DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTETET

MASTEROPPGAVE

Studieprogram/spesialisering: Lektor, 8.-13. trinn, realfag	Vårsemesteret, 2023 Åpen
Forfatter: Adrian Serigstad	
Fagansvarlig: Sigbjørn Hervik Veileder: Sigbjørn Hervik	
Tittel på oppgaven: Dybdelæring i matematikk Engelsk tittel: Deep learning in mathematics	
Studiepoeng: 30	
Emneord: - Dybdelæring - Fagfornyelsen - Matematikk - Forståelse	Sidetall: 52 + vedlegg/annet: 65 Stavanger, 14.06.23

Sammendrag

Denne studien tar for seg dybdelæring i matematikk, og undersøker om fokuset på dybdelæring kan medføre dyp forståelse for et matematisk tema. Dybdelæring viser seg å være et mangfoldig begrep med ulike tolkninger og perspektiver. Studien presenterer ulike synsvinkler som er relevante i skolesammenheng. For å få en forståelse av hva dybdelæring i matematikk kan være, kobles de ulike perspektivene på dybdelæring til forståelse, kompetanse og kyndighet i matematikk.

For å kunne diskutere hvordan fokuset på dybdelæring påvirker elevers matematiske forståelse, ble det gjennomført kvalitative intervjuer av VG3-elever. Hver for seg skulle tre S2-elever og tre R2-elever vise sin forståelse for temaet integrasjon. Seks elever gav naturligvis ikke nok data til å trekke konklusjoner. Likevel kunne elevbesvarelsene utløse en meningsfull diskusjon. Spørsmålene i intervjuene ble designet med utgangspunkt i teori knyttet til dybdelæring og matematisk forståelse, kompetanse og kyndighet.

Resultatene viser at de fleste informantene hadde overfladiske kunnskaper rundt integrasjonstemaet. Blanding av matematiske konsepter, begrenset hukommelse og generelt lite oversikt var tilfellet hos flere. Dette kan tyde på at flere har tatt i bruk memorering som læringsstrategi fremfor å lære med forståelse. På en annen side var det to elever som skilte seg ut. De var i stand til å se sammenhenger, og forstå begreper og metoder. Samtidig viste også disse antydninger til overflatekunnskaper i enkelte situasjoner. Derfor kan jeg ikke med sikkerhet si at de oppnådde dyp forståelse for integrasjon. Det som likevel er sikkert, er at de begge viste tegn til å ha god forståelse for temaet. Dette kan tyde på at fokuset på dybdelæring kan ha bidratt positivt på forståelsen for noen elever, men ikke for alle.

Forord

Med denne masteravhandlingen setter jeg punktum etter en lang og innholdsrik utdannelse. Høsten 2018 begynte jeg på studiet *Lektor, 8.-13.trinn, realfag*. I løpet av dette relativt krevende studiet har jeg fått kjenne på både opp- og nedturer. En stor opptur fikk jeg på andre året, da jeg hadde idrettsfag. Her fikk jeg et godt avbrekk fra teoretisk matematikk og kunne nyte en studiehverdag i aktivitet og på tur sammen med trivelige medstudenter.

På lektorstudiet har jeg lært mye. Praksisperiodene har uten tvil vært de mest lærerike og givende periodene under hele utdannelsen. Her fikk jeg mange gode erfaringer som jeg kommer til å ta med meg ut i arbeidslivet.

Jeg vil gjerne rette en stor takk til Sigbjørn Hervik som tok seg tid til å veilede meg. Uten han hadde jeg trolig ikke fått realisert en didaktisk oppgave. Takk til informantene som stilte opp på intervju og tilhørende lærere for behjelpeligheten. Takk til Kristian og Sindre som bidro med korrektur som siste finpuss på oppgaven. Til slutt vil jeg takke familie, venner og bekjente for god støtte og oppløftende ord gjennom studietiden.

Studentlivet har vært bra, men nå er det på tide å ta steget ut i arbeidslivet. Takk for nå, UiS!

Innholdsliste

1. Innledning

1.1 Motivasjon for oppgaven

Som lektorstudent under fagfornyelsen, fikk jeg et noe distansert forhold til LK20. Selv om vi i løpet av studiet jobbet med de nye læreplanene, har jeg ikke fått muligheten til å praktisere dem over lengre tid. På avstand har jeg sett lærere både rive seg i håret og uttrykke sin begeistring over hva og hvordan elevene nå skal lære. Dette har gjort meg nysgjerrig på det nye begrepet *dybdelæring*, som på mange måter er kjernen i de nye læreplanene. I den forbindelse stilte jeg meg selv et spørsmål som vekket interesse:

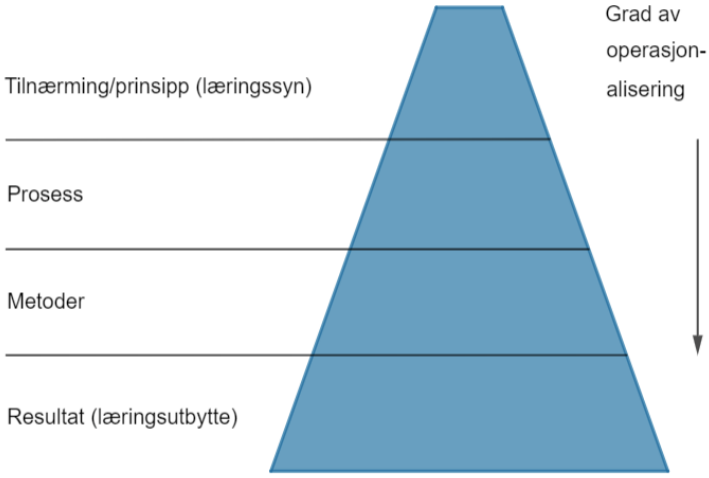
Har fokuset på dybdelæring hatt positiv effekt på elevenes forståelse i matematikk?

Det er utfordrende å komme med et fullkomment svar på dette. For det første har de nye læreplanene nettopp blitt iverksatt i skolen og dybdelæring er fortsatt et ferskt begrep. For det andre kreves det store mengder data fra både før og etter fagfornyelsen. Spørsmålet måtte derfor avgrenses i forhold til de rammene jeg hadde for denne masteroppgaven. Jeg skal i denne studien se nærmere på begrepet dybdelæring og diskutere hvorvidt dette fenomenet *kan* ha positiv påvirkning på elevenes forståelse for et tema i matematikk.

1.2 Dybdelæringens perspektiver

Dybdelæring er et komplekst begrep med ulike tolkninger og perspektiver. Begrepet dukker opp i både maskinlæring, kognitiv forskning, læreforskning og i skolen. En må derfor være bevisst på hvilket perspektiv en forholder seg til. Tidligere lærer, rektor og nå seniorrådgiver innen skoleutvikling, Bjørn Bolstad, har fremstilt ulike perspektiver på dybdelæring gjennom en illustrasjon (se figur 1).

Dybdelæring kan ses på som et overordnet læringssyn som undervisningen skal bygge på (Bolstad, 2021). (Bolstad, 2021) peker på at andre gjerne snakker om dybdelæringsprosesser, metoder som skaper dybdelæring, eller læringsutbyttet elevene sitter igjen med. Modellen er breiest nederst og smalest øverst for å vise at det finnes flere metoder enn læringssyn.



Figur 1: Ulike perspektiver på dybdelæring (Bolstad, 2021)

Dybdelæringsbegrepet er mangfoldig og kan ha flere vinklinger. Selv om flere av perspektivene skal berøres i denne studien, har jeg valgt å legge hovedvekt på Utdanningsdirektoratets definisjon:

«Vi definerer dybdelæring som det å gradvis utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder. Det innebærer at vi reflekterer over egen læring og bruker det vi har lært på ulike måter i kjente og ukjente situasjoner, alene eller sammen med andre», (Utdanningsdirektoratet, 2019a).

1.3 Forskningsspørsmål

En kan se at Utdanningsdirektoratet (Udir) først og fremst beskriver dybdelæring som et læringsutbytte hvor elevene tilegner seg kunnskap og forståelse over tid. Siden det er Udir som utvikler læreplanverket, har jeg valgt å ta utgangspunkt i deres tolkning under formuleringen av forskningsspørsmålet:

Kan et fokus på dybdelæring i matematikk gi VG3-elever dyp forståelse for integrasjon?

Dette spørsmålet skal besvares ved hjelp av teori og data fra videregående skole. Teorien baseres på forskning knyttet til dybdelæring og kombineres med forståelse, kompetanse og kyndighet i matematikk.

2. Teori

2.1 Fra instruksjonisme til dybdekunnskap

2.1.1 Instruksjonisme

I godt over hundre år har instruksjonisme vært den ledende undervisningspraksisen på skoler (Sawyer, 2022). Denne form for undervisning ble ifølge Saywer (2022) etablert tidlig på 1900-tallet for å forberede elevene på et liv i det industrialiserte samfunnet. Instruksjonismen skulle forsikre elevene om å bli nøyaktige og lydige i yrkeslivet. I år 1900 bestod nemlig 95% av yrkene av det Sawyer (2022) kaller «low-skilled jobs». Dette krevde simpelthen å følge enkle prosedyrer som andre hadde konstruert. Memorering av informasjon var derfor en essensiell ferdighet og en stor del av utdannelsen på denne tiden. I tillegg var det en tid uten internett og annen kommunikasjonsteknologi, noe som gjorde det krevende å skaffe nødvendig informasjon.

Tidlig på 1900-tallet visste forskere lite om *hvordan* elevene lærte. Skolene vi har i dag er derfor konstruert basert på datidens antakelser (Sawyer, 2022). Sawyer (2022) beskriver en instruksjonistisk forståelse punktvis:

- Kunnskap er en samling av fakta om verden og prosedyrer for å løse problemer.
- Målet med skolen er å få disse faktaene og prosedyrene i elevens hode.
- Lærere kjenner faktaene og prosedyrene, og jobben deres er å overføre disse til elevene.
- Enklere fakta og prosedyrer bør læres først, etterfølgt av mer komplekse. Det er lærerne, lærebokforfattere, eller andre eksperter som definerer hva som er «enkelt» og «komplekst» - ikke elevene selv.
- Skolens suksess måles ved å teste hvor mange av disse faktakunnskapene og prosedyrene elevene har tilegnet seg.

Det er tydelig hvordan Sawyer (2022) beskriver den instruksjonistiske skolen. Memorering av faktakunnskaper og prosedyrer var oppskriften på suksess. Konstruktivisten Seymour Papert har en lignende oppfatning av instruksjonisme. Han beskriver det som et læringssyn der veien til læring handler om å forbedre undervisningen (Papert, 1993). Papert (1993) som selv er konstruktivist og tilhenger av Piaget, er kritisk til denne tankegangen. Konstruktivistene har en mer minimalistisk holdning til undervisning. Målet skal være å lære elevene mest mulig ved å undervise minst mulig. Poenget til Papert (1993) er ikke at undervisningen skal kuttes ut, men at elevene skal bruke sitt iboende og tilegne seg kunnskapen selv. «Kunnskapen barn trenger som mest, er kunnskapen som hjelper dem å tilegne seg mer kunnskap» (oversatt fra (Papert, 1993, s.139)).

2.1.2 Dybdekunnskap

Tradisjonelt har læreforskere fokusert på å fortelle lærere hvordan læringsmålene kan oppnås (Sawyer, 2022). Ifølge Sawyer (2022) fikk ikke lærerne hjelp til å sette disse målene. På 1980-tallet begynte læreforskere å se seg rundt og studere andre fagfelt (Sawyer, 2022). Sawyer (2022) nevner at både psykologi, datavitenskap, filosofi og sosiologi ble inspirasjonskilder til en ny og bedre undervisningstilnærming. Det ble forsket på barns og voksnens læringsevner både i og utenfor skolesammenheng. Funnene var oppsiktsvekkende. Instruksjonismen inneholdt store sprekker.

Videre forteller Sawyer (2022) at kognitive vitenskapsmenn besøkte klasserom og oppdaget at barn tilegnet seg undervisningsmateriell bedre. Barna var i stand til å generalisere og overføre material fra en kontekst til en annen. Dette skjedde som en følge av endring i undervisningspraksis, hevder Sawyer (2022). Lærerne gikk nemlig fra å tilrettelegge for *overflatekunnskap* til å fokusere på *dybdekunnskap* hos elevene. Dette gjorde de ved å blant annet gi problemer knyttet opp mot hverdagen (Sawyer, 2022).

Etter en grundig forskningsprosess på 90-tallet, kom læreforskere med oppdatert kunnskap om læring (Sawyer, 2022):

- Dypere forståelse av begreper er viktig
- Kunnskap henger sammen med annen kunnskap, også på tvers av fagfelt
- Elevene må delta aktivt i egen læreprosess
- Elevene må få rom til å drøfte virkelighetsnære oppgaver

- Elevene lærer ofte mer effektivt i gruppeaktiviteter med en veiledende lærer tilstede
- Barn lærer best når lærestoffet bygger på tidligere kunnskap

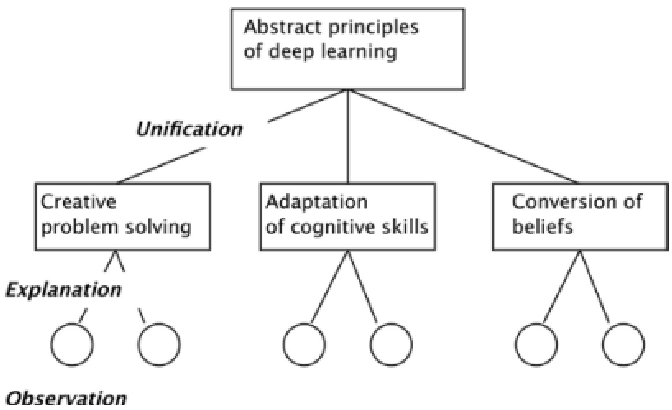
Videre i oppgaven vil en se at disse funnene har vært avgjørende for den nye kursen i norsk skoleopplæring. Overflatekunnskap er ikke lenger godt nok. Dypere forståelse skal ruste elevene bedre for det moderne samfunnet.

2.2 Dybdelæring fra et kognitivt perspektiv

Læring handler om å endre atferd. Når en går i dybden av dybdelæringsbegrepet vil det derfor være naturlig å se på det fra det kognitivt ståsted. Hvilken tankevirksomhet må ligge til grunn for at elevene skal lære noe i dybden?

2.2.1 Kognitive endringer

Professor i psykologi og datavitenskap Stellan Ohlsson, betegner dybdelæring som *ikke-monotone kognitive endringer* (Ohlsson, 2011). Disse dype kognitive endringene deler han inn i *creativity, adaptation* og *conversion* (se figur 2). Minst ett av disse prinsippene må ifølge Ohlsson (2011) ligge til grunn for at noe skal kalles dybdelæring. Bolstad (2021) har gode oversettelser og beskrivelser av de tre prinsippene.



Figur 2: Dybdelæringens tre prinsipper (Ohlsson, 2011)

Kreativ problemløsning (*creativity*) handler om å bruke tidligere kunnskap på nye måter, altså bryte med allerede etablerte tankemønstre (Bolstad, 2021). (Bolstad, 2021) trekker paralleller til det daglige uttrykket «å tenke utenfor boksen». Det innebærer å endre tankesettet sitt for å kunne løse nye problemer (Bolstad, 2021). I sammenheng med kreativitet, trekker Ohlsson (2011) frem verbene *create, discover* og *invent* som henholdsvis kan oversettes til å *skape, utforske* og *oppdage*. Senere i oppgaven vil en se at dette er sentrale begreper knyttet til dybdelæringsbegrepet.

Overføring av læring (*adaptation*) dreier seg om å overføre det man har lært til nye sammenhenger (Bolstad, 2021). Ohlsson (2011) sikter til at en dypere forståelse fører til at man er i stand til å tilpasse kunnskap og ferdigheter mellom kontekster. Overføring av læring og kreativitet blir ofte behandlet adskilt, hevder Ohlsson (2011), men fremhever at disse begrepene har store likheter. «Når man fremprovoserer forandring ved å opptre annerledes, må noe ha endret seg i forstanden» (oversatt fra (Ohlsson, 2011, s. 22)).

Endring av oppfatninger (*conversion*) vil si at man går fra å ikke vite og forstå noe til å vite og forstå det (Bolstad, 2021). Når vi lærer, tar vi til oss informasjon som vi ikke hadde kjennskap til eller forstod tidligere. Bolstad (2021) relaterer en slik overføring av informasjon til opplæringen i skolen. Store deler av opplæringen går ut på at elevene tar til seg informasjon fra lærere, ofte faktaopplysninger. Bolstad (2021) understreker at læring handler like mye om å justere egne oppfatninger ved å korrigere misforståelser.

2.2.2 Metakognisjon og selvregulert læring

Metakognisjon er et viktig begrep i læreforskning og i beskrivelser av dybdelæring. Dette omfatter det å tenke over egne tankeprosesser (Sawyer, 2022). For elever i skolen, handler metakognisjon om å lære å reflektere over egen tenking og læring (Meld. St. 28 (2015-2016)). Dette inkluderer å velge hensiktsmessige løsningsstrategier under problemløsning og mestre disse (Meld. St. 28 (2015-2016)). Å være bevisst på egne læringsstrategier og kunne regulere disse, effektiviserer elevenes tilegnelse av kunnskap (Meld. St. 28 (2015-2016)). Kunnskapsdepartementet fremhever derfor viktigheten av god underveisvurdering og egenvurdering i fagene (Meld. St. 28 (2015-2016)).

For å lære å lære på en effektiv måte bør elevene ifølge Sawyer (2022) først og fremst ha et rikt utvalg av taktikker og strategier for læring. Videre understreker Sawyer (2022) viktigheten av det å skaffe seg oversikt over hva problemet dreier seg om, og vite hvilke læringsstrategier som egner seg best. I tillegg må elevene kunne regulere læringsprosessen sin (Sawyer, 2022). Selvregulering handler om å systematisk organisere egne tanker, følelser og handlinger for å oppnå satte mål (Schunk & Greene, 2018).

Selvregulert læring kan ifølge Schunk og Greene (2018) deles inn i fire faser. I første fase bruker eleven minnet sitt sammen med ytre omgivelser til å finne forhold som kan kobles til oppgaven som skal løses. I andre fase setter eleven mål for arbeidet med oppgaven og planlegger hvordan målene skal oppnås. I tredje fase tar eleven fatt på selve oppgaven. I fjerde og siste fase finner eleven forbedringer til neste gang en tilsvarende oppgave skal angripes.

Metakognisjon er det som driver selvregulert læring (Sawyer, 2022). For at elevene skal anvende og utvikle selvregulert læring, må læringsmiljøet være formet på en måte som oppfostrer effektiv bruk av metakognitive strategier (Sawyer, 2022). Her er nøkkelen ifølge Sawyer (2022) å forstå forholdet mellom de sammenflettede komponentene metakognisjon og motivasjon.

2.3 Dybdelæring i fagfornyelsen

«Et samfunn i endring krever også en skole som fornyer seg. Regjeringen foreslår derfor å fornye fagene i skolen for å gi elevene mer dybdelæring og bedre forståelse.»

Utdrag fra regjeringens melding til Stortinget i 2016 (Meld. St. 28 (2015-2016)).

2.3.1 Ludvigsen-utvalget

I 2013 opprettet Stoltenberg-regjeringen et utvalg med professor Sten Ludvigsen i spissen (Meld. St. 28 (2015-2016)). Utvalget skulle vurdere om innholdet på skolen la til rette for kompetanse og grunnleggende ferdigheter som elevene trenger i det fremtidige samfunns- og yrkeslivet (Meld. St. 28 (2015-2016)). Måtte det endringer til i skolen for å oppnå denne kompetansen og disse ferdighetene? Burde dagens fagstruktur beholdes eller skrinlegges? Slike spørsmål skulle Ludvigsen-utvalget ta for seg og besvare.

I forskningsarbeidet gjennomførte utvalget grundige studier av internasjonal læreforskning (Meld. St. 28 (2015-2016)). Deriblant har Sawyer sin første utgave av håndboken om læreforskning vært til stor inspirasjon for utvalgets utredninger. I 2014 og 2015 la utvalget frem sin delutredning NOU 2014: 7 *Elevenes læring i fremtidens skole* og hovedutredning NOU 2015: 8 *Fremtidens skole: fornyelse av fag og kompetanser*. Delutredningen legges til grunn for hovedutredningen som presenterer utvalgets anbefalinger til fremtidige kompetansekrav og fagfornyelse i skoleverket (Meld. St. 28 (2015-2016)). Blant anbefalingene dukker dybdelæring opp som et sentralt begrep (Meld. St. 28 (2015-2016)).

2.3.2 Ludvigsen-utvalgets beskrivelse av dybdelæring

Ludvigsen-utvalget har i sine utredninger flere beskrivelser av hva de legger i begrepet dybdelæring:

«Dybdelæring handler om at elevene gradvis utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innenfor et fagområde. Det handler også om å forstå temaer og problemstillinger som går på tvers av fag- eller kunnskapsområder» (NOU 2014: 7, s. 35).

«Dybdelæring innebærer at elevene bruker sin evne til å analysere, løse problemer og reflektere over egen læring til å konstruere helhetlig og varig forståelse» (NOU 2014: 7, s. 35).

Utvalget peker spesielt på begrepene *forståelse*, *progresjon,* og *refleksjon* når de forklarer dybdelæring i sine utredninger. Jeg skal derfor ta for meg disse begrepene i lys av utvalgets perspektiv på dybdelæring.

Forståelse er trolig begrepet som tar mest plass i Ludvigsen-utvalgets definisjoner og beskrivelser av dybdelæring. Elevene skal ha en varig forståelse av begreper, sammenhenger, tema og problemstillinger i og på tvers av fagene. Bolstad (2021) skildrer forståelsesbegrepet i en skolefaglig kontekst ut fra skoleforskerne Gardner og Mansillas fire dimensjoner:

1. *Hensikt* dreier seg om å forstå hvorfor vi trenger å lære det vi lærer og betydningen av det.
2. *Kunnskap* handler om å kjenne viktige fakta, begreper og teorier og sette disse i en sammenheng.
3. *Metode* går på å kjenne hvilke metoder som brukes i faget og hvordan kunnskapen oppstod.
4. *Form* handler om å forstå og kunne bruke fagets kommunikasjonsmidler. I dette inngår språk, visuelle representasjoner og uttrykksformer.

Forståelse er ifølge Ludvigsen-utvalget både en forutsetning og en konsekvens av dybdelæring (NOU 2015: 8). Derfor mener de at skolene bør rette søkelyset mot læreprosesser som gir elevene forståelse. Dette kan nemlig bidra til økt motivasjon og en opplevelse av mestring og relevans på skolen (NOU 2015: 8).

Å utvikle dybdelæring og forståelse innebærer også at elevene reflekterer over sin egen læring (NOU 2015: 8). Utvalget mener derfor at *metakognisjon* bør vektlegges i skolen. I samfunns- og arbeidslivet kreves det at man videreutvikler egen kunnskap og kan sette seg inn i nye kunnskapsområder (NOU 2015: 8). Elever som er bevisst over sin egen læring er i bedre stand til å løse problemer på en reflektert måte, både alene og sammen med andre (NOU 2015: 8). Dette henger tett sammen med å ta initiativ over egen læringsprosess, som inngår i begrepet *selvregulert læring* (NOU 2015: 8). Å styre deler av læreprosessen sin krever ifølge utvalget at elevene lærer strategier for å planlegge, overvåke og vurdere den. Selvregulering og metakognisjon er begge kilder til engasjement i egen læreprosess på en måte som utvikler dybdelæring, understreker de.

Progresjon er også et begrep som utvalget legger tett opp mot dybdelæring. Progresjon har en læringspsykologisk side som går på elevenes utvikling av forståelse over tid (NOU 2015: 8). Siden gradvis utvikling av forståelse er et kjennetegn på dybdelæring, kan en si at dette henger sammen med progresjon. Progresjon muliggjør dybdelæring og derfor mener utvalget at læreplanen bør ha en tydelig progresjon. Samtidig bør mengden kompetansemål være færre for å redusere stofftrengselen i fagene (NOU 2015: 8). Dette skaper mer tid og rom for tilrettelegging av dybdelæring (NOU 2015: 8). Tid er nemlig en nøkkelfaktor i diskusjonen om dybdelæring. Ludvigsen-utvalget setter et spørsmåltegn ved den tradisjonelle fagstrukturen som de mener kan være til hinder for dybdelæring (NOU 2014: 7). Årsaken er de hyppige overgangene til nye fag som elevene må forholde seg til i løpet av skoledagen (NOU 2014: 7). Å gå inn i dybden i et lærestoff krever derfor tid og progresjon (NOU 2014: 7).

2.3.3. Dybdelæring vs overflatelæring

Som en motpol til dybdelæring introduserer Ludvigsen-utvalget begrepet *overflatelæring* (NOU 2014: 7). Dette beskrives som et læringssyn der overføring av kunnskap står i sentrum (NOU 2014: 7). Fakta og prosedyrer memoreres uten å kunne koble disse kunnskapene til nye situasjoner (NOU 2015: 8). Utvalgets skildring av overflatelæring samsvarer med Sawyer (2022) sin beskrivelse av den tradisjonelle instruksjonistiske klasseromspraksisen. Sawyer (2022) har i sine utgaver av håndboken presentert forskjellene på dybdelæring og overflatelæring gjennom en tabell oversatt av Ludvigsen-utvalget (se tabell 1).

Dybdelæring Learning knowledge deeply (from cognitive science)	Overflatelæring Traditional classroom practises (instructionism)
Elever relaterer nye idéer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer.	Elever jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til det de kan fra før.
Elever organiserer egen kunnskap i begreps-systemer som henger sammen.	Elever behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.
Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper.	Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.
Elever vurderer nye idéer og knytter dem til konklusjoner.	Elever har vanskelig for å forstå nye idéer som er forskjellige fra de som er møtt i læreboka.
Elever forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i et argument kritisk.	Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført av en allvitende autoritet.
Elever reflekterer over sin egen forståelse og sin egen læreprosess.	Elever memorerer uten å reflektere over formålet eller over egne læringsstrategier.

Tabell 1. Dybdelæring vs overflatelæring (Sawyer, 2022) oversatt av Ludvigsen-utvalget

Fra tabell 1 kan en se at Sawyer (2022) tydelig skiller på hvordan behandling av lærestoff og kunnskap fremkommer i dybdelæring og i overflatelæring. Dybdelæring handler om å organisere egen kunnskap, se mønstre og relatere nytt lærestoff til det man allerede kan. I tillegg ser man på kunnskap med et kritisk blikk og reflekterer over det man lærer. Fra et overflatelæringsperspektiv dreier det seg mer om å memorere fakta og fremgangsmåter uten å se forbindelser. Da blir det utfordrende å løse nye typer oppgaver man ikke har sett før. Dessuten blir refleksjoner over hensikt og egen læreprosess et utelatt element i overflatelæring.

2.3.4 Sammenhengen mellom dybdelæring og kompetanse i LK20

Basert på Ludvigsen-utvalgets anbefalinger og kunnskapsdepartementets melding til Stortinget i 2015, ble en fornyelse av Kunnskapsløftet et faktum. Mellom 2017 og 2019 pågikk arbeidet med å fastsette Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 (LK20) med dybdelæring i fokus (Utdanningsdirektoratet, 2021). Nye og tydeligere kjerneelementer samt færre kompetansemål skulle forme de nye og bedre læreplanene i fagfornyelsen (Meld. St. 28 (2015-2016)). Lærerne skulle dermed kunne legge bedre til rette for elevenes varige forståelse for de mest sentrale elementene i fagene (Meld. St. 28 (2015-2016)).

Det er ingen tilfeldighet at dybdelæring beskrives under fagkompetanse i overordnet del. Dybdelæring har nemlig tett tilknytning til begrepet *kompetanse* (NOU 2015: 8). «Kompetanse betyr å kunne mestre utfordringer og løse oppgaver i ulike sammenhenger og omfatter både kognitiv, praktisk, sosial og emosjonell læring og utvikling, inkludert holdninger, verdier og etiske vurderinger» (NOU 2015: 8, s. 14). Kompetanse er altså noe man oppnår og skal utvikle i skoleopplæringen.

I LK20 sin overordnet del er følgende formulert under «Kompetanse i fagene»:

«Skolen skal gi rom for dybdelæring slik at elevene utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag, og slik at de lærer å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger. I arbeidet med fagene skal elevene møte oppgaver og delta i varierte aktiviteter av stadig økende kompleksitet. Dybdelæring i fag innebærer å anvende kunnskaper og ferdigheter på ulike måter, slik at elevene over tid kan mestre ulike typer faglige utfordringer individuelt og i samspill med andre.» (Utdanningsdirektoratet, 2017a)

En ser at Udir sin fremstilling av dybdelæring er i tråd med både Sawyer (2022) og Ludvigsen-utvalget sine beskrivelser. Både utvikling av forståelse, det å se sammenhenger og mestre utfordringer over tid med økende kompleksitet (progresjon), er ofte involvert når dybdelæring omtales. En ser at Ohlsson (2011) sin *overføring av læring* linkes til det Udir (2017a) sier om å bruke kunnskap og ferdigheter i ulike sammenhenger. Refleksjon over egen læreprosess, som både Sawyer (2022) og Ludvigsen-utvalget mener henger sammen med dybdelæring, nevnes ikke i dette sitatet. Likevel kommer dette frem i både Udir (2019a) sin definisjon (se innledning) og i videoen om dybdelæring (Utdanningsdirektoratet, 2018a). I tillegg fremheves viktigheten av metakognisjon under «Å lære å lære» (Utdanningsdirektoratet, 2017b).

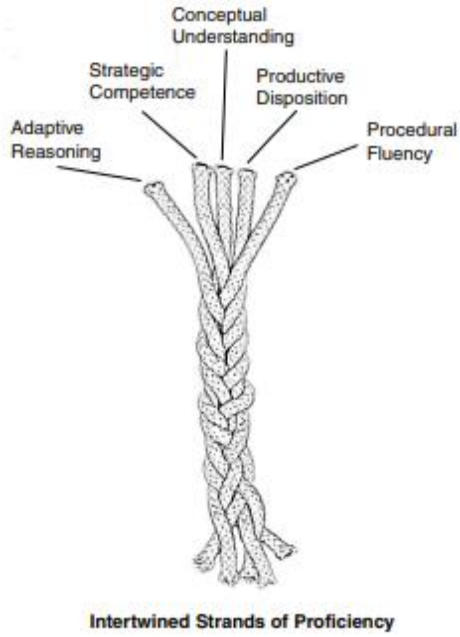
Begrepene dybdelæring og kompetanse overlapper og har mye til felles (Utdanningsdirektoratet 2018b). Udir (2018b) understreker at begge begrepene fremhever det å virkelig forstå noe. Dette står ifølge Udir (2018b) i kontrast til det å bare gjengi fakta og utføre innøvde prosedyrer. Å anvende kunnskaper og ferdigheter, altså å bruke det man har lært i kjente og ukjente situasjoner, er sentrale elementer i begge begrepene (Utdanningsdirektoratet 2018b). Det å lære å lære er en tydelig definisjon av både dybdelæring og kompetanse, påpeker Udir (2018b). Elevene skal være i stand til å reflektere over egen læring og legge en plan for sitt eget læringsforløp. Dette er viktig for å kunne velge hensiktsmessige læringsstrategier når man skal tilegne seg kunnskaper og ferdigheter (Utdanningsdirektoratet 2018b). For å skille kompetansebegrepet fra dybdelæringsbegrepet, velger Udir (2018b) å beskrive kompetanse som det elevene skal oppnå i opplæringen, altså mer om resultatet av selve læringen. For å oppnå kompetanse understreker de at dybdelæring er en helt nødvendig forutsetning.

2.4 Dybdelæring og kompetanse i matematikk

Det er foreløpig lite forskningslitteratur omhandlet dybdelæring i matematikk. Likevel finnes det et bredt spekter av forskning på matematisk kompetanse, dypere forståelse for matematikk og læring i matematikk. Både Ludvigsen-utvalget og Udir (2018a) gjør det klart at dybdelæring er en forutsetning for kompetanseoppnåelse. Det vil derfor være naturlig å berøre disse temaene når en skal se på dybdelæring i matematikk.

2.4.1. Matematisk kyndighet

Professor innen matematikkopplæring, Jeremy Kilpatrick, har sammen med sin komité forsket på matematikk og læring (Kilpatrick, 2001). De har valgt å bruke *mathematical proficiency* som et samlebegrep for *expertise* (ekspertise), *competence* (kompetanse), *knowledge* (kunnskap) og *facility* (ferdigheter) i matematikk. *Mathematical proficiency* kan oversettes til *matematisk kyndighet* og skal fange opp det det betyr å lære matematikk på en vellykket måte (Kilpatrick, 2001). Kilpatrick (2001) deler matematisk kyndighet inn i fem sammenflettede komponenter (se figur 3):



Figur 3. Trådmodellen for kyndighet

Conceptual understanding	(begrepsmessig forståelse)
Procedural fluency	(prosedyrekunnskap)
Strategic competence	(strategisk tankegang)
Adaptive reasoning	(resonnering)
Productive disposition	(engasjement)

Oversettelsene til komponentene er hentet både fra Ludvigsen-utvalgets hovedutredning (NOU 2015: 8) og Matematikksenteret (Nosrati & Wæge, 2018). Trådmodellen har vært sentral når de henholdsvis tar for seg kompetanse og dybdelæring i matematikk. Videre presenteres de fem komponentene til Kilpatrick (2001).

Begrepsmessig forståelse handler om å bygge begrepsstrukturer og se sammenhenger mellom matematiske begreper, idéer og prosedyrer (Kilpatrick, 2001). Det innebærer ifølge Kilpatrick

(2001) å knytte nye idéer til allerede lærte matematiske idéer og forstå viktigheten av disse Det er ikke nok å memorere fakta, formler og regneregler, understreker han. Begrepsmessig forståelse gjør det enklere å huske og bruke fakta og metoder korrekt. Siden disse faktaene og prosedyrene er lært med forståelse, kan de rekonstrueres dersom de glemmes. Kilpatrick (2001) poengterer at det er lite sannsynlig at elever husker en metode feil dersom den er forstått. Begrepsmessig forståelse gjør i tillegg elevene i stand til å benytte ulike representasjoner til å løse matematiske problemer på en passende måte (Kilpatrick, 2021).

Prosedyrekunnskap dreier seg om å ha kunnskap om matematiske prosedyrer og kunne bruke disse fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig (Kilpatrick, 2001). Kilpatrick (2001) fremhever at mange matematiske oppgaver i hverdagen krever en algoritmisk flyt i både beregninger for hånd og hoderegning. Han peker også på viktigheten av å være nøyaktig og effektiv for å kunne løse oppgaver korrekt på en hurtig måte. Dette er ifølge Kilpatrick (2001) trenbare ferdigheter. I tillegg vil økt fleksibilitet rundt prosedyrer styrke elevenes evne til å løse forskjellige oppgavetyper i ulike sammenhenger. Kilpatrick (2001) hevder at elevene ofte har utfordringer med å koble matematikkoppgaver de møter i skolen til dagligdagse matematiske problemer, og dermed behandler disse adskilt. Dette er et resultat av manglende forståelse for prosedyrene, forklarer han. Når elevene øver på prosedyrer de ikke forstår, er faren større for at de lærer prosedyrene feil. Slike misoppfatninger er ifølge Kilpatrick (2001) utfordrende å korrigere, spesielt hvis elevene har levd med disse misoppfatningene over lengre tid. Derfor bør prosedyrekunnskap følges av begrepsmessig forståelse, påpeker han. Kilpatrick (2001) forteller videre at disse to komponentene ofte blir sett på som motpoler i skolematematikken. Det gjør at prosedyrekunnskap havner i et ufortjent dårlig lys. Både begrepsmessig forståelse og prosedyrekunnskap er viktige komponenter som bør utvikles parallelt og flettes sammen i den matematiske læreprosessen (Kilpatrick, 2001).

Strategisk tankegang eller *anvendelse* handler om å kunne formulere, representere og løse matematiske problemer (Kilpatrick, 2001). Dette kan ifølge Kilpatrick (2001) assosieres med problemformulering og problemløsning som er velkjente fenomener fra didaktisk og kognitiv forskning. I mattetimene er det ofte klart hva elevene skal løse, mens i dagliglivet må problemene gjerne formuleres selv, poengterer han. Dette krever erfaring og øving like mye som selve problemløsningsprosessen. Når problemet er formulert, vil neste steg være å representere dette på matematisk vis (Kilpatrick, 2001). Det kan være med tall, symbol, ord og/eller grafer. Å kunne representere krever at elevene danner seg et mentalt bilde av de viktige elementene i problemet og er i stand til å sette dette opp på en hensiktsmessig måte (Kilpatrick, 2001). Når problemet skal løses, gjelder det ifølge Kilpatrick (2001) å se matematiske sammenhenger og være fleksibel i valg av løsningsstrategier. En god problemløser kan bruke kunnskaper og erfaringer til å koble matematiske konsepter til hverandre, og deretter velge fornuftig løsningsstrategi (Kilpatrick, 2001).

Resonnering handler om å kunne se og forklare den logiske koblingen mellom matematiske konsepter og kontekster (Kilpatrick, 2001). Elevene går da gjennom en mental prosess som innebærer vurdering av ulike alternativer og rettferdiggjøring av konklusjoner. I et matematisk resonnement er det ifølge Kilpatrick (2001) naturlig å ta utgangspunkt i noe kjent og bygge videre på dette. I siste del av resonnementet skal eleven kunne vurdere om valgt løsningsstrategi er gunstig og om løsningen gir mening. Resonnering er en viktig komponent i problemløsning, understreker Kilpatrick (2001). Elevene bruker strategisk tankegang til å formulere et problem og representere det før det resonneres frem en hensiktsmessig løsningsstrategi (Kilpatrick, 2001).

Engasjement dreier seg om å kunne se verdien av matematikk (Kilpatrick, 2001). Kilpatrick (2001) påpeker at matematikk er nyttig, og matematisk kompetanse lønner seg i daglig- og yrkesliv. Elevene må ha en indre tro på at de er i stand til å forstå, lære og bruke matematikk til å løse problemer. Desto flere matematiske konsepter de forstår, desto mer mottakelig blir matematikk, understreker han. Dersom elevene sjeldent blir eksponert for utfordrende oppgaver, vil de tro at det å lære matematikk kun handler om å memorere, og mister derfor selvtillit i læreprosessen. Kilpatrick (2001) påpeker at elever som ser på sine matematiske evner som stasjonære, der matteprøver er en test av disse evnene, har større sjanse for å unngå utfordrende oppgaver og føle seg mislykket. Elever som har et mer utvidet perspektiv, og tenker at matematiske evner kan utvikles ved øvelse og erfaring, søker i større grad utfordringer i matematikken og lærer av dette (Kilpatrick, 2001).

En ser at Kilpatrick (2001) har gode argumenter for at begrepsmessig forståelse, prosedyrekunnskap, strategisk tangegang, resonnering og engasjement er viktige elementer i elevenes læreprosess i matematikk. De representerer hver sine aspekter samtidig som de er flettet sammen og avhengige av hverandre. Matematisk kyndighet skal gjøre elever i stand til å hamle opp med matematiske problem som oppstår i hverdagen og forberede dem på videre studier (Kilpatrick, 2001). Dette er en tidkrevende prosess som bør igangsettes allerede når barna er små, advarer Kilpatrick (2001). Han mener kognitiv forskning støtter idéene som har båret frem de fem komponentene. Hvordan elever representerer og kobler sammen kunnskapsdeler er avgjørende for om de vil få en dyp forståelse og er i stand til å løse matematiske problemer (Kilpatrick, 2001). Mentale representasjoner og organisering av kunnskap bidrar ifølge Kilpatrick (2001) til bedre hukommelse og mental flyt samt forenkling av lærestoff. På bakgrunn av dette er læring med dyp forståelse mer betydningsfullt enn memorering. Han legger også til at kognitiv forskning innen problemløsning har dokumentert viktigheten av metakognisjon, noe både Sawyer (2022), Ludvigsen-utvalget og Nosrati og Wæge (2018) støtter.

2.4.2 Matematisk kompetanse og kjerneelementer i læreplanverket

Ludvigsen-utvalget beskriver matematisk kompetanse ved hjelp av Kilpatrick (2001) sine fem komponenter for matematisk kyndighet. De fremhever viktigheten av å utvikle komponentene parallelt slik at forbindelsene mellom dem blir styrket og elevene klarer å utvikle en varig og fleksibel matematisk kompetanse som er nyttig og relevant (NOU 2015: 8). Dette har tydelig satt sitt preg på det nye læreplanverket. Utdanningsdirektoratet berører matematisk kompetanse under overskriftene «om faget», «kompetansemål og vurdering» og i støttelitteratur. Jeg har valgt å oppsummere hva Udir legger i matematisk kompetanse punktvis.

Kompetanse i matematikk innebærer:

- å jobbe utforskende og problemløsende (Utdanningsdirektoratet, 2020c).
- å se, forstå og generalisere matematiske sammenhenger (Utdanningsdirektoratet, 2020c).
- å bruke det de har lært i kjente og ukjente situasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2020a).

- å kommunisere ved hjelp av matematisk språk (Utdanningsdirektoratet, 2020c).
- å resonnere og argumentere for gyldigheten av strategier og løsninger (Utdanningsdirektoratet, 2020c).
- å reflektere over egen læring (Utdanningsdirektoratet, 2018b).

Udir (2020a) peker på viktigheten av at elevene bygger sin matematiske kompetanse steg for steg slik at de opparbeider seg en solid grunnmur. Derfor har faget nå fått en tydeligere progresjon med færre kompetansemål etter hvert skoletrinn. Dette gir også mer tid til dybdelæring (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Kompetansemålene på de første trinnene vektlegger ifølge Udir (2020a) det å lage og følge regler og instruksjoner i lek- og spillsammenheng. Videre skal elevene selv kunne konstruere og ta i bruk algoritmer og fremgangsmåter gjennom bruk av variabler, vilkår og løkker. Et rikt begrepsapparat, god tallforståelse og gode strategier sier Udir (2020a) er viktig for å kunne løse matematiske problemer. På videregående er kompetansemålene tilpasset godt til de ulike utdanningsprogrammene. I praktisk matematikk er den praktiske nytten vektlagt, og målet er at elevene skal kunne modellere og utforske hverdagslige problemer ved hjelp av matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020a). I teoretisk matematikk skal elevene forberedes på videre studier der bruk av teoretiske verktøy, problemløsning og resonnering er i fokus (Utdanningsdirektoratet, 2020a).

Som tidligere nevnt innebærer dybdelæring å tilegne seg varig forståelse. Forståelse i matematikk involverer et fokus på *kjerneelementene* i faget (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Kjerneelementene uttrykker ifølge Udir (2019b) det elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget. De skal prege innholdet sammen med kompetansemålene og over tid bidra til elevenes forståelse og evne til å se sammenhenger (Utdanningsdirektoratet, 2019b). I det nye læreplanverket fremstilles seks kjerneelementer i matematikk som jeg skal ta for meg i korthet:

1. Utforsking og problemløsning
2. Modellering og anvendelser
3. Resonnering og argumentasjon
4. Representasjon og kommunikasjon

5. Abstraksjon og generalisering
6. Matematiske kunnskapsområder

Utforsking og problemløsning

Utforsking dreier seg om å lete etter mønster, se sammenhenger og diskutere seg frem til en felles forståelse (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Strategier og fremgangsmåter skal ifølge Udir (2020a) legges mer vekt på enn selve løsningene. Problemløsning dreier seg om å utvikle metoder for å løse ukjente problemer (Utdanningsdirektoratet, 2019d). Algoritmisk tenking fremheves som en viktig del av elevenes matematiske kompetanse (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Udir (2019c) kaller dette en problemløsningsstrategi som innebærer vurdering av problemets formulering og hensiktsmessig løsningsstrategi. Algoritmisk tenking handler også om å bryte ned et komplekst problem til mindre, håndterbare og løselige delproblemer (Utdanningsdirektoratet, 2019c). Dette involverer ifølge Udir (2019c) organisering og analysering av informasjon og konstruering av fremgangsmåter/algoritmer for å løse problemet.

Modellering og anvendelser

En matematisk modell uttrykker en bit av virkeligheten gjennom matematisk språk (Utdanningsdirektoratet, 2019d). Elevene skal kunne lage slike modeller og gjøre en kritisk vurdering av modellenes gyldighet og bruksområder. Gjennom anvendelse skal elevene få innsikt i hvordan matematikk kan brukes i ulike kontekster i faget, på tvers av fag og i det daglige.

Resonnering og argumentasjon

Resonnering i matematikk går på å følge, forstå og vurdere matematiske tankesett (Utdanningsdirektoratet, 2019c). Udir (2019c) påpeker at elevene skal evne å resonnere selv og forstå hvorfor matematiske konsepter og løsninger er som de er. Argumentasjon dreier seg ifølge (Udir, 2019c) om å begrunne fremgangsmåter, resonnement, løsninger og kan argumentere for at disse er gyldige gjennom bevis. Argumentasjon, resonnering og gyldighetsvurdering bør gjennomsyre hele opplæringsløpet (Utdanningsdirektoratet, 2020a).

Representasjon og kommunikasjon

Representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på (Utdanningsdirektoratet, 2019d). Dette kan være gjennom ord, symboler og/eller visualiseringer. Elevene skal ifølge Udir (2019d) være i stand til å benytte seg av ulike representasjoner av matematiske problemer og begrunne representasjonsvalg. Kommunikasjon i matematikk handler om å kunne uttrykke seg ved hjelp av matematisk språk (Utdanningsdirektoratet, 2019d).

Abstraksjon og generalisering

Abstraksjon dreier seg om å utvikle et formelt matematisk språk og formelle resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2019c). Generalisering handler om det å se matematiske sammenhenger og strukturer, og kunne utrykke dette ved hjelp av algebra og hensiktsmessige representasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2019c).

Matematiske kunnskapsområder

Matematiske kunnskapsområder omhandler kunnskapen elevene trenger for å utvikle matematisk forståelse gjennom utforsking av sammenhenger innad og mellom områdene. (Utdanningsdirektoratet, 2019c). Disse kunnskapsområdene er ikke like for alle trinn, påpeker Udir (2019c). For matematikk i grunnskolen omfatter områdene tallforståelse, algebra, funksjonslære, geometri og statistikk (Utdanningsdirektoratet, 2019c). I f.eks. matematikk S og R er områdene knyttet til matematisk teori og reelle anvendelser (Utdanningsdirektoratet, 2020b).

En ser at kjerneelementene i matematikk går hånd i hånd med matematisk kompetanse. Begreper som *utforsking*, *problemløsning*, *resonnering*, *argumentasjon*, *generalisering*, *representasjon* og *kommunikasjon* går igjen i både Udir sin forståelse av matematisk kompetanse og i kjerneelementene i faget. I tillegg ser en at kjerneelementene har tydelige likhetstrekk med trådmodellen til Kilpatrick (2001). Ifølge Kunnskapsdepartementet skal kjerneelementene bidra til å unngå stofftrengsel i faget. De skal være rettesnorer og tydeliggjøre det viktigste elevene skal kunne i matematikk (Meld. St. 28 (2015-2016)). Dette er med på å legge til rette for dybdelæring.

2.4.3 Dybdelæring i matematikk

Bolstad (2021) legger vekt på at dybdelæringsbegrepet har ulike tolkninger og perspektiver. Han deler dybdelæring inn i sju overskrifter som samsvarer med tidligere nevnte beskrivelser. For å definere hva dybdelæring i matematikk kan være, ønsker jeg å koble Bolstad (2021) sine overskrifter til beskrivelsene av matematisk forståelse, kompetanse og kyndighet. For å komprimere litt, har jeg valgt å slå sammen noen av overskriftene.

Dybdelæring skjer «i hodet» og med kroppen

Dybdelæring omfatter kognitive prosesser. Ohlsson (2011) beskrev dybdelæring fra et kognitivt perspektiv gjennom kreativitet, overføring av læring og endring av oppfatninger. Kreativitet i matematikk kan knyttes til kjerneelementet «problemløsning og utforskning», og det Kilpatrick (2001) legger frem som strategisk tankegang. Dette omfatter det å oppdage mønster og sammenhenger og skape nye løsningsstrategier for å løse matematiske problemer. Overføring av læring i matematikk handler om å bruke begrepsforståelse, prosedyrekunnskap og resonneringsferdigheter i matematikk til å løse problemer i livet utenfor skolen. Denne evnen krever mental omstilling og dyp forståelse for matematiske konsepter. Å endre oppfatninger i matematikken handler om å ta til seg nytt fagstoff i matematikk, men også korrigere misforståelser rundt matematiske regler, begreper, symboler, algoritmer og andre aspekter i faget.

Dybdelæring skjer også med kroppen. Å bruke kroppen og sansene aktivt, gir en mer virkelighetsnær tilknytning til matematiske konsepter og sammenhenger i og på tvers av fag. Bolstad (2021) understreker viktigheten av å ikke bare lære *om* noe, men det å faktisk *gjøre* noe praktisk. Å regne på blandingsforholdet til betong og faktisk blande denne betongen fysisk, gir en større nærhet til forholdstall enn teorioppgaver om samme tema. Dersom elevene i tillegg er i stand til å overføre denne lærdommen til medisinblanding og matlaging, kan en si de har tatt et stort steg i retning dybdelæring.

Dybdelæring er å utvikle kompetanse

Dybdelæring i matematikk er å utvikle matematisk kompetanse. Dybdelæring i matematikk handler om å forstå begreper og løsningsmetoder slik at man er i stand til å løse matematiske problemer utenfor klasserommet. Å kunne bruke digitale verktøy som graftegner, CAS og programmering til utforskning har blitt en viktig del av den matematiske kompetansen. Det å overføre læringen til nye situasjoner, som ble eksemplifisert i forrige avsnitt, kjennetegner også kompetanse og dybdelæring i matematikk. I tillegg er det viktig å kunne se sammenhenger innad i matematikkfaget. Å eksempelvis kunne koble vekstfaktor, som ble lært i prosentregning, til eksponentialfunksjoner lært i funksjonslære, er en viktig ferdighet.

Dybdelæring i matematikk dreier seg om å gradvis utvikle kunnskap og ferdigheter i matematikk og bruke disse fornuftig i ulike kontekster. Det kan være å gradvis få en forståelse for begrepet derivasjon, kunne bruke derivajonsregler til å finne den deriverte, og bruke dette til å undersøke når en bedrift hadde raskest vekst i omsetning en gitt periode.

Som både Sawyer (2022), Ludvigsen-utvalget og Udir understreker, er det å reflektere over egen læring en del av kompetanseutviklingen. Nosrati og Wæge (2018) peker på at bevisstgjøring av egne lærings- og løsningsstrategier i matematikk gjør det enklere å regulere disse. Dette er spesielt nyttig i matematikk der det finnes et uendelig antall måter å angripe problemer på. Hva vil f.eks. være den beste måten å lære seg de viktigste eksakte verdiene i trigonometri på? Mange elever tyr nok til memorering i et slikt tilfelle. Hva om enkelte verdier plutselig glemmes? Kanskje en strategi er å se mønsteret i verdiene og lære seg dette? Kan det tenkes at det å se sammenhengen mellom enhetssirkelen, de trigonometriske funksjonene og de eksakte verdiene gjør det lettere å hente frem glemte verdier, slik Kilpatrick (2001) påpekte?

Dybdelæring skapes i felleskap og gjennom språk

Som både Sawyer (2022), Udir (2019a) og Bolstad (2021) er inne på, skapes dybdelæring sammen med andre. Faglige diskusjoner i matematikk gir rom for argumentasjon der elevene kan komme frem til en felles forståelse for begreper, metoder, sammenhenger og løsninger. På denne måten kan elevene gradvis bli en del av et matematisk felleskap, bli tryggere og ta mer ansvar i faget. Dybdelæring i matematikk skapes gjennom dialog mellom elever og mellom lærer og elever. Dette er gylne anledninger til å få korrigert misoppfatninger av matematiske begreper og konsepter, noe Ohlsson (2011) fremhevet. Siden matematikkfaget inneholder mange begreper, formler, regler og algoritmer, er det lett for at elevene blander. Å bruke matematisk språk i faglige diskusjoner gjør at elevene får et nærere forhold til og bedre forståelse for disse elementene i faget.

Dybdelæring krever tid og mening

I og med at dybdelæring handler om å gradvis utvikle kunnskap og tilegne seg varig forståelse, er tid en avgjørende faktor. Mye lærestoff har en motvirkende effekt på dybdelæring i matematikk. Dette gjør at elevene får overfladisk kunnskap innen et stort omfang av matematiske temaer. Nå som den nye læreplanen i matematikk har en tydeligere progresjon og færre kompetansemål, skal det bidra til økt fokus på det mest sentrale i matematikken.

Å huske matematiske begreper og kunne bruke formler og algoritmer har tradisjonelt sett vært ledende kunnskaps- og ferdighetsområder i matematikken. Problemet med et heldekkende fokus på dette, er at matematikk blir assosiert med pugging av regler og formler. Dette går på bekostning av elevenes engasjement i faget. Memorering er en viktig kognitiv ferdighet for å effektivisere og automatisere utregninger. Likevel bør ikke dette alene bære fagets identitet. Elevene må oppleve matematikk som relevant og nyttig i dagliglivet, slik Kilpatrick (2001) beskriver under komponenten engasjement. Dette gir nemlig motivasjon og betydelig større læreforutsetninger i matematikkfaget.

3. Metode

Kan et fokus på dybdelæring i matematikk gi VG3-elever dyp forståelse for integrasjon?

For å besvare dette spørsmålet måtte jeg samle inn og analysere datamateriale fra elever på videregående skole. I dette kapitlet skal jeg presentere og begrunne mine metodevalg, beskrive forberedelses- og gjennomføringsprosessen, vurdere studiens troverdighet og reflektere over etiske forhold knyttet til prosjektet.

3.1 Metodevalg

Da jeg skulle velge metode for innsamling av data var det flere faktorer som spilte inn. Først og fremst måtte den være hensiktsmessig i forhold til forskningsspørsmålet. Hvordan kunne jeg på best mulig vis kartlegge elevenes dybdeforståelse for et tema i matematikk? Skulle jeg ha mange eller få informanter? Med tid som en begrensende faktor for både meg, elevene og lærerne, måtte undersøkelsen gjennomføres hendig og effektivt. Kunsten var å kombinere dette med å skaffe et informativt og diskuterbart datagrunnlag.

3.1.1 Forskningsmetode

I denne studien konkluderte jeg med at en *kvalitativ* undersøkelse ville være naturlig å gjennomføre. På denne måten kunne jeg grave dypere i hver enkelt elevs forståelse. En *kvantitativ* metode kunne gitt meg data fra mange elever på flere skoler, men ville vært en tidkrevende innsamlings- og analyseprosess. I tillegg ville f.eks. et spørreskjema ført til en større distansering mellom meg som forsker og elevene som informanter. Det gjør det mer utfordrende å analysere elevenes kognitive prosesser og forståelse. Siden informantene skulle videreformidle individuelle tanker og forklaringer, vil en kvalitativ tilnærming være mer hensiktsmessig enn en kvantitativ (Skilbrei, 2019).

3.1.2 Datainnsamlingsmetode

For å samle inn data på mest gunstig vis, valgte jeg intervju som metode. Skilbrei (2019) hevder at forskere gjennomfører kvalitative intervjuer for å tilegne seg kunnskap om informantenes ulike tolkninger og perspektiver. I tillegg er intervjusituasjoner egnet for å skaffe detaljerte og helhetlige beskrivelser fra informantene (Skilbrei, 2019). Dette er forhold som er relevant for forskningen min. I tillegg til å intervjue, kunne jeg valgt å observere informantene i klasserommet. Potensielt kunne dette bidratt til en mer helhetlig oversikt over elevenes forståelse for integrasjon. Hvis observasjonen skulle vært givende, måtte jeg brukt mye tid i klasserommet og deltatt i mange undervisningstimer. Med tid som en begrensede faktor, og usikkerhet rundt kvaliteten på det eventuelle datamaterialet, var det vanskelig å rettferdiggjøre observasjon som en supplerende metode i forskningen min.

3.2 Forberedelsesprosessen

I forkant av de kvalitative intervjuene var det flere valg og hensyn som måtte tas. Først og fremst måtte jeg finne én eller flere skoler med elever som ville delta. Skolen(e) måtte tilby matematikk S2 og R2 i og med at jeg skulle forske på VG3-elever med integrasjon i fagplanen. Fordelen med å velge elever i tredje-klasse, er at de har fylt 18 år. Da er de myndige og trenger derfor ikke samtykke fra foreldrene til å delta. Dette gjorde samtykkeprosessen mer effektiv for alle parter. Siden matematikk er et stort fagfelt, valgte jeg å tilspisse forskningen mot ett tema. Integrasjon er pensum i både S2 og R2, og var derfor et passende tema å ta for seg. I tillegg passet det fint med hensyn til tidspunktet klassene jobbet med temaet på.

3.2.1 Valg av informanter

Da jeg fikk godkjennelse fra en S2- og en R2-klasse på samme skole, var neste oppgave å finne ut hvor mange elever som skulle intervjues. Jeg valgte å gå for tre elever fra S2-klassen og tre fra R2-klassen. Dette er naturligvis ikke nok til å trekke konklusjoner om hvorvidt dybdelæring har ført til dybdeforståelse i integrasjon for VG3-elever. Likevel burde seks elever kunne gi nok data til en innholdsrik diskusjon om dybdelæring i matematikk. For å få et mangfold av perspektiver, fikk jeg lærerne til å plukke ut tre frivillige hver med varierende kompetanse i matematikk. En slik bredde gir ifølge Skilbrei (2019) et mer dekkende bilde. Elevene ble informert av både lærerne og meg om hva deltakelsen i forskningen innebar.

3.2.2 Planlegging av intervju

For å få størst mulig utbytte fra intervjuene, var det viktig at spørsmålene var gode. Gode spørsmål er spørsmål som gir meg den samlede informasjonen jeg trenger (Skilbrei, 2019). Skilbrei (2019) nevner at ja/nei-spørsmål og ledende spørsmål er lite hensiktsmessig med mindre de fyller en funksjon. Jeg valgte derfor å unngå slike typer spørsmål, og heller stille mer åpne spørsmål og gi matematikkoppgaver som potensielt kunne gi rikelig med informasjon. Innholdet i spørsmålene og oppgavene ble utviklet i tråd med Gardner og Mansillas fire dimensjoner av forståelse: hensikt, kunnskap, metode, og form (se kap. 2.3.2) og Kilpatrick (2001) sin trådmodell (se kap. 2.4.1). Siden forståelse og kompetanse i matematikk er forutsetninger og konsekvenser av dybdelæring, vil det være naturlig å basere intervjuspørsmålene på dette. For å få et innblikk i hvordan elevene jobbet med integrasjon, valgte jeg å studere de aktuelle kapitlene i pensumbøkene deres (Borgan m.fl., 2022) og (Kalvø m.fl., 2022). I tillegg tok jeg for meg kompetansemålene som gikk på integrasjon. Dette kunne jeg bruke til å formulere spørsmål som var passende for både S2- og R2 elevenes kompetansekrav.

Skilbrei (2019) peker på at strukturen på intervjuet er avgjørende for resultatet. *Strukturerte intervjuer*, gir mer sammenlignbare data fra de ulike informantene, hevder hun. Slike intervjuer bygger på forhåndsbestemte spørsmål som gjerne stilles i samme rekkefølge i alle intervjuene ifølge Skilbrei (2019). I tillegg er det noen ganger behov for at spørsmålene stilles på samme måte i intervjuene (Skilbrei, 2019). Siden elevene skulle vise forståelse og kompetanse i matematikk, var det viktig at de fikk like rammer og gjennomførte individuelt. Da måtte jeg som intervjuer ha en passiv rolle og være bevisst på både ordvalg og kroppslig atferd. På denne måten får elevene vist hva de kan uten ytre påvirkninger slik at jeg får mer autentiske data å analysere.

Gjennomføringstidspunkt var også en avgjørende faktor, da dette har påvirkning på elevenes minne av fagstoffet. Siden forskningen min omhandler dybdelæring og dermed varig forståelse, hadde det optimale vært å intervjue elevene flere ganger over en lengre periode. Med begrenset tid, måtte antall intervjuer naturligvis komprimeres. Jeg planla derfor kun ett intervju per elev. Siden S2-klassen hadde om integrasjon før jul og R2-klassen fullførte temaet i februar, ville jeg komme raskt i gang med S2-elevene og heller drøye intervjuene til

R2-elevene så lenge som mulig. På denne måten kunne jeg jevne ut tidsrommet mellom intervju og klassenes arbeid med temaet.

3.3 Gjennomføring av intervju

For at elevene skulle få sitte i kjente omgivelser, gjennomførte jeg intervjuene på et grupperom rett ved klasserommet. Trygge rammer er viktig for å skape en trygg intervjusituasjon for informantene (Skilbrei, 2019). Siden rammene kunne minne om en muntlig vurderingssituasjon i matematikk, var det viktig for meg å presisere innledningsvis at intervjuene ble anonymisert, og at dette på ingen måte skulle påvirke vurderingen deres i faget. Dette virket å ha en beroligende effekt på elevene. I tillegg informerte jeg om hvordan intervjuet skulle gå for seg for å skape en forutsigbarhet ovenfor elevene.

Jeg hadde totalt fem punkter jeg skulle gjennom. For å ikke stjele for mye av undervisningstiden til elevene, måtte derfor intervjuene ikke vare for lenge. Samtidig måtte jeg ha nok tid til å skaffe rikelig med data. Jeg valgte derfor å sikte meg inn på rundt 15 minutter per intervju. På denne tiden skulle elevene vise sin forståelse for integrasjon ut fra mine fem punkter i intervjuguiden.

Alle intervjuene i forskningen ble tatt opp via lydopptaker på mobilen. Dette gjør det enklere å analysere dataene i ettertid. Man er ikke like avhengig av å huske alle detaljer i selve intervjuet. Jeg valgte å innlede opptakene med at informantene bekreftet sitt samtykke til deltakelse muntlig. Dette for å sikre at de er innforstått med studiet og samtykker å delta i forskningsprosjektet, noe Skilbrei (2019) ser på som viktig.

Siden punktene i intervjuguiden min hadde ulike tilnærminger, la jeg spørsmålene frem på ulike måter. Flertallet av spørsmålene ble stilt muntlig der elevene skulle svare muntlig. Der begreper og regnestykker var innholdet, valgte jeg å supplere med en lapp der begrepet eller regnestykket stod nedskrevet. Å få begreper og regnestykker presentert visuelt kan gjøre det enklere å sortere tankene og hente frem assosiasjoner. Det siste punktet i intervjuguiden var det mest omfattende. Her fikk elevene utdelt et utklipp fra Geogebra, et blankt ark og skrivesaker. De skulle nemlig sette opp og delvis utføre utregninger. Samtidig fikk de beskjed om å forklare underveis hva de tenkte slik at jeg kunne få et innsyn i de kognitive prosessene deres.

3.4 Pålitelighet, gyldighet og etikk

Et forskningsprosjekt vil alltid være påvirket av ytre faktorer. Det vil derfor være naturlig å se på studiens grad av pålitelighet og gyldighet. En bruker gjerne begrepene *reliabilitet* og *validitet*. Er resultatene og funnene knyttet til studien til å stole på? Er de gjeldene for andre tilsvarende utvalgsgrupper? I tillegg skal jeg i dette delkapittelet ta for meg etiske forhold i studien.

3.4.1 Reliabilitet

Reliabilitet dreier seg om studiens pålitelighet. Et solid forskningsprosjekt er et resultat av grundig arbeid med datainnsamling, registrering og renskriving, analyse og fremstilling av funn (Postholm & Jacobsen, 2011). Kvaliteten på forskningsprosessen og åpenheten rundt det, er ifølge Postholm og Jacobsen (2011) avgjørende for om leseren oppfatter studien som troverdig. For min del har det derfor vært viktig å være nøye i alle forskningens faser. Samtidig har jeg unngått unødvendige snarveier da dette kan svekke påliteligheten til studiet (Postholm & Jacobsen, 2011).

Som tidligere nevnt har tid vært en begrensende faktor i forskningsprosjektet. Med kun fem måneder å gjennomføre prosjektet på, var det forenklinger og avskjæringer som måtte foretas. Intervjuene ble dermed korte og få, noe som naturligvis påvirker både datainnsamlingen og diskusjonen. Ideelt sett hadde jeg hatt et større datasett med flere elever fra flere klasser. I tillegg ville intervjuer over en lengre periode, gjerne med observasjon i klasserom som supplement, gitt et større bilde over elevenes varige forståelse.

For å sikre størst mulig reliabilitet, var det viktig å stille elevene gode spørsmål som var relevante for forskningen. I tillegg ble informanter med ulike forutsetninger og nivå en del av utvalget for å sikre bredde i datamateriale. Dette har jeg allerede vært innom tidligere i kapittelet.

Atferden min under intervjuene er også en viktig faktor for forskningens reliabilitet. Stilte jeg spørsmålene likt til alle elevene? Hvilke kroppslige og verbale signaler gav jeg elevene da de svarte på spørsmålene? Var det noen som fikk flere ledetråder og hint enn andre? Å stille spørsmålene og respondere identisk i alle intervjuene er krevende. Likevel var det viktig at reaksjonene mine var så moderate som mulig og at elevene fikk like rammer slik at dataene ble mer pålitelige.

3.4.2 Validitet

Validiteten til en studie handler om dens gyldighet. Det går på om en har dekning for tolkingene av funnene og resultatene (Postholm & Jacobsen, 2011). Hva er sammenhengen mellom årsak og virkning? Er resultatene generaliserbare? Postholm og Jacobsen (2011) skiller mellom indre og ytre gyldighet.

Indre gyldighet dreier seg om dekningen en har for å si at noe henger sammen som årsak og virkning. (Postholm & Jacobsen, 2011). Hva om lærerne hadde plukket ut noen av de andre frivillige elevene til intervju? Hva om jeg hadde valgt en annen skole å gjennomføre intervjuene på? Hadde funnene blitt annerledes? Det kan være *tilfeldige forskjeller* som påvirker resultatene, opplyser Postholm og Jacobsen (2011). Hadde elevene ulik mengde tilstedeværelse i de aktuelle mattetimene? Var enkelte påvirket av personlige forhold på intervjudagen? Det kan også være *systematiske forskjeller* som har innflytelse på funnene (Postholm & Jacobsen, 2011). Kanskje lærerne har praktisert og presentert integrasjon ulikt i klassene. Mulig de har tolket dybdelæringsbegrepet ulikt og lagt til rette på forskjellige måter. En annen systematisk forskjell mellom klassene kan gå på nivå og engasjement. Det kan tenkes at R2-elever er mer kompetente og engasjerte i matematikk enn S2-elever basert på fagenes ulike vanskelighetsgrad. Dette er viktige faktorer å ta hensyn til når forskningsspørsmålet skal besvares.

Ytre gyldighet går på om en kan generalisere resultatene og funnene til lignende utvalgsgrupper (Postholm & Jacobsen, 2011). Vil funnene kunne gjenspeile den generelle forståelsen for integrasjon hos alle VG3-elever? Det vil kreve en større mengde data for å kartlegge dette. Postholm og Jacobsen (2011) påpeker at en generalisering fra et utvalg til en populasjon i prinsippet kun kan skje hvis utvalget er trukket ut tilfeldig. De hevder at mange forskningsprosjekter ikke tilfredsstiller dette kravet (sånn som mitt). Derfor er det viktig at jeg argumenterer godt for gyldigheten via teori eller annen tilsvarende forskning (Postholm & Jacobsen, 2011). Dersom argumentene er godt forankret i relevant teori, vil argumentasjonen og generaliseringen stå sterkere (Postholm & Jacobsen, 2011).

3.4.2 Etiske forhold

I arbeidet med et forskningsprosjekt er det viktig å være etisk bevisst (Postholm & Jacobsen, 2011). De nasjonale forskningsetiske komiteene (2019) bygger forskningsetikk på de fire prinsippene *respekt*, *gode konsekvenser*, *integritet* og *rettferdighet*. Respekt handler om å respektere de involverte i studien. Som forsker skal man i tillegg sørge for at gode konsekvenser påfølger aktivitetene. Samtidig er man pliktet å følge normer og regler, og opptre åpent, ærlig og ansvarlig. I tillegg skal forskningsprosjektet være utført og utformet rettferdig (De nasjonale forskningsetiske komiteene, 2019).

I forberedelsesprosessen var det viktig å tenke over de etiske forholdene knyttet til informantene og skolen. For å bevare elevenes og skolens anonymitet har jeg valgt å ikke navngi dem. Dermed var det ingen personopplysninger å behandle, og da var det heller ikke nødvendig å melde forskningsprosjektet inn til NSD (Norsk senter for forskningsdata).

Da elevene skulle trekkes ut, var det viktig at dette var basert på frivillighet. Alle har nemlig rett til å ikke bli gjort til gjenstand for forskning hvis de ikke ønsker det (Skilbrei, 2019). Dette gjør at forskere bør sørge for at informantene gir et informert og fritt samtykke, forklarer Skilbrei (2019). Det involverer at de er klar over hva studien innebærer og deltar uten noen form for tvang (Skilbrei, 2019). Jeg valgte derfor å informere elevene om studien i forkant av opptakene og opplyste om at taleopptakene slettes etter prosjektets slutt. I tillegg innledet jeg intervjuene med å spørre elevene om de samtykket til å delta i forskningsprosjektet.

4. Resultat

I dette kapitelet skal jeg presentere datamaterialet jeg samlet inn. Det ble totalt seks intervjuer med tre elever fra S2-klassen og tre fra R2-klassen. Alle elevene fikk de samme spørsmålene. Siden elevene anonymiseres, har jeg valgt å nummerere de fra 1 til 6. Anonym 1-3 hører til S2-klassen, mens Anonym 4-6 tilhører R2-klassen. Disse forkortes henholdsvis til A1, A2, … , A6. Siden intervjuene ble gjennomført via lydopptak, ble elevbesvarelsene transkribert. Jeg valgte å gjøre dette manuelt siden et transkriberingsprogram kunne fått problemer med dialektene.

4.1 S2-elevenes besvarelser

1) **Hvilket forhold har du til matematikk og hvorfor har du valgt å ta S2?**

A1 synes matematikk er gøy når han får det til, men ikke hvis han ikke gjør det. Han valgte å ta S2 fordi han måtte ha det for å komme inn på ønsket utdanningsprogram på VGS.

A2 synes matte er ok. Det er ikke favorittfaget, men greit. Årsaken til at hun valgte S2 var at hun trengte S1+S2 eller R1 til videre studier. Sjansen for å få bedre karakter i S1 og S2 var større enn i R1, mente hun.

A3 er glad i matematikk og valgte S1 og S2 fordi hun liker matte og fordi det er et krav for videre utdanning.

2) **Forklar kort følgende:**

Integrasjon ***dx*** ***Analysens fundamentalteorem***

A1 nevnte firkanter i Geogebra og areal i forklaringen av integrasjonsbegrepet. Han kjente igjen *dx*, men kunne ikke plassere det. Analysens fundamentalteorem hadde han ikke hørt om.

A2 forklarte integrasjon som omvendt derivasjon og at man kan finne arealet mellom x-aksen og grafen ved hjelp av integrasjon. Hun var usikker på hva *dx* egentlig betydde, men prøvde seg på «den delen du ikke vet». A2 visste derimot at *dx* stod i slutten av et integral. Analysens fundamentalteorem dro hun kjensel på fra mattetimene, men forstod det aldri. «Hadde jeg fått en oppgave om det, hadde jeg kanskje visst hvordan jeg skulle gjort det.»

A3 beskrev integrasjon som det motsatte av derivasjon. «Man antideriverer et funksjonsuttrykk», fortalte hun. Hun beskrev *dx* som forskjell i x-verdier. «Man tar den ene x-verdien minus den andre». A3 sa først at hun ikke husket hva analysens fundamentalteorem var, men nevnte etter hvert at det brukes til å finne arealet under grafen.

3) **Kan du nevne situasjoner i det daglige der integrasjon kommer til nytte?**

A1 svarte at han husket en oppgave med en stein som ble droppet fra an høyde. I tillegg nevnte han økonomi uten å utdype dette noe mer.

A2 svarte at integrasjon kan brukes til å bygge noe der man trenger å vite arealet hvis det ikke er snakk om rette linjer. Hun nevnte også statistikk som et fagområde hvor det kan brukes. «Hvis man skal summere mange verdier og finne en total mengde av noe.»

A3 husket igjen en bassengoppgave der de brukte integrasjon for å finne hvor dypt bassenget var. Her brukte de arealet under grafen for å finne det dypeste punktet. A3 hadde også brukt integrasjon til å identifisere ulike stoffer i kjemien. Her regnet hun på arealet under toppene for å finne hvilken molarmasse stoffet hadde. Dette fordi det hengte sammen med hvor mye av stoffet som var i gasskromotografen og klarte med det å finne ut hvilket stoff det var.

4) **Hvilken integrasjonsmetode er hensiktsmessig å bruke her? Begrunn. Skal ikke regne ut.**

a) $\int \boldsymbol{xe^{x}\,dx}$ **b)** $\int \boldsymbol{\frac{x+1}{x^2-1}\,dx}$

A1 hadde ikke noe svar å komme med i denne oppgaven. Han kunne så vidt dra kjensel på variabelskifte og delbrøksoppspaltning da jeg nevnte disse. På grunn av tilleggsinformasjonen jeg gav, resonnerte A1 seg frem til at b) kunne løses ved hjelp av delbrøksoppspaltning.

A2 var usikker på om denne regelen gjaldt for addisjon eller multiplikasjon, men foreslo å dele integralet i a) opp i to og gange:

$\int x\,dx \cdot \int e^x\,dx$

Jeg spurte om hun husket noen av de integrasjonsmetodene de hadde lært om. Hun husket ikke navnet på de umiddelbart, og begynte istedenfor å regne integralet til x til å bli $\frac{1}{2}x^2$ og forklarte at integralet av e^x blir seg selv. Etterpå kom hun på kjerneregelen som en metode. «Sette den ene til å være u og den andre til å være v og derivere de og sette de inn på ett eller annet vis». Hun følger opp med at for å løse a) er det en «gangeregel», mens i b) er det «en brøk med u og v og et mønster man skal følge».

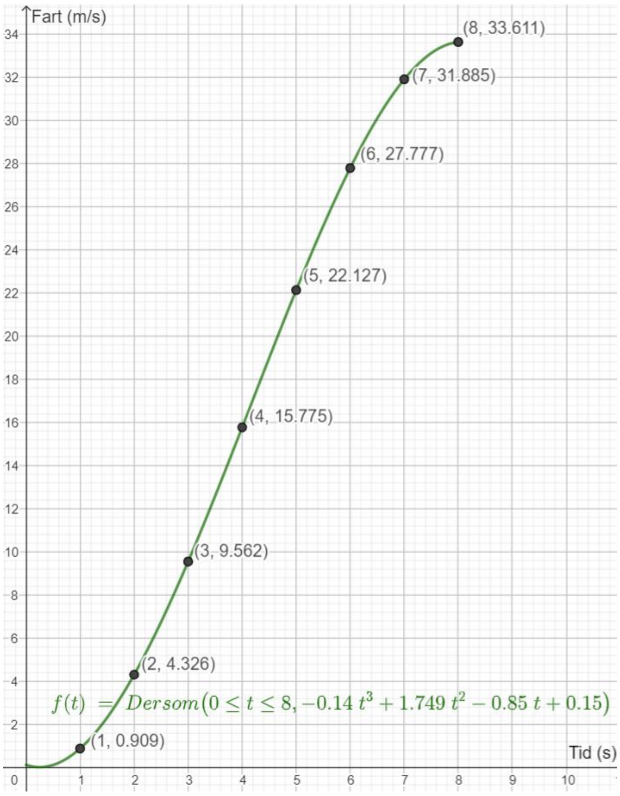
A3 så kjapt hvordan disse oppgavene skulle løses. På a) ville hun valgt «delvis derivasjon fordi da får man x i den siste delen slik at den blir 1, og tar deretter den minus deriverte av e^x. På b) kan vi skrive det om til (x+1)(x−1) og spalte brøken og ta A+B delt på brøk». Hun husket ikke helt navnet på metoden, men etter et hint kom hun på delbrøksoppspaltning. Etterpå spurte jeg om hun kunne gjøre om uttrykket og bruke en annen metode å løse b) på. Da forklarer A3 at man kan forkorte brøken til $\frac{1}{x-1}$ og integrere dette til å bli $\ln|x - 1|$. Hun husket ikke navnet på denne metoden, men kjente igjen variabelskifte da jeg sa det. Den siste metoden var den mest hensiktsmessige, konkluderte hun med.

5) **Akselerasjonstest på bil: 0-100 km/h**

a) Hva forteller arealet under grafen?

b) Hvor langt kommer bilen på 0-100 km/h-testen? Hint: 100 km/h ≈ 27.777 m/s

c) Forklar kort andre metoder som kan benyttes for å regne ut b).



A1 visste ikke svaret på a). Jeg prøvde å hinte litt uten at det hjalp. For at han skulle kunne løse b) fikk han svaret på a).

«Jeg hadde klart å sette opp integralet i Geogebra, men ikke for hånd.» Han nevnte begrepet *antiderivere* og «en formel med noe u og n i». For å gi A1 muligheten til å vise at han kunne integralregning, skrev jeg opp det ubestemte integralet til han. Jeg lot han sette på endepunktene i intervallet selv. Han skrev 1 som nedre grense og 6 som øvre grense. Videre klarte han ikke sette opp de neste stegene i utregningen. Han nevnte likevel at integralet som nå var satt opp skulle antideriveres. A1 klarte ikke si noe på c).

A2 resonnerte seg frem ved hjelp av aksene at arealet under grafen forteller *meter*. For å løse b), satte hun opp et bestemt integral fra 0 til 27,78:

$$\int_0^{27.78} -0.14t^3 + 1.749t^2 - 0.85t + 0.15\,dx$$

Videre sa A2 at hun kunne ta ut 0.15 siden det er et helt tall:

$$0.15 \int -0.14\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}1.749t^3 - \frac{1}{2}0.85t^2 + C$$

$$\int 0.15 - 0.14\frac{1}{4}\ 0^4 + \frac{1}{3}1.749\ 0^3 - \frac{1}{2}0.85 \cdot 0^2 -$$

$$\int 0.15 - 0.14 \cdot \frac{1}{3}\ \ 27.78^4 + \frac{1}{3} 1.749 \cdot 27.78^3 - \frac{1}{2} \cdot 0.85 \cdot 27.78^2$$

Hun husket ikke helt om man skulle ta $b - a$ eller $a - b$ i dette steget.

I oppgave c) svarte A2 at hvis hun hadde fått det på del 2, hadde hun brukt Geogebra og tegnet det opp og funnet integralet. Man kan også bruke CAS og skrive inn funksjonen og integralet la hun til.

A3 fortalte ved hjelp av enhetene i oppgaven at grafen viser antall kjørte meter. På b) stod hun litt fast i starten. Hun sa at hun skulle finne integralet «fra her til der» og pekte på det riktige området. Likevel stod hun litt fast når det kom til å skrive ned integralet på papiret. Hun fortalte videre at hun var vant med å gjøre slike oppgaver på Geogebra. Etter litt motivering fra min side, klarte hun til slutt å representere og løse oppgaven. Hun førte det slik:

$$\int_0^6 -0.14t^3 + 1.749t^2 - 0.85t + 0.15\, dt$$

$$\left[\frac{-0.14}{4} t^4 \frac{1.749}{3} t^3 - \frac{0.85t^2}{2} + 15t\right]_0^6$$

Etterpå fortalte hun at *t* erstattes med 6 for å finne antall kjørte meter.

På c) sa A3 at b) kan løses ved hjelp av programmering, for hånd eller i Geogebra.

4.2 R2-elevenes besvarelser

1) **Hvilket forhold har du til matematikk og hvorfor har du valgt å ta R2?**

A4 har alltid vært flink i matematikk. Han lå ett trinn over på barne- og ungdomsskolen. På VGS falt han litt bakpå, fortalte han. Likevel hadde han lyst til å ta R2, men visste ikke helt hva han skulle bruke det til.

A5 har vært interessert i matematikk og fysikk fra hun var liten. Hun liker R-matte siden de lærer mye om teoretisk matte.

A6 betegnet seg selv som «grei i matte». Hun sa at matematikk er et kjekt fag, spesielt nå når læreren har begynt å legge opp på en ny måte. «Nå gjelder det ikke bare å lære formler og anvende de, men at man faktisk utforsker og kommer frem til konklusjoner selv, og viser mest mulig forståelse for matematikk og sammenhenger som man ser i hverdagen, naturen og i samfunnet».

2) **Forklar kort følgende:**

Integrasjon ***dx*** ***Analysens fundamentalteorem***

A4 forklarte integrasjon som det motsatte av derivasjon. «Istedenfor å finne stigningen til et uttrykk, så finner man hvilket uttrykk som det uttrykket man har er stigningen til». Han eksemplifiserte med hvis man tar den integrerte av ei rett linje så blir det en andregradsfunksjon. A4 la til at integrasjon brukes til å finne areal under en graf. «Man finner absoluttverdien av de positive og negative verdiene», avsluttet han.

A4 fortalte at *dx* står i slutten av likningen. «Når man skal finne arealet, deler man opp i små kolonner. *Dx* har egentlig ikke noe å si fordi man deler det opp i såpass små kolonner». Han nevnte noe om grenseverdien til 0 og at man lager «evig mange kolonner» som er så små som mulig for å få den rette verdien.

Analysens fundamentalteorem var A4 noe usikker på. Han prøvde seg likevel på en forklaring. «Største og laveste verdi, så går det mot verdien i midten. Husker ikke alle begrepene. Lager kolonner: Tar fra det høyeste punktet og da vil du få et større areal og motsatt med laveste punktet. Dess mer kolonner man har, dess mer…»

A5 nevnte arealet under graf/funksjon i forbindelse med integrasjonsbegrepet. Samtidig forklarte hun integrasjon som det motsatte av derivasjon. Hun uttrykte *dx* som «delta x» og sa at dette er forskjellen mellom to ulike x-verdier. A5 la til at *dx* skrives opp i slutten av integralet. Analysens fundamentalteorem hadde hun hørt om, men kunne ikke si noe om det. «Har veldig dårlig hukommelse», påpekte hun.

A6 sa at integrasjon er det motsatte av derivasjon. «Istedenfor å se på stigningen til grafen, vil den grafen man har være stigningen til grafen over på en måte.» Hun la til at hvis man ser på et begrenset område, så forteller integralet arealet mellom x-aksen og grafen. A6 bruker begrepet *delta x* under forklaringen av *dx*. «Området man ser på mellom en x-verdi og en annen x-verdi, blir mindre og mindre helt til den går mot 0. Uendelig mange bredder danner grafen.» Analysens fundamentalteorem kunne hun ikke forklare.

3) **Kan du nevne situasjoner i det daglige der integrasjon kommer til nytte?**

A4 kom først ikke på noen. Etterpå nevnte han økonomi som et fagfelt. Han kom med et eksempel på kjøp og salg hver dag hvor man ser på opp- og nedgang og bruker arealet som en totalsum.

A5 fortalte at bygg-ingeniører og andre ingeniører er yrkesgrupper som benytter integrasjon. «De finner volumet av ting for å plassere ting på rett plass». I tillegg nevnte hun statistikk som et fagområde, men klarte ikke utdype dette.

A6 sa hun ikke hadde vært borti det foreløpig. Hun fortalte at integrasjon brukes i forbindelse med teknologi og utvikling, men klarte ikke utdype dette noe mer.

4) **Hvilken integrasjonsmetode er hensiktsmessig å bruke her? Begrunn. Skal ikke regne ut.**

a) $\int \boldsymbol{xe^x\,dx}$ **b)** $\int \boldsymbol{\frac{x+1}{x^2-1}\,dx}$

A4 kunne ikke navnene på integrasjonsmetodene. Han prøvde istedenfor å forklare hvordan integralene kunne løses. Han forklarte løsningen av a) på en måte som innebærer å dele opp og løse integralet av faktorene hver for seg. På b) ville han satt det opp slik at det blir «gange imellom» og fått x^2 til å bli x^{-2} og gjort det samme med 1. Han husket ikke helt hvordan det gjøres når det er pluss mellom, men foreslo altså å flytte nevneren opp i telleren og skifte fortegn på eksponenten. «Da er det enklere å jobbe med», poengterte A4.

A5 husket ikke navnene på metodene. For å løse a) hadde hun funnet den antideriverte. Hun klarte ikke si noe mer om hvordan den skulle blitt løst. Prøvde seg med «numerisk» og «deriveringsmetoden» som mulige metoder. På b) forsøkte hun seg med «delingsmetoden». «Jeg hadde nok klart å løse oppgaven, men måtte nok ha sjekket boka først.» Jeg spurte om det gikk an å gjøre om brøken. Hun forklarte hvordan hun kunne forkorte brøken til $x - 1$ (manglet 1 i telleren). Videre klarte hun ikke forklare de neste stegene selv om hun mente hun hadde klart det.

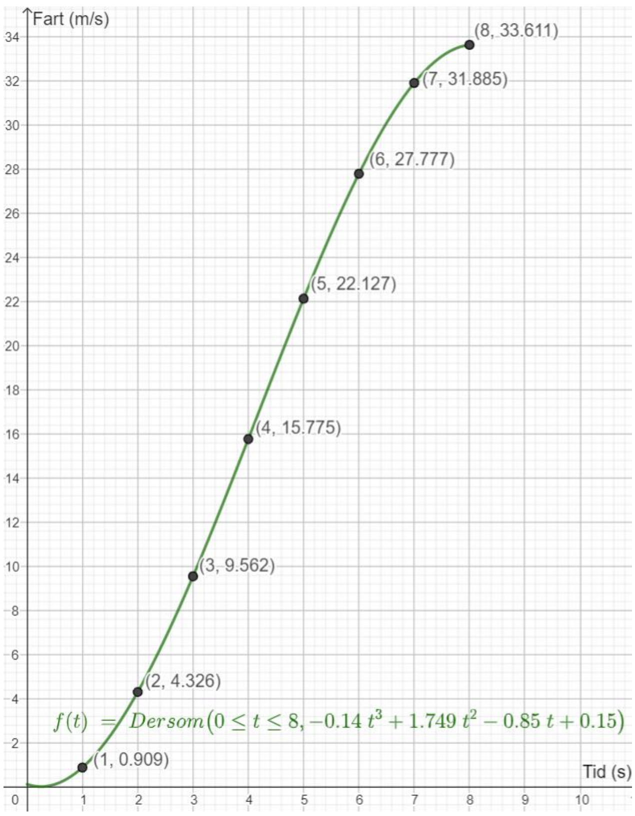
A6 ville brukt delvis integrasjon på a). Hun begrunnet det med at x kan deriveres til 1 og e^x blir e^x «motsatt derivert». På b) ville hun «delt opp i A og B og delt under (nevner) i to og brukt $(x + 1)$ og $(x - 1)$, og regnet toppen (teller) ut fra det». A6 klarte ikke komme på navnet på metoden før jeg sa det hadde noe med brøk å gjøre.

5) **Akselerasjonstest på bil: 0-100 km/h**

   a) Hva forteller arealet under grafen?

   b) Hvor langt kommer bilen på 0-100 km/h-testen? Hint: 100 km/h ≈ 27.777 m/s

   c) Forklar kort andre metoder som kan benyttes for å regne ut b).



A4 visste ikke svaret på a). Han brukte ordet likning istedenfor funksjon. «Kanskje det har noe med energi å gjøre». Videre fortalte A4 at han ikke hadde vært borti dette i praktiske situasjoner.

For at han skulle kunne svare på b), fikk han svaret på a). På b) ville han derivert f(t). Han satte først opp integralet fra 0 til 27.777:

$$\int f(t)\, dx$$

$$\int_0^{\cancel{27.777}\ 6} 0 \leq t \leq 8\ -0.14t^3 + 1.749t^2 - 0.85t + 0.15$$

$$\frac{1}{4} - 0.14t^4 + \frac{1}{3}1.7t^3 - \frac{1}{2}0.8t^2 + 0.15t$$

A4 forstod at han skulle integrere fra 0 til 6 sekunder. A4 endret derfor øvre grense til 6. Etterpå ville han satt inn 6 for *t* og på dette viset funnet arealet.

På c) svarer A4 at Geogebra er en alternativ metode å løse forrige oppgave på.

A5 klarte først ikke si hva arealet under grafen fortalte. Jeg ba henne bruke aksene og det hun sa tidligere om areal. Da klarte hun resonnere seg frem til at arealet forteller distanse. På b) satt hun opp følgende:

$$\int_1^6 fx\ dx$$

$$\int_1^6 -0.14t^3 + 1.749t^2 - 0.85t + 0.150\ dx$$

$$\int_1^6 \frac{-0.14t^4}{4} + \frac{1.749t^3}{3} - \frac{0.85t^2}{2} + 0.15t\ \ dx$$

Etterpå ville A5 satt inn $t = 6$ for å finne ut hvor langt bilen kom.

På c) svarte hun Geogebra, Python og JavaScript som andre metoder å løse b) på.

A6 sa at arealet under grafen er den antideriverte. Hun var først litt usikker på om det var akselerasjons- eller fartsgrafen som var avbildet, men endte opp med at det var fartsgrafen. Deretter resonnerte hun seg frem til at arealet under grafen fortalte posisjonen siden den antideriverte av fartsgrafen er *posisjonsgrafen*.

På b) spurte A6 seg selv om på hvilket tidspunkt grafen er ved 27.777 m/s. Det var ved 6 sek. Hun førte det slik:

$f^{-1}(t) = \frac{3}{4} \cdot 0.4t^4 + \frac{2}{3} \cdot 1.749t^3 - \frac{1}{2} \cdot 0.85t^2 + 0.15t$

$F(6) = \frac{3}{4} \cdot 0.4 \cdot 6^4 + \frac{2}{3} \cdot 1.749 \cdot 6^3 - \frac{1}{2} \cdot 0.85 \cdot 6^2 + 0.15 \cdot 6$

Jeg ba henne om å føre på steget før selve integreringen begynte, og da skrev hun dette:

$f(t) = -0.14t^3 + 1.749t^2 - 0.85t + 0.15 \qquad t \in [0,8]$

På c) foreslo A6 å bruke Geogebra. Hun forklarte at oppgaven kunne løses grafisk ved å bruke kommandoen «løs integral» og definere området. En annen metode kunne være å bruke CAS til å regne ut integralet. I tillegg nevnte hun programmering som en metode.

4.3 Oppsummering av elevbesvarelsene

For å få en bedre oversikt over elevenes forståelse, skal jeg i dette delkapittelet oppsummere besvarelsene til hver av elevene. Tabell 2 viser hva jeg har vurdert elevenes forståelse til. Jeg har valgt å benytte lav (L), middels (M) og høy (H) måloppnåelse for å fremstille dette. Komponentene baseres på teorien knyttet til dybdelæring, forståelse og kyndighet i matematikk. Tallene ved siden av komponentene indikerer hvilke spørsmål komponentene ble målt i. Til slutt har jeg gjort en helhetsvurdering av forståelsen.

	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
Engasjement 1)	L	M	H	H	M	H
Begrepsmessig forståelse 2), 4), 5)	L	L	M	M	M	H
Prosedyre-kunnskap 4), 5)	L	L	H	M	M	H
Strategisk tankegang 5)	L	M	M	M	M	H
Resonnering 4), 5)	L	M	H	M	M	H
Hensikt 3)	L	H	H	M	M	L
Kommunikasjon 2), 3) 4), 5)	L	M	H	M	M	H
Helhetsinntrykk	L	M	H	M	M	H

Tabell 2. Resultat med komponenter fra teori knyttet til dybdelæring, forståelse og kyndighet i matematikk.

A1 hadde generelt lite kunnskap om integrasjon. Han kunne til en viss grad dra kjensel på enkelte begreper og metoder, men var ikke i stand til å anvende disse. Dette gjør det naturligvis vanskelig for A1 å svare på spørsmålene og utføre oppgavene i intervjuguiden.

A2 hadde store svingninger i besvarelsene sine og var usikker ved flere anledninger. Hun hadde flere gode poeng, samtidig som misforståelser og blanding av regler og formler gikk som en rød tråd gjennom besvarelsene. Dette kan tyde på at memorering har vært den ledende læringsstrategien hennes, noe som påvirker den begrepsmessige forståelsen og prosedyrekunnskapen. Likevel hadde A2 god oversikt over bruksområder til integrasjon, og klarte resonnere seg frem til riktig løsning på 5a).

A3 hadde et større engasjement for faget enn de to andre i klassen. Dette synte igjen i besvarelsene hennes. Selv om begrepene ikke satt til enhver tid, viste hun solid prosedyrekunnskap og gode resonneringsferdigheter. Hun gav jevnt over presise forklaringer og viste generelt god forståelse for temaet. A3 trakk paralleller til kjemifaget og skilte seg ut ved å være den eneste som så at 4b) også kunne løses uten å spalte opp brøken. Selv om hun slet litt i representasjonsfasen i siste oppgave, løste hun problemet etter boka.

A4 viste overblikk rundt temaet, samtidig som besvarelsene var av det varierende slaget. Han hadde grundige forklaringer på de ulike begrepene. Integrasjon og dx hadde han god kontroll på, og i forklaringen av analysens fundamentalteorem var han inne på noe. I tillegg kom han med et eksempel på daglig bruk av integrasjon. A4 slet derimot med fagbegreper. Han kunne ikke navngi noen av integrasjonsmetodene og brukte feil begreper i enkelte tilfeller. Oppgave 5a) var han en av få som ikke fikk til. Likevel klarte han å gi en fornuftig besvarelse på 5b) selv om føringen kunne vært mer presis.

A5, som alltid hadde vært interessert i matematikk, kom med varierende svar. Hun slet noe med begreper og klarte ikke huske de ulike integrasjonsmetodene. Allikevel klarte hun å gi et par eksempler på bruksområder. Det var tydelig at hun slet med hukommelsen sin, noe hun selv nevnte. A5 påpekte også at hun hadde klart å løse flere oppgaver hvis hun hadde hatt tilgang til boka. Dette kan tyde på hull i forståelsen. Hun klarte seg likevel greit på siste oppgave. Ved hjelp av noen hint fikk hun til 5a). Samtidig viste hun kunnskap innen grunnleggende integralregning på 5b) selv om nedre grense og differensialet ikke var helt rett og bruken av integraltegnet ble overdrevet.

A6 var begeistret over den nye måten faget ble lagt opp på. Hun var orientert rundt fagets hensikt og virket engasjert. Forklaringene på integrasjon og *dx* var gode. På temaets bruksområde derimot, hadde hun ingen eksempler å vise til. Dette var noe oppsiktsvekkende siden hun innledningsvis belyste det å se sammenhenger i hverdagen, samtidig som hun viste god forståelse for integralregning. Videre viste hun god prosedyrekunnskap og gode resonneringsferdigheter. Under føringen på 5b) tok hun noen snarveier. Dette tyder på høy selvtillit knyttet til stegene i grunnleggende integralregning. Likevel klusset hun med tellerne under antideriveringen og ville dermed fått feil svar dersom oppgaven skulle blitt gjort fullt ut. På 5c) skilte A6 seg ut som den eneste til å forklare hvilke kommandoer som kunne brukes i Geogebra.

5. Diskusjon

Ut fra elevenes besvarelser, kan en se markante forskjeller i forståelsen for integrasjon. Noen hadde lite kunnskaper, mens andre viste god forståelse. Videre skal elevbesvarelsene diskuteres i lys av komponentene som ble satt sammen ut fra teorien om dybdelæring, forståelse og kyndighet i matematikk. Kan en se tendenser til at overflatekunnskaper er byttet ut med dybdeforståelse?

Engasjement er som tidligere nevnt en av komponentene Kilpatrick (2001) presenterer i trådmodellen sin. Dette beskriver han som det å kunne se nytten av matematikk, og ha selvtillit i faget. En positiv holdning til faget er nemlig ifølge Bolstad (2021) avgjørende for læreforutsetningene. Derfor er et godt engasjement viktig for å bygge matematisk forståelse over tid (Kilpatrick, 2001). Elevenes engasjement ble i hovedsak målt i spørsmål 1). Samtidig kan en si at komponenten ble målt gjennom hele intervjuet, siden elevenes engasjement kommer til uttrykk under alle spørsmålene.

Dataene viste en kobling mellom engasjement og forståelse. Elevene med høyt engasjement scoret i hovedsak høyt på helhetsinntrykk og omvendt. S2-elevene virket stort sett til å være ytre motivert med videre utdanning og bedre karakterer som motivasjonsfaktorer. A3 viste dog tegn til en kombinert indre og ytre motivasjon. R2-elevene virket i større grad å være indre motiverte. De liker matematikk og valgte faget sitt basert på interesse og lyst. Likevel ser en at det å ha et godt forhold til matematikk nødvendigvis ikke trenger å bety dyp forståelse. A4 og A5 var tydelig interessert i faget, men viste ikke en markant dyp forståelse. Likevel kan en si at resultatene generelt viser en sammenheng mellom engasjement og forståelse, noe Kilpatrick (2001) også påpeker. Det er viktig å ta i betraktning at spørsmål 1) baserte seg på engasjement for matematikk generelt, og at elevenes forståelse ikke nødvendigvis er lik for alle emner i faget.

Begrepsmessig forståelse er også en av komponentene i Kilpatrick (2001) sin trådmodell. Han forklarer dette som det å være i stand til å konstruere begrepsstrukturer og se sammenhenger mellom begreper, idéer og prosedyrer i matematikk. Denne komponenten er nært beslektet med *kunnskap* som er en av Gardner og Mansillas dimensjoner innen *forståelse*. Den begrepsmessige forståelsen til elevene ble målt på ulike måter i spørsmål 2), 4) og 5). På spørsmål 2) fikk elevene ulike begreper og idéer de skulle forklare. Her fremkommer det om de har bygget begrepsstrukturer og skjønt viktige begreper og idéer knyttet til integrasjon. Spørsmål 4) gikk på integrasjonsmetodene. Var elevene i stand til å huske de ulike metodene og bruke de hensiktsmessig? Elevene skal nemlig være i stand til å se sammenhenger både mellom begreper, idéer og prosedyrer, ifølge både Sawyer (2022), Kilpatrick (2001), og Gardner og Mansilla. Spørsmål 5) var en mer sammensatt oppgave der de skulle overføre teori til praksis. Her ble blant annet elevene målt i evnen til å se sammenhengen mellom begreper og prosedyrer og bruke disse i en gitt kontekst. Dette er også noe Ludvigsen-utvalget fremhevde og noe Udir (2018a) har lagt vekt på som et viktig kjennetegn ved dybdelæring.

Elevene viste varierende forståelse for sentrale begreper, idéer og prosedyrer innen integrasjon. Integrasjonsbegrepet hadde de aller fleste gode forklaringer på og klarte å trekke forbindelsen mellom den integrerte og arealet under en graf. De fleste klarte også å overføre denne kunnskapen til en praktisk situasjon om vei, fart og tid. Et interessant funn var at A4, som kanskje hadde de mest solide forklaringene på integrasjonsbegrepet og *dx*, ikke klarte å overføre denne begrepskunnskapen til den praktiske sammenhengen. Det er nemlig en viktig ferdighet som karakteriserer dybdelæring, noe Ohlsson (2011) beskriver gjennom prinsippet *overføring av læring*. A4 var dog ikke alene om å benytte *dx* istedenfor *dt* på 5b). A2 og A5 gjorde samme feil. Den er ikke av stor betydning siden det ikke påvirker prosedyren på dette nivået. Likevel kan gjentatte feil av denne typen indikere en manglende bevisstgjøring rundt differensialets betydning. En annen observasjon som ble gjort, var at A5 og A6 brukte utrykket «delta x» da de omtalte *dx*. Dette tyder på en manglende forståelse for forskjellen mellom Δx og *dx*.

Samtlige hadde utfordringer med å forklare analysens fundamentalteorem selv om dette er et kompetansemål for både S2- (Utdanningsdirektoratet, 2020c) og R2-elevene (Utdanningsdirektoratet, 2020d). Likevel visste de aller fleste at integrasjon og derivasjon er hverandres inverser og klarte å utføre prosedyren som teoremet er en konsekvens av. Dette kan tyde på at elevene mangler dyp forståelse for teoremet og i stedet har overfladisk kunnskap rundt prosedyren til integralregning av bestemte integraler. Sawyer (2022) peker nemlig på at det å memorere fakta og utføre prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor er et kjennetegn på overflatelæring.

Prosedyrekunnskap er en annen komponent fra trådmodellen til Kilpatrick (2001). Det omhandler det å forstå hvordan og hvorfor prosedyrene virker og kunne bruke disse fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig (Kilpatrick, 2001). Dette kan relateres til Gardner og Mansillas *metode* som er en av dimensjonene av forståelse. Spørsmål 4) ble i hovedsak stilt for å måle elevenes prosedyrekunnskap. Her dukket det opp oppsiktsvekkende resultater. Kun et fåtall husket integrasjonsmetodene. A3 og A6 var de eneste som var kapable til å bruke hensiktsmessige metoder for å løse integralene og viste forståelse i sine begrunnelser. A2 gjorde en klassisk feil ved å dele opp produktet av et integral opp i to integraler og multiplisere de. Dette viser manglende oversikt over betydningen av et integral og begrenset forståelse for integralregning.

På oppgave 5) kommer A2 sin manglende prosedyrekunnskap enda tydeligere frem da hun blander elementer i prosedyren. Samtidig har hun en misoppfatning om at konstanter i integranden kan settes utenfor integraltegnet. Som både Sawyer (2022) og Udir (2018a) presiserer, er det ikke nok å bare memorere fakta og prosedyrer. Memorering gjør det vanskeligere å sette kunnskapen i kontekst og øker sjansen for å blande fakta og elementer i prosedyrer. Ellers var de fleste i stand til å utføre grunnleggende integralregning med en integrand bestående av flere ledd. Om A6 sine valg av koeffisienter under integreringen var basert på misforståelse eller slurv, er noe vanskelig å si. Sannsynligvis det sistnevnte, siden hun ellers virket å være stødig i integralregning.

Strategisk tankegang er også en av trådene i trådmodellen til Kilpatrick (2001). Denne komponenten handler om å kunne formulere, representere og løse matematiske problemer på en hensiktsmessig måte (Kilpatrick, 2001). Elevenes evne til å tenke strategisk, ble kun målt til en viss grad i denne studien. I Spørsmål 5) var problemet ferdig formulert, så elevenes oppgave ble å representere og løse det. Hvis tiden hadde strekt til, hadde en fullstendig problemløsningsoppgave kartlagt elevenes strategiske tankegang enda bedre. Likevel burde spørsmål 5) kunne gi noen indikasjoner. De aller fleste klarte å representere problemet ved å sette opp et bestemt integral. A2 valgte y-verdier istedenfor x-verdier som grenser, mens A1 og A5 valgte 1 som nedre grense istedenfor 0. Det er mulig at elevene ble påvirket av at utklippet viste alle koordinatene for hvert hele sekund bortsett fra ved $x = 0$. A3, som generelt viste god forståelse for temaet, overrasket akkurat i denne fasen. Hun var rimelig kjapp med å se hva arealet under grafen betydde. Likevel slet hun med å representere problemet på egenhånd.

Resonnering er den siste av komponentene til Kilpatrick (2001) som skal diskuteres. Dette er i tillegg et av kjerneelementene i faget (Utdanningsdirektoratet, 2019d). I matematikk går denne ferdigheten ut på å se koblinger mellom matematiske konsepter og kontekster (Kilpatrick, 2001). Kilpatrick (2001) påpeker at elever som er gode til å resonnere er i stand til å vurdere ulike strategier og rettferdiggjøre løsningene. Informantenes resonneringsferdigheter ble målt i spørsmål 4) og 5). På spørsmål 4) var det bare et fåtall som klarte å vurdere hvilken integrasjonsmetode som var hensiktsmessig. A3 og A6 var som nevnt de eneste, og hadde gode argumentasjoner for sine valg. A3 var den eneste som klarte å se at integral 4b) kunne løses med variabelskifte, og at denne metoden var mer effektiv enn delbrøksoppspaltning i dette tilfellet. A3 viste i denne oppgaven en fleksibilitet i valg av prosedyre og brukte tidligere lært kunnskap om tredje kvadratsetning og forkorting av brøker til løse oppgaven effektivt. Dette er ifølge Kilpatrick (2001) et tegn på matematisk kyndighet. Sawyer (2022) peker også på det at elever relaterer nye idéer og begreper til tidligere kunnskap, slik A3 gjorde, er et kjennetegn på dybdelæring.

På 5b) gikk samtlige for å antiderivere leddene hver for seg ved hjelp av den generelle integrasjonsformelen. Dette er en hensiktsmessig metode for hånd. For å se hvilke alternative metoder elevene hadde kunnskaper om, spurte jeg om dette i 5c). Her var det Geogebra (graftegner og CAS) og programmering som i hovedsak ble nevnt. Som Kilpatrick (2001) påpeker er det å ha et rikt utvalg av løsningsstrategier en stor fordel for å løse ulike typer matematiske problemer. Ingen nevnte derimot rektangelmetoden eller trapesmetoden her. Disse metodene virket ikke kjent for S2-elevene, mens R2-elevene dro kjensel på dem da jeg nevnte de.

Hensikt er en av Gardner og Mansillas dimensjoner av forståelse. Denne dimensjonen handler om å se betydningen av det vi lærer og hvorfor vi lærer det (Bolstad, 2021). Elevenes evne til å se hensikten med integrasjon ble målt i spørsmål 3). De aller fleste elevene hadde noen eksempler å vise til. Fagområder som økonomi, statistikk, konstruksjon og teknologi ble nevnt. Noen elever klarte å utdype dette mer enn andre. A2 og A3 kom med to eksempler hver på situasjoner i dagliglivet som de forklarte nærmere. A6, som generelt viste god forståelse for temaet, scoret svakt på hensikt. Som Bolstad (2021) og Kilpatrick (2001) poengterer, må faget oppleves som relevant og nyttig i dagliglivet. Det motstridende her er at A6 viste høyt engasjement og gav uttrykk for at matematikk er nyttig, men kunne ikke si noe om hvorfor integrasjon er nyttig. Det betyr nødvendigvis ikke at A6 synes integrasjon er unyttig, men at hun mangler oversikt over områdets betydning i hverdagen. Å ikke forstå hvorfor vi lærer noe, er et kjennetegn på overflatelæring, poengterer Sawyer (2022).

Kommunikasjon er den siste komponenten i forbindelse med dybdeforståelse. Gardner og Mansilla beskriver *form* som det å kunne ta i bruk fagets kommunikasjonsmidler (Bolstad, 2021). I matematikk er det å kommunisere med matematisk språk og visualiseringer en viktig ferdighet. Dette er nemlig et av kjerneelementene som skal gi forståelse i faget

(Utdanningsdirektoratet, 2019d). Elevenes kommunikasjonsevner ble målt gjennom hele intervjuet, men i hovedsak i spørsmål 2), 4) og 5). Siden de fleste besvarelsene skulle skje muntlig, ble det muntlige matematiske språket målt i størst grad. På spørsmål 5) ble i tillegg den skriftlige kommunikasjonen målt.

A3 og A6, som jevnt over scoret bra på de andre komponentene, viste god kommunikasjon også. A3 rotet litt med formuleringer på 4), men viste ellers et presist språk med bruk av fagbegreper. På siste oppgaven hadde hun en plettfri føring med korrekt symbolbruk. A6 viste at hun hadde et godt matematisk språk og skilte seg ut ved å bruke begrepene *fartsgraf* og *posisjonsgraf* under resonnementet på 5a). A4 brukte begreper litt om hverandre og sa f.eks. likning istedenfor funksjon og derivert istedenfor antiderivert/integrert. Selv om ikke alt han sa var helt korrekt, hadde han utfyllende besvarelser. På 5b) utførte A4 prosedyren riktig, men var unøyaktig i forhold til desimaler og slurvet i symbolbruken sin. Både A2 og A5 hadde en overdreven bruk av integraltegnet. De benyttet symbolet også etter at integreringen var gjennomført. Dette viser manglende bevissthet rundt og muligens forståelse for symbolets betydning.

Hvis jeg skal trekke frem ett overaskende funn, må det være elevenes kollektive kunnskapshull rundt integrasjonsmetodene. Det var ytterst få som husket navnene på de ulike integrasjonsmetodene: substitusjon/variabelskifte, delvis integrasjon og delbrøksoppspaltning. Samtidig var det kun et fåtall som var i stand til å ta i bruk disse metodene og huske prosedyrene. Dette vil jeg si er ferdigheter som selv elever med overflatekunnskaper kan ha. Prosedyrene til disse metodene kan nemlig memoreres uten særlig grad av forståelse.

6. Oppsummering

6.1 Svar på forskningsspørsmålet

Forskningsspørsmål:

Kan et fokus på dybdelæring i matematikk gi VG3-elever dyp forståelse for integrasjon?

En ser at selv etter fagfornyelsen finnes det spor av overflatekunnskaper og mangel på forståelse for integrasjon hos VG3-elever. Blanding av regler og prosedyrer, svekket hukommelse og manglende oversikt kan tyde på at enkelte elever har benyttet memorering som læringsstrategi i arbeidet med dette temaet. Både A1, A2, A4 og A5 viste slike antydninger og scoret derfor lavt eller middels på forståelsen. Likevel var det enkelte lysglimt å skimte hos disse elevene også. A1 klarte å si at integrasjon hadde noe med areal å gjøre og brukte begrepet *antiderivere*. A2 viste god kunnskap rundt hensikten med integrasjon og var delvis i stand til å overføre teori til en praktisk situasjon. A4 hadde solide begrepsforklaringer og kunne prosedyren for å regne ut et bestemt integral med flere ledd i integranden. A5 klarte delvis å overføre teori til praksis og var også i stand til å regne ut et bestemt integral med flere ledd i integranden.

Selv om en ser tegn til at overflatekunnskaper dominerer hos disse elevene, var det to elever som viste andre tendenser. A3 og A6 utmerket seg på de fleste områdene, og viste generelt god forståelse for temaet. A3 var trygg i resonnerings- og prosedyrefasene, mens A6 viste solid engasjement og begrepsmessig forståelse. Om disse har oppnådd dyp forståelse for integrasjon derimot, er noe vanskelig å sette to streker under. Ingen av dem klarte å forklare analysens fundamentalteorem. Å kunne gjøre rede for dette teoremet, vil jeg si er en viktig del av dybdeforståelsen for integrasjon. I tillegg er det et av kompetansemålene i både S2 og R2. A6 sin manglende redegjørelse av hensikt, og A3 sin usikkerhet rundt representasjonsdelen og enkelte fagbegreper, viser tegn til små sprekker i forståelsen. Likevel kan en si at både A3 og A6 generelt viste solid forståelse for temaet, noe som kan tyde på at fokuset på dybdelæring kan ha bidratt positivt på forståelsen deres.

6.2 Svakheter ved oppgaven

I kap. 3 *Metode* ble det nevnt enkelte faktorer som påvirker oppgavens gyldighet og pålitelighet. Jeg skal nå diskutere hvilken innflytelse de kan ha hatt på funnene, og hvilke endringer som kunne blitt gjort dersom rammene hadde vært annerledes.

En svakhet ved oppgaven er at antall spørsmål og intervjuer er få, noe som gir et mer snevert datagrunnlag. Med mer utforskende problemløsningsoppgaver, kunne jeg i større grad sett elevenes evne til å se sammenhenger, bruke tidligere lært kunnskap og overføre læring. Samtidig kunne elevenes evne til å reflektere over egen læring blitt målt med andre type spørsmål. I tillegg kunne jeg kartlagt den varige forståelsen ved å gjennomføre flere intervjuer per elev over tid.

Et annet viktig poeng er at andre elever kunne gitt helt andre resultater. Hadde lærerne plukket ut andre elever, kunne det sett annerledes ut. Hadde jeg valgt en annen skole å intervjue på, ville trolig resultatene ikke vært de samme. Hadde jeg valgt å intervjue flere elever, kunne dette ha påvirket funnene. Derfor kan jeg ikke sikkert si noe om årsak og virkning med de dataene som er samlet inn. Det at utvalget var mer systematisk enn tilfeldig, er både en styrke og en svakhet. Det sikres et mangfold av elevbesvarelser, samtidig som en ikke får et tilfeldig og generaliserbart resultat. Flere elever fra ulike skoler hadde generert et mer representativt resultat, og hadde derfor gitt et bedre grunnlag for å trekke konklusjoner.

En avgjørende faktor som kommer uklart frem i denne studien er hvorvidt elevene har blitt lagt til rette for dybdelæring i matematikkundervisningen. Hvordan har de aktuelle lærerne tolket dybdelæringsbegrepet, og hvordan ble dette praktisert da integrasjon stod på planen? Dette har jeg ikke et datagrunnlag for å si noe om. Studien baseres derfor bare på antakelser om at undervisningen ble lagt opp med fokus på dybdelæring i henhold til læreplanen. Dette er en svakhet ved oppgaven. For å kunne si noe om praktiseringen av dybdelæring, måtte jeg ha observert begge klassene i de aktuelle timene og intervjuet lærerne. Dette var ikke mulig da S2-klassen allerede hadde hatt om integrasjon før jeg startet på forskningsprosjektet.

6.3 Veien videre

Med de rammene jeg hadde for denne oppgaven, ble naturligvis omfanget begrenset. Hva kunne jeg potensielt fått ut av dette forskningsprosjektet hvis tiden og ressursene hadde strekt til? Jeg skal nå belyse potensialet til prosjektet og fremheve hva kan en eventuell utvidelse kan kartlegge.

Som jeg var inne på, ville det å ha observert lærernes praktisering av dybdelæring i matematikkundervisningen styrket forskningen. På denne måten kunne en sett om undervisningen fortsatt var dominert av en instruksjonistisk praksis eller om dybdelæring var i fokus. Dette ville gitt en pekepinn på om elevene hadde hatt forutsetninger for å ha lært med dyp forståelse.

Siden jeg i denne studien tok utgangspunkt i en S2- og en R2-klasse, kunne jeg ha sammenlignet disse i større grad. Begge har integrasjon som en del av pensum, men med noe ulik tilnærming. I R2 går elevene mer teoretisk og praktisk i dybden enn i S2. Med flere informanter, gjerne fra flere skoler, hadde jeg fått et større grunnlag for å studere likhetstrekk og ulikheter ved S2- og R2-elevers forståelse. Dette kunne vært interessant å studere for å se om deres noe ulike tilnærminger til emnet påvirker forståelsen for integrasjon ulikt.

Et annet spennende supplement til denne forskningen ville vært å sammenligne elevenes forståelse før og etter fagfornyelsen. Har elevene generelt fått dypere forståelse for integrasjon og andre matematiske temaer etter fagfornyelsen? Siden dybdelæring nettopp har fått fotfeste i skolen, bør nok dette forskes på lengre frem i tid. Ser en tendenser til endring av læringsstrategier etter fagfornyelsen? Har memorering blitt byttet ut med forståelse? For å kunne besvare disse spørsmålene, behøves det store mengder data fra både før og etter fagfornyelsen. Kanskje dette kan være et forskningsprosjekt i fremtiden?

7. Litteraturliste

Bolstad, B. (2021). *Dybdelæring og tverrfaglighet*. Fagbokforlaget.

Borgan, Ø., Borge, I. C., Engeseth, J., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T. & Vie, S. M (2022). *Aschehoug S2*. Aschehoug.

De nasjonale forskningsetiske komiteene (2019, 2. februar). *Generelle forskningsetiske retningslinjer*. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/generelle/

Kalvø, T., Opdahl, J. C. L., Skrindo, K., Weider, Ø. J. (2022). *Mønster R2*. Gyldendal

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press.

Meld. St. 28 (2015-2016). *Fag-Fordypning-Forståelse*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Nosrati, M. & Wæge, K. (2018). Dybdelæring i matematikk. *Realfagsløyper*. Matematikksenteret. https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2021-03/T3.P1.M1A-Dybdel%c3%a6ring%20i%20matematikk_2.pdf

NOU 2014: 7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole – Et kunnskapsgrunnlag*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/e22a715fa374474581a8c58288edc161/no/pdfs/nou201420140007000dddpdfs.pdf

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole - Fornyelse av fag og kompetanser*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/da148fec8c4a4ab88daa8b677a700292/no/pdfs/nou201520150008000dddpdfs.pdf

Ohlsson, S. (2011). *Deep Learning: How the Mind Overrides Experience*. Cambridge University Press.

Papert, S. (1993). *The children's machine: rethinking school in the age of the computer*. Basicbooks.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2011). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metoder for lærerstudenter*. Cappelen Damm.

Sawyer, K. R. (2022). "Introduction: The new science of learning." *The Cambridge Handbook of The Learning Sciences*. Cambridge University Press.

Schunk, D. H. & Greene, J. A. (2018). *Handbook of Self-Regulation of Learning and Performance* (2. utg.). Routledge.

Skilbrei, M. (2019). *Kvalitative metode – planlegging, gjennomføring og etisk refleksjon.* Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2017a). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen: Kompetanse i fagene*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/kompetanse-i-fagene/

Utdanningsdirektoratet. (2017b). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen: Å lære å lære*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/2.4-a-lare-a-lare/

Utdanningsdirektoratet. (2018a, 29. oktober). *Film: Dybdelæring*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stottemateriell-til-overordnet-del/film-dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2018b, 29. oktober). *Film: Sammenhengen mellom kompetansebegrepet og dybdelæring*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stottemateriell-til-overordnet-del/film-sammenhengen-mellom-kompetansebegrepet-og-dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2019a, 13. mars). *Dybdelæring*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2019b, 18. november). *Hva er kjerneelement?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Utdanningsdirektoratet. (2019c, 27. mars). *Algoritmisk tenking*. https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/profesjonsfaglig-digital-kompetanse/algoritmisk-tenkning/

Utdanningsdirektoratet. (2019d). *Læreplan i matematikk 1-10 (MAT01-05): Kjerneelement*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Utdanningsdirektoratet. (2020a, 03. september). *Hva er nytt i matematikk?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

Utdanningsdirektoratet. (2020b). *Læreplan i matematikk R (MAT03-02): Kjerneelement*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat03-02/om-faget/kjerneelementer

Utdanningsdirektoratet. (2020c). *Læreplan i matematikk R (MAT03-02): Kompetansemål og vurdering*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat03-02/kompetansemaal-og-vurdering/kv294

Utdanningsdirektoratet. (2020d). *Læreplan i matematikk S (MAT04-02): Kompetansemål og vurdering*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat04-02/kompetansemaal-og-vurdering/kv296

Utdanningsdirektoratet. (2021, 22. september). *Slik ble læreplanene utviklet*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/slik-ble-lareplanene-utviklet/

8. Vedlegg

8.1 Vedlegg 1: Intervjuguide

1) Hvilket forhold har du til matematikk og hvorfor har du valgt å ta S2/R2?

2) Forklar kort følgende:

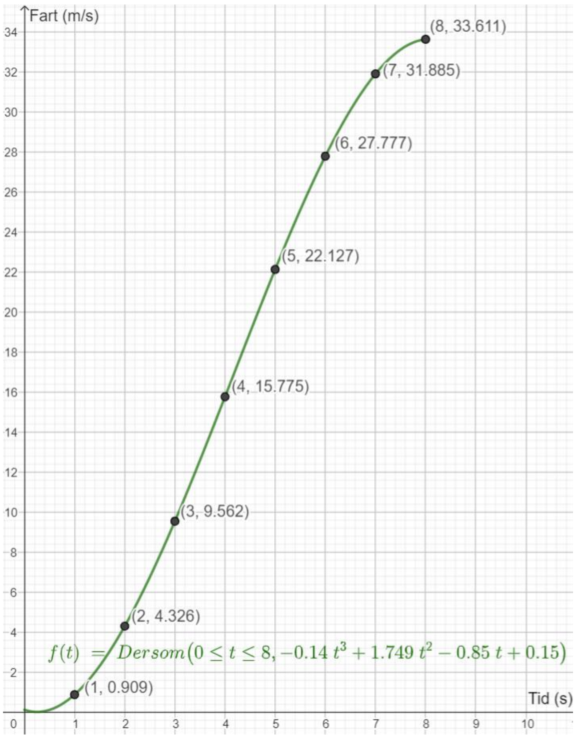
   Integrasjon ***dx*** ***Analysens fundamentalteorem***

3) Kan du nevne situasjoner i det daglige der integrasjon kommer til nytte?

4) Hvilken integrasjonsmetode er hensiktsmessig å bruke her? Begrunn. Skal ikke regne ut.

   a) $\int xe^x \, dx$ b) $\int \frac{x+1}{x^2-1} dx$

5) *Akselerasjonstest på bil: 0-100 km/h*



Eleven får utdelt dette utklippet samt ark og skrivesaker

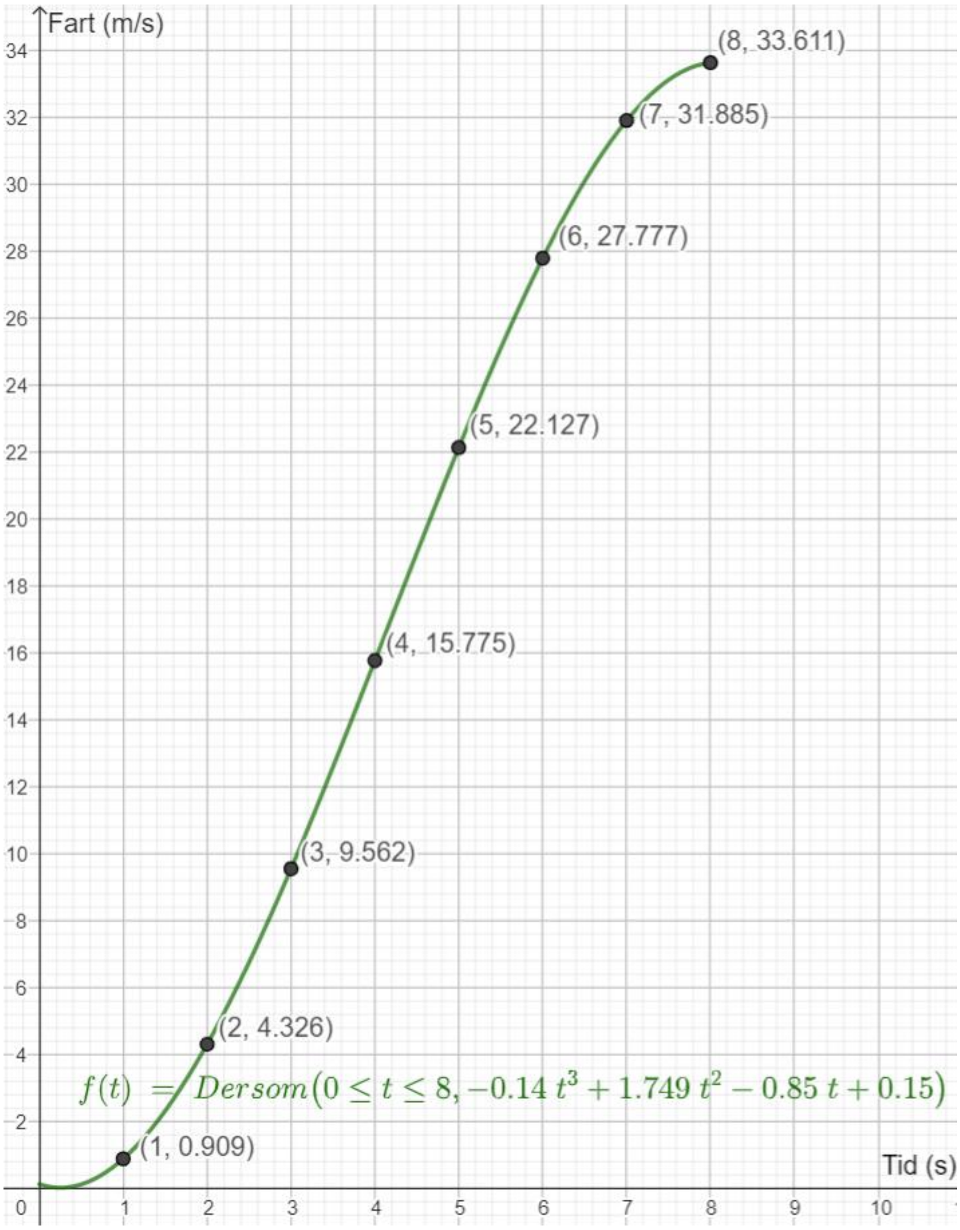
a) Hva forteller arealet under grafen?

b) Hvor langt kommer bilen på 0-100 km/h – testen? Hint: 100km/h ≈ 27.777 m/s

c) Forklar kort andre metoder som kan benyttes.

8.2 Vedlegg 2: Utklipp til spørsmål 5)

Akselerasjonstest på bil: 0-100 km/h



a) Hva forteller arealet under grafen?

b) Hvor langt kommer bilen på 0-100 km/h – testen?

Hint: 100 km/h ≈ 27.777 m/s

c) Forklar kort andre metoder som kan benyttes

8.3 Vedlegg 3: A1 sin besvarelse på 5b)

$$\int_1^6 -0.14t^3 + 1.749t^2 - 0.85t + 0.15 \, dt$$

Hjelpte til ↗

1

8.4 Vedlegg 4: A2 sin besvarelse på 5b)

$$\int_0^{27,78} f(t)\,dx \qquad \int_0^{27,78} -0,14t^3 + 1,749t^2 - 0,85t + 0,15\,dx$$

$$0,15\cancel{t} - 0,14\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}1,749t^3 - \frac{1}{2}0,85t^2 + C$$

$$\int 0,15 - 0,14\frac{1}{4}0^4 + \frac{1}{3}1,749\;0^3 - \frac{1}{2}0,85\cdot 0^2 \quad -$$

$$\int 0,15 - 0,14\cdot\frac{1}{3}27,78^4 + \frac{1}{3}1,749\cdot 27,78^3 - \frac{1}{2}\cdot 0,85\cdot 27,78^2$$

2

8.5 Vedlegg 5: A3 sin besvarelse på 5b)

$$\int_0^6 f(t)\,dt$$

$$\int_0^6 (-0,14t^3 + 1,749t^2 - 0,85t + 15)\,dt$$

$$\left[\frac{-0,14}{4}t^4 + \frac{1,749}{3}t^3 - \frac{0,85t^2}{2} + 15t\right]_0^6$$

3

8.6 Vedlegg 6: A4 sin besvarelse på 5b)

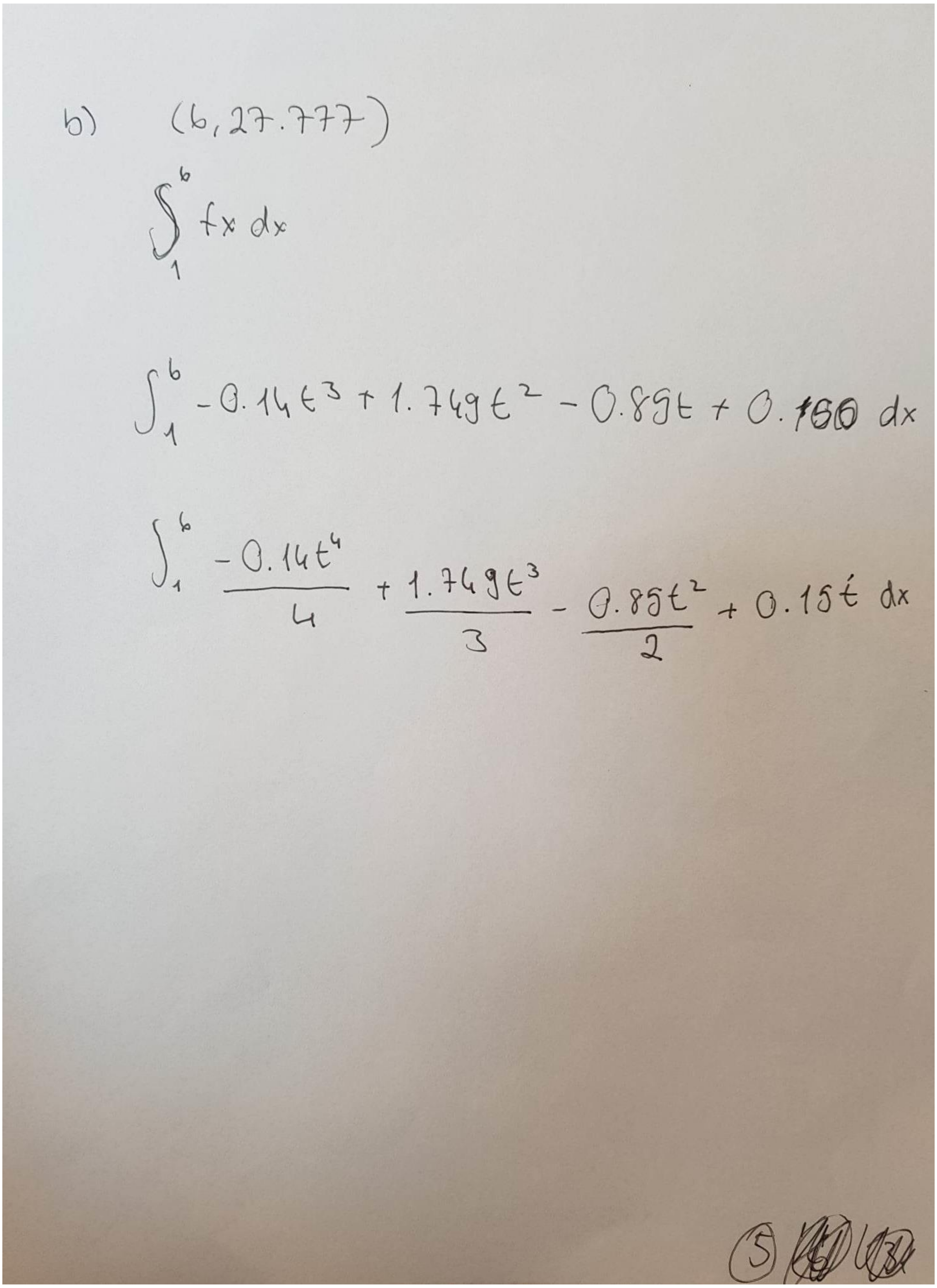
$$\int f(t)\, dx$$

$$\int_0^{\cancel{77,777}\ 6} (0 \le t \le 8 \quad -0{,}14t^3 + 1.749t^2 - 0{,}85t + 0{,}15)$$

$$\frac{1}{4} - 0{,}14t^4 + \frac{1}{3} 1{,}7t^3 - \frac{1}{2} 0{,}8t^2 + 0{,}15t$$

4

8.7 Vedlegg 7: A5 sin besvarelse på 5b)



b) (6, 27.777)

$$\int_1^6 fx \, dx$$

$$\int_1^6 -0.14t^3 + 1.749t^2 - 0.89t + 0.150 \, dx$$

$$\int_1^6 \frac{-0.14t^4}{4} + \frac{1.749t^3}{3} - \frac{0.89t^2}{2} + 0.15t \, dx$$

8.8 Vedlegg 8: A6 sin besvarelse på 5b)

Integralet av grafe – ox

$\cdot\ f^{-1}(t) = \frac{3}{4}\cdot 0{,}4t^4 + \frac{2}{3}\cdot \cancel{1{,}749}t^3 - \frac{1}{2}\cancel{1{,}749}t^2 + 0{,}15t$

$1{,}749 \qquad 0{,}85t$

$F(6) = \frac{3}{4}\cdot 0{,}4\cdot 6^4 + \frac{2}{3}\cdot 1{,}749\cdot 6^3 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}85\cdot 6^2 + 0{,}15\cdot 6$

$f(t) = -0{,}14t^3 + 1{,}749t^2 - 0{,}85t + 0{,}15t \quad t\in[0,8]$

Grafen ↗

6