DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

BACHELOROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering:

M-LEKTOR/Realfag

Vårsemesteret, 2022

Åpen ~~/ Konfidensiell~~

Forfatter: Petter Valstad og Mona Helle

....
(signatur forfatter)

Fagansvarlig: David Ploog

Veileder(e): David Ploog

Tittel på bacheloroppgaven: Veier i Grafer

Engelsk tittel: Walks in Graphs

Studiepoeng: 10

Emneord:

- Grunnleggende grafteori
- Grafteori i skolen
- Eulers grafteori
- Hamiltons grafteori

Sidetall: 40

+ vedlegg/annet: ....

14.05.22
Stavanger, ...
dato/år

Abstract

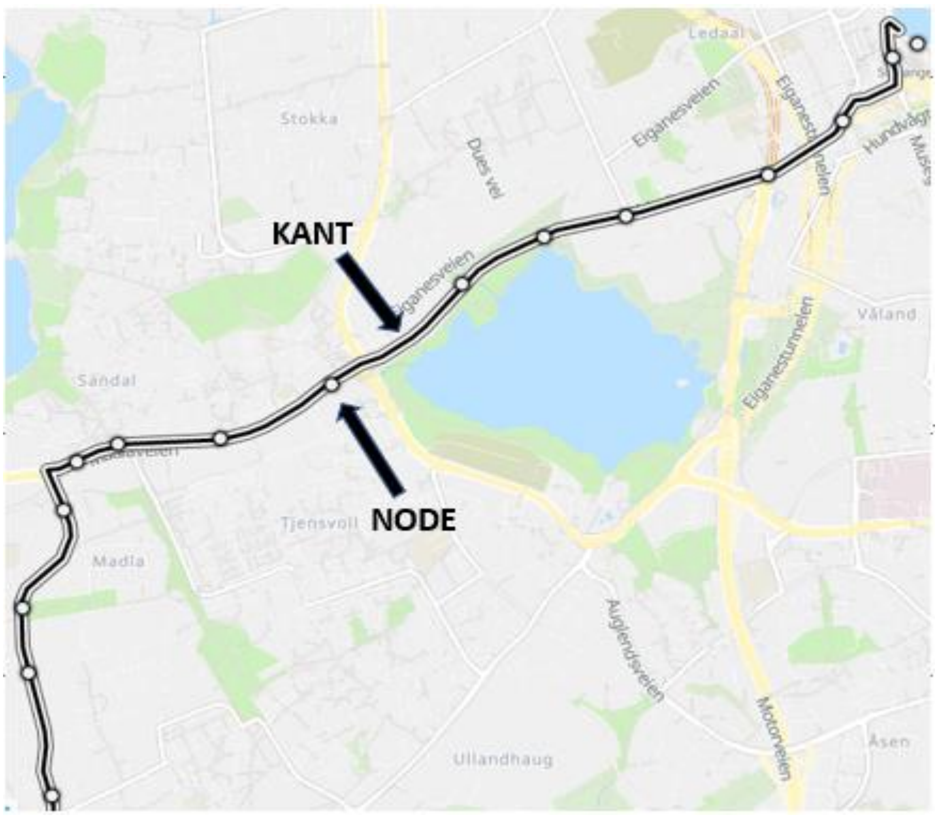
I denne teksten skal vi se på grunnleggende grafteori, hovedsakelig Eulers grafteori og tilstrekkelige Hamilton-kriterier, hvor vi kommer til å gå mer i dybden på egenskapene deres og hvordan de kan bli implementert innenfor både grunnskole og videregående skole.

Innholdsfortegnelse

DEL 1 GRUNNLEGGENDE GRAFTEORI

1.1. Hva er en graf?

Begrepet graf blir definert ulikt i forskjellige kontekster, noe som gjør det viktig å se nærmere på hva en graf tilsier innenfor grafteori. Vi kan starte med et praktisk eksempel for å forklare hva en graf tilsier. En bussrute består av et startpunkt og et endestopp med en rekke ulike stopper imellom. Stoppene blir kalt *noder* i en graf, hvor reisen fra node til node kalles for *kanter* (Se figur 1.1). Kort oppsummert, en graf er en representasjon av en mengde noder og hvordan de er festet sammen av et antall kanter (Wilson, 1996).
Disse grafene kan fremstille ulike scenarioer, hvor et eksempel kan være et diagram av vennskap på jobb. I dette scenarioet vil nodene være personer, hvor kantene forbinder venner sammen (Bondy & Murty, 1982).



Figur 1.1.1: En graf i en form av en bussrute inkludert med rutens holdeplasser

1.2. Grunnleggende begreper

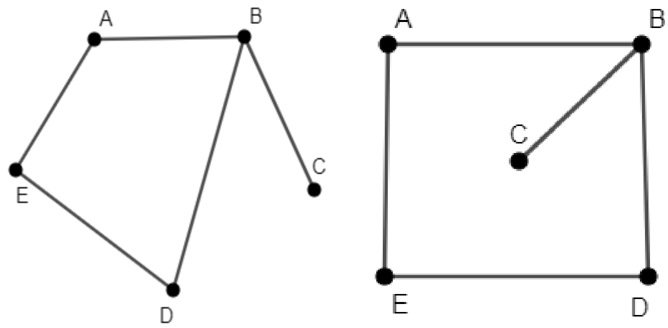
Videre skal vi definere en graf litt grundigere, samt presentere relevante begreper.

En *graf G* består av en mengde *N* av elementer kalt noder, og en mengde *K* av elementer kalt kanter. Mer presist er hvert element i *K* en delmengde av *N*, bestående av to noder. Vi noterer en graf ved *G = (N, K),* hvor *N* står for nodemengden og *K* står for kantmengden (Biggs, 2004). Alle grafene i denne oppgaven vil være endelige mengder.

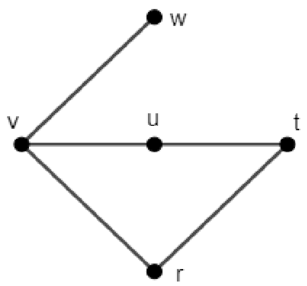
Eksempel A: Vi har en graf G_1 = (*N*, *K*) gitt ved mengdene *N* og *K*:

N = {A, B, C, D, E},   *K* = {{A, B}, {A, E}, {B, C}, {B, D}, {D, E}}

Hvordan grafen blir illustrert er ikke relevant. Det som er viktig er hvilke noder som er festet sammen med hverandre (Heinold, 2018). På figur 1.2.1 vises to ulike eksempler på hvordan denne grafen i eksempel A kan illustreres.



Figur 1.2.1: To ulike illustrasjoner av G_1, graf G og graf H



Figur 1.2.2: G_2

Hvis vi definerer de to illustrasjonene av G_1 som to ulike grafer, G og H, vil de grafene være *like.* To grafer er like hvis nodemengden og kantmengden er identiske, dvs. *G = (N, K)* og *H = (N', K')* er like hvis *N = N'* og *K = K'* (Bondy & Murty, 1982)

Grafene G_1 og G_2 (figur 1.2.1 og 1.2.2) er også like, med unntak av valgte navn på nodene. Vi sier i dette tilfelle at G_1 og G_2 er *isomorfe*. Med andre ord, to grafer er isomorfe om det finnes en en-til-en korrespondanse mellom nodemengden og kantmengden til grafene. I praksis vil dette si at vi er hovedsakelig interessert i de strukturelle egenskapene til grafene, og som nevnt tidligere, ikke hvordan de blir illustrert (Bondy & Murty, 1982).

Def. *isomorfi***:** Vi kan presisere ytterligere, grafene G_1 og G_2 er *isomorfe* dersom det eksisterer en bijektiv funksjon, hvor *f* **:** *N(*G_1*)* → *N(*G_2*)* og *K(*G_1*)* → *K(*G_2*)* slik at to noder *u* og *v* er forbundet i G_1 hvis og bare hvis f(u) og f(v) er forbundet i G_2 (Dahl, 2001; Wilson, 1996).

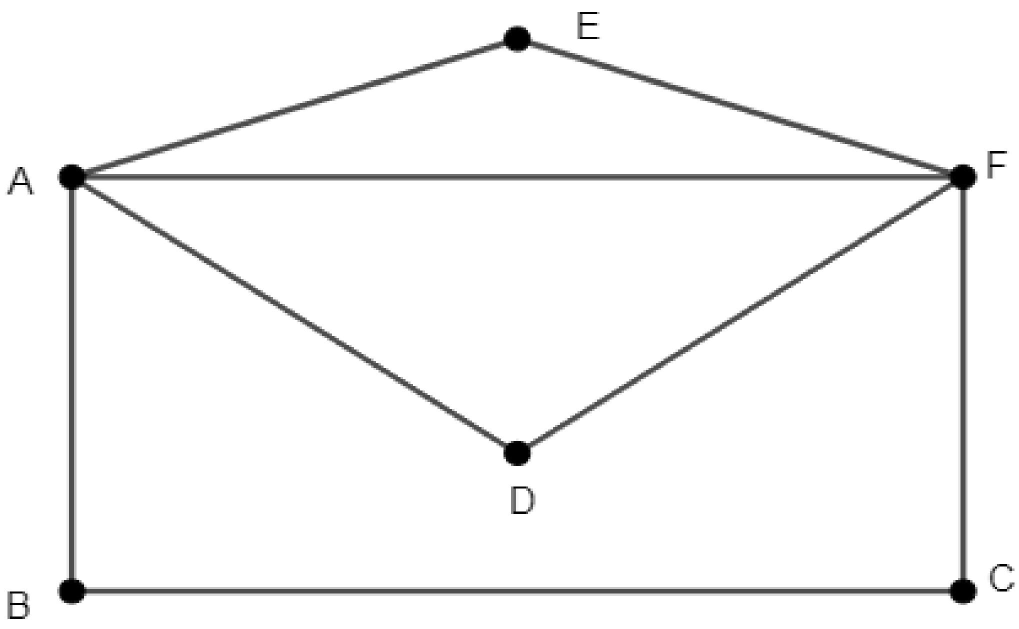
$$\boldsymbol{G_1} \leftrightarrow \boldsymbol{G_2} : \; \mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{r}, \mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{v}, \mathrm{C} \leftrightarrow \mathrm{w}, \mathrm{D} \leftrightarrow \mathrm{u}, \mathrm{E} \leftrightarrow \mathrm{t}$$

Et annet relevant begrep innenfor grafteori er naboer. Hvis to noder er forbundet av en kant, så kalles disse nodene for *naboer* (Dahl, 2001)**.** For eksempel, la oss rette blikket tilbake på figur 1.2.1 igjen. Node C er forbundet sammen av en kant med node B, som vil si at de er naboer. Videre ser vi at node E er forbundet med to noder, A og D, som da tilsier at E er nabo med A og D.

Vi er spesielt interessert i antall naboer/kanter hver node har. Dette blir kalt for *graden* til en node, og betegnes med *deg(n)* (Dahl, 2001). Hvis vi igjen ser på figur 1.2.1, kan vi finne ut av graden til node B og E ved å se på antall naboer de ulike nodene har. Ettersom at B har tre naboer vil graden til noden være *deg(*B) = 3, og som sett på tidligere vil graden til node E være 2, *deg*(E) = 2.

Mye av grafteori handler om såkalte veier, noe som vil være veldig viktig også for denne oppgaven. En *vei* er en sekvens P av påfølgende kanter, hvor veien viser en rute fra en node til en annen (tenk bussrute). Veiens *lengde* k er basert på antall kanter sekvensen inneholder, hvor vi kaller den første og siste node i veien for start- og sluttnoden (også kjent som *endenoder*). Videre har vi en *sti*, som er en vei der ingen noder blir brukt flere ganger enn en gang. Helt til slutt har vi en *syklus*, som er en vei som starter og slutter i samme node (Dahl, 2001; Wilson, 1996).

Gjennom figur 1.2.3 kan vi se på noen eksempler på vei, sti og syklus. Merk at selv om stier og sykluser har noen ekstra betingelser, kan begge kategoriserer som veier.



Figur 1.2.3: En graf H

Eksempel B: Vi får utgitt tre veier i graf H (figur 1.2.3). Bestem lengden på veiene og om de kan kategoriseres som en sti eller syklus.

1) **P:** A → B → C

2) **P:** B → C → B → A

3) **P:** A → B → C → F → D → A

Besvarelse:

1) Veien starter i node A og slutter i node C, hvor sekvensen bruker to kanter. I dette tilfelle blir ingen noder brukt flere ganger enn en gang, som tilsier at vi kan kategorisere den som en sti med lengde 2.

2) Veien starter i node B og slutter i node A, hvor sekvensen bruker tre kanter. Fordi veien starter og slutter i forskjellige noder blir den ikke kategorisert som en syklus. I tillegg blir node B brukt to ganger, som tilsier at vi heller ikke kan kategorisere den som en sti. Med andre ord, dette er en vei på lengde 3.

3) Veien starter i node A og slutter i node A, hvor sekvensen bruker fem kanter. I dette tilfellet starter og slutter veien i samme node, som vil si at vi kan kategorisere den som en syklus på lengde 5.

1.3. Trær, enkle grafer og multigrafer

Vi skal videre se på noen generelle strukturer av grafer og egenskapene deres.

En graf er *sammenhengende* så lenge alle nodene i grafen er forbundet sammen av en vei. Om en slik vei ikke eksisterer er grafen ikke sammenhengende og består av ulike komponenter (Dahl, 2001; Heinold, 2018).

Figur 1.3.1: Fra venstre; graf G og graf H

Figur 1.3.1 illustrerer en sammenhengende graf G og en ikke sammenhengende graf H bestående av tre komponenter.

En graf kategoriseres som et *tre* hvis den oppfyller to betingelser: Grafen skal ikke inneholde noen mulige sykluser, og grafen må være sammenhengende (Biggs, 2004; Dahl, 2001).

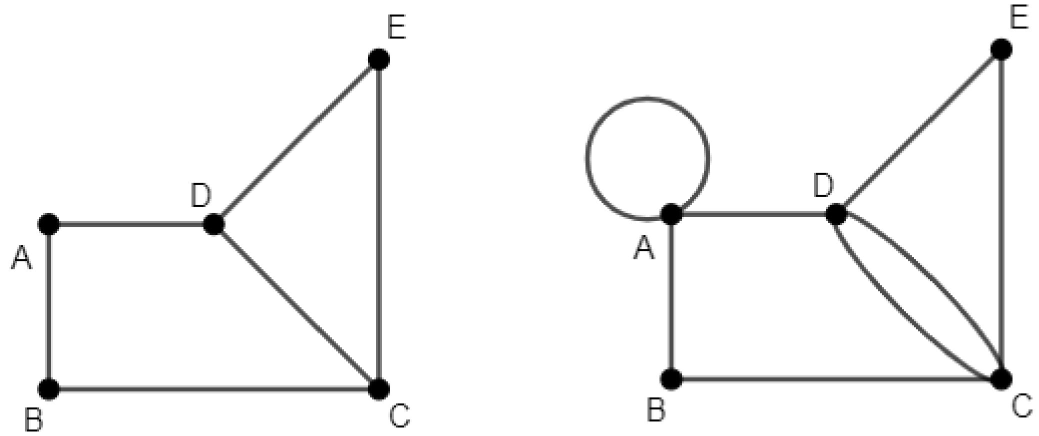
Eksempel C: La oss se på grafene i figur 1.3.1. Kan de kategoriseres som et tre?

Besvarelse: Med tanke på betingelsene for å kategorisere en graf som et tre, vil graf G fra figur 1.3.1 lande innenfor denne kategorien. Graf H vil derimot ikke oppfylle betingelsene da den er ikke sammenhengende og i tillegg inneholder en mulig syklus.

.

Vi har to andre begreper, løkker og parallelle kanter, som vi må definere før vi går videre til enkel graf og multigraf. En *løkke* er en kant som starter og slutter i samme node. Med andre ord, en kant som ikke forbinder startnoden med andre noder. *Parallelle kanter* er to distinkte kanter som har samme start- og sluttnode (Dahl, 2001; Wilson, 1996).

En graf G er en *enkel graf* hvis den har ingen løkker eller parallelle kanter. Hvis en graf G inneholder løkker og/eller parallelle kanter, defineres graf G som en *multigraf* (Wilson, 1996). Se nedenfor på figur 1.3.2:



Figur 1.3.2: Fra venstre, en enkel graf og en multigraf

Alle grafer kan kategoriseres som multigrafer, men ikke alle grafer kan kategoriseres som enkle grafer. I denne oppgaven vil vi jobbe mest med sammenhengende multigrafer som er hovedsakelig lukket. Enhver graf som starter og slutter i samme node blir kalt *lukket* (Robinson, 2006)**.**

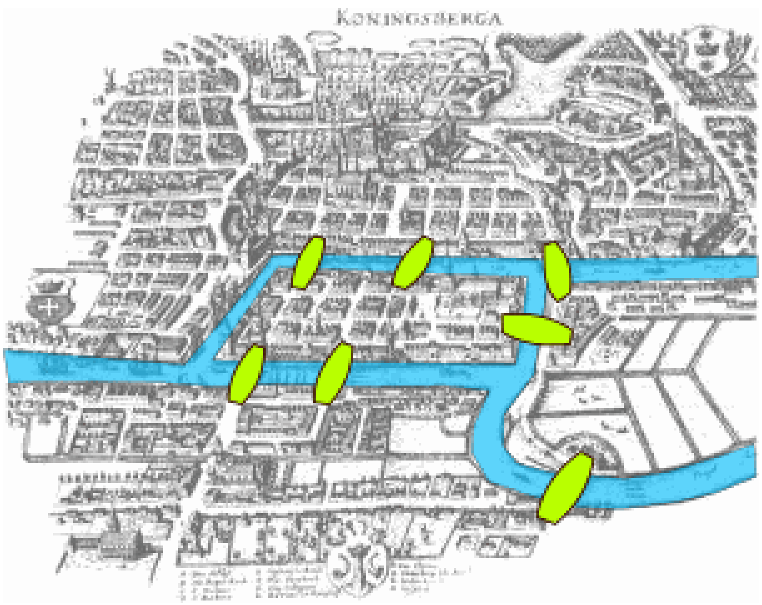
DEL 2 EULERS GRAFTEORI

2.1 Bakgrunn for Eulers grafteori

Konseptet grafteori begynte med Euler, men dette var ikke noe nytt og banebrytende. Før den tid hadde blant annet Gottfried Wilhelm Leibniz (tysk matematiker/filosof 1646-1716), definert **Geometry of positions**, matematiske modeller basert på posisjoner og tilknytningen mellom dem uten å bruke kvantitative mengder (Fleischner, 1990). I dag kalt diskret matematikk.

Leonhard Euler (Sveitsisk matematiker, 1707-1783) fikk høre om gåten fra byen Königsberg i gamle Preussen, der øyen Kneiphof var sammenbundet til fastlandet med 7 broer (figur 2.1.1). Lenge hadde gåten vært om det var mulig å gå en rundtur i byen uten å måtte gå over en av de samme 7 broene to ganger. Mange mente det var umulig, noen var usikre, men ingen hadde bevis på at det ikke gikk an. Euler mente det måtte være en enklere måte å løse problemet på, enn å skrive opp de forskjellige rutene man kunne ta. Med 7 broer, ville summen av kombinasjoner av ruter være stor. Det ville vært tidkrevende og tungvint. Løsningen ville også være irrelevant i for eksempel andre problemer med flere broer.
Han mente at det kunne være en enkel måte å sjekke om man kunne krysse kun en bro én gang på en rundtur, uansett hvor mange broer det måtte være, hvor mange forskjellige ruter man kunne ta og hvilke former elven ville ha (Fleischner, 1990).

Figur 2.1.1: Broene i Königsberg (wikipedia.org)



For å separere de forskjellige broene og plassene de førte til, brukte Euler bokstaver. Til de enkelte plassene brukte han A, B, C og D, og broene denoterte han som a, b, c, d, e, f og g (figur 2.1.2). Veiene denoterte han som AC, hvis man gikk fra plass A til plass C via broen c eller d. Og hvis man gikk fra C til D via g, skrev han CD. Hvis man gikk hele veien, fra A til C til D, denoterte Euler veien som ACD. For å besøke alle plassene ACDB, ville man måtte gå over 3 broer.

Likeledes, hvis man hadde hatt 5 plasser måtte man gått over 4 broer, altså én størrelse mindre bro enn plass uansett hvor mange plasser man hadde.

I denne oppgaven tok han ikke hensyn til hvor mange ganger man kunne krysse broene, men antall ganger man besøkte plassen via de forskjellige broene. Plass D har 3 broer tilknyttet seg, og med andre ord må bokstaven D stå notert to ganger på veien man skulle gå. A måtte stått 4 ganger, B to ganger og C to ganger. Siden det er 7 broer, skulle man ikke ha mer enn åtte bokstaver som denoterte plassene. Men når man summerer dem opp; DDAAABBCC = 9 bokstaver, får man én bokstav mer enn det i utgangpunktet burde være.

Figur 2.1.2: Broene i Königsberg med notasjoner (Fleischner, 1990).

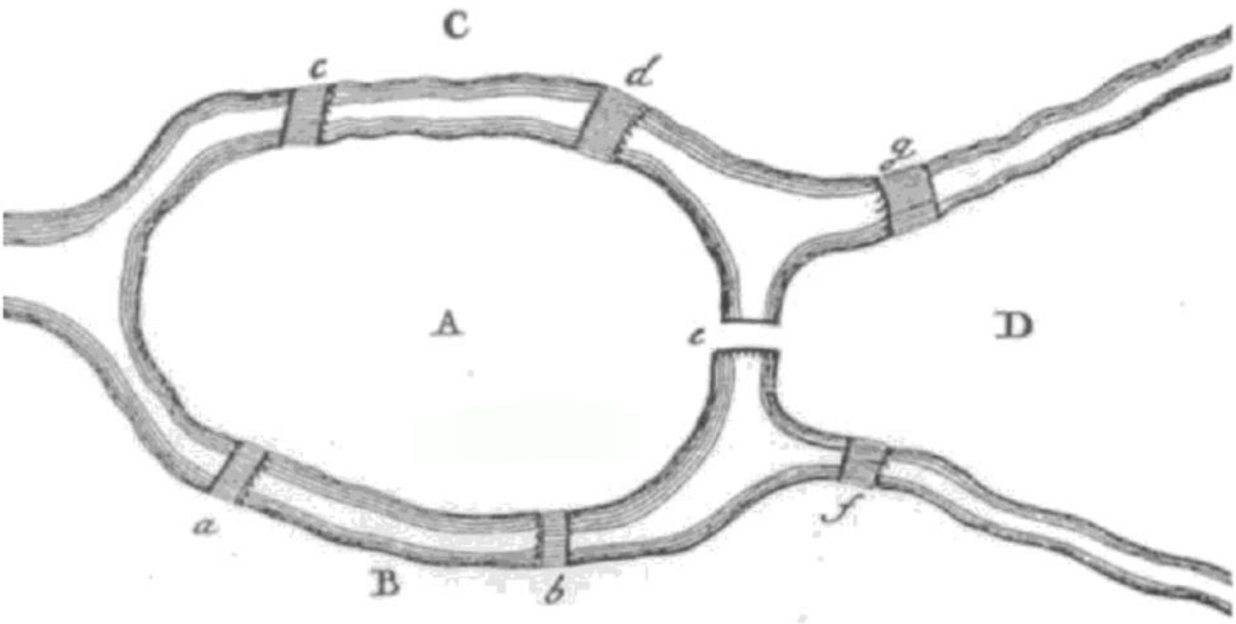
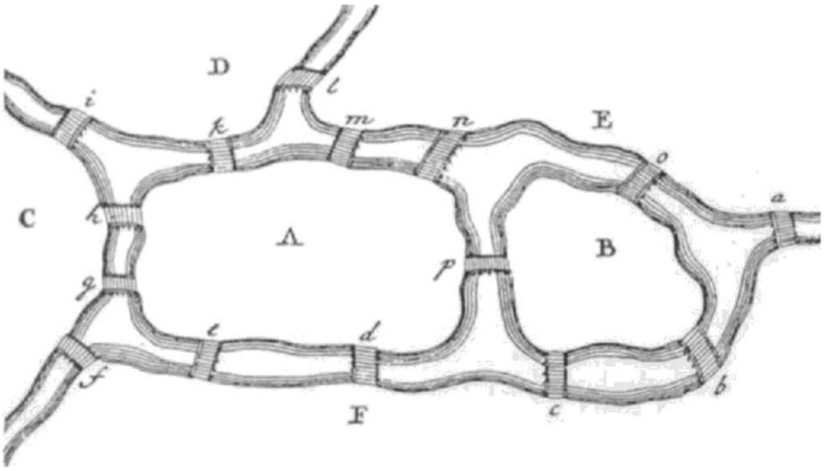


Fig. 1.

Deretter undersøkte han et annet dilemma med flere plasser og broer (figur 2.1.3):

Figur 2.1.3 (Fleischner, 1990)



Der lagde han et oppsett med plassene, antall broer de var tilknyttet, og markerte plassene som hadde partalls broer tilknyttet seg. På stedene med partalls broer tilknyttet seg delte han antall broer på 2, og skrev ved siden av. Stedene med oddetalls broer tilknyttet seg, plusset han på 1 og delte på 2. Siden det er 15 broer i dette dilemmaet, kunne ikke antallet i veisekvensen overstige 16.

A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3

= 16

Siden tallet til høyre stemte overens med antallet sekvensen ikke kunne overstige, så han at det ville være mulig med en rundtur der man krysset hver bro kun én gang, hvis og bare hvis man startet ved en av plassene som ikke var markert (oddetalls broer tilknyttet), enten D eller E. For eksempel, EaFbBcFdAeFfCgAhCiDlEoBpAnEmAkD, som viser området og broene som blir krysset.

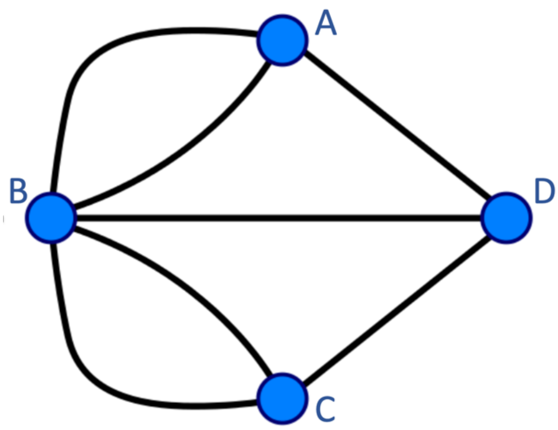
Euler la merke til at numrene ved siden av bokstaven på området summert opp, ble det dobbelte av summen av broene. Det fører til at summen av alle broene som er tilknyttet stedene må være delelig på to, og man kan ikke ha oddetalls antall steder med oddetalls tilknytninger, si 3, 5 eller 7.
Siden summen av alle tilknytningene delt på to skal være lik eller mindre enn antall broer+1, fungerer dette heller ikke med partalls antall steder over 2 med oddetalls tilknytninger, siden

de tilknytningene må legges til 1 før det deles på 2, ellers vil også den summen overstige antall broer+1, henholdsvis med +1, +2, +3 osv.

I de tilfellene med en eller to steder med oddetalls tilknytninger, må veien begynne ved dette stedet eller ett av dem (Fleischner, 1990).

Hvis vi prøver denne teorien med broene i Königsberg, får vi;

Figur 2.1.4: Graf av broene i Königsberg



A	3	2
B	5	3
C	3	2
D	3	2

=9

Summen til høyre blir 9, som er større enn 8 (7 broer +1). Ergo finner vi ingen vei gjennom byen der alle broene kun blir krysset én gang.

2.2 Eulers teorem i grafteori

Vi har tidligere i oppgaven definert hva en vei er innenfor grafteori. For å gi en større forståelse rundt de matematiske bevisene som kommer senere, velger vi å presisere den definisjonen ytterligere.

I denne delen skriver vi *veier* som en sekvens av noder ($n_1, n_2, ..., n_k$), slik at n_i og n_{i+1} er tilgrenset hverandre ($1 \leq i \leq k-1$) med kanter.

Hvis alle nodene er forskjellige, kalles veien en Hamilton-sti. En vei kan besøke en node flere ganger, men i en Eulervei kan man ikke gå tilbake samme kant man allerede har gått (Biggs, 2004).

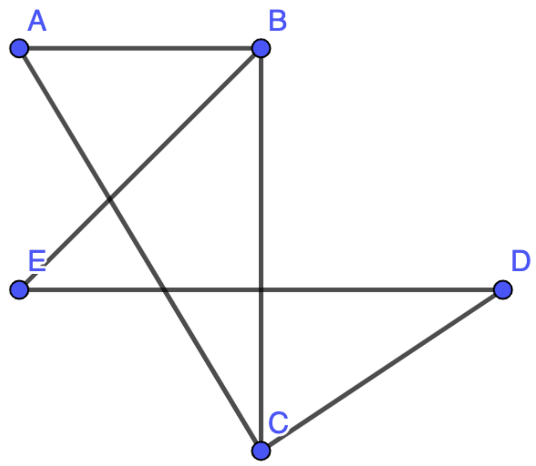
Def. *Eulervei og Eulerkrets:*

1. *Eulervei:* Vi kan tegne en sammenhengende vei mellom nodene uten å gå tilbake, hvis og bare hvis:
   a. Grafen er sammenhengende.
   b. Antallet av nodene i grafen som har oddetalls grad er 0 eller 2, der startnode og sluttnode må være av oddetallsgrad hvis det er 2 noder med oddetallsgrad.

2. *Eulerkrets*: Vi kan tegne en sammenhengende vei mellom nodene uten å gå tilbake, som har samme endenoder hvis og bare hvis:
   a. Grafen er sammenhengende.
   b. Ingen av nodene har oddetalls grad.

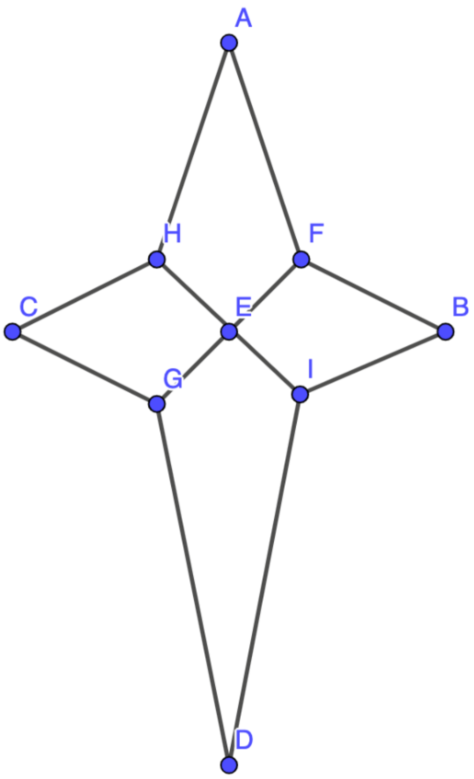
Vi skal se på forskjellige grafer for å se hvilke som er Eulerveier, Eulerkretser og hvilke som ikke er det:

Figur 2.2.1: Graf med Eulervei



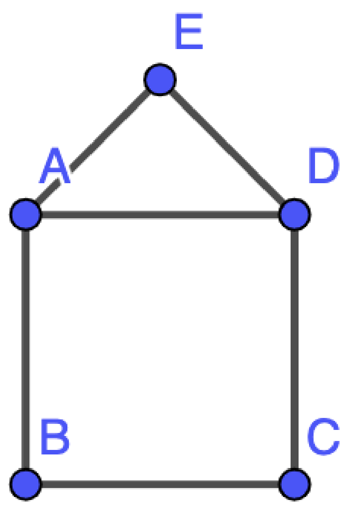
Figur 2.2.1: Her er grader til nodene: deg(A)=2, deg(B)=3, deg(C)=3, deg(D)=2 og deg(E)=2. Siden vi har to noder med oddetalls grad, vet vi med det samme at vi har en Eulervei, der vi begynner ved den ene noden med oddetalls grad og avslutter ved den andre med oddetalls grad, enten B eller C. Det er viktig å notere seg at krysspunkt mellom kantene ikke er noder.

Figur 2.2.2: Graf uten Eulervei eller -krets



Figur 2.2.2: Vi har punktene: deg(A)=2, deg(B)=2, deg(C)=2, deg(D)=2, deg(E)=4, deg(F)=3, deg(G)=3, deg(H)=3 og deg(I)=3. Her kunne vi allerede etter å ha sett node H, visst at vi verken har en Eulerkrets eller -vei.

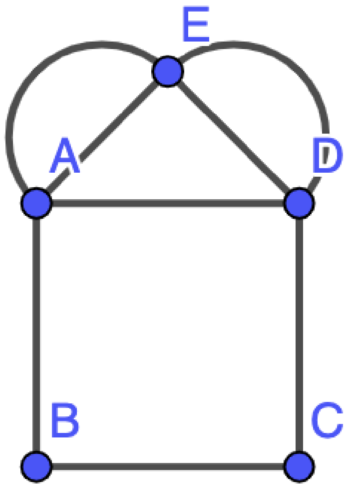
Figur 2.2.3: Graf med Eulervei



Figur 2.2.3: Vi har deg(A)=3, deg(B)=2, deg(C)=2, deg(D)=3 og deg(E)=2. Vi har en Eulervei, men ikke -krets siden vi har to noder med oddetallsgrad. Vi må her også begynne enten med A eller D, og avslutte i den andre.

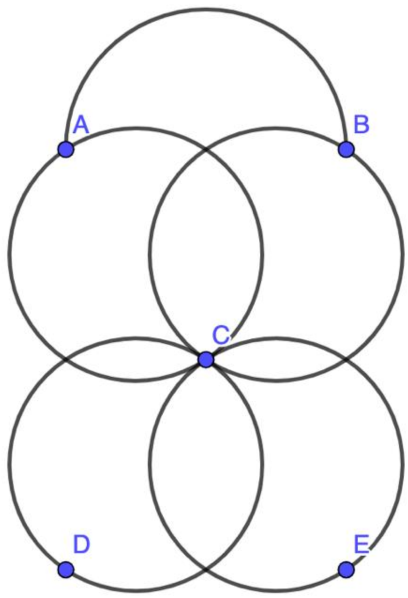
Hvis vi nå tegner en ekstra vei både fra A og D til E;

Figur 2.2.4: Graf med Eulerkrets



Figur 2.2.4: Vi får nå en graf med noder kun med partalls grad, og får dermed en Eulerkrets. Vi kan selv bestemme hvor vi begynner grafen, siden alle noder har både en vei inn og ut for alle gangene du går gjennom det.

Figur 2.2.5: Graf med Eulervei



Figur 2.2.5: Både A og B har oddetalls grad, mens resten av nodene har partallsgrad -> vi har en Eulervei, der veien må begynne i enten A eller B og avslutte i den andre.

Selv om grafen kan se intrikat ut, er det lett å finne ut om vi har en Eulervei eller -krets ved å finne antall noder med oddetalls grad.

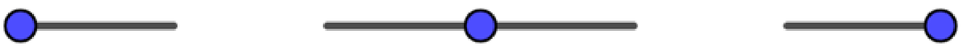
2.3 Eulers teorem og bevis

Teorem 1: En graf er en Eulerkrets hvis og bare hvis den er sammenhengende og alle nodene har partalls grad.

Bevis:

G er Eulersk, C er en y-y Eulerkrets

$x \in C$, $x \neq y$ (x er ikke startnoden)



y-startnode -> én vei ut inn en vei, og ut en annen (2*j) y-sluttnode -> én vei inn

x-node: en vei inn og en vei ut (2*k)

$y = 1+2j+1 = 2(1+j)$ og $x = 2k$

*G e tilkoblet og en ikke-triviell graf

$\forall p \in P(G)$ der grad p er partall

La T være en vei av maksimum lengde i G.

T er en x-y vei. Hvis $x \neq y$ -> $1+2k$, og dette er en motsigelse, derfor må $x=y$.

T=C er en y-y krets, og grafen er Eulersk ✓

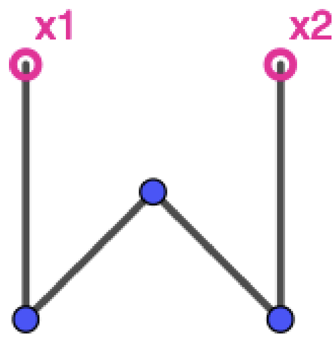
(Math, YouTube, Proof: Graph is Eulerian iff All Vertices have Even Degree | Euler Circuits, Graph Theory, 2020)

Teorem 2: En graf G som er sammenhengende er en Eulervei hvis og bare hvis eksakt to noder i grafen har oddetalls grad.

Bevis:

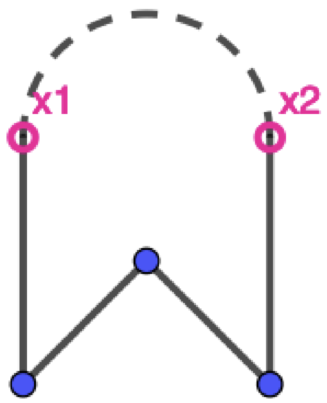
La G=(N(G), K(G)) være en Eulervei. La nodene x_1 og x_2 være start- og sluttnodene av Eulerveien, da det per definisjon må eksistere en Eulervei.

Figur 2.3.1: Eulervei $x_1 - x_2$



Ved å tilføye en kant mellom x_1 og x_2, vil det resultere i en ny graf, la oss kalle den G', som vil være Eulersk siden graden av hver node må være av partallsgrad.

Figur 2.3.2: Eulerkrets



Ved å fjerne denne kanten, må graden til x_1 og x_2 være av oddetallsgrad, siden fjerning av en kant vil resultere i nøyaktig en lavere grad for både x_1 og x_2.
(wikidot.com, 2022)

2.4 Planare grafer og Eulers polyederformel med bevis

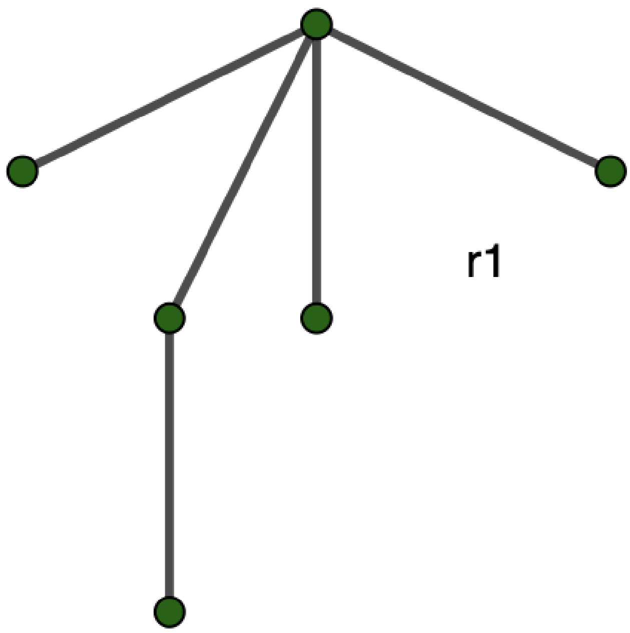
Def. *planar***:** En graf er *planar* dersom vi kan tegne den i planet uten at noen kanter krysser hverandre.

Teorem for Eulers Polyederformel:
For en sammenhengende, planar graf G med n noder, k kanter og r regioner, får vi forholdet
n – k + r = 2

Bevis av Eulers Polyederformel:
La oss først se på trær:
La G´ være et planart tre med n noder, så har G' n-1 kanter, og kun én region (fordi for en lukket region har vi en krets, i motsetning til et tre), så r = 1, da får vi
n – (n-1) + 1 = n – n + 1 + 1 = 2 ✓

Eksempel, figur 2.4.1
n = 6, k = 5, r = 1
6 – 5 + 1 = 2 ✓

Figur 2.4.1: Et tre med én region



For å bevise Eulers formel for en sammenhengende, planar graf, starter vi med en **motsigelse**:

G er en sammenhengende, planar graf av minimum størrelse k, slik at $n - k + r \neq 2$.

G har en krets med kant e => $k > 0$.

Ved å fjerne en kant, kommer vi ikke til å få en graf som ikke er planar, så det trenger vi ikke å tenke på.

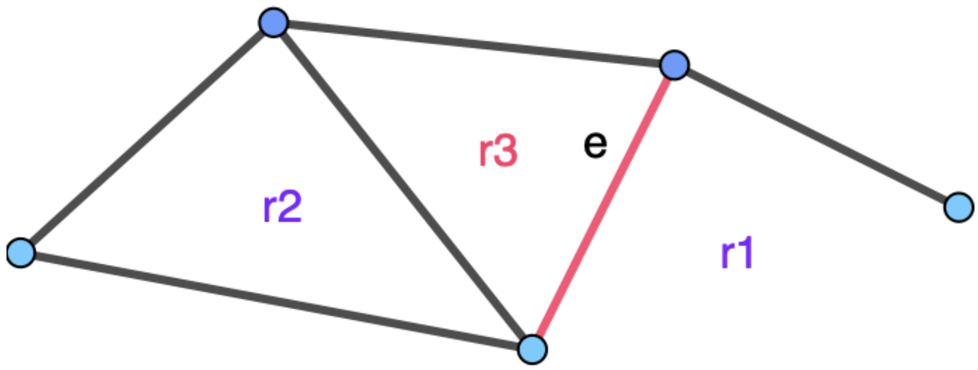
Og hvis vi fjerner en kant i kretsen, har vi ennå en sammenhengende graf.

G – e: noder = n

kanter = k-1

region = r-1, fordi man fjerner en region ved å fjerne en kant.

Figur 2.4.2: r3 forsvinner når man fjerner e.



Vi står igjen med:

$n - (k-1) + (r-1) = 2 \Rightarrow n - k + 1 + r - 1 = 2 \Rightarrow n - k + r = 2$

som er en motsigelse av $n - k + r \neq 2$ ✓

(YouTube, Proof: Euler's Formula for Plane Graphs | Graph Theory, 2020)

DEL 3 HAMILTONS GRAFTEORI

3.1 Bakgrunn for Hamiltons grafteori

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) var en irsk astronom og matematiker, mest kjent for å oppdage kvaternionene.

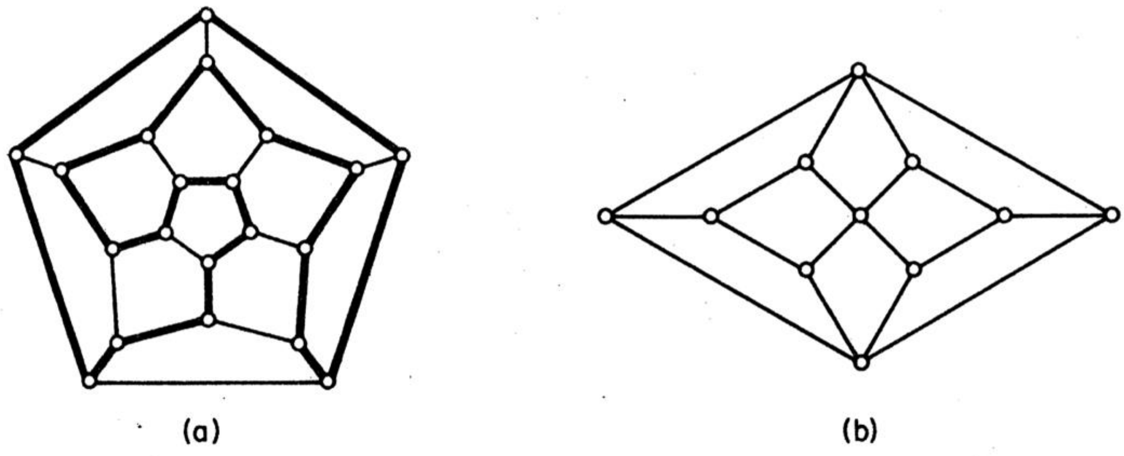
Hamiltonsti og -syklus er oppkalt etter ham, selv om teorien om Hamiltonsti allerede var omtalt før hans tid av Kirkman (Bermond, 2019).

Hamiltonsti, i motsetning til veiene i Eulers grafteori der man kan gå kantene kun én gang, omhandler mest nodene, og hvilken vei man kan gå uten å gå gjennom samme node mer enn en gang. En Hamiltonsyklus er en sti som begynner og slutter i samme node, og er lukket (Fleischner, 1990).

Den type problemstilling blir ofte referert til som handelsreisendeproblemet eller det kinesiske postbudets problem.

Første gang Hamilton nevnte den type graf, var i et brev til hans venn Graves i 1856, som en matematisk lek der man skulle merke 5 nabo-noder på figuren, og kunne tegne en sammenhengene, lukket vei gjennom dem. Dodekaederet inneholder flere Hamiltonsykluser, mens Herschel-grafen ikke inneholder noen (Bondy & Murty, 1982).

Figur 3.1.1 a) Et dodekaeder og 3.1 b) En Herschel-graf (Bondy & Murty, 1982)



Det spesielle med Hamiltons grafteori, er at det ikke funnet fullstendige betingelser som gjør det enkelt å finne ut om grafen er Hamiltonsti eller -syklus. Dette kalles **Hamiltonsti problemet** og **Hamiltonsyklus problemet**.

Det er da og flere som har laget teoremer for visse kriterier som må være oppfylt for å komme under begrepet Hamiltonsti og/eller -syklus, og vi skal gå gjennom noen av disse.

3.2 Introduksjon og begreper

For en graf G, en Hamiltonsti eller -syklus i G er en sti/syklus som inneholder **alle nodene i G.**

Def. *Kutt-node*:
En node i en sammenhengende graf, som ved å fjerne den, vil gjøre grafen usammenhengende, kalles en *kutt-node*.

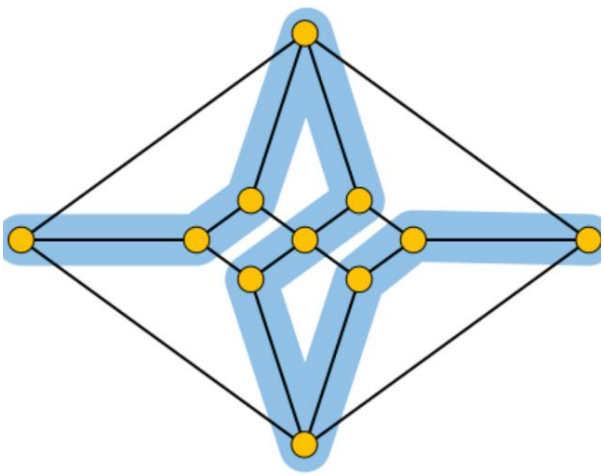
Def. *Kutt-kant:*
En kant i en sammenhengende graf, som ved å fjerne den, vil gjøre grafen usammenhengende, kalles en *kutt-kant*.

For en graf skal være en Hamilton-graf, kan ingen av nodene være en *kutt-node*.
En *kutt-node* er en node som holder grafen sammenhengende, og ved å fjerne denne noden vil grafen være usammenhengende. Likeledes er en *kutt-kant* en kant som gjør grafen usammenhengende ved å fjerne den.

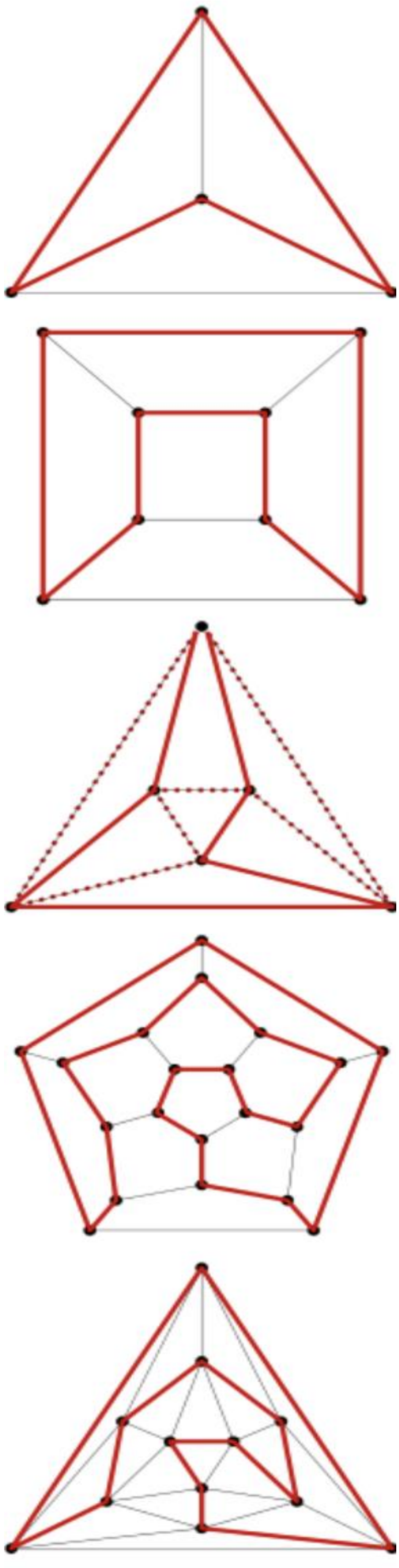
Def. *Hamiltonsti***:** En graf G med en sti gjennom alle nodene i grafen eksakt én gang, men startpunkt ≠ sluttpunkt. En graf G som inneholder en *Hamiltonsti*, kalles en sporbar graf.

Def. *Hamiltonsyklus***:** En graf G med en sti gjennom alle nodene i grafen eksakt én gang, og startpunkt = sluttpunkt. Alle nodene må også ha grad (deg(n)) ≥ 2.
Hvis en graf G inneholder en *Hamiltonsyklus*, er grafen Hamiltonsk.

Figur 3.2.1, Eksempel på Hamiltonsti



Figur 3.2.2, Eksempler på Hamiltonsykluser



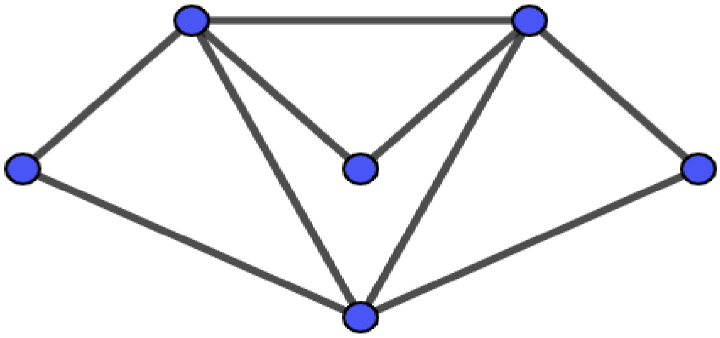
G = (N, K) der N er noder og K er kanter.

Orden: |N|

Mengde: |K|

Også her går vi ut ifra at grafen er sammenhengende.

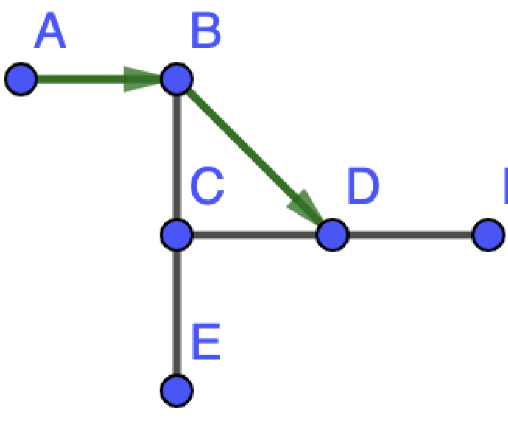
Figur 3.2.3, Eksempel på orden og mengde i G



Orden = 6 (noder), Mengde = 9 (kanter)

Def *distanse***:** Hvis G har mengden p, har en Hamiltonsyklus *distansen* p, og en Hamiltonsti har *distansen* p - 1. Vi går ut ifra at $p \geq 3$.

Figur 3.2.4, Eksempel på distanse i G



Distansen mellom node A og D:

$d_G(A, D) = 2$

som er den korteste veien fra A til D som vist i figur 3.2.4.

Vi skriver mengden p = (A, B, D) og |p| = d(A, D)

$d_G(A, A) = 0$

Den *lengste distansen* mellom to punkt: **diam(G)**

3.3 Diracs teorem for Hamilton-grafer

Gabriel Andrew Dirac (1925-1984) var en britisk-ungarsk matematiker som hovedsakelig jobbet med grafteori.

I 1952 ga han en tilstrekkelig betingelse for at en graf inneholdt en Hamiltonsyklus.

Teoremet sier at ved en n-node-graf, der hver node har minst grad n/2, må inneholde en Hamiltonsyklus (Bondy & Murty, 1982).

Diracs teorem for Hamilton-grafer:

La G være en graf med orden $n \geq 3$.

Hvis $\deg(G) \geq n/2$ er G en Hamilton-graf.

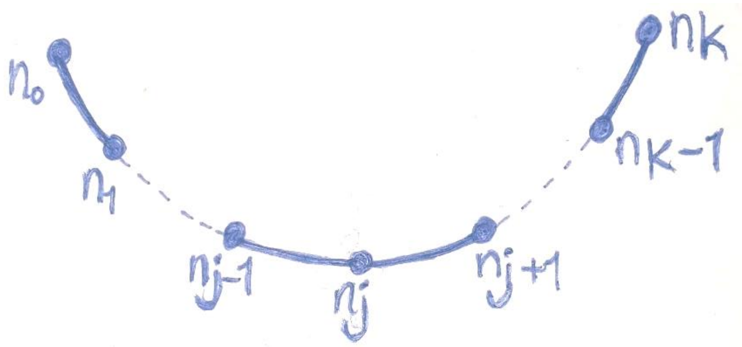
Bevis av Diracs teorem for Hamilton-grafer:

La G(N, K)være en graf med orden $n \geq 3$.

La S = $(n_0, n_1, ..., n_k)$ være den lengste stien i G.

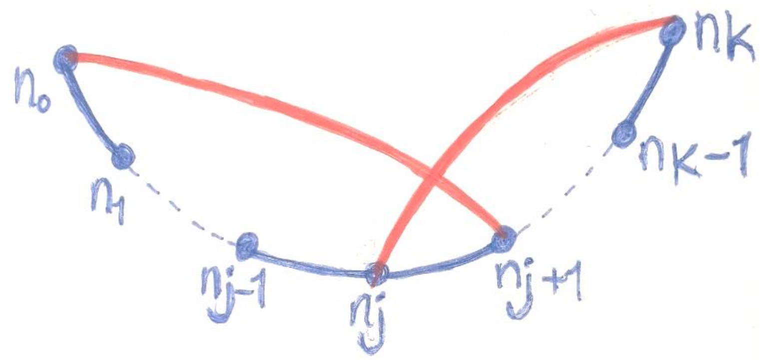
$\forall n \in N(n_0) \cup N(n_k), n\ ligger$ på $S,$ der N = nabonode

Figur 3.3.1, Grafen G, med stien $S(n_0,n_k)$



$\exists j, 0 \leq j \leq k-1 \quad s.a. \quad n_j n_k \in K(G) \quad og \quad n_{j+1} n_0 \in K(G)$ (Figur 3.3.2)

Figur 3.3.2, Går utfra at vi har en syklus i G



$\deg(n_0) + \deg(n_k) + 1(n_k) \leq k + 1$

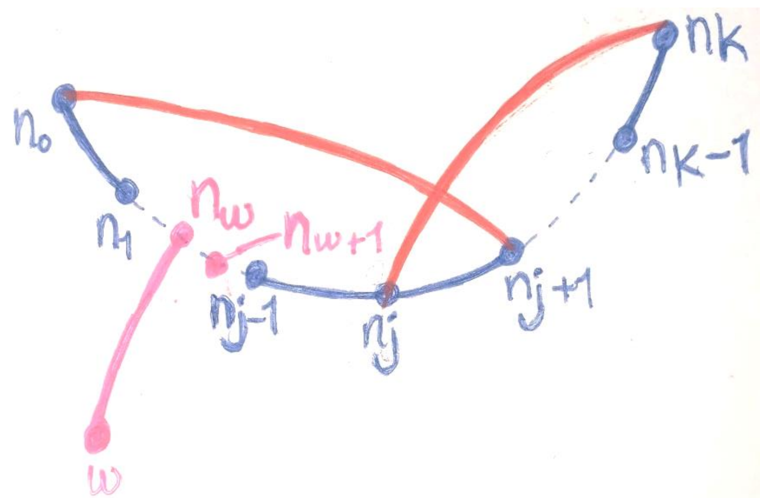
$derfor\ m$å $\quad \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1 \leq k + 1$

$n + 1 \leq k + 1$ → dette er en motsigelse, siden det kan ikke eksistere flere noder i stien (k) enn det gjør i grafen (n), og vi har bevist at vi har en syklus i grafen G.

Nå gjenstår det kun å bevise at grafen er en Hamilton-graf:

Vi lager en ny sti i grafen G, med et nytt punkt w (Figur 3.3.3).

Figur 3.3.3 Grafen G, med sti fra n_{w+1} - w

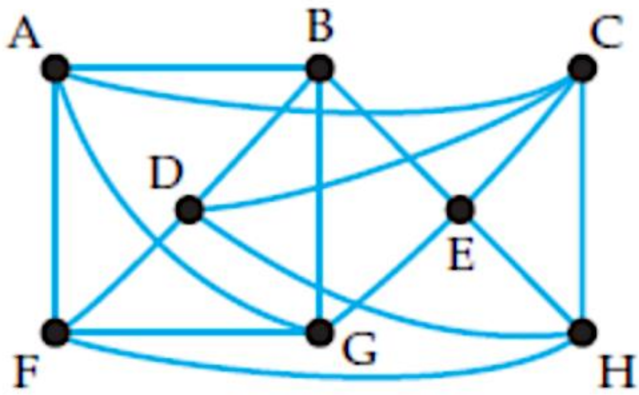


Da får vi stien fra n_{w+1} – w med lengde k + 1, siden vi har fått en ekstra kant.

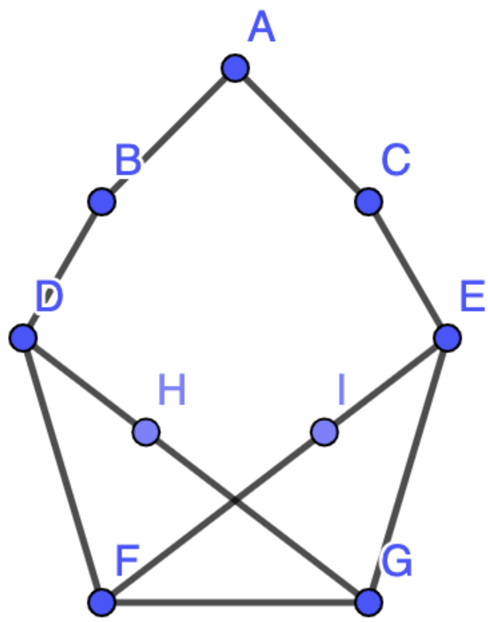
Dette er også en motsigelse siden vi begynte med den lengste stien S med k-lengde, og hvis syklusen vår ikke inneholder alle nodene i grafen, kan vi finne en lengre vei, som er en motsigelse. ✓

(Math, Proof: Dirac's Theorem for Hamiltonian Graphs | Hamiltonian Cycles, Graph Theory, 2019)

Figur 3.3.4, Illustrasjon av en Hamilton-graf der Diracs betingelser er oppfylt; 8 noder/2 ≤ (deg)4



Figur 3.3.5, Illustrasjon av en Hamilton-graf der Diracs betingelser ikke er oppfylt; 9noder/2 ≥ deg(A)



3.4 Ores teorem for Hamilton-grafer

I 1960 kom den norske matematikeren Øystein Ore fram med Ores teorem, som inneholdt en tilstrekkelig betingelse for at en graf skulle være en Hamilton-graf.
Hovedsakelig går dette beviset på at ved nok kanter i en graf, vil grafen inneholde en Hamiltonsyklus.
Teoremet ser på summen av graden på et par noder som **ikke** er naboer. Hvis hvert slikt par har summen som er minimum likt antall noder i grafen, må grafen være en Hamilton-graf.

Dette vil ikke si at betingelsen går motsatt vei; selv om grafen er en Hamilton-graf, trenger ikke nødvendigvis Ores teorem å være oppfylt (Bermond, 2019).

Ores teorem for Hamilton-grafer:

La G (N, K) være en graf av orden n ≥ 3.

Hvis $\forall u, v \in N\, s.a.\, uv \notin K,\ \deg(u) + \deg(v) \geq n$, er G en Hamilton-graf.

Bevis for Ores teorem for Hamilton-grafer:

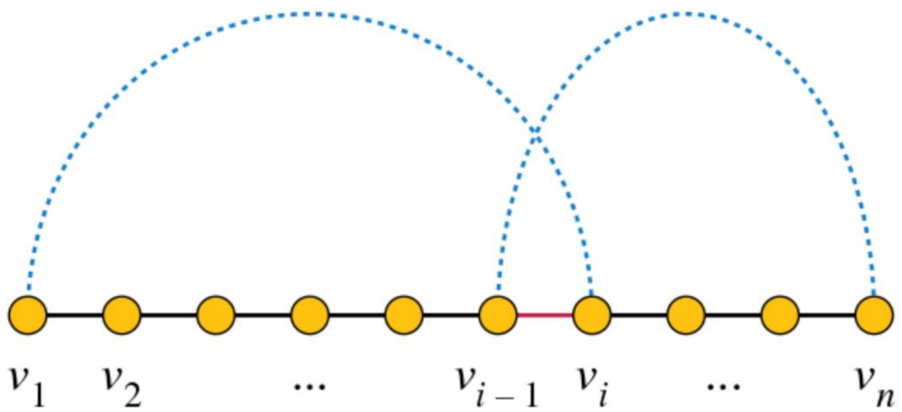
La oss se på en **motsigelse**:

∃ G = (N, K), |v| = n ≥ 3,$uv \in N\, s.a.\, uv \notin K \rightarrow \deg(u) + \deg(v) \geq n$ og G er **ikke** en Hamilton-graf.

Vi tilføyer kanter til G slik at den endelige grafen G' = (N, K') ville vært en Hamilton-graf ved å tilføye en ekstra kant. $x, y \in N\, s.a.\, xy \in K' \rightarrow \deg(x) + \deg(y) \geq n$

Ta $x, y \in N\, s.a.\, xy \notin K' \rightarrow (x = v_1, v_2, \ldots, v_n = y)$ er en Hamiltonsti i G'.$\forall v_i$, $xv_i \in K'$, $yv_{i-1} \notin K'$ $(2 \geq i \geq n)$, ellers er dette en Hamiltonsyklus i G'.

Figur 3.4.1, Illustrasjon til Ores teorem for Hamilton-grafer



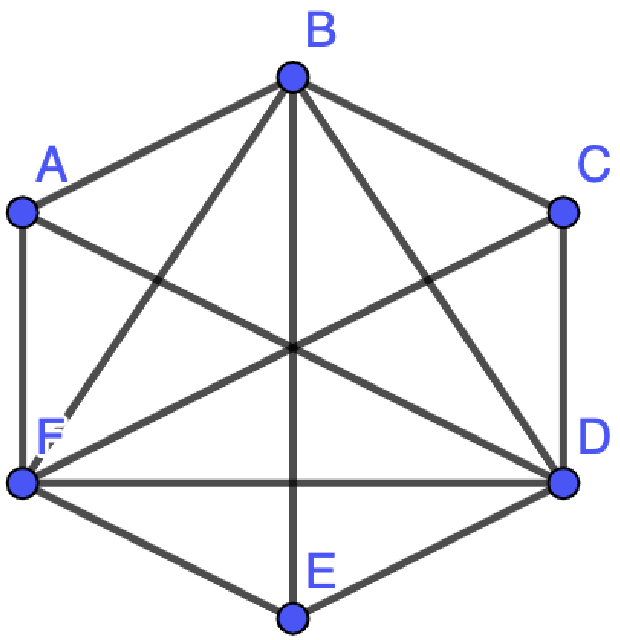
Da har vi følgende betingelse:

deg(y) ≤ n - 1 – deg(x)

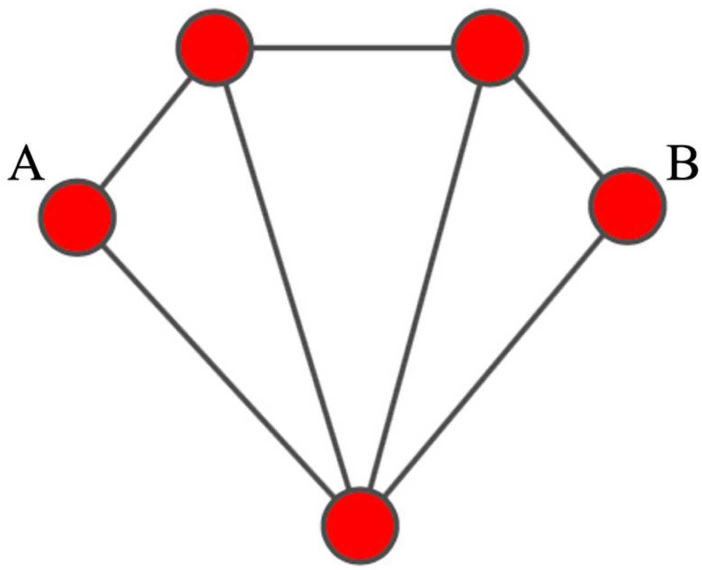
⟹ <u>deg(x) + deg(y) ≤ n –1</u> som er en **motsigelse** av betingelsen om **deg(x) + deg(y) ≥ n** ✓

(Math, Proof: Ore`s Theorem for Hamiltonian Graphs, 2019)

Figur 3.4.2, Illustrasjon av en Hamilton-graf der Ores betingelser er oppfylt.



Figur 3.4.3, Illustrasjon av en Hamilton-graf der Ores betingelser ikke er oppfylt; deg(A) + deg(B) = 4 < 5.



Relasjon mellom Dirac og Ores teorem:

La G(N, K) være en graf med orden $n \geq 3$.

La $u, v \in N$ s.a. $uv \notin K$, og $\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$

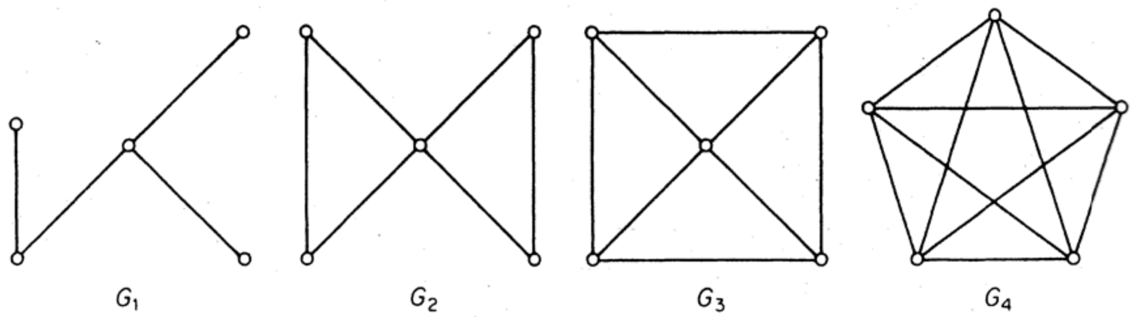
Da følger det at G en Hamilton-graf, etter Ores og Diracs teorem.

3.5 Tuttes teorem

K-sammenhengende grafer

Vi har tidligere skrevet om sammenhengende grafer, men vi skal se litt nærmere på hvor sammenhengende en graf er før vi snakker om Tuttes setning.
Først kan vi se på 4 forskjellige sammenhengende grafer, og forskjeller på dem.

Figur 3.5.1, Sammenhengende grafer



G_1 er en sammenhengende graf som er et tre. Hvis vi fjerner en vilkårlig kant, vil grafen ikke lenger være sammenhengende.
G_2 er fortsatt sammenhengende selv om man fjerner en av kantene. Men grafen har en kutt-node i midten, som gjør grafen usammenhengende ved å fjerne den.
I G_3 er det ingen kanter eller noder som gjør grafen usammenhengende ved å fjerne dem, men vi ser at G_4 likevel er sterkt sammenhengende i forhold til G_3.

Et node-kutt av G er en delmengde N’ av N s.a. G – N’ er usammenhengende. En k-kutt-node er en kutt-node av k-elementer. En fullstendig graf har ingen kutt-noder. Hvis G har minimum ett par forskjellige noder som ikke er naboer, sammenhengen K(G) av G er den minste k for at G har en kutt-node; ellers blir K(G) definert som v-1. Da vil K(G) = 0 hvis G enten er triviell eller usammenhengende. Alle ikke-trivielle sammenhengende grafer er *1-sammenhengende*.

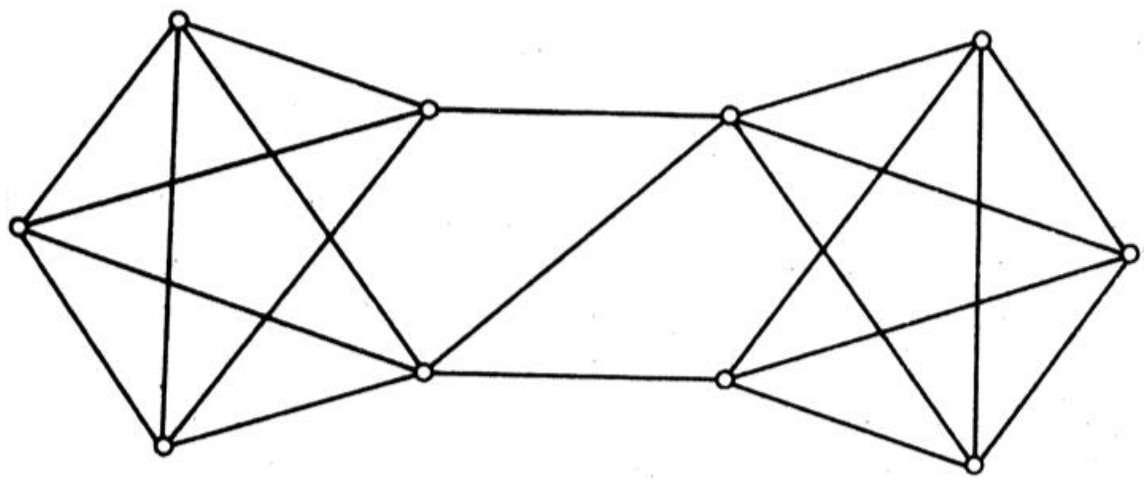
Def. *k-sammenhengende:* G er *k-sammenhengende* hvis K(G) > k.

Et kant-kutt av G er en delmengde av K på formen [D, D’] hvor D er en ikke-tom delmengde av N. En k-kutt-kant er en kutt-kant av k elementer. Hvis G er ikke-triviell og K’ er en kutt-kant av G, så er G – K’ usammenhengende. Vi definerer kant-sammenhengen K’(G) av G for å være et minimum k for at G har en kutt-kant. Hvis G er triviell, er K’(G) definert til null. Da vil K’(G) = 0 hvis G enten er triviell eller usammenhengende, og K’(G) = 1 hvis G er en sammenhengende graf med en kutt-kant. Alle ikke-trivielle sammenhengende grafer er *1-kant-sammenhengende.*

Def. *k-kant-sammenhengende:* G er *k-kant-sammenhengende* hvis K'(G) > k.

(Bondy & Murty, 1982)

Figur 3.5.2, Grafen har K = 2, K' = 3.

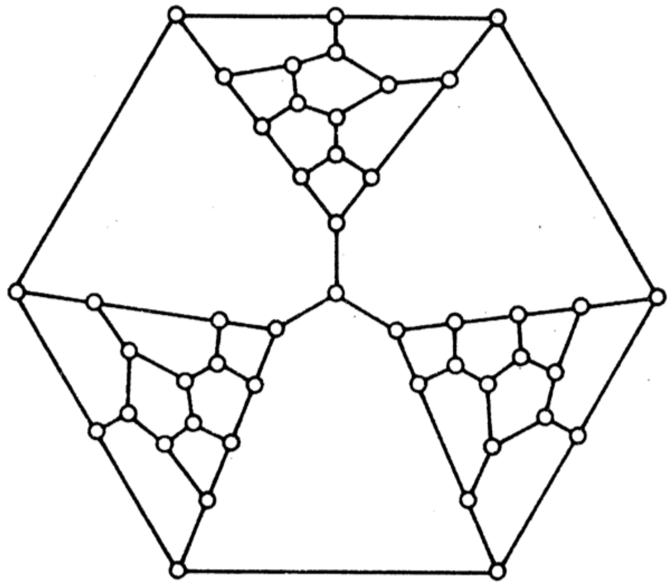


<u>William T. Tutte</u>

William Thomas Tutte (1917-2002) var en engelsk/canadisk kodeknekker og matematiker. Som matematiker er han kjent for blant annet arbeidet hans med grafteori, og han har bidratt til framgang i sjangeren. Selv om Tuttes arbeid avanserte grafteorien, brukte han ikke terminologi som er forenelig med den grafteoretikere brukte til vanlig, og derfor blir ikke Tuttes bidrag brukt så mye i dag.

I 1946 konstruerte Tutte en ikke-Hamiltonsk, 3-regulær (alle nodene har grad=3), 3-sammenhengende planar graf, som var det eneste eksempelet av dette i mange år, helt til 1968 da Grinberg fant en nødvendig betingelse for at planare grafer skulle være en Hamilton-graf, og dermed fant flere andre slike ikke-Hamiltonske grafer (Bondy & Murty, 1982).

Figur 3.5.3 Tutte-grafen; 3-regulær, 3-sammenhengende planar graf som ikke er en Hamilton-graf



Selv om det eksisterer flere 3-sammenhengende, planare grafer som ikke er Hamilton-grafer, beviste likevel Tutte at alle 4-sammenhengende, planare grafer er Hamilton-grafer.

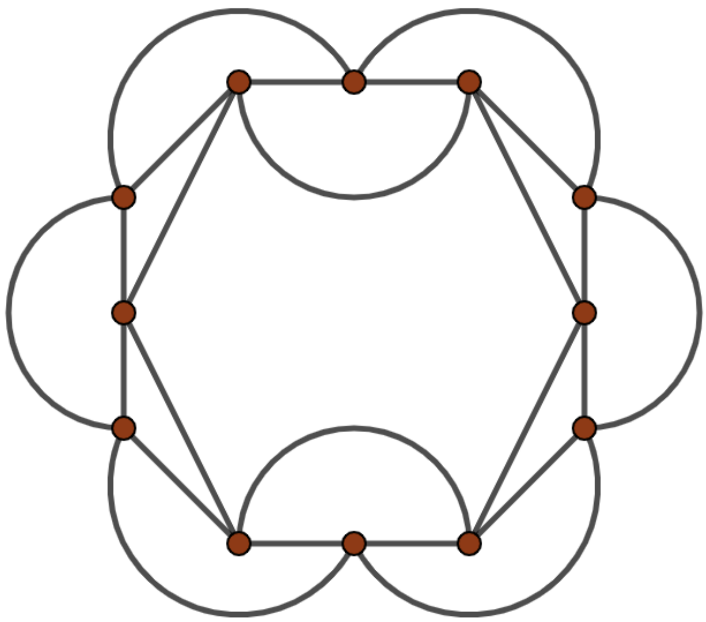
Tuttes setning:

La grafen G være en enkel, 4-sammenhengende, planar graf der n ≥ 3.

Da følger det at G en Hamilton-graf.

(Bondy & Murty, 1982)

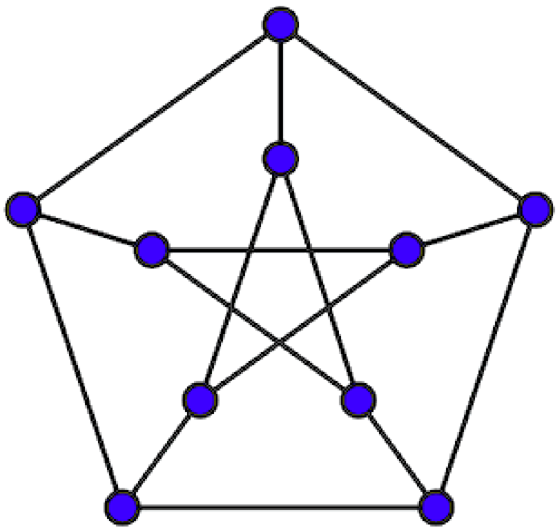
Figur 3.5.4, Eksempel av en 4-sammenhengende,planar graf med n = 12



Petersen-grafen

Petersen-grafen er *hypo-Hamiltonsk*; ved å fjerne en vilkårlig node, vil den gjenværende grafen være en Hamilton-graf.

Bilde 3.5.5, Petersen-grafen



Petersen-grafen er spesiell, og blir ofte brukt som mot-eksempel på flere teoremer i grafteori (Weisstein, 2022).

DEL 4 IMPLEMENTERING AV GRAFTEORI I SKOLEN

Vi skal videre se på hvorfor temaet bør bli implementert samt hvordan det kan bli implementert innenfor både grunnskole og videregående skole.

4.1. Hvorfor bør grafteori implementeres i klasserommet?

Fra skolens oppstandelse til den dag i dag har det vært diskusjon angående hva som er mest relevant å undervise i skolen. Et eksempel på dette er at læreplanene er i konstant endring, noe man kan se på kunnskapsløftet 2020. Her har det tidligere kunnskapsløftet 2006 gjennomgått en reform for å tilpasse utdanningen etter samfunnet som er i stadig endring (Utdanningsdirektoratet, 2021). Hensikten med dette er å gjøre læreplanen mer relevant for framtidens elever. Ut fra dette kan vi også drøfte hvilke endringer man bør gjøre innenfor matematikkutdanningen rundt hva som er relevant i dag. Vi skal nå se på noen argumenter for hvorfor grafteori bør bli implementert i dagens læreplan.

Grafteori har flere fordeler innenfor undervisningen i matematikk. I følge Ferrarello og Mammana (2018) legger temaet til rette for modellering, argumentasjon og resonnering, hvor temaet kan knyttes opp til hverdagslivet. Dette sammen med en lett og forståelig progresjon, samt tilnærmet ingen krav til forkunnskap, kan hjelpe elevene med å utvikle interesse og/eller mestring i faget. Spesielt kan dette hjelpe svakere elever som sliter i matematikkfaget med å få en «ny» start på undervisningen (Lessner, 2011).

Som nevnt tidligere kan en graf illustreres på mange måter og representere forskjellige situasjoner. Noen eksempler på dette kan for eksempel være relasjoner mellom personer, kart med reiseruter, strømkrets, og som tidligere nevnt bussruter. Slike realistiske scenarioer kan bli modellert gjennom grafteori, hvor elevene kan få en større tilnærming til matematikk i hverdagslivet. Dette med å anvende matematisk kunnskap til problemer i hverdagslivet er noe mange elever sliter med, noe som grafteori åpenbart tilrettelegger for (Ferrarello & Mammana, 2018). I tillegg kan grafene illustreres gjennom forskjellige redskaper som penn og papir, tråd, datamaskin og andre lignende hjelpemidler. Slike aktiviteter som tar i bruk både kropp og sinn, kan være med på å forsterke læringen hos elevene (Ferrarello & Mammana, 2018).

Niman J. (1975) argumenterer for at grafteori kan være et optimalt tema å implementere allerede i matematikkundervisningen på barneskolen. I følge Niman kan en implementering av grafteori være med på å øke barns interesse for matematikk, da det muliggjør at barnet kan bruke fantasien sin og delta kreativt i undervisningen. Niman hevder også at en innføring av grafteori hvor barn kan delta kreativt kan styrke barnets ferdigheter i å bruke matematisk kunnskap i videre undervisning (Niman, 1975).

Til slutt er det viktig å poengtere hvor aktuelt temaet er for dagens samfunn. Grafteori er en av de mest voksende grenene innenfor matematikk, hvor temaet er relevant innenfor en rekke ulike områder (Niman, 1975). Temaet er relevant i områder som fysikk, kjemi, økonomi, ingeniørarbeid og kommunikasjon. Med andre ord, et bredt aspekt av flere områder som kommer mest sannsynlig til å bli mer og mer relevant i dagens samfunn.

4.2. Tidligere implementeringer av grafteori i skolen

Forsøk på å implementere grafteori i skolen har blitt gjennomført flere ganger over mange år. Det har blitt laget flere forslag til moduler om hvordan temaet skal læres bort, og flere forfattere har kommet med eksempler til aktiviteter i klasserommet. Vi skal se nærmere på gjennomføringene til Ferrarello & Mammana (2018) som omhandlet Euler-grafer i barneskole, ungdomsskole og videregående skole.

Ferrarello & Mammana (2018) har gjennomført flere forsøk på å implementere grafteori i skolen. Disse forsøkene ble gjennomført på forskjellige skoler i løpet av flere år, fra 2007 til 2017. Det ble valgt ut ulike grupper fra 1. trinn til 10. trinn til hvert forsøk, men selve gjennomføringen var basert på de samme prinsippene. Alle aktivitetene ble tilpasset etter elevenes alder, interesser og behov. Undervisningstimene ble også strukturert likt som et laboratorieforsøk, hvor de brukte forskjellige hjelpemidler som penn og papir, tråd og dataspill til å støtte læringen.

I forsøket med 1. trinn ble undervisningen lagt opp til aktiviteter som fortellinger, spill og argumentasjon (Ferrarello & Mammana, 2018). Målet var å få elevene til å like temaet uten å legge noe press til det akademiske perspektivet. Det ble ikke brukt noen standard definisjoner, hvor Euler-grafene ble kalt «walkable». Begreper som noder, kanter og grad ble introdusert, hvor elevene greide å se likheter mellom forskjellige grafer med veiledning. Til slutt ble elevene utfordret til å argumentere for hvorfor deres løsning fungerte og andre ikke. Denne aktiviteten ble ledet av lærer som utfordret elevene gjennom spørsmål til å resonnere over egne svar. Videre ser vi på forsøkene innenfor ungdomsskolen, hvor de startet med å introdusere broene ved Königsberg som en utfordring for å skape interesse (Ferrarello & Mammana, 2018). De ble også veiledet til å finne betingelsene som må til for at en Euler-graf eksisterer. I denne gjennomføringen var læreren mindre involvert og overlatt resonneringen til elevene selv. Til slutt har vi forsøkene innenfor videregående skole, hvor gjennomføringen ble ganske lik de på ungdomsskolen. I disse gjennomføringene måtte elevene finne definisjonene selv på begrepene med hjelp av en veiledet aktivitet (Ferrarello & Mammana, 2018).

Ifølge Ferrari & Mammana (2018) utviklet elevene en mer positiv innstilling til matematikkfaget og utviklet sine matematiske egenskaper, samtidig som de lærte seg om grafteori. Innenfor matematiske egenskaper fikk elevene utvikle seg i problemløsning, øve på å knytte problemer i hverdagslivet opp mot matematikk, og til slutt erfaring i å resonnere seg fram til en hypotese og argumentere rundt den. Utbyttet av forsøkene er veldig likt tilbakemeldinger samlet av andre forsøk, som for eksempel Blanco og Moya (2021) som hadde et forsøk på barneskolen med elever med høye ferdigheter i matematikk. Tilbakemelding fra forsøket påstår at elevene fikk utviklet ulike strategier rundt problemløsning, og kunne lettere relatere matematikk til hverdagslivet. Det blir konkludert med at grafteori viser seg til å være et svært nyttig verktøy for å øke elevers problemløsningsferdigheter og deres motivasjon til matematikkfaget (Blanco & Garcìa-Moya, 2021). På likhet med de andre forsøkene, fikk Niman (1975) lignende resultater av gjennomføringen at temaet stimulerer interessen til både elever og lærere i matematikkfaget.

4.3. Hvordan bør temaet bli implementert i klasserommet

Som vist tidligere er grafteori et tema som kan legges fram veldig lett og forståelig, men samtidig kan gjøres mer avansert etter ønske. Det har blitt utviklet flere aktiviteter for å introdusere grafteori i skolen, hvor det finnes aktiviteter passende for både grunnskole og videregående skole (Ferrarello & Mammana, 2018). Det er mange forskjellige retninger innenfor grafteori som kan implementeres i skolen, spesielt relevant er fargelegging av kart og grafer, Euler-grafer og Hamilton-grafer. I tillegg finnes det mange forskjellige moduler som foreslår hvordan grafteori skal bli implementert i skolen, blant annet av Robinson (2006) som kommer med forslag til implementering innenfor ungdomsskolen. Vi velger derimot å fokusere på hvilke holdninger og strategier man bør ha rundt implementeringen.

Som nevnt tilpasset Ferrarello & Mammana (2018) aktivitetene til elevenes liv, alder og behov. I vår mening bør tilpasning være sentralt for implementering av grafteori i skolen, for å gjøre temaet mest mulig interessant og relevant for elevene og deres behov. Sentralt her vil være å komme med realistiske aktiviteter som elevene kan relatere til i deres egen hverdag. Dette er en av grafteoriens sterke sider som kan representere ulike scenarioer som kan tilrettelegge for disse interessene. For eksempel kan nodene representere utøvere og kantene pasninger mellom disse utøverne. Videre bør tilpasningen også ta for seg elevenes ferdighetsnivå, hvor målet er å gi elevene problemer som gir de utfordring, men som er samtidig oppnåelig for de å løse (Mathiassen, 2009). Dette skaper mestring hos elevene, som igjen kan gi elevene en mer positiv innstilling til faget. Tilpasning etter alder er også viktig for å gi passende utfordringer, noe som betyr kravene og vanskelighetsgraden øker gradvis sammen med alderen.

Et siste viktig punkt er å utnytte seg av hjelpemidler til å visualisere problemer og ideer. I følge Niman (1975) vil dette øke appellen for temaet samt legge til rette for læring. Grafteori kan lett representeres visuelt, hvorav hjelpemidler som penn og papir, tråd og datamaskin gir elevene muligheten til å lære matematikk gjennom fysiske aktiviteter. Dette kan være en etterlengtet endring i hvordan matematikk læres bort den dag i dag, noe som kan forsterke interesse og læring hos elevene.

4.4. Egen gjennomføring

Til slutt skal vi se på eget forsøk på å implementere grafteori, hvor målet var å se hva slags reaksjon elevene hadde til temaet. Forsøket var relativt kort med en 45 minutters undervisningstime i 1PY, praktisk matematikk for elektro og datateknologi, sammen med elever i vg1. Undervisningen ble strukturert rundt Euler-grafer, hvor det ble lagt opp til mye visuell representasjon, spesielt gjennom penn og papir. Timen ble delt i tre deler som vi skal se nærmere på videre.

Første delen bestod av en praktisk oppgave før elevene fikk en generell innføring av grafteori. Oppgaven gikk ut på at elevene skulle lage en egen oversikt over byene og deres flyforbindelser. Elevene fikk denne tabellen med informasjon de skulle lage en oversikt av:

Table 6 Routes for Eurofly aircraft

	Rome	Paris	London	Athen	Milan	Madrid
Rome		YES		YES	YES	YES
Paris	YES					YES
London				YES	YES	
Athen	YES		YES			
Milan	YES		YES			
Madrid	YES	YES				

Figur 4.4.1: Flyforbindelser mellom forskjellige byer (Ferrarello & Mammana, 2018, s. 198)

I denne oppgaven begynte halvparten å tegne et verdenskart, hvorav de representerte byene med navn eller punkt og flyforbindelsene ble linjer mellom punktene. Andre elever skrev opp alle byene i en sirkel og satte linjer mellom byene som illustrerte flyforbindelsene.

I den andre delen ble elevene vist et eksempel på hvordan oppgaven kunne bli illustrert, hvor punkter med navn representerte byene og linjer representerte flyforbindelsene. Her fikk de en kort og enkel definisjon av en graf, samt en introduksjon på grunnleggende begreper som noder, kanter og graden av en node. Til slutt fikk de en oppgave som fortsetter på den forrige. Utfordringen var å finne en flyreise som gikk fra Paris, gjennom alle flyforbindelsene nøyaktig en gang, og tilbake til Paris. De fikk beskjed at den kunne være innom en by flere ganger. Alle elevene greide å finne en slik flyreise ganske fort. Etter en rask oppsummering på tavlen ble de forklart at hvis en slik reise/vei eksisterte, var grafen en Euler-graf.

Den siste delen bestod av prøving og feiling, samt resonnering og argumentasjon rundt Euler-grafer. Elevene fikk utdelt noen ark med mange ulike grafer, både Euler- og ikke Euler-grafer. Elevene fikk i oppgave å finne ut hvilke av grafene som var Euler-grafer, og resonnere seg frem til betingelsene for hvorfor enkelte grafer var en Euler-graf og andre ikke. Dessverre ble det dårlig tid på slutten av timen, så elevene kom ikke så langt i oppgaven. Alle elevene forstod at en av betingelsene var at grafen måtte være lukket, noe som de beskrev som at grafen måtte inneholde en strømkrets. I siste liten var det en elev som nevnte at det måtte ha noe å gjøre med graden til nodene, men rakk ikke å resonnere seg lengre enn det.

I helhet vil vi påstå at gjennomføringen var vellykket, hvor elevene reagerte positivt til introduksjonen av grafteori. Det virket som elevene syntes temaet var interessant og lett å forstå, noe som bidro til mye aktivitet i timen. Det kunne også observeres at elevene ble utfordret i problemløsning-strategier, hvor de resonnerte og argumenterte seg fram til en hypotese.

Bibliografi

Bermond, J.-C. (2019, November 6). *Hamiltonian Graphs*. Hentet fra hal.inria.fr: https://hal.inria.fr/hal-02352666/document

Biggs, N. L. (2004). *Discrete Matematics.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Blanco, R., & Garcìa-Moya, M. (2021, Juli 3). *Graph Theory for Primary School Students with High Skills in Mathematics.* Hentet fra MDPI: https://www.mdpi.com/2227-7390/9/13/1567

Bondy, J., & Murty, U. (1982). *Graph Theory With Applications.* New York: Elsevier Science Publishing. Hentet fra https://www.zib.de/groetschel/teaching/WS1314/BondyMurtyGTWA.pdf

Dahl, G. (2001, Oktober 24). *Grafteori og optimering, en kort innføring.* Hentet fra matematikk.org: https://www.matematikk.org/binfil/download2.php?tid=66518

Ferrarello, D., & Mammana, M. (2018). *Graph Theory in Primary, Middle, and High School.* Catania: Department of Mathematics and Computer Science.

Fleischner, H. (1990). *Eulerian Graphs and Related Topics.* The Netherlands: Elsevier Science.

Heinold, B. (2018, Juni 16). *A Simple Introduction to Graph Theory* . Hentet fra brianheinold.net: https://www.brianheinold.net/notes/A_Simple_Introduction_to_Graph_Theory_Heinold.pdf

Lessner, D. (2011, Juni 1). *Graph Theory in High School Education.* Hentet fra ksvi.mff.cuni.cz: https://ksvi.mff.cuni.cz/~lessner/w/data/_uploaded/file/papers/2011_06_WDS_lessner_contribution.pdf

Math, W. o. (2019 , November 7). *Proof: Dirac's Theorem for Hamiltonian Graphs | Hamiltonian Cycles, Graph Theory*. Hentet fra youtube.com: https://www.youtube.com/watch?v=S7bORlkfwsA

Math, W. o. (2019, Oktober 28). *Proof: Ore`s Theorem for Hamiltonian Graphs*. Hentet fra Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=r0IHSXkSSGE

Math, W. o. (2020, August 25). *YouTube, Proof: Euler's Formula for Plane Graphs | Graph Theory*. Hentet fra YouTube.com: https://www.youtube.com/watch?v=KSbF0jtBNSw

Math, W. o. (2020, Januar 15). *YouTube, Proof: Graph is Eulerian iff All Vertices have Even Degree | Euler Circuits, Graph Theory*. Hentet fra youtube.com: https://www.youtube.com/watch?v=wC99T3aVDKQ&t=258s

Mathiassen, K. (2009). *Differensiert undervisning.* Oslo: Universitetsforlaget.

Niman, J. (1975, November 1). *Graph Theory in the Elementary School*. Hentet fra Educational Studies in Mathematics: http://www.jstor.org/stable/3481932

Robinson, L. A. (2006). *Graph Theory for the Middle School.* Hentet fra Electronic Theses and Dissertations: https://dc.etsu.edu/etd/2226

Utdanningsdirektoratet. (2021, Juni 24). *Hvorfor har vi fått nye læreplaner?* Hentet fra Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hvorfor-nye-lareplaner/

Weisstein, E. W. (2022, Mai 11). *"Petersen Graph".* Hentet fra MathWorld - A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/PetersenGraph.html

wikidot.com. (2022, mars 21). *Mathonline.* Hentet fra mathonline.wikidot.com: http://mathonline.wikidot.com/euler-s-theorem

Wilson, R. J. (1996). *Introduction to GraphTheory.* Essex: Longman.