ studie.



Figur 3.1 Maxwells modell for kvalitative studier

Maxwell mener at prosessen ikke skal være lineær og heller ikke i sirkel, slik som tidligere modeller har prøvd å illustrere, men at et slikt forskningsprosjekt er dynamisk hele tiden og at metoden man velger påvirker målene man setter seg som igjen påvirker forskningsspørsmålene som igjen kan påvirke metoden man bruker. Jeg vil starte med å presentere en horisontal analyse (Charalambous et al., 2010) for å få oversikt over hvilke emner, antall sider, antall oppgaver etc. de ulike lærebøkene inneholder. Etterpå vil jeg bruke Kongelf sitt analytiske rammeverk (Kongelf, 2019) på de tre ulike matematikkbøkene fra kurset 1T i videregående skole. I denne gjennomgangen vil jeg prøve å få frem hvilke av de 10 heuristiske metodene som blir brukt i lærebøkene og telle hvor mange ganger de forekommer. Oppgavene i lærebøkene analyseres med både MTF (Mathematical Tasks Framework) (Stein et al., 2009) og MDITx (Mathematical Discourse in Instruction) for Textbooks (Ronda & Adler, 2017), både for å se om kategoriene korrelerer, og for å se om noen av læreverkene har høyere andel av matematikkoppgaver som krever matematisk tenkning, og ikke bare reproduksjon av prosedyrer og fakta. For å avgrense omfanget velger jeg kapitlene som handler om tall og algebra, og tar ikke med kapitler om funksjoner, trigonometri, derivasjon eller modellering selv om det er mye algebraisk tankegang i disse kapitlene også.

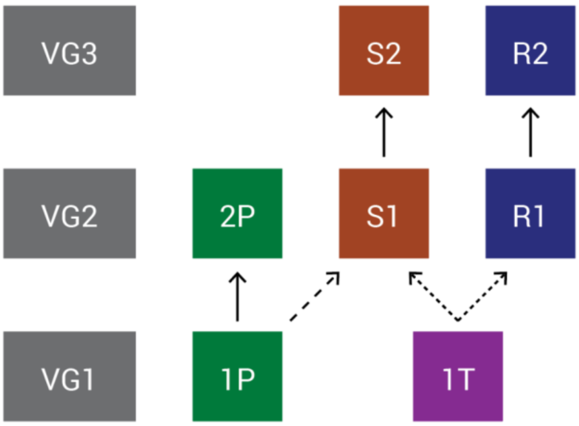
3.1. Læremidler

For videregående skole er det kun tre forlag som produserer analoge bøker knyttet til den norske læreplanen: Cappelen Damm, Gyldendal og Aschehoug, med henholdsvis bøkene: *Sinus 1T* (Oldervoll, et al., 2020), *Mønster 1T* (Kalvø, Opdahl, Skrindo, & Weider, 2020) og *Matematikk 1T* (Borge, et al., 2020). Disse tre bøkene vil bli nevnt gjennom hele studien og jeg velger å ikke kildehenvise til disse bøkene etter dette, og vil kalle bøkene for *Sinus 1T*, *Mønster 1T* og *Matematikk 1T*. Kildene vil legges samlet etter litteraturlista, slik at det er enkelt å finne frem til disse bøkene om ønskelig. I nyere tid er det i tillegg til forlagene kommet digitale ressurser som kan sies å være fullverdige læreverk i de ulike matematikkfagene. Eksempler på dette er NDLA (Norsk Digital LæringsArena) og Campus Inkrement. Disse digitale læreverkene har mye av den samme oppbyggingen som bøkene med teori, eksempler, oppgaver og fasit. I tillegg har læreverkene videogjennomgang av både teori og eksempler og dynamiske element hvor man kan gjøre interaktive oppgaver eller utforske geometriske egenskaper eller funksjoner i Geogebra. Selv om disse digitale læreverkene har element som bøkene ikke har, så velger likevel flere skoler og lærere å bruke analoge læremidler. Det er nok mange ulike grunner til det, og det er sikkert noen som kommer til å skrive en masteroppgave om forskjellen mellom digitale og analoge læreverk, men poenget mitt er at den analoge læreboka blir fortsatt brukt i norske klasserom, selv om det finnes digitale læremidler som kan gi andre muligheter enn de analoge.

3.1.1. Utvalg av lærebøker

Valg av lærebøker var relativt enkelt siden det bare er tre forlag som produserer analoge bøker til videregående skole, men likevel er det en vurdering som må begrunnes. Som nevnt tidligere finnes det digitale læreverk med teori, oppgaver og eksempler som dekker temaene fra læreplanen, og i tillegg til disse har hver av de analoge bøkene som jeg har analysert, en tilhørende nettressurs som er en stor del av pakken som forlagene tilbyr. Disse nettressursene er ekstra oppgaver, eksempler, videoer, løsninger med mer, som elevene og lærerne kan dra nytte av, men de er bak en egen betalingsmur og følger ikke automatisk med når skolene kjøper de analoge bøkene. Jeg velger likevel å stort sett se bort ifra disse nettressursene i mine analyser, men om jeg drar de frem, vil det være tydelig at det er digitalt og ikke analogt. Valg av hvilket matematikkfag jeg ville analysere ble også en naturlig konsekvens av LK20-

Fagfornyelsen. På videregående skole med studiespesialisering så er matematikkfagene fordelt slik som er illustrert i figur 3.2.



Figur 3.2. Matematikkfag i vgs. (Kunnskapsdepartementet, 2021)

I første klasse må eleven velge mellom fagene 1P og 1T, hvor P står for praktisk matematikk og T står for teoretisk matematikk. Det kan nok diskuteres hvor gode eller treffende disse beskrivelsene er, men 1T er i hvert fall konstruert slik at det legger grunnlaget for å studere matematikk videre enten man går samfunnsfaglig retning (S1 og S2) eller realfaglig retning (R1 og R2). 1P er, sammen med 2P, en avrunding av 12 års skolegang med matematikk og er i stor grad repetisjon av matematikk fra ungdomsskolen.

Hovedgrunnen til at jeg velger å analysere 1T-bøker og ikke 1P-bøker er at det introduseres i større grad, nye algebratema i 1T. Det er interessant for meg å se på hvordan bøkene bygger opp eksemplene sine, hvilke oppgaver som blir gitt og hvilke muligheter det er for utforsking og problemløsing. Jeg begynte mine undersøkelser våren 2021. Da var vi nesten ferdig med første år med ny læreplan. Lærebøker var produsert for første-års-elever ved videregående skole, men ikke for andre eller tredje klasse. Derfor falt valget mitt på å kun analysere lærebøker fra VG1 kun på matematikk 1T.

3.1.2. Utvalg av kapitler

For å avgrense omfanget til studien min har jeg valgt å se nærmere på kapitler i bøkene som dekker emnet algebra. Algebra er et stort og fundamentalt emne, og da jeg så nærmere på hvilke kapitler jeg kunne fjerne, så var det ikke en enkel oppgave fordi algebra blir brukt i alle deler av matematikken. Etter å ha studert de tre lærebøkene og prøvd å se etter hvilke emner som er med, har jeg kommet frem til at jeg vil se nærmere på kapitlene som dekker: Bokstavuttrykk, kvadratsetninger, faktorisering, brøk, likninger, likningssystem og ulikheter.

Det vil si at jeg valgte bort kapitler som handlet om *funksjoner*, *modeller*, *derivasjon* og *trigonometri*. Det var en utvelgelse som praktisk da alle tre læreverkene startet med tallregning, faktorisering, likninger og generell algebra og hadde *trigonometri* som siste kapittel. Det var litt ulikt hvor tidlig *funksjoner, modeller* og *derivasjon* kom, men de rene algebraemnene kom som regel relativt tidlig. Se tabell 3-1 under. For fullstendig tabell med alle sidetall og alle kapitler: Se vedlegg 1.

Tabell 3-1 Algebrakapittel med antall sider i tre lærebøker

SINUS 1T	**Sider i teoridelen**	**Sider i oppgavedelen**	**Sider totalt**
Kap. 1: Formler og likninger	**48**	**22**	**70**
Kap. 2: Faktorisering	**24**	**10**	**34**
Kap. 3: Andregrads- likninger	**42**	**20**	**62**
Kap. 4: Tredjegrads- likninger og ulikheter	**48**	**18**	**66**
	162	**70**	**232**

MATEMATIKK 1T	**Sider i teoridelen**	**Sider i oppgavedelen**	**Sider totalt**
Kap. 1: Tall	**36**	**9**	**45**
Kap. 2: Algebra	**37**	**13**	**50**
Kap. 3: Likninger	**39**	**13**	**52**
Kap. 5: Likningssystemer og ulikheter	**27**	**11**	**38**
	139	**46**	**185**

MØNSTER 1T	**Sider i teoridelen**	**Sider i oppgavedelen**	**Sider totalt**
Kap. 1: Tall og regning	**38**	**14**	**52**
Kap. 2: Likninger og andregradsuttrykk	**47**	**15**	**62**
Kap. 4: Algebra	**45**	**11**	**56**
	130	**40**	**170**

Av tabell 3-1 ser man at det er en forskjell på antall sider som blir analysert. Fra 170 sider i Mønster, 185 sider i Matematikk 1T og 232 sider i Sinus. Denne forskjellen kommer nok i hovedsak fra min utvelgelse av relevante algebrakapitler i bøkene, som igjen er basert på hva forlagene selv har samlet i enkeltkapitler. Alle tre lærebøkene har ca. like mange sider totalt sett; i underkant av 500 sider. Se vedlegg 1.

3.2. Analyse av eksempler

For å finne ut om lærebøkene legger til rette for utforsking og heuristiske tilnærminger i problemløsing, har jeg brukt Tom Rune Kongelf (2011) sitt rammeverk som han kom frem til, på bakgrunn av nasjonal og internasjonal forskning på lærebøker (Fan & Zhu, 2007) som han brukte som en del av doktoravhandlingen hans. I den første delen av avhandlingen analyserte han eksempler i algebrakapitler i læreverk på ungdomsskolen. Med bakgrunn i Fan og Zhu (2007) sin sammenligning av problemløsingsstrategier i lærebøker i USA, Singapore og Kina fikk Kongelf gjort sine egne vurderinger av norske lærebøker. Han kom frem til ni heuristiske tilnærminger hvor hver tilnærming er uavhengig av de andre (Kongelf, 2011), og de er til sammen dekkende for hvordan en god problemløser kan angripe et matematisk problem. Den tiende heuristiske tilnærmingen som jeg selv la til på bakgrunn av Harder (2013) sin studie, er å bruke et digitalt hjelpemiddel. Bruk av regneark, graftegner, CAS eller programmering, er tilnærminger som har blitt mer og mer aktuelt i senere tid, og også sannsynligvis i fremtiden.

3.2.1. Koding av eksempler

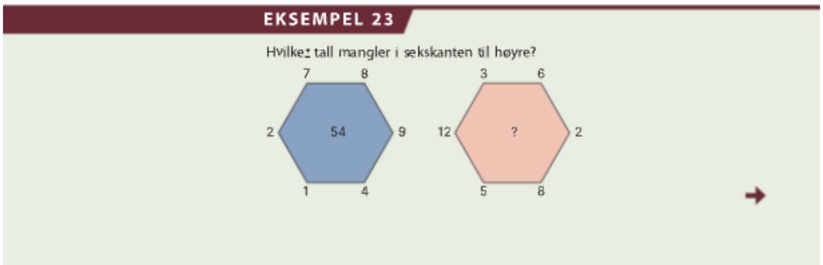
Listen til Kongelf sammen med beskrivelser på hvordan eksemplene skal kodes vises i tabell 3-2. Her er de 9 originale heuristiske tilnærmingene (Kongelf, 2011), men i tillegg en tiende som er inspirert av Harder (2013): «Bruk digitale hjelpemiddel». Denne kodingsmanualen øker reliabiliteten til studien min, fordi den sørger for at jeg får mindre frihet i å velge hvilke koder jeg skal sette på hvert eksempel. Når det er sagt, så er ikke alt like selvsagt, og det finnes ulike grader av tilnærminger i de ulike eksemplene. Min oppgave her er å dra frem noen av disse tvilstilfellene både for å vise en gjennomsiktighet i hvordan jeg vurderer hvilke koder som tilhører eksemplene slik at resultatene er etterprøvbare, men også for å få frem at eksempler med samme koder, kan se ulike ut.

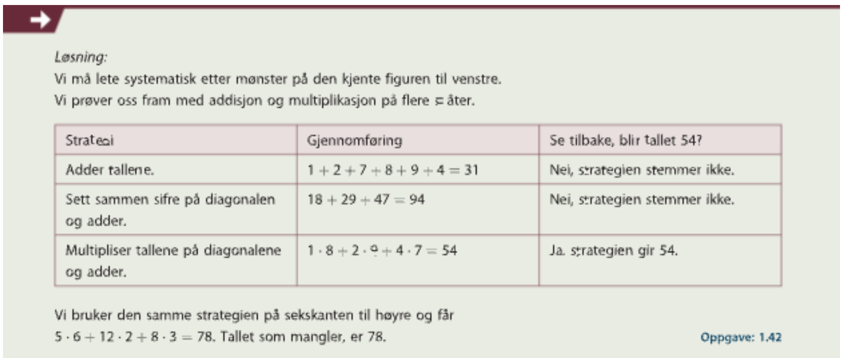
Tabell 3-2 Kodemanual. Fritt oversatt fra Kongelf (2011).

Heuristisk tilnærming	Beskrivelse
1. Se etter mønster	Identifisere mønster i et problem basert på observasjon av felles karakteristikker, variasjoner eller forskjeller i problemet
2. Lag en tabell	Lag en systematisk liste eller tabell som inneholder mulighetene i en situasjon
3. Lag en illustrasjon	Lage en illustrasjon av informasjonen som visuelt representerer problemet
4. Gjett og sjekk	Gjør et fornuftig gjett og sjekk om det virker. Repeter gjettet på bakgrunn av det forrige resultatet.
5. Løs deler av problemet	Del problemet i mindre deler og løs de mindre delene for å så løse hele problemet
6. Arbeid baklengs	Angrip problemet med å arbeide med løsningen og finn ut hva betingelsene må være
7. Tenk på et lignende problem	Bruk metoder eller resultat fra et annet problem, eller lignende problem.
8. Forenkle problemet	Endre på kompleksiteten til problemet til mindre komplekst uten å endre problemet matematisk
9. Se problemet fra en annen side	Angrip problemet fra en annen vinkel
10. Bruk et digitalt hjelpemiddel	Bruk regneark, graftegner, CAS eller programmering til å løse problemet

I studien til Kongelf (2011) var «Løs deler av problemet» en av de mest brukte heuristiske tilnærmingene i lærebøkenes eksempler og han forklarer det med at det kan være fordi metoden er så anvendelig, men også på grunn av at når man skal løse en oppgave så bruker man flere steg, eller bruker flere linjer på å forklare hva man gjør, og da deler man problemet i utgangspunktet opp i flere små deler som løses hver for seg og dermed også problemet selv. Veronika Harder (2013), som også brukte rammeverket til Kongelf, valgte å se bort ifra koding av «Løs deler av problemet» når eksemplene behandlet lange algebraiske uttrykk over flere steg. Dette begrunnet hun med at nesten all algebra på videregående skole, 1T og R1, er såpass avansert at man er nødt til å bruke stegvis utførelse. Jeg er enig med Harder om at dette er en vanlig metode i eksemplene på videregående, men jeg velger likevel å ta med denne koden når eksemplene har med trinnvise utregninger, som f.eks. brukes når man løser likninger. Se ellers figur 3.4 og figur 3.6 som viser andre heuristiske tilnærminger, men blir også kodet med «Løs deler av problemet».

«Se etter mønster» er en strategi som direkte kan knyttes til å forstå variabler og algebraisk tankegang. I kjerneelementene i læreplanen for 1. - 10. trinn står det at «algebra handler om utforske strukturer, mønstre og relasjoner» og i tillegg at det er en forutsetning til å generalisere i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020d). Jeg har brukt denne koden om eksempelet tydelig viser at man ser et mønster eller at det faktisk står eksplisitt at vi ser på mønsteret for å løse oppgaven.





Løsning:
Vi må lete systematisk etter mønster på den kjente figuren til venstre.
Vi prøver oss fram med addisjon og multiplikasjon på flere måter.

Strategi	Gjennomføring	Se tilbake, blir tallet 54?
Adder tallene.	$1+2+7+8+9+4=31$	Nei, strategien stemmer ikke.
Sett sammen sifre på diagonalen og adder.	$18+29+47=94$	Nei, strategien stemmer ikke.
Multipliser tallene på diagonalene og adder.	$1\cdot 8+2\cdot 9+4\cdot 7=54$	Ja, strategien gir 54.

Vi bruker den samme strategien på sekskanten til høyre og får
$5\cdot 6+12\cdot 2+8\cdot 3=78$. Tallet som mangler, er 78.

Oppgave: 1.42

Figur 3.3«Let etter mønster» Mønster 1T, s.38

I eksempelet over står det eksplisitt at vi må lete etter mønster for å løse oppgaven. Jeg har også kodet dette eksempelet med «lag en tabell», «Gjett og sjekk» og «Se problemet fra en annen side». Sistnevnte heuristikk var jeg usikker på om jeg ville ha med, men kodeinstruksen min for «Se problemet fra en annen side» er at om løsningen i eksempelet krever at man ser tilbake på problemet igjen, så skal koden være med. Denne koden skal også være med om man løser en oppgave med å skifte representasjon, som man gjør i figur 3.4 da man faktoriserer noen ledd for så å forkorte de etterpå. Dette eksempelet er kodet med «Se problemet fra en annen side» og «Forenkle problemet». Mange algebraoppgaver handler om å gjøre komplekse algebraiske uttrykk enklere ved å faktorisere, forkorte og forenkle. Derfor forventes disse kodene å dukke opp en del samt koden «Løs deler av problemet»

▽ EKSEMPEL

Regn ut.

a) $\frac{x^2+2x}{3}\cdot\frac{27}{3x+6}$ b) $\frac{9x}{2x+6}+\frac{4}{3x+9}$

LØSNING:

a) Først faktoriserer vi og setter alt på én brøkstrek. Deretter forkorter vi brøken.

$$\frac{x^2+2x}{3}\cdot\frac{27}{3x+6}=\frac{x\cdot\cancel{(x+2)}\cdot 27}{3\cdot 3\cdot\cancel{(x+2)}}=\frac{\overset{3}{\cancel{27}}\cdot x}{\underset{1}{\cancel{9}}}=\frac{3\cdot x}{1}=\underline{\underline{3x}}$$

Figur 3.4 «Se problemet fra en annen side» Sinus 1T, s. 75

I innlæringen av kvadratsetningene så bruker alle tre lærebøkene å gange ut parentesene i uttrykkene $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ og $(a+b)(a-b)$ for å evaluere hva som kommer ut, og etterpå viser de noen eksempler. Se figur 3.5.

EKSEMPEL 3

Bruk kvadratsetningene til å regne ut.

a $(x+3)^2$ **b** $(2x-y^3)^2$ **c** $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

a Vi skal finne kvadratet av summen av to tall, og bruker derfor første kvadratsetning.

$$(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$$

b Vi skal finne kvadratet av differansen mellom to tall, og bruker derfor andre kvadratsetning.

$$(2x-y^3)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot y^3+(y^3)^2=4x^2-4xy^3+y^6$$

Figur 3.5 Kvadratsetninger, Matematikk 1T, s.58

Dette eksempelet er for øvrig ikke kodet med noen heuristisk tilnærming fordi man setter uttrykket inn i en formel, man regner det egentlig ikke ut. Kvadratsetningene blir først sett på som en regel som gjør det enklere for oss å gange ut parenteser. Etter hvert kommer det frem et viktig poeng med kvadratsetningene frem i eksemplene. Regelen er egentlig en identitet. Man kan bruke kvadratsetningene baklengs til å faktorisere uttrykk. Se figur 3.6.

EKSEMPEL 25

Regn ut $\frac{2}{a+1}:\frac{6}{a^2-1}$.

$$\frac{2}{a+1}:\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{6}$$

$$=\frac{2\cdot(a^2-1)}{(a+1)\cdot 6}$$

$$=\frac{2\cdot(a+1)(a-1)}{(a+1)\cdot 2\cdot 3}$$

Konjugatsetningen baklengs

Faktoriserer og forkorter

$$=\frac{a-1}{3}$$

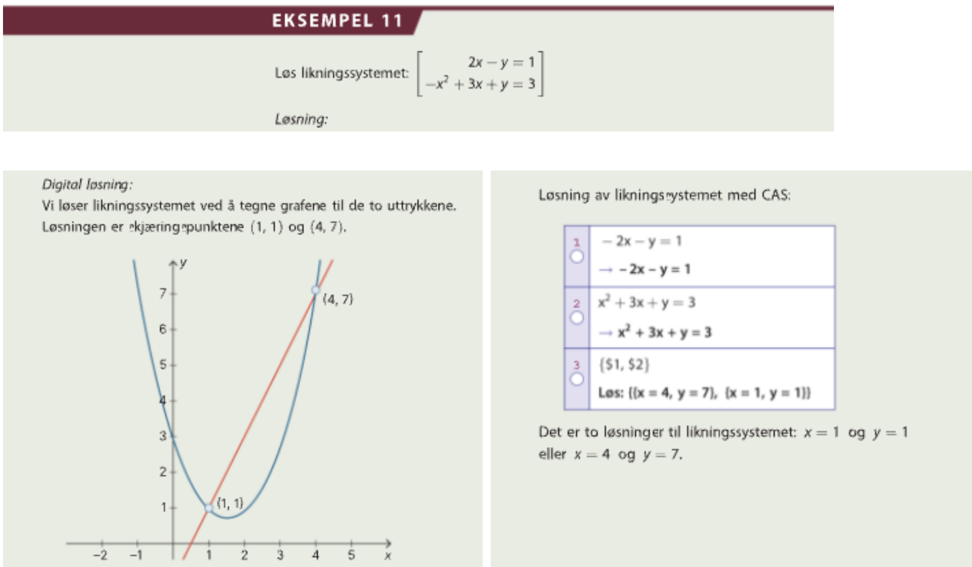
Figur 3.6«Arbeid baklengs», Matematikk 1T, s. 81

Jeg har valgt å kode eksempler med «Arbeid baklengs» når de faktoriserer med bruk av kvadratsetningene, selv om man etter hvert skal kjenne igjen kvadratsetningene begge veier, og det er «baklengs» som er det mest nyttige i disse sammenhengene, så er det likevel motsatt vei av det man lærte innledningsvis. Etter hvert i bøkene hvor man skal faktorisere polynomer, regne ut rasjonale uttrykk eller løse rasjonale likninger så bruker eksemplene kvadratsetningen begge veier og poengterer ikke at man tenker baklengs, men for å være konsistent med kodinga mi, så vil jeg bruke koden hver gang man faktoriserer ved hjelp av kvadratsetningene.

Digitale metoder blir også brukt en del i alle tre læreverkene. Her er det tre metoder som går igjen, men som får den samme koden: «Bruk et digitalt hjelpemiddel».

1. Geogebra brukes til å tegne grafer for å vise løsninger av likninger, ulikheter, skjæringspunkt og nullpunkt.
2. CAS brukes til å evaluere uttrykk, løse likninger, ulikheter eller likningssystem
3. Programmering i Python

Programmeringseksempler blir kodet som bruk av digitale hjelpemidler, men jeg velger å ikke trekke frem disse eksemplene i oppgaven, siden naturen til disse eksemplene stort sett er en del forskjellig fra andre eksempler. Det handler ofte om å forklare kode eller syntaks, og oppgaven er som regel direkte etterspurt og eksemplene i programmering krever en annen heuristisk tilnærming enn matematiske eksempler, slik at jeg finner det vanskelig å sette andre koder på disse eksemplene. Figur 3.7 viser et eksempel i Mønster 1T hvor de først viser hvordan de løser likningssystemet uten hjelpemiddel (Klippet bort), for så å løse det digitalt; både grafisk og med CAS.



Figur 3.7«Bruk et digitalt hjelpemiddel» Mønster 1T, s. 247

Det stiller ikke store kognitive krav til for å løse likningssystem i CAS eller i Geogebra, men det er en god problemløsningsstrategi hvis det å løse problemet er målet. Om målet er å manipulere algebraiske uttrykk med flere ukjente, så kan likevel det digitale bidra som andre representasjonsformer for å øke den konseptuelle forståelsen av det matematiske objektet (Duval, 2006).

3.3. Analyse av oppgaver

Oppgavene i lærebøkene er analysert både med MTF (Stein et al., 2009) og med MDITx (Ronda & Adler, 2017). Det var først i hovedsak de kognitive kravene oppgavene stiller som ville bli gjenstand for mine analyser, men jeg kom frem til at Ronda og Adler (2017) hjelper meg til å se dybden så vel som bredden i de ulike emnene. For å analysere oppgaver med MDITx, må man først finne ut hva læringsobjektet er og det gjør man med å dele boken inn i blokker som inneholder de enkelte læringsobjektene. Ofte kan disse blokkene være delkapitler i bøkene, men delkapitlene kan også være delt inn i flere blokker. Da er det som oftest tydelig at det er en ny overskrift og/-eller et nytt eksempel som skiller seg fra det forrige. I hver blokk er det noe tekst, figurer og tabeller, noen eksempler og noen oppgaver som hører til hverandre. Det er bare oppgavene jeg koder til enten KPF (Known Precedure or Fact), CTP (Current Topic or Procedure) eller AMC (Application or Making Connections) som beskrevet i teorikapittelet, men det er umulig å kode oppgavene uten å ha oversikt over de andre elementene i blokkene. Oppgavene i blokkene ble også kodet i MTF-rammeverket med «Task analysis guide» (Stein et al., 2009) med kodene LavH, LavP, HøyP og HøyM som er koder inspirert av Stian Anda (2020) og Strand og Heimstad (2018) sine norske oversettelser av de fire nivåene i kognitive krav i oppgaver. LavH og LavP er som nevnt i teoridelen oppgaver som stiller lave kognitive nivåkrav. HøyP og HøyM er oppgaver som stiller høye kognitive nivåkrav. Et eksempel på hvordan jeg har kodet oppgavene med de to rammeverkene kan ses i figur 3.8.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			MDI			MTF					
2	Oppgaver		KPF	CTP	AMC	LavH	LavP	HøyP	HøyM		
481	Nullpunktfaktorisering	Læringsobjekt: Faktorisere 2.gradspolynomer med nullpunktsmetoden									
482	Utforsk s.134				1				1		
483	#3.78	a)	1				1				
484		b)	1				1				
485	#3.79	a)		1				1			
486		b)		1				1			
487	Utforsk s. 135				1				1		
488	#3.80	a)		1				1			
489		b)		1				1			
490		c)		1				1			
491	Snakk s. 136			1				1			
492	#3.81	a)		1				1			
493		b)		1				1			

Figur 3.8 kodeskjema

Ronda og Adler (2017) sier selv at deres rammeverk ikke er laget for å vurdere de kognitive kravene, men kodene er ordinale slik som i MTF, slik at det kan være en viss sammenheng mellom rammeverkene. Håland (2019) og Anda (2020) har begge brukt MDITx og MTF og kommer frem til at det er en viss korrelasjon mellom analyseverktøyene, men begge sier videre at de belyser ulike aspekt ved oppgavene.

3.3.1. Utvalg av oppgaver

I arbeidet med å dele algebrakapitlene inn i blokker, fant jeg ut at jeg måtte avgrense omfanget av studien ytterligere, både på grunn av tid og ressurser, men også for at resultatene skulle være sammenlignbare. Som nevnt tidligere er kapittel 1 i alle bøkene et slags verktøykapittel som handler om repetisjon fra ungdomsskolen som kan være nyttig forkunnskap for de nye emnene som skal læres i matematikk 1T. Det er for eksempel brøkregning, prosentregning, rette linjer, formler, regnerekkefølge etc. Disse emnene var i ulik grad med i lærebøkene, derfor bestemte jeg meg for å bare analysere de emnene som alle tre læreverk hadde med. Emnene som ble analysert er følgende: Lineære likninger, andregradspolynomer, kvadratsetninger, fullstendig kvadrat, likningssett, andregrads likninger, rasjonale uttrykk, faktorisering og ulikheter. Et annet valg jeg måtte ta, var hvilke oppgaver som skulle bli med i analysen. De oppgavene som hørte til blokkene skulle selvsagt med, men i hver lærebok så finnes det mange ekstraoppgaver som ikke er fysisk i nærheten av teorien og eksemplene. Alle tre lærebøkene har:

- ekstra oppgaver som hører til hvert delkapittel
- en kapitteltest
- blanda oppgaver fra hele kapittelet
- eksamensoppgaver knyttet til kapittelet
- «utforsk»- og «snakk»-oppgaver

Jeg valgte å ta med ekstraoppgavene som hører til hvert delkapittel og «utforsk»- og «snakk»-oppgavene i min analyse, og ikke ta med de andre oppgavene. Dette gjør jeg fordi oppgavene må ses på i sammenheng med eksemplene i læreboka. De blanda oppgavene står for seg selv og blir da vanskelig å kode på en fornuftig måte.

Mange oppgaver har underkategorier som første nivå (for eksempel a), b), c)) og noen oppgaver har et ytterligere oppgavenivå 1), 2), 3). I utgangspunktet behandler jeg hver førstenivå- deloppgave som én oppgave i kodeprosessen. I de få tilfellene det er ekstra nivå av oppgaver, tar jeg en vurdering i hvert tilfelle og prøver å se om disse oppgavene er ment som én eller flere oppgaver.

5.48

a Tegn grafen til f gitt ved $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

b Bruk grafen i oppgave a til å løse ulikhetene

1 $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$

2 $-x^2 + 2x - 1 < 0$

3 $-x^2 + 2x - 1 > 0$

4 $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$

Figur 3.9 Oppgave 5.48: Underkategorier. Matematikk 1T, s. 254

Oppgave 5.48 har jeg kodet som fem oppgaver fordi jeg mener at hver av underoppgavene til b) er ment som en egen oppgave og som krever et eget svar fra den som løser oppgaven. I oppgaven i figuren under har jeg tolket de seks oppgavene i nivå 2 som én oppgave.

c Hvilke av følgende regnemåter gir oss antall heller vi trenger?

1	$(x+1)^2$	4	$4 \cdot (x+1)$
2	$(x+2) \cdot 2 + x \cdot 2$	5	$4 \cdot (x+2) - 4$
3	$4 \cdot (x+2)$	6	$(x+2)^2 - x^2$

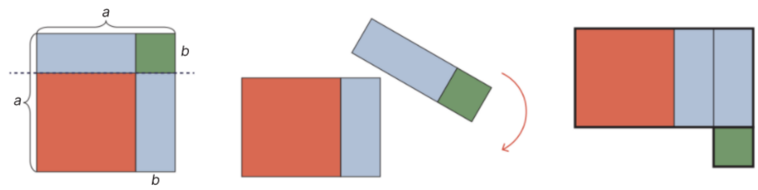
Figur 3.10 Underkategorier2. Mønster 1T

I denne oppgaven mener jeg det ikke er hensiktsmessig å kode som seks oppgaver fordi den krever kun ett svar. Når det er sagt, så er det ikke helt selvsagt siden flere av disse algebraiske uttrykkene er identiteter og for å finne ut hvilke som er like, så må man bearbeide alle seks oppgavene for å løse oppgaven.

En annen vurdering jeg har tatt er knyttet til «Utforsk»- og «Snakk»-oppgavene. Disse oppgavene gir som regel bare mening når man ser på hele oppgaven og ikke prøver å dele den inn i deloppgaver. Poenget med oppgavene er at man skal undersøke, tenke over eller kommunisere en underliggende matematisk idé og spørsmålene i oppgavene leder oss frem til denne idéen. Se figuren under.

UTFORSK

Du trenger: kvadratisk ark, skrivesaker, linjal og saks



1 Forklar at arealet av figuren ovenfor til venstre er a^2.

2 Del figuren i to og legg den ene delen over på siden, slik figurene ovenfor viser.

3 Figuren består nå av et rektangel og et kvadrat. Vis at arealet av figuren er $(a-b)(a+b)+b^2$.

4 Bruk dette til å vise at $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Figur 3.11«Utforsk». Mønster 1T, s. 73

Selv om det ser ut til at det er fire oppgaver, fordi det er fire trinn man skal gjennomføre, så vil ikke én av disse oppgavene ha noen verdi i seg selv. Jeg har derfor bestemt meg for å kode alle slike «Utforsk»- og «Snakk»-oppgaver som én oppgave, selv om noen av de faktisk kunne, og burde, ha blitt tolket som flere oppgaver.

3.3.2. Koding av oppgaver MDITx

Det er blitt brukt tre koder på oppgaver i MDITx- rammeverket: KPF, CTP og AMC. Som nevnt innledningsvis i dette kapittelet så er ikke oppgavene kodet i isolasjon, men kodet i lys av læringsobjektet og eksemplene som tilhører samme blokk. KPF har jeg brukt på oppgaver som ikke direkte har en sammenheng med læringsobjektet og som ikke behandles i eksemplene før oppgaven.

? 2.30

Hvilke av uttrykkene er faktorisert?

a) $2x(x-2)+4x$ **b)** x^2-4x+4

c) $(x-4y)(2x-y)$ **d)** $(x-2)^2$

Figur 3.12 KPF, Sinus 1T, s. 65

Oppgave 2.30 er første oppgave i et kapittel hvor læringsobjektet er «Å faktorisere algebraiske uttrykk med å trekke ut felles faktor». Det kan jo se ut som om denne oppgaven er direkte knyttet til læringsobjektet, men i læringsobjektet er det tydelig hva elevene skal kunne; de skal faktorisere med hjelp av felles faktor. Det er ikke bare verbet som gjør at oppgaven blir kodet til KPF, det har også med hvor tilgjengelig løsningen til oppgaven er for eleven. Det står noe om faktorer i innledningen av kapittelet, men det er også antatt at elever på ungdomsskole og også barneskole, vet hva faktorer er. Slik at det skal være mulig å finne ut hvilke uttrykk som er faktorisert med et øyekast. CTP er koden som forventes å se mest fordi dette er koden på oppgaver som direkte kan knyttes til læringsobjektet i blokken i læreboka. Hvis oppgaven ligner på et eksempel eller at oppgaven ber om noe som kan kobles til læringsobjektet, så blir den kodet til CTP. En oppgave i et kapittel om likninger vises i figur 3.13. Her er læringsobjektet «Å kunne løse 2.gradslikninger med abc- formelen»

3.63
Et rektangulært jordstykke har omkretsen 380 m. Arealet av jordstykket er 8800 m^2.

a) Vis at dersom lengden i meter av den ene siden er x, så må lengden av den andre siden være $(190 - x)$.

b) Forklar hvorfor arealet A er gitt ved formelen

$$A = x \cdot (190 - x)$$

c) Vis at x må være en løsning av andregradslikningen

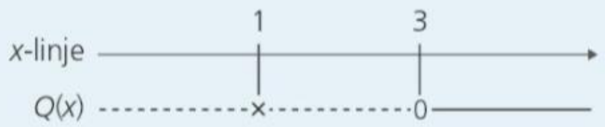
$$x^2 - 190x + 8800 = 0$$

d) Regn ut lengden og bredden av jordstykket.

Figur 3.13 KPF og CTP, Sinus 1T, s. 114

Dette er en oppgave hvor man skaper en kontekst til andregrads likninger, men man ser at det egentlig bare er oppgave d) som indirekte ber eleven om å løse likningen. De to første oppgavene krever at man husker hvordan man regner ut omkrets og areal av et rektangel og oppgave c) handler om hvordan man manipulerer et algebraisk uttrykk fra formel til likning. De tre første oppgavene fikk da koden KPF og oppgave d) ble kodet til CTP. Den siste koden i MDITx er AMC og det er koden jeg har brukt når oppgaven handler om en annen innfallsvinkel eller en oppgave som ikke ser ut som eksemplene i blokken, men kan likevel bruke de samme matematiske idéene for å løse oppgaven. Et eksempel på en slik oppgave er oppgave 5.66 som vises under

5.66
Et rasjonalt uttrykk $Q(x)$ har fortegnslinja

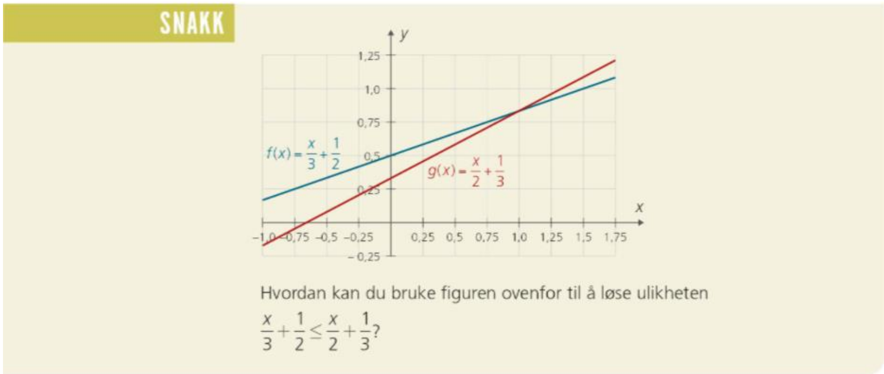


Finn et mulig uttrykk for Q når $Q(0) = -6$.

Figur 3.14 AMC, Matematikk 1T, s. 259

Læringsobjektet i blokken til oppgave 5.66 er «Å løse rasjonale ulikheter med å tegne fortegnlinjer». Oppgaven er snudd opp ned, slik at man vet noe om svaret, og skal finne ut hva spørsmålet er. Denne oppgaven handler om et rasjonalt uttrykk (merk: Ikke ulikhet) og man har en fortegnlinje. Fortegnlinjer er bare brukt i forbindelse med ulikheter tidligere og hvis man tenker over hva oppgaven spør om så kan man trekke forbindelser mellom algebraisk uttrykk, likninger, ulikheter og funksjoner.

Et annet eksempel på en oppgave som jeg har gitt koden AMC er en «snakk»-oppgave.



Figur 3.15 AMC, Matematikk 1T, s. 248

Jeg tar med denne oppgaven for å vise at det ikke kun er de vanskeligste og mest annerledes oppgavene som blir kodet med AMC. Denne oppgaven kommer etter et eksempel som viser hvordan man løser lineære ulikheter, og før de vanlige oppgavene. Oppgaven peker tydelig på koblingen mellom funksjoner og ulikheter og kan være med å gi elevene en bredere forståelse enn kun den algebraiske forståelsen for hva en ulikhet er (Duval, 2006).

Til slutt vil jeg også ta med en oppgave som ikke fikk en kode i MDITx. Denne oppgaven er en «Utforsk»-oppgave fra Sinus 1T. Se figur 3.16. Alle utforskoppgavene i boka ligger også på nettsidene til forlaget sammen med lærerveiledning som forklarer hvordan forfatterne har tenkt at elevene kan arbeide med disse oppgavene. I forordet står det at elevene må arbeide med noen av disse utforskingsoppgavene for å dekke kravene læreplanen stiller, men at det ikke er tanken at alle blir brukt. Læreren må bestemme hvilke han vil bruke og det er meningen at noen av disse oppgavene kan brukes i stedet for å gå igjennom teori.

UTFORSK – KRYPTOGRAMMER

Her ser du et *kryptogram*:

EN · EN = TRE

I et kryptogram er sifrene fra 0 til 9 erstattet med hver sin bokstav.

Hvilke sifre må E, N, T og R være for at regnestykket skal bli riktig?

Figur 3.16 Sinus 1T, s. 23

På forlagets nettside er det et ark med 15 slike kryptogramoppgaver om man som lærer velger å arbeide med denne aktiviteten. Poenget med kryptogrammene er ifølge lærerveiledningen at elevene skal identifisere informasjon og bruke den til å finne en løsning ved at elevene må være kreative og utprøve løsningsstrategier. Det finnes ingen generell formel eller fremgangsmåte i disse oppgavene slik at hver oppgave krever en ny idé. Grunnen til at oppgaven ikke fikk kode er at den ikke har noen sammenheng med læringsobjektet i blokken, og selv om jeg tror Liljedahl (2021) ville kalt dette en «Highly engaging thinking (noncurricular) task» så hører den ikke hjemme med noen av kodene KPF, CTP og AMC.

3.3.3. Koding av oppgaver MTF

I MDITx er fokuset i koding av oppgavene om oppgaven er knyttet til læringsobjektet, at de krever at man kan noe fra før eller om oppgaven leder oss til en dypere forståelse i de underliggende matematiske metodene eller konseptene som ligger i blokken. Kategoriene i «Task analysis guide» (Stein et al., 2009) kan minne om dette, men her er ikke fokuset om oppgaven er knyttet til læringsobjektet, men heller hvor store kognitive krav oppgavene stiller.

Oppgaver som har fått LavH er oppgaver som krever at man husker noe fra tidligere og som ikke har en fremgangsmåte eller prosedyre. Eksempel på disse kan være oppgaver som krever at man kan regne ut areal av et rektangel eller en sirkel eller at man vet at $5\ \% = 0{,}05$. Faktoriseringsoppgaven, alle 4 deloppgavene, fikk koden LavH. Se figur 3.12. En oppgave som er mer et tvilstilfelle er «Snakk»-oppgaven under.

SNAKK

En brøk der telleren er større enn nevneren kaller vi en *uekte brøk*.

Et eksempel er $\frac{5}{2}$. Dette tallet kan vi også skrive som et *blandet tall*, $2\frac{1}{2}$, som vi leser som to hele og en halv.

Kan du tenke deg hva som er problematisk med skrivemåten $2\frac{1}{2}$?

Figur 3.17 Matematikk 1T, s. 79

Denne oppgaven er knyttet til arbeid med rasjonale uttrykk og like før oppgaven så står det en «Merk!»- boks: $a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$ som hinter til løsningen på «Snakk»-oppgaven. Oppgaven krever at man skal se at det er forskjell på blanda tall og hele tall multiplisert med brøk, og at det blanda tallet $2\frac{1}{2}$ egentlig bør skrives som $2 + \frac{1}{2}$ for å ikke forveksle det med $2 \cdot \frac{1}{2}$. Om man forstår denne forskjellen så har man forstått mye om hva begrepet brøk er, men jeg har likevel kodet oppgaven som LavH fordi man bare problematiserer skrivemåten til et blanda tall, og ikke automatisk konseptet.

I kodene LavP og HøyP står P for prosedyre og hvis det er tydelig at en spesifikk prosedyre er lurt å bruke i oppgaven, så får oppgaven én av disse kodene. Hvilken av kodene oppgaven får er avhengig av flere ting, men i hovedsak får oppgaver som kan løses ved å etterligne et eksempel i samme blokk koden LavP og oppgaver som krever begrunnelse eller at man må sjekke svaret grafisk eller i CAS, har jeg valgt å sette som HøyP. Oppgaver som ikke er helt like eksemplene, men som egentlig krever samme prosedyre får også HøyP.

2.16

Skriv om uttrykkene med fullstendige kvadrater:

a $x^2 + 4x - 10$ **c** $x^2 + 8x + 16$

b $x^2 - 3x + 1$ **d** $2x^2 + 6x$

2.20

Hva skal stå i de tomme rutene for at vi skal få fullstendige kvadrater?

a

·		
	x^2	$3x$
	$3x$	

b

·		-2
		$-2x$

c

·	x	
	$4x$	

Figur 3.18 LavP og HøyP, Mønster 1T, s. 81

Oppgavene fra Mønster 1T i figuren over handler om å lage fullstendig kvadrat. I læreboka viser de i eksempler både hvordan man gjør det algebraisk slik som i oppgave 2.16, og med bruk av tabell som i oppgave 2.20. Derfor har begge oppgavene (eller alle 7 deloppgavene) fått koder med P. Selv om det er flere ting man må forstå for å lage fullstendig kvadrat, så kan man løse alle oppgavene i 2.16 med å følge fremgangsmåten i eksempelet foran, og jeg har derfor kodet disse med LavP.

Oppgavene i 2.20 har jeg kodet HøyP fordi de krever at man ser sammenhenger mellom geometriske kvadrat og algebraiske uttrykk, og i tillegg må man løse noe av oppgavene motsatt vei av det eksemplene viser. Det kan argumenteres for at oppgavene i 2.20 kunne vært kodet med HøyM, nettopp fordi man må finne ut av spørsmålet når man har deler av svaret, men siden det ble vist noen tilsvarende eksempler i samme blokk, så tenker jeg at oppgaven får et prosedyrepreg.

Det er mange slike oppgaver i alle tre lærebøkene hvor jeg har vært i tvil om oppgaven skal få HøyP eller HøyM, men da er karakteristikkene over de kognitive kravene guiden til god hjelp til å avgjøre tvilstilfeller (Smith & Stein, 1998). Mange av oppgavene som fikk koden AMC fra MDITx får også koden HøyM fra MTF, det gjør oppgave 5.66 som vist tidligere i figur 3.14 og oppgave 1.137 som vises under:

1.137
Kjeld har ei flaske som rommer $\frac{1}{3}$ L.
Flaska er $\frac{3}{4}$ fylt med vann. Kjeld heller ut noe av det slik at det er igjen $\frac{1}{5}$ L vann i flaska.
Hvor mye vann blir helt ut?

Figur 3.19 HøyM, Sinus 1T, s. 312

Oppgaven ligner ikke på noen av de foregående eksemplene som handler om likninger, og det er ikke umiddelbart åpenbart om man skal sette opp en likning og hvordan likningen eventuelt skal se ut. Jeg mener denne oppgaven stiller store kognitive krav til elevene

3.3.4. Korrelasjon MTF og MDITx

Bruk av disse to rammeverkene var som nevnt tidligere inspirert av tidligere masteroppgaver (Anda, 2020; Håland, 2019) som sjekket om det var en korrelasjon mellom rammeverkene. I kodingen av oppgavene var det tydelig at flesteparten av oppgavene som fikk høye nivåkrav i MTF, fikk også kode AMC. Jeg gjennomførte derfor en korrelasjonsanalyse mellom rammeverkene hvor jeg brukte følgende skårer:

MDITx: KPF får verdien 1, CTP får verdien 2 og AMC får verdien 3.

MTF: LavH får verdien 1, LavP får verdien 2, HøyP får verdien 3 og HøyM får verdien 4.

Kategoriene i MTF er laget for å vurdere kognitive krav i oppgaver, så verdiene jeg legger til disse vil være naturlig fra 1 til 4. MDITx er egentlig ikke laget for å vurdere kognitive krav (Ronda & Adler, 2017), og jeg mener at kategoriene KPF og CTP ikke skilles på nivåkravene, men heller på om oppgaven er koblet til læringsobjektet. Likevel koder jeg kategoriene fra 1 til 3 for å sjekke om det faktisk finnes korrelasjon mellom rammeverkene. Korrelasjonsanalysen lagde jeg i Microsoft Excel ved å regne ut Pearsons r, antall frihetsgrader, t-verdi og signifikansnivå. Se vedlegg 2 for formler.

3.4. Kvalitet i studien

I all forskning vil spørsmål om reliabilitet og validitet være viktige å vurdere (Grønmo, 2019), Om man skal gjøre en analyse av læreverk så skal det være enkelt å kunne både sjekke og reprodusere faktorene fra den horisontale analysen som angir sidetall, kapitler, forfattere osv. I den vertikale analysen vil det komme frem vurderinger og antakelser som jeg har gjort, som noen andre kanskje ville ha gjort annerledes. I disse tilfellene har jeg prøvd å sørge for å begrunne valgene mine og argumentert for hvorfor jeg gjør de. Maxwell (2012) påpeker i sin modell at etikk er gjennomsyret i alle de 5 komponentene en studie består av. Det er på ingen måte et poeng å eliminere forskeren fra studien for å gjøre den mest mulig objektiv, men heller være redelig i når man legger frem hvilke valg man har tatt, og ikke legge skjul på at forskeren er et menneske med egne meninger, egne verdier og egne holdninger. Ved å være åpen om tankeprosesser og tolkninger så påvirker det også validiteten til studien. I kvalitative studier er man også interessert i å generalisere resultatene til noe mer enn nøyaktig det man undersøker. Maxwell (2012) kaller det skjønnsmessig generalisering eller overførbarhet, og min studie kan ses på som et argument i en stor diskusjon som handler om læringsmuligheter i lærebøker.

3.4.1. Forskningsetikk

Studien min er en lærebokanalyse og bøkene jeg analyserer er offentlige dokumenter og tilgjengelig for alle. I følge de forskningsetiske retningslinjene (NESH, 2018) trenger jeg ikke å søke om samtykke for å studere dokumentene, men bøkene har forfattere og jeg har et etisk ansvar for å behandle de med respekt. Jeg har arbeidet med disse tre lærebøkene over tid nå, og har mine tanker om hvilke bøker som er godt egnet og hvilke som er mindre godt egnet til undervisningen. Dette er jeg klar over og har prøvd å forholde meg til mest mulig objektive kriterier i analysen. Nå handler ikke denne studien om hvilken lærebok som er best, men om hvilke læringsmuligheter elever kan få ved å bruke disse bøkene, og det er ikke vanskelig å finne positive element i alle tre bøkene.

4. Resultat

I dette kapittelet vil jeg presentere en horisontal analyse og en vertikal analyse (Charalambous et al., 2010). Først vil jeg fortelle hvordan hver bok er bygd opp med å peke på likheter og kontraster mellom bøkene. Her vil resultatene vise omfanget av det jeg har analysert i lærebøkene. Det vil være en oversikt over antall sider, hvor mange eksempler og hvor mange oppgaver jeg har analysert. Jeg vil også presentere resultatene i form av fordelingen over heuristiske tilnærminger i eksempler samlet sett og i hver lærebok, og så vil jeg presentere resultatene av oppgaveanalysen samlet sett og i hver lærebok.

4.1. Lærebøkene

4.1.1. SINUS 1T

Boka har 478 sider jeg har definert 232 av sidene til å handle om algebra. Se vedlegg 1. 70 av disse sidene er oppgavesider som befinner seg bak i boka i en stor oppgavedel hvor det skilles mellom «Øv mer»-, «Uten hjelpemiddel»- og «Med hjelpemiddel»-oppgaver. «Øv mer» er oppgaver som ligner på oppgavene knyttet til teori og eksempler i de aktuelle delkapitlene; disse starter enkelt og øker i vanskelighetsgrad i hvert delkapittel.

De andre oppgavetypene refererer til om man kan bruke kalkulator, Geogebra og CAS eller ikke, og er ikke direkte koblet opp mot delkapitler, men det blir indikert hvor langt du bør ha kommet før du arbeider med de aktuelle oppgavene. I teoridelen på de sidene som jeg har definert som algebrakapitler er det 162 sider igjen hvor det finnes 75 eksempler på og som jeg har kodet 176 metoder til. Dette tilsvarer 2,3 metoder per eksempel og 1,1 metode per side. På de samme sidene finnes det 483 oppgaver ifølge definisjonen min på oppgaver som jeg presenterte i metodedelen. Sinus 1T har algebraemner i de fire første kapitlene i boka. Det er to delkapitler om funksjoner i kapittel 3 som jeg har valgt å se bort ifra. I tillegg til 75 eksempler, teori og oppgaver, har SINUS 1T 16 «Snakk»-oppgaver og 18 «Utforsk»-oppgaver i disse sidene.

Tabell 4-1 Sidetall, Sinus 1T

	Sider i teoridelen	**Sider i oppgavedelen**	**Sider totalt**
Kap. 1: Formler og likninger	**48**	**22**	**70**
Kap. 2: Faktorisering	**24**	**10**	**34**
Kap. 3: Andregrads- likninger	**42**	**20**	**62**
Kap. 4: Tredjegrads- likninger og ulikheter	**48**	**18**	**66**

Det som karakteriserer Sinus 1T er grundig teori og variert lengde på eksemplene slik som de andre lærebøkene også har. Det som skiller denne boka ut, er at de har en del veldig lange eksempler. En del av de går over to sider og noen eksempler går over tre sider. Eksemplene er ofte delt opp i deloppgaver og man har ofte muligheter til å se kontrast og likheter i eksempelrommet.

▽ EKSEMPEL

Faktoriser om mulig uttrykkene ved hjelp av konjugatsetningen.

a) $x^2 - 4$
b) $x^2 - 5$
c) $4t^2 - 9$
d) $9x^2 + 4$

LØSNING:

a) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = \underline{\underline{(x+2)(x-2)}}$

b) $x^2 - 5 = x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \underline{\underline{\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}}$

c) $4t^2 - 9 = (2t)^2 - 3^2 = \underline{\underline{(2t+3)(2t-3)}}$

d) $9x^2 + 4 = (3x)^2 + 2^2$

Her står det + mellom de to kvadratene. Da kan vi ikke bruke konjugatsetningen. Vi kan vise at det ikke går an å faktorisere uttrykket på noen annen måte heller.

Kan ikke faktoriseres.

Figur 4.1 Eksempelrom med konjugatsetningen, Sinus 1T, s. 66

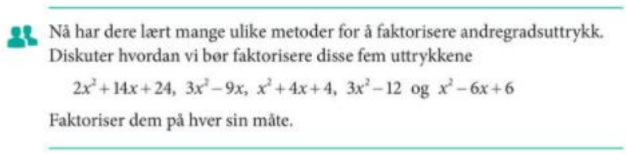
Eksempelrommet dekker hvordan man bruker konjugatsetningen baklengs til å faktorisere algebraiske uttrykk, fra lav til høy grad av kompleksitet. Først er leddene kvadrater slik at løsningen blir heltallige faktorer, så viser de hvordan man kan lage faktorer selv om ett av leddene ikke er kvadrattall. I oppgave c) er begge leddene kvadrattall igjen, men sammensatt av flere faktorer og i oppgave d) viser de et eksempel, et ikke-eksempel, som ikke kan faktoriseres med konjugatsetningen selv om begge leddene er kjente kvadrater. Disse fire oppgavene viser noen likheter som kan gi muligheter for generalisering (Ronda & Adler, 2017), de viser kontrast ved at leddene ikke kvadratiske eller at det er + i stedet for – mellom leddene.

«Snakk»-oppgavene i denne boka er ofte knyttet til innledningen eller avslutningen av et emne. I innledningen er oppgaven ofte slik at man skal bruke kunnskap man lærte fra ungdomsskolen til å repetere kompetanse man skal bygge videre på i det aktuelle emnet. I figur 4.2 vises hva elevene skal gjøre før de skal lære seg polynomdivisjon.

Utfør divisjonen 3989 : 17 med papir og blyant.
Skriv svaret som et blandet tall og ikke som et desimaltall.

Figur 4.2 I starten av delkapittel: Polynomdivisjon, Sinus 1T, s.143

Oppgavene er også i noen tilfeller i slutten av et kapittel, og er laget for å oppsummere en samling av matematiske idéer som forfatterne synes det er verdt at elevene skal kommunisere om. Se figur 4.3 og 4.4.

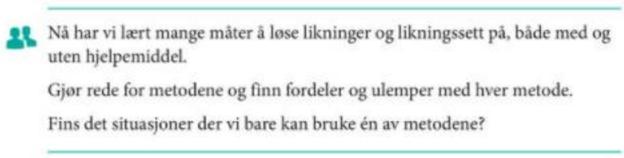


Nå har dere lært mange ulike metoder for å faktorisere andregradsuttrykk. Diskuter hvordan vi bør faktorisere disse fem uttrykkene

$2x^2+14x+24,\ 3x^2-9x,\ x^2+4x+4,\ 3x^2-12$ og x^2-6x+6

Faktoriser dem på hver sin måte.

Figur 4.3 Oppsummere faktorisering, Sinus 1T, s. 119



Nå har vi lært mange måter å løse likninger og likningssett på, både med og uten hjelpemiddel.

Gjør rede for metodene og finn fordeler og ulemper med hver metode.

Fins det situasjoner der vi bare kan bruke én av metodene?

Figur 4.4 Oppsummere likninger, Sinus 1T, s.51

Læreboka har mange løsningsmetoder som skal læres, og i både eksemplene og oppgavene spør de ofte om en spesifikk metode for å løse oppgaven. «Bruk innsettingsmetoden til …», «Bruk metoden om fullstendig kvadrat til …», «Løs likningen grafisk» osv. Det finnes mange metoder til å løse algebraoppgaver og med en slik tilnærming til lærestoffet er det nok fornuftig å samle trådene med en slik kommunikasjonsoppgave for å vise at man kan løse et problem på mange ulike måter, og at det finnes både fordeler og ulemper med hver metode. «Utforsk»-oppgavene i Sinus 1T er litt forskjellig fra de to andre lærebøkene. De handler av og til om det aktuelle temaet, men vil også gå dypere inn enn det læreplanen indikerer. Utfordringen til disse «Utforsk»-oppgavene er at man bare får et spørsmål eller en påstand som kan virke vanskelig å sette i gang med på egenhånd, se figur 4.5.

UTFORSK – ANDREGRADSULIKHETER UTEN FORTEGNSLINJER

Nå har vi lært å løse andregradsulikheter ved hjelp av fortegnslinjer.

Men hvordan kan vi finne løsningen av noen andregradsulikheter bare ved å se på andregradsuttrykket?

Figur 4.5 Utforsk, Sinus 1T, s.51

Hvis man leser teksten, kan man bli interessert i å undersøke om det finnes enkle måter å løse andregradsulikheter på, men det kommer ikke noen forklaring eller hint om hvordan man skal begynne. Dette er et godt problem og den krever høy grad av selvstendighet og krever også at man har tilgang til mange heuristiske tilnærminger, men det vil også si at det har høy inngangsterskel, noe som gjør at mange vil gi opp eller gå videre før de får begynt. Forfatterne skriver at man kan bruke et utvalg av disse «utforsk»-oppgavene i klasserommet, og det ligger utfyllende beskrivelser på nettsidene om hvilke eksempler man kan bruke med elevene, hvilke idéer og hint man kan gi elevene for at de skal kunne utforske i størst mulig grad selv. Jeg har som nevnt tidligere, valgt å ikke ta med noen nettressurser i mine analyser, men ville bare illustrere at gode opplegg for utforsking er laget, men det vises ikke nødvendigvis i den analoge boka.

4.1.2. Mønster 1T

Boka har 496 sider og jeg har definert 170 av sidene til å handle om algebra. Se vedlegg 1. 40 av disse sidene er oppgavesider som befinner seg på slutten av hvert delkapittel og på slutten av hele kapittelet. Det vil si at det er 130 sider igjen hvor det finnes 71 eksempler på og som jeg har kodet 188 metoder til. Dette tilsvarer 2,6 metoder per eksempel og 1,4 metode per side. På de samme sidene finnes det 453 oppgaver ifølge definisjonen min på oppgaver som jeg presenterte i metodedelen. Mønster har ett færre kapittel enn de to andre bøkene og det viser seg at det kapittelet er et algebrakapittel. Slik at de 170 sidene er fordelt på tre kapitler og ikke fire som de to andre bøkene.

Tabell 4-2 Sidetall, Mønster 1T

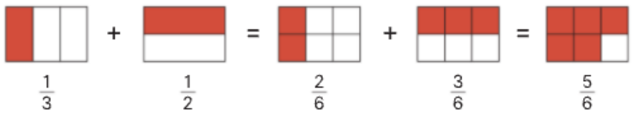
	Sider i teoridelen	Sider i oppgavedelen	Sider totalt
Kap. 1: Tall og regning	**38**	**14**	**52**
Kap. 2: Likninger og andregradsuttrykk	**47**	**15**	**62**
Kap. 4: Algebra	**45**	**11**	**56**

Det som karakteriserer Mønster 1T er hvor forskjellig den er fra andre lærebøker i matematikk. Den inneholder de samme elementene som andre lærebøker i matematikk og slik som de to andre lærebøkene jeg har analysert, er «Utforsk»- og «Snakk»-oppgaver en del av boka i tillegg til de tradisjonelle delene som: Teori, eksempler og oppgaver. Teorien er fargerik og illustrativ, og det er mye som er i teorien som like gjerne kunne vært eksempler. Eksemplene er ikke lange og er som regel en forlengelse av teorien. Det ser ut til at forfatterne gjør et poeng ut av at eksemplene ikke skal inneholde noe annet enn tekst og utregning, noe som gjør at det blir en del heuristiske tilnærminger som ikke blir kodet med i eksemplene, se figur 4.6.

Addisjon og subtraksjon

Addisjon og subtraksjon av brøker gjør vi ved å utvide brøkene til nevnerne blir like, og så sette alt på felles brøkstrek:

Addisjon og subtraksjon av brøker
Vi utvider brøkene og setter på felles brøkstrek.



EKSEMPEL 6

Regn ut:

a $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$ **b** $\frac{4}{5}-\frac{3}{10}$ **c** $4+\frac{3}{2}$

Løsning:

a $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+4}{5}=\frac{7}{5}$

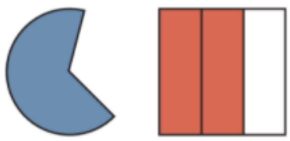
b $\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{2}-\frac{3}{10}=\frac{8-3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}=\frac{1}{2}$

c $4+\frac{3}{2}=\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8+3}{2}=\frac{11}{2}$

Figur 4.6 Fargerik teori og eksempel, Mønster 1T, s. 19

Eksempelet over blir ikke kodet med «Lag en illustrasjon», slik som det burde vært hvis forfatterne hadde tatt med illustrasjonene i eksemplene.

«Snakk»-oppgaver i Mønster 1T er oppgaver hvor man skal diskutere og reflektere sammen med noen andre, se figur 4.7.



Reflekter og diskuter!

$\frac{2}{3}$ kan visualiseres som en sirkelsektor på 240° eller som et tredelt kvadrat, der to av tre deler er fargelagt.

Hvordan vil du illustrere brøkene og regnestykkene nedenfor?

a $\frac{1}{4}$ **b** $\frac{3}{5}$ **c** $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$ **d** $2+\frac{1}{3}$

Figur 4.7 «Snakk»-oppgave, Mønster 1T, s.20

«Snakk»-oppgavene er alltid knyttet til teorien og eksemplene i nærheten og handler som regel om at man skal forklare hvorfor en metode fungerer, oppklare konstruerte misoppfatninger eller å se andre representasjoner av samme matematiske idé. Oppgaven over kan bidra til økt forståelse for hva en brøk er, hva en fellesnevner er og hvorfor brøkreglene er slik de er ved å lage visuelle modeller som representerer de symbolske brøkuttrykkene (Duval, 2006). Det jeg har nevnt til nå er positive trekk ved læreboka Mønster 1T, men hovedgrunnen til at boka virker annerledes enn alle andre bøker er «Utforsk»-oppgavene. Det er tydelig at elevene skal utforske matematikk i arbeid med denne læreboka. Hvert eneste kapittel i boka starter med en «Utforsk»-oppgave som skal lede leserne inn mot teorien, se figur 4.8. Disse oppgavene er lagt opp som en klasseromsaktivitet som krever mer tid enn bare noen minutter; ofte i samarbeid med én eller flere medelever.

2.3 Fullstendig kvadrat

UTFORSK

Skriv av tabellen og fyll ut det som mangler.

	Andregrads-uttrykk		Hvilket tall skal stå i firkanten?		Uttrykket skrevet som fullstendig kvadrat
a	$x^2 + 6x$	$\begin{array}{c\|c\|c} \cdot & x & 3 \\ \hline x & x^2 & 3x \\ \hline 3 & 3x & 9 \end{array}$	$(x + \boxed{3})^2$	9	$(x + 3)^2 - 9$
b	$x^2 + 2x$	$\begin{array}{c\|c\|c} \cdot & x & \\ \hline x & x^2 & \\ \hline & & \end{array}$	$(x + \boxed{1})^2$		
c	$x^2 - 10x$	$\begin{array}{c\|c\|c} \cdot & x & \\ \hline x & x^2 & \\ \hline & & \end{array}$	$(x + \square)^2$	25	
d		$\begin{array}{c\|c\|c} \cdot & x & \\ \hline x & x^2 & \\ \hline & & \end{array}$	$(x + \square)^2$		$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

Figur 4.8 Utforsk- aktivitet, Mønster 1T, s.77

Aktiviteten sørger for at man får utforsket et tema eller et problem i stedet for å hoppe rett på teori eller eksempler. I denne oppgaven gis det mulighet til å bygge videre på det de lærte om kvadratsetninger i kapittelet før, ved å lage en krysstabell som kan tolkes som et algebraisk kvadrat når alle de fire rutene nederst til høyre er fullt ut. Med dette kan man se sammenhengen mellom et andregradspolynom med to ledd og differansen mellom to kvadrater, altså et fullstendig kvadrat. Senere brukes denne metoden til å faktorisere polynomer, løse geometriske problem og løse å andregradslikninger.

Et annet moment som skiller Mønster 1T fra andre læreverk er at de har et eget delkapittel om problemløsing: Kapittel 1.6 Problemløsning. Kapittelet starter som i alle andre delkapitler, med en «utforsk»-oppgave, og følger opp med et eksempel. Se figur 3.1 - «let etter mønster» fra metodedelen. Etter eksempelet poengterer forfatterne at en av grunnene til at vi lærer matematikk i skolen er å bli gode problemløsere og ramser opp Polyas 4 generelle steg i problemløsingsprosessen, se figuren under.

Problemløsning

1 **Forstå problemet**
Hva skal du finne ut? Forstår du alle ordene i teksten? Har du fått tilstrekkelig med informasjon? Kan du formulere problemet på en annen måte? Kan du bryte ned problemet i mindre delproblemer som er enklere å løse?

2 **Lage en plan**
Du skal nå lage en plan for hvordan du vil angripe problemet.
Ulike strategier og framgangsmåter kan være til hjelp.

- Tegn figur eller diagram.
- Lag en oversikt, oppstilling, liste eller tabell.
- Prøv deg fram, gjett og sjekk.
- Se etter mønstre.
- Sett opp en eller flere likninger.
- Arbeid baklengs.
- Løs en enklere versjon av problemet.
- Gå veien om én.

George Pólya, 1887–1985

3 **Gjennomføre planen**
Gjennomfør planen din. Hvis planen ikke fungerer, bruker du de nye erfaringene dine til å bearbeide planen eller lage en ny plan.
Prøv så på nytt.

4 **Se tilbake**
Vær kritisk når du har funnet en mulig løsning. Har du svart på spørsmålet? Er du sikker på at du har funnet alle løsningene?
Er løsningen din rimelig? Kan du kontrollere den? Har du oppfylt alle betingelser?
Hvis løsningen din ikke stemmer, er det ikke uten videre sikkert at metoden du har brukt, er feil. Kan det skyldes en regnefeil?
Gå nøye gjennom det du har gjort, før du forkaster planen din.
Til slutt bør du reflektere over hele prosessen. Kan du lære noe av dette? Har du funnet en metode du kan ha bruk for igjen?
Kunne du gjort dette enklere eller på en annen måte?
Kan metoden generaliseres til å gjelde andre tilfeller også?

Etter den ungarske matematikeren *George Pólya*, 1945.

Figur 4.9 Polyas problemløsing, Mønster 1T, s. 39-40

Videre i dette delkapittelet er det to eksempler til og en «Utforsk»-oppgave som til sammen utgjør 7 av sidene i boka. Det er ikke en stor andel av de nesten 500 sidene boka har til sammen, men likevel dukker disse fire stegene til Polya opp i eksempler gjennom hele læreboka i alle emnene. Det er også verdt å merke seg de punktene under steg 2: Lage en plan, så listes det opp åtte strategier som mer eller mindre ligner de 10 metodene Kongelf (2011) bruker i sin analyse av heuristiske tilnærminger. Noen av tilnærmingene er helt like som f.eks. «Arbeid baklengs» og «Tegn figur eller diagram» («Lag en illustrasjon» (Kongelf, 2011)), og noen av metodene her er mer spesifikke: «Sett opp en likning» og «Gå veien om én» Disse metodene kan gå under Kongelfs heuristikker som henholdsvis «Se problemet fra en annen side» og «Løs deler av problemet».

4.1.3. Matematikk 1T

Boka har 423 sider og jeg har definert 185 av sidene til å handle om algebra. Se Vedlegg 1. 46 av disse sidene er oppgavesider som enten befinner seg i slutten av kapitlene eller på slutten av en seksjon hvor det deles inn i røde og blå oppgaver som skal illustrere vanskelighetsgraden av oppgavene. Det vil si at det er 139 sider igjen hvor det finnes 101 eksempler på og som jeg har kodet 219 metoder til. Dette tilsvarer 2,2 metoder per eksempel og 1,6 metode per side. På de samme sidene finnes det 688 oppgaver ifølge definisjonen min på oppgaver som jeg presenterte i metodedelen. I disse kapitlene finnes det 32 «Snakk»-oppgaver og 26 «Utforsk»-oppgaver som dukker opp innimellom teori, eksempler og oppgaver.

Tabell 4-3 Sidetall, Matematikk 1T

	Sider i teoridelen	**Sider i oppgavedelen**	**Sider totalt**
Kap. 1: Tall	**36**	**9**	**45**
Kap. 2: Algebra	**37**	**13**	**50**
Kap. 3: Likninger	**39**	**13**	**52**
Kap. 5: Likningssystemer og ulikheter	**27**	**11**	**38**

Det som karakteriserer denne læreboka er at det er mange korte eksempler. Det er sjelden et eksempel er større enn en halv side og som regel er det bare én eller to deloppgaver som løses per eksempel. Oppgavene er ofte samlet slik at de danner det Ronda og Adler (2017) kaller et eksempelrom, se oppgave 2.46 og 2.47 i figur 4.10.

2.46
Faktoriser uttrykkene.
a a^2-16
b x^2-2
c $(y-3)^2-25$
d $36n^2-\frac{4}{9}$

2.47
Faktoriser uttrykkene.
a y^2-144
b $9y^2-6y+1$
c $2x^2+12x+18$
d $8n^3-2n$

Figur 4.10 Eksempelrom, Matematikk 1T, s. 67

Oppgavene i figuren over er kodet som 8 oppgaver med både MTF og MDITx. Oppgavene er direkte koblet til læringsobjektet som er: Faktorisere uttrykk med kvadratsetningene. Det vil si at alle 8 oppgavene fikk koden CTP. Oppgavene er også i stor grad like eksemplene som er på samme side som oppgavene, slik at de 6 første oppgavene får koden LavP og de to siste fikk HøyP på grunn av at man ikke kan faktorisere uttrykkene direkte med kvadratsetningene, man må først finne felles faktor. Det som gjør disse oppgavene interessante er at hver oppgave har noe som er likt de forrige oppgavene og noe som er nytt. Det som er likt gjør at man får mulighet til å generalisere, og ved å variere noe kan hjelpe til å nå en høyere form for generalisering (Ronda & Adler, 2017).

Man kan se 5 forskjellige varianter av konjugatsetningen i de 5 første oppgavene, og hver oppgave kan gi en mer generell innsikt i læringsobjektet. De viser at man kan bruke konjugatsetningen baklengs når begge leddene er kvadrattall, når ett av leddene er kvadrattall, når ett av leddene er sammensatt av flere ledd og når leddene består av flere faktorer. De andre oppgavene viser at man må bruke 1. og 2. kvadratsetning også og at noen ganger må man først finne felles faktor.

«Snakk»-oppgavene, se figur 4.11, er laget for å la elevene trene på å kommunisere matematikk. Det er ofte påstander som eleven skal vurdere; enten snakke med en medelev eller bare overbevise seg selv. Disse oppgavene er direkte knyttet til teorien eller eksemplene som befinner seg rett før oppgaven og illustrerer ofte hvordan man kan tenke, en regel eller en vanlig misoppfatning.

SNAKK

Linnea og Marius vil faktorisere uttrykket $a^2 - 2ab + b^2$.
Linnea skriver at det er $(a-b)^2$, mens Marius skriver $(b-a)^2$.
Hvem har rett? Kommenter.

Figur 4.11«Snakk»-oppgave, Matematikk 1T, s. 68

«Utforsk»-oppgavene er laget for at elevene skal ha mulighet til å gå i dybden og for å se sammenhenger i faget.

UTFORSK

Første kvadratsetning sier at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Vi ønsker å undersøke om det også fins noen regler vi kan bruke når uttrykket $a+b$ er opphøyd i 0 eller andre naturlige tall enn 2.

a Bruk CAS og regn ut uttrykkene $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ og $(a+b)^5$.

b Ser du noen sammenheng med Pascals trekant? (Se s. 20.)

c Ser du noe system i eksponentene?

d Kan du bruke mønstret du har oppdaget til å bestemme $(a+b)^6$ og $(a+b)^7$? Kontroller med CAS.

e Bruk det du har oppdaget til å regne ut

1 $(x+2)^4$ **2** $(y+3)^5$ **3** $(2+a)^6$

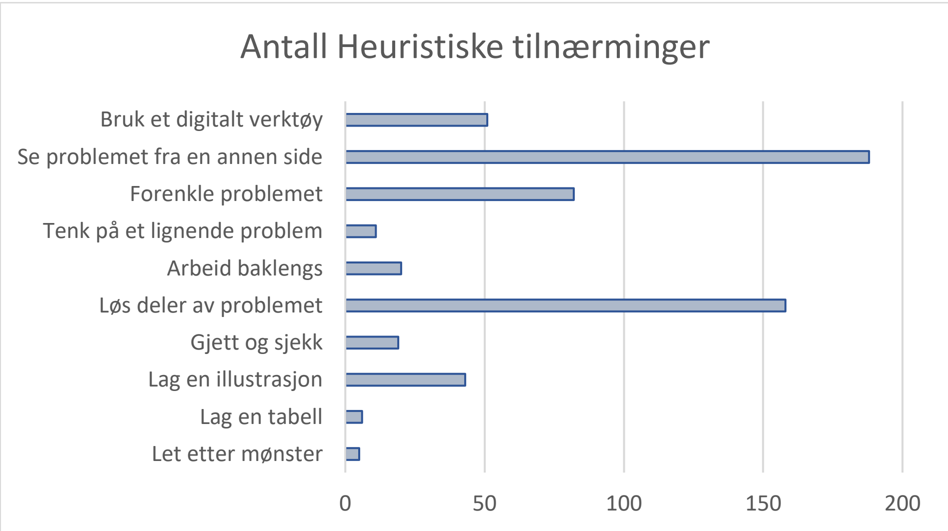
f Kan du regne ut $(x-2)^4$ på tilsvarende måte?

Figur 4.12 «Utforsk»-oppgave Matematikk 1T, s.61

Oppgaven over er helt på slutten av delkapittelet som handler om kvadratsetningene og handler om å *se tilbake* (Polya, 2014) på kvadratsetningene og se om det finnes tilsvarende regler for binomer med en annen eksponent enn 2. Oppgaven er utforskende, men styrt i retning av Pascals trekant. Likevel er det mange muligheter i denne oppgaven som er knyttet til de heuristiske tilnærmingene (Kongelf, 2011). Samtlige metoder kan benyttes her for å løse problemet, selv om oppgaven spør spesifikt om «Bruk digitale hjelpemidler» og «Let etter mønster». Så kan man godt «Lage en tabell», «lage en illustrasjon», «Gjett og sjekk», «Se problemet fra en annen side» for å komme nærmere løsningen av problemet.

4.2. Resultat eksempler

I de tre lærebøkene har jeg analysert 247 eksempler over 431 sider og det er brukt 583 Heuristiske tilnærminger på disse eksemplene. Se figur 4.13.



Figur 4.13 Heuristiske tilnærminger

Resultatet viser at det i gjennomsnitt er brukt 2,4 heuristiske tilnærminger per eksempel, og at noen av tilnærmingene er vesentlig mer brukt enn andre. Figur 4.13 viser resultatet av gjennomgang av eksemplene i de tre læreverkene, og det er tydelig at noen strategier blir brukt mer enn andre totalt sett. De tre mest brukte tilnærmingene utgjør 73 % av totalen og er tilnærmingene «Se problemet fra en annen side» (32 %), «Løs deler av problemet» (28 %) og «Forenkle problemet» (14 %) og tre av de minst brukte tilnærmingene utgjør 4 % av totalen og er tilnærmingene «Let etter mønster» (1 %), «Lag en tabell» (1 %) og «Tenk på et lignende problem» (2 %).

Tabell 4-4 Heuristiske metoder

247 eksempler	Let etter mønster	Lag en tabell	Lag en illustrasjon	Gjett og sjekk	Løs deler av problemet	Arbeid baklengs	Tenk på et lignende problem	Forenkle problemet	Se problemet fra en annen side	Bruk et digitalt verktøy	Heuristisk tilnærming
SINUS 1T	0	0	14	9	54	3	0	35	55	6	176
MØNSTER 1T	4	4	19	8	48	5	6	22	51	21	188
MATEMATIKK 1T	1	2	10	2	56	12	5	25	82	24	219
	5	**6**	**43**	**19**	**158**	**20**	**11**	**82**	**188**	**51**	**583**

Man kan se fra tabell 4-4 at alle de 10 tilnærmingene er brukt i Mønster 1T og Matematikk 1T og 7 av tilnærmingene er brukt i Sinus 1T. Ellers i tabellen kan man se ulik bruk av strategier, men siden antall eksempler og sidetall ikke er likt, så gir det mer mening å presentere relative frekvenser av resultatene hvis man skal søke etter forskjeller og likheter i lærebøkene. Se tabell 4-5.

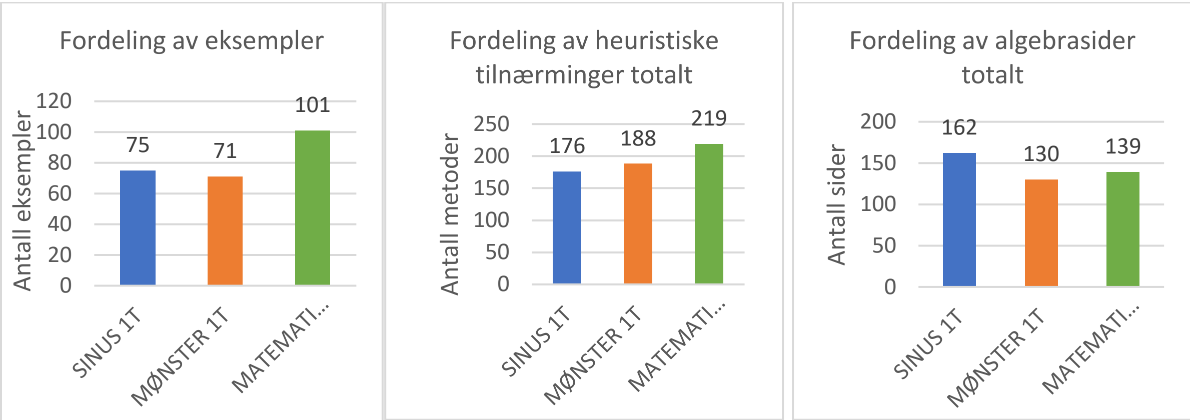
Tabell 4-5 Heuristiske tilnærminger, relativ frekvens.

RELATIV FREKVENS AV HEURISTISKE TILNÆRMINGER	LET ETTER MØNSTER	LAG EN TABELL	LAG EN ILLUSTRASJ ON	GJETT OG SJEKK	LØS DELER AV PROBLEMET	ARBEID BAKLENGS	TENK PÅ ET LIGNENDE PROBLEM	FORENKLE PROBLEMET	SE PROBLEMET FRA EN ANNEN SIDE	BRUK ET DIGITALT VERKTØY	TOTALT
SINUS 1T	0 %	0 %	8 %	5 %	31 %	2 %	0 %	20 %	31 %	3 %	100 %
MØNSTER 1T	2 %	2 %	10 %	4 %	26 %	3 %	3 %	12 %	27 %	11 %	100 %
MATEMATIKK 1T	1 %	1 %	5 %	1 %	26 %	6 %	2 %	11 %	37 %	11 %	100 %

Prosentene er basert på antall eksempler i hver enkelt lærebok, slik at de sier noe om hvilken fordeling læreboka har av heuristiske tilnærminger. Her kan man se at alle tre lærebøkene bruker «Se problemet fra en annen side» og «Løs deler av problemet» mest. Sinus 1T og Matematikk 1T har nesten $\frac{2}{3}$ av tilnærmingene fordelt på de to vanligste metodene, mens Mønster 1T har litt over 50 %. og det er noen andre interessante forskjeller som jeg vil peke på i diskusjonskapittelet.

Det ser ut til at bruk av digitale hjelpemidler er nærmest fraværende i Sinus 1T, men det gjelder bare i de delene som er merket eksempler i boka. Forfatterne til Sinus 1T har valgt å ha nesten all bruk av digitale verktøy som en del av teorien innimellom eksemplene eller etter eksemplene. Siden jeg bare kodet de heuristiske tilnærmingene til de oppgavene som tydelig var merket som et eksempel, så kommer ikke disse med i resultatene. Om man tar med bruk av digitale hjelpemiddel fra teoridelen av boka, så vil denne tilnærmingen ikke skille seg ut fra de to andre lærebøkene lengre.

I diagram som vises har jeg valgt samme fargekode på søylene for å lettere få oversikt og å unngå misforståelser. Sinus 1T har blå farge, Mønster 1T har oransje farge og Matematikk 1T har grønn farge. Fordelingene av eksempler, sider og tilnærminger vises i diagrammene under.



Figur 4.14 Fordeling av heuristiske tilnærminger, eksempler og sider

I både antall eksempler og heuristiske tilnærminger så er det relativ lik fordeling mellom Sinus 1T og Mønster 1T. Matematikk 1T skiller seg ut med å ha både flest eksempler og tilnærminger. Om man tar høyde for sidetall så ser fordelingen litt annerledes ut. i antall sider er det Sinus 1T som skiller seg ut med å ha flere sider som handler om algebra, og det betyr at de har færre metoder per side enn de andre bøkene, se tabell 4-6.

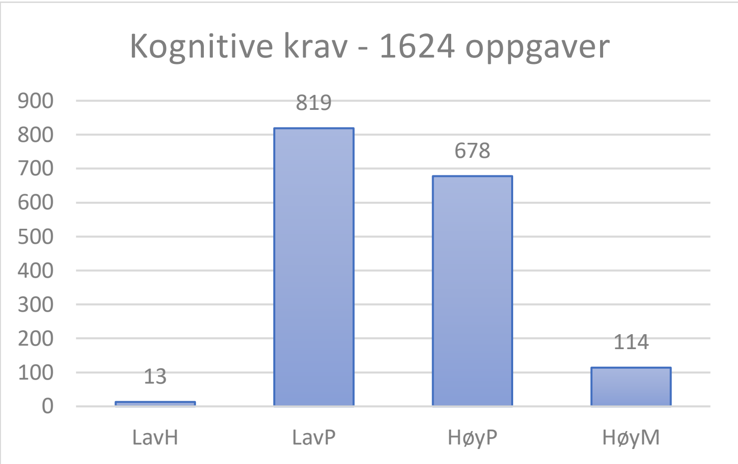
Tabell 4-6 Eksempler, metoder og sider

	Eksempel per side	Metoder per eksempel	Metoder per side
Sinus 1T	0,46	2,3	**1,1**
Mønster 1T	0,55	**2,6**	1,4
Matematikk 1T	**0,73**	2,2	**1,6**

Tabellen over illustrerer strukturelle forskjeller i lærebøkene når det kommer til eksempler i algebrakapitlene. De verdiene det er verdt å merke seg har jeg fargelagt og det vises i siste kolonne at Sinus 1T har få metoder i forhold til antall sider, mens Matematikk 1T har mange metoder i forhold til antall sider. Dette har nok med hvordan lærebøkene er strukturert; som nevnt tidligere har Sinus 1T mye teori og lange eksempler. Det er da en direkte konsekvens at flere sider går til teori, og siden eksemplene er lange, så vil det ikke være så mange eksempler. Matematikk 1T har ofte korte eksempler og teorien er ikke sammenhengende over flere sider slik som i Sinus 1T. Slik at det blir mange eksempler per side i gjennomsnitt, og da også mange metoder per side. Det som egentlig er mest interessant er hvor mange heuristiske tilnærminger det er per eksempel i læreboka, men jeg tok med antall sider for å synliggjøre at det er finnes andre faktorer som spiller inn på hvor hyppige tilnærmingene er. Det er jo klart at et eksempel som går over tre sider og med 4 underoppgaver vil ha større mulighet for å ta i bruk flere heuristiske tilnærminger enn et eksempel som viser én oppgave, uten deloppgaver på en fjerdedels side. Det fantes mange heuristiske tilnærminger i lærebøkene. Mønster 1T har 2,6 metoder per eksempel og skiller seg ut som den boka som jevnt over bruker alle tilnærmingene, men som nevnt tidligere, har denne boka også en preferanse for de vanligste tilnærmingene. Matematikk 1T er også innom alle 10 heuristikkene og Sinus 1T bruker 7 av dem, men man ser fra tabell 4-4 at tre av tilnærmingene, «Let etter mønster», «Lag en tabell» og «Tenk på et lignende problem» er samlet bare kodet 5 ganger fra Matematikk 1T og 0 ganger fra Sinus 1T. Mønster 1T skiller seg også her ut med 13 koder samlet på de tre minst brukte heuristiske tilnærmingene.

4.3. Resultat oppgaver

Jeg har analysert 1624 oppgaver som hører til algebrakapitlene i de tre lærebøkene i studien min, og det samlede resultatet vises i figuren under.



Figur 4.15 Kognitive krav

Det man kan legge merke til i figuren over er at mesteparten av oppgavene, 92 %, er prosedyreoppgaver. Det vil si at for å løse oppgavene, så står det eksplisitt eller implisitt at man skal bruke en bestemt fremgangsmåte. Se forklaringer om kodene i teorikapittelet om MTF (Mathematical Tasks Framework) (Stein et al., 2009). Om man deler oppgavene inn i høye og lave krav så er det ca. like mange oppgaver som stiller høye krav (49 %) som oppgaver som stiller lave krav (51 %).

Det er også interessant å se på lærebøkene hver for seg for å finne ut om fordelingen er lik eller om det finnes tydelige forskjeller. Se tabell 4-7.

Tabell 4-7 Analyse av oppgaver i tre læreverk

	MDITx			MTF				
Lærebøker	KPF	CTP	AMC	LavH	LavP	HøyP	HøyM	**Totalt**
Sinus 1T	29	433	21	5	260	199	19	**483**
Mønster 1T	26	383	46	3	195	214	41	**453**
Matematikk 1T	52	574	62	5	364	265	54	**688**

Tallene i tabellen under hvert rammeverk tilsvarer totalsummen i hver enkelt lærebok. Det vil si at det for eksempel er 483 oppgaver i Sinus 1T som er analysert både med de fire kodene i MTF og de tre kodene i MDITx (Mathematical Discourse in Instruction for Textbooks). Ut ifra tabell 4-7 ser man at Matematikk 1T skiller seg ut med ca. 200 oppgaver mer enn de to andre lærebøkene. I MDITx ser man at de fleste oppgavene får koden CTP (86 %), og resten av oppgavene fordeler seg ganske likt mellom KPF og AMC. I MTF er det generelt en lav frekvens av LavH- oppgaver ($<$ 1 %), høye frekvenser med prosedyrekoder og det finnes en del oppgaver som har koden HøyM, altså «Gjøre matematikk» som jeg vil kommentere i diskusjonsdelen. Resultatene fra korrelasjonsanalysen viser at rammeverkene har høy korrelasjon med tanke på de kognitive kravene slik jeg kodet kategoriene og resultatene er signifikante ($r = .59,\ p < .001$).

5. Diskusjon

Innledningsvis viste jeg til tidligere forskning på lærebøker og problemløsing (Fan et al., 2013, 2018; Kongelf, 2019; Liljedahl et al., 2016; Polya, 2014; Schoenfeld, 1992). Lærebøker i matematikk regnes som en del av matematikkdidaktikken (Valverde et al., 2002) og den betyr mye for læringsmulighetene til elever (Törnroos, 2005; van den Ham & Heinze, 2018). Jeg avgrenset studien min til å studere hvordan lærebøkene behandler algebraemner som forklart i metodekapittelet og fokuserer videre på to komponenter av lærebøkene; eksempler og oppgaver. Målet mitt med denne studien var:

Hvordan er elevers læringsmuligheter i algebra påvirket av lærebøker i matematikk 1T skrevet etter fagfornyelsen?

For å svare på denne problemstillingen lagde jeg forskningsspørsmålene:

1) *Hvilke heuristiske tilnærminger blir brukt i eksemplene i lærebøker for matematikk 1T og hvor ofte blir de brukt?*
2) *Hvilke kognitive krav stiller oppgavene knyttet til eksemplene i algebrakapitlene i lærebøkene?*

Forskningsspørsmål 1 har jeg prøvd å svare på med å bruke rammeverket til Kongelf (2011) ved å analysere eksemplene i tre lærebøker for matematikk 1T og forskningsspørsmål 2 har jeg prøvd å svare på med å bruke både MTF (Stein et al., 2009) og MDITx (Ronda & Adler, 2017). Jeg vil i resten av diskusjonskapittelet drøfte resultatene mine.

5.1. Lærebøker og problemløsing

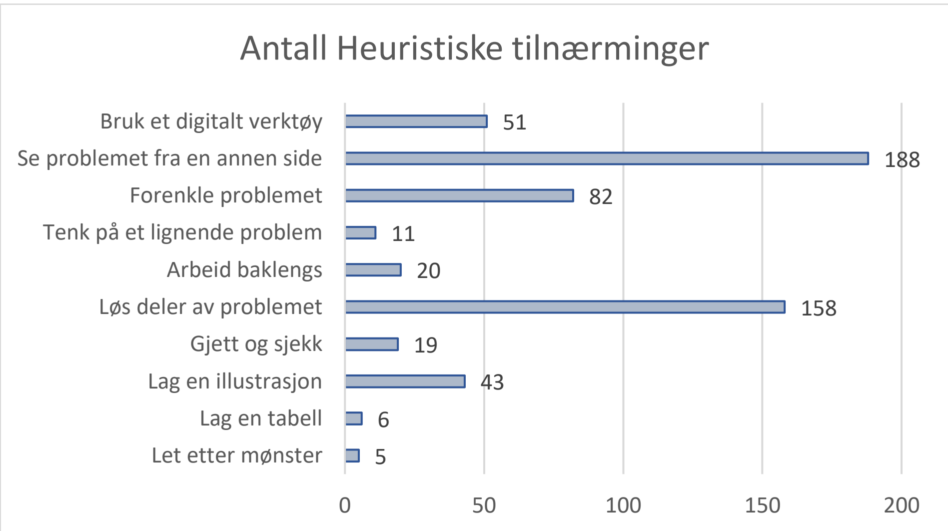
Lærebøkene jeg analyserte har et stort innhold av algebraemner slik jeg definerte disse i metodekapittelet. Om man tar med algebrarelaterte emner som trigonometri, derivasjon og funksjoner, så kan man se at algebra spiller en sentral rolle i matematikk generelt og faget matematikk 1T spesielt. Det henger sammen med intensjonen til den nye læreplanen, LK20, som i større grad enn tidligere vil at tall, tallforståelse og generalisert aritmetikk skal ta en større plass i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2021c), og også da i både undervisning og lærebøker. I teorikapittelet pekte jeg på at den hyppige bruken av begrepene utforsking og problemløsing i alle deler av LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020b) for å illustrere at den nye læreplanen i større grad krever en didaktisk endring i stedet for en innholdsendring. Forskning, for eksempel (Boaler & Dweck, 2016; Liljedahl, 2021; Liljedahl et al., 2016; Polya, 2014; Schoenfeld, 1985, 1992, 2020) har vist over lang tid nå at elever lærer matematikk hvis de får ta del i matematikken, utforske og løse problem som er meningsfulle. For å løse problem må man også lære heuristiske tilnærminger. Det er likevel tvetydige svar på hvordan det bør bli overført i praksis.

Schoenfeld (1992) sier at det ikke er noen tvil om Polyas heuristikker har noe for seg, men sier at strategiene er deskriptive i stedet for preskriptive (Schoenfeld, 1992, s. 352). Det vil si at en problemløsingsekspert vil kunne kjenne igjen og bruke strategiene, men det mangler nødvendige detaljer for en person som ikke er kjent med strategien til å lære seg den. Personen kan lage en illustrasjon, men om han ikke vet hva han skal tegne og når det er lurt å gjøre det så er det ikke en strategi som kan hjelpe ham. Han påstår videre at hver av heuristikkene må deles inn i mange spesialtilfeller for at de over tid skal bli nyttige for nye problemløsere.

Det stemmer bra med hva Kongelf kom frem til; at heuristiske tilnærminger finnes i selv de enkleste oppgaver i eksempler og de kan og bør trekkes frem i lærebøkene for at elever skal kunne kjenne igjen, sette pris på og kopiere bruken av disse strategiene. Etter hvert kan disse strategiene etableres som heuristikker (Schoenfeld, 1985, 1992) som er en viktig del av kompetanse en matematisk problemløser kan ha.

5.2. Heuristiske tilnærminger i eksempler

Funnene mine viser at heuristiske tilnærminger er til stede i eksempler i lærebøkene, se figur 5.1. Selv om det som regel ikke eksplisitt står hvilken metode som blir brukt, er det likevel noen unntak som jeg vil trekke frem senere. Figuren under viser hvilke heuristiske tilnærminger som er til stede i de 247 eksemplene jeg analyserte



Figur 5.1 Heuristiske tilnærminger

Her ser man at «Se problemet fra en annen side» er mest brukt, så er «Løs deler av problemet» ikke så langt etter. En del eksempler har «Forenkle problemet», «Bruk et digitalt verktøy og «Lag en illustrasjon». Så er det heller få tilfeller av de andre tilnærmingene. Resultatene er interessante når man sammenligner de med resultatene til Kongelf (2019). Han peker også på at noen få tilnærminger er hyppig brukt, og andre tilnærminger er nærmest fraværende. Hans resultat viser at «Løs deler av problemet» er helt klart mest brukt, så kommer «Lag en illustrasjon» og «Se problemet fra en annen side», på henholdsvis andre og tredje plass. Som jeg har nevnt før, er algebraoppgaver ofte laget for at man skal forenkle uttrykk. Dette gjør man ofte med å faktorisere, bruke kvadratsetninger og andre måter å omforme algebraiske uttrykk på. Dette gjør at det blir naturlig å kode slike eksempeloppgaver med «Løs deler av problemet» og «Se problemet fra en annen side» og det viser både mine, Veronika Harder (2013) og Kongelf (2011) sine resultater.

Disse heuristiske tilnærmingene er godt egnet i lærebøker fordi det er enkelt å synliggjøre de skriftlig. Man kan direkte observere hva som endrer seg fra linje til linje når man for eksempel forenkler et rasjonalt uttrykk ved å lage felles nevner («Se problemet fra en annen side») eller forkorter like faktorer («Løs deler av problemet»). «Lag en illustrasjon» var den nest mest brukte tilnærmingen hos Kongelf (2011), men den var ikke så fremtredende i mine analyser. En av grunnene til det er nok at han tok med koden hver gang det var en illustrasjon til stede i eksempelet; om den var dekorativ, informativ, en del av løsningen eller om illustrasjonen var etterspurt.

Litt over en tredjedel (117 av 320) av kodene til Kongelf var ikke en del av løsningsprosessen, slik at det kan forklare noe av forskjellen i bruk av tilnærmingen «Lag en illustrasjon». «Bruk et digitalt hjelpemiddel» har en høy frekvens både hos Harder (2013) og hos meg, men Kongelf (2011) hadde ikke med denne tilnærmingen i sin studie. Jeg valgte å ta med denne siden digitale hjelpemiddel er blitt en mer og mer naturlig del av problemløsing spesielt og matematikkundervisning generelt, og man ser fra resultatene til både Harder (2013) og meg at det ikke er en ubetydelig del av eksemplene som bruker digitale fremgangsmåter. Med tanke på forskning fremover, er det heller ingen grunn til å tro at det blir mindre bruk av det digitale hjelpemidler, enten i form av digitale graftegnere og algebrasystem (CAS) eller i form av programmering som de nye læreplanene peker på.

De heuristiske tilnærmingene som var nærmest fraværende hos Kongelf (2011) var stort sett de samme som i mine analyser, se figur 5.1. «Tenk på et lignende problem», «Arbeid baklengs», «Lag en tabell» «Gjett og sjekk» og «Finn et mønster» er de fem minst brukte metodene til sammen i de tre lærebøkene jeg har analysert. Kongelf (2011) hadde flere tilfeller av «Lag en tabell» og Harder (2013) hadde flere tilfeller av «Se etter mønster», men ellers avviker ikke resultatene noe særlig av de minst brukte heuristiske tilnærmingene.

I analysen min av eksemplene la jeg spesielt merke til «Tenk på lignende problem». Denne tilnærmingen er blitt kodet én gang i alle eksemplene i seks lærebøker hos Kongelf (2011) og én gang hos Harder (2013) i hennes seks lærebøker. Dette er en heuristikk som jeg tror har store mørketall. I kapitlene jeg analyserte så var det vanskelig å finne eksempler som brukte denne tilnærmingen, men det var likevel tydelig at bøkene brukte den likevel.

Alle tre bøkene jeg analyserte hadde et kapittel som startet med likninger og kvadratsetninger, fortsatte med fullstendig kvadrat og ulike måter å løse andregradslikninger på, og så til slutt faktorisering av rasjonale uttrykk. Denne progresjonen er jo selvsagt ikke helt tilfeldig, da man må bruke resultatene og idéene i det forrige temaet til å løse de neste. Lærebøker er ofte laget slik som dette, at man bygger opp konsepter, kunnskap og prosedyrer fra start til slutt i et kapittel; slik at man på slutten kan bruke det man har lært underveis i kapittelet. Hvis det er tilfellet, så burde nesten alle eksempler vært kodet «Tenk på et lignende problem».

En av grunnene til at jeg nesten ikke fant belegg for å bruke denne koden på eksemplene er at det kanskje vil virke litt kunstig å hele tiden skrive: «Vi bruker idéen fra det forrige eksempelet til å …» Når det på en måte er innforstått at læreboka bygger videre på tidligere delkapittel. Én av lærebøkene jeg analyserte, gjorde det noen ganger, slik at denne tilnærmingen fikk 11 tilfeller i mine analyser.

Alle tre lærebøkene jeg analyserte hadde over 2 tilnærminger i gjennomsnitt per eksempel (Se tabell 4-6), noe som er betraktelig mer enn Harder (2013) som hadde ca. 1 tilnærming per eksempel og Kongelf (2011) som hadde ca. 1,5 tilnærming per eksempel. Lærebøkene jeg har analysert er nok mer naturlig å sammenligne med Harder (2013) sine fordi hun analyserte bøker fra videregående skole slik som meg, og selv om det er kommet en ny læreplan i 2020, så prøvde jeg å vise i teorikapittelet at kunnskapsinnholdet i fagene er ganske likt som tidligere læreplan, men at endringen er i stor grad den didaktiske praksisen.

En grunn til forskjellen i antall heuristiske tilnærminger er det valget jeg problematiserte i metodekapittelet. Harder (2013) valgte å ikke kode «Løs deler av problemet» i tilfeller hvor man skulle for eksempel løse en likning eller forkorte uttrykk, og jeg valgte å ta med koden i alle eksempler som løste et uttrykk stegvis. Ellers er det lite som tyder på at vi har ulik praksis når vi satt koder til eksemplene.

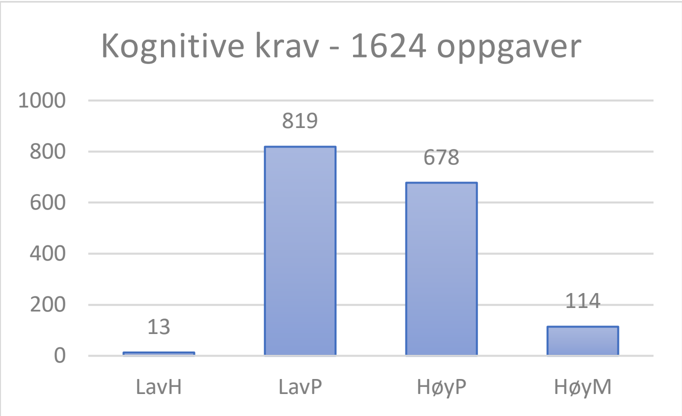
Vi fulgte begge to Kongelf (2011) sin kodemanual, se tabell 3-2, og har vist hvordan vi har tenkt når vi har kodet noen spesifikke eksempler. Om man skal sammenligne resultatene til Kongelf og meg, så har han et gjennomsnitt som er 1,5 heuristisk tilnærming per eksempel mot 2,4 hos meg. Dette er en ganske stor forskjell, men en del av forskjellen kan nok forklares med at jeg brukte 10 tilnærminger mot Kongelf sine 9. Litt over 20 % (51 av 247 eksempler) av eksemplene mine ble kodet med den siste tilnærmingen, «Bruk et digitalt hjelpemiddel», og om man legger til 20 % av de 740 eksemplene til Kongelf (2011), så vil gjennomsnittlig tilnærming per eksempel komme opp i 1,8. Det er kanskje kunstig å ilegge samme prosentsats, men jeg tror 20 % er et tall som i hvert fall ikke er for lavt, fordi det blir innført både CAS og programmering på videregående skole. En forklaring av forskjellen i gjennomsnittlig antall heuristiske tilnærminger kan være at forfatterne av alle tre lærebøkene i min analyse har tatt de nye læreplanene på alvor, og laget lærebøkene slik at kjente heuristikker er en sentral del av innholdet.

Resultatene fra eksempelanalysen viser at problemløsing og utforsking er til stede i alle lærebøkene. Det vises i hvert fall implisitt i Matematikk 1T og Sinus 1T med den store mengden heuristiske tilnærminger med henholdsvis 2,2 og 2,3 heuristiske tilnærminger per eksempel. Det vises mer eksplisitt i Mønster 1T med tanke på at boka har et eget delkapittel om Polya og problemløsing, se figur 4.10, hvor de lister opp mange heuristiske tilnærminger som er nesten de samme som de jeg brukte i analysen min (Kongelf, 2011), og viser i tillegg med 2,6 heuristiske tilnærminger i gjennomsnitt per eksempel, at problemløsingsstrategier spiller en sentral rolle i læreboka.

5.3. Kognitive krav i oppgaver

Funnene mine viser at lærebøkene legger stor vekt på prosedyrekunnskap ved at 92 % av alle oppgavene ble kodet til enten LavP eller HøyP. Dette er ikke så ulikt andre studier av lærebøker som bruker rammeverket MTF til Stein et al. (2009). En studie av norske lærebøker i matematikk laget for ungdomsskolen hadde 89 % prosedyrekoder på to norske lærebøker (Strand & Heimstad, 2018). Anda (2020) kom frem til 89 % og 93 % i de samme lærebøkene, men kun for emnet funksjoner. Håland (2019) undersøkte de kognitive kravene i oppgaver om likninger og kom frem til en enda høyere prosent av prosedyrekoder.

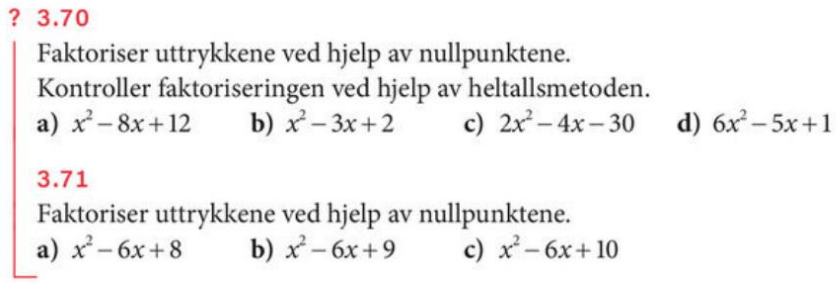
Det er viktig for elever å lære seg prosedyrer, strategier og kunnskap som kan brukes til å løse matematiske problem (Kilpatrick et al., 2001; Schoenfeld, 1985), men prosedyrer er lett å glemme om man ikke forstår hvorfor de fungerer og når man kan bruke de, og for å skille mellom det å følge en prosedyre og det å forstå en prosedyre, så bruker vi begrepene prosedyrer uten forbindelser, LavP og prosedyrer med forbindelser, HøyP (Stein et al., 2009). I de norske studiene jeg nevnte, var det en stor overvekt av prosedyrer uten forbindelser på 63 % og 72 % (Strand & Heimstad, 2018) og prosenter mellom 82 % og 100 % i tre oppgavebøker fra ungdomstrinnet (Håland, 2019).



Figur 5.2 Kognitive krav

Resultatene mine viser at det er hovedvekt på oppgaver med prosedyrer uten forbindelser, se figur 5.2, men at den relative fordelingen ikke like skjev som de tidligere nevnte studiene. Av alle oppgavene i lærebøkene jeg analyserte så er 49 % av oppgavene i kategorier som stiller høye kognitive krav, og jeg har ikke klart å finne tall på hva som er en god andel av oppgaver med høye kognitive krav litteraturen. Det tidligere forskning (Hiebert & Grouws, 2007; Schoenfeld, 1992) viser, er at elever arbeider for mye med rutineoppgaver som kun bidrar til instrumentell prosedyrelæring. Dette gjenspeiler bare den ene av de fem trådene i Kilpatrick et al. (2001) sin beskrivelse av matematiske kompetanser, og elever må få mulighet til å streve med gode matematiske oppgaver som stiller høye kognitive krav (Hiebert & Grouws, 2007). Derfor tenker jeg at når ca. halvparten av oppgavene i lærebøkene stiller høye kognitive krav, så er de med på å bidra til at elever får mulighet til å engasjere seg i matematiske tankemønstre, prosedyrer, begrep som bygger opp elevens matematiske kompetanse. Når det er sagt så viste det seg at det var stor forskjell på oppgaver som fikk like koder, slik at tallene i tabellene mine forteller ikke alt om oppgavene.

Oppgaver fikk koden HøyP om de krevde at leseren måtte bruke en prosedyre i en litt annen situasjon eller om man for eksempel ble bedt om å forklare en sammenheng mellom en algebraisk- og en geometrisk løsning. Det å arbeide med oppgaver og løsninger på flere måter, vil være kognitivt mer krevende enn å løse en oppgave med en gitt prosedyre. Alle tre lærebøkene har fått mange fått mange koder med HøyP fordi de har med teksten: «Sjekk svaret med et digitalt hjelpemiddel», «Kontroller svaret med å regne ut …» eller «Snakk med en medelev om …». Det kan kanskje virke litt billig at en helt vanlig rutineoppgave kan settes opp et nivå med å tilføye disse setningene, men det viser seg at oppgaven får en ekstra dimensjon ved å gjøre det (Duval, 2006).


? 3.70

Faktoriser uttrykkene ved hjelp av nullpunktene.
Kontroller faktoriseringen ved hjelp av heltallsmetoden.

a) $x^2-8x+12$ **b)** x^2-3x+2 **c)** $2x^2-4x-30$ **d)** $6x^2-5x+1$

3.71

Faktoriser uttrykkene ved hjelp av nullpunktene.

a) x^2-6x+8 **b)** x^2-6x+9 **c)** $x^2-6x+10$

Figur 5.3 Andregradslikninger, Sinus 1T, s.119

Oppgavene over illustrerer poenget med den ekstra setningen som gir oppgaven et ekstra nivå. Alle fire oppgavene i 3.70 ble kodet til HøyP, fordi man må faktorisere polynomene på to måter, og vil dermed kunne knytte to ulike representasjoner til samme objekt. Dette vil da kunne øke den konseptuelle forståelsen til eleven (Kilpatrick et al., 2001).

Tabell 5-1 Relativ frekvens av kognitive krav

	LavH	LavP	HøyP	HøyM	
Sinus 1T	1,0 %	53,8 %	41,2 %	3,9 %	100,0 %
Mønster 1T	0,7 %	43,0 %	47,2 %	9,1 %	100,0 %
Aschehoug 1T	0,7 %	52,9 %	38,5 %	7,8 %	100,0 %

Lærebøkene hadde som nevnt tidligere, 49 % av oppgaver som stilte høye kognitive krav samlet sett. Fordelingen av kategoriene i MTF vises i tabell 5-1 og man ser mange likheter, men også noen forskjeller. Resultatene er ikke så ulike at man kan si noe om hvilken lærebok som er best egnet, men de relative prosentene i tabell 5-1 sier noe om hvilke typer oppgaver forfatterne vil at elevene skal arbeide med. Mønster 1T skiller seg ut med å være den eneste boka som har flere oppgaver med høye krav (56 %) enn oppgaver med lave krav. Dette tyder på at lærebokforfatterne mener det er viktig å ha med slike oppgaver og én av forklaringene på det er den store mengden «Utforsk»-oppgaver og «Snakk»-oppgaver som boka har med. Når det er sagt, så har både Sinus 1T og Matematikk 1T også med mange oppgaver som stiller høye krav, men ikke når man ser på den relative andelen. Om man ser på antall oppgaver som stiller høye kognitive krav, så har Matematikk 1T flere enn Mønster 1T, og dette kommer kanskje av at Matematikk 1T hadde ca. 200 flere oppgaver totalt enn de to andre bøkene. Se tabell 4-7.

5.3.1. MDITx og MTF

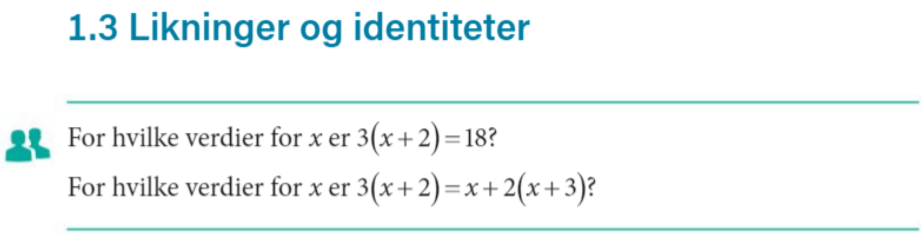
MDITx er et omfattende rammeverk og egner seg godt til vertikale analyser (Charalambous et al., 2010; Ronda & Adler, 2017). Ved å dele lærebøker inn i blokker, kan man se læringsmuligheter for elevene ved å analysere hver komponent innad i blokken. Med inspirasjon fra Anda (2020) og Håland (2019) kodet jeg oppgavene med MDITx i tillegg til MTF. Anda (2020) pekte på en korrelasjon mellom AMC og HøyM, og han tenkte i utgangspunktet at CTP ville korrelere med HøyP, men fant ut at det ikke var sammenlignbart.

Mine resultater viser at nesten alle oppgaver som fikk HøyM i MTF, fikk også AMC i MDITx, men i tillegg fikk mange HøyP- oppgaver også koden AMC, slik at flere oppgaver finnes med koden AMC enn HøyM. Korrelasjonsanalysen viste at det er en korrelasjon mellom rammeverkene. Det tror jeg først og fremst kommer av likhetene mellom de høyeste kodene i begge rammeverkene, men det kan også godt tenkes at selv om KPF (Known procedure or fact) og CTP (Current topic or procedure) ikke er ment til å skille mellom lave og høye krav, så er det kanskje en tegn på at tidligere kunnskap (KPF) stiller lavere nivåkrav enn nåværende kunnskap (CTP) i lærebøker.

5.4. Læringsmuligheter i lærebøkene

I siste del av diskusjonskapittelet vil jeg trekke frem oppgaver fra alle tre lærebøkene som jeg mener gir gode læringsmuligheter for elevene. Det er veldig mange oppgaver jeg kunne tatt med her, men jeg har vist noen av «Utforsk»-oppgavene i både metodedelen og i resultatene mine, så her vil jeg trekke frem noen «Snakk»-oppgaver og noen oppgaver som er litt annerledes enn resten.

Oppgave 1


1.3 Likninger og identiteter

For hvilke verdier for x er $3(x+2)=18$?

For hvilke verdier for x er $3(x+2)=x+2(x+3)$?

Figur 5.4 «Snakk»-oppgave Sinus 1T s. 13

Oppgaven over er et eksempel på hvordan kognitive krav i oppgaver avhenger av hvor i boka oppgaven kommer. Som man ser, er oppgaven helt i starten av et delkapittel om likninger og identiteter. Hvis det hadde vært noe teori først og kanskje et eksempel eller to, så hadde denne oppgaven («Snakk»-oppgaver regnes som én oppgave, selv om det er flere spørsmål) vært kodet LavP, fordi om man kan løse lineære likninger så klarer man å svare på begge disse spørsmålene. Likninger læres i grunnskolen, men oppgaven over bruker ikke ordene «Løs likningen» eller «Avgjør om uttrykket er en identitet». Spørsmålet «For hvilke verdier for x …?» peker på en utforskende tilnærming og kan like gjerne bruke «Gjett og sjekk» eller «Lag en tabell» som å løse likningen og vurdere svaret. Oppgaven ble kodet til HøyP fordi den hinter til en prosedyre, løse likninger, i overskriften, men man tvinges også til å vurdere hvilke x- verdier som er svaret på spørsmålet etter at man har løst uttrykkene som likning. Om man ikke bruker likning, så er oppgaven enda rikere og man kan bruke mange av de 10 heuristiske tilnærmingene (Kongelf, 2011) til å komme frem til et fornuftig svar. Oppgaven gir muligheter for å forstå at en lineær likning er en *påstand* som ofte er falsk for mange $x -$ verdier, men at det finnes én $x -$ verdi hvor påstanden er sann, og spesialtilfellene hvor disse påstandene er sanne for alle $x -$ verdier kalles identiteter.

Det å tolke algebraiske uttrykk som påstander er en kraftig strategi som både kan og bør brukes når man løser 2. grads likninger, likningssett og ulikheter, men også i andre matematiske emner som for eksempel sannsynlighetsregning eller funksjoner. Når man går i dybden av hvordan alle emner i matematikk er bygd opp av noen aksiomer i mengdeteori (Chartrand et al., 2014), så er påstander sammen med boolske operatorer noe av det mest fundamentale i matematikken.

Oppgave 2

Reflekter og diskuter!

Diskuter hvilke metoder du vil bruke for å løse disse likningene:

$x^2 - 5x = 0$ $\qquad$ $x^2 - 5x - 14 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 4 = 0$

Figur 5.5 «Snakk» - oppgave, Mønster 1T, s.86

«Snakk»-oppgaven over er en oppgave som kan regnes som et eksempelrom (Ronda & Adler, 2017), hvor det i hver likning er noe som er likt og noe som er ulikt, slik at det gir mulighet for generalisering. Det som er likt, er at alle tre likningene er oppsatte likninger med 0 som høyre side, 1 som koeffisient til andregradsleddet og subtraksjon mellom leddene. Det som skiller likningene, er at den første mangler et konstantledd og den siste mangler et førstegradsledd. Oppgaven er ikke å løse likningene, men å diskutere hvilke metoder som egner seg best i hvert tilfelle. Metodene som er gjennomgått i læreboka er: Trekke ut like faktorer, fullstendig kvadrat, *sum- produkt*, nullpunktfaktorisering og abc- formelen. Poenget med denne oppgaven er nok å vise at det kanskje ikke alltid er nødvendig å bruke abc-formelen for å løse andregradslikninger, og hvis ikke alle leddene er med så finnes det tidssparsommelige metoder som løser oppgaven raskt:

Likning 1: $x^2 - 5x = x(x - 5)$ slik at man kan se at løsningen er $x = 0$ eller $x = 5$

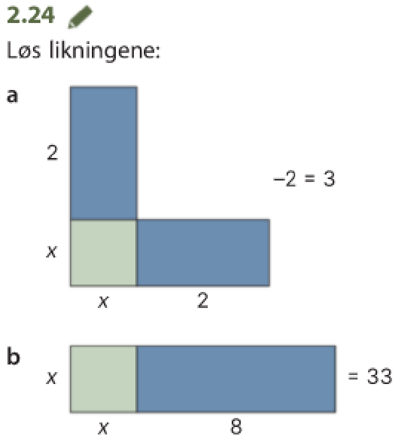
Likning 3: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ slik at man kan se at løsningen er $x = 2$ eller $x = -2$

Likning 2: $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$ slik at man kan se at løsningen er $x = 7$ eller $x = -2$

Faktoriseringen i likning 2 kan man komme frem til med «gjett og sjekk»- metoden *sum-produkt*. Da leter man etter to tall hvor summen blir koeffisienten i førstegradsleddet, her -5, og produktet av de tallene blir konstantleddet, her -14. De to hele tallene som passer, er da -7 og $+2$. Denne bruker og forklarer alle tre lærebøkene som én av strategiene til å løse andregradslikninger, og metoden er spesielt god å bruke når nullpunktene er hele tall.

Liljedahl (2021, s. 27) sier at å løse andregradslikninger er veldig gode oppgaver, helt til du viser elevene hvordan du gjør det. Han anbefaler å starte motsatt, med å la elevene oppdage at når man ganger ut to parenteser, for eksempel $(x - 7)(x + 2)$ eller $(x - 3)(x + 5)$, så blir koeffisienten til førstegradsleddet alltid summen av tallene, og konstantleddet blir produktet av tallene. Deretter kan man utvide utforskingen med å se hva som skjer om man tar med en tallfaktor foran parentesene, eller hva som skjer når man har et tall som faktor foran x inne i parentesen. Dette er opplegg som den enkelte lærer kan gjøre med klassen sin, men med tanke på de mange og gode utforskingsoppgavene jeg har funnet i bøkene og at andregradslikninger er så sentralt i matematikk 1T, så kunne dette vært en god utforskingsoppgave i starten av kapittelet.

Oppgave 3



Figur 5.6 Andregrads likning, Mønster 1T, s.88

Oppgave 2.24 har jeg tatt med fordi den illustrerer en kobling mellom geometri og algebra. Disse oppgavene er stiller høye kognitive krav fordi man må knytte sammen det å lage kvadrater med det å løse andregradslikninger. Metoden om fullstendig kvadrat er den som legger grunnlaget for det vi kaller abc- formelen, og ved å løse slike oppgaver som dette kan man få en bedre konseptuell forståelse (Kilpatrick et al., 2001), selv om metoden i seg selv som regel ikke er den mest tidseffektive løsningsmetoden.

Oppgave 4

Figur 5.7 «Snakk» - oppgave, Matematikk 1T, s.74

Oppgaven tar tak i en typisk feil elever gjør i brøkregning, og spør implisitt om man kan stryke like ledd i teller og nevner. Denne oppgaven mener jeg er utforskende. Først og fremst siden det ikke er forklart noe i forkant av oppgaven om hvordan man løser noe lignende. Mange vil nok vite, fra tidligere skolegang, at man ikke kan fjerne ledd slik at brøkene i oppgaven blir like, men det å argumentere for hvorfor man ikke kan gjøre det, krever adaptiv resonnering (Kilpatrick et al., 2001). Først vil man kanskje vise med talleksempler at en brøk ikke er lik om man legger til det samme tallet i teller og nevner. For eksempel er $\frac{2}{3}$ ikke lik $\frac{4}{5}$, og det finnes uendelig mange slike eksempler. Det som gjør oppgaven spennende er at det finnes spesielle tall a, b og c, $(c \neq 0)$ slik at $\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c}$. Den ene løsningen er en triviell løsning hvor $b = 0$ og a og c kan være alle reelle tall. Den andre løsningen er en familie med løsninger hvor $a = c$ og b kan være alle reelle tall. Disse løsningene i seg selv er ikke så viktige resultat, men det at man skal forklare at det er de eneste løsningene, krever at man har en dyp forståelse for hva en brøk er.

Oppgave 5

3.17
Venstresiden i en likning er $4\left(x-\frac{1}{2}\right)+3(2+x)$.

a Lag en høyreside i likningen slik at $L=\{5\}$.
b Lag en høyreside i likningen slik at $L=\varnothing$.
c Lag en høyreside i likningen slik at $L=\mathbb{R}$.

Figur 5.8 Lage likninger, Matematikk 1T, s.110

Oppgave 3.17 er tre oppgaver som jeg har kodet HøyM. Disse kan også ses på som et eksempelrom (Ronda & Adler, 2017) som gir mulighet til å lære hvordan likninger fungerer og hvilke resultat man kan få i stedet for å bare løse likninger. Løsningsmengden på de tre oppgavene hinter til løsningsrommet som lineære likninger kan ha; én løsning, ingen løsning eller uendelig mange løsninger. Løsningsmengden er gitt i oppgavene, men eleven skal finne ut hva høyresiden av likningen er. Dette er en åpen oppgave og det finnes mange ulike svar på disse tre oppgavene. Å starte med løsningen for å finne ut av spørsmålet, er oppgaver som krever matematisk tenkning (Liljedahl, 2021) og som bygger konseptuell forståelse (Kilpatrick et al., 2001).

5.5. Implikasjoner og videre forskning

Denne studien har bidratt med å identifisere heuristiske tilnærminger i eksempler og kognitive krav i oppgaver i lærebøker laget for matematikk 1T. I skrivende stund er allerede blitt produsert matematikkbøker for 2. klasse med fordypning i realfag, Matematikk R1 og Matematikk S1, og om noen måneder vil det nok også komme ut bøker for fagene i 3. klasse: Matematikk R2 og Matematikk S2. Det hadde vært spennende hvis noen hadde gjort tilsvarende studier med disse fagene. Algebra er fortsatt en sentral del av alle matematikkfagene på videregående skole, men andre emner egner seg godt til å analysere eksempler og oppgaver. Strand og Heimstad (2018) analyserte oppgaver i alle emnene i to lærebøker knyttet til ungdomsskolen. Anda (2020) analyserte oppgaver og eksempler knyttet til emnet funksjoner og Håland (2019) analyserte emnet lineære likninger i lærebøker for 8.trinn. Mulighetene er mange, og siden fagfornyelsen og tilhørende bøker er relativt nye, er det stort behov for mer kunnskap om lærebøkers påvirkning av læringsmuligheter for elever.

Et annet moment som Fan et al. (2018) peker på er hvordan internett, og den store tilgangen til digitale ressurser blir en naturlig del av lærerens undervisning. Kongelf underbygger dette med å påstå at studiene hans er gjort på lærebøker, men funnene hans er relevante på læremidler generelt. Forskningen på lærebøker i matematikk har blitt sammensmelta av tre forskningsfelt (Fan et al., 2018),

1) Forskning om bruk av teknologi i matematikkutdanning
2) Forskning på lærebøker i matematikk
3) Forskning på læreplanressurser

Tidligere var det uten tvil læreboka som påvirket undervisningen mest (Fan, 2013; Törnroos, 2005). Nå er det ikke lenger selvsagt at en klasse bruker lærebøker i det hele tatt. og retningen til forskningsfeltet videre er uklar selv om én ting er sikkert: Digitale ressurser knyttet til matematikkutdanning vil være med i videre forskning og lærebøker er nå omdøpt til læremidler (Rezat et al., 2021).

6. Avslutning

I denne studien har jeg undersøkt hvilke læringsmuligheter elever har i tre lærebøker laget for den nye læreplanen, LK20, i faget matematikk 1T. Læreplanen krever en didaktisk endring i form av at elever skal selv og sammen med andre, få utforske matematiske problem for å oppdage mønster, sammenhenger og strukturer (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Forskning viser at læreboken elever bruker, er en av de viktigste faktorene som avgjør hvilke læringsmuligheter elever får (van den Ham & Heinze, 2018).

Jeg undersøkte hvilke heuristiske tilnærminger som fantes i eksemplene i lærebøkene med rammeverket til Kongelf (2011) og fant ut at det brukes i gjennomsnitt 2,4 heuristiske tilnærminger per eksempel. Mange heuristiske tilnærminger finnes, selv i de enkleste eksempeloppgavene, og noen tilnærminger er mer brukt enn andre. Til tross for dette er det sjelden det står eksplisitt hvilke problemløsingsmetoder det brukes i eksemplene, noe som fører til at det kan være vanskelig for elever å lære at det finnes heuristiske tilnærminger som kan hjelpe de med å løse problem.

Resultatet av analysen av kognitive krav i oppgaver viser at lærebøkene har nesten 50 % oppgaver med kognitive krav som har høyt nivå (Stein et al., 2009). Selv om flesteparten av oppgavene har et prosedyrepreg, så går de likevel ut på å knytte sammen matematiske metoder og idéer slik at man ikke bare arbeider med prosedyreevnen, men arbeider med alle trådene i trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001). Selv om læringsmulighetene er til stede i kognitivt krevende oppgaver i alle tre lærebøker, så må læreren være klar over at det kognitive kravene kan endres, og lettest senkes ved å legge til informasjon eller hint (Stein et al., 2009).

Problemstillingen min er: **Hvordan er elevers læringsmuligheter i algebra påvirket av lærebøker i matematikk 1T skrevet etter fagfornyelsen?**

I lys av resultatene mine mener jeg svaret på problemstillingen er at de nye lærebøkene påvirker læringsmulighetene til elever på en positiv måte, spesielt med tanke på oppgavene som legger til rette for utforsking og problemløsing, men også det store antallet heuristiske tilnærmingene som finnes i eksempler. Strukturen på lærebøkene viser at de har tatt den nye læreplanen på alvor. Alle tre bøkene har «Utforsk»-oppgaver og «Snakk»-oppgaver som lever opp til navnet, det ble brukt mange heuristiske tilnærminger i eksemplene og en stor del av oppgavene stilte høye nivåkrav.

Mønster 1T skiller seg positivt ut i resultatene. Læreboka har med et delkapittel om problemløsing og strategier, slik at det blir et mer eksplisitt fokus på at elever skal lære å bli problemløsere. Denne boka har et større antall heuristiske tilnærminger per eksempel enn de andre og har høyere frekvens på de minst brukte tilnærmingene. I tillegg hadde Mønster 1T flest «Utforsk»-oppgaver og «Snakk»-oppgaver, og hadde en høyere fordeling av oppgaver med høye kognitive krav.

Litteraturliste

Adler, J., & Ronda, E. (2015). A framework for describing Mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(3), 237–254. https://doi.org/10.1080/10288457.2015.1089677

Anda, S. (2020). *Læringsmuligheter i matematiske lærebøker – før og etter fagfornyelsen.* [Masteroppgave]. https://uis.brage.unit.no/uis-xmlui/handle/11250/2773485

Askew, M., Hodgen, Jeremy, Hossain, Sarmin, & Bretscher, Nicola. (2010). *Values and variables: Mathematics education in high-performing countries*. Nuffield Foundation.

Bills, L., T. Dreyfus, J. Mason, P. Tsamir, A. Watson, & Orit Zaslavsky. (2006). Exemplification in mathematics education. I *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v.1* (s. 126–154).

Boaler, J., & Dweck, C. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching*. Jossey-Bass; a Wiley Brand.

Borgersen, H. E. (1994). *Open ended problem solving in geometry. Nordic Studies in Mathematics Education, 2(2), 6-35.*

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 117–151. https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Chartrand, G., Polimeni, A. D., & Zhang, P. (2014). *Mathematical proofs: A transition to advanced mathematics$Chartrand, Polimeni, Zhang* (Third Edition, Pearson new international edition). Pearson.

Dole, S., & Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 19–35. https://doi.org/10.1080/14794800801915863

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, *45*(5), 765–777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

Fan, L., Trouche, L., Qi, C., Rezat, S., & Visnovska, J. (Red.). (2018). *Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 61–75. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9069-6

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM*, *45*(5), 633–646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Grønmo, S. (2019). *Social Research Methods: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*. SAGE.

Harder, V. K. (2013). *Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole: En studie av fremstillingen av problemløsningsmetoder i algebraeksempler i lærebøkene for kursene 1T og R1*. [Masteroppgave]. https://www.duo.uio.no/handle/10852/38054

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 371–404). IAP.

Håland, A. (2019). Kognitive krav i lærebøkenes oppgaver og oppgavetekstens påvirkning av forståelse i emnet lineære likninger på 8.trinn. [Masteroppgave]. https://uis.brage.unit.no/uis-xmlui/handle/11250/2622281

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., National Research Council (U.S.), & Mathematics Learning Study Committee. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press. https://openlibrary.org/books/OL17062503M

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16(4)*, 5–44.

Kongelf, T. R. (2019). Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra? I *238* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Agder. https://hvlopen.brage.unit.no/hvlopen-xmlui/handle/11250/2616700

Kunnskapsdepartementet. (2016, april 15). *Meld. St. 28 (2015–2016)* [Stortingsmelding]. Regjeringen.no; regjeringen.no. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

Kunnskapsdepartementet. (2021). *Valg av matematikk på videregående*. Utdanning.no. https://utdanning.no/tema/utdanning_hjelp_og_veiledning/valg_av_matematikk_pa_videregaende

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Chapter 17: Problem solving and modelling. I *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 763–802). Information Age Pub. [u.a.].

Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem Solving in Mathematics Education. I P. Liljedahl, M. Santos-Trigo, U. Malaspina, & R. Bruder, *Problem Solving in Mathematics Education* (s. 1–39). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277–289. https://doi.org/10.1007/BF00312078

Matematikksenteret. (2021). *Hva er MatteLIST og hvordan kan du bruke nettsidene? | Mattelist*. https://www.mattelist.no/artikkel/elev

Maxwell, J. A. (2012). *Qualitative Research Design: An Interactive Approach*. SAGE Publications.

NDLA. (2021). *Om NDLA*. Om NDLA. https://om.ndla.no/

NESH. (2018, desember 4). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Forskningsetikk. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi/

NOU 2019:23. (2019). *Ny opplæringslov*. https://www.regjeringen.no/contentassets/3a08b44df1e347619e32db47d13ac0cd/no/pdfs/nou201920190023000dddpdfs.pdf

Opplæringsloven. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa (opplæringslova)—Kapittel 3. Vidaregåande opplæring—Lovdata*. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_3#%C2%A73-1

Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Rezat, S., Fan, L., & Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(6), 1189–1206. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3

Rezat, S., & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM*, *44*(5), 641–651. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0448-4

Ronda, E., & Adler, J. (2017). Mining Mathematics in Textbook Lessons. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(6), 1097–1114. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9738-6

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics* (s. 334–370).

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM*, *52*(6), 1163–1175. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on Practice: Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 344–350. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing Standards-Based Math Instruction: A Casebook for Professional Development, 2nd Edition*. Teachers College Press.

Strand, K., & Heimstad, C. A. (2018). *Kognitive utfordringer i to norske lærebokserier fra ungdomsskolen – en mixed methods studie*. [Masteroppgave]. https://munin.uit.no/handle/10037/13791

Tekkumru-Kisa, M., Stein, M. K., & Doyle, W. (2020). Theory and Research on Tasks Revisited: Task as a Context for Students' Thinking in the Era of Ambitious Reforms in Mathematics and Science. *Educational Researcher*, *49*(8), 606–617. https://doi.org/10.3102/0013189X20932480

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, *31*(4), 315–327. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2005.11.005

Utdanningsdirektoratet. (2017, februar 14). *4.Kvalitetssikring av eksamen og sensur*. https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/rammeverk-eksamen/4.kvalitetssikring-av-eksamen-og-sensur/

Utdanningsdirektoratet. (2020a, juni 29). *Fagets relevans og sentrale verdier—Læreplan i matematikk fellesfag Vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01)*. https://www.udir.no/lk20/mat09-01/om-faget/fagets-relevans-og-verdier

Utdanningsdirektoratet. (2020d, juni 29). *Kjerneelementer—Læreplan i matematikk 1.–10. Trinn (MAT01-05)*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2020b, juni 29). *Læreplan i matematikk fellesfag Vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01)*. https://www.udir.no/lk20/mat09-01

Utdanningsdirektoratet. (2021a). *2.2 Kompetanse i fagene*. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/kompetanse-i-fagene/?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2021b). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del?kode=mat09-01&lang=nno

Utdanningsdirektoratet. (2021c, september 22). *Slik ble læreplanene utviklet*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/slik-ble-lareplanene-utviklet/

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy Into Practice Through the World of Textbooks*. Springer Science & Business Media.

van den Ham, A.-K., & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, *59*, 133–140. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.07.005

Zhang, D., & Qi, C. (2019). Reasoning and proof in eighth-grade mathematics textbooks in China. *International Journal of Educational Research*, *98*, 77–90. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.08.015

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 165–182. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6

Lærebøkene som analyseres

Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T., & Vie, S. M. (2020). *Matematikk 1T.* Aschehoug & Co. (W. Nygaard).

Kalvø, T., Opdahl, J. C., Skrindo, K., & Weider, Ø. J. (2020). *Mønster matematikk 1T.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Osnes, E. R., Jacobsen, R. B., & Pedersen, T. (2020). *Sinus 1T matematikk.* Oslo: Cappelen Damm AS.

VEDLEGG

Vedlegg 1: Fakta om lærebøkene

Mønster 1T (Gyldendal)

	Sider i teoridelen	Sider i oppgavedelen	Sider totalt	Stikkord
Kap. 1: Tall og regning	**38**	**14**	**52**	**Tall, mengder, prosent, bevis, problemløsning**
Kap. 2: Likninger og andregradsuttrykk	**47**	**15**	**62**	**Likning: grad 1, grad 2, fullstendig kvadrat, faktorisering, forkorting**
Kap. 4: Algebra	**45**	**11**	**56**	**Polynomdivisjon, likningssystem, ulikheter**
Kap. 3: Funksjoner	71	29	100	Funksjoner: *lineær-*, *polynom-*, *eksponential-*, *potens-*, *rasjonal-*, modellering og regresjon
Kap. 5: Vekstfart og derivasjon	42	24	66	Gjennomsnittlig vekstfart, momentan vekstfart, derivasjon
Kap. 6: Trigonometri	39	21	60	Trigonometri, enhetssirkelen, arealsetningen, sinussetningen, cosinussetningen
Totalt	282	114	396	
Totalt i algebrakapitler (Uthevet)	**130**	**40**	**170**	

Boka har 496 sider og 100 av sidene er utelatt fra tabellen over. Disse sidene omhandler «innføring av Python» på 42 sider, «Geogebra på 1-2-3» på 8 sider, «Fasit» på 38 sider, «Stikkord» på 2 sider, «Læreplan» på 3 sider og Innledningen på 7 sider.

Matematikk 1T (Aschehoug)

	Sider i teoridelen	Sider i oppgavedelen	Sider totalt	Stikkord
Kap. 1: Tall	**36**	**9**	**45**	**Tallmengder, tallmønstre, algoritmer, potenser, standardform, bevis**
Kap. 2: Algebra	**37**	**13**	**50**	**Bokstavuttrykk, kvadratsetninger, faktorisering, brøk, formler, figurtall**
Kap. 3: Likninger	**39**	**13**	**52**	**Likning: grad 1, grad 2, Formelregning, abc- formelen, nullpunktfaktorisering, polynomdivisjon**
Kap. 5: Likningssystemer og ulikheter	**27**	**11**	**38**	**Lineære likningssystem, flere enn to ukjente, ikke-lineære likningssystem, lineære ulikheter, polynomulikheter, rasjonale ulikheter**
Kap. 4: Funksjoner	59	15	74	Funksjoner: *lineære-, polynom-, rasjonale-, potens-, og eksponential-*, vekstfart, den deriverte
Kap. 6: Modellering	27	10	37	Matematiske modeller, regresjon, modellering i praksis
Kap. 7: Trigonometri	38	13	51	Pytagoras, formlikhet, tangens, sinus og cosinus, arealsetningen, sinussetningen, cosinussetningen
Totalt	264	84	347	
Totalt i algebrakapitler (Uthevet)	**139**	**46**	**185**	

Boka har 423 sider og 76 av sidene er utelatt fra tabellen over. Disse sidene omhandler «Eksamenstrening» på 19 sider, «Fasit» på 35 sider, «Register» på 3 sider, «Bildeliste» på 1 side, «Geogebra i 1T» på 8 sider, «Viktige Python- kommandoer» på 3 sider og Innledningen på 7 sider.

Sinus 1T (Cappelen Damm)

	Sider i teoridelen	Sider i oppgavedelen	Sider totalt	Stikkord
Kap. 1: Formler og likninger	**48**	**22**	**70**	**Regnerekkefølge, variabler, likninger, identiteter, likningssystem, formler, rette linjer, grafer**
Kap. 2: Faktorisering	**24**	**10**	**34**	**Brøk, kvadratsetningene, faktorisering, heltallsmetoden, fullstendig kvadrat, rasjonale uttrykk**
Kap. 3: Andregrads-likninger	**42**	**20**	**62**	**Funksjon, grafisk løsning, kvadratrøtter og røtter av høyere orden, andregradslikninger, andregradsformelen, nullpunkter, ikke-lineært likningssett**
Kap. 4: Tredjegrads-likninger og ulikheter	**48**	**18**	**66**	**Ulikheter, polynomfunksjon, polynomdivisjon, faktorisering av polynomer, rasjonale likninger, rasjonale ulikheter**
Kap. 5: Modeller og funksjoner	51	34	85	Lineære modeller, regresjon, **potenser, prosentregning,** Eksponentialfunksjoner, Potensfunksjoner, Rasjonale funksjoner
Kap. 6: Vekstfart og derivasjon	40	25	65	Gjennomsnittlig vekstfart, momentan vekstfart, grenseverdier, derivasjon, funksjonsdrøfting
Kap. 7: Trigonometri	35	22	57	Sinus, cosinus, tangens, arealsetningen, sinussetningen, cosinussetningen
Totalt	288	151	439	
Totalt i algebrakapitler (Uthevet)	**162**	**70**	**232**	

Boka har 478 sider og 39 av sidene er utelatt fra tabellen over. Disse sidene omhandler Fasit» på 31 sider, «Stikkord» på 3 sider og innledningen på 5 sider.

Vedlegg 2: Formler i Excel, korrelasjonstest

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1				MDI				MTF						
2	Oppgaver		KPF	CTP	AMC	verdi	LavH	LavP	HøyP	HøyM	Verdi			
3														
4	Likninger											SIGNIFIKANSTEST		
5	Utforsk s. 62				1	3				1	4	Korrelasjon	r =	0,59
6	Utforsk s. 64			1		2			1		3	Frihetsgrader	v =	451
7	Reflekter s.65			1		2			1		3	Absolutt t-verdi	t =	15,59
8	Reflekter s.69			1		2			1		3	Signifikansnivå	p =	0,000
9	#2.1													
10	a)			1		2		1			2			
11	b)			1		2		1			2			
12	c)			1		2		1			2		r= 0,64, p < 0.001	
13	d)			1		2		1			2			
14	#2.2													
15	a)			1		2			1		3			

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1				MDI				MTF						
2	Oppgaver		KPF	CTP	AMC	verdi	LavH	LavP	HøyP	HøyM	Verdi			
3														
4	Likni											SIGNIFIKANSTE		
5	Utforsk s.				1	=HVIS(E5=1;2;1)				1	=HVIS(G	Korrelasjon	r =	=PEARSON(F5:F589;K5:K589)
6	Utforsk s.			1		=HVIS(E6=1;2;1)			1		=HVIS(G	Frihetsgrader	v =	=ANTALL.HVIS(K:K;">0")-2
7	Reflekter s			1		=HVIS(E7=1;2;1)			1		=HVIS(G	Absolutt t-verdi	t =	=ABS(N5*ROT(N6))/(ROT(1-N5^2))
8	Reflekter s			1		=HVIS(E8=1;2;1)			1		=HVIS(G	Signifikansnivå	p =	=T.FORDELING.2T(N7;N6)
9	#2.1													
10	a)			1		=HVIS(E10=1;2;1)		1			=HVIS(G			
11	b)			1		=HVIS(E11=1;2;1)		1			=HVIS(G			
12	c)			1		=HVIS(E12=1;2;1)		1			=HVIS(G			
13	d)			1		=HVIS(E13=1;2;1)		1			=HVIS(G			
14	#2.2													
15	a)			1		=HVIS(E15=1;2;1)			1		=HVIS(G			
16	b)			1		=HVIS(E16=1;2;1)			1		=HVIS(G			