Universitetet i Stavanger

FAKULTET FOR UTDANNINGSVITENSKAP OG HUMANIORA

MASTEROPPGAVE

Studieprogram: Masterprogram i utdanningsvitenskap, matematikkdidaktikk.	Vårsemesteret, 2023
Forfatter: Morten Skår	
Veileder: Raymond Bjuland	
Tittel på masteroppgaven: Hvordan kan Teaching for Robust Understanding brukes for å gjennomføre profesjonsutvikling i et tenkende klasserom? Engelsk tittel: How can Teaching for Robust Understanding be used to implement professional development in a thinking classroom?	
Emneord: Matematikk, profesjonsutvikling, Teaching for Robust Understanding, matematisk kompetanse, tenkende klasserom	Antall ord: 32 874 + antall vedlegg/annet: 4 753 Stavanger, 31. mai 2023 dato/år

Forord

For en reise disse fem årene har vært, fra dyp frustrasjon til høy mestringsfølelse. Det er med en viss stolthet dette masterstudiet ved Universitetet i Stavanger avsluttes. Disse fem årene representerer faglig og personlig utvikling som jeg gleder meg til å benytte videre i utdanningssystemet. Det har vært meget lærerikt å kunne representere kull 2018 i ulike fag ved UiS, og dermed utvikle samarbeidsevne med fakultetet. Takk til Kjersti Gjedrem for fine og konstruktive samtaler. Ønsker også å si takk for flere minneverdige undervisningstimer ved UiS, her kan jeg vel si vi har opplevd alt. Jeg er takknemlig for flere som har inspirert til god og variert pedagogisk undervisning.

Samfunnet er i konstant endring og LK20 stiller høye krav til utdanningssektoren. Lærerprofesjonen er mye omtalt politisk og i media, dermed ønsket jeg å gjennomføre en utradisjonell masteroppgave for å kunne fremheve kompleksiteten ved denne profesjonen, i tillegg til matematikk som fagfelt. Dermed er det på sin rettmessige plass å takke veileder Raymond Bjuland som en god sparringspartner og veileder. Tusen hjertelig takk for støttende og konstruktive samtaler. I tillegg ønsker jeg å takke studiens deltakere, elevene på 10.trinn, og en meget imponerende lærer ved en ungdomsskole – det å være så fersk og invitere oss inn til å studere din praksis står det respekt av.

Sammen gjennom tykt og tynt har vi to hatt det meget travelt. Hvor vi begge skrev masteroppgaver, samtidig som karrierene våre startet før studiet var over. Jeg er derfor meget imponert og takknemlig for min samboer Amanda Svihus som finner tid til å korrekturlese, og ga gode innspill til denne ferdigstilte masteroppgaven. I tillegg gir du meg rom og støtte slik at denne masterstudien ble ferdig i tide, tusen takk for at du er ved min side. Jeg må også takke min mor som gjennom hennes høye profesjonalitet som pedagogisk leder i barnehage, har gitt meg gode samtaler og mye inspirasjon. I tillegg har jeg en urokkelig støtte i min far som tar min side, selv om det ikke nødvendigvis er korrekt. Kort oppsummert, teamet rundt meg er jeg dypt takknemlig for, og jeg ser frem til å være en del av teamet rundt fremtidens mennesker.

Morten Skår

Stavanger, juni 2023

Sammendrag

I en stadig mer kompleks virkelighet fremhever Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 en nødvendig modernisering av utdanningen for fremtidens mennesker. Skolen har dermed fått tydelige føringer for å gjennomføre utdanning og danning av elevene, som skal oppleve skaperglede, engasjement og utforskertrang gjennom sosial læring og utvikling i alle fag. Matematikk og problemløsning har ved det matematikkdidaktiske forskningsfeltet gjennomgått store endringer i løpet av de siste tiårene. Tidligere er problemløsning ansett som en individuell praksis, mens nyere forskning anerkjenner dette som en praksis bestående av flere momenter i en sosial kontekst. *Tenkende klasserom* er en pedagogisk metodikk som anerkjenner den sosiale prosessen ved problemløsning og matematisk kompetanseutvikling. Følgelig ønsket denne studien å benytte seg av et analytisk rammeverk som omfatter hele kompleksiteten ved undervisningsarbeid, for å kunne gi et meningsfullt bidrag innen profesjonsutvikling. Dermed ble det omfattende rammeverket *Teaching for Robust Understanding* benyttet, og videreutviklet for å analysere hvordan den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* kan tilrettelegge for en helhetlig matematisk kompetanseutvikling for elevene på ungdomsskolen. Studiens forskningsspørsmål er som følgende:

Hvordan kan Teaching for Robust Understanding brukes for å gjennomføre profesjonsutvikling i et tenkende klasserom?

Dette er en case-studie, som tillater en grundig analyse over datamateriale, og består av videoobservasjoner gjennom tre uker, samt pre- og post-intervju av læreren. Resultatene i denne studien viser at et *tenkende klasserom* tilrettelegger for gode utviklingsmuligheter hos elevene. Ved å benytte utforskende oppgaver med tilstrekkelig tid for produktivt strev, antyder funnene til denne studien at elevene utvikler sin matematiske identitet i samhandling med lærer og medelever.

Innholdsfortegnelse

Figur- og tabelliste

Figurer

Tabeller

Matematiske modeller

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for studien

I Norge ble ny læreplan innført fra 2020, kalt læreplan for kunnskapsløftet (LK20). Denne har en overordnet del med status som forskrift, dermed er alle ansatte i skolen pliktet til å etterfølge disse målene. Her finner man tre kategorier: [1] verdigrunnlaget i opplæringen, [2] prinsipp for læring, utvikling og danning, og [3] prinsipp for praksisen i skolen hvor profesjonsfelleskap og skoleutvikling er blant delene som inkluderes (Kunnskapsdepartementet, 2017). Denne studien ønsker å bidra til et felles forsknings- og erfaringsbasert kunnskapsgrunnlag for å imøtekomme kategoriene [1] og [2].

Shulman (1986) analyserte et århundre med eksamener fra lærerutdanningen. Resultatet viste hvordan utdanningen av lærere endret seg fra et søkelys vedrørende faglig innhold, til høyere søkelys vedørende didaktikk. På bakgrunn av dette utarbeidet Shulman (1986) begrepene fagkunnskap, fagdidaktisk kunnskap, og kunnskap om læreplan og læremidler, for å kunne videreutvikle et sammenhengende søkelys vedrørende faglig innhold og didaktikk. Ifølge Shulman (1986) omfatter fagkunnskap grundig kompetanse innen fagets innhold og strukturer «knowing that and knowing why». Videre inkluderer fagdidaktisk kunnskap refleksjoner angående representasjoner og eksempler av spesifikt faginnhold, og ulike fordelaktige undervisningsmetoder med hensyn til fagets innhold. I tillegg inkluderes kunnskaper vedrørende elevers forkunnskaper, og deres potensielle misoppfatninger. Kategorien som Shulman (1986) utviklet til kunnskap om læreplan og læremidler omfatter lærerens evne til å analysere ulike læreverk med tanke på differensiert undervisning. Følgelig utviklet Shulman det velkjente uttrykket «No! Those who can, do. Those who understand, teach!» (Shulman, 1986, s.14) i sterk kontrast til Shaw´s tidligere utsagn «He who can, does. He who cannot, teaches» (Shulman, 1986, s.4). Ball et al. (2008) videreutviklet Shulman´s (1986) begreper til et teoretisk rammeverk med et matematisk lærerperspektiv – mathematical knowledge for teaching (MKT), hvor oppgavene og utfordringene til læreren vedrørende matematikkundervisning inkluderes i en omfattende liste:

- Presentere matematiske ideer
- Svare på elevenes "hvorfor"-spørsmål
- Bruke eksempel for å komme med et spesifikt matematisk poeng
- Gjenkjenne hva som er involvert i en bestemt representasjon
- Koble representasjoner til underliggende ideer og til andre representasjoner
- Koble et emne som undervises til emner fra tidligere eller fremtidige år
- Forklare matematiske mål og formål til foreldre

- Vurdere og tilpasse det matematiske innholdet i lærebøker
- Tilpasse oppgaver for å være enten enklere eller vanskeligere
- Evaluere elevenes påstander (ofte raskt)
- Gi eller vurdere matematiske forklaringer
- Velge og utvikle brukbare definisjoner
- Bruke matematisk notasjon og språk, og reflektere over bruken
- Stille produktive matematiske spørsmål
- Velge representasjoner for spesielle formål
- Undersøke ekvivalenser

  (Ball et al., 2008, s.400, min oversettelse)

Charalambous og Praetorius (2018) har i senere tid sammenlignet ulike analytiske rammeverk ved bruk av tre undervisningsøkter. Analysene deres viser at ulike rammeverk kan kategoriseres i tre forskjellige inndelinger: generelle, hybride, og fagspesifikke. Ball et al. (2008) viser deler av kompleksiteten ved lærerprofesjonen med deres omfattende liste. Derimot er MKT et fagspesifikt rammeverk som dermed mangler andre essensielle komponenter vedrørende undervisning. Schoenfeld (2019) hevder dermed at forskningsfeltet trenger å utvikle mer omfattende verktøy som anerkjenner lærerprofesjonen som dannende og utdannende. *Teaching for robust understanding* (se kap. 2.4) er et rammeverk som er utviklet med hensikt i å gi lærerprofesjonen og forskere et felles grunnlag for å kunne snakke om, og gjennomføre profesjonsutvikling (Schoenfeld, 2014, 2019). Deres mål var å utvikle et rammeverk som inkluderer alle aspektene vedrørende undervisning i så få dimensjoner som mulig, hvorav hver dimensjon hadde sin egen integritet og var klassifisert som essensiell for god undervisning (Schoenfeld, 2019). Videre endres søkelyset i rammeverket fra et lærersentrert synspunkt som for eksempel MKT, til et elevsentrert søkelys. Schoenfeld (2019) argumenterer for et mer fruktbart utviklingssynspunkt med et elevsentrert rammeverk, det er følgelig elevene som skal utvikles i skolesystemet. Denne endringen av synspunkt fratar ikke lærerens essensielle rolle i et klasserom, han/hun er avgjørende for hvordan elevene opplever de ulike dimensjonene i *teaching for robust understanding*.

1.2 Formål og problemstilling

Det norske skolesystemet er fra opplæringens verdigrunnlag pliktet til å arbeide for at alle elevene skal oppleve skaperglede, engasjement og utforskertrang (Kunnskapsdepartementet, 2017). Dette kan tilrettelegges for ved bruk av problemløsning, som har vært en sentral del av det matematikkdidaktiske forskningsfeltet gjennom de siste 50 årene (Liljedahl & Cai, 2021). Fra oversiktsartiklene vedrørende problemløsning observeres det hvordan søkelyset har endret seg fra individnivå – hva som kjennetegner en god problemløser – til dags dato som har større søkelys på hvordan forskningsfeltet og lærere kan tilrettelegge for utforskning og problemløsning (Schoenfeld, 1992/2016; Lesh & Zawojewski, 2007; Liljedahl et al., 2016; Liljedahl & Cai, 2021). I LK20 fremheves kritisk tenkning, utforskning og problemløsning i matematikkfagets relevans og sentrale verdier:

> Kritisk tenking i matematikk omfattar kritisk vurdering av resonnement og argument og kan ruste elevane til å gjere eigne val og ta stilling til viktige spørsmål i sitt eige liv og i samfunnet. Når elevane får tid til å tenkje, reflektere, resonnere matematisk, stille spørsmål og oppleve at faget er relevant, legg faget til rette for kreativitet og skapartrong. Matematikk skal bidra til at elevane utviklar evne til å jobbe sjølvstendig og samarbeide med andre gjennom utforsking og problemløysing, og kan bidra til at elevane blir meir bevisste på si eiga læring. Når elevane får høve til å løyse problem og meistre utfordringar på eiga hand, bidreg dette til å utvikle uthald og sjølvstende (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Fra denne beskrivelsen ved matematikk i den norske skole anerkjennes elevaktivitet som meningsfull og utviklende, der elevene skal utvikle ferdigheter individuelt og i samarbeid med andre medelever. Boaler og Staples (2008) fremhever samarbeidslæring og høye forventninger (kognitive krav) som kan være påvirkende faktorer for elevenes utvikling. I deres studie fremheves heterogene læringsfelleskap, med søkelys på *groupworthy problems* som blant annet inkluderer mulighet for ulike representasjoner. Liljedahl (2021) har utarbeidet en pedagogisk metodikk (se kap. 2.2) som skal kunne brukes uavhengig av hvilke personlighetstrekk lærere har, og som endrer skolens fastsatte normer. Gjennom hans tidligere forskning ble det tydelig at de fleste klasserommene var tilnærmet like, de fleste elevene ble ikke engasjert i matematikken. Liljedahl (2016) kaller det for *ikke-tenkende klasserom*. Forskningsfeltet på matematikkdidaktikk poengterer at elevene må bli mer engasjerte i sin egen læring av matematikk. Elevene må oppleve kognitiv utfordring i møte med matematikk, de bør få søke etter sammenhenger og oppdage strukturer og mønstrer, både for seg selv og sammen med andre (Boaler, 2022; Liljedahl, 2021; Liljedahl et al., 2016; Schoenfeld, 1992/2016, 2020). Dermed realiserer den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* flere av kravene vedrørende hva nyere forskning tilskriver som god praksis for matematikkundervisning. LK20 endrer også klasserommet med søkelys på mer utforskende og engasjerte elever, som *tenkende klasserom* kan tilrettelegge for. I samsvar med nye forventninger og krav til matematikkundervisning vil forskningsspørsmålet mitt være basert på metodisk bruk av *teaching for robust understanding* i et *tenkende klasserom*:

Hvordan kan Teaching for Robust Understanding brukes for å gjennomføre profesjonsutvikling i et tenkende klasserom?

1.3 Studiens oppbygning

Formålet med denne studien er å gi et metodisk bidrag til hvordan forskningsmiljøet og lærerprofesjonen kan utnytte et endret søkelys fra lærersentrert til elevperspektiv for videre utvikling med et rammeverk som bidrar til profesjonsutvikling på tvers av utdanningsinstitusjoner. I kapittel 2 presenteres relevant, men begrenset teori tilknyttet forskningsspørsmålet. Videre vil kapittel 3 presentere og begrunne ulike metodiske valg for denne studien. Kapittel 4 presenterer funn fra denne studien, og analyserer enkelte sekvenser fra to undervisningstimer. Dermed vil kapittel 5 drøfte funn i samsvar med relevant teori, og til slutt avsluttes studien med en konklusjon i kapittel 6.

2 Teoretisk innramming

2.1 Matematikk og problemløsning

Ifølge Stanic og Kilpatrick (1989) har tidligere forskning innen matematikkdidaktikk vedrørende problemløsning tre hovedtolkninger. Den første tolkningen ser på problemløsning som en kognitiv aktivitet, og dermed analyserer hva suksessfulle problemløsere gjør. Videre tolker den andre kategorien problemløsning tilsvarende et eget læringsmål, dermed differensierer denne tolkningen problemløsning fra matematikk. Siste tolkning analyserer hvordan matematikk læres gjennom problemløsning, elever utvikler dermed ferdigheter, kunnskap og identitet i matematikkundervisning med problemløsning som pedagogisk metodikk. Historisk sett har matematikkdidaktikkens forskningsfelt enkelte forskere innen problemløsning som må nevnes – selv om forskningen har beveget seg et stykke videre.

Georg Pólya (1957) var den første som publiserte en problemløsningsmodell, denne strategiske tilnærmingen til å løse problem fikk høy annerkjennelse blant akademikere. Pólya's problemløsningsmodell omfattet fire steg: [1] forstå problemet, [2] lage en plan, [3] utføre planen, og [4] se tilbake. Innen disse fire stegene utarbeidet Pólya veiledningsspørsmål som baserte seg på tidligere erfaringer og kunnskaper. Selv om denne problemløsningsmodellen fikk annerkjennelse i forskningsmiljøet, påpeker Lesh og Zawojewski (2007) at undervisning knyttet til problemløsningsstrategier ikke gir tilstrekkelige resultater i utdanningen. Det viser seg at mennesker med lav erfaring med matematikk og problemløsning ikke tenker på samme måte som en ekspert (Liljedahl et al., 2016; Schoenfeld, 1992/2016). Alan Schoenfeld (1985) er en annen forsker som er naturlig å nevne. Han utviklet et rammeverk for å analysere matematisk identitet og tenkning som inkluderer fire aspekter: [1] kunnskapsbasen, [2] problemløsningsstrategier [3] selvregulering, og [4] tankesett. Sammenhengen mellom Pólya (1957) og Schoenfeld (1985) handler om et synspunkt på matematisk problemløsning som en individuell praksis, der forkunnskaper er en avgjørende faktor. Denne sammenhengen bryter Schoenfeld (1992/2016) når han videreutvikler modellen sin med en ekstra kategori [5] praksiser. I kategorien for praksiser fremheves det at skolesystemet har hatt et snevert synspunkt angående matematikk. Han utvikler dermed en definisjon med føringer for en matematisk praksis som fremmer matematikk som et språk i en sosial meningssøkende prosess, og med fagets «verktøy» som brukes for å resonnere og kommunisere i et felleskap:

> Mathematics is an inherently social activity, (...). Learning to think mathematically means (a) developing a mathematical point of view — valuing the processes of mathematization and abstraction and having the predilection to apply them, and (b) developing competence with the tools of the trade, and using those tools in the service of the goal of understanding structure — mathematical sense-making (Schoenfeld, 1992/2016, s.1).

Følgelig vil innholdet i matematikkundervisningen være avgjørende, og problemløsning har som nevnt en avgjørende rolle i matematisk kompetanseutvikling (Liljedahl & Cai, 2021). Nyere forskning av Lester og Cai (2016) redegjør for at problemløsning bør være en integrert del av matematikkundervisningen, og betegner det som *teaching through problem solving* ved å inkludere: [1] flere representasjoner for løsningsforslag, [2] engasjere elevene i utforskning, [3] argumentere og resonnere for løsningsforslagene, og [4] generalisere. Det vil dermed være fornuftig å endre søkelyset fra hvilke kompetanser gode problemløsere har, til å tilrettelegge for utvikling av matematisk kompetanse (se kap. 2.3). Dette synspunktet støttes også blant annet av Lampert (1990) som fremhever elevenes mulighet til å ta «eierskap» til matematikken. Med det mener hun at elevene må få muligheter til å kommunisere, argumentere, og endre synspunkt underveis i møte med matematikken, dermed gis elevene muligheter til å utvikle seg i et kollektivt samspill. Ved et slikt synspunkt på undervisning får elevene mulighet til å være kreative, utforske og løse problemer på ulike måter. Følgelig tilrettelegges det for elevenes utvikling av de ulike komponentene vedrørende matematisk kompetanse (se kap. 2.3). De må bruke forkunnskaper og algoritmisk tenkning, for så å resonnere og argumentere for deres løsningsforslag (Lester & Cai, 2016). Lesh og Zawojewski (2007) fremhever at problemløsning trenger en endret retning med en kollektiv konsensus, og utvikler et modell- og modelleringsperspektiv. Retningen tilrettelegger for flere matematiske representasjoner, kreativitet og engasjement fra problemløseren som også vektlegges som avgjørende i nyere forskning (Boaler, 2022; Hiebert & Grouws, 2007; Liljedahl. 2021; Schoenfeld, 1992/2016, 2019, 2020). Videre har Lesh og Zawojewski (2007) utarbeidet en definisjon for problemløsning, som løser flere av utfordringene som blant annet har vært tilknyttet problemløsning på tvers av fagfelt og som en individuell antakelse:

> A task, or goal-directed activity, becomes a problem (or problematic) when the «problem solver» (which may be a collaborating group of specialists) need to develop a more productive way of thinking about the given situation (Lesh & Zawojewski, 2007, s.782).

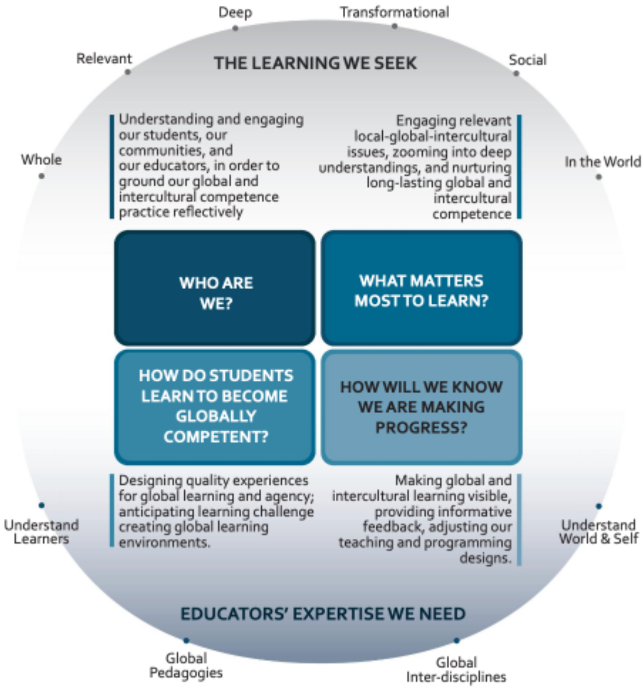
Denne definisjonen for problemløsning samsvarer med nyere forskning, og politiske føringer som i norsk kontekst vil være LK20 med tanke på matematikkfagets relevans og sentrale verdier. Liljedahl og Cai (2021) hevder at de kategoriserte tolkningene til Stanic og Kilpatrick (1989) fortsatt kan identifiseres i nyere forskning. Derimot argumenterer disse forskerne for at forståelsen tilknyttet problemløsning har utviklet seg til å være mye mer kompleks med et søkelys på matematisk kompetanse (se kap. 2.3) i en sosial kontekst (Liljedahl & Cai, 2021). Dermed foreslår de moderniserte tolkninger for å analysere og videreutvikle undervisning vedrørende problemløsning, disse kategoriene er: *samarbeid, profesjonsutvikling, oppgavevariabler og teknologi (*Liljedahl & Cai, 2021, s.727). Dette forskningsprosjektet ønsker å gjøre et bidrag innen profesjonsutvikling (professional development) ved bruk av Schoenfeld´s (2019) rammeverk *Teaching for Robust Understanding* (kap. 2.4), dermed vil denne studien kunne analysere muligheter og utfordringer for elevenes utvikling innen matematisk kompetanse (kap. 2.3) i et *tenkende klasserom* (kap. 2.2).

2.1.1 Undervisning

Lester og Cai (2016) fremhever en evidensbasert forståelse for hva undervisning innebærer, og kategoriserer det som et komplekst og sammenhengende system bestående av [1] innhold, [2] lærerens rolle, [3] klasseromskultur, [4] kulturelle redskaper som fremmer læring, og [5] læringsmuligheter for alle elever. I dagens samfunn kreves det stadig høyere kompetanse innen naturfag, teknologi og matematikk, og algebraisk kompetanse (se kap. 2.4.1.1) spiller en viktig rolle innen realfagene. Dermed påpeker organisasjonen for økonomisk samarbeid og utvikling (OECD) en nødvendig fornying av fag for å møte utfordringene i dagens samfunn (Grønmo, 2018). Dette blir også fremhevet i NOU-rapporten for fremtidens skole:

> Verdier, normer og holdninger er i kontinuerlig endring. Skolen skal støtte opp under, men også påvirke verdier og normer samfunnet bygger på. Skolen skal bidra til å utvikle elevenes potensial som mennesker. (...). I dagens samfunn endrer kunnskap innhold og form – i vitenskapelige disipliner, på nye fremvoksende kunnskapsområder og i arbeidslivet. Skal elevens potensial realiseres, må fagene fornyes og skolen videreutvikles. Da kan nye vilkår for elevens læring skapes, og fremtidsrettede kompetanser utvikles (NOU 2015:8, s.7–8).

OECD fremhever samfunnets drastiske endring med tanke på digitalisering og globalisering. Dermed hevder de skolesystemet blir nødt til å hjelpe elevene med å utvikle et «pålitelig kompass» og verktøyene til å navigere trygt gjennom en stadig mer kompleks, flyktig og usikker verden. OECD argumenterer for at suksess i dagens samfunn handler om identitet, autonomi og formål. Elevene må dermed utvikle nysgjerrighet, medfølelse og mot, for å kunne bidra til samfunnets bærekraftig utvikling. Følgelig trenger undervisningens innhold å være relevant for deres fremtidige liv som et menneske i et demokratisk samfunn, og dermed vil faktorene til «*the learning we seek*» illustrert i Figur 1 være avgjørende for å imøtekomme et samfunn i stadig utvikling (Boix-Mansilla, & Schleicher, 2022).



Figur 1: Rammeverk for utdanning (Boix-Mansilla, & Schleicher, 2022, s.84)

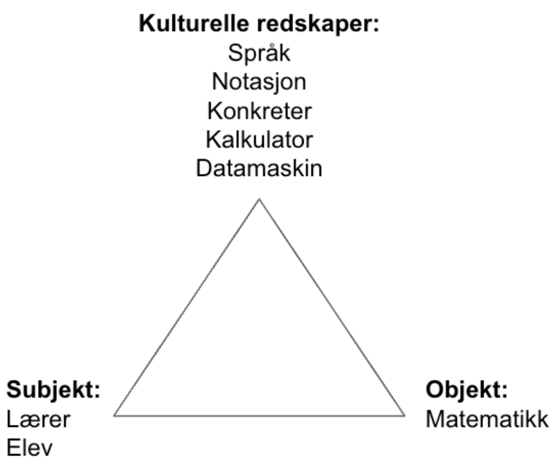
I det 21. århundre har ulike variabler angående oppgavedesign fått betydelig mer oppmerksomhet. Matematikk har blitt anerkjent som en kompleks og sosial vitenskap, med søkelys på struktur, orden og relasjoner (Lesh & Zawojewski, 2007; Liljedahl, 2016, 2021; Liljedahl & Cai, 2021, Schoenfeld, 2019, 2020). Liljedahl og Cai (2021) fremhever begrepet *problem posing* som en lovende retning for matematikken. *Problem posing* kan tolkes som det samme man gjør under en modell og modelleringsperspektiv ved å utforske, teste og revidere (Zawojewski, 2010). English et al. (2005) gjennomførte et studium i en australsk barneskole. Deres resultater viser at elevene utvikler sin matematiske kompetanse ved bruk av Lesh og Zawojewski´s (2007) moderniserte synspunkt på problemløsning. Elevene utviklet seg i elevgrupper som fremmer samarbeid med både elever og lærer (English et al., 2005). Jo Boaler har gjennom flere tiår utført longitudinale forskningsmetode for å utvikle kunnskap tilknyttet læringsmuligheter for alle elever. Gjennom hennes forskning har hun funnet ut at heterogene grupper som arbeider med det hun kaller for *groupworthy problems* utviklet markant bedre matematisk kompetanse enn elever i tradisjonelle klasserom (Boaler & Staples, 2008).

Oppgavedesign som fremmer læringsmuligheter hos alle elever, og karakteriseres som *groupworthy problems* inkluderer faktorer som:

- Åpner opp for kreativitet
- Inkluderer undersøkende tilnærming
- Tilrettelegger for kognitivt strev
- Inneholder en visuell komponent
- Lav inngangsterksel og høy takhøyde (LIST)
- Tilrettelegger for kommunisering og argumentasjon

  (Boaler, 2022, s.92, min oversettelse)

Det andre aspektet ved Figur 1 omhandler «*educators' expertise we need*», dermed blir det nødvendig for utdanningsprofesjonen å utvikle internasjonale pedagogiske verktøy som kan tilrettelegge for differensiert undervisning (Boix-Mansilla, & Schleicher, 2022). Hiebert og Grouws (2007) argumenterer for at elevene skal gis «eierskap» til matematikken, og utvikle sin matematiske kompetanse bestående av flere delkompetanser (se kap. 2.3). Videre hevder nyere forskning at undervisningen bør ha et søkelys på begrepslæring, ved å tilrettelegge for flere matematiske perspektiver og løsningsmetoder (Boaler & Staples, 2008; Hiebert & Grouws, 2007; Liljedahl, 2021; Ma, 2020; Mason et al., 2010; Schoenfeld, 2019, 2020). Følgelig blir elevenes læringsmuligheter (*opportunity to learn*) en av de viktigste faktorene for elevenes utvikling (Hibert og Grouws, 2007), som også støttes av Schoenfeld's (2020) TRU-rammeverk (se kap. 2.4). Elevens læringsmuligheter kan sammenliknes med Vygotsky`s (1978) proksimale utviklingssone. I denne sonen har elevene forutsetninger for å kunne utvikles, og oppleve mestring med bruk av kulturelle redskaper i matematikkundervisning (se Figur 2), som for eksempel gjennom å kommunisere med medelever og lærere (Säljö, 2005/2006).



Figur 2: Handling (inspirert av Säljö, 2006, s.28)

Megowan-Romanowicz (2016) argumenterer for elevers bruk av tavler (kulturelt redskap) utvikler klasseromnormene fra et søkelys på riktig svar til resonnering og samhandling. Liljedahl (2021) har videreutviklet bruk av ikke-permanente flater (tavler) til å være vertikale ikke-permanente flater – det kan være vinduer, tavler eller liknende – for å utvikle et *tenkende klasserom* (se kap.2.2). Dermed vil elevene kunne utvikle en identitet som verdsetter produktivt strev, og se matematiske sammenhenger mellom fakta, prosedyrer og sentrale ideer gjennom et læringsfelleskap.

2.2 Tenkende klasserom

Peter Liljedahl er en forsker som har utarbeidet en omfattende pedagogisk metodikk for å engasjere elevene i matematikkundervisningen, ved å endre de tradisjonelle klasseromsnormene (Liljedahl, 2021). Hans forskning startet med et søkelys på AHA! opplevelsen ved problemløsning, som ifølge Liljedahl et al. (2016) har stor påvirkning på elevenes identitet og mestringsforventning innen matematikk. I løpet av en periode besøkte Liljedahl (2021) flere skoler og observerte matematikkundervisningen i flere av klasserommene. Observasjonene av undervisningstimene viste at elevene ga opp nærmest med en gang problemløsningsoppgaven ble gitt. Resultatene hans konkluderte med at klasseromsnormene – forventingene som eksisterer rundt rollene til elever og lærer – hindret eller reduserte elevenes potensial til å tenke (Liljedahl, 2016, 2021). Dermed ønsket Liljedahl å utvikle en pedagogisk metodikk som tilrettelegger for individuell og kollektiv tenkning, med søkelys på kollektiv læring gjennom aktiviteter og diskusjoner (Liljedahl, 2016). Forskningsprosjektet utarbeidet følgende 14 faktorer for å kunne beskrive matematikklærerens arbeidsoppgaver, videre skulle de analysere hvilke av disse faktorene som hadde størst effekt i utviklingen av et *tenkende klasserom* med et søkelys på å forbedre undervisningen for elevene:

1. *What types of task we use*
2. *How we form collaborative groups*
3. *Where students work*
4. *How we arrange the furniture*
5. *How we answer questions*
6. *When, where, and how tasks are given*
7. *What homework looks like*
8. *How we foster student autonomy*
9. *How we use hints & extensions*
10. *How we consolidate a lesson*
11. *How students take notes*

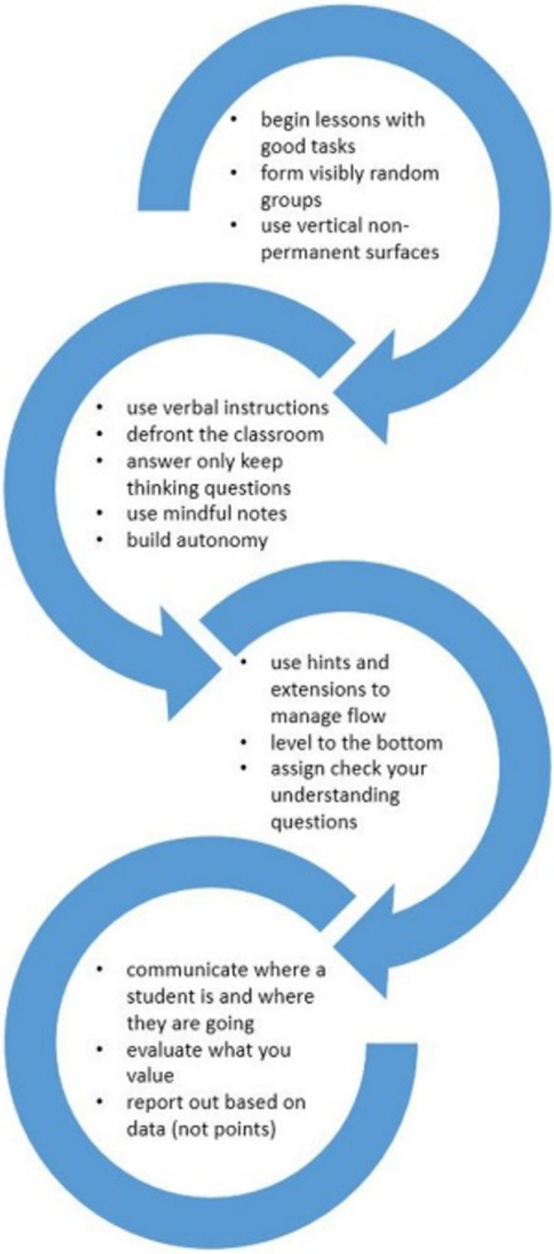
12. How we choose to evaluate

13. How we use formative assessment

14. How we grade

(Liljedahl, 2021, s. 14).

Etter klasseromsstudier gjennom en periode på 15 år, med observasjoner av over 400 lærere har resultatet blitt 14 pedagogiske praksiser (se Figur 3) som til sammen utgjør metodikken *tenkende klasserom* (Liljedahl, 2021). Disse 14 faktorene skulle danne grunnlaget for å løsrive seg ut av de tradisjonelle klasseromsnormene som Liljedahl observerte tidlig i forskningsprosjektet (Liljedahl, 2016). I løpet av forskningen viser det seg at det er noen av disse 14 utviklede praksisene som er mer betydningsfulle enn andre (Liljedahl, 2021). De mest avgjørende designfaktorene i et *tenkende klasserom* inkluderes i det første segment (Figur 3), denne delen består av følgende faktorer: utforskende oppgave, synlige randomiserte grupper, og bruk av vertikale tavler. Figur 3 illustrerer hvordan rammeverket på totalt fire segment er gjensidig avhengig av hverandre. Det er derimot av stor betydning å iverksette disse segmentene i riktig rekkefølge – fra øverst til nederst. Liljedahl (2021) påpeker også at enkelte av punktene i segmentene må organiseres etter en eksplisitt rekkefølge. For eksempel hevder han at første segment må iverksette alle tre praksisene samtidig, hvorimot andre segment ikke har en rekkefølge som påvirker utfallet. I det tredje segmentet er det i motsetning optimalt å iverksette slik som faktorene er opplistet i Figur 3 (øverst til nederst). Liljedahl (2021) hevder også at hver av faktorene må først bli godt etablert før en inkluderer neste faktor, dette gjelder for hele rammeverket. I det siste segmentet har faktoren «vurdere det en verdsetter» ingen foretrukken rekkefølge. Det er derimot viktig at formativ vurdering må etableres før summativ vurdering (Liljedahl, 2021).



Figur 3: Tenkende klasserom (Liljedahl, 2021, s.281)

Under kommer en beskrivelse av faktorene som vil inkluderes videre i denne studien. Grunnlaget for å begrense rammeverket er i samsvar med Liljedahl (2021) meninger rundt omfanget av disse 14 praksisene. Han anbefaler at implementering av *tenkende klasserom* skal gjøres gradvis i en beskrevet sekvens gjennom en lengre tidsperiode. Dermed vil det være fornuftig for dette forskningsprosjektet å fokusere på bruken av: utforskende oppgave, synlige randomiserte grupper, og bruk av vertikale tavler i tillegg til veiledning av elever.

2.2.1 Begynne undervisningen med utforskende oppgave

Det er siden 1970-tallet forsket mye på faktorer som påvirker oppgavedesign (task variables), og resultatene viser at enkelte gjennomtenkte endringer har massiv effekt (Liljedahl & Cai, 2021). Liljedahl (2021) argumenterer for å gi utforskende oppgaver helt i begynnelsen av en undervisningstime. Han argumenterer for at det er lettere å holde på eller skape engasjement i starten av undervisningen, enn å gjøre elevene passive i begynnelsen for så og aktivere dem senere. I et *tenkende klasserom* anbefales bruken av tre ulike kategorier av problemløsningsoppgaver for å engasjere elevene (Liljedahl, 2021). *Høyt engasjerende utforskningsoppgaver (highly engaging thinking tasks)* er den første kategorien av anbefalte utfordringer. Disse oppgavene er så engasjerende og interessante at mennesker ikke kan unngå å tenke. *Matematiske kort triks (card tricks)* engasjerte også elevene på samme måte som *høyt engasjerende utforskningsoppgaver* ifølge Liljedahl´s (2021) egen forskning. Disse oppgavene baserte seg ikke på fingerferdigheter, men kunne heller beskrives matematisk (Liljedahl, 2021, s.22). Siste kategorien utviklet av Liljedahl (2021) kalles for *virkelighetsnære oppgaver (numeracy tasks),* og oppgavene er basert på elevenes hverdagsliv. Disse oppgavene kan sees i sammenheng med modelleringsoppgaver (English et al, 2005; Lesh & Zawojewski, 2007). Sammenhengen mellom disse tre oppgavekategoriene er at de har flere/alle komponentene til *groupworthy problems* som blant annet tilrettelegger for utforskning og samarbeid med kognitive krav uttrykt som lav inngang og høy takhøyde.

2.2.2 Synlig randomiserte grupper

Med et søkelys på oppgaver som tilrettelegger for problemløsning og samarbeid har forskningen til Liljedahl (2021) avdekket flere klasseromsnormer typisk for tradisjonell undervisning. En av disse klasseromsnormene som var effektiv å endre, er hvordan elevene samarbeidet med matematikk (Liljedahl, 2021). Benyttet læreren seg av elevsamarbeid, observerte Liljedahl (2014) at de fleste lærerne anvendte strategisk gruppering, enten det var med tanke på faglig utvikling – homogenitet eller heterogenitet – eller sosial utvikling. Derimot viser forskningen til Liljedahl (2014) positive resultater ved bruk av tilfeldig gruppering av elevgrupper på optimalt tre personer per gruppe. Ved tilfeldig inndeling antyder resultatene til høyere engasjement og deltakelse i undervisningen. Samt eliminering av sosiale barrierer, og økende elevaktivitet som er mindre avhengig av lærersvar (Liljedahl, 2014).

2.2.3 Bruk av vertikale tavler

Utviklingen av *tenkende klasserom* studerte ulike alternativer angående elevers arbeidsforhold – gjennom å studere bruken av vertikale eller horisontale ikke permanente tavler, vertikale eller horisontale papir eller tradisjonell notatbok. Ved å bruke flere observerbare faktorer som for eksempel: tiden det tok før elevene begynte på oppgaven, engasjement til å starte, diskusjon og deltakelse, og produktiv holdning ga vertikale ikke permanente tavler betraktelig bedre resultater enn de resterende alternativene (Liljedahl, 2016). Fordelene med disse vertikale tavlene er flere, det viser seg at elevene tillater seg å notere oftere, og uten å være helt sikker i sin løsning på grunn av det lar seg enkelt viske bort (Liljedahl, 2021). Et pedagogisk virkemiddel Liljedahl (2021) fant ut som optimaliserte gruppens dynamikk var ved å gi elevgruppene en tusj, dette økte samhandlingen ved at elevene diskuterte sammen. Videre viser det seg at disse tavlene øker kunnskapsmobiliteten i et klasserom ved at elevgrupper benytter tilgjengelige kulturelle verktøy (se Figur 2) som for eksempel andres tavler eller teknologiske verktøy (Pruner & Liljedahl, 2021).

2.2.4 Veiledning av elever

Det første segmentet (Figur 3) i et *tenkende klasserom* endrer klasseromsnormene betraktelig, følgelig endrer også lærerens rolle seg for å kunne optimalisere elevenes deltakelse og engasjement. Dermed ble hvordan «læreren veileder elevene» (answer only keep thinking questions) avgjørende for å støtte elevenes tenkning (Liljedahl, 2021). Liljedahl (2021) hevder elever stiller tre ulike typer spørsmål [1] *nærhetspørsmål (proximity questions)* defineres ved overfladiske spørsmål som stilles av eleven når læreren er i nærheten. Denne typen spørsmål hevder Liljedahl (2021) gjennomføres for å validere klasseromsnormene i et tradisjonelt klasserom. Elevene stiller overfladiske spørsmål siden det er en anerkjent kvalitet student skal ha, og lærerens rolle skal svare på disse spørsmålene. [2] *Ikke-tenke spørsmål (stop-thinking questions)* brukes av elevene for å bli validert, for eksempel «er dette riktig?». [3] *Tenke spørsmål (keep-thinking questions)* defineres som avklaring- eller utvidelse spørsmål. Elevene som stiller denne typen spørsmål mener Liljedahl (2021) er engasjert i matematisk tenkning, men trenger litt veiledning for å kunne avklare eller utvide oppgaven. Analysene fra forskningsprosjektet viste lærerens signifikante rolle i å vedlikeholde et *tenkende klasserom* ved å bare svare på [3] *tenke spørsmål* (Liljedahl, 2021).

Selv om læreren i hovedsak skal veilede elevene som stiller [3] *tenke spørsmål*, vil fortsatt situasjoner inntreffe hvor elever stiller spørsmål av type [1] eller [2]. Liljedahl (2021) har gjennom sitt forskningsprosjekt utviklet en praksis for å håndtere kategoriene vi som lærere ikke skal svare på.

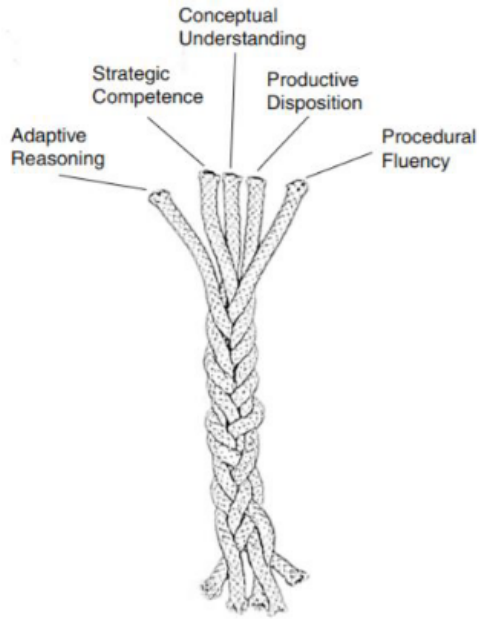
Først gjennomførte de forsøk med nøye planlagte lærersvar til *nærhetspørsmål* og *ikke-tenke spørsmål*. Resultatet ble derimot at læreren som oftest havnet i en utfordrende situasjon og dermed ga elevene for mye som resulterte til at elever ikke trengte å tenke lengre. Således utviklet de metoden «*anerkjenn spørsmålet med et smil, og beveg deg videre*», det viser seg at de aller fleste elever tolker dette som «jeg har tro på at du skal klare dette med mer innsats» (Liljedahl, 2021). Dermed vil elevene utfordres videre til å utvikle sin matematiske kompetanse (se kap. 2.3) i et *tenkende klasserom*.

2.3 Matematisk kompetanse

Som tidligere nevnt er samfunnet og kravene til utdanningssystemet i stadig utvikling, OECD fremhever en felles forståelse for læring og undervisning (Boix-Mansilla, & Schleicher, 2022). Dermed blir et omfattende kompetansebegrep nødvendig for å utvikle elevenes kunnskaper og ferdigheter i samsvar med samfunnets behov. Fagfornyelsen (LK20) definerer kompetanse som:

> Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning. (Utdanningsdirektoratet, 2021).

Kilpatrick et al. (2001) utviklet en modell (Figur 4) – *mathematical proficiency* – som inkluderer ulike matematiske kunnskaper, ferdigheter, og holdninger som er gjensidig avhengig av hverandre for matematisk kompetanseutvikling. Det videreutviklede kompetansebegrepet til LK20 sammen med de fem komponentene til *mathematical proficiency* utgjør forskningsprosjektets synspunkt angående matematisk kompetanse. Disse ulike delkompetansene er avhengig av hverandre og like viktige for matematisk utvikling, derfor er modellen illustrert som fem tråder sammenvevd i hverandre for å representere kompleksiteten til matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001).



Figur 4: Matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001, s.117)

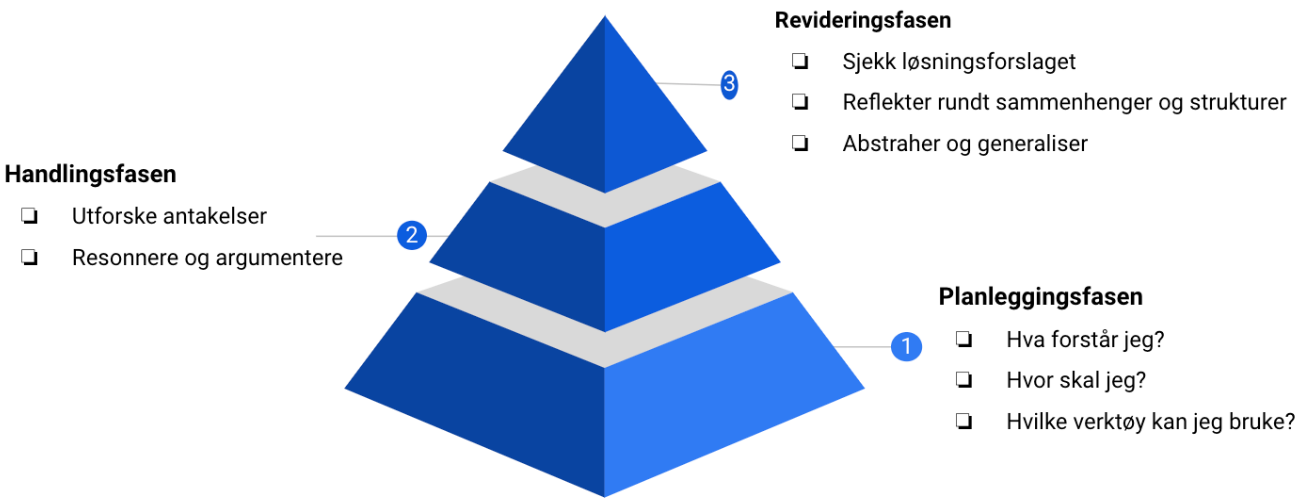
Denne studien oversetter disse fem komponentene (Figur 4) til norsk og beskriver dem i korthet. I samsvar med LK20´s definisjon av kompetanse, definerer denne studien de fleste komponentene som delkompetanser. Matematisk kompetanse omfatter følgelig alle komponentene, dermed vil det være ønskelig at undervisning tilrettelegger for elevenes helhetlig matematiske kompetanseutvikling.

2.3.1 Resonnerings kompetanse

Kilpatrick et al. (2001) fremhever resonnerings kompetanse som bindeleddet til alle delkompetanser. I matematikk brukes resonnering som meningsskapende mellom sentrale matematiske ideer og situasjoner, både abstrakte og praktiske. Resonnering i denne sammenhengen omfatter forklaringer og argumentasjoner, men også undersøkelser etter mønstre, analogier og metaforer (Kilpatrick et al., 2001). Dermed påpeker disse forskerne nødvendigheten tilknyttet elevenes muligheter for å utvikle seg som resonnerende deltakere, slik som Lampert (1990) argumenterer for i hennes studie. Følgelig må elevene tilbys tilstrekkelig med tid for å kunne utvikle ulike resonneringer. Når elevene opplever å stå fast vil strategisk kompetanse være nødvendig å benytte seg av.

2.3.2 Strategisk kompetanse

Strategisk kompetanse hevder Kilpatrick et al. (2001) omfatter evnen til å (re)formulere problemer, representere problemet på en hensiktsmessig måte, og dermed løse dem. Forskerne hevder denne kompetansen har mye til felles med problemløsning, som matematikkdidaktikk har dedikert flere tiår til (se kapittel 2.1). Kilpatrick et al. (2001) hevder matematikkundervisningen ofte gir eksplisitte utfordringer elevene skal løse, men at det i enkeltindividers liv ikke er like åpenbart hvordan matematikk kan anvendes for å løse hverdagslige utfordringer. Dermed hevder forskerne at elevene bør utvikle ferdigheter innen det Mason et al. (2010) kategoriserer for *planleggingsfasen,* slik at de blir rustet til å anvende matematikk i deres fremtidige selvstendige liv. Videre hevder Kilpatrick et al. (2001) at suksessfulle strategiske tenkere klarer å reflektere og bruke ulike matematiske prosedyrer (revideringsfasen) for å kunne validere løsningsforslaget. Fra definisjonene til Schoenfeld (1992/2016) angående matematikk, og Lesh og Zawojewski (2007) vedrørende problemløsning. Vil det være naturlig å benytte Mason et al. (2010) modell *thinking mathematically* (oversetters til matematisk tenkning) innen strategisk kompetanse.



Figur 5: Matematisk tenkning (Utviklet med inspirasjon fra Mason et al., 2010)

Denne studien tolker Mason et al. (2010) sine tre faser for matematisk tenkning som en pyramide. Grunnlaget for denne tolkningen ligger i hvor avgjørende planleggingsfasen er for videre arbeid med handlingsfasen og revideringsfasen (Mason et al., 2010), derav tolkes dette som fundamentet i matematisk tenkning. Videre vil disse fasene være avhengige av hverandre og dermed vil individer kunne være i ulike faser samtidig eller sjonglere mellom de ulike fasene i møte med matematiske utfordringer.

2.3.3 Konseptuell forståelse

Med konseptuell forståelse vil elevene utvikle kunnskap utover isolerte fakta og prosedyrer, som gjør at de lettere ser seg selv som kapabel til å gjøre matematikk. Elevene vil kunne utvikle forståelse for sammenhenger mellom sentrale matematiske ideer, begreper og representasjoner, og dermed bruke denne dype forståelsen til å løse utfordringer på ulike måter. Følgelig vil det være lettere å forstå hvorfor eksplisitte matematiske prosedyrer vil være effektive til ulike situasjoner (Kilpatrick et al., 2001). Schoenfeld (2020) fremhever også konseptuell kompetanse som en motsetning fra ren memorering av prosedyrer. Med en slik kompetanse vil de kunne hente frem «glemt» kunnskap i møte med kjente eller ukjente situasjoner, og dermed være i stand til å løse utfordringer uten å være avhengig av memorert kunnskap.

2.3.4 Produktive holdninger

Produktive holdninger omfatter personlige holdninger og verdier som bidrar til å fremme læring og utvikling i ulike situasjoner (Kilpatrick et al., 2001). Elevene skaper dermed en identitet som et lærende individ i møte med ulike fag – som i dette tilfellet er matematikk. Lærende identitet kan omfatte egenskaper som nysgjerrighet, utholdenhet, åpenhet for endring, lærevilje og selvrefleksjon. Haimovitz og Dweck (2017) trekker frem nyere forskning innen kognitiv utvikling, som vektlegger potensiale ved et utviklende tankesett fremfor låst tankesett hos elevene som illustrert i Tabell 1.

Tabell 1: Tankesett (Dweck, 2017, s.259)

Låst tankesett Fører til et ønske om å se smart ut og derfor en tendens til:	**Utviklende tankesett** Fører til et ønske om å lære og derfor en tendens til:
unngå utfordringer	omfavne utfordringer
bli defensiv eller gi opp lett	holde ut i møte med tilbakeslag
se innsats som resultatløs eller verre	se innsats som veien til mestring
ignorer nyttige negative tilbakemeldinger	lære av kritikk
føler seg truet av andres suksess	finne lærdom og inspirasjon i andres suksess

Roberson (2020) benytter seg blant annet av teori innen motivasjon og tankesett, til å argumentere for å utvikle elevenes besluttsomhet i møte med faglige utfordringer. Dermed bør målsettingen være at alle elever utvikler produktive holdninger, slike holdninger refererer til å se matematikk som meningsfull og overkommelig (Kilpatrick et at., 2001). Når elevene gis muligheter til å utvikle sin kompetanse i de ulike matematiske delkompetansene vil de også utvikle sin egen identitet til matematikken. Kilpatrick et al. (2001) påpeker hvordan elevenes matematiske identitet kan være avgjørende for deres videre suksess i utdanningsløpet deres. Dermed er det avgjørende for elevene å utvikle produktive holdninger innen matematikk. For å tilrettelegge for slike produktive holdninger med en identitet som identifiserer seg selv som matematisk kapabel, må elevenes tilbys muligheter til å utvikle helhetlig matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001).

2.3.5 Prosedyre kompetanse

Prosedyre kompetanse omfatter menneskets evne til å utføre prosedyrer på en effektiv måte, uten at det skal kreve høye kognitive krav. Dermed inkluderes blant annet evnen til å benytte seg av de tilegnede delkompetansene, og dermed kunne utføre matematiske representasjoner basert på en helhetlig forståelse. Prosedyre kompetanse innebærer også å kunne anvende ulike kulturelle redskaper som for eksempel: kalkulator, datamaskiner, eller konkreter i situasjoner hvor dette er fornuftig (Kilpatrick et al., 2001). Menneskers kompetanse innen matematikk kan påvirke hverdagslivet til hver enkelt individ, for eksempel hoderegning i dagligvarebutikken eller beregning av skatt gjøres med matematikk. Dermed vil det være gunstig for hvert enkelt individ å utvikle ferdigheter innen ulike kulturelle redskaper som videreutvikler matematisk kompetanse.

Kilpatrick et al. (2001) belyser hvordan utdanningssystemet tidligere har hatt en oppfatning tilknyttet konseptuell- og prosedyre kompetanse som konkurrerende, dette er derimot en feilaktig antakelse som skolesystemet trenger å fornye i sin forståelse rundt matematisk kompetanseutvikling. Som beskrevet i dette kapitlet er alle disse delkompetansene gjensidig avhengig av hverandre. Dermed vil det være gunstig å sette et søkelys mot et rammeverk som anerkjenner kompleksiteten av matematisk kompetanse, hvor elevene utvikler seg som fleksible tenkere og problemløsere i møte med et samfunn som er i stadig utvikling.

2.4 Teaching for robust understanding

Schoenfeld (2019, 2020) hevder vi kan optimalisere undervisning for faglig og sosial utvikling, med et rammeverk for profesjonsutvikling basert på de essensielle faktorene (Figur 6) som inkluderes i et klasserom. Schoenfeld´s (2018) undersøkelser etter eksisterende rammeverk som var omfattende nok til å inkludere alle de essensielle aspektene vedrørende undervisning, resulterte i utviklingen av rammeverket *Teaching for Robust Understanding* (Schoenfeld, 2014, 2018, 2019, 2020) som heretter benevnes som TRU. TRU er gjennom analysen til Charalambous og Praetorius (2018) kategorisert som et hybrid rammeverk, og vil derfor kunne benyttes til å analysere den komplekse utfordringen knyttet til undervisning som lærer og elever konstruerer sammen gjennom det faglige innholdet. Det er verdt å merke seg fem fundamentale moment ved TRU-rammeverket:

1. De fem dimensjonene til TRU er nødvendige og tilstrekkelige til å karakterisere den typen undervisning som resulterer i at studentene utvikler seg som kunnskapsrike, fleksible og ressurssterke tenkere og problemløsere.
2. TRU innebærer et grunnleggende perspektivskifte, fra lærersentrert til studentsentrert. Nøkkelspørsmålet er ikke: "Liker jeg det læreren gjør?" Det er: "Hvordan oppleves undervisningen fra elevens synspunkt?" Lærerens handlinger er selvfølgelig essensielle – men det som virkelig betyr noe er måtene elevene har meningsfulle muligheter til å forstå innholdet på.
3. Det er ingen "du skal" i TRU. TRU sier ikke hvordan man skal undervise, fordi det er mange forskjellige måter å være en effektiv lærer på.
4. TRU er ikke et verktøy eller sett med verktøy. Snarere er TRU et perspektiv på hva som teller i undervisning, og TRU gir et språk for å snakke om undervisning på kraftige måter. Med denne forståelsen kan man bruke alle produktive verktøy med profesjonsrettet skjønn.
5. På «metanivå» må det forstås at det som blir sett på som god undervisning ikke er absolutt, men et uttrykk for et bestemt (ofte kulturelt forankret) verdisett.

(Schoenfeld, 2018, s. 4, min oversettelse).

The Five Dimensions of Powerful Mathematics Classrooms

The Mathematics	Cognitive Demand	Equitable Access to Mathematics	Agency, Ownership, and Identity	Formative Assessment
The extent to which classroom activity structures provide opportunities for students to become knowledgeable, flexible, and resourceful mathematical thinkers. Discussions are focused and coherent, providing opportunities to learn mathematical ideas, techniques, and perspectives, make connections, and develop productive mathematical habits of mind.	*The extent to which students have opportunities to grapple with and make sense of important mathematical ideas and their use. Students learn best when they are challenged in ways that provide room and support for growth, with task difficulty ranging from moderate to demanding. The level of challenge should be conducive to what has been called "productive struggle."*	*The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core mathematical content being addressed by the class. Classrooms in which a small number of students get most of the "air time" are not equitable, no matter how rich the content: all students need to be involved in meaningful ways.*	*The extent to which students are provided opportunities to "walk the walk and talk the talk" – to contribute to conversations about mathematical ideas, to build on others' ideas and have others build on theirs – in ways that contribute to their development of agency (the willingness to engage), their ownership over the content, and the development of positive identities as thinkers and learners.*	*The extent to which classroom activities elicit student thinking and subsequent interactions respond to those ideas, building on productive beginnings and addressing emerging misunderstandings. Powerful instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to deepen their understandings.*

Figur 6: Teaching for Robust Understanding (Schoenfeld, 2018, s.3)

TRU er et rammeverk som tilrettelegger for et felles profesjonsspråk på tvers av fagfelt og utdanningsinstitusjon profesjonsutøvere tilhører (Schoenfeld, 2020). Dermed vil profesjonen kunne gjennomføre nasjonale og internasjonale utviklingsarbeid som til sammen gir et bedre grunnlag for felles profesjonsutøvelse. Dette rammeverket kan dermed bidra med forskning i samsvar med føringene fra OECD vedrørende profesjonsutvikling (Boix-Mansilla, & Schleicher, 2022). Denne studien skal herved gi en begrenset beskrivelse ved dimensjonene som omfattes av TRU-rammeverket (se kapittel 2.4.1 – 2.4.5).

2.4.1 Matematisk innhold

Ma (2020) har gjennom det hun kaller for «*profound understanding of fundemantal mathematics*» (refereres videre som PUFM) analysert hvilke kompetanser meget dyktige lærere besitter fra USA og Kina. Fra denne analysen fremheves det noen sentrale sider ved matematikken som bør vektlegges, disse er: matematiske sammenhenger, flere perspektiver, enkle og grunnleggende ideer og langsiktig koherens. Dette synspunktet støttes også av blant annet Schoenfeld (2019) som beskriver dagens pensum med fokus på enkelte detaljer, men som mister fokus på de grunnleggende ideene og langsiktig koherens. Schoenfeld (2019) påpeker at det matematikkdidaktiske forskningsfeltet ikke har en felles enighet om hva som skal være den sentrale matematiske føringen lærere bør undervise etter, og hvilke matematiske kunnskaper lærerne bør strebe etter. Han argumenterer dermed for å videreutvikle en definisjon fra Liping Ma´s PUFM til «*profound pedagogical knowledge of content fundamentals*» (Schoenfeld, 2019, s. 366). Schoenfeld påpeker videre at elevene må utvikle matematisk kompetanse (se kap. 2.3), der han fremhever «sense making» (oversettes til resonnering).

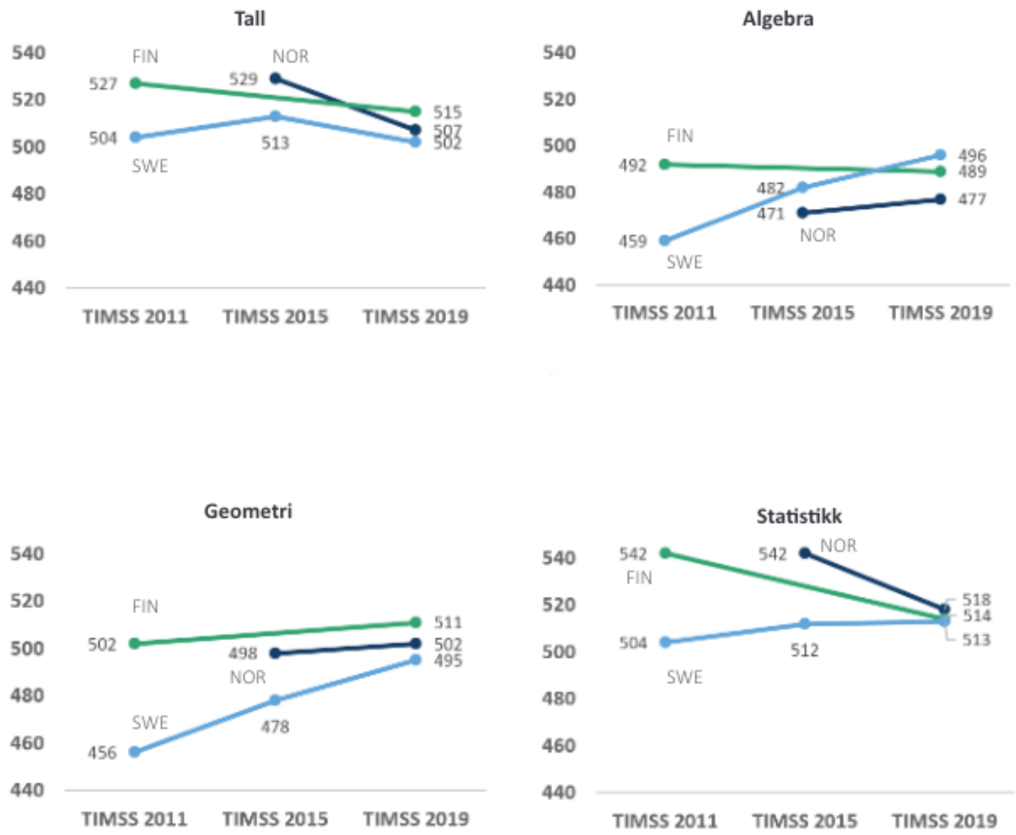
Det faglige innholdet danner hele grunnlaget for samspillet og utviklingen mellom lærer, elever og matematikken. Schoenfeld (2019) har samme synspunkt på hvordan læringsmiljøet skal være med tanke på lærer- og elevrolle som Lampert (1990) hadde gjennom hennes forskning. Han fremhever videre begrepet *habits of mind* fra Cuoco et al. (1996), der de anbefalte et paradigmeskifte i generelle og matematiske fokusområder. Cuoco et al. (1996) hevder utviklingen i samfunnet er så markant at tradisjonelt synspunkt på matematikkundervisning bør endres, og fokuset bør dermed flyttes over til verdier og aspekter for elevenes hverdagsliv. Dette støttes av Lesh og Zawojewski (2007) med deres definisjon på problemløsning som denne studien benytter. Cuoco et al. (1996) utviklet begrepet *habits of mind* med fokus på prosessen i matematikk. Elevene bør ifølge disse forskerne utvikle ulike sett med *habits of mind*, men presiserer at disse punktene i Tabell 2 er utfordrende for de fleste og vil ta tid å utvikle.

Tabell 2: Habits of mind (Cuoco et al., 1996)

Generelle habits of mind	Fagspesifikke habits of mind
Elever bør søke etter mønster	Matematikere snakker stort og tenker detaljert
Elever bør eksperimentere	Matematikere snakker detaljert og tenker stort
Elever bør kommunisere og argumentere	Matematikere benytter funksjoner
Elever bør tenke	Matematikere bruker matematiske sammenhenger
Elever bør være kreative	Matematikere bruker deduktive og eksperimentelle metoder
Elever bør resonnere og visualisere	Matematikere videreutvikler språket
Elever bør utforske	Matematikere utsettes for produktivt strev
Elever bør gjette	

2.4.1.1 Algebra

Forskningsprosjektet har et matematisk søkelys på tema algebra, som er interessant fra flere perspektiv. Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) understreker at algebra er det matematiske emne norske skoleelever scorer svakest i på ungdomsskolen som illustrert i Figur 7 (Bergem et al. 2016; Kaarstein et al., 2020). Samtidig viser en undersøkelse (TEDS-M) gjennomført på lærere at algebra kan oppleves utfordrende å lære bort (Grønmo, 2018). Grønmo (2018) hevder algebra bør tolkes som et språk innenfor matematikken med søkelys på relasjoner mellom mengder og generaliseringer. Ferdigheter innen dette språket er essensielt for menneskers utdanningsmuligheter, spesielt innenfor realfaglige utdanninger. Fra hennes analyse observerer en store historiske forskjeller ved hvordan ulike land vektlegger matematisk utvikling innen «anvendt matematikk» eller «ren matematikk», hvorav sistnevnte gir høyere kompetanse innen algebra. Grønmo (2018) argumenterer for at Norge og andre land må gi elevene bedre muligheter for å lære seg algebra, fordi algebraisk kompetanse er essensielt i høyere utdanning, og dermed se til land som scorer høyt i algebra for å kunne lære av dem.



Figur 7: TIMSS – Nordiske prestasjoner (Kaarstein et al., 2020, s.18)

Mason et al. (2005/2011) har utviklet en algebraisk lærebok for matematikklærere som har et spesifikt søkelys på generaliseringer. Forfatternes synspunkt kommer tydelig frem med følgende utsagn:

> En undervisningstime hvor den som lærer ikke får muligheten til å generalisere er ikke en matematikktime (Mason et al., 2005/2011, s.8).

Videre har disse forskerne søkelys på hvordan eleven utvikler kompetanse innen algebraisk tenkning ved bruk av spesialisering og flere metoder for å uttrykke et problem på. Her fremheves ulike representasjoner som: ord, symboler, bilder (grafer og diagrammer) og tabeller. I tillegg tar disse forfatterne for seg hvordan ulike verktøy som kalkulator og grafisk kalkulator kan fungere som kulturelle verktøy gjennom den matematiske tankeprosessen (Mason et al., 2005/2011). De fremhever andres meninger rundt introduksjonen til kulturelle verktøy ofte kan oppleves som å frarøve matematisk tenkning, men hevder at når man etter hvert blir trygg med verktøyene vil de tilrettelegge for kreativitet. Cuoco et al. (1996) har utviklet matematiske *habits of mind* til algebra og geometri.

Disse matematiske grenene har vært, og er fortsatt sentrale i utviklingen av vårt samfunn. Dermed vil denne studien inkludere *habits of mind* tilknyttet algebra som forskerne kaller «*algebra modus*»:

- Utvikler grundige regnestykker
- Benytter abstraksjon
- Utvikler algoritmer
- Benytter algoritmisk tenkning
- Gjennomfører utvidelser og generaliseringer
- Representerer ting

(Cuoco et al., 1996, min oversettelse)

Definisjonen vedrørende matematikk beskriver hvordan mennesker skal utvikle et matematisk synspunkt, og utvikle kunnskap og ferdigheter ved å benytte matematiske verktøy (Schoenfeld, 1992/2016). De ulike *habits of mind* utviklet av Cuoco et al. (1996) kan dermed beskrive prosessene i matematikk, og følgelig benyttes i planleggingen av undervisningen. Schoenfeld (2020) fremhever også et nødvendig skifte i matematisk skolepensum i retning av undersøkelsesorientert (*inquiry-oritented*) for grunnskole og videregående som kan tilrettelegge for helhetlig matematisk kompetanseutvikling.

2.4.2 Kognitive krav

Hiebert og Grouws (2007) fremhever produktivt strev – som i deres artikkel beskrives som matematiske utfordringer innenfor individers «rekkevidde» (proksimal utviklingssone) – med et søkelys på grunnleggende matematiske ideer og matematiske sammenhenger (deler fra PUFM). En grunnleggende faktor er hvordan elevene skal ha tilstrekkelig mulighet for å mestre den gitte matematiske utfordringen med rikelig innsats (Hiebert & Grouws, 2007; Schoenfeld, 2019, 2020). Dermed bør lærerens rolle endres slik at det tilrettelegges for elevenes utvikling av matematisk kompetanse som er beskrevet i kapittel 2.3 (Hiebert & Grouws, 2007; Lampert, 1990; Schoenfeld, 2019, 2020). Liljedahl (2016) påpeker også dette i sin forskning rundt problemløsning. Tidlig i hans forskningsprosjekt viste elevene tegn til hva vi kan analysere som et låst tankesett (se Tabell 1) i et tradisjonelt klasserom, der flesteparten ga opp tidlig under problemløsningsoppgaver (Liljedahl, 2016). Forskningen fant også ut at de fleste elevene enten benyttet unnvikelsesstrategier, eller kopierte lærerens løsningsmetode (Liljedahl, 2021). Dermed bør det tilrettelegges for at elevene kan utvikle holdninger som er mer samsvarende med utviklende tankesett (se Tabell 1). Med slike utviklingsmuligheter vil de kunne utvikle utholdenhet i møte med utfordringer som byr på kognitive krav. Begrepet produktivt strev er essensielt i den forstand at elevene må kunne oppleve mestring i møte med kognitive krav, dermed er strukturering og planlegging av matematisk innhold (kap. 2.4.1) helt essensiell del av lærerens profesjonsarbeid. Schoenfeld (2019) hevder lærerens rolle ved å tilpasse matematikkens kognitive krav for eleven(e) med bruk av formativ vurdering (se kap. 2.4.5) blir viktig for å kunne utvikle elevenes matematiske identitet.

Et av suksessfaktorene vedrørende *groupworthy problems* var graden av kognitive krav, og oppgavens utviklende kompleksitet (LIST) (Boaler, 2022). Smith og Stein (1998) har gjennom deres forskning på ulike faktorer vedrørende god matematikkundervisning også identifisert kognitive krav som en avgjørende faktor for elevenes synspunkt og utvikling vedrørende matematikk. Videre har Smith og Stein (1998) utviklet fire nivå for å kunne analysere og beskrive optimale undervisningsaktiviteter tilknyttet matematikk, de første nivåene [1] og [2] blir kategorisert til lav grad av kognitive krav. [1] *Memorering* handler om at elevene tilegner seg eller reproduserer tidligere lært kunnskap, uten noen sammenheng mellom de sentrale matematiske ideene. I denne kategorien «pugger» elevene fakta, regler, formler og definisjoner. Elevene vil heller ikke gis nok tid til å arbeide med matematiske utfordringer i denne kategorien, dette på bakgrunn av at produktivt strev og ulike/flere representasjoner ikke blir verdsatt. [2] *Prosedyrer uten sammenhenger* omfatter algoritmisk utregning av matematiske oppgaver. Elevene arbeider med oppgaver som lærer oftest har vist en løsningsmetode for, og dermed gir elevene mulighet for å trene en konkret matematematisk ferdighet. Stein et al. (2008) kaller denne pedagogiske metoden for «*show and tell*», der kravet til elevene er på å reprodusere løsningen læreren viste over flere tilnærmet like oppgaver. I denne kategorien er det heller ikke fokus på flere representasjoner eller sentrale matematiske ideer og begreper. Fokuset er på korrekt bruk av matematisk representasjoner, men uten et fokus på underliggende meninger og forståelse. Dermed blir ikke elevene utfordret til å argumentere eller generalisere, men heller å gi et entydig svar på en lukket oppgave. Derimot krever [3] *prosedyrer med sammenhenger* høy grad av kognitive krav. I denne kategorien kreves det at elevene opplever i noen grad produktivt strev og møter kognitive krav. Elevene bør benytte seg av flere representasjoner som for eksempel konkreter, tabeller, diagrammer, symboler og kontekstualisere fra virkeligheten. Elevene vil i tillegg veiledes til å ha et matematisk fokus på sentrale matematiske ideer, begreper og sammenhenger. Ved å bruke flere representasjoner hevder Smith og Stein (1998) at elevene utvikler dypere forståelse for begreper og sentrale matematiske ideer. Smith og Stein (1998) klassifiserer [4] *å gjøre matematikk* som den høyeste grad av kognitiv utfordring. I denne kategorien kreves det at elevene opplever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning. Her blir det nødvendig for elevene å benytte seg av en helhetlig matematisk kompetanse som beskrevet i kapittel 2.3. Elevene utforsker og utvikler forståelse for begreper, sammenhenger og sentrale matematiske ideer i møte med produktivt strev og høy grad av kognitiv utfordring. Ved å benytte undervisningsaktiviteter av kognitive krav [3] og [4] vil elevene kunne utforske ulike antakelser og dermed måtte resonnere og argumentere for løsningene. Følgelig tilrettelegges det for flere perspektiver som kan invitere flere individer inn i matematiske undersøkelser.

2.4.3 Rettferdig tilgang til matematikk

TRU anerkjenner læringsmuligheter for elevene som en sosial prosess, dermed må klasseromsnormene for undervisning tilrettelegge for inkludering av alle elever på tvers av kjønn og sosiale- og kulturelle faktorer (Schoenfeld et al., 2023). Yackel og Cobb (1996) fremhever flere viktige normer som bør utvikles i et klasserom, disse betegnes som sosiale og sosiomatematiske normer. Elevene skal oppleve en forventning ved å kunne forklare, representere og argumentere for sin tenkning. Det skal også være aksept for å diskutere og være uenig, som dermed krever en dypere oppklaring for å kunne komme til en felles enighet. Videre fremhever Yackel og Cobb (1996) sosiomatematiske normer som ulike matematiske representasjoner, matematisk effektivitet og eleganse. Schoenfeld et al. (2023) påpeker også at klasseromsnormene må tilrettelegge for engasjement for alle elever. Han fremhever i motsetning til Yackel og Cobb (1996) at vi som lærere ikke må favorisere enkelte matematiske kvaliteter som for eksempel effektivitet. Hvis pedagogiske valg favoriserer ulike menneskelige kvaliteter som for eksempel matematisk effektivitet, neglisjerer vi potensielt høyt kompetente matematiske elever som tenker dypere og saktere, enn de som er effektive. Dermed er det ifølge Schoenfeld et al. (2023) essensielt at lærere tilrettelegger for at mennesker er ulike, og fremhever grunnleggende matematiske ideer, med flere ulike representasjoner og forståelse for begreper og sammenhengene som det viktige i matematikken.

Elevene utvikler seg gjennom bruk av ulike kulturelle verktøy (kap. 2.2). Dermed er det essensielt at læreren tilrettelegger for ulike kulturelle verktøy som kan støtte elevenes utforskning, og utvikling av grunnleggende matematiske ideer, begreper og sammenhenger (Kilpatrick et al., 2001). Den longitudinelle studien av Boaler og Staples (2008) viste at den beste måten for å realisere læringsmuligheter for alle elever er gjennom heterogent læringsfelleskap, med bruk av *groupworthy problems*. Dermed blir hovedrollen til matematikklæreren endret fra å formidle kunnskaper, til å analysere hvilke kunnskapspakker elevene trenger for matematisk utvikling (Ma, 2020). Et slikt skifte i klasseromsnormer vil kunne tilrettelegge for elevenes utvikling av utviklende tankesett (Tabell 1) og dermed fremme matematisk identitet.

2.4.4 Autonomi og identitet

Schoenfeld (2020) fremhever at TRU handler om elevens muligheter til å se seg selv som et lærende individ i møte med ulike fag. I dette tilfellet handler det om hvilke muligheter elevene ser seg selv som matematiske tenkere som også fremheves av Lampert (1990). Ifølge Schoenfeld (1992/2016, s.27, min oversettelse) har elevene en oppfatning av at matematikk handler om:

- Matematisk bevis er unødvendig for innovasjon og utvikling.
- En løsning og et entydig svar som tar fem minutter eller mindre å løse
- Disiplin som bare kan forstås av de «smarteste», og baseres på individuell prestasjon.
- Matematikken i skolen har lite eller ingenting med virkelige livet å gjøre.

Schoenfeld (2019) hevder det ikke er elevene – med deres lave engasjement og utholdenhet – som er problematiske på grunn av deres misoppfatning for hva matematikk handler om. Han peker blant annet på lærerens kompetanse til å tilrettelegge for undervisningsoppgaver som er engasjerende og tilstrekkelig problematiske. Med andre ord, en aktivitet som ikke lar seg løse med en gang, men med innsats og tålmodighet vil eleven(e) kunne løse utfordringen med læreren som støttende veileder. En avgjørende faktor her vil være undervisningsoppgavene/aktivitetene elevene eksponeres for som beskrevet i kapittel 2.4.1 og 2.4.2. For å kunne tilrettelegge for slik utvikling må elevene oppleve kognitiv utfordring i møte med matematikkundervisningen. De bør få søke etter sammenhenger og oppdage strukturer og mønstrer, både for seg selv og sammen med andre (Boaler, 2022; Liljedahl & Cai, 2021; Schoenfeld, 1992/2016, 2020). Forskningen til Lampert (1990) viser at elevene kan utvikle høyere grad av matematisk identitet, men dette forutsetter at lærerens rolle endres. Elevene må trenes til å akseptere at en kan endre tenkning underveis, og kunne stille spørsmål ved sin egen og andres tenkning. Fra matematisk kompetanse (kap. 2.3) ser man at produktive holdninger er en delkompetanse, dermed trenger elevene å kunne utvikle et utviklende tankesett (Tabell 1) som tilrettelegger for autonomi og faglig identitet.

2.4.5 Formativ vurdering

Hvilke holdninger matematikklæreren har til faget, og hva han/hun vurderer elevene på setter dype spor på hvordan elevene oppfatter matematikk (Boaler, 2022; Schoenfeld, 1992/2016, 2020; Liljedahl, 2021). Schoenfeld (2020) vektlegger matematikk som en meningsskapende disiplin. Videre hevder han et nødvendig paradigmeskifte. Tradisjonelt har lærerne inntatt en rolle som formidler, der han/hun presenterer matematikken for elevene. I dette paradigme blir kvaliteter som hurtighet og et korrekt svar ofte verdsatt. Såkalt reformbasert undervisning endrer lærerrollen som en tilrettelegger for matematisk utvikling i et sosialt samspill, der elevene gis mulighet til å se seg selv som en matematisk tenker (Boaler & Staples, 2008; Schoenfeld, 2020). I TRU er formativ vurdering selve fundamentet i lærerens arbeid med å tilrettelegge for elevenes kompetanseutvikling. I denne dimensjonen er Schulman´s (1986) «*pedagogical content knowledge*» og Ma´s (2020) *PUFM* helt sentral når det kommer til lærerens undervisningskompetanse. Dermed har Stein et al. (2008) utviklet fem praksiser som skal støtte læreren mot en dialogbasert undervisning. Disse praksisene innebærer [1] prediksjon av elevreaksjoner til kognitivt krevende utfordringer, [2] regulere elevenes utforskningsfase, [3] velge ut elevsvar som helklasse diskusjon eller oppsummeringsfasen skal reflektere over, [4] organisere rekkefølgen på elevsvarene som skal reflekteres over, og [5] veilede klassen til å se sammenhenger mellom ulike representasjoner og de sentrale matematiske ideene.

Videre i dette forskningsprosjektet vil disse fem dimensjonene i TRU brukes for å analysere hvordan elevene utvikler sin helhetlige matematiske kompetanse ved bruk av den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom.*

3 Metode

I et forskningsprosjekt er det essensielt med en god problemstilling, ifølge Postholm og Jacobsen (2018) skal en god problemstilling være interessant og forskbar. Dermed gjenstod det å utvikle et godt forskningsdesign slik at jeg også kunne gjennomføre et forskbart masterprosjekt. Prosessen startet med grundige undersøkelser tilknyttet oversiktsartikler innen matematikk og problemløsning for å kunne posisjonere forskningsprosjektet i en relevant retning. Oversiktsartikkelen til Liljedahl og Cai (2021) om problemløsning tematiseres rundt: samarbeid, profesjonsutvikling, undervisningsoppgaver og kulturelle verktøy. På bakgrunn av dette ønsker denne studien å posisjonere seg i tråd med nyere forskning på problemløsning, og skal sette et søkelys på profesjonsutvikling. Ifølge Maxwell (2008) danner forskningsspørsmålet grunnlaget for alle metodiske valg. Dermed skal det redegjøres videre i dette kapitlet for hvilke valg og metoder som er brukt for å kunne besvare forskningsspørsmålet til denne studien. Innledningsvis ble forskningsprosjektet organisert rundt tema: det analytiske rammeverket *Teaching for Robust Understanding*, og den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* (Liljedahl, 2021). Forskningsspørsmålet ble revidert og videreutviklet flere ganger i løpet av prosessen til studien. Forskningsprosjektets problemstilling ble følgelig:

Hvordan kan Teaching for Robust Understanding brukes for å gjennomføre profesjonsutvikling i et tenkende klasserom?

3.1 Forskningsdesign

Etter jeg startet på spesialiseringen min innen matematikk, ble jeg tidlig interessert i matematikkdidaktikk. På universitetet var semestrene matematiske metoder og problemløsning i matematikkundervisningen engasjerende og meningsfulle. I løpet av problemløsningssemesteret ble vi introdusert for Peter Liljedahl´s (2021) *tenkende klasserom*. Det ble snakket varmt om denne pedagogiske metodikken fra flere av de unge, men også meget erfarne matematikerne på UiS. Fakultetet sendte oss studenter tydelige signaler vedrørende deres ambisjoner ved *tenkende klasserom* når de utviklet et matematikkrom med vertikale tavler på store deler av veggene. Studentene merket også en annen tilnærming til matematikken i dette rommet. Ved å bruke de vertikale tavlene selv i studentgrupper fikk vi kjenne på følelsene med hvordan du nærmest blir presset til å delta i matematisk utforskning. *Tenkende klasserom* har også et høyt realiseringspotensial vedrørende de krevende målene vi lærere møter fra LK20. Dermed argumenterer jeg for at interessen angående den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* er tilstrekkelig vedrørende forskningsprosjektets valg om å inkludere denne metodikken som studiens kontekst. Jeg ble også dypt interessert i Alan Schoenfeld's (1992/2016) arbeid gjennom de siste tiårene fra problemløsningssemesteret. Schoenfeld er en høyt anerkjent professor, og har forsket mye på matematikkdidaktikk. I nyere tid har han med flere andre forskere dedikert mye tid til å utvikle et rammeverk for profesjonsrettet utvikling. TRU rammeverket er beskrevet i kapittel 2.4, og skal brukes videre i forskningsprosjektet som et alternativ til profesjonsutvikling.

Når en studie skal besvare et forskningsspørsmål blir det viktig å velge riktig forskningsdesign (Postholm & Jacobsen, 2018). I et forskningsdesign er det flere kontekstuelle faktorer som påvirker metodene og valgene til et forskningsprosjekt. Forskningsparadigme er en faktor som vil påvirke hele prosessen til denne studien. Et slikt paradigme deles inn i epistemologisk og ontologisk antakelser. Epistemologisk antakelse handler om hvordan vi identifiserer vitenskapelig kunnskap om virkeligheten. Historisk sett er det tre ulike epistemologiske perspektiver tilknyttet skoleforskning: positivismen, konstruktivismen, og post-positivismen (Postholm & Jacobsen, 2018). Denne studien vil ta et post-positivistisk synspunkt som tilser at kunnskap er en fortolkning av virkeligheten. I en slik antakelse er det viktig at forskeren begrunner grundig for studiens reliabilitet og validitet (Postholm & Jacobsen, 2018). Se kapittel 3.3, 3.5 – 3.7 for videre detaljer angående studiens kvalitet. En av styrkene til post-positivismen er at kunnskap sees på som potensielt gyldig på tvers av kontekster. I et forskningsparadigme er post-positivismen – som en epistemologi – nært tilknyttet til ontologi, som handler om teoretiske synspunkter på hvordan virkeligheten oppfattes (Postholm & Jacobsen, 2018). Det ontologiske perspektivet som er nærest tilknyttet vårt epistemologiske perspektiv er ifølge Postholm og Jacobsen (2018) et prosess- og variansperspektiv. Med dette ontologiske perspektivet anerkjenner vi virkeligheten som bestående av relativt stabile fenomener, men som også er i endring og dermed påvirker helheten. Kunnskap sees på som sannsynlig, men ikke lovmessig (Postholm & Jacobsen, 2018).

Maxwell (2008) hevder enhver studie bør ha et mål som i denne studien er forskningsspørsmålet, gjengitt tidligere i dette kapittelet. Kvalitativ metode har som formål å beskrive og forstå subjektet i forskningen, og egner seg spesielt godt til å studere samhandlingen mellom forskningsdeltakerne (Postholm & Jacobsen, 2018). Det vil i dette forskningsprosjektet innhentes empiri fra en ungdomsskole, med to matematikklærere på henholdsvis 8.trinn, og 10.trinn. Studien benytter lyd- og videoopptak (kap. 3.3.3) for å kunne innhente datamateriale fra matematikkundervisningen, og lydopptak av pre- og post-intervju (kap. 3.3.1 – 3.3.2) av lærerne fra denne ungdomsskolen. Det vil i denne studien være fokus på læreren på 10.trinn og et utdrag av hans elever i matematikkundervisningen.

3.1.1 Forskningsmetode

Denne studien har til hensikt å bruke TRU-rammeverket (kap. 2.4) som et bidrag innen profesjonsutvikling med søkelys på å utvikle matematisk kompetanse (kap. 2.3) i et *tenkende klasserom* (kap. 2.2), dermed blir den pedagogiske metodikken konteksten for dette forskningsprosjektet. Postholm og Jacobsen (2018) påpeker hvor avgjørende den spesifikke konteksten er for studiens validitet, og dermed velge et forskningsdesign som er egnet til å besvare eller belyse forskningsspørsmålet. Flyvbjerg (2011) trekker frem ulike styrker og svakheter med kvalitative og kvantitative forskningsmetoder. I dette forskningsprosjektet skal jeg benytte meg av case-studie som er en kvalitativ metode – med en tidsavgrensning på tre uker (se tabell 3) – for å belyse forskningsspørsmålet til denne studien. Ifølge Flyvbjerg (2011, s.314) er styrkene til en case-studie: *dybde, høy konseptuell validitet, forståelse av kontekst og prosess, forståelse av hva som forårsaker et fenomen, koble årsaker og utfall, og fremme nye hypoteser og nye forskningsspørsmål.* Styrkene til kvalitativ forskningsmetode vil dermed gi meg verktøyene som er nødvendig for å belyse forskningsspørsmålet, som handler om en spesifikk kontekst og dens prosesser. Det vil derfor være fornuftig å benytte enkelcasestudie i denne studien som gjør at jeg har søkelys på få enheter, og dermed tillater meg å analysere mye informasjon. Thagaard (2018) hevder at forskeren bør innhente mer enn bare observasjoner for å kunne tilegne seg grundig innsikt i prosessene som danner datamaterialet. På bakgrunn av dette vil datamateriale til forskningsprosjektet basere seg på innhenting av lyd- og videoopptak, slik at studien kan analysere grundig de prosessene som oppstår i klasserommet. I tillegg vil det hentes inn pre- og post-intervju av lærerne som er deltakere i forskningsprosjektet, dermed blir det mulig å analysere lærerens handlinger og refleksjoner i forbindelse med observasjoner fra undervisningen.

Thagaard (2018) påpeker videre at det er viktig med fleksibilitet i en kvalitativ studie. Dermed var det en stor styrke at datainnsamlingen ble gjennomført av en gruppe på tre studenter, dette tillot oss å innhente mer datamateriell enn normalt for en masterstudent i datainnsamlingsprosessen. Flyvbjerg (2011, s. 314) trekker også frem svakhetene til kvalitativ forskningsmetode som det er viktig å være oppmerksom over, disse utfordringene er: *utvalgsskjevhet kan overdrive eller underdrive forhold, svak forståelse av forekomst i populasjonen av fenomener som studeres, og statistisk signifikans ofte ukjent eller uklar.* Avslutningsvis hevder Flyvbjerg (2011) at kvalitativt og kvantitativ forskningsmetode bør videreutvikle synspunktet fra hvilken forskningsmetode som er best, til å fungere sammen med sine ulike styrker og svakheter. Således blir dette forskningsprosjektet et bidrag innen kvalitativ metode der metodene og valgene jeg har tatt tilknyttet innsamling og analysering av data skal videre beskrives i kapittel 3.2 – 3.7.

3.2 Utvalg

For at forskningsprosjektet skal kvalifiseres som en case-studie må den spesifikke konteksten være av sentral rolle (Postholm & Jacobsen, 2018). I denne studien er den spesifikke konteksten den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom*. Dermed er det avgjørende med strategisk utvelging. Dette handler om å velge ut forskningsdeltakere til prosjektet med egenskaper eller kvalifikasjoner som er interessante for forskningsspørsmålet (Thagaard, 2018). I denne studien handler det om å anskaffe deltakere som praktiserer *tenkende klasserom*. Studentene hadde ingen kjennskap til lærere som benytter seg av denne pedagogiske metodikken. Vi ble dermed tipset om en skole på Sør-Vestlandet der en lærer hadde brukt metodikken *tenkende klasserom* i noen år. Studentene ventet med å opprette kommunikasjon mellom dem og lærere til etter søknad om forskningsstudiet var sendt inn til Sikt for godkjenning (se vedlegg F og G). Videre ble to matematikklærere på 8. og 10. trinn kontaktet for mulig deltakelse i forskningsstudiene til studentene. Lærerne sa seg villig til å delta i forskningsprosjektet vårt. Den mest erfarne læreren hadde jobbet i 14. år som lærer, med 4. år på videregående og 10. år på ungdomsskole. Det var han som introduserte denne ungdomsskolen for *tenkende klasserom*, som etterpå ble implementert i flere fag og klassetrinn. Denne læreren har 60 studiepoeng i matematikk og ferdigstiller en mastergrad tilknyttet *tenkende klasserom* selv gjennom lærerspesialist-utdanningen i matematikk for 5. - 10. trinn. Det var gjennom denne spesialistutdanningen læreren ble introdusert for *tenkende klasserom*, og hadde dermed arbeidet med denne metodikken siden 2019.

I dette forskningsprosjektet skal jeg ha søkelys på den andre matematikklæreren som underviste på 10. trinn, siden disse hadde algebra som matematisk fokus (kap. 2.4.1.1) i løpet av studiens innsamlingsperiode. Han har treårs erfaring i skolesystemet, et år på barneskole og to år på ungdomsskole. Læreren har tatt grunnskolelærerutdanning 5. -10. trinn med master i matematikkdidaktikk. Per dags dato er læreren kontaktlærer på 10. trinn, som han overtok forrige år, og underviser disse i flere fag. Det er denne klassen som danner grunnlaget for datainnsamlingen til dette forskningsprosjektet. Han beskriver klassen som rolig med flere av elevene i klassen som faglig sterke, men at det har tidligere vært et utrygt klasseromsmiljø. *Tenkende klasserom* er ifølge denne læreren nytt for både han og klassen. Dermed brukes denne metodikken mer som et supplement, enn slik som den erfarne læreren på 8. trinn og Peter Liljedahl (2021) implementerer *tenkende klasserom*. Likevel beskriver 10. trinns matematikklæreren et ønske om å benytte seg mer av *tenkende klasserom*, der han mener det passer seg. Videre har læreren et synspunkt hvor elevene er nødt til å lære seg grunnleggende matematikk først, før de får utbytte av metodikken til Liljedahl (2021).

3.3 Studiens datamateriale

Vi var tre studenter som samarbeidet om datainnsamlingen i løpet av en treukers periode. Datamaterialet fra dette forskningsprosjektet består av pre- og post-intervju med 8. trinns matematikklærer, samt fem undervisningstimer i matematikk. På 10. trinn innhentet vi data fra fem undervisningstimer, i tillegg til pre- og post intervju med deres matematikklærer.

Dette forskningsprosjektet har en problemstilling som nevnt tidligere hvor elevene er i fokus, og deres utviklingsmuligheter for matematisk kompetanse med bruk av *tenkende klasserom*. På bakgrunn av observasjonene til datamaterialet har denne studien valgt å fokusere på 10. trinn, fordi det matematiske emne (se kap. 2.4.1.1) er av spesiell interesse fra TIMSS-resultatene i grunnskolen (Bergem et al., 2016; Kaarstein et al., 2020). Første og andre dag av videoobservasjonene består av dobbeløkter med 45 minutter per del, mens den siste undervisningstimen var en enkel økt. For hver av disse dagene med dobbeløkter er den første undervisningstimen av tradisjonell art, der lærer gjennomgår innholdet for timen først på tavlen, for deretter å sette elevene i gang med det vi observerte som mye individuelt arbeid. I disse første undervisningstimene var det lov til å samarbeide, men det var bare rundt halvparten av elevene som benyttet seg av muligheten til å arbeide sammen med noen. Tabell 3 gir detaljert oversikt over datamaterialet som er innhentet. Jeg har videre avgrenset datamaterialet til de to første av totalt tre undervisningstimene med bruk av metodikken *tenkende klasserom*, basert på at den siste matematikktimen ikke benyttet seg av tavlene. Denne timen hadde et søkelys på manipulering av konkretiseringsmateriell som denne studien ikke har mulighet til å se videre på. Selv om denne timen også har interessante elementer, blir dermed de to første undervisningstimene grunnlaget for forskningen min videre. I hver av disse undervisningsøktene hadde vi søkelys på to elevgrupper som arbeidet ved siden av hverandre på vertikale tavler.

Tabell 3: Oversikt over datamateriale 10.trinn

Dato	Hva	Beskrivelse
11.01	Skolebesøk	Møte med lærer og omvisning av ungdomsskolen.
18.01	Pre-intervju	Gjennomførte pre-intervju med lærer på 10.trinn
24.01	1. undervisningsøkt Varighet: 45 minutt Første del av en dobbeltime.	**Del 1:** Oppstart (0 – 15 minutter) **Del 2:** Lærersentrert undervisning (15 – 21 minutter) Lærer spør eleven hva matematisk tema de hadde fra forrige uke (kvadratsetningene), og skriver de tre kvadratsetningene på hovedtavlen. **Del 3:** Lærersentrert undervisning (21 – 31 minutter) Læreren bruker digital dialogverktøy med helklasse **Del 4:** Elevarbeid (31 – 45 minutter) Elevene arbeider individuelt eller samarbeider med oppgaver fra digitale læreverk
24.01	2. undervisningsøkt Varighet: 45 minutt Andre del av en dobbeltime.	**Del 1:** Oppstart (0 – 1 minutter) **Del 2:** Introduksjon til oppgave *«Helt i 100!»* (1 – 7 minutter) *(*https://www.mattelist.no/517) Lærer introduserer problemløsningsoppgaven Lærer deler elevene inn i selekterte grupper **Del 3:** Elevsentrert undervisning (7 – 36 minutter) Elevene arbeider på vertikale tavler i gruppene **Del 4:** Elevsentrert helklasse samtale (36 – 45 minutter) Gjennomgang av flere gruppers løsningsforslag
27.01	3. undervisningsøkt Varighet: 45 min. Første del av en dobbeltime.	**Del 1**: Ikke matematisk oppstart (0 – 13 minutter) **Del 2:** Lærerstyrt undervisning (13 – 21 minutter) Lærer går gjennom kvadratsetningene på hovedtavlen **Del 3:** Elevarbeid (21 – 45 minutter) Elevene arbeider individuelt eller sammen med oppgaver fra digitale læreverk
27.01	4. undervisningsøkt Varighet: 45 min. Andre del av en dobbeltime.	**Del 1:** Elevarbeid (0 – 10 minutter) Elevene arbeider individuelt eller sammen med oppgaver fra digitale læreverk **Del 2:** Lærerstyrt undervisning (10 – 25 minutter)

		Lærer oppsummerer oppgaver med kvadratsetningene **Del 3:** Introduksjon til oppgave «H*vor mange tannpirkere i trekanten?»* (25 – 31 minutter) Lærer deler elevene inn i selekterte grupper og introduserer problemløsningsoppgaven «H*vor mange tannpirkere i trekanten?»* med et videoklipp http://threeacts.mrmeyer.com/toothpicks/ **Del 4:** Elevsentrert undervisning (31 – 42 minutter) Elevene arbeider på vertikale tavler i gruppene **Del 5:** Elevsentrert helkasse samtale (42 – 45 minutter) Gjennomgang av enkelte gruppers løsningsforslag
30.01	5. undervisningsøkt Varighet: 45 min.	**Del 1:** Introduksjon til oppgave «*Hvor mange flytt?»* (0 – 7 minutter) Lærer deler elevene inn i selekterte grupper og introduserer problemløsningsoppgaven «*Hvor mange flytt?»* **Del 2:** Elevsentrert undervisning (7 – 37 minutter) Elevene arbeider på vertikale tavler i gruppene **Del 3:** Elevsentrert helkasse samtale (37 – 45 minutter) Gjennomgang av enkelte gruppers løsningsforslag
01.02	Post-intervju	Gjennomføring av post-intervju med lærer på 10.trinn

3.3.1 Pre-intervju

I denne studien ønsket vi å gjennomføre pre-intervju med lærerne som skulle delta i studien tidligst mulig (se Tabell 3). Hensikten med et slikt intervju er å kunne danne seg en kontekstuell forståelse rundt deltakernes hverdag (Thagaard, 2018). Intervjuguiden som ble benyttet til pre-intervjuet omfatter spørsmål innen temaene: utdannelse og arbeidserfaring, undervisning og læring, og vurdering (se vedlegg C). Jeg utviklet spørsmål til pre-intervjuet basert på Baldinger et al. (2014) sin intervjuguide (se vedlegg H) som er utviklet med tanke på profesjonsutvikling med TRU-rammeverket. Dermed ble min jobb å trekke ut de nødvendige spørsmålene for så å oversette dem til norsk, og tilpasse dem til vår kontekst. På det tidspunktet hadde jeg et overfladisk forskningsspørsmål (tema) til studien. Dermed ble søkelyset mitt gjennom utviklingen til intervjuguiden nøkkelordene: *tenkende klasserom* og matematisk kompetanse.

3.3.2 Post-intervju

Fra Tabell 3 ser man at vi gjennomførte post-intervju av læreren siste dag med datainnsamling. Dette var en strategisk avgjørelse med tanke på mulighetene for å diskutere enkelte situasjoner fra undervisningstimene, hvis dette skulle være ønskelig. I post-intervjuet ble det også brukt intervjuguide som hadde søkelys på temaene: læring og undervisning, og vurdering (se vedlegg D). Jeg utviklet også spørsmålene til post-intervjuet med bruk av TRU-rammeverkets intervjuguide (se vedlegg H) av Baldinger et al. (2014). Dermed ble intensjonen min med disse spørsmålene å skape refleksjoner rundt undervisningsøktene vi studenter hadde observert. I tillegg til å utvikle en enda bedre forståelse rundt lærernes bruk av *tenkende klasserom* og deres synspunkt angående matematisk kompetanse.

3.3.3 Observasjon

Basert på mitt ønske om å benytte TRU-rammeverket for å undersøke muligheter og utfordringer som eksisterer i et *tenkende klasserom* ble kvalitativ forskningsmetode det naturlige valget. Thagaard (2018) fremhever intervju og observasjon som metoder for å kunne analysere og utvikle en forståelse ved sosiale fenomener som dette forskningsstudiet inkluderer. Det skal være frivillig å delta i forskningsprosjektet, således ble vi nødt til å tenke på hvordan vi skulle organisere datainnsamlingen. Med erfaring blir det lettere å vite blant annet hva en skal se etter, hvor en skal plassere kamerautstyr, hvilke spørsmål en skal stille, og hvordan en bygger videre på en intervjusamtale (Postholm & Jacobsen, 2018).

I et *tenkende klasserom* er strukturen helt annerledes enn i et tradisjonelt klasserom, dermed ble det viktig for analysen av datamaterialet at vi studenter gjennomførte flere strukturelle valg for innhenting av data. Studentenes første undervisningstime med innhenting av datamateriale ga flere erfaringer med plassering av lyd og videoutstyr. Vi tok først inspirasjon fra tidligere masteroppgaver om hvordan datamaterialet skulle innhentes. Dermed ble det plassert to grupper i et hjørne som vi filmet med et videokamera, og med lydopptak fra begge tavlene. Etter en gjennomgang av datamaterialet var det vanskelig å gjennomføre en grundig analyse som er kjernen til en case-studie. Videokamera som skulle innhente data fra begge tavlene ble hovedsakelig kun observasjoner av elevenes rygger gjennom hele «tavleøkten». Lyden fra diktafonene ble også utfordrende å analysere på grunn av gruppene var plassert så tett, resulterte det i at lyden fra elevgruppene overlappet betraktelig mye. Styrken til en case-studie handler om muligheten for å kunne analysere grundig hvordan deltakere samhandler mellom kontekst og prosess (Postholm & Jacobsen, 2018). Dermed begynte jeg å reflektere over hvordan vi på best mulig måte kunne innhente høyest mulig grad av datamateriale som kunne analyseres grundig. Resultatet ble å bruke to dedikerte kameraer på stativ som ble plassert på hver sin pult, med stativet i maksimal høyde. Ved å vinkle videokamera nedover fikk vi dermed en god oversikt over tavlen til den respektive gruppen. Denne metoden fungerte også som en forsikring med tanke på at flere elever beveget seg rundt i klasserommet. Således var kameravinkelen så høyt over bakken at elever som ikke skulle filmes kunne gå under kamera uten å bli filmet. For å kunne øke kvaliteten på lydopptakene av elever vi skulle observere for den respektive timen ble elevgruppene plassert ved en felles vegg, med optimalisert mellomrom fra de andre gruppene. Vi valgte også å ta i bruk mikrofon-mygg å feste den med teip i en cirka høyde til elevenes hoder. Vi benyttet oss også av et håndholdt kamera slik at interessante observasjoner kunne innhentes fra de andre deltakergruppene.

3.3.4 Transkripsjon

Datamaterialets skriftlige og muntlige ytringer struktureres ved bruk av transkripsjon. Ifølge Kvale og Brinkmann (2015) vil datamaterialet bli mer oversiktlig, og egne seg for analyse. Vi var som tidligere nevnt tre studenter som innhentet et omfattende datamateriale, dermed hadde alle tilgang gjennom en sikret skytjeneste som brukes av forskerne på Universitetet i Stavanger. Videre ble det opprettet en Microsoft-teams gruppe, der bare vi tre studenter hadde tilgang til de transkriberte dokumentene. For at vi kunne benytte oss av samme skriveprosedyre i prosessen ved å analysere datamateriale utarbeidet vi en transkripsjonsnøkkel (vedlegg E) som Kvale og Brinkmann (2015) poengterer er viktig når flere behandler samme datamateriale. Vi valgte å transkribere våre egne fokusområder, derfor har denne studien transkribert hele datamaterialet vedrørende elevgruppenes arbeid på de vertikale tavlene. Begrunnelsen for denne fordelingen av ansvar var tanken at gjennom å transkribere det datamateriale studentene selv var interessert i, ville kvaliteten på transkripsjonene være av nødvendig kvalitet. Postholm og Jacobsen (2018) hevder også at transkriberingsprosessen er en viktig del av analyseringen. På grunn av transkripsjonsnøkkelen ble det dermed lettere å gjøre sammenlikninger mellom de transkriberte dokumentene med elevgruppene og læreren. Studentene valgte å transkribere alle utsagn til bokmål for å anonymisere deltakerne, med en bevissthet om enkelte elev- eller lærerutsagn kan miste eller endre mening. Det ble også tilegnet elevene fiktive navn ved å benytte topplisten 2022 for gutter og jenter. I transkriberingen blir det signalisert om helklassesamtale ved bruk av **innenfor disse to tegnene er det ytringer som gis for hele klassen**. Dokumentene inkluderer også utsagn fra deltakeren i studien, samt hva elevene skriver på de vertikale tavlene. Elevenes skriftlige bidrag markeres med dollartegn $\$ 2 + 2 = 4 \$$. Hvis eleven begynner på en matematisk utregning, men starter på noe annet i mellomtiden, vil det markeres med $\$_1 2 + 2 \$_1$ og

$\$_2$ 3 + 3 $\$_2$, når eleven fortsetter på utregningen noteres det med $\$_1$ = 4 $\$_1$. Ved andre transkripsjonsbestemmelser se vedlegg E.

3.4 Valg av problem

Etter analysen av datamaterialet var det to undervisningsøkter som skilte seg ut fra de andre øktene. Denne studien har et søkelys på elevenes muligheter for utvikling av matematisk kompetanse ved bruk av *tenkende klasserom*. Dermed blir det hensiktsmessig å benytte meg av undervisningstimene som bruker metodikken *tenkende klasserom*. Jeg skal videre presentere oppgaven(e) elevene arbeidet med i disse to matematikktimene. Begge disse oppgavene er hentet fra nettsider som er designet for å tilrettelegge for utforskning i klasserom på ulike trinn. Nettsidene har også utviklet hint og utvidelser som jeg inkluderer i beskrivelsen av oppgavene.

3.4.1 Problem A – Helt i hundre!

Matematikksenteret utvikler oppgaver de publiserer på mattelist.no, som denne oppgaven er hentet fra. På deres nettsider er den kategorisert som en oppgave passende for ungdomsskolen og videregående. Momentene til denne oppgaven handler om konkretisering og bruk av algebra til å generalisere. Fra nettsiden beskrives introduksjonen slik:

> Nedenfor ser du en tabell med tallene 1 – 100, et «hundrekart». Fire ruter som danner et kvadrat, er markert med rødt (Figur 8). Bruk de fire tallene til å lage et regnestykke etter et bestemt mønster: Tallene som danner en diagonal fra øvre høyre til nedre venstre hjørne multipliseres med hverandre. Trekk så ifra produktet av tallene i den andre diagonalen. I de røde rutene blir regnestykket: 2·11−1·12 Hva ble svaret? (hentet fra: https://www.mattelist.no/517)

Figur 8: Problem A – Hundrekart

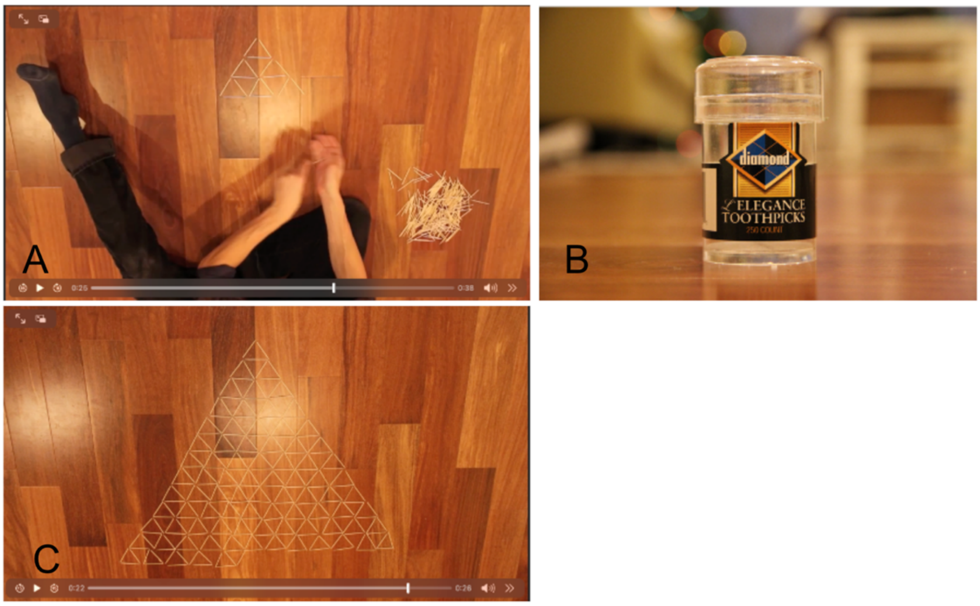
Denne introduksjonen benytter læreren seg av, og forteller at målet med timen er å finne en regel for denne oppgaven. Videre viser læreren hvordan elevene skal utføre algoritmen til det røde 2 x 2 kvadratet (Figur 8). Etterpå deler han eleven inn i grupper som arbeider videre med problemet med 2 x 2 kvadrater. Elevgruppene får også tildelt hvert sitt «hundrekart» som er uten markeringer. Videre er det utviklet hint og utvidelser (Tabell 4) som læreren benyttet seg av i løpet av undervisningstimen.

Tabell 4: Hint og utvidelser til «Helt i hundre!» (Hentet fra https://www.mattelist.no/517#ressurs)

1.	Hva blir svarene på de to første regnestykkene ($2{\cdot}11-1{\cdot}12$ og $28{\cdot}37-27{\cdot}38$)?
2.	Kan du lage flere kvadrater og regne ut på samme måte? Hva ser du?
3.	Vil det alltid bli slik med 2 x 2-kvadrater? Hvorfor?
4.	Hva er sammenhengen mellom de fire tallene du bruker i regnestykket?
5.	Hvordan er denne sammenhengen for 2 x 2-kvadrater på ulike steder i hundrekartet?
6.	Fant du et mønster som var slik at du visste hva som ble svarene for kvadratene du ikke hadde regnet ut? Kan du beskrive mønsteret? Kan du forklare hvorfor det blir slik?
7.	Du kan markere figurer som ikke er kvadrater, lage en regneregel og undersøke om du kan finne flere mønster i hundrekartet.
8.	Legg en plan, hvilke figurer kan du lage i stedet for kvadrater? Hvilken regneregel skal gjelde? Undersøk systematisk. Finner du flere mønster? Kan du forklare hvorfor mønstrene blir som de blir? Kan du være sikker på at mønstrene du velger, vil gi de samme svarene uansett hvor i hundrekartet du markerer figuren?

3.4.2 Problem B – Hvor mange tannpirkere i trekanten?

Denne oppgaven er hentet fra Dan Meyer´s Three-Act Math som publiserer flere utforskningsoppgaver. Metodikken bak disse undervisningsoppgavene handler om en tredeling av undervisningstimen. Først introduserer læreren elevene for et kort videoklipp (Figur 9A). Etter videoklippet er ferdig spør læreren elevene om hvilke spørsmål de har tilknyttet det de observerte. For eksempel hva de trenger å vite for å kunne løse dette problemet. Videre arbeider elevene med oppgaven som i dette tilfelle er «hvor mange tannpirkere i trekanten?». Til slutt viser læreren en avsluttende video som gir elevene løsningen på oppgaven (Figur 9C).



Figur 9: Problem B; A – introduksjon, B – hint, C – løsning

I denne oppgaven med tannpirkere blir elevene nødt til å vite antall tannpirkere (Figur 9B) som ble brukt for å lage trekanten (Figur 9C). Etter læreren har vist den første videoen til elevene (Figur 9A), tar han en liten oppstart av problemet der han spør gruppene om å «skrive ned det dere lurer på?». Når elevgruppene har skrevet ned noen spørsmål stiller så læreren følgende spørsmål til flere av gruppene «hva lurer dere på?» Etter hvert som elevene har blitt engasjert i problemet gir han elevene Figur 9B som et hint for å kunne løse oppgaven. Deretter lar læreren gruppene utforske videre. I løpet av matematikktimen benytter læreren seg av hint og utvidelser (Tabell 5) som er publisert på nettsiden http://threeacts.mrmeyer.com/toothpicks/. Avslutningsvis oppsummerer læreren løsningen ved å trekke frem løsningsforslagene til elevgruppene, og til slutt viser et videoklipp som avslører resultatet (Figur 9C).

Tabell 5: Hint og utvidelser til «Tannpirker» (Hentet fra: http://threeacts.mrmeyer.com/toothpicks/)

1.	Gjett hvor mange etasjer han kan lage med disse tannpirkerne.
2.	Hvor mange etasjer må være for mange? Hva med for få etasjer?
3.	Hvilken informasjon vil være nødvendig for å finne det ut?
4.	Hvilken informasjon er ikke nødvendig?
5.	Det ble brukt en pakke med 250 tannpirkere som ble totalt 12 etasjer. Hva om vi brukte enda en pakke med 250 tannpirkere, hvor mange etasjer kan vi lage da?
6.	Lage en funksjon t(e), som tar antall etasjer (e) og returnerer totale antall av tannpirkere (t) i trekanten.

3.5 Analytisk tilnærming til empirisk data

I flere tiår har hovedperspektivet innen matematikkdidaktikk vært på læreren og hvilke kvaliteter læreren besitter, og hvilke valg han/hun tar for å fremme utvikling hos elevene. Lærerperspektivet står fortsatt sterkt per dags dato mye takket være Shulman (1986). Derimot skal en kunne drive profesjonsrettet utvikling i samsvar med hva nyere forskning fremhever som essensielt med tanke på læringsmuligheter for elevene (Hiebert & Grouws, 2007), trenger man også forskning med et elevperspektiv (Figur 10). Forskningsprosjektet skal benytte seg av et elevperspektiv for å analysere de ulke aspektene som til sammen utvikler det Schoenfeld (2018) karakteriserer som «*powerful classroom*». Han hevder også at en enkelt undervisningsøkt ikke kan generalisere lærerens praksis, og hans anbefaling er å benytte seg av minimum fem undervisningsøkter for å kunne danne seg en bedre oversikt (Schoenfeld, 2018). Dessverre for denne studien er tid mangelfullt, med en datainnsamlingsperiode på tre uker (se Tabell 3). Følgelig blir jeg nødt til å benytte meg av de to undervisningsøktene som inkluderer metodikken *tenkende klasserom* i løpet av studiens innsamlingsperiode, og dermed vil analysen (kap. 4) inkludere et spørsmål per dimensjon i Figur 10.

Observe the lesson through a student's eyes	
The Mathematics	• What's the big idea in this lesson? • How does it connect to what I already know?
Cognitive Demand	• How long am I given to think, and to make sense of things? • What happens when I get stuck? • Am I invited to explain things, or just give answers?
Equitable Access to Mathematics	• Do I get to participate in meaningful mathematical learning? • Can I hide or be ignored?
Agency, Ownership, and Identity	• Do I get to explain, to present my ideas? Are they built on? • Am I recognized as being capable and able to contribute in meaningful ways?
Formative Assessment	• Do classroom discussions include my thinking? • Does instruction respond to my thinking and help me think more deeply?

Figur 10: Elevperspektiv (Schoenfeld, 2018, s.4)

Studien skal analysere transkripsjonene fra 2. og 4. undervisningstime (se Tabell 3), og kommer til å benytte TRU-rammeverkets «store spørsmål» tilknyttet elevperspektivet (Figur 10). For å kunne analysere de ulike timene og elevgruppene har denne studien utviklet kodene illustrert i Tabell 6. Disse vil benyttes videre for å gi en oversiktlig sammenheng. Schoenfeld (2018) konstaterer at dette rammeverket ikke skal klassifisere læreren som «god» eller «dårlig», men heller brukes som et verktøy for kontinuerlig utvikling. Denne studien benytter seg av matematisk tenkning (se Figur 5) for å inndele i ulike sekvenser til en undervisningstime. Dermed vil en enkel sekvens bestå av planleggingsfasen, handlingsfasen og revideringsfasen. Jeg har også valgt å inndele lærerens introduksjon og oppsummering som separate sekvenser på grunn av disse to delene fraviker med såpass stor margin fra resten av undervisningstimen i et *tenkende klasserom*. En sekvens kan dermed bli referert til som A1:1–15 som er antall ytringer i løpet av introduksjonen til timen. En delsekvens vil være et begrenset utdrag fra en sekvens som for eksempel når elevene arbeider i handlingsfasen og jeg ønsker å trekke frem en spesifikk episode innen denne fasen (se Tabell 7).

Tabell 6: Koder til undervisningstimene

Problem	Elevgruppe	Kode
Problem A – Helt i hundre!	Elevgruppe 1	A1
Problem A – Helt i hundre!	Elevgruppe 2	A2
Problem B – Hvor mange tannpirkere i trekanten?	Elevgruppe 1	B1
Problem B – Hvor mange tannpirkere i trekanten?	Elevgruppe 2	B2

TRU-rammeverket har utviklet ulike verktøy: observasjonsguide (Schoenfeld et al., 2016), intervjuguide (Baldinger et al., 2016), og analyseringsguide (Schoenfeld et al., 2014), som jeg vil benytte meg av (vedlegg H, I og J). I analyseringsguiden (Schoenfeld et al., 2014) har jeg oversatt *summary rubric* (vedlegg J) til norsk, og utviklet tabeller som for eksempel Tabell 7 for å kunne bruke videre i resultatkapitlet (kap. 4). Schoenfeld (2018) argumenterer for å benytte fem nivåinndelinger: 1, 1.5, 2, 2.5 og 3. Basert på erfaringer under utviklingen av rammeverket viste det seg at flere «vegret» seg for å gi lavest og høyest score. Dermed utviklet forskerne 1.5 og 2.5 for undervisningstimer som inneholder elementer fra to ulike nivåer (Schoenfeld, 2018). Denne studien velger også å illustrere manglende observasjoner i et nivå med N/A, dermed vil denne forkortelsen stå for «ikke anvendbar». Det vil si hvis datamaterialet ikke analyseres til for eksempel nivå 1 vedrørende rettferdig tilgang til matematiske innhold (se Tabell 7), vil oversiktstabellen (Tabell 8) benytte seg av N/A for å illustrere dette nivået utelukkes fra denne undervisningstimen. I denne studien har jeg valgt å illustrere for eksempel nivå 2.5 slik som Tabell 7 organiseres, ved å koble sammen cellene til observasjoner i nivå 2 og 3. Analyseringen av datamaterialet vil etterstrebe troverdighet og dermed være så åpen som mulig. Følgelig vil utdrag av sekvenser eller enkelte sekvenser være grundige og detaljert slik at denne studien opptrer så transparent som overhodet mulig. Jeg har også vært i personlig kontakt med Alan Schoenfeld som ga meg *Mathematics Teaching*

On Target: A guide to Teaching for Robust Understanding at all Grade Levels (Schoenfeld et al., 2023) med tillatelse til å bruke deres «bullseye» verktøy i dette forskningsprosjektet. Dette analytiske verktøyet skal brukes til å oppsummere funnene (kap. 4) på tvers av undervisningstimene i dette forskningsprosjektet.

Tabell 7: Rettferdig tilgang til matematisk innhold (A1:122–162)

<table>
<tr><th colspan="3">Rettferdig tilgang til matematisk innhold
I hvilken grad støtter læreren tilgang til innholdet i undervisningstimen for alle elever.</th></tr>
<tr><th>Nivå</th><th>Kode</th><th>Observasjoner</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Det er forskjellig tilgang til eller deltakelse i det matematiske innholdet, og ingen tilsynelatende forsøk på å løse dette problemet.</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Det er ujevn tilgang eller deltakelse, men læreren gjør en viss innsats for å gi matematisk tilgang til et bredt spekter av elever</td><td rowspan="2"><u>Utdrag fra A1:122–162</u>
122. Lærer: Kan vi finne et uttrykk, en generell formel. Hvis jeg kommer inn og sier hva er summen i en åtte ganger åtte for eksempel? Kan vi lage en formel for det? Hva minner dette her om egentlig? Kvadratsetningene? Det er et lite tips her, okei.
123. Emma: Hvordan kan vi bruke kvadratsetningene til dette?
124. Lærer: Kan dere lage en generell formel for det? Ta med Oliver inn i tenkningen her
125. Sofie: Vi skal lage en syk formel av dette. For eksempel den der a pluss b med parenteser opphøyd i andre
126. Oliver: Vi kan ta x pluss tjue
127. Oliver: $ x + 20 $
128. Sofie: Det går an
129. Emma: Nå går det
130. Sofie: Jeg har det. For hver økning, blir det ikke x i andre pluss tjue
131. Sofie: $ x^2 + 20 $
132. Emma: Jo, x i andre. Da blir det, det tallet istedenfor x, så da blir det åtte ganger åtte som er sekstifire, pluss tjue.
133. Sofie: Hehe, nei fordi
134. Oliver: [Hva mener dere med x ganger x?]
135. Sofie: Vi tar x ganger x
136. Emma: Å det er x opphøyd i x</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Læreren støtter aktivt og oppnår til en viss grad bred og meningsfull matematisk deltakelse; ELLER det som ser ut til å være etablerte deltakelsesstrukturer resulterer i slikt engasjement.</td></tr>
</table>

3.6 Studiens kvalitet

Forskningsprosjektet har som tidligere nevnt et post-positivistisk synspunkt. Dermed er det viktig at forskeren begrunner grundig for studiens reliabilitet og validitet. Dette kapitlet vil redegjøre for prosjektets prosess slik at forskningen gjøres åpen og tydelig (Postholm & Jacobsen, 2018).

3.6.1 Reliabilitet

Postholm og Jacobsen (2018) hevder en kvalitativ studie skal være grundig beskrevet slik at den kan gjennomgås og godkjennes i etterkant. I kapittel 3.1 – 3.5 og 3.7 gir jeg grundige beskrivelser av datamaterialet, og hvilke metodiske vurderinger som er gjennomført i løpet av studiens periode. Dermed vil det være mulig for andre å etterlikne eller kvalitetssikre denne studien. Forskningsprosjektets innledende fase inkluderte tre studenter som gjør det mulig å reflektere og diskutere sammen. Prosjektet har utnyttet flere og ulike perspektiver fra studentene som kan styrke studiens reliabilitet (Thagaard, 2018).

Forskningsprosjektet gjennomførte datainnsamlingen ved bruk av observasjon uten deltakelse, som gjør at forskerne ønsker å påvirke datamateriale i minst mulig grad (Thagaard, 2018). Læreren informerte elevene tydelig om at vi studenter «ikke skulle vurdere deres matematiske kompetanse, men undersøke bruken av tavlene som denne klassen hadde». Thagaard (2018) fremhever sannsynligheten for at deltakerne kan bli påvirket av konteksten ved et forskningsprosjekt. Videoobservasjonene viser flere elever posere for kamera, og flere av deltakerne utstrålte en viss energisk tilnærming til vår tilstedeværelse. Læreren på 10. trinn var ved flere anledninger imponert over elevene når vi var inne i undervisningstimene og observerte. I løpet av den siste undervisningstimen uttrykte også en elev at gruppen måtte «huske på at vi filmet dem». Dermed er det tydelig at vår tilstedeværelse med kameraer og diktafoner hadde en påvirkning på elevene.

Ifølge Kvale og Brinkmann (2015) kan samme datamateriale transkriberes forskjellig ut fra hvilke synspunkter man undersøker. I denne studien har jeg benyttet meg av et omfattende rammeverk (TRU) som legger tydelige rammer for hvilke synspunkter man som forsker skal inneha. En slik ramme kan være med på å styrke studiens reliabilitet. Det transkriberte datamaterialet har også som tidligere nevnt (kap. 3.3.4) blitt gjennomført etter en transkripsjonsnøkkel, som skal tilrettelegge for at vi tre studenter benytter samme metoder for å analysere muntlige og skriftlige ytringer om til anonymisert tekst. Transkriberingsprosessen var omfattende, og jeg brukte flere uker på å bli ferdig med hele datamaterialet som omfavnet denne studien. Det har vært åpen dialog mellom studentene som har arbeidet med transkriberingen, dermed har vi hatt muligheten til å kvalitetssikre hverandres arbeid. Transkripsjonene av data som blir presentert vil dermed formidle refleksjonene fra læreren i intervjuene, og prosessene mellom deltakerne i undervisningsøktene.

3.6.2 Validitet

Innen kvalitativ forskning handler validitet om gyldigheten av tolkingene forskeren gjør vedrørende datamaterialet (Thagaard, 2018). Analysen av datamaterialet som gjøres i denne studien belyses i kapittel 4, og benytter et analytisk rammeverk (kap. 2.4) med deres analytiske verktøy beskrevet tidligere (kap. 3.3, 3.5). Analysene skal beskrive datamaterialet på en oversiktlig måte, dermed må forskeren gjøre tilpasninger og vurderinger slik at beskrivelsene representerer datamaterialet. Forskeren bør etterstrebe en kritisk tilnærming vedrørende hvor nøyaktig de tolkningene en kommer frem til representerer konteksten og prosessene som er studert (Postholm & Jacobsen, 2018). Dermed kan det være en styrke at datamaterialet til denne studien er gjennomgått flere ganger, og utført justeringer ettersom det er blitt fanget opp avvik.

Forskningens validitet inkluderer også i hvilken grad funnene er generaliserbare. Denne studien prøver derimot ikke å generalisere funn på grunn av datamaterialets meget begrensede deltakere over et kort tidsintervall. Derimot ønsker studien å skape innsikt i hvordan TRU-rammeverket kan brukes til å drive videre profesjonsrettet utvikling. Forskningsprosjektet vil relateres til tidligere forskning, og forankres i andres forskning og relevant teori. Følgelig vil studiens funn kunne styrkes basert på tidligere forskning (Postholm & Jacobsen, 2018).

3.7 Forskningsetiske vurderinger

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) publiserte i 2021 den femte utgaven av forskningsetiske retningslinjer gjeldende for samfunnsvitenskap og humaniora. Retningslinjene redegjør for hvilke hensyn og forpliktelser som inngår i et forskningsprosjekt (NESH, 2021). Forskeren har et ansvar tilknyttet å ivareta god forskningsetikk ovenfor deltakerne. God forskningspraksis kjennetegnes ved å redegjøre for hvilke valg og prioriteringer som blir gjort i forskningsprosessen (NESH, 2021).

Innhenting av empiri for dette forskningsprosjektet baserer seg som tidligere nevnt på deltakere fra en ungdomsskole. Dermed behandler denne masteroppgaven personopplysninger som gjør at prosjektet må meldes inn til Sikt (Thagaard, 2018). Studentene tilknyttet dette forskningsarbeidet ventet – som tidligere nevnt – med å opprette kontakt mellom dem og lærerne på skolen til etter prosjektet var sendt til Sikt for godkjenning (vedlegg F).

Etter studien ble godkjent (vedlegg G) sendte vi ut informasjonsskriv til de to aktuelle lærerne (vedlegg A). Det ble også delt ut et informasjonsskriv til elevene (vedlegg B) på disse to trinnene, som kontaktlæreren fikk ansvar for å dele ut til de elevene som ønsket å delta. Slik tilrettela vi for frivillig deltakelse, uten noen form for tvang eller press (NESH, 2021). Siden elevene i vår studie går på ungdomsskole ble foreldrenes godkjennelse nødvendig for barnets deltakelse (vedlegg B). Vi utarbeidet to separate informasjonsskriv basert på hvem som var mottakeren, men skrivene inneholdt mye av det samme med søkelys rundt: formålet med forskningen, lagringshåndtering av empiri, og deltakernes rettigheter (vedlegg A og B). Basert på relevant og nødvendig informasjon kunne lærerne, og foreldre sammen med deres barn ta stilling til om de ønsket å delta i dette forskningsprosjektet som innhentet data til tre masteroppgaver (Thagaard, 2018). Foreldrene og deres barn fikk ta stilling til om de ønsket å bli filmet ved bruk av lyd og videoopptak, eller bare med bruk av lydopptak. Dermed måtte det «krysses av» for hvilke observasjonsmetoder som tillates gjennom observasjonsprosessen. Foreldrene måtte deretter signere samtykkeskjema som deres barn leverte videre til kontaktlærere, som leverte samtykkeskjema videre til oss studenter. Begrunnelsen for at kontaktlærerne fungerte som et bindeledd i denne prosessen var basert på ønsket om å ufarliggjøre innledningsfasen til studien.

På grunn av begrenset antall deltakere til forskningsprosjektet valgte læreren å gruppere elevene før undervisningstimene, og dermed plassere disse strategisk ved veggen vi studenter hadde bedt om å filme elevgruppene ved. Slik sikret vi elevgrupper der alle elevene hadde gitt tillatelse til innhenting av video- og lydopptak. Mediefilene vedrørende studiens datamateriale lagres på en forsvarlig måte gjennom universitetets digitale lagringsløsning Nextcloud, og skal slettes innen 31.12.2023.

4 Resultater

I dette kapitlet presenteres analysene ved bruk av TRU-rammeverkets verktøy for å kunne sette søkelys på forskningsspørsmålet. Delkapitlene er inndelt i rammeverkets fem dimensjoner for «*powerful classroom*», og skal undersøke et spørsmål fra hver dimensjon tilknyttet TRU´s elevperspektiv (Figur 10). Det gjøres ved å reflektere rundt pre- og post-intervjuet med læreren på 10.trinn, samt analyse av sekvenser fra to undervisningstimer. Jeg gir først en oversiktlig introduksjon over lærerens matematiske synspunkt og datamaterialet sin helhetlig skåring. Deretter analyseres dimensjonene til TRU i respektive delkapitler.

4.1 Teaching for robust understanding

I et klasserom er lærerens refleksjoner og holdninger viktige siden de påvirker – som tidligere nevnt – klasseromskulturen elevene utvikler seg i. Dermed var det viktig å kunne reflektere litt rundt hva læreren på 10. trinn mente matematisk kompetanse skulle være for hans elever, og hvilke tanker han hadde angående utforskning og problemløsning i matematikk. I pre-intervjuet kom følgende tanker rundt dette frem:

Lærer:	Jeg tenker det har med anvendelse, og se det store bildet i ting. Det handler på en måte om å ha en grunnkompetanse, på en måte mye av det jeg så når jeg jobbet på barneskole er viktigheten av å ha en basis i bunn. Men det å kunne se nytteverdien, og kunne vite litt hvordan en anvender det en lærer tenker jeg at er det viktigste. Det, og det og kunne samhandle og kommunisere, vi snakker mye om dette her med å snakke matte, vi kommer sikkert inn på det med tavlene, men det er det jeg tenker er det viktigste vi kan, kan lære elevene hvordan kan vi anvende. Vi gir de verktøy, så er det hvordan kan vi få satt det ut i livet. Det er i hvert fall det første som hopper i hodet på meg.
Student 1:	[...], hva tenker du om utforskning og problemløsning?
Lærer:	Utrolig viktig. En ser også hos elever som snakker om motivasjon, så ser en det som jeg så på barneskolen så er det mer en læreglede og de har en mer synlig utforsker trang. Også ser vi at den daler litt, at motivasjonen daler litt når en kommer på ungdomsskolen. Så jeg tenker at det å legge til rette for mye utforskning og problemløsning i ungdomstrinnet også og la de slippe seg litt løs og la de få utforske litt tenker jeg at er utrolig viktig. Også gjennom sånne typer oppgaver, det er så stort spekter både i oppgavene og elevene som gjør at en del elever kjenner at de kanskje har mestring i noen deler av matematikken og noen deler de ikke har, men når de kommer sammen i en gruppe så føler de at de kan bidra på ulike områder, også kan en alltid bygge på en sånn type oppgave som gjør at du kan utfordre de elevene med høyeste akademisk læringspotensial. Jeg tenker at det er utrolig viktig. Jeg tenker mest på motivasjon rett og slett, for faget fordi det er der vi jobber mest på ungdomsskolen.

Læreren i denne studien har et års erfaring fra barneskole, og trekker derfor frem sammenhengen mellom matematikk fra barneskolen til ungdomsskolen. Han påpeker at elevene skal utvikle enkelte grunnleggende ferdigheter i matematikk, for så å kunne anvende disse til å se de matematiske sammenhengene. Senere i dialogen forteller læreren om personlig økonomi som elevene på 10. trinn har arbeidet mye med, og trekker koblinger mellom elevenes fremtidige hverdagsliv og matematikk som for eksempel prosentregning. Dermed hevder han elevene først utvikler kunnskap innen et matematisk tema, for så kunne se sammenhenger og verdien i matematikken. Dette synspunktet kommer også frem med tanke på hvordan en kan ha en effektiv «tavletime» som elevene hans kaller det. Grundige forkunnskaper vedrørende periodens matematiske emne er ifølge ham nødvendig for å kunne oppleve vellykkede «tavletimer». Læreren er tydelig på at det å kunne resonnere og kommunisere er en essensiell del av hans faglige fokusområder. For å utvikle elevene i dette brukes blant annet tavlene, men bruken varierer etter hvilket matematisk emne perioden har søkelys på. I intervjuene er matematikklæreren tydelig på at denne pedagogiske metodikken er relativt ny, og dermed påvirker hans bruk av *tenkende klasserom*. Det påpekes at han ser nytteverdien av tavlene og randomiserte grupper, selv om vi ikke opplevde randomiserte grupper i disse tre ukene. I dialogen mellom student 1 og lærer kommer det også frem at de vertikale tavlene blir brukt i flere fag på denne ungdomsskolen. Utforskning fremheves også som meget viktig i utvikling av matematisk kompetanse, og med bruk av grupper og samarbeid vil elevene kunne støtte seg på hverandre og utvikle seg sammen. Dermed prøver han å finne/utvikle gode oppgaver som inneholder utfordringer for alle elevene. Videre i pre-intervjuet ønsket studentene en oversikt over det matematiske fokusområdet – hvilke sentrale matematiske ideer og mål – for forskningsprosjektets observasjonsperiode på tre uker (se Tabell 3).

Lærer:	Vi er inne på algebra nå også skal vi over på ligninger. Så nå avslutter vi algebra som uttrykkslæren. Den avslutter vi nå neste uke, de skal ha vurdering i uke 5, også etter det så går vi inn i ligninger også er det over på funksjoner til slutt.
(...)	
Lærer:	Da er det generell tallforståelse som skal være det. Vi har jobbet en del med kvadratsetninger og brøkuttykk blir mye det som skal sitte nå og det bygge, altså ligninger, bygger videre på dette her. Så det er det som blir hovedfokuset.

Algebra er som kjent et utfordrende matematisk emne, som Norge scorer lavest på i forhold til ulike matematiske emner (illustrert i Figur 7 (TIMSS)). Læreren refererer til algebra som «uttrykkslæren», og kan dermed antyde til en oppfatning vedrørende algebra som et språk for generalisering. Videre påpeker han at elevene skal til nå ha utviklet generell tallforståelse. Tabell 8 gir en omfattende oversikt over de to undervisningstimene som analyseres i denne studien. Datamaterialet scorer relativt høyt med bruk av TRU analyseverktøy, og benytter som nevnt N/A for å indikere at datamaterialet ikke scores til det respektive nivået. Sekvensene A1:1–15 og A2:1–16 representerer lærerstyrt introduksjon uten særlig grad av elevaktivisering, og rangeres derfor til nivå 1. De resterende sekvensene rangeres relativt høyt som gir indikasjoner på produktiv elevaktivitet, med utviklingsmuligheter tilknyttet matematiske kompetanse (kap. 2.3).

Tabell 8: Skåringsanalyse over datamaterialet

Dimensjon	Nivå 1	Nivå 2	Nivå 3
Matematisk innhold	A1:1–15 A2:1–16 B1: N/A B2: N/A	A1:16–91 A2:17–538 B1:1–235 B2:1–30	A1:92–200 A2:17–538 B1: N/A B2:31–217
Kognitive krav	A1:1–15 A2:1–16 B1: N/A B2: N/A	A1:16–162 A2:17–538 B1:1–235 B2:1–217	A1:92–162 A2:17–538 B1: N/A B2: N/A
Tilgang til matematisk innhold	A1: N/A A2: N/A B1: N/A B2: N/A	A1:16–200 A2:17–538 B1: N/A B2: N/A	A1:16–200 A2:17–538 B1:1–235 B2:1–217
Autonomi og identitet	A1:1–15 A2:1–16 B1: N/A B2: N/A	A1:16–200 A2:17–538 B1: N/A B2:1–156	A1:16–200 A2:17–538 B1:1–235 B2:1–217
Formativ vurdering	A1: N/A A2: N/A B1: N/A B2: N/A	A1:16–200 A2:17–538 B1:1–235 B2:1–217	A1:16–200 A2:17–538 B1:1–235 B2:1–217

Resultatene (Tabell 8) fra analysene til denne studien redegjøres for i kapittel 4.1.1 – 4.1.5. Denne studien vil gi en grundig analyse av problem A – helt i hundre! Begrunnelsen for at denne undervisningstimen velges er fordi elevene fikk lengst tid (se Tabell 3) til å utforske i denne timen som tilrettelegger for høyere grad av læringsmuligheter. Læreren hadde også en oppsummering i denne timen, som var vesentlig lengre enn problem B. Problem B vil dermed analyseres i delkapitlene 4.1.1 – 4.1.2, men nevnes videre i de resterende kapitlene uten grundig gjennomgang.

4.1.1 Matematisk innhold: Hvordan relateres det til mine forkunnskaper?

4.1.1.1 Problem A – Helt i hundre!

Undervisningsaktiviteten legger klare rammer for hvilket utbytte elevene står igjen med. Problem A er detaljert beskrevet i kapitel 3.4.1. Dermed skal utdrag fra sekvens A1:16–91 (se Tabell 9) som scoret til nivå 2 og A1:92–162 (se Tabell 10) scoret til nivå 3 analyseres i dette delkapitlet.

Tabell 9: Matematisk innhold (A1:16–91)

Matematisk innhold Hvor nøyaktig, sammenhengende og godt begrunnet er det matematiske innholdet		
Nivå	Kode	Observasjoner
1	Klasseromsaktiviteter er ufokuserte eller ferdighetsorienterte, og mangler muligheter for engasjement med innhold på klassetrinn (som referert i LK20).	
2	Aktivitetene er på klassetrinn, men er først og fremst ferdighetsorienterte, med få muligheter for å knytte sammenhenger (f.eks. mellom prosedyrer og konsepter) eller for matematisk sammenheng.	**<u>Utdrag fra A1:16–91</u>** 25. Oliver: Vi kan ta syttifire og åttifem 26. Emma: $ (74 • 85) – (84 • 75) $ 27. Sofie: (Hører ikke) 28. Emma: $ 6290 – 6300 $ 29. Emma: $ = 10 $ 30. Lærer: * Det er lov å bruke kalkulator på dette når dere nå arbeider med større tall. Da går det fortere. Men se litt, hva legger dere merke til med de ulike? Hva legger dere merke til? * 31. Emma: [Skal vi ta en med tre også?] 32. Sofie: (Hører ikke) 33. Emma: Det var litt lite plass her, men det går fint 34. Emma: $\$_1$ (76 • 94) 35. Sofie: Syv, en, fire, fire 36. Emma: $\$_2$ 7144 37. Emma: – (74 • 96) $\$_1$ 38. Lærer: Hva ser dere til nå? Hva har dere funnet ut av til nå? 39. Emma: Alt blir ti 40. Sofie: (Hører ikke) 41. Lærer: Ja, det blir ti 42. Emma: (Hører ikke)

		43. Lærer: Men hvorfor akkurat den rekkefølgen? Hvorfor skal vi ha syttifire gange åttifem? Kan vi bytte plass på dem? 44. Emma: Ja, fordi da blir det ikke minus ti 45. Lærer: Her blir det minus ti 46. Sofie: Ja da blir det minus ti 47. Lærer: Ja 48. Emma: Ja ja ja, da blir det minus ti. 49. Sofie: Vi må fikse det tror jeg 50. Lærer: Ja du vil fortsatt få ti. Ja. Men gjelder dette gjelder for alle kvadratene på hele arket her? Kan vi, kan vi si det? 51. Emma: $4002 - 4012 = -10$ 52. Emma: $6290 - 6300 = -10$ 53. Emma: Må vi ta alle? Det gidder jeg ikke. 54. Lærer: Trenger ikke alle, men hvert fall utforsk litt der. Hva er det? (Går til en annen gruppe som stiller et spørsmål)
3	Klasseromsaktiviteter støtter meningsfulle forbindelser mellom prosedyrer, konsepter og kontekst (der det er hensiktsmessig) og gir muligheter for å bygge et sammenhengende syn på matematikk.	

I utdraget fra sekvensen A1:16–91 (Tabell 9) prøver læreren å veilede elevene til å bruke likhetstegnet riktig, uten å si at de har feil. Elevene [25–29] starter med å utforske algoritmen de ble presentert i introduksjonen. Den første elevgruppen [25–26] velger tallene: 74, 85, 84 og 75, og skriver Modell 1 til deres andre gjennomførelse av algoritmen med 2 x 2 kvadrat:

1 $(74 \bullet 85) - (84 \bullet 75)$

2 $6290 - 6300$

3 $= 10$

Modell 1: 2 x 2 kvadrat

Denne gruppen velger omvendt rekkefølge enn den de skulle benytte for diagonalene, som gir elevene reduserende mønster. Fra elevenes «svar» [3] er de i en misoppfatning for hva likhetstegnet betyr, og velger å skrive løsningen til regnestykke [1] som positivt – siden de «vet» differansen skal være positiv – fordi læreren viste det i innledningen. Fra pre-intervju vektlegger læreren generell tallforståelse som et matematisk mål elevene skal kunne. Dermed ville det være interessant å veilede elevene til en diskusjon rundt betydningen ved likhetstegnet, og bruken av parenteser i algoritmen [1]. Det er høy sannsynlighet for at elevene benytter seg av parenteser siden læreren benyttet dem i introduksjonen av problemet. Derimot er disse ikke nødvendige med tanke på regnerekkefølgen prioriterer algoritmen riktig, uten bruk av parenteser. I introduksjonen av problem A spurte også læreren elevene om hva «summen» ville bli? Her observeres det flere elever «korrigere» begrepsbruken, og hevdet at svaret ville være differansen for dette regnestykket.

Elevene [25–29] utforsker algoritmen med 2 x 2 kvadrater som har en differanse på 10, og 3 x 3 kvadrat [31–37]. Etter hvert kommer læreren [38] bort til elevgruppen og innleder følgende veiledning hvor søkelyset er på hva elevene har oppdaget. Emma [39] forteller at «alt blir ti», således veileder læreren [43] elevene til å bruke algoritmen korrekt som illustrert i innledningen av problemet. Etter elevene har observert at de må endre deres algoritme slik den blir lik oppgavens instrukser anerkjenner læreren [50] at de fortsatt vil få 10 i differanse. I denne delen av dialogen ville det være interessant og utfordre elevene i hvorfor man må endre på algoritmen, slik at elevene etter hvert kunne resonnere seg frem til korrekt forståelse tilknyttet likhetstegnet. Istedenfor spør læreren om de vi få 10 for alle 2 x 2 kvadrater på hele arket? Emma responderer [53] «må vi ta alle? Det gidder jeg ikke». Her kunne elevene ledes inn til å benytte seg av algebra for å generalisere for alle 2 x 2 kvadrater. En slik generalisering illustreres i Modell 2.

1	$(a+1) \bullet (a+10) - a \bullet (a+11)$
2	$a^2 + 10a + a + 10 - (a^2 + 11a)$
3	$a^2 + 11a + 10 - a^2 - 11a$
4	$= 10$

Modell 2: Generalisert 2 x 2 kvadrat

Ved å benytte seg av generalisering kunne elevene argumentert for at alle 2 x 2 kvadrater har en differanse på 10. Skal en utvikle elevenes algebraiske *habits of mind* kan det være av interesse å videreutvikle elevenes bruk av algebra som et språklig verktøy for generalisering. For å illustrere verdien av algebra som et generalisering «språk» tar jeg meg friheten til å illustrere hvordan et 3 x 3 kvadrat kan bevises i Modell 3.

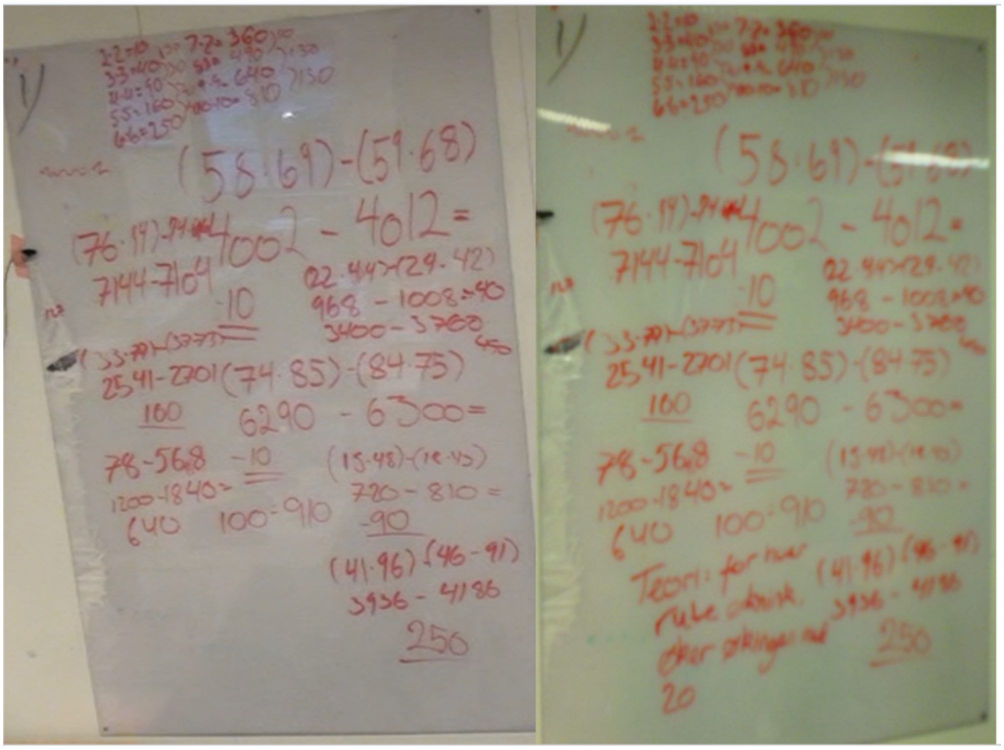
1 $(a+2)\bullet(a+20)-a\bullet(a+22)$

2 $a^2+20a+2a+40-(a^2+22a)$

3 $a^2+22a+40-a^2-22a$

4 $=40$

Modell 3: Generalisert 3 x 3 kvadrat



Figur 11: Problem A – Elevgruppe 1

Elevgruppene benyttet seg av algoritmen gitt i introduksjonen ved flere av samme kvadrat, og hevdet dermed at alle av samme kvadrat hadde lik differanse fordi deres et til to forsøk (se Figur 11) tilsa at dette stemte. De skulle som kapittel 3.4.1 introduserer finne differansen til alle kvadratene fra 2 x 2 til og med 10 x 10. I denne undervisningstimen observeres det hvor tidkrevende det er å benytte seg av flere eksempler uten bruk av generalisering. Problem A har en gradvis kompleksitet som inviterer elevene til å utforske først gjennom en algoritme som kan generaliseres. Videre blir de utfordret til å lete etter et mønster mellom de ulike kvadratene. For så til slutt utfordre dem til å lage et algebraisk uttrykk (Modell 4) eller funksjonsuttrykk (Modell 6) som stemmer for hvert n x n kvadrat. Dette kan gjennomføres på to ulike måter. Den ene metoden omfatter å se kvadratene slik som på Figur 11, øverst til venstre ser man elevgruppe 1 har listet opp kvadratene fra 2 x 2 til og med 10 x 10. Analyserer vi differansene til hvert n x n kvadrat observerer vi at sifrene utenom 0 representerer kvadrattall. Differansen til de ulike kvadratene observeres videre som kvadrattallet av forrige faktorer, således kan vi utlede en generell løsning (Modell 4).

$$n \, x \, n = (n-1)^2 \; \bullet \; 10$$

Modell 4: Algebraisk uttrykk

Etter hvert som elevgruppe 1 har gjennomført første del av oppgaven kommer en ny utfordring fra læreren som et utdrag fra sekvens A1:92–162 (Tabell 10) skal analysere videre.

Tabell 10: Matematisk innhold (A1:92–162)

Matematisk innhold Hvor nøyaktig, sammenhengende og godt begrunnet er det matematiske innholdet		
Nivå	Kode	Observasjoner
1	Klasseromsaktiviteter er ufokuserte eller ferdighetsorienterte, og mangler muligheter for engasjement med innhold på klassetrinn (som referert i LK20).	
2	Aktivitetene er på klassetrinn, men er først og fremst ferdighetsorienterte, med få muligheter for å knytte sammenhenger (f.eks. mellom prosedyrer og konsepter) eller for matematisk sammenheng.	
3	Klasseromsaktiviteter støtter meningsfulle forbindelser mellom prosedyrer, konsepter og kontekst (der det er hensiktsmessig) og gir muligheter for å bygge et sammenhengende syn på matematikk.	**<u>Utdrag fra A1:92–162</u>** 122. Lærer: Kan vi finne et uttrykk, en generell formel? Hvis jeg kommer inn og sier hva er summen i en åtte ganger åtte for eksempel? Kan vi lage en formel for det? Hva minner dette her om egentlig? Kvadratsetningene, det er et lite tips her, okei. 123. Emma: Hvordan kan vi bruke kvadratsetningene til dette? 124. Lærer: Kan dere lage en generell formel for det? Ta med Oliver inn i tenkningen her 125. Sofie: Vi skal lage en syk formel av dette. For eksempel den der a pluss b med parenteser opphøyd i andre 126. Oliver: Vi kan ta x pluss tjue

		127. Oliver: $ x + 20 $ 128. Sofie: Det går an 129. Emma: Nå går det 130. Sofie: Jeg har det. For hver økning, blir det ikke x i andre pluss tjue 131. Sofie: $ $x^2 + 20$ $ 132. Emma: Jo, x i andre. Da blir det, det tallet istedenfor x, så da blir det åtte ganger åtte som er sekstifire, pluss tjue. 133. Sofie: Hehe, nei fordi (hører ikke) 134. Oliver: [Hva mener dere med x ganger x?] 135. Sofie: Vi tar x ganger x 136. Emma: Å det er x opphøyd i x 137. Sofie: Opphøyd i x? Ja der har du den, opphøyd i x 138. Emma: Men her står det ni gange ni blir seks hundre og førti, men ni ganger ni er åttien. Ikke sant, så 139. Sofie: Men det er fordi at den første x blir ganget med (hører ikke) fordi at en ganger en blir en 140. Emma: Ååå, wow. Der sa du det 141. Sofie: Fokus 142. Emma: Fordi hvis vi ser, så er seks ganger seks blir trettiseks pluss tjue, det blir ikke tohundre og femti. Skjønner du? 143. Sofie: (Hører ikke) 144. Emma: Ja, men det må være noe sånn x opphøyd i andre, fordi de må være like. Så det er x opphøyd i andre 145. Sofie: Det hjelper deg ikke 146. Emma: $ x^2 $ 147. Sofie: Fordi du skal kunne sette inn et tall for x, så da må det være x er lik åtte ganger åtte liksom. Det er x opphøyd i andre siden de må være like. Det er x opphøyd i andre. X opphøyd i andre 148. Emma: Hvis vi setter x opphøyd i andre inni en parentes også må vi plusse med ti? 149. Emma: $ $(x^2) +$ $ 150. Emma: Så blir dette først ganget sammen, så plusses det etterpå 151. Sofie: Vi må få med at det øker med tjue. Men at det ikke bare øker med tjue, men at tjue er økningen 152. Emma: Ja (hører ikke) 153. Elev: (Hører ikke) 154. Emma: Hvis vi lager en firkant med a. Da blir det jo litt annerledes 155. Sofie: Det gir mening, det gir mening. 156. Emma: $

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
<table><tr><td>a</td><td>a + 1</td></tr><tr><td>a + 10</td><td>a + 11</td></tr></table>
$
157. Sofie: Du tar a pluss en gange a pluss ti, minus a gange a pluss elleve
158. Emma: a pluss en
159. Lærer: * Okei, da tar vi et par minutter til. *
160. Sofie: Hvis vi har større tall her så vil det jo bli a pluss, a pluss to, og a pluss tjue og a pluss tjueto
161. Emma: a pluss en opphøyd i
162. Sofie: Men jeg vet ikke hvordan vi får en formel på det
</td></tr>
</table>

I utdrag fra sekvens A1:92–162 (Tabell 10) prøver læreren å veilede en av flere grupper til å benytte algebra for å abstrahere informasjonen til problem A. Han gir elevgruppe 1 hint om å tenke over kvadratsetningene [122] som de har et hovedfokus på denne perioden. Kvadratsetningene (Modell 5) ble ramset opp, og arbeidet med av elevene i undervisningstimen (Tabell 3) før problem A.

Første kvadratsetning	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Andre kvadratsetning	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Tredje kvadratsetning	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

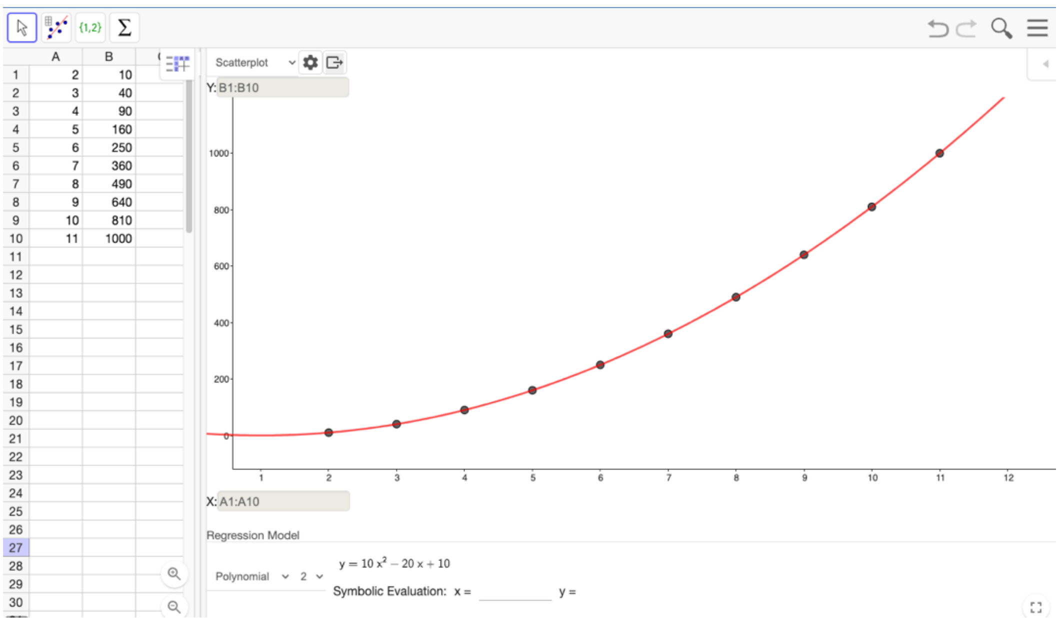
Modell 5: Kvadratsetningene

Sofie [125] introduserer første kvadratsetning som en idé, men det blir ikke bygget videre på av elevgruppen siden Oliver kommer med et annet forslag [126] og skriver det ned på tavlen [127]. Ideen til Oliver velger Sofie å bygge videre på [130], og skriver således ned [131] en videreutvikling av hans idé. I denne delsekvensen observerer vi elevgruppe 1 utvikle matematisk kompetanse sammen når Emma sjekker løsningen til antakelsen deres [132]. Sofie innser at antakelsen deres ikke stemmer [133], og velger dermed å utforske videre. Oliver [134] utfordrer elevgruppen til å forklare hvordan de tenker, siden deres første antakelse ikke fungerte. Dermed prøver Emma [144] å forklare med bruk av matematikken som gruppen har skrevet ned på den vertikale tavlen. Videre påpeker hun at det må være et funksjonsuttrykk med x opphøyd i andre [144]. I dialogen mellom Emma og Sofie [144–151] havner dem mellom de to ulike løsningsmetodene (Modell 4 & 6) til oppgaven. I den ene tankeprosessen ser de at det er kvadrattall, som Sofie [139] forteller så er 1 multiplisert med 1 lik 1. Videre forteller Emma [148] at de må addere med 10, hadde elevene sjekket denne antakelsen ville de etter all sannsynlighet funnet ut at de måtte multiplisere istedenfor å addere. I deres produktive handlingsfase er det grunnlag for å anta at de etter hvert ville kommet frem til første løsningen (Modell 4) som jeg har presentert. Sofie begynner å utforske [151] den andre løsningen (Modell 6), hvor hun klarer å beskrive vekstfaktoren –20x på en akseptabel måte. Etterpå blir elevgruppen inspirert av en annen gruppe som prøver å generalisere (Modell 2) differansen for 2 x 2 kvadrat. Dermed blir elevgruppe 1 progresjon i utforskning av algebraisk uttrykk eller funksjonsuttrykk stanset. Fra nabogruppens og deres eget arbeid med 2 x 2 kvadrat resonnerer Sofie [160] seg frem til hvordan 3 x 3 kvadrat kan generaliseres som illustrert i Modell 3. Rett før helklasse oppsummeringen gjenopptar Emma og Sofie deres utforskning [161–162] for å utlede en generell formel eller funksjonsuttrykk.

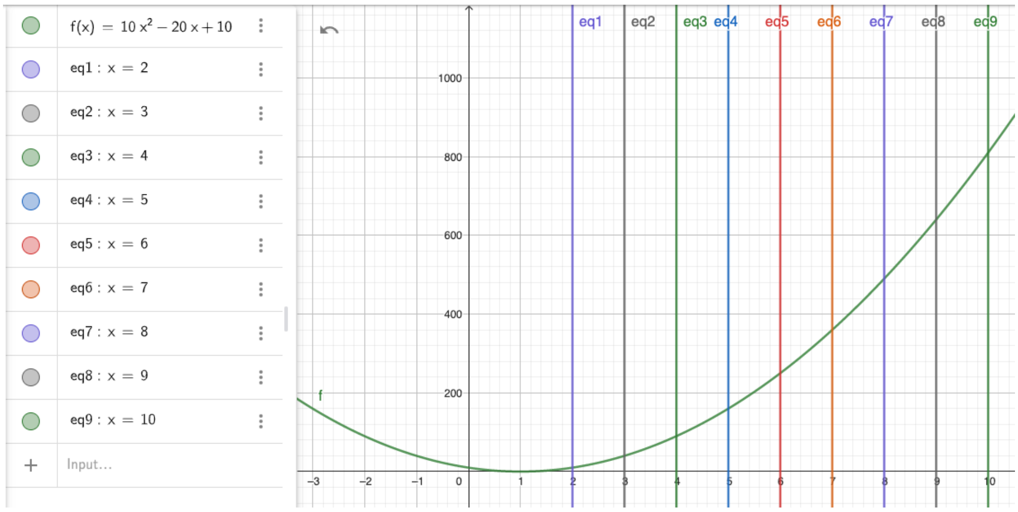
For å kunne finne et funksjonsuttrykk (Modell 6) innen den korte tidsfristen en undervisningstime ofte har kan regresjonsanalyse (Modell 7) med geogebra som et kulturelt verktøy være fornuftig å bruke. For elevgruppe 1 ville de dermed kunnet strukturert deres funn i en tabell med regneark i geogebra, og bedt programmet analysere frem et funksjonsuttrykk (Modell 7). Således kunne elevene og læreren diskutert hvordan de observerer funksjonsuttrykket i forhold til hva de har funnet. Det kan tenkes at de fleste elevene ville utviklet en viss forståelse rundt konstantleddet 10. Det var også flere elevgrupper som oppdaget at differansen økte med 20 per kvadrat som er stigningstallen til funksjonsuttrykket. Ved å benytte seg av geogebra kunne helklassesamtalene også utforsket forskjellen mellom et funksjonsuttrykk og likning som illustrert i Modell 8.

Problem A – Helt i hundre! $f(x) = 10x^2 - 20x + 10 = 10(x-1)^2$

Modell 6: Funksjonsuttrykk (problem A)



Modell 7: Regresjonsanalyse (problem A)



Modell 8: Drøfting funksjonsuttrykk (problem A)

4.1.1.2 Problem B – Hvor mange tannpirkere i trekanten?

I problem B (kap. 3.4.2) blir de også utfordret i delelighet og rest. Elevene fikk 11 minutter (se Tabell 3) til å utforske på tavlene, med en kort oppsummering på slutten av økten. Dette delkapitlet skal analysere sekvensen B2:153–203 (se Tabell 11) hvor elevgruppe 2 prøver etter hvert å generalisere utviklingen til denne oppgaven.

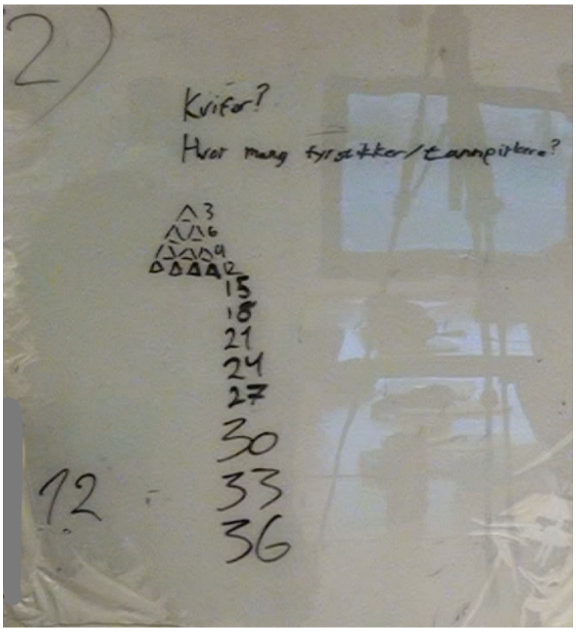
Tabell 11: Matematisk innhold (B2:153–203)

Matematisk innhold Hvor nøyaktig, sammenhengende og godt begrunnet er det matematiske innholdet		
Nivå	Kode	Observasjoner
1	Klasseromsaktiviteter er ufokuserte eller ferdighetsorienterte, og mangler muligheter for engasjement med innhold på klassetrinn (som referert i LK20).	
2	Aktivitetene er på klassetrinn, men er først og fremst ferdighetsorienterte, med få muligheter for å knytte sammenhenger (f.eks. mellom	

	prosedyrer og konsepter) eller for matematisk sammenheng.	
3	Klasseromsaktiviteter støtter meningsfulle forbindelser mellom prosedyrer, konsepter og kontekst (der det er hensiktsmessig) og gir muligheter for å bygge et sammenhengende syn på matematikk.	**<u>Sekvens B2:153–203</u>** 153. Lukas: Men det blir for mye. Helt ned til trettiseks, hvor mange etasjer er det? 154. Olivia: En, to, tre, fire, fem, seks, syv, åtte, ni, ti, elleve, tolv. Tolv etasjer 155. Lukas: Det blir tolv og en halv da? Tolv og en halv etasje 156. Olivia: $ 12 $ 157. Olivia: Tolv og en halv etasje, men det var ingen som sa at vi måtte bruke alle? 158. Emil: Nei, det var bare hvor mange med to hundre og femti 159. Lukas: Hvor mange etasjer klarer vi å lage da? Det blir tolv da 160. Emil: [Fordi det blir?] 161. Olivia: [Hvis vi bare tar tolv ganger] 162. Lukas: [Trettiseks ganger tre] 163. Olivia: [Tolv ganger tre] 164. Lukas: Nei, det blir det ikke 165. Olivia: Tolv ganger tre 166. Lukas: (Hører ikke) 167. Emil: Hæ? 168. Lukas: Ja, men ganger med tre, men det blir ikke det 169. Olivia: Tolv komma fem 170. Lukas: Tolv gange fem? 171. Olivia: Tolv komma fem 172. Lukas: Tolv komma fem 173. Olivia: Tolv komma fem gange tre 174. Lukas: Det er trettisyv komma fem. 175. Emil: Åja 176. Lukas: Hvis vi tar tolv ganger tre? 177. Olivia: Ja, akkurat da her vi så mange etasjer 178. Lukas: Ja 179. Olivia: Og tolv gange trettiseks blir for mye eller? 180. Lukas: Tolv gange trettiseks 181. Olivia: Fire hundre og trettito 182. Lukas: Da går det ikke, hvis vi prøver igjen tolv gange trettiseks 183. Olivia: Ja, men da er trettiseks for stort 184. Lukas: (Hører ikke) 185. Olivia: Dette her gir ikke mening 186. Lukas: Det gir ikke mening 187. Emil: Hva er dere gjetter på? Hva er tolv? 188. Lukas: Det er hvor mange 189. Olivia: [Det er etasjer] 190. Emil: Er trettiseks med i den? 191. Lukas: Det er trettiseks på en etasje 192. Emil: Ja, men har vi ikke funnet svaret da? 193. Lukas: Jo, men det er ikke noe formel på det enda, vi må jo bare telle

		194. Emil: Ja 195. Lukas: Teller, plusse. Det går ikke å gange det 196. Olivia: Jeg er elendig når det gjelder å finne formler 197. Lukas: (Hører ikke) 198. Lærer: * [Okei, vi tar et minutt til før vi tar en liten oppsummering] * 199. Lukas: Har dere funnet formel? 200. Elev: Nei, men vi er på saken 201. Lukas: Men hva er det dere har kommet frem til? 202. Elev: Tolv 203. Lukas: Ja, vi fikk også tolv

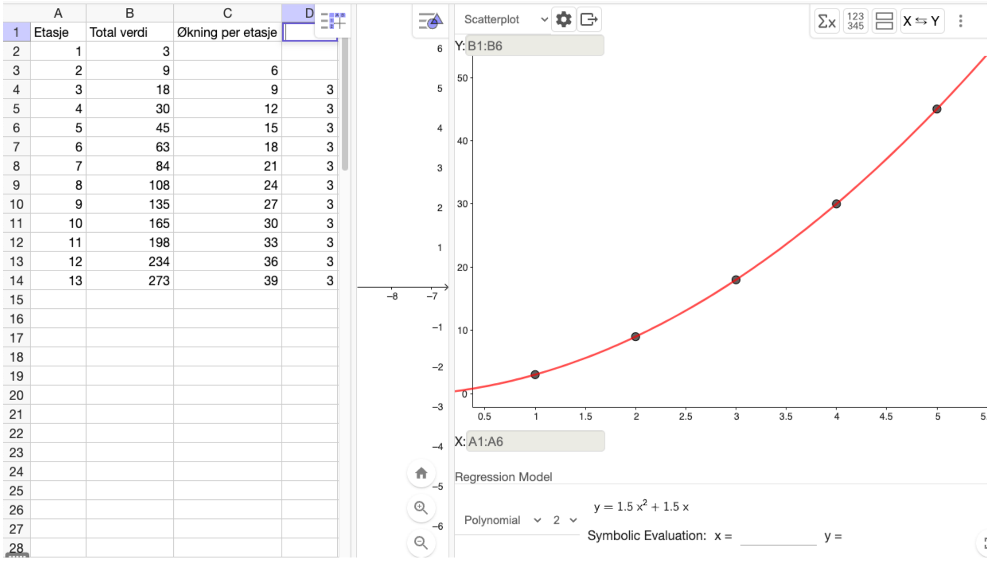
Innledningen av sekvensen B2:153–203 (se Tabell 11) viser hvordan Lukas og Olivia [153–157] har funnet ut at 250 tannpirkere ikke gir en heltallsløsning med 3. For hver trekant elevene lager bruker de opp 3 tannpirkere. Dialogen [157–159] mellom elevene viser dem resonnere seg frem til at de skulle lage maksimalt antall etasjer med tannpirkerne. Elevene benytter seg av sine forkunnskaper [192–196] der de har funnet antall etasjer med å telle etter tegningen deres (Figur 12), og følgelig addere etter mønsteret de har funnet [153–156]. Lukas [193] påpeker at de kan videreutvikle løsningen til en generell formel, og søker etter hvert [199] hjelp fra en annen elevgruppe. I denne oppgaven fikk elevene 11 minutter (Tabell 3) til å utforske som fremhever mulige begrensninger med en undervisningstime. Dermed kunne elevene utledet funksjonsuttrykket ved bruk av geogebra som illustrert i Modell 10, videre kunne elevene blitt utfordret til å forklare hvordan de tolker Modell 10 og funksjonsuttrykket (Modell 9).



Figur 12: Problem B – Elevgruppe 2

Problem B – Hvor mange tannpirkere i trekanten? $f(x) = 1.5x^2 + 1.5x = 3x\frac{x+1}{2}$

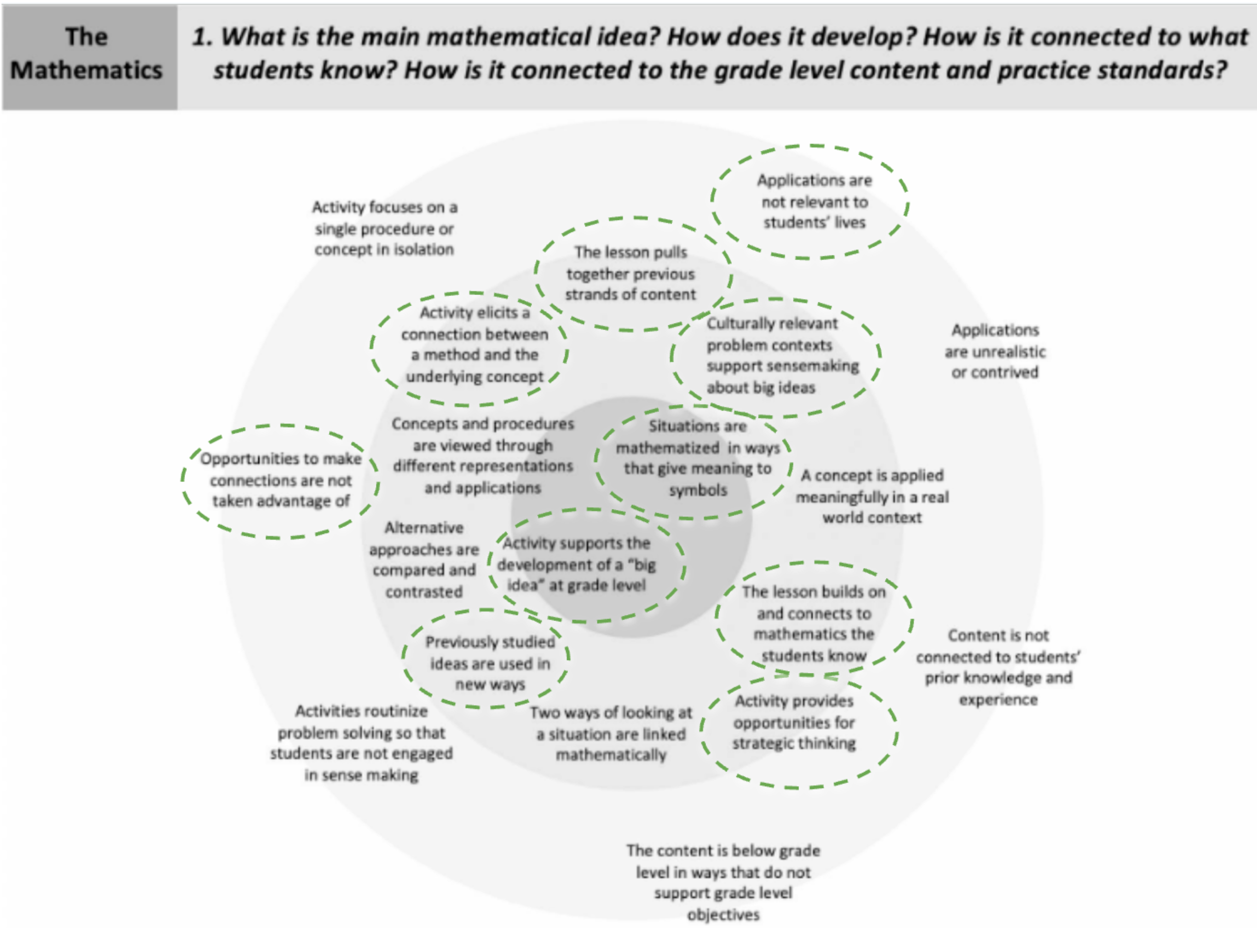
Modell 9: Funksjonsuttrykk (problem B



Modell 10: Regresjonsanalyse (problem B)

4.1.1.3 Oppsummering av undervisningstimene

Et av hovedmomentene ved TRU-rammeverket er å ikke definere læreren/undervisningstimene som god eller dårlig, men tilrettelegge for produktivt søkelys vedrørende profesjonsutvikling. Dermed vil det være fornuftig å se disse to undervisningstimene i en sammenheng angående de matematiske mulighetene som Problem A og B tilrettelegger for med tanke på spørsmålet "hvordan oppleves undervisningen fra elevens synspunkt?" Figur 13 er en utviklet «blink» som denne studien har fått tilsendt av Schoenfeld et al. (2023) for å kunne benytte til oppsummering av hver dimensjon. Formålet er å kunne tilstrebe og identifisere faktorer som tilrettelegger for *powerful classrooms*. Kapittel 4.1.1 analyserer hvordan elevene utforsker antakelser, og resonnerer gjennom samhandling med medelever. Undervisningsaktivitetene tilrettelegger for å engasjere alle elevene gjennom å inkludere flere faktorer innen *groupworthy problems* som blant annet lav inngang med høy takhøyde (LIST). Det gjøres ved å inkludere en innledningsfase som benytter elevens forkunnskaper, for så utfordre dem til å abstrahere og generalisere. Derimot kan man observere enkelte faktorer som matematisk undersøkelser i virkelighetsnær kontekst, og undervisningsaktivitetens sammenfatning av ulike representasjoner og konsepter ikke blir fremhevet i løpet av disse to undervisningstimene.



Figur 13: Oppsummering matematisk innhold (Schoenfeld et al., 2023)

4.1.2 Kognitive krav: Er jeg invitert til å forklare, eller bare gi svar?

I kapittel 4.1.1 viste analysene relativ høy grad av elevaktivitet, med oppgaver som tilrettelegger for engasjement hos alle elevene i studien. Følgelig har undervisningsoppgavene tilrettelagt for utviklingen til elevene, men det betyr ikke i seg selv at elevene utvikler seg som ønskelig. Ved matematisk tenkning har medelever og læreren stor betydning for hverandre. I et klasserom kan elevene oppleve at fokuset er på å gi riktig svar, eller de kan bli invitert til å forklare for deres tanker og presentere ulike løsninger. I intervjuene blir læreren spurt om hans refleksjoner rundt lærerens bruk av spørsmål sammen med elevene, og hvordan de vil kunne utvikle seg som matematiske tenkere og oppleve kognitive utfordringer.

Lærer: Ja, det er litt hvor åpne de spørsmålene er. Er du ute etter et fasitsvar eller er du ute etter tankeprosessene til elevene. Sånn tradisjonelt er det fort gjort å tenke at en vil at egentlig bare elevene skal ha rett svar også ferdig med det. Men det å sette seg inn i hvordan en får tak i hva eleven tenker og hvilke vurderinger og resoneringer de gjør, det er utrolig viktig. Og at elevene føler seg sett også i måten en stiller og måten en responderer på det svaret en får er utrolig, utrolig viktig. For tilbake til motivasjon, blir de møtt med lange avvisninger gang på gang så tør de ikke å delta, så det er utrolig viktig.

(...)

Lærer: Ja. Jeg synes det er utrolig vanskelig å svare på. Nei de får jo det gjennom ulike problemløsningsoppgavene som vi har. Spesielt når vi har brukt three acts of maths, men også en del via matematikksenteret også de oppgavene der. For det handler ikke bare om å løse en enkel oppgave. Det handler mer om komplekse samtaler og verdien av samtaler, verdien av det å kunne snakke matte, gjøre rede for det en tenker og at det finnes flere måter å tenke på. Er vel det som hvis jeg skulle prøve å svare på det spørsmålet. Så er det på en måte bruken av tavlene som et verktøy.

Refleksjonene til læreren viser hvordan han prøver å tilrettelegge for spørsmål som tar tak i hvordan elevene tenker, og dermed inviterer dem inn i en dialog hvor de gjør matematikk sammen. Han trekker også frem motivasjonen til elevene som påvirkes ut ifra hvilke normer klasserommet har. Dermed trenger elevene å trygges på at det er samtalene, og ulike måter å tenke på som er verdifullt i matematikk. Læreren trekker frem pedagogiske praksiser som tilrettelegger for slik utvikling ved bruken av vertikale tavler som et verktøy, med utforskende oppgaver fra ressurser som for eksempel Three Acts of Maths og matematikksenteret. Mine analyser fra det matematiske innholdet (kap. 4.1.1) antyder læreren bruker undervisningsoppgaver med stadig mer krevende matematiske utfordringer (LIST). Videre i dette kapitlet analysers utdrag fra sekvens A2:423–499 (se Tabell 12) og B2:32–156 (se Tabell 13) som antyder til relativ høy grad av forventinger til elevene om å kunne argumentere for sine løsninger.

4.1.2.1 Problem A – Helt i hundre!

I undervisningstimen med problem A (kap. 3.4.1) analyseres et utdrag fra sekvensen A2:423–499 (se Tabell 12) med elevgruppe 2 som blir utfordret av læreren til å generalisere deres oppdagelser.

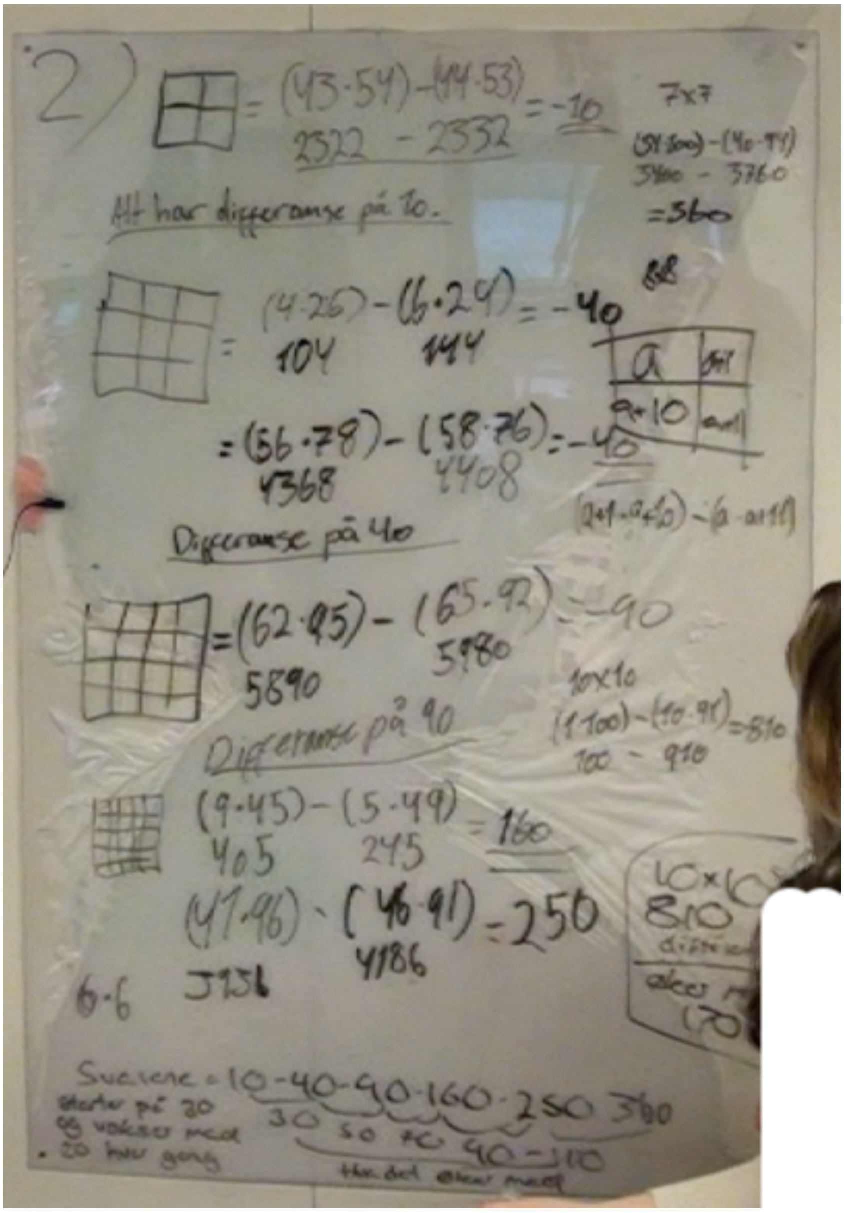
Tabell 12: Kognitive krav (A2:423–499)

<table>
<tr><th colspan="3">Kognitive krav
I hvilken grad støttes elevene i å gripe fatt i og forstå matematiske begreper</th></tr>
<tr><th>Nivå</th><th>Kode</th><th>Observasjoner</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Klasseromsaktiviteter er strukturert slik at elevene stort sett bruker memorerte prosedyrer og/eller arbeider med rutineøvelser.</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Klasseromsaktiviteter tilbyr muligheter for konseptuell rikdom eller problemløsningsutfordringer, men undervisningsinteraksjoner har en tendens til å «veilede bort» utfordringene, og fjerne muligheter for produktivt strev.</td><td rowspan="2"><u>Utdrag fra A2:423–499</u>
441. Lærer: Nå begynner vi å nærme oss slutten snart, kjempebra. Men hva, hva har dere funnet ut av her nå? Snakk meg litt gjennom siste del her.
442. Nora: Nei altså det vi har funnet ut av er at det øker med antall ruter
443. Olivia: [Hæ?]
444. Nora: Når det øker med antall ruter vi ganger innenfor kvadratet på en måte
445. Lærer: [Ja]
446. Nora: Så øker det da med tjue, så liksom den første forskjellen. Fra to gange to og tre ganger tre, det var da tretti
447. Lærer: Mhm
448. Nora: Da den første var ti og den andre var førti
449. Lærer: [Å neste er femti]
450. Nora: Forskjellen mellom 40 og 90 det var 50. Også nå vi da fant ut at ti gange ti da har åtte hundre og ti i differanse mellom de to, nei de to. Så kunne vi regne oss frem med å plusse tre hundre og seksti pluss hundre og tretti da. Også det igjen med hundre og femti, og det igjen med hundre og sytti. Så fikk vi åtte hundre og ti, så da kan vi tenke oss at endringen her legges til differansen fra denne og forrige resultatet som er hundre og nitti
451. Lærer: Ja, men klarer dere lage en, en lage, ja klarer dere lage en generell formel for dette?
452. Nora: Er ikke det noe fire opphøyd i noe her eller ikke fire du skal opphøye. Men du skal opphøye i noe, det er det jeg tenker
453. Lærer: Ja
454. Nora: Du skal, du skal finne roten av det ikke sant, også opphøye i noe greier</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Lærerens hint eller veiledning støtter elevene i produktivt strev med å bygge forståelse og engasjere seg i matematiske praksiser.</td></tr>
</table>

		455. Lærer: Hvis du ser på en to gange to for eksempel 456. Olivia: Ja. Det er en to gange to 457. Lærer: Ja sant to gange to. Også vist vi sier at den første der den er a, hva kan vi si om de andre her da? 458. Olivia: Da er det a gange a, og b gange b 459. Nora: Da er det a gange a, og a og så b i andre 460. Lærer: Hvis vi har, så har du da. Hvis vi ser på skjemaet vårt, hva vil den ved siden av der den være? Den vil være a? Se på dette her, den vil være a pluss en. Er dere med på den? 461. Nora: Åja sånn ja 462. Olivia: JA 463. Lærer: Hvis vi setter, hvis vi sier her da. Sånn da vil den være a og a pluss en, hva vil den under der være? 464. Lærer: $ <table><tr><td>a</td><td>a + 1</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>$ 465. Olivia: Den vil være b også b pluss en 466. Lærer: Ja. Jeg ville fortsatt brukt a. Tenk litt. Kun med uttrykt til a. Utfordring. Skikkelig, skikkelig utfordring 467. Olivia: A pluss ti? 468. Lærer: A pluss ti og? 469. Olivia: A pluss elleve. 470. Lærer: A pluss elleve ja. 471. Olivia: Ja. 472. Lærer: Det vil gjelde for alle. Vil det ikke det? Så prøver, så setter, setter dere inn noen tall for det 473. Nora: Hva sa du? Skal vi regne ut ifra? 474. Lærer: Med det som er der 475. Olivia: Det blir da en, så blir det a pluss ti 476. Lærer: Ja 477. Olivia: Så blir det a pluss elleve 478. Nora: $ <table><tr><td>a</td><td>a + 1</td></tr><tr><td>a + 10</td><td>a + 11</td></tr></table>$ 479. Lærer: Ja, sett inn noen, sett inn noen tall her nå. Så se om det funker med den der. Så prøver dere å gange den ut. Sånn som vi har ganget, sånn som dere har ganget det der sant. Fire gange tjueseks og seks 480. Oskar: A pluss en gange a pluss ti, i parentes

		481. Lærer: * Okei, da tar vi et par minutter til. *
		482. Olivia: A pluss en?
		483. Oskar: Ja a, nei. Gange a
		484. Olivia: Vi kan jo egentlig ta a pluss en gange a pluss ti. Minus a gange a pluss elleve
		485. Olivia: $ (a + 1 • a + 10) – (a • a + 11) $
		486. Olivia: Hvis det gir mening?
		487. Nora: Det vil
		488. Olivia: Hæ?
		489. Noah: Jeg tror ikke vi kan ta pluss når den er inni parentesen? Da blir det a pluss en
		490. Olivia: Da må vi gjøre. Det gir ikke helt mening fordi det ville blitt det samme
		491. Nora: Bare det. Dette er ikke en formel
		492. Olivia: Nei nei, dette er bare det jeg har skrevet
		493. Nora: Men formelen må være noe som a, pluss elleve opphøyd i. Nei jeg vet ikke
		494. Oskar: Går det greit?
		495. Olivia: Nei, jo eller vet ikke
		496. Nora: A pluss en opphøyd i elleve, nei
		497. Olivia: Hæ?
		498. Nora: Det går ikke oppi hjernen min
		499. Olivia: Nei, ikke min heller. Dette med funksjoner å finne funksjoner, det er det verste jeg vet

Læreren kommer bort til elevgruppe 2, og stiller et spørsmål [441] som inviterer elevene til å argumentere for sine tanker. Dialogen [411–499] engasjerer hovedsakelig to av gruppemedlemmene sammen med læreren, men Oskar bidrar også med enkelte utsagn. Elevene blir først invitert til å forklare hva de har kommet frem til [422–450]. Her har de funnet differansen til alle kvadratene, og funnet økningen mellom differansene til de ulike kvadratene (Figur 13). De har dermed observert at økningen til hver differanse øker med 20. Denne oppdagelsen forteller Nora om i dialogen med læreren [450–479], dermed utfordrer læreren gruppen til å lage en generell formel (Modell 6) for økningen. Gruppen har allerede funnet konstantleddet fra første kvadrat som har differanse 10 – uten at de er klar over det – og stigningen med -20x. Nora [452] begynner å utforske tanken om variabel opphøyd i «noe», men blir veiledet bort fra det manglende leddet ($10x^2$) i funksjonsuttrykket (Modell 6). Læreren velger å gi elevgruppen hint [457] om å benytte seg av variabelen a for det første sifferet i prosedyren. Dermed velger læreren [455–479] i denne dialogen å gi elevene løsningen på hvordan de skal tolke 2 x 2 kvadratet med bruk av generalisering (Modell 2). I denne delsekvensen [451–499] kan det virke som elevene blir forvirret med tanke på de to ulike utfordringene de fikk fra læreren. Først blir de bedt om å finne en generell formel [451] for løsningen deres, og deretter blir de bedt om å generalisere differansen [457] fra 2 x 2 kvadrat. Olivia [485] noterer den generaliserte prosedyren på tavlen. Nora og Olivia [484–499] opplever tydelig frustrasjon med å kunne utforme den generaliserte prosedyren om til et funksjonsuttrykk. Derimot kan man se fra Figur 13 at denne gruppen har kommet langt i utforskningen av oppgaven, og møter fortsatt kognitive utfordringer som tilrettelegger for ulik progresjon i samme oppgave. Gruppens løsning vil jeg komme tilbake til i kapittel 4.1.5 som analyserer oppsummeringen av undervisningstimen.



Figur 14: Problem A – Elevgruppe 2

4.1.2.2 Problem B – Hvor mange tannpirkere i trekanten?

I undervisningstimen med problem B analyseres et utdrag fra sekvensen B2:31–156 (se Tabell 13) hvor elevgruppe 2 prøver å utforske oppgaven som er beskrevet i kapitel 3.4.2.

Tabell 13: Kognitive krav (B2:31–156)

Kognitive krav I hvilken grad støttes elevene i å gripe fatt i og forstå matematiske begreper		
Nivå	Beskrivelse	Observasjoner
1	Klasseromsaktiviteter er strukturert slik at elevene stort sett bruker memorerte prosedyrer og/eller arbeider med rutineøvelser.	
2	Klasseromsaktiviteter tilbyr muligheter for konseptuell rikdom eller problemløsningsutfordringer, men undervisningsinteraksjoner har en tendens til å "veilede bort" utfordringene, og fjerne muligheter for produktivt strev.	**<u>Utdrag fra B2:31–156</u>** 75. Lukas: Det er jo ikke sånn at vi kan telle slik at det blir to hundre og femti fordi vi har jo brukt noen allerede. 76. Olivia: Jo, selvfølgelig kan vi det? 77. Lukas: Vi kan jo ikke det fordi det er jo ikke to hundre og femti 78. Olivia: Ja, men se der er det tre, der er det seks, der er det ni stykker og der er tolv sant? 79. Lukas: Ja, så får vi 80. Olivia: [Også fortsetter vi og legger alt til sammen, frem til vi får to hundre og femti] 81. Lukas: To hundre og femti, at det blir en etasje eller at det blir to hundre og femti på en rekke? 82. Olivia: Nei, til sammen 83. Lukas: Jaja, men hvordan finner vi ut hva det blir til sammen da? Fordi til sammen her så er det jo tolv. 84. Olivia: Nei 85. Emil: Vi kan jo bare bruke kalkulator så finner vi ut av det, det går fint det. 86. Olivia: Se da, en, to, tre det er tre stykker. En, to, tre, fire, fem, seks, her er det seks stykker. 87. Lukas: [Ja] 88. Olivia: En, to, tre, fire, fem, seks, syv, åtte, ni her er det ni. 89. Lukas: Jaja 90. Olivia: Ja, ikke sant. Så legger vi på femten fordi det er neste 91. Olivia: $ 15 18 $ 92. Lukas: Må jo huske på at fra bare de to første etasjene, selv om det står seks, så har vi allerede brukt ni. Vi har brukt ni til sammen 93. Olivia: Ja, også har vi to hundre og femti 94. Lukas: Ja

		95. Olivia: Det er mye, femten, atten, tjueen, tjuefire, tjuesyv 96. Olivia: $ 21 24 27 $ 97. Lærer: Men hvis dere ser, er det så mye som vi bruker totalt? 98. Lukas: Nei, det er ikke det! 99. Lærer: Eller er det hvor mye han øker med for hver gang? 100. Lukas: Det er hvor mye den øker med for hver gang. Det er jo bare en etasje 101. Olivia: [Nei det er det ikke, det er det ikke. Det er hvor mange fyrstikker det kommer til å være neste, for det øker med tre.] 102. Lærer: Ja det er hvor mange sant, og det er hvor mye han øker, for han øker da med innhold på tre sant. 103. Olivia: [Ja] 104. Lærer: I tillegg 105. Lukas: [Men hvis, fordi] 106. Olivia: Og det hvis du tar, tar også se for oss de neste radene så kommer til å øke med tre. 107. Lærer: Ja 108. Olivia: Også plusser vi det sammen og så ser vi hvor mange rader til vi må ha, før vi har to hundre og femti 109. Lærer: Ja det kan være en måte å gjøre det på sant. 110. Lukas: Men hvis du ser da? 111. Lærer: Men nå ser du Olivia at noen ikke er helt enig, så nå må du forklare litt hva tenker, hva tenker en her nå? Prøv å forklare en til sant. Ja få en dialog på det. 112. Lukas: Fordi her begynner det å gå på avveie. Fordi den første gjelder for den da, men ja 113. Emil: Skal vi bare se på de andre, se på hva de har gjort? 114. Lukas: Men det går jo ikke med disse lengre her 115. Olivia: Vi må bare tenke at det øker med tre, ikke sant? Så det er ikke seks, ikke sant? Tre av de er ikke derfra. 116. Lukas: Nei 117. Olivia: Nei 118. Lukas: Nei, de er ekstra 119. Olivia: Akkurat 120. Lukas: Så det er jo ni, og det blir jo atten
3	Lærerens hint eller veiledning støtter elevene i produktivt strev med å bygge forståelse og	

	engasjere seg i matematiske praksiser.	

Lukas starter med å tegne trekanten (se Figur 12) med fyrstikker som de ble vist i videosnutten (Figur 9A). Videre nummererer han etasjene med verdiene 3, 6, 9, 12. Følgelig fra deres strategi på tavlen (Figur 12) begynner en diskusjon [75–96] om hvordan denne utfordringen kan løses. Lukas [75] resonnerer seg frem til at de ikke kan fortsette med deres strategi helt ned til 250 tannpirkere på grunn av at de skriver ned hver etasjes verdi, og dermed vil ha for mange etasjer. Dermed har de allerede brukt flere tannpirkere enn verdien per etasje siden disse skal legges sammen. Derimot har Olivia [76] en plan som ikke er helt i samsvar med Lukas sitt resonnement. Hun hevder [76–80] at de selvfølgelig kan fortsette rekken deres med å notere ned antall tannpirkere i hver etasje, for så å legge det til sammen etterpå frem til de får 250. Lukas [81] stiller således et oppfølgingsspørsmål for å sjekke om de tenker det samme. Han spør om de skal lage en liste med etasjer helt ned til 250, eller om det skal bli 250 på en rekke. Disse alternativene til Lukas tolkes av Olivia som det samme, og hun fremhever [82] at det skal være summen av etasjene. Videre i diskusjonen [83–96] prøver gruppen å finne ut av hvordan de kan finne summen av etasjene, og Emil [85] påpeker at de kan benytte seg av kalkulator i prosessen. Olivia [86–88] peker på de ulike etasjene i modellen deres (Figur 12) og forklarer at i disse etasjene så er det, 3, 6, og 9 tannpirkere. Videre bygger Lukas [92] på hennes forklaring, og påpeker at selv om første etasje har 3 tannpirkere, og andre etasje har 6, så har de brukt 9 tannpirkere totalt på de to etasjene. Følgelig har gruppen kommet til en enighet om hvordan de skal tolke utfordringen, og løser oppgaven ved å notere ned [96] økningen per etasje. Læreren har observert elevgruppe 2 diskutere, og ønsker en forklaring [97] på deres prosess. I dialogen med læreren [97–111] har Olivia [101] utfordringer med å sette seg inn i hvordan Lukas [100] forklarer, selv om de forklarer det samme. Før læreren kom til elevgruppe 2 utforsket de sammen, og ble enig om en korrekt løsningsmetode, derimot strever elevene med å følge hverandres argumentasjoner i samtale med læreren. Elevene har samme løsningsstrategi, men forklare dem på ulike måter som er utfordrende for gruppemedlemmene. For å komme til en enighet om hvordan de skal løse oppgaven ytrer Emil [113] muligheten for å ta inspirasjon fra de andre vertikale tavlene. I denne dialogen benytter læreren [97–111] seg av ledende spørsmål som kan være årsaken til frustrasjon blant enkelte av gruppemedlemmene. Lukas og Olivia [112–120] klarer etter hvert å bli enig – for andre gang – om hvordan oppgaven skal tolkes, og at de må huske å legge sammen alle etasjene for å finne ut når det er blitt benyttet 250 tannpirkere. Lukas [120] begynner dermed å legge sammen alle etasjene med bruk av kalkulator, som resulterer til at elevgruppen klarer å komme frem til 12 etasjer (Figur 12).

4.1.2.3 Oppsummering av undervisningstimene

I en undervisningstime kan elevers deltakelse og oppgavers/aktiviteters kompleksitet variere, dermed er det en styrke innenfor TRU rammeverket at søkelyset er på flere undervisningstimer. Analysene vedrørende hvilke essensielle faktorer som bør inkluderes illustrert i Figur 15 drøftes videre. Som tidligere nevnt kan tiden elevene har til rådighet legge føringer for graden av elevenes produktive strev, denne faktoren påvirket flere av elevgruppene i Problem B. I oppsummeringen av undervisningstimen gir læreren uttrykk for at elevene skulle fått mer tid på grunn av deres produktive prosess. Problem A og B viser hvordan elevene deltar i elevgrupper hvor det oppfattes som trygt å si noe feil, og undersøke antakelser som ikke fører frem til ønsket resultat. Gjennom mine analyser av de «få» elevgruppene til denne studien var det relativ jevn fordeling av elevbidrag innad i gruppene. Det eksisterte ulike alternativer for å kunne bidra til gruppens progresjon ved blant annet muntlig deltakelse, skriftlige bidrag og anvendelse av kulturelle verktøy. Gruppene veksler på hvem som til tider skrev på tavlen. Enkelte elever var mer muntlig aktive, mens andre elever benyttet kalkulator for å sjekke eller finne løsningen til en utregning, og dermed støtter elevene som tar mer muntlig ansvar. Elevene gis også mulighet for å regulere sin egen prosess gjennom andre elevgruppers vertikale tavler. Ved å benytte vertikale tavler ser elever til hverandres arbeid for å innhente inspirasjon eller anerkjenne deres antakelser. Denne egenskapen ved vertikale tavler ble observert i noen få elevgrupper, men det kom frem fra analyseringen av datamateriale at elevene hadde utviklet en holdning til at dette kunne oppfattes som «juks». Ved å benytte vertikale tavler tilrettelegger det for en oversiktlig situasjon for læreren som i denne studien observeres til å veilede elevgruppene som står fast, og gir spørrende spørsmål som tilrettelegger for elevenes utvikling i resonnering og argumentasjon. Analysene fra datamaterialet identifiserer også kjennetegn til et utviklende tankesett (se Tabell 1), der elevene viser utholdenhet i møte med utfordringer og utforsker andre antakelser i møte med motgang.

Figur 15: Oppsummering kognitive krav (Schoenfeld et al., 2023)

4.1.3 Rettferdig tilgang til matematisk innhold: Får jeg delta i meningsfull matematisk læring?

Det norske skolesystemet legger tydelige føringer for hvordan lærerne praktiserer pedagogisk skjønn ved opplæringens verdigrunnlag. Det trekkes blant annet frem at skolen skal ha søkelys på barnets beste, og arbeide for likeverd og likestilling (Kunnskapsdepartementet, 2017). Matematikk er et fag som oppleves utfordrende for flere, både unge og voksne. Lærerens didaktiske valg er således av sentral verdi vedrørende hvordan eleven inkluderes i rettferdig matematisk utvikling. Følgelig ble lærerens refleksjoner i post-intervjuet om hvilke tilpasninger han har gjort som matematikklærer – for å kunne gjøre matematikken tilgjengelig for alle elevene – interessante.

Lærer: Lav inngang som jeg nevnte tidligere er jo en av de tingene der. En annen ting er jo om en kan slippe til at vi har en slags organisering på at en snakker litt etter tur på gruppene i disse samtalene rett og slett for å slippe til. For en ser ofte det at de elevene som sliter syns også det er skummelt å ta ordet i en gruppe for de føler at de. Vanligvis hvis en har grupper på tre så er det kanskje to som samarbeider godt også er det en som henger litt etter. Så det å kunne strukturere den kommunikasjonen som er på gruppene kunne vært en måte å gjort det på.

Læreren er tydelig på hvordan strukturen til oppgavene som brukeres påvirker tilgjengeligheten for elevene. Dette kommer også frem i tidligere samtaler med læreren gjengitt i kapittel 4.1 hvor han nevner oppgaver med økende kompleksitet. Dermed er læreren oppmerksom på at en oppgave skal kunne invitere alle elevene inn i matematisk tenkning, men likevel kunne utvides i kompleksitet. Han trekker også frem nivåbaserte oppgaver i digitale læreverk som didaktisk differensiering (kap. 4.1.4) for å utfordre og skape mestring for elevene. På denne måten kan man tilby rettferdig tilgang til matematikken. Følgelig kan hver elev utvikle seg, og delta i meningsfull matematikk. I løpet av samtalen blir læreren også spurt om hvilke ressurser elevene har hatt tilgang til i undervisningstimene.

Lærer: De har jo fått bruke alle hjelpemidler egentlig. Så de har jo både fått lov til å bruke internett, kalkulator pleier jeg å la de få bruke rett og slett fordi det ikke er den gangetabellen vi kjører gjennom her. De skal bruke den matematikken som eksisterer og det de sitter inne med på en god måte og samle det. Det er jo litt tanken rundt disse gruppene, å kunne samle litt ulike nivåer inn i en gruppe.

Student 2: Er det noen andre ressurser vi kunne ha ledet de til å bruke?

Lærer: Du spør godt da. Det er det helt sikkert, som en ikke har tenkt over også. En kunne nok kanskje vært enda mer. Av og til så spør de, kan vi bruke det og det og det. Så en kunne nok kanskje vært enda mer tydelig på at det fritt spillerom når det kommer til bruk av hjelpemidler i alle fall i den delen der.

Digital kompetanse er også en av de grunnleggende ferdighetene elevene skal utvikle innen matematikk. Dermed er det ønskelig at elevene får anledning til å benytte seg av disse kulturelle redskapene. Læreren gir innledningsvis muntlig beskjed til hele klassen i undervisningstimene denne studien analyserer om at det er lov å bruke kalkulator. Analysene av elevgruppene observerer mange som bruker kalkulatoren, men det er ingen som benytter seg av geogebra eller programmering for å løse disse utfordringene. Fra lærerens egne refleksjoner virker det heller ikke som han er klar over hvilke kulturelle verktøy som kunne benyttes, selv om elevene får fritt spillerom.

Tabell 14: Oversikt over antall ytringer

	Problem A		Problem B	
Elevgruppe 1	Oliver (19) Lærer (40)	Sofie (54) Emma (90)	Lærer (41) Oskar (48)	Nora (61) Emma (73)
Elevgruppe 2	Lærer (61) Noah (74) Oskar (75)	Nora (120) Olivia (202)	Lærer (28) Emil (33)	Olivia (64) Lukas (84)

Videre i intervjuet reflekterer også læreren rundt ambisjonene om å gjøre elevene til kreative tenkere. Fra Tabell 14 er det en relativ jevn fordeling blant deltakelse i gruppene. Undervisningsøkten med problem A analyserer elevgruppe 1 fra datasettet med skjevest fordeling. Dermed ønsker denne studien å analysere hvilke tilrettelegginger læreren gjør for å inkludere alle elevene i denne gruppen fra et utdrag ved sekvensen A1:122–162 (Tabell 15).

Tabell 15: Rettferdig tilgang til matematisk innhold (A1:122–162)

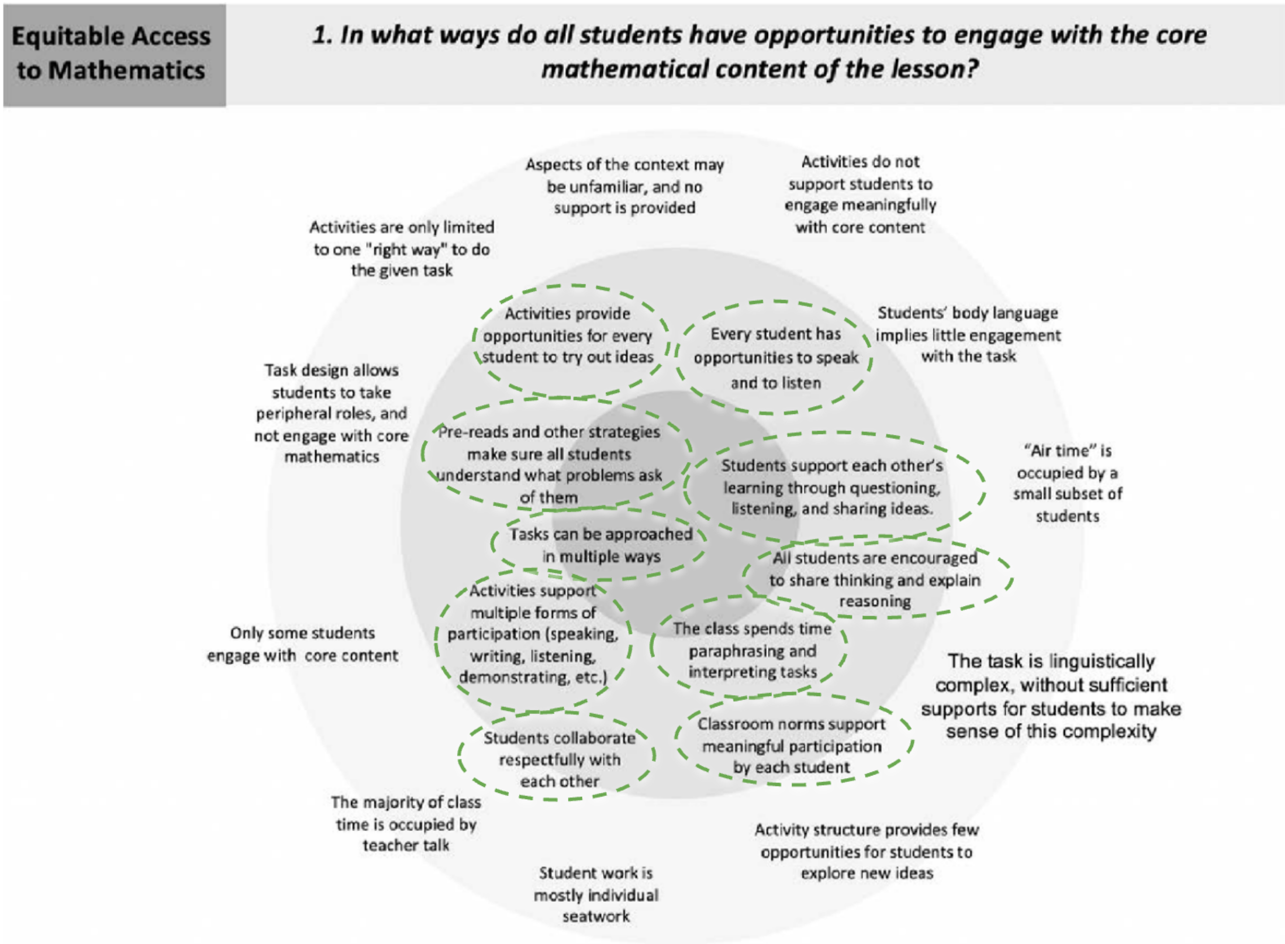
Rettferdig tilgang til matematisk innhold I hvilken grad støtter læreren tilgang til innholdet i undervisningstimen for alle elever.		
Nivå	Kode	Observasjoner
1	Det er forskjellig tilgang til eller deltakelse i det matematiske innholdet, og ingen tilsynelatende forsøk på å løse dette problemet.	
2	Det er ujevn tilgang eller deltakelse, men læreren gjør en viss innsats for å gi matematisk tilgang til et bredt spekter av elever	**<u>Utdrag fra A1:122–162</u>** 122. Lærer: Kan vi finne et uttrykk, en generell formel. Hvis jeg kommer inn og sier hva er summen i en åtte ganger åtte for eksempel? Kan vi lage en formel for det? Hva minner dette her om egentlig? Kvadratsetningene? Det er et lite tips her, okei. 123. Emma: Hvordan kan vi bruke kvadratsetningene til dette? 124. Lærer: Kan dere lage en generell formel for det? Ta med Oliver inn i tenkningen her 125. Sofie: Vi skal lage en syk formel av dette. For eksempel den der a pluss b med parenteser opphøyd i andre 126. Oliver: Vi kan ta x pluss tjue 127. Oliver: $x + 20$ 128. Sofie: Det går an
3	Læreren støtter aktivt og oppnår til en viss grad bred og meningsfull matematisk deltakelse; **ELLER** det som ser ut til å være etablerte	

	deltakelsesstrukturer resulterer i slikt engasjement.	129. Emma: Nå går det 130. Sofie: Jeg har det. For hver økning, blir det ikke x i andre pluss tjue 131. Sofie: $ x^2 + 20 $ 132. Emma: Jo, x i andre. Da blir det, det tallet istedenfor x, så da blir det åtte ganger åtte som er sekstifire, pluss tjue. 133. Sofie: Hehe, nei fordi 134. Oliver: [Hva mener dere med x ganger x?] 135. Sofie: Vi tar x ganger x 136. Emma: Å det er x opphøyd i x 137. Sofie: Opphøyd i x? Ja der har du den, opphøyd i x

I denne gruppen er det Emma med 90 ytringer og Sofie med 54 som utforsker sammen, men strever med å inkludere Oliver. Dermed veileder læreren [124] elevene når han utfordrer [122] dem videre i oppgaven. Etter han har oppfordret Emma og Sofie [124] til å ta med Oliver i «tenkningen» begynner gruppen å samarbeide bedre. Oliver bidrar med sine tanker [126] og skriver dette ned [127]. Hans forslag valideres av jentene [128–133], og bygges videre på. Oliver spør også jentene om hva de mener [134], som prøver å forklare [135–137] hvordan de tenker. Tabell 14 viser hvordan elevgruppene bidrar sammen i relativ høy grad, med antall lærerutsagn som rangeres til nedre halvdel i alle analysene for denne studien.

4.1.3.1 Oppsummering av undervisningstimene

Elevenes matematiske identitet kan som tidligere nevnt påvirke deres fremtidige liv i høy grad. Dermed må det være en målsetning for matematikklæreren og tilrettelegge for alle elevers matematiske deltakelse. Oppsummerende analyse fra begge av disse to undervisningsøktene som illustrert i Figur 16, viser hvordan det tilrettelegges for aktiviteter som gjør at elevene kan utforske antakelser, og inkluderer blant annet flere løsningsmetoder. Problem A og B tilrettelegger også for meningsfull bruk av kulturelle verktøy som beskrevet i kapittel 4.1.1 og 4.1.2, uten at disse ble benyttet av deltakerne i denne studien. Ved å dele inn elevgrupper i tre per gruppe blir elevene oppfordret og veiledet til å samarbeide på meningsfulle måter ved å bidra muntlig og lytte til hverandre. De utforsker ideer sammen og bygger på hverandres antakelser, elevene er også driverne for korrekt bruk av sentrale matematiske ideer med læreren som en veileder.



Figur 16: Oppsummering rettferdig tilgang til matematisk innhold (Schoenfeld et al., 2023)

4.1.4 Autonomi og identitet:
Får jeg forklare og presentere ideene mine? Blir disse anerkjent?

I henholdsvis kapittel 4.1.1 – 4.1.3 presenterer mine funn høy elevaktivitet og samhandling i problemene denne studien undersøker. Det er derimot signifikant tidsforskjell vedrørende elevenes utforskning på de vertikale tavlene, og oppsummering i studiens to undervisningsøkter (Se Tabell 3). Læreren poengterer derimot under oppsummeringen av problem 2 at elevene gjerne skulle fått mer tid. Flere av elevgruppene var kommet godt i gang, men hadde brukt «mye» tid på å forstå hvordan figuren økte. Delsekvens A1:122–162 (se Tabell 15) illustrerer hvordan læreren bidrar til det høye engasjementet ved å tilrettelegge for aktivitet blant gruppemedlemmene, med inkluderende verdier og åpne spørsmål. Dermed var det interessant for studien å undersøke hvilke refleksjoner læreren hadde angående tilrettelegging for elevenes autonomi og produktive strev, og hvordan bruken av vertikale tavler kan fungere som et pedagogisk verktøy.

Lærer: Vi bruker jo læreverk som campus også har vi brukt kikora en del. Vi har også et kompetanseskjema som jeg lager til de når vi starter hvert emne, som er gradert i tre, ut ifra hvor de føler de er selv. Så det kommer jo inn der at de får velge litt selv hvor de er, og de får evaluert seg selv. Hvor føler jeg at jeg er, og hva kan jeg strekke meg etter. Så det er mye, skal ikke kalle det selvstudie. Men jeg pleier å starte øktene med en gjennomgang, og en diskusjonsoppgave for å få de litt «on track», også får de velge litt selv hvor de føler at de står, og hva de ønsker å jobbe med. Så det er den største valgmuligheten ligger, også har en elever som er sterke som ønsker større utfordringer, og da har en som campus hvor en har muligheter til å dele mer avansert matte. Har en del som vil over på studiespesialisering og ønsker T matte. Da kan en kjøre inn litt av det i tillegg slik at en nesten får starte litt. Det handler om å få noe å utfordre seg på for mange for å holde den interessen og motivasjonen for faget. Så det er noe jeg har tatt i bruk en del nå, i alle fall i 10 klasse.

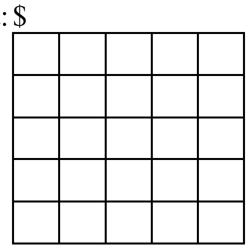
(...)

Lærer: Nei det er jo mye på samhandling. Det å gjøre det mer visuelt i stedet for hvis en sitter og diskuterer oppgaven for eksempel, så er det lavere terskel for å få noe visuelt på disse tavlene. Det er lettere for alle å være deltakende.

Læreren informerer om bruk av nivådelte oppgaver med ulike digitale læreverk som er organisert i et kompetanseskjema. Dermed kan elevene selv ta eierskap i planleggingen av hvilke utfordringer de ønsker, og justere seg deretter. Klasseromsnormene rundt hva som gjelder i dette klasserommet blir forsterket når læreren fortsetter å reflektere rundt matematisk tenkning og samhandling. Han trekker også frem motivasjon, og kobler det opp til produktivt strev, det at elevene skal ha noe «å utfordre seg på». Læreren argumenterer for at de vertikale tavlene bidrar med å øke samhandling og deltakelsen for alle elevene. Han poengterer at det er en styrke når elevene skriver på vertikale tavler siden det blir mer visuelt, og dermed lettere å engasjere seg i sammen som en gruppe – hvor de bygger på hverandres styrker – og i helklassesamtaler. Videre i intervjuet fremheves også bruken av «*gallery walk*» som en pedagogisk metode for å få elevene til å prate om hverandres arbeid. Der den respektive elevgruppen ikke kan beskrive hva de har gjort på sin egen tavle, men følgelig andre elevgrupper må sette seg inn i hvordan de ulike elevgruppene har tenkt og forklare med egne ord.

Denne studien skal videre analysere et utdrag fra A2:176–422 (se Tabell 16) hvor elevgruppe 2 leter etter sammenhengen mellom differansene for de ulike n x n kvadratene.

Tabell 16: Autonomi og identitet (A2:176–422)

<table>
<tr><th colspan="3">Autonomi og identitet
I hvilken grad er elevene kilden til ideer og diskusjon om dem? Hvordan er elevenes bidrag innrammet?</th></tr>
<tr><th>Nivå</th><th>Kode</th><th>observasjoner</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Læreren setter i gang samtaler. Elevenes taletid er korte (én setning eller mindre), og begrenses av det læreren sier eller gjør.</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Elevene har en sjanse til å forklare noe av tankegangen sin, men læreren er den primære driveren for samtaler og avgjør om det er korrekt. I klassediskusjoner blir ikke elevenes ideer utforsket eller bygget på.</td><td rowspan="2"><u>Utdrag fra A2:176–422</u>
187. Nora: Jeg bare tenker jeg nå. Jeg bare tenker
188. Olivia: Men hvor får du tretti i fra?
189. Noah: Forskjellen i fra dem
190. Nora: [Forskjellen på svarene]
191. Noah: Altså fra førti til nitti, så er det femti
192. Oskar: Okei, skal vi prøve fem ganger fem da?
193. Noah: Ja, skal vi ta andre veien nå?
194. Oskar: Skal vi ta motsatt nå?
195. Noah: Det blir det samme uansett
196. Olivia: $\$$

$\$$
197. Oskar: Så ni ganger førtifem
198. Olivia: Ni ganger førtifem
199. Olivia: $\$_1$ (9 • 45) –
200. Noah: Firehundre og fem. Fire, null, fem
201. Olivia: $\$_2$ 405
202. Oskar: Fem ganger førtini
203. Olivia: Gange førtini
204. Olivia: (5 • 49) $\$_1$
205. Noah: To, fire, fem
206. Olivia: – 245 $\$_2$
207. Olivia: Å forskjellen er førti. Nei, det er det ikke
208. Nora: Nei, det er det ikke. Det er sytti
209. Olivia: To hundre?
210. Nora: [Det er sytti]
211. Noah: Hundre og seksti er forskjellen
212. Olivia: Er det ikke to hundre da?
213. Oskar: [Er det et nitall eller firetall?]
214. Noah: Det er hundre og seksti
215. Nora: Hundre og seksti, det er jo sant</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Elevene forklarer ideene og resonnementene sine. Læreren kan tilskrive eierskap til elevenes ideer i utstillingen, OG/ELLER elevene reagerer på og bygger på hverandres ideer.</td></tr>
</table>

		216. Olivia: Det er firetall 217. Oskar: Det er firetall 218. Noah: Ja, det er hundre og seksti i forskjell da 219. Nora: Det økes med tretti, det økes med femti, det økes med sytti, neste økes med nitti. Neste økes med hundre og ti (peker på de ulike “kvadratene”) 220. Olivia: Nei, er det ikke to hundre da? 221. Nora: Nei 222. Olivia: Hæ? 223. Noah: Hundre og seksti 224. Nora: Tre, fem, syv 225. Olivia: Firehundre og fem minus to hundre og førtifem 226. Noah: Det er HUNDRE OG SEKSTI 227. Olivia: HUNDRE OG SEKSTI? 228. Noah: Ja 229. Olivia: HVORFOR ER DET HUNDRE OG SEKSTI? 230. Nora: På grunn av at det er to hundre og førtifem, se der er det 231. Olivia: Ja? Og der er det fire hundre og fem 232. Noah: Hundre og seksti 233. Lærer: * [Etter hvert som dere jobber dere oppover nå på tre gange tre, fire gange fire og opp igjennom, se litt er det, går det et mønster i de svarene en får? Okei.] * 234. Nora: Det er to hundre ikke tre hundre. Det er en hundre der imellom. Trehundre minus to hundre og førtifem er femtifem. Hundre pluss femtifem er hundre og femtifem, pluss fem er hundre og seksti. Å det betyr at det er tre i forskjell der, det fem i forskjell der, det er sju i forskjell der, nei, jo det er sju i forskjell her. Det betyr at neste vil være nitti i forskjell. Så neste svar det er, neste svar det er, to hundre og femti i forskjell 235. Lærer: Bra Nora. Nå ser du et mønster i det, sant? 236. Nora: Så neste svar vil bli tre hundre og seksti i forskjell 237. Lærer: Ja, men er du hundre prosent sikker? 238. Olivia: Ja, er du det? 239. Nora: Det er det, det har vist der 240. Lærer: Det er det du har vist til nå, utforsk det, se, klarer en det, okei 241. Noah: Vi kan se da 242. Oskar: Da tester vi. Førtien ganger nittiseks, dette svaret kommer til å bli negativt

Nora [187] gir tydelig uttrykk for at hun utforsker og «bare tenker» til de andre elevene i gruppen. Tidligere har elevene gjennomført algoritmen for kvadratene: 2 x 2, 3 x 3 og 4 x 4. Nora [187] prøver å identifisere mønsteret mellom differansene, som Olivia [188] ønsker en forklaring til. I denne sammenheng samarbeider elevgruppe 2 meget godt, og Noah [189–191] støtter Nora´s antakelse ved å forklare [191] hvordan hun har tenkt. Videre tar Oskar [192] en «lederrolle» for å sikre gruppens progresjon, slik at gruppen ikke bruker for mye av tiden på en enkelt del. Noah [193] og Oskar [194] har observert at differansen blir negativ, og lurer således på om de skal gjennomføre algoritmen «andre veien». Kapittel 4.1.1 analyserte elevgruppe 1 som var i en misoppfatning vedrørende likhetstegnet, i denne analysen (Tabell 16) ytrer Noah [195] samme tolkning. Han hevder differansen blir den samme uavhengig av hvilken rekkefølge gruppen velger diagonalene til algoritmen. Derimot gir den korrekte bruken av algoritmen et økende mønster, og motsatt algoritme gir reduserende mønster. Misoppfatningen blir ikke tatt tak i av elevgruppene eller læreren under denne undervisningstimen.

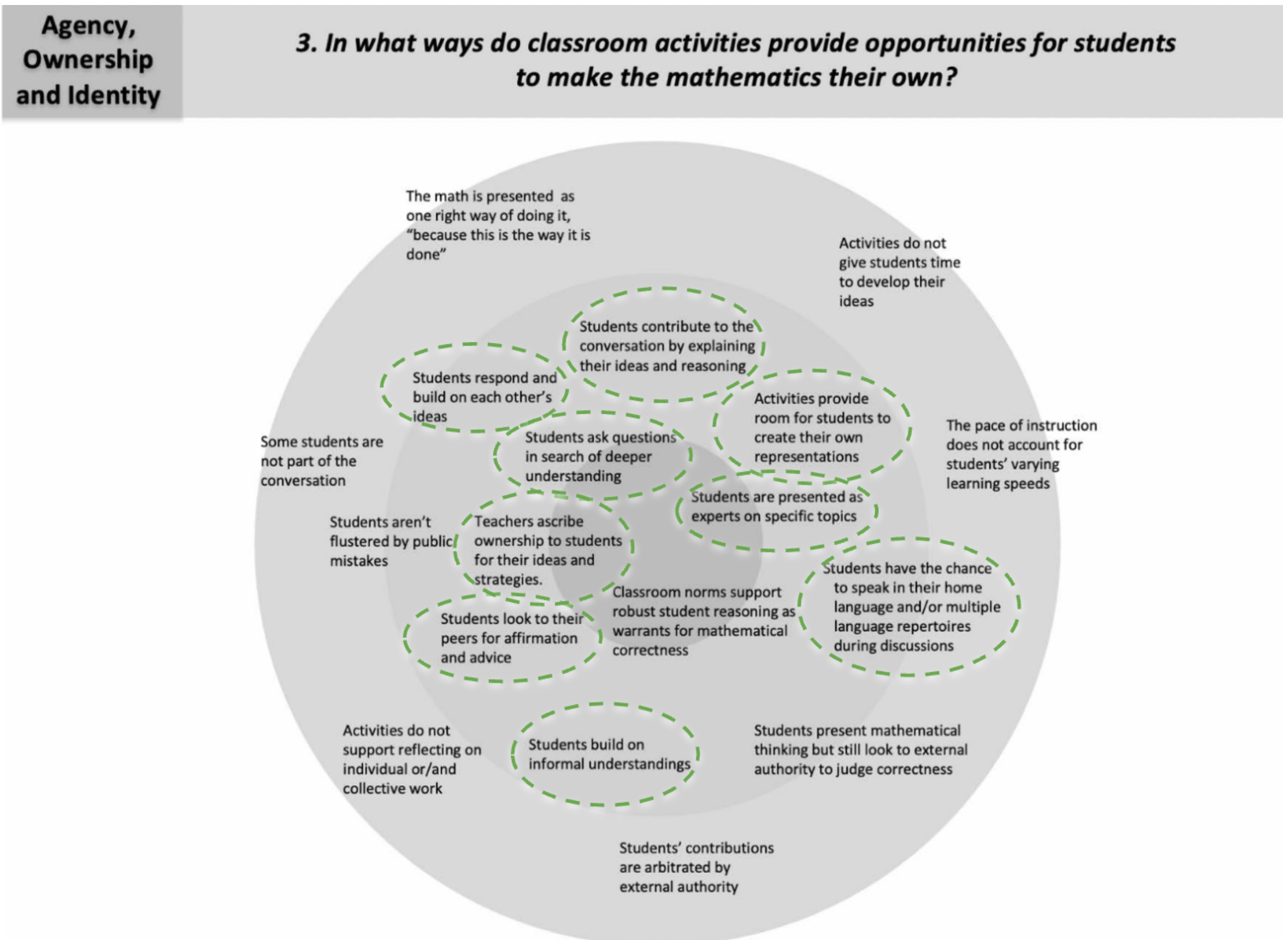
Videre visualiserer Olivia [196] ved å tegne hvilket kvadrat (5 x 5) gruppen utforsker (se Figur 13). Følgelig blir det lettere for andre elever å argumentere i forbindelse med elevgruppe 1`s vertikale tavle under hellkassesamtale. Delsekvensen A2:197–234 (se Tabell 16) illustrerer hvordan elevene samarbeider vedrørende løsningen av 5 x 5 kvadratet. Oskar [197] tar ansvar for å velge ut tall som skal benyttes med den korrekte algoritmen (Modell 11). Olivia [197–198] anerkjenner Oskar`s valg ved å gjenta tallene [1], og skriver dem ned på tavlen. Videre støtter Noah [200] gruppen ved å benytte seg av kalkulator, og forteller hva produktet ble [2]. Han forteller svaret på to ulike måter [200], først som et heltall, deretter spesifiserer han sifrene i plassverdisystemet. Denne prosessen gjentas [202–206] ved andre leddet [2] også. Ettersom algoritmen er gjennomført korrekt, begynner elevene [207–210] å «gjette» seg frem til differansen [3]. Noah [211] benytter kalkulatoren og argumenterer for at differansen er hundre og seksti. Følgelig klarer tre av de fire elevene i gruppen å komme til enighet etter en oppklaring [213–218] av hvilket siffer som er nedskrevet. Olivia [220] er derimot fortsatt ikke helt enig med gruppen, og lurer på hvorfor det ikke blir 200 i differanse. Nora [234] prøver dermed å forklare med først å påpeke at det er hundre mellom firehundre og trehundre. Hun forklarer videre at en kan tenke seg «trehundre minus to hundre og førtifem, er femtifem». Deretter adderes femtifem med hundre, som blir hundre og femtifem, og til slutt må de siste fem legges til som tilsvarer hundre og seksti. Slik prøver Nora [234] å veilede Olivia til å kunne resonnere seg til riktig differanse. Nora [234] er også godt i gang med å undersøke mønsteret mellom differansene, dermed kommer læreren [235] til elevgruppen. Dialogen mellom elevene og læreren [235–242] utfordrer dem til å utforske videre, og etter hvert kunne argumentere for deres antakelse.

1 $$(9 \bullet 45) - (5 \bullet 49)$$
2 $$405 - 245$$
3 $$= 160$$

Modell 11: 5 x 5 kvadrat

4.1.4.1 Oppsummering av undervisningstimene

Fra intervjuene med læreren kommer det tydelig frem at han verdsetter elevenes helhetlige matematiske kompetanseutvikling. Han vektlegger hvordan elevene gis muligheter for resonnering og utforske antakelser. I denne studien kan tiden elevene disponerer til utforskende samarbeid vise antydninger til å være avgjørende. Med bruk av utforskende oppgaver vil følgelig ikke hver idé elevene kommer med være korrekt, og dermed viser resultatene fra Problem B hvor avgjørende det kan være med tilstrekkelig tid. Figur 17 illustrerer hvordan elevenes identitet støttes til å være undersøkende og deltakende i møte med matematiske utfordringer. Læreren fungerer i disse undervisningstimene som en veileder, og tilrettelegger for matematisk utforskning gjennom samhandling i elevgrupper.



Figur 17: Oppsummering autonomi og identitet (Schoenfeld et al., 2023)

4.1.5 Formativ vurdering: Inkluderer klasseromsdiskusjoner min tenkning?

Læreren reflekterte over sine pedagogiske praksiser i kapitlene 4.1.2 – 4.1.4, derav analyserer studien en lærer med en aktivitetspedagogikk. Han tilrettelegger for at alle elevene skal kunne utvikle autonomi med bruk av strukturerte kompetanseskjema, og benytter ulike digitale læreverk – som komplimenterer hverandre – slik at elevene kan oppleve utfordring og mestring. I intervjuene er det gjennomgående høyt fokus vedrørende å utvikle elevenes resonnerings kompetanse, ved blant annet å benytte digitalt dialogverktøy og vertikale tavler. Således ønsket denne studien å trekke frem ulike klasseromsnormer læreren reflekterer over tilknyttet 10.trinns klassen.

Lærer:	Ja, hvilke normer som ligger der, altså de er innforstått med hvordan dette skal fungere. Nå fikk ikke dere se så mye med dette av deling av tilfeldige grupper for eksempel, men der har vi delt inn i helt tilfeldige grupper som de får vite. Det er på en måte litt det med å kunne sirkulere med gruppene hver gang som gjør at de ikke føler seg satt i bås med elever som er flinke eller mindre flinke i forhold til det der. Dere merket kanskje at jeg minnet de på at de ikke skulle sitte mens vi jobber på tavlene. Det er jo også en av tingene som de er innforstått med. Også er det litt det å slippe til alle når en jobber på tavlene, og at diskusjonene og eventuelle uenigheter om hvordan ting skal gjøres som er nøkkelen for å få til de gode øktene. Så vi kombinerer med andre ting. Vi har kjørt en del sånn campus diskusjon, det så en fra en av de andre timene vi hadde, der vi prøver å dyrke ulike måter å tenke på.
Student 2:	Hvilke normer er i klassen i form av produktivt strev og det å gjøre feil?
Lærer:	Vi har jo jobbet litt med det. Vi har en klasse som er rolig. En klasse hvor en nødvendigvis ikke ønsker å ta ordet. Det har vært litt utrygt miljø til tider, så vi har på måte prøvd å jobbe inn mot dette at det ikke er flaut å si noe feil, og på en måte ta ut denne blikkingen og det stresset som ligger der. Og måten er jo å prøve at selv om en får feil elevsvar så prøver en å grave i «hvordan har du tenkt der?» Legitimere deres tanker og ikke bare gå etter den etablerte sannheten og det svaret en ønsker å ha, og åpne litt opp for diskusjon.

Tilfeldige grupper ble ikke benyttet i løpet av studiens tre uker med datainnsamling. Derimot hevder læreren tilfeldige grupper blir praktisert til vanlig med utforskningsoppgaver på de vertikale tavlene. Grunnlaget for å inndele elevene i tilfeldige grupper handler ifølge læreren om elevenes identitetsfølelse, med tilfeldige grupper unngår man at elevene karakteriserer gruppen som «faglig svak» eller «faglig sterk». Analysene fra datamaterialet viser relativt velfungerende grupper, hvor alle deltar på meningsfulle måter – tegner, bruker matematiske symboler, stiller spørsmål, kontrollerer progresjon, benytter digitale verktøy. Læreren fremhever også hvordan han prøver å «dyrke ulike måter å tenke på» gjennom digitale verktøy som blant annet Campus Inkrement og

Kikora tilbyr. Ulike synspunkter og utfordringer vektlegges også under oppsummering av en undervisningstime med vertikale tavler.

Sekvens A2:500–538 (Tabell 17) oppsummerer problem A – Helt i hundre! med en helkassesamtale på 9 minutter. Læreren fungerer som en dirigent for samtalen, mens elevene forteller om deres løsningsforslag.

Tabell 17: Formativ vurdering (A2:500–538)

<table>
<tr><th colspan="3">Formativ vurdering
I hvilken grad er elevenes matematiske tenkning inkludert; i hvilken grad bygger instruksjon på elevenes ideer når de er potensielt verdifulle, eller adresserer misforståelser når de oppstår?</th></tr>
<tr><th>Nivå</th><th>Kode</th><th>Observasjoner</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Studentenes resonnement blir ikke delt eller forfulgt. Lærerens handlinger er begrenset til korrigerende tilbakemeldinger eller oppmuntring.</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Læreren refererer til elevenes tenkning, kanskje til og med vanlige feil, men spesifikke elevers ideer bygges ikke på (når de er potensielt verdifulle) eller brukes til å utforske utfordringer (når de er problematiske).</td><td rowspan="2"><u>Sekvens A2:500–538</u>
500. Lærer: * Okey! Veldig veldig bra jobbet folkens, da kan vi komme litte grann til ro. Hysj! Utrolig, utrolig bra. Da må jeg få oppmerksomheten her. Det gjelder alle selv de som sitter med ryggen til må ha ansiktet mot meg. Så skal (elevnavn) og (elevnavn) skal få lovt å diskutere litt. Hva syns dere om denne oppgaven her? Var det kjekt? *
501. Elev: * (Hører ikke) *
502. Lærer: * Kjempe kjekt. Er det bare for, fordi jeg er mattelærer og det er jeg som har gitt oppgaven til dere eller var det, var det litt spennende? En får utforske litt tall. Utrolig bra samhandling, mye god kommunikasjon syns jeg veldig bra. Skal vi se da begynner vi her bakre gutter ja. Jeg ser jo rundt på tavlene masse, en del som har tegnet, masse utregninger, jeg får litt sånn der sjokk hvert fall når jeg kommer frem på tavlene her utrolig, utrolig mye kreativt, dere er gode altså. Men var det vanskelig? Det første vi gikk igjennom sant. Hvis du flytter deg litt her (elevnavn) så skal vi se.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Læreren oppfordrer elevene til å tenke og påfølgende instruksjoner svare på disse ideene, ved å bygge på produktiv begynnelse eller ta opp nye misforståelser.</td></tr>
</table>

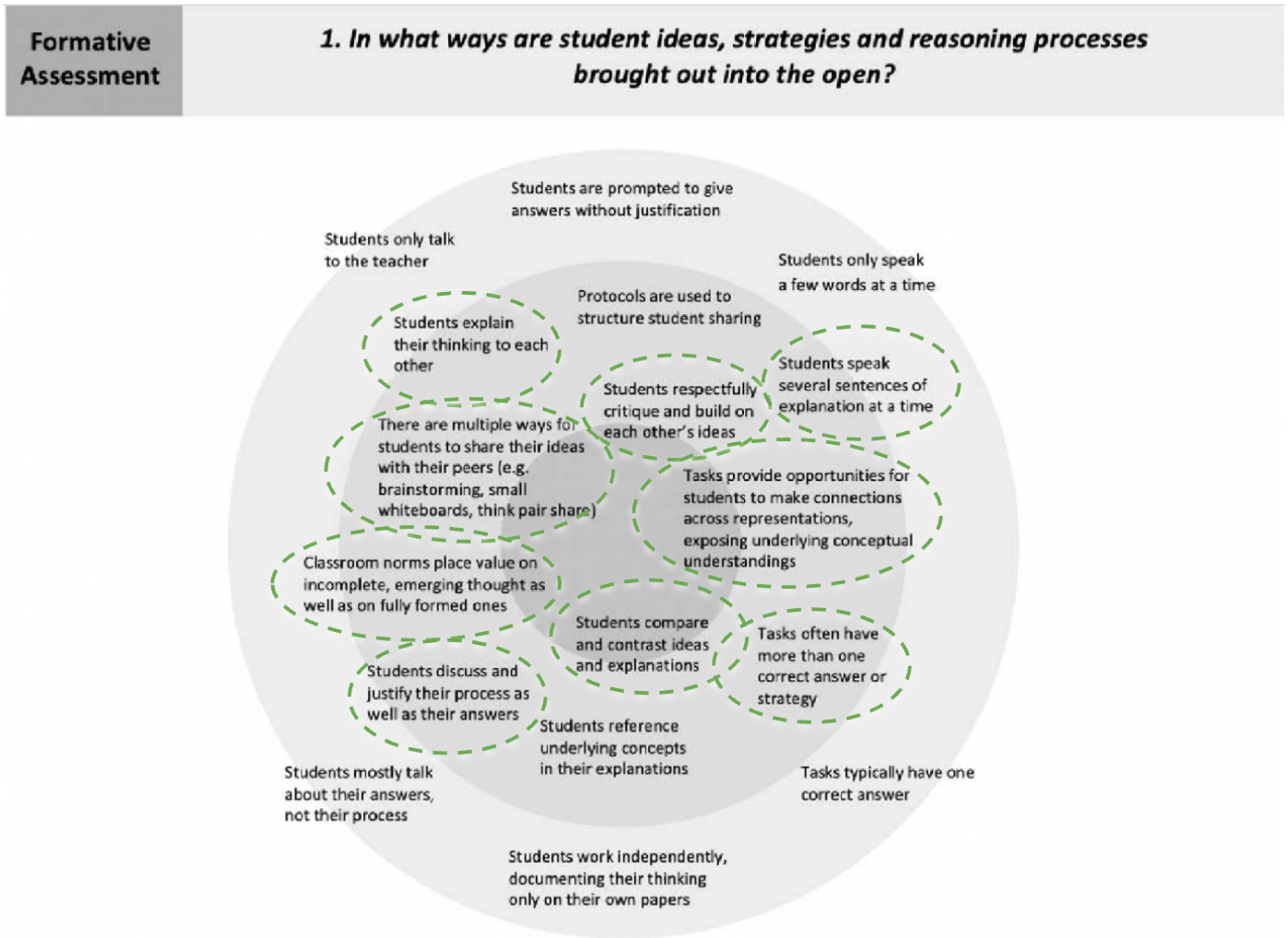
			Sant hvordan vi, hvordan vi kom frem til dette her. Kjenner dere igjen dette? Kan det minne om en kvadratsetning? Ja. Så det er litt, bare for å se litt bruken, bruken av det sant. Noen fikk fant ut, hva fant dere ut av her? Sant, dere skulle finne ut hva, hva tall dere fikk når dere ganget to gange to kvadrat, tre gange tre. Hva fant dere ut her? Hva fant dere ut på gruppen her, Sofie? * 503. Sofie: * Tre ganger tre? * 504. Lærer: * Ja * 505. Sofie: * At forskjellen på de ble førti * 506. Lærer: * Det ble førti ja. Også på to gange to da får vi at forskjellen blir? * 507. Sofie: * Ti * 508. Lærer: * Ti, ja så vi har ti på to gange to og så er førti, og så hva fikk dere på neste? * 509. Sofie: * Nitti * 510. Emma:* [Nitti] * 511. Lærer: * Nitti * 512. Sofie: * Så forskjellen er, ja altså økningen øker med tjue for hver gang * 513. Lærer: * Ja han øker med tjue, ja for den første var ti og så førti, så da vil han jo gå opp med, da øker han med tretti * 514. Emma:* [Tretti] * 515. Lærer: * Og så øker han med femti * 516. Emma:* [Femti] * 517. Lærer: * Og så? * 518. Emma:* [Sytti] * 519. Lærer: * Ja så han øker med tjue mer hver gang. Helt rett. * 520. Emma:_YES_ 521. Lærer: Veldig bra. Var det flere som kom frem til det? Det var mange som kom langt frem på det altså. Utrolig bra. Så var det noen som fikk en utfordring til, er det noen som husker det? Jeg vet (elevnavn) og dere fikk utfordring, det var flere og som fikk en ekstra utfordring, hva var det? Fikk en ekstra utfordring * 522. Elev: * (Hører ikke) * 523. Lærer: * Ja. Hvordan kan vi lage et generelt uttrykk for det og hva, hva betyr det? Et generelt uttrykk. Hva betyr det? Bare skyt fra hoften nå. Generelt uttrykk hva tenker du (elevnavn)? Et generelt uttrykk hva betyr det? * 524. Elev: * (Hører ikke) * 525. Lærer: * Ja så det betyr at hvis du har det uttrykket eller den formelen sant så kan du bare vite, kan du bare få et tall og så kan du bare slenge det inn. Sant så får du ut, ut

		det du vil ha sant. Dere kom frem til et der borte (elevnavn) gjorde dere ikke det? * 526. Elev: * (Hører ikke) * 527. Lærer: * Ja, hvordan kom dere frem til det? Hva er, tenkte dere der? Hvis vi samles litt rundt her. Her, hva tenkte du (elevnavn). * 528. Elev: (Hører ikke) 529. Lærer: * Også fikk dere Olivia dere og hadde en runde her har dere ikke det? Litt i forhold til kvadratet deres her. Kan du forklare litt, kan dere forklare litt der? * 530. Olivia: * Ja, Nora * 531. Lærer: *Husker dere den? Den dere fikk helt på slutten her nå med a. Hva var det for noe? Husker dere det? * 532. Olivia: * Ja, Nora * 533. Nora: * Hva mener du? * 534. Lærer: * I forhold til den a, den med firkanten her * 535. Nora: * Åja at du skriver a også hvis du har en toer, så blir den på høyre side alltid a pluss en * 536. Lærer: * Ja * 537. Nora: * Også den under blir alltid a pluss ti, også blir den til høyre under alltid a pluss elleve uansett hvor du er * 538. Lærer: * Ja sant. Hvis vi ser ned på arket, arket vårt på gruppen så ser vi jo alltid at hvis den oppe til venstre, hvis den alltid er a så vil den til høyre alltid være en mer, er dere med på det? Uansett sant, hvis vi starter på 33, 34 vil alltid bli pluss en. Så er det pluss ti og så er det pluss elleve sant. Og da fant dere et lite uttrykk der begynt å regne litte grann ut ja. En ser med måten å regne det på det minner litt om måten vi jobbet med med kvadratsetningene på. Kjempebra, kjempebra. Da er det fire minutter igjen av timen så jeg vil bare si utrolig bra jobbet denne timen her. Så nå tenker jeg at vi må lufte litt her. Jeg kjenner jeg begynner å bli varm jeg og. Så når tar vi, tar vi en runde rundt bygget, et par runder rundt og så er det engelsk siste økt nå *

Læreren [500] innleder med å ta tilbake kontrollen i klasserommet, og spør et «ufarlig» spørsmål som tilrettelegger for videre diskusjon. Innledningsvis gir læreren [502] tydelig beskjed om hva han verdsetter, og gir elevene positiv tilbakemelding vedrørende samhandling og kreative løsninger. Han [502] trekker også inn kvadratsetningene (Modell 5), og påpeker likheten mellom kvadratsetningene og elevarbeidet. Derimot analyserte denne studien utfordringer hos elevgruppe 1 (kap. 4.1.1) tilknyttet sammenhengen mellom problem A og kvadratsetningene. Læreren utdyper ikke hvilke sammenhenger han trekker mellom disse to, dermed kan det spekuleres i om det er algoritmen (Modell 2) for problem A, eller/og funksjonsuttrykket (Modell 6) han tenker skulle være sammenhengen elevene kunne utforske. Læreren er i denne sekvensen pådriveren for oppsummeringen, og spør ulike elevgrupper vedrørende arbeidet deres på vertikale tavlene. Sofie (elevgruppe 1) blir først spurt [502] om «hva deres gruppe fant ut?», hun [503–512] forteller hvilke differanser (se Figur 11) det ble på de første tre kvadratene. Videre hevder Sofie [512] gruppen har funnet mønsteret for økningen «altså økningen øker med tjue for hver gang». Læreren [513–519] anerkjenner deres funn, men legger til økningens startverdi på 30 for 2 x 2 kvadratet. Ettersom flere av elevgruppene har skrevet ned mønsteret på tavlene, utfordrer læreren [521] dem på «hvordan kan vi lage et generelt uttrykk for det, og hva betyr det?» I denne [521–528] sekvensen er det elevgrupper utenfor studiens deltakere som bidrar med ulike tanker, dermed blir det transkribert til (hører ikke). Læreren spør etterpå Olivia (elevgruppe 2) hvilke tanker de hadde rundt forsøket deres på å generalisere 2 x 2 kvadratet (se Figur 13) som denne studien analyserte i kapittel 4.1.2. Olivia [530–532] gir tydelig uttrykk vedrørerede å ikke være elevgruppens talsperson, og velger dermed å inkludere Nora i samtalen. Nora [533] ønsker en utdypende forklaring fra læreren [534], som således gir direkte veiledning «i forhold til den a, den med firkanten her» (se Figur 13). Nora [535–537] forklarer hvordan man kan generalisere 2 x 2 kvadrat med variabelen a, derimot kom ikke elevgruppen så langt som Modell 2 med følgelig bevis for differanse på 10. Avslutningsvis anerkjenner læreren [538] Nora´s bidrag, og gjenforteller til klassen hvordan de kunne generalisere 2 x 2 kvadrat med bruk av hundrearket (se Figur 8). Til slutt trekker han sammenhengen mellom problem A og kvadratsetningene – hvor han fremhever utregningen av Modell 2 – som han tenker har likhetstrekk med kvadratsetningene.

4.1.5.1 Oppsummering av undervisningstimene

Analysene fra disse to undervisningstimene beskriver hvordan undervisningsoppgavene, og de vertikale tavlene tilrettelegger for matematisk deltakelse og samhandling mellom elevene. Læreren i mine analyser (kap. 4.1.1 – 4.1.5) gjør elevene ansvarlige for å argumentere for sine antakelser, og støtter dem i den matematiske prosessen med veiledende spørsmål. Kapittel 4.1.1 fremhevet hvordan elevgruppen i B2:153–203 samarbeider og videreutvikler oppgavens kompleksitet når Lukas begynner å lete etter en formel. Videre illustrerer Tabell 16 (A2:176–422) hvordan elevene forklarer og støtter hverandre med blant annet Nora som beskriver hvorfor 4 x 4 kvadratet har en differanse på 160 til Olivia. Figur 18 gir en oversiktlig analyse over hvordan studiens datamateriale tilrettelegger for et av TRU rammeverkets sentrale spørsmål tilknyttet elevperspektivet (se Figur 10). Følgelig er disse to undervisningene med på å støtte elevene til å utvikle seg som kunnskapsrike, fleksible og ressurssterke tenkere og problemløsere.



Figur 18: Oppsummering formativ vurdering (Schoenfeld et al., 2023)

5 Diskusjon

Dette kapitlet skal drøfte studiens funn ved å benytte TRU-rammeverkets (kap. 2.4) essensielle dimensjoner for undervisning sammen med tidligere forskning, og relevant teori som er inkludert i denne studien. Ifølge forskningsfeltet innen matematikkdidaktikk er det endret søkelys fra hvordan mennesker utvikler seg som problemløsere til hvordan utdanningsprofesjonen kan tilrettelegge for elevenes utviklingsmuligheter (Hiebert & Grouws, 2007; Lester & Cai, 2016; Liljedahl & Cai, 2021). Følgelig vil denne studien gjennomføre et bidrag innenfor profesjonsutvikling. For å kunne utvikle elevene i et stadig mer komplekst samfunn er det essensielt å ta i bruk et forskningsbasert undervisningsperspektiv som *teaching through problem solving.* Enkelte faktorer innen denne forståelsen vedrørende matematikk og problemløsning er den matematiske autonomien elevene tilstrebes. Således vil utviklingsmulighetene til elevenes helhetlige matematiske kompetanse (se kap. 2.3) kunne realiseres ved å tilrettelegge for matematiske utfordringer, med søkelys på utforskende og engasjerte elever i sosial samhandling (Lester & Cai, 2016). En pedagogisk metodikk som er utviklet for å imøtekomme disse utfordringene er *tenkende klasserom* (kap. 2.2). Dermed skal dette kapitlet undersøke denne studiens funn vedrørende fire av de første elementene til denne pedagogiske metodikken, og drøftes mot eksisterende forskning og teori.

5.1 Tenkende klasserom

Kort oppsummert kan man se antydninger til et velfungerende *tenkende klasserom* fra studiens skåringsanalyse over datamaterialet (se Tabell 8). I et *tenkende klasserom* legges det tydelige føringer for utforsking og engasjement, der det hovedsakelig er elevene som utforsker matematikk sammen med lærer og medelever. Således tilrettelegger denne pedagogiske metodikken for en klasseromskultur med utforskende oppgaver, og samhandling som tidligere forskning viser har en effekt på elevenes læringsmuligheter (Boaler, 2022; Boaler & Staples, 2008; Lampert, 1990; Liljedahl, 2021). Dermed var det en forventning at deltakerne i denne studien skulle gjøre det relativt bra med tanke på TRU-rammeverkets (se kap. 2.4) endrede elevperspektiv (se Figur 10). Elevene inkluderes i meningsfulle matematiske prosesser som analysene fremhever i delkapitlene 4.1.1 – 4.1.5. Følgelig støtter mine funn Liljedahl`s (2016) forskning vedrørende økt elevaktivitet i grupper på tre ved vertikale tavler. Ifølge Liljedahl (2021) endrer den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* (se. kap. 2.2) flere av de innarbeidede klasseromsnormene. Følgelig opplever elevene endret forventinger, og blir således mottakelig for en «ny» klasseromskultur. I analysene fra kapittel 4.1.1 og 4.1.2 er det tydelig hvordan elevene utforsker problem A og B i elevgruppene ved de vertikale tavlene. Det er høyt engasjement blant de fleste elevene i gruppene, hvor ulike ideer blir forklart og utforsket sammen. En slik kultur hvor elevene som aktive og utforskende deltakere tilegnes en matematisk identitet, hvor de blir veiledet til å argumentere og resonnere gjennom den matematiske prosessen. Dette synspunktet vedrørende elevens rolle samsvarer med hva forskning vektlegger som ønskelig i matematikkundervisning (Lampert, 1990; Lesh & Zawojewski, 2007; Lester & Cai, 2016; Liljedahl, 2021; Schoenfeld et al., 2023). Følgelig kan den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* imøtekomme flere av kravene til LK20, og OECD's rammeverk for utdanning (Figur 1).

Ved å benytte noen av de første elementene (kap. 2.2.1 – 2.2.4) til denne metodikken tilrettelegges det for elevenes muligheter for å utvikle en helhetlig matematisk kompetanse (se kap. 2.3). Følgelig vil elevene bli utfordret til å utvikle resonnerings kompetanse (se kap. 2.3.1) ved å måtte forklare til medelever, og sette seg inn i medelevers forklaringer. Funnene (kap. 4.1.1 – 4.1.5) i denne studien viser at elevene er høyt delaktig i elevgruppens undersøkelser og videreutvikling av problem A og B. Et interessant funn er hvordan ingen av elevgruppene i datamaterialet ga opp, men benyttet seg av strategisk kompetanse (se kap. 2.3.2) for å utvikle en løsning eller videreutviklet oppgaven. Dermed kan det antydes gjennom funnene til studien at elevene også utvikler produktive holdninger (se kap. 2.3.4), med et mer utviklende tankesett som verdsetter innsats og utfordringer (Dweck, 2017). Elevene viser begrenset prosedyre kompetanse (se kap. 2.3.5) ved å benytte seg av enkelte løsningsmetoder for problem A og B, selv om oppgavene (spesielt problem A) inviterte til flere interessante løsningsmetoder illustrert i kapittel 4.1.1. Følgelig kan det virke som elevenes konseptuelle forståelse (se kap. 2.3.3) trenger mer tid til å utvikles ifølge studiens funn med tanke på bruken av likhetstegnet og utfordringene elevene møter med generalisering av problem A og B.

Jeg skal videre i dette kapitlet fremheve studiens funn (kap. 4) vedrørende elevenes læringsmuligheter angående matematisk kompetanse (se kap. 2.3) med søkelys på de fire komponentene fra *tenkende klasserom* (kap. 2.2) som denne studien har inkludert. Først vil studien belyse lærerens refleksjoner fra intervjuene med tanke på undervisning (kap. 2.1.1) som et sammenhengende og komplekst system bestående av fem faktorer (Lester & Cai, 2016). Deretter vil kapitlet benytte et av de sentrale spørsmålene ved TRU-rammeverkets (kap. 2.4) dimensjoner vedrørende elevperspektivet (se Figur 10) for å kunne kontekstualisere studiens funn mot eksisterende forskning og teori.

5.1.1 Begynne undervisningen med utforskende oppgave

Lester og Cai (2016) kategoriserer innhold som en av faktorene vedrørende undervisning. I denne studien tilrettelegges det for rike utviklingsmuligheter når læreren benytter seg av åpne og rike oppgaver som problem A (se kap. 3.4.1) og problem B (se kap. 3.4.2) – disse skal drøftes videre i kapittel 5.1.1.1 – 5.1.1.2. Læreren forteller (kap. 4.1.2) om hva han verdsetter og fremhever når elevene arbeider med en utforskende oppgave. Dermed er samhandlingen mellom elevene og lærer en avgjørende faktor, hvor komplekse samtaler og ulike måter å tenke på blir fremhevet som sentralt i hans klasserom. Disse kjennetegnene for undervisning verdsettes også gjennom *teaching through problem solving* (Lester & Cai, 2016).

Liljedahl (2021) argumenterer for at elevene skal engasjeres ved utforskende oppgaver i løpet av de første fem minuttene av en undervisningstime. Tabell 3 viser hvordan dette gjennomføres i problem A, og elevene gis følgelig tilstrekkelig med tid til å oppleve produktivt strev. Derimot viser Tabell 3 hvordan problem B introduseres etter det har gått 25 minutter av undervisningstimen. Elevene har således 11 minutter til å utforske oppgaven, som kapittel 4.1.2 analyserer begrenser tiden elevene har til å utforske oppgaven nivået av produktiv strev. Følgelig støtter studiens funn Liljedahl´s (2021) argumentasjon ved å starte undervisningen med en utforskende oppgave, fordi elevene trenger tilstrekkelig med tid for å kunne oppleve produktivt strev med muligheter for å løse oppgaven på ulike måter. Det vil si at elevene opplever høye kognitive krav, men har tilstrekkelig med tid for å kunne oppleve mestring (Hiebert & Grouws, 2007; Schoenfeld et al., 2023). Dermed vil det være ønskelig å benytte seg av *groupworthy problems* som tilrettelegger for matematisk kompetanseutvikling for alle elever (Boaler, 2022). Problem A og B som elevene arbeidet med i denne studien sammenfaller med kvalitetene til *groupworthy problems* som skal drøftes videre i kapittel 5.1.1.1 – 5.1.1.2.

Følgelig utvikler læreren en klasseromskultur – annen faktor i forståelsen for undervisning (Lester & Cai, 2016) – som har søkelys på en helhetlig matematisk kompetanse (se kap. 2.3). Således kan en trekke paralleller tilknyttet lærerens refleksjoner vedrørende [1] innhold og [2] klasseromskultur, og flere av elementene i *habits of mind* utviklet av Cuoco et al. (1996). I løpet av pre-intervjuet reflekterer læreren rundt hvordan utforskende oppgaver tilrettelegger for motivasjon og produktiv strev ved at utforskende oppgaver inkluderer lav inngang til matematisk utforskning, med mulighet for å videreutvikle oppgaven (LIST). Følgelig kan oppgaven tilrettelegge for matematisk deltakelse for alle elevene, og dermed støtte elevenes matematiske kompetanseutvikling.

5.1.1.1 Matematisk innhold: Hvordan relateres det til mine forkunnskaper?

Schoenfeld et al. (2023) har utviklet «blinker» (Figur 13) for å kunne identifisere og analysere kjennetegn ved god undervisning med søkelys på elementene som er virkelig betydningsfulle innen TRU-rammeverket. Studiens funn vedrørende det matematiske innholdet til datamaterialets undervisningsøkter illustrerer hvordan elevene tilbys utviklingsmuligheter for matematisk kompetanseutvikling ved Figur 13. Ved å tilrettelegge for lav inngang til problem A og B, med mulighet til å gjøre dem betraktelig mer kompliserte vil alle elevene kunne oppleve produktiv strev og utvikle produktive holdninger. Oppgavenes lave inngang baserer seg på matematiske algoritmer med de fire regneartene. Videre utvikles vanskelighetsgraden ved disse utfordringene når elevene skal søke etter mønster, og utvikle generalisering for hver av oppgavene. Disse mulighetene ble derimot ikke utnyttet til deres fulle potensial ved at de fleste elevene benyttet samme løsningsmetode, og læreren tilførte heller ikke andre løsningsmetoder for oppgavene. En av faktorene for dette kan være elevens relativt lave erfaring med slike type oppgaver. Ifølge læreren benyttes ikke den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* slik som Liljedahl (2021) beskriver, men heller som et supplement med andre undervisningspraksiser.

Problem A og B kan også utvides på andre måter som tidligere nevnt i kapittel 3.4.1 og 3.4.2. Følgelig har problem A og B flere ulike løsningsmetoder som illustrert for problem A (kap. 4.1.1). Begge oppgavene inkluderer en visuell komponent som var en av faktorene til *groupworthy problems* (Boaler, 2022). Dermed var det flere av elevgruppene som benyttet seg av figurer for å gi mening til deres matematiske notasjon. Problem A fikk elevene først til å benytte prosedyre kompetanse vedrørende en spesifikk matematisk algoritme (se. kap. 3.4.1). Mine funn viser hvordan elevens konseptuelle forståelse er i en misoppfatning vedrørende likhetstegnet (sentral matematisk idé), og dermed blir veiledet av læreren til å benytte matematisk notasjon korrekt. Derimot valgte ikke læreren å utforske elevenes antakelser og argumenter for fremgangsmåten deres vedrørende likhetstegnet. En slik dialog med elevene kunne vært interessant, og potensielt fruktbar for å kunne utvikle deres konseptuelle forståelsen ved likhetstegnet. Studien identifiserer også at elevene utvikler *generelle habits of mind*, og enkelte *algebraiske habits of mind (algebra modus)* som: representerer ting, benytter abstraksjon, gjennomfører utvidelser og generaliseringer. Derimot avdekkes det gjennom analysen få *fagspesifikke habits of mind* (Cuoco et al., 1996). Elevene benytter seg også til en viss grad av strategisk kompetanse gjennom deres arbeid med problem A og B. Innledningsvis i undervisningstimen hvor elevene arbeider med problem B blir elevgruppene bedt om å stille spørsmål til den innledende videoen (se kap. 3.4.2). Videre viser de til en viss grad av strategisk- og prosedyre kompetanse når de benytter seg av kalkulator for å gjennomføre og kontrollere enkle matematiske prosedyrer. Noen av elevgruppene viser også tegn til å benytte seg av revideringsfasen til matematisk tenkning (se Figur 5) hvor de abstraherer og sjekker løsningsforslaget deres, og prøver deretter å utlede en generalisering i form av algebraisk uttrykk eller funksjonsuttrykk for problem A og B.

5.1.1.2 Kognitive krav: Er jeg invitert til å forklare, eller bare gi svar?

En avgjørende faktor for elevenes læringsmuligheter er deres muligheter for en prosess som tilrettelegger for produktivt strev (Boaler & Staples, 2008; Hiebert & Grouws, 2007; Liljedahl, 2021; Schoenfeld, 2019, 2020). Når utforskende oppgaver benyttes tilrettelegges det for elevenes møte med kognitive krav, men hvordan kan læreren tilrettelegge for produktivt strev? Når elevene arbeider i grupper på tre ved vertikale tavler blir klasseromskulturen endret fra å gi et korrekt svar, til å samarbeide på meningsfulle måter for å utvikle matematisk kompetanse (Liljedahl, 2021). Studiens funn illustrerer ved Figur 15 hvordan praksisene ved *tenkende klasserom* kan tilrettelegge for endrede klasseromsnormer/kultur som gjør at elevene er mer engasjerte og utforskende i møte med matematisk innhold. Ved et slik skifte vil elevene kunne utvikle sin egen matematiske identitet og utvikle produktive holdninger.

Boaler og Staples (2008) fremhever gjennom deres longitudinale forskningsmetode hvordan heterogene elevgrupper utvikler i høyere grad matematisk kompetanse enn elevene i tradisjonelle klasserom. En avgjørende faktor er hvilke oppgaver elevene arbeider med, og disse forskerne fremhever *groupworthy problems* som er en fellesbetegnelse ved oppgaver med ulike faktorer (se kap. 2.1.1) som tilrettelegger for utforskende og deltakende elever. Denne beskrivelsen av oppgaver kan også sees i sammenheng med de ulike *habits of mind* utviklet av Cuoco et al. (1996). Følgelig vil disse komponentene kunne benyttes av lærere for å kunne planlegge, og videreutvikle undervisningsopplegg slik at undervisningen optimaliseres for elevenes muligheter innen matematiske kompetanseutvikling. Mine funn identifiserer hvordan elevene i handlingsfasen til matematisk tenkning (strategisk kompetanse) benytter seg av vertikale tavlen som tilrettelegger for utvikling av resonnerings kompetanse, hvor elevene veksler (i ulike grad) mellom de ulike fasene i strategisk kompetanse (se Figur 5) gjennom prosessen ved å løse matematiske utfordringer. Videre utvikler læreren en klasseromskultur hvor det forventes at elevene skal utforske og prate sammen når han velger å stille spørsmål som Liljedahl (2021) betegner som *tenke spørsmål* som analyseres i kapittel 4.1.2.

5.1.2 Bruk av vertikale tavler og synlig randomiserte grupper

Undervisning anerkjennes som et komplekst og sammenhengende system bestående av fem faktorer. Tre av disse kategoriene er klasseromskultur, kulturelle redskaper som fremmer læring og læringsmuligheter for alle elever (Lester & Cai, 2016). Et klasserom som benytter seg av vertikale tavler, og synlig randomiserte grupper påvirker alle disse tre kategoriene. Gjennom intervjuene med læreren kommer det frem hvordan elevenes resonnerings kompetanse verdsettes og utvikles ved bruk av pedagogiske læremidler som Kikora og Campus Inkrement, men også ved bruken av vertikale tavler med utforskende oppgaver. Ifølge læreren øker de vertikale tavlene elevenes deltakelse og samhandling ved å gjøre den matematiske prosessen mer visuell enn hvis de skulle ha snakket matematikk uten tavlene.

Forskningen til Liljedahl (2014) viser antydninger til eliminering av sosiale barrierer, og redusert avhengighet av læreren i møte med matematiske utfordringer. Følgelig vil bruken av synlig randomiserte grupper bidrar til å endre den tradisjonelle klasseromskulturen – normene – og dermed skape en klasseromskultur med høyere engasjement og deltakelse (Liljedahl, 2014, 2021). Denne studien erfarte ikke synlig randomiserte grupper på grunn av studiens begrensede deltakere. Derimot hevder læreren gjennom intervjuene at dette brukes konsekvent ellers i undervisningen, for å kunne fremme en klasseromskultur hvor elevene ikke kategoriserer seg som medlem av «faglig sterk gruppe» eller «faglig svak gruppe». Med synlig randomiserte grupper argumenterer læreren i pre-intervjuet for hvordan elever kan bidra på forskjellige måter. Det viser også mine analyser fra de fire elevgruppene som er analysert, og skal videre drøftes i kapittel 5.1.2.1 – 5.1.2.2.

5.1.2.1 Rettferdig tilgang til matematikk: Får jeg delta i meningsfull matematisk læring?

Ved *teaching through problem solving* argumentere Lester og Cai (2016) for at elevene skal kunne utforske utfordringer ved hjelp av deres forkunnskaper, og følgelig kunne resonnere og argumentere for egne og medelevers ulike løsningsforslag. Dermed vil en klasseromskultur som benytter seg av tilfeldig gruppering av elevgrupper i utforskning av *groupworthy problems* kunne utvikle sine matematiske kompetanser gjennom samhandling med medelever og lærer. Følgelig vil alle elevene kunne oppleve tilstrekkelige læringsmuligheter når elevgruppene samarbeider på meningsfulle måter med læreren som en veileder (Liljedahl, 2021). En annen faktor innen undervisning er kulturelle redskaper som fremmer læring, dermed vil det å benytte seg av vertikale tavler gjør det lettere for elevgruppene å kunne visualiserer sine tanker for hverandre. Således må elevene kommunisere med hverandre og argumentere for sine og andres løsninger som vil tilrettelegge for utvikling av resonnerings kompetanse. Figur 16 illustrerer gjennom mine analyser (kap. 4.1.1 – 4.1.5) hvordan elevgruppene utvikler *generelle habits of mind* ved å gjette, utforske og søke etter mønster i utforskningen ved problem A og B. Fra analysen viser også enkelte elevgrupper selvstendig tenkning og kreativitet når de videreutviklet oppgaven ved å lete etter metoder for å generalisere oppgavene. Dermed identifiserer studien noen *fagspesifikke habits of mind* når de utsettes for produktiv strev, og søker etter matematiske sammenhenger. Deltakerne i denne studien viser evne til å omfavne utfordringer, og holder ut i møte med tilbakeslag. Således virker det som at disse deltakerne utvikler produktive holdninger med antydninger til et mer utviklende tankesett (Dweck, 2017).

5.1.2.2 Autonomi og identitet:
Får jeg forklare og presentere ideene mine? Blir disse anerkjent?

Figur 17 illustrerer hvordan undervisningen tilrettelegger for engasjerte og deltakende elever gjennom utforskende oppgaver som problem A og B. Tabell 14 illustrerer hvordan elevene er den primære driveren i samtalene til elevgruppene, der læreren med sine ytringer – i felleskap og til elevgruppene – rangeres til nedre halvdel av oversikten i hver gruppe. I Tabell 13 (B2:31–156) viser analysene mine tydelig hvordan læreren oppfordrer elevene til å forklare deres ideer, og hvordan blant annet Olivia sine forklaringer blir anerkjent i dialogen med lærer. Videre veileder læreren Olivia til å utdype hennes tanker til resten av elevgruppe 2, siden ikke alle gruppemedlemmene forstod hennes første forklaring. Således identifiserer analysene mine hvordan læreren benytter seg av *tenke spørsmål,* men også *ikke-tenke spørsmål* forekommer i dialogene med elevgruppene (Liljedahl, 2021).

5.1.3 Veiledning av elever

Undervisning er et komplekst og sammenhengende system bestående av: [1] innhold, [2] lærerens rolle, [3] klasseromskultur, [4] kulturelle redskaper som fremmer læring, [5] læringsmuligheter for alle elever (Lester & Cai, 2016). Samtlige av disse kategoriene påvirkes og styres av lærerens egne verdier og synspunkter. Følgelig trenger profesjonen å utvikle omfattende metoder for å kunne gjennomføre profesjonsutvikling basert på faktorene vedrørende undervisning. Et alternativ som kan brukes for å videreutvikle profesjonen på meningsfulle måter er blant annet ved TRU-rammeverket

(Schoenfeld, 2019, 2020). Dette rammeverket er utviklet med et elevperspektiv som tilrettelegger for planlegging og reflektering rundt undervisning på meningsfulle måter ved å ha søkelyset på elevenes utviklingsmuligheter. Gjennom intervjuene med læreren kommer det refleksjoner rundt en tradisjonell undervisningspraksis, med pedagogiske synspunkter hvor elevene først utvikler grunnleggende matematiske ferdigheter for så å kunne anvende dem i like og ulike situasjoner. Derimot vil det med et videreutviklet kompetansebegrep og søkelys på helhetlig matematisk kompetanse være fordelaktig å etterstrebe et pedagogisk synspunkt tilnærmet *teaching through problem solving*. Mine analyser viser elevene er fullstendig kapable til å delta i matematiske prosesser som har potensiale til å utvikle deres helhetlig matematisk kompetanse. *Tenkende klasserom* virker fra mine funn til å være et godt alternativ for enhver lærer som ønsker å øke elevdeltakelsen og videreutvikle klasseromskulturen til å kunne verdsette den matematiske prosessen. Analysene mine støtter dermed Liljedahl´s (2021) funn gjennom hans prosjekt for å øke engasjementet og deltakelsen i matematikkundervisningen.

Stein et al. (2008) har utviklet – som nevnt tidligere – fem praksiser som kan støtte læreren til å planlegge og gjennomføre dialogbasert undervisning. [1] Prediksjon av elevreaksjoner til kognitivt krevende utfordringer handler om lærerens forarbeid til de utforskende oppgavene som elevene eksponeres for i undervisningen. I pre-intervjuet forteller læreren om hvordan han selv løser oppgavene han gir til elevene for å kunne identifisere ulike spørsmål han kan stille, og eventuelle kognitive utfordringer som elevene kan trenge veiledning for å løse. Dermed vil det være lettere for læreren å [2] regulere elevenes utforskningsfase. I intervjuene kommer det også frem hvordan læreren benytter seg av åpne spørsmål når han veiledere elevene. Han fremhever hvor viktig det er å sette seg inn i elevenes antakelser (tanker), vurderinger og hvordan de resonnerer. Dermed har elevene mulighet til å føle seg sett og anerkjent som lærende mennesker, og har følelig lettere for å utvikle produktive holdninger, enn hvis man blir møtt med avvisninger for hver feilaktig matematisk antakelse. Liljedahl (2021) trekker frem oppsummeringen som en meget viktig fase når elevene arbeider med utforskende oppgaver. Dermed vil det være lurt å benytte seg av følgende tre praksiser: [3] velge ut elevsvar som helklasse diskusjon eller oppsummeringsfasen skal reflektere over, [4] organisere rekkefølgen på elevsvarene som skal reflekteres over, og [5] veilede klassen til å se sammenhenger mellom ulike representasjoner og de sentrale matematiske ideene for å kunne oppsummere undervisningstimen på en god måte.

5.1.3.1 Formativ vurdering: Inkluderer klasseromsdiskusjoner min tenkning?

Mine analyser (kap. 4.1.1 – 4.1.5) viser hvordan den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* tilrettelegger for elevaktivitet i matematikkundervisningen. På grunn av at elevene utforsker i elevgrupper på tre ved vertikale tavler er det som tidligere nevnt endret klasseromskultur (normer). Således utvikles en kultur hvor elevene tilegnes en aktiv rolle i matematiske utforskingen som Lampert (1990) og andre forskere fremhever som en essensiell del av det å gjøre matematikk (Boaler, 2022; Lester & Cai, 2016; Liljedahl, 2021; Schoenfeld et al., 2023). Følgelig har de matematiske oppgavene elevene arbeider med en stor påvirkning for hvordan deres matematiske prosess utvikler seg. I denne studien benyttet læreren seg av problem A og B som inkluderer faktorene for *groupworthy problems,* dermed tilrettelegges det for meningsfulle matematiske prosesser hvor elevene får være kreative og utforskende. I en slik prosess er samhandlingen viktig hvor elevene forklarer og støtter hverandre som Figur 18 illustrerer fra mine analyser. Når elevene skriver på de vertikale tavlene, er det lettere for elevene og læreren å se hvilke tanker de forskjellige gruppene utforsker. Følgelig vil det være lettere for andre elevgrupper og se seg rundt for inspirasjon når deres ideer er utforsket uten fruktbar progresjon. Det å benytte seg av andres vertikale tavler viser seg å være en effektiv måte for å kunne komme seg videre fra en krevende fase hvor elevgruppen har få ideer (Pruner & Liljedahl, 2021). Mine analyser (se Tabell 13) viser hvordan den ene elevgruppen strever med å bli enig om hvordan de skal tolke oppgaven, dermed spør Emil om de skal benytte seg av andres tavler (tanker) for å sikre progresjon. Mine funn samsvarer dermed med Pruner og Liljedahl (2021), og identifiserer vertikale tavler som et kulturelt verktøy som fremmer læring.

I avslutningen av undervisningstimene benytter læreren seg av de vertikale tavlene for å kunne gjennomføre en oppsummering basert på elevenes arbeid gjennom timen (se Tabell 17). Tradisjonelt er det enkelt for læreren å benytte seg av den pedagogiske metoden «*show and tell*», hvor læreren er den som forteller og gjør matematikk (Stein et al., 2008). Når elevene har utforsket flere ideer som står på tavlene er det derimot lettere for læreren og utnytte disse for å strukturere oppsummeringen (Liljedahl, 2021). Dermed fremhever Liljedahl (2021) hvordan læreren i løpet av utforskningsfasen til elevene vil kunne bevege seg rundt til de ulike elevgruppene, og markere ulike deler han ønsker å ta opp i plenum. Følgelig vil læreren og elevene få en god oversikt over hva som skal gjennomgås i oppsummeringen. Den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* tilrettelegger dermed godt for lærerens praksiser ved dialogisk undervisning, og endrede krav fra LK20 og OECD.

6 Konklusjon

Hensikten med forskning er å kunne presentere ny eller supplerende kunnskap til forskningsfeltet (Postholm & Jacobsen, 2018). Dermed har denne studien gjennomført et bidrag til hvordan forskningsfeltet kan utvikle utdanningsprofesjonen med tanke på en felles forståelse for undervisning (kap. 2.1) og matematisk kompetanse (kap. 2.3), i tillegg til hvilke momenter som er essensielle i en slik kontekst (kap. 2.4). Følgelig har denne studien gjennomført et metodisk bidrag med TRU rammeverket for å kunne belyse deler av matematikkundervisningen ved bruk av den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* (kap. 2.2). Studiens forskningsspørsmål har dermed vært:

Hvordan kan Teaching for Robust Understanding brukes for å gjennomføre profesjonsutvikling i et tenkende klasserom?

6.1 Svar på studiens forskningsspørsmål

Denne studien har gjennomført et metodisk bidrag til profesjonsutvikling i matematikk med søkelys på nyere forskning innen matematikkdidaktikk, og endrede krav fra LK20 og OECD. Det er evidensbaserte implikasjoner for å videreutvikle profesjonen etter en forståelse vedrørende undervisning som et sammensatt og komplekst system bestående av faktorene: [1] innhold, [2] lærerens rolle, [3] klasseromskultur, [4] kulturelle redskaper som fremmer læring, [5] læringsmuligheter for alle elever (Lester & Cai, 2016). Studiens funn basert på den valgte teoretiske innrammingen stiller seg støttende til Shulman´s (1986) omfattende ordtak for hva det betyr å være lærer (se kap. 1.1). Studien ønsker dermed å gi et bidrag innen profesjonsutvikling ved å videreutvikle rammeverket *Teaching for Robust Understanding* til et format egnet for videre bruk i norsk skole og akademia.

Videre hevder Lester og Cai (2016) at matematikkundervisningen bør etterstrebe faktorene ved *teaching through problem solving* for å kunne tilrettelegge for elevenes matematisk kompetanseutvikling. Det er nødvendig å presisere at det ikke eksisterer en korrekt pedagogisk metodikk som alle lærere skal benytte til enhver tid (Schoenfeld, 2019). Derimot viser studiens funn i samsvar med nyere forskning hvordan den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* tilrettelegger for elevenes utviklingsmuligheter for matematisk kompetanse. Ved å analysere undervisningstimene, samt pre- og post-intervju av læreren på 10.trinn, kan en trekke enkelte antakelser mot en klasseromskultur hvor elevene utfordres til å argumentere og resonnere. Læreren gir tydelig refleksjoner rundt hvilken rolle han har i å tilrettelegge for å skape engasjement hos elevene, og ikke bare få dem til å gi svar på den etablerte sannhet.

6.2 Drøfting av studiens funn

Ifølge Schoenfeld (2018) bør en case-studie som benytter TRU-rammeverket inkludere analyser av minimum fem undervisningsøkter for å kunne utlede generaliserte funn. Dermed er det en begrensning at denne studien er en liten kvalitativ case-studie som har analysert fire elevgrupper gjennom to undervisningsøkter med bruk av utforskende oppgaver, gruppearbeid og vertikale tavler. For å kunne utarbeidet en grundigere forståelse vedrørende fordelene og ulempene ved *tenkende klasserom* ville det vært en styrke ved studien å kunne analysere flere undervisningsøkter. En annen svakhet ved denne studien er dens begrensede deltakere som resulterte i forhåndsbestemte elevgrupper. Enkelte av deltakerne ble også tydelig påvirket over studentene og kameraene som var i klasserommet. Følgelig kan det tenkes at elevene i et lengre tidsintervall enn tre uker hadde blitt «vant» med situasjonen, og dermed ville datamateriale kunne innhente mer troverdig og virkelighetsnære situasjoner. Således ville det vært interessant med en studie hvor det er flere deltakere over lengre tidsintervall som kan gi grundigere analyser.

Følgelig ville det også vært interessant å benytte TRU-rammeverket for å analysere de andre undervisningstimene som ikke benyttet seg av *tenkende klasserom*. De andre undervisningstimene fra datamaterialet (Tabell 3) hadde en mer tradisjonell praksis som ville påvirket resultatene til denne studien. Studiens funn viser derimot hvordan den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom* tilrettelegger for deltakende og utforskende elever som blir fremhevet som ønskelig ved LK20 og nyere forskning. Studiens funn kan basert på like funn ved andre studier antyde til en tendens ved høyere engasjement og bedre utviklingsmuligheter for elevenes helhetlige matematiske kompetanse ved bruk av de fire pedagogiske praksisene til et *tenkende klasserom* som denne studien har inkludert.

6.3 Implikasjoner for videreføring av studien

Formålet med denne studien var å sette søkelys på en profesjon i endring, og følgelig videreutvikle et rammeverk til en norsk kontekst. Dette forskningsprosjektet har gjennomført en omfattende case studie på et begrenset antall deltakere, med et tidsperspektiv på tre uker. Dermed ville det vært interessant for videre forskning med en longitudinell studie vedrørende *tenkende klasserom* ved bruk av TRU rammeverket. Basert på antakelsen angående det ikke eksisterer en enkelt pedagogisk praksis som er riktig for enhver lærere i alle fag. Vil det være interessant å benytte TRU rammeverket til å analysere andre pedagogiske praksiser for å kunne utlede en felles forståelse for hva som er essensielt i undervisningen. Følgelig vil profesjonen kunne utvikle et samlet sett av pedagogiske praksiser som tilrettelegger for elevenes muligheter for kompetanseutvikling i ulike fag. TRU rammeverket er således et rammeverk som skal omfatte alle essensielle dimensjoner i undervisning, følgelig vil det være interessant å benytte dette rammeverket i flere fag enn matematikk. Dermed vil profesjonen kunne utvikle et samlet profesjonsspråk for samarbeid på tvers av fag og undervisningstrinn.

Det er også – slik som denne studien – gjennomført flere studier på de første pedagogiske praksisene til Liljedahl´s (2021) *tenkende klasserom*. Følgelig vil det være ønskelig å se på flere av de andre 14 pedagogiske praksisene, og *tenkende klasserom* som en helhet, etter hvert som disse blir mer implementert i skolesystemet. Denne studien posisjonerte seg i samsvar med retningene fra oversiktsartikkelen til Liljedahl og Cai (2021 som fremhever: *samarbeid, profesjonsutvikling, oppgavevariabler og teknologi*. Basert på at dette er et bidrag innen profesjonsutvikling vil det kunne være interessant å benytte verktøyene som er utledet fra studien ved de andre kategoriene: *samarbeid, oppgavevariabler og teknologi* for videre forskning innen matematikkdidaktikk.

Litteraturliste

Baldinger, E. Louie, N. & the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2016). *TRU Math conversation guide: A tool for teacher learning and growth*. Berkeley. Hentet fra: http://truframework.org

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015* (s. 22–43). Universitetsforlaget

Boaler, J. (2022). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching* (2.utg.). John Wiley & Sons.

Boaler, J. & Staples, M. (2008). Creating Mathematical Futures through an Equitable Teaching Approach: The Case of Railside School. *Teachers College Record*, *110*(3), 608–645. https://doi.org/10.1177/016146810811000302

Boix Mansilla, V. & Schleicher, A. (2022). Big Picture Thinking: how to educate the whole person for an interconnected world. *OECD Publishing*. https://issuu.com/oecd.publishing/docs/big-picture-thinking-educating-global-competence

Charalambous, C. Y. & Praetorius, A. K. (2018). Studying mathematics instruction through different lenses: setting the ground for understanding instructional quality more comprehensively. *ZDM*, *50*(3), 355–366. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0914-8

Cuoco, A., Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(4), 375-402. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90023-1

Dweck, C. (2017). *Mindset-updated edition: Changing the way you think to fulfil your potential.* Hachette UK.

English, L. D., Fox, J. L. & Watters, J. J. (2005). Problem Posing and Solving with Mathematical Modeling. *Teaching Children Mathematics*, *12*(3), 156–163. https://doi.org/10.5951/TCM.12.3.0156

Flyvbjerg, B. (2011). Case Study. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (4. utg., s. 301–316). Sage.

Grønmo, L. S. (2018). The role of algebra in school mathematics. I G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Red.), Invited lectures from the 13th international congress on mathematical education, ICME-13 monographs (s. 175–193). Springer.

Haimovitz, K. & Dweck, C. S. (2017). The Origins of Children's Growth and Fixed Mindsets: New Research and a New Proposal. *Child Development*, *88*(6), 1849–1859. https://doi.org/10.1111/cdev.12955

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371–404). Information Age Publishing

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.C., Nilsen, T. & Bergem, O.K. (2020). *TIMSS 2019. Kortrapport*. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., National Research Council (U.S.), & Mathematics Learning Study Committee. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press.

Kunnskapsdepartementet. (2019) Læreplan i matematikk (MAT01–05). Fastsatt ved forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. http://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper- for-grunnopplaringen/id2570003/

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal Akademisk.

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29–63. https://doi.org/10.3102/00028312027001029

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 763–804). Information Age Publishing

Lester Jr, F. K. & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. I P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and solving mathematical problems : Advances and New Perspectives* (s. 117–135). Springer.

Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. I P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives* (s. 361–386). Springer.

Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K–12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*. Corwin Press.

Liljedahl, P. (2014). The affordances of using visibly random groups in a mathematics classroom. I Y. Li, E. A. Silver & S. Li (Red.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (s. 127–144). Springer.

Liljedahl, P. & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM*, *53*(4), 723–735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Springer Nature.

Ma, L. (2020). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States* (3. utg.). Routledge.

Mason, J., Burton L. & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2. utg.). Pearson Education Limited.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2011) *Å lære algebraisk tenkning (2. utg.). (J. Lie, Overs.). CASPAR FORLAG AS.* (Opprinnelig utgitt 2005).

Maxwell, J. A. (2008). *Designing a Qualitative Study*. I L. Bickman & D. J. Rog (Red.), *The SAGE handbook of applied social research methods* (2. utg., s. 214–253). Sage.

Megowan-Romanowicz, C. (2016). Whiteboarding: A Tool for Moving Classroom Discourse from Answer-Making to Sense-Making. *The Physics Teacher*, *54*(2), 83–86. https://doi.org/10.1119/1.4940170

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humanoria* (5. utg.). De nasjonale forskningsetiske komiteene.

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser.* Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method* (2. utg.). Princeton University Press.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.

Pruner, M. & Liljedahl, P. (2021). Collaborative problem solving in a choice-affluent environment. *ZDM*, 53(4), 753–770. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01232-7

Roberson, S. (2020). Developing student success through persistence: teaching more than content. *Education*, *141*(2), 83–100.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Opprinnelig utgitt 1992). *Journal of education*, *196*(2), 1–38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM*, 52(6), 1163–1175. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2019). Reframing teacher knowledge: A research and development agenda. *ZDM*. https :// doi.org/10.1007/s11858-019-01057-5.

Schoenfeld, A. H. (2018). Video analyses for research and professional development: the teaching for robust understanding (TRU) framework. *ZDM*, *50*(3), 491–506. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0908-y

Schoenfeld, A. H. (2014). What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice, Productively Intertwined. *Educational Researcher*, *43*(8), 404–412. https://doi.org/10.3102/0013189X14554450

Schoenfeld, A. H., Fink, H., Sayavedra, A., Weltman, A. & Zuñiga-Ruiz, S. (2023). *Mathematics Teaching On Target: A Guide to Teaching for Robust Understanding at All Grade Levels*. Routledge.

Schoenfeld, A. H., Floden, R. E. & the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2014). *The TRU Math Scoring Rubric*. Berkeley. Hentet fra: http://truframework.org

Schoenfeld, A. H. & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *The Teaching for Robust Understanding (TRU) observation guide for mathematics: A tool for teachers, coaches, administrators, and professional learning communities.* Berkeley. Hentet fra: http://truframework.org

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Reflections on Practice: Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344–350. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. I R. I. Charles & E. Silver (Red.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (s. 1–22). NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell.

Mathematical Thinking and Learning, 10(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Säljö, R. (2006). *Læring og kulturelle redskaper: Om læreprosesser og det kollektive minnet* (S. Moen, Overs.). Cappelen akademisk forlag. (Opprinnelig utgitt 2005).

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode.* (5. utg.). Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Kompetanse i fagene*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/kompetanse-i-fagene/

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological process*. Harvard University Press.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458–477. https://doi.org/10.2307/749877

Zawojewski, J. (2010). Problem Solving Versus Modeling. I R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, A. Hurford (Red.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (s. 237–243). Springer.

Vedlegg

Vedlegg A – Informasjonsskriv lærer

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Undervisning i et tenkende klasserom»?

Dette er et spørsmål til om deltakelse i et forskningsprosjekt hvor formålet er å bedre forstå hva som kan være involvert i det krevende arbeidet med å lede matematikkundervisning i grunnskolen. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Matematikkundervisning er et krevende og komplekst arbeid hvor lærerne blir stilt overfor en rekke utfordringer og arbeidsoppgaver. De må blant annet balansere oppmerksomheten mot det faglige innholdet, elevenes kunnskap, motivasjon og interesse, og ulike typer påvirkning fra samfunn og miljø. Denne studien brukes til å skrive tre individuelle masteroppgaver. og søker å studere det komplekse undervisningsarbeidet i matematikk med et spesielt søkelys på utforskning og problemløsning i ungdomsskolen.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet, og prosjektet ledes av professor Raymond Bjuland ved Institutt for grunnskolelærerutdanningen, idrett og spesialpedagogikk.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta fordi du underviser i matematikk ved en grunnskole og du praktiserer Peter Liljedahls tenkende klasserom i undervisningen din.

Hva innebærer det for deg å delta?

I løpet av de 2 ukene prosjektet foregår i klassen vil masterstudentene observere matematikkundervisningen og gjøre lyd- og videoopptak av denne. Masterstudentene vil også skrive feltnotater under og i etterkant av observasjonene. Deltagelse innebærer også to lærerintervju. Lærerintervjuene vil vare i ca. en time. Det vil også bli gjort lyd- og videoopptak under intervjuene. Læreren kan få tilgang til intervjuguiden som vil benyttes i intervjuet på forhånd.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Lyd- og videoopptak vil kun være tilgjengelig for deltakerne i prosjektet så lenge prosjektet varer.
- Opptakene vil lagres sikkert på krypterte lagringsløsninger, og opptakene vil transkriberes og anonymiseres. Alle navn vil erstattes med fiktive navn, og vi vil sørge for at kontaktopplysninger lagres sikkert adskilt fra øvrige data.
- Skulle situasjoner av kompromitterende karakter oppstå i løpet av datainnsamling vil opptak stanses og slettes umiddelbart.

I publikasjoner fra prosjektet vil alle opplysninger anonymiseres, og vi vil sørge for at det ikke blir gitt opplysninger som gjør at deltakerne kan gjenkjennes.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er *31 desember 2023.* Da vil alle video- og lydopptak slettes, og vi vil kunne oppbevare anonymiserte transkripsjoner fra intervjuene og anonyme spørreskjema.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Universitetet i Stavanger* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved Raymond Bjuland (tlf.:518 33 494, e-post: raymond.bjuland@uis.no).
- Vårt personvernombud: Rolf Jegervatn (e-post: personvernombud@uis.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00

Med vennlig hilsen
Dylan Irons, Tone Brede og Morten Skår

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Det komplekse undervisningsarbeidet i matematikk*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i *intervju*
- ☐ å bli observert (ved hjelp av video- og lydopptak) i noen matematikktimer over en periode på ca. to uker

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg B – Informasjonsskriv foreldre

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Undervisning i et tenkende klasserom»?

Dette er en forespørsel om deltakelse i et forskningsprosjekt hvor formålet er å forske på utforskning og problemløsning i undervisning med den pedagogiske metodikken *tenkende klasserom*. Du får dette informasjonsskrivet på vegne av ditt barn. I dette skrivet gir vi informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål

Matematikkundervisning er et krevende og komplekst arbeid hvor lærerne blir stilt overfor en rekke utfordringer og arbeidsoppgaver. De må blant annet balansere oppmerksomheten mot det faglige innholdet, elevenes kunnskap, motivasjon og interesse, og ulike typer påvirkning fra samfunn og miljø. Denne studien brukes til å skrive tre individuelle masteroppgaver. og søker å studere det komplekse undervisningsarbeidet i matematikk med et spesielt søkelys på utforskning og problemløsning i ungdomsskolen.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet, og prosjektet ledes av professor Raymond Bjuland ved Institutt for grunnskolelærerutdanningen, idrett og spesialpedagogikk.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får denne henvendelsen om å delta fordi du er forelder/foresatt til en elev ved skolen som er invitert til å delta i prosjektet.

Hva innebærer det å delta?

Prosjektet som helhet har en varighet på et år. For ditt barn innebærer deltakelse i prosjektet først og fremst at vi vil observere (samt gjøre lyd- og video-opptak) fra vanlige matematikktimer over en periode på ca. to uker. Dersom du ikke ønsker at ditt barn skal bli filmet, kan du skrive dette i samtykkeskrivet. Vi vil da sørge for at kamera plasseres slik at ditt barn ikke kommer med i video-opptaket. Opptakene vil kun danne utgangspunkt for en skriftliggjøring (transkripsjon) av det som skjer og blir sagt i undervisningen, og det er de anonymiserte transkripsjonene som vil bli analysert og eventuelt gjengitt.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger om ditt barn vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller ditt barn hvis de ikke vil delta eller senere velger å trekke seg. Hvis du ønsker at ditt barn ikke skal bli filmet, vil vi plassere kamera slik at dette barnet ikke blir filmet. Dersom det blir for mange elever i klassen som ikke ønsker å delta, vil vi finne en annen klasse å observere.

Velger du og ditt barn å ikke delta, vil vi tilrettelegge ved å organisere kamera og lydopptaker med lengst mulig distanse fra ditt barn i klasserommet. Vi vil også betjene videokamera slik at kamera vil skrues av eller tildekkes hvis en situasjon skulle oppstå hvor elev som ikke skal delta i studien beveger seg inn i filmet sone. Skulle lærer med lydopptaker samle inn data fra samtale med elev(er) som ikke deltar i studien vil dette datamateriale slettes umiddelbart.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Lyd- og videoopptak vil kun være tilgjengelig for deltakerne i prosjektet så lenge prosjektet varer.
- Opptakene vil lagres sikkert på krypterte lagringsløsninger, og opptakene vil transkriberes og anonymiseres. Alle navn vil erstattes med fiktive navn, og vi vil sørge for at kontaktopplysninger lagres sikkert adskilt fra øvrige data.
- Skulle situasjoner av kompromitterende karakter oppstå i løpet av datainnsamling vil opptak stanses og slettes umiddelbart.

I publikasjoner fra prosjektet vil alle opplysninger anonymiseres, og vi vil sørge for at det ikke blir gitt opplysninger som gjør at deltakerne kan gjenkjennes.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er *31. desember 2023.* Da vil alle lyd- og videoopptak slettes, og vi vil kunne oppbevare anonymiserte transkripsjoner og anonyme svar på spørreskjema.

Dine rettigheter

Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om ditt barn, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om ditt barn,
- å få slettet personopplysninger om ditt barn, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av ditt barns personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Universitetet i Stavanger* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved Raymond Bjuland (tlf.:518 33 494, e-post: raymond.bjuland@uis.no).
- Vårt personvernombud: Rolf Jegervatn (e-post: personvernombud@uis.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med: Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00

Med vennlig hilsen

Dylan Irons, Tone Brede og Morten Skår

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Undervisning i et tenkende klasserom*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ at mitt barn blir observert (ved hjelp av lyd- og video-opptak) i noen ordinære matematikktimer
- ☐ at det blir tatt lydopptak av stemmen til mitt barn, men jeg ønsker ikke at barnet blir filmet

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av foreldre/foresatte på vegne av elev, dato)

Vedlegg C – Pre-intervju guide

Pre-intervjuguide - lærer

Innledende spørsmål

- Hvilken utdannelse har du?
- Hvor lenge har du arbeidet i ungdomsskolen?
- Har du erfaring fra andre yrker eller skolesystemet enn ungdomsskolen?
- Hva tenker du matematisk kompetanse skal være for elevene?

Læring og undervisning

- Hvordan har dere implementert LK20?
    - Hvordan inkluderer dere om faget (fagrelevans og sentrale verdier) i undervisningen?
- Hva tenker du ligger i utforskning og problemløsning?
    - Hva betyr dette for deg?
- Hvordan arbeider dere med utforskning og problemløsning
- Hvordan arbeider dere med de andre kjerneelementene?
    - Utforskning og problemløsning
    - Modellering og anvending
    - Resonnering og argumentasjon
    - Representasjon og kommunikasjon
    - Abstraksjon og generalisering
    - Matematisk kunnskapsområde
- Hvordan planlegger du/dere matematikkundervisningen?
- Hvilke sentrale matematiske idéer vil elevene arbeide med i perioden til studien?
- Hvilke matematiske mål er planlagt for elevene i perioden til studien?
- Hvordan vil elevene få mulighet til å se seg selv som en matematisk tenkere, og møte kognitive utfordringer i møte med matematikken?
- Hvordan tilrettelegges for elevenes autonomi og produktivt strev?
- Hvorfor valgte du å ta i bruk Liljedahls tenkende klasserom i din undervisning?
- Hvordan forhold har du til FLOW-teorien?
- Er dette noe du tenker aktivt på i matematikkundervisningen?
- Planlegger du spørsmål du skal stille i forkant av timen? Evt. Hva tenker du gjennom?
- Har du noen tanker rundt lærerens bruk av spørsmål i matematikkundervisning?

- Hvordan tilpasser du oppgaver etter oppgavene har blitt gitt? Gjøre dem vanskeligere/lettere for elevene?

Vurdering

- Hva tenker du er målet ditt med å vurdere? Hva er det viktigste med å vurdere?
- Er det stor variasjon i hvordan du vurderer? Matematiske eksempler
- Kan du fortelle om hvordan din vurderingspraksis har endret seg fra du startet å være lærer?
- Vurderer du ulikt i de andre fagene du underviser i?
- Gjennom din utdanning – hva lærte du om vurdering?
- Hvordan gjennomfører du underveisvurdering?

Vedlegg D – Post-intervju guide

Post-intervjuguide- lærer

Undervisning og læring

- Hvilke normer eksisterer i klassene vi har observert i form av elev- og lærerrolle?
- Hvilke normer eksisterer i klassene vi har observert i form av produktivt strev og gjøre feil?
- Hvilke tilpasninger gjør vi som matematikklærere for å gjøre matematikken i denne perioden tilgjengelig for alle elever?
- Hvilke ressurser (andre studenter, lærer, notater, lærebøker, IKT, konkreter) har elevene hatt tilgang på i denne perioden? Er det andre ressurser vi kunne ledet dem til å bruke?
- Alle har elever som trenger tilpasninger, hvordan kan vi gjøre dem mer aktive i møte med matematikken?
- Hvilke tanker har du rundt bruk av teknologi eller konkreter som et verktøy i prosessen til matematisk utvikling?
    - Hva med språk?
    - Hvordan kan vertikale tavler hjelpe?
- Hvor ofte bruker du vertikale tavler i undervisningen?
    - Hvilke fordeler og ulemper har du erfart med bruk av disse?
- En av problemløsningsstrategiene som kan brukes deles inn i tre faser, disse er planleggingsfasen, handlingsfasen og revideringsfasen. Hvordan brukes disse inn i deres løsning av problem?
    - Planleggingsfasen:
        - Hva forstår jeg?
        - Hvor skal jeg?
        - Hvilke verktøy kan jeg bruke?
    - Handlingsfasen:
        - Utforske og gjette
        - Resonnere og argumentere
    - Revideringsfasen:
        - Sjekke løsningsforslaget
        - Reflektere rundt sammenhenger og strukturer
        - Abstrahere og generalisere

- Hvordan vil elevene få mulighet til å se seg selv som en matematisk tenkere, og møte kognitive utfordringer i møte med matematikken? (til lærer 2)

Vurdering

- Lærer 2: Fortell om hvorfor dere har valgt å ha summative vurderinger
- Lærer 1: Fortell om hvorfor dere har valgt å ikke ha karakterer

- Opplever du at du som lærer har nok autonomi i forbindelse med valg av vurdering? På hvilken måte, og hvordan bruker du den?
- Etter satsningen vurdering for læring ble det et økt fokus på formative vurderinger. Hvordan har dette påvirket måten du vurderer på i matematikk?
- Når du setter en sluttkarakter i matematikk, hva inngår i denne? Hvordan er de ulike komponentene vektet? Er elevene klar over hvordan det blir vektet, evt. hvorfor/hvorfor ikke?

Egenvurdering

- Hvordan opplever du elevens læring etter en formativ vurdering?
- På hvilken måte får du innblikk i elevens forståelse etter en formativ vurdering? (kom med matematiske eksempler)
- Hva er dine erfaringer med muntlige vurderinger i matematikk?
- Hvordan opplever du elevens læring etter en muntlig vurdering?
- På hvilken måte får du innblikk i elevens forståelse etter en muntlig vurdering? (kom med matematiske eksempler)
- Hvordan har du opplevd din egen underveisvurdering i de øktene vi har observert? Konkrete eksempler
- Lærer 1: Var det et bevisst valg med tanke på underveisvurdering å ta opp tråden i skolevei oppgaven i timen etter? Hva var tanken bak det? Pleier du å ta bilder av tavlene etter en time, og bruker du det i vurderingen av elevene?
- Liljedahl har utviklet skjemaer for vurdering i et tenkende klasserom, er det noe du kunne tenke deg å implementere i din klasse? Eventuelt hvordan?
- Liljedahl sier at vi må vurdere det vi verdsetter i et tenkende klasserom (utholdenhet, villigheten til å ha sjanser og evnen til å samarbeide). Hva er dine tanker om det?
- Ser du på det som realistisk å benytte deg av det i en norsk skole? Læreplanen? Hvorfor/hvorfor ikke?

- Hvilke muligheter ville det gitt deg å benytte et tenkende klasserom i en vurderingssituasjon?
- Dersom tid ikke hadde vært et hinder, ville du brukt mer tid på muntlige eller andre alternative metoder som tenkende klasserom, som vurderingssituasjon?
- Er det noe vi ikke har snakket om som du mener er aktuelt eller spesielt viktig i møte med vurdering i et tenkende klasserom?

Vedlegg E – Transkripsjonsnøkkel

Transkripsjonsnøkkel

Når vi transkriberer datamaterialet, så starter vi med å skrive ned ord for ord hva som blir sagt, og vi bruker i første omgang bare vanlige tegn (komma, punktum, spørsmålstegn osv.).

Noen punkter vi må huske på:

vi transkriberer alt til normert bokmål

vi bruker kun fiktive navn på elever og lærere i transkripsjonene (se liste i Teams)

NB! Hvis en person har en ytring, så skjer det noe annet (for eksempel at en elev kommer opp og skriver noe), og så er det samme person som snakker igjen litt senere, så lager vi en ny ytring med kommentar i parentes imellom.

Hvis vi ikke klarer å finne ut hvem eleven som snakker er, så skriver vi “Elev”

Overlapp

Hvis personer snakker i munnen på hverandre, prøver vi å indikere dette ved å sette det den andre sier, når de snakker i munnen på hverandre, i klammeparenteser:

```
Lærer: Ja, hundre og førti centimeter. For da gjør du Julius, det som Tora
foreslo. Nemlig å gjøre om en meter
Julius: [meter til centimeter]
Lærer: Det var det du foreslo, ikke sant?
```

Forsterkning / helklasse samtale

Hvis en person som snakker legger tydelig vekt på ord eller stavelser, så markerer vi dette med store bokstaver. For eksempel kan en person si at en oppgave var «VELdig vanskelig», og da indikerer de store bokstavene at personen la ekstra vekt på første del av ordet «veldig».

Hvis en person hever stemmen og snakker spesielt høyt utover dette, (spesielt med tanke på å markere helklasse samtale) kan vi markere det med å sette stjerne ved starten og slutten av det som blir sagt med ekstra høy stemme:

```
Lærer: * Nå må alle være stille og høre godt etter *
```

Tilsvarende kan vi bruke tegnet «underscore» for å markere at noen snakker med spesielt lav stemme (hvisker), og vi markerer da med underscore ved starten og slutten av det som blir sagt med lav stemme:

```
Lærer: _Etter at Amanda har skrevet sitt svar, kan du gå opp og skrive ditt_
```

Notering på tavlen og strukturering

Hvis en person skriver noe ned på den vertikale tavlen, ønsker vi og få dette med i den transriberte samtalen. Dette gjøres ved å sette inn den som noteres inni dollartegn som for eksempel:

Olivia:	$ Alt har differanse på 10. $

Skulle personen starte en plass, men ikke fullføre denne med en gang deles det inn i nummererte dollartegn som for eksempel

Olivia:	$\$_1$ (62 • 95)
Nora:	Jeg vedder på at det blir sytti i forskjell
Olivia:	Sytti i forskjell?
Noah:	Femtiåtte tusen nei, femtusen åttehundre og nitti
Olivia:	$\$_2$ 5890
Olivia:	Minus?
Oskar:	Sekstito gange nittito, nei sekstifem ganger nittito
Olivia:	Bestem deg.
Oskar:	Ja, beklager
Olivia:	Sekstifem ganger nittito?
Oskar:	Ja
Olivia:	– (65 • 92) $\$_1$
Noah:	Femtusen nihundre og åtti
Nora:	Jeg vedder på at det blir sytti i forskjell, okei. Nei
Olivia:	Fem tusen, nihundre
Noah:	Og åtti
Olivia:	– 5980 $\$_2$

På denne måten følger vi den naturlige prosessen elevene gjennomfører deres tanker og matematiske resonnement, og dermed sikrer bedre validitet av datamaterialet.

Transkripsjons mal

Hvert transkripsjonsdokument skal starte med å oppgi en tittel som forklarer hva transkripsjonen handler om (f.eks. «Transkripsjon av undervisning i 5B» eller «Lærerintervju med ...»), angivelse av dato og tidspunkt når opptaket ble gjort, og hvem som har transkribert (med navnet på den som har sjekket i parentes). Dette skal stå helt øverst i dokumentet på denne måten:

```
#+title: Transkripsjon av elevintervju i 8.trinn
#+date: Onsdag 01. januar 2023, 2. time
#+author: Dylan Irons (sjekket av Morten Skår)
```

Etter denne toppteksten legger vi inn et ekstra linjeskift, og så følger selve transkripsjonen fortløpende med ett linjeskift mellom hver ytring. Pass på at hver ytring starter med et (fiktivt) navn, etterfulgt av kolon (ikke semikolon!) og mellomrom, slik som dette:

```
Siri: Men, dersom dere skal trekke frem noe dere ikke liker. Hva vil dere si det er?
Vetle: Når det er sånn veldig spesifikke formler og sånt og du føler at du bare setter bokstaver og tall inn for null grunn.
Sofie: Mhm, at det blir veldig sånn ensidig for hvert spørsmål det kommer og så er det sånn må en finne på nytt hele tiden, det er ikke sånn du bare kan fortsette på.
```

Hele starten av dokumentet vil da se ut slik som dette:

```
#+title: Transkripsjon av elevintervju i 8.trinn
#+date: Onsdag 01. januar 2023, 2. time
#+author: Dylan Irons (sjekket av Morten Skår)

Siri: Men, dersom dere skal trekke frem noe dere ikke liker. Hva vil dere si det er?
Vetle: Når det er sånn veldig spesifikke formler og sånt og du føler at du bare setter bokstaver og tall inn for null grunn.
Sofie: Mhm, at det blir veldig sånn ensidig for hvert spørsmål det kommer og så er det sånn må en finne på nytt hele tiden, det er ikke sånn du bare kan fortsette på.
```

Vedlegg F – Sikt meldeskjema

Meldeskjema / Undervisning i et tenkende klasserom / Eksport

Meldeskjema

Referansenummer

560419

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

Navn (også ved signatur/samtykke)

Adresse eller telefonnummer

E-postadresse, IP-adresse eller annen nettidentifikator

Bilder eller videoopptak av personer

Lydopptak av personer

Prosjektinformasjon

Prosjekttittel

Undervisning i et tenkende klasserom

Prosjektbeskrivelse

Denne studien skal brukes til å skrive tre individuelle masteroppgaver som har ulike vinklinger rundt utforskning og problemløsning som er en sentral del i læreplan for kunnskapsløftet 2020. I denne studien arbeider elevene med utforskning og problemløsning i et "tenkende klasserom" som er en pedagogisk metodikk som har nylig blitt utviklet av Peter Liljedahl. I denne studien vil vi prøve å besvare følgende forskningsspørsmål: - Hvilke lærerspørsmål brukes i helklassesamtaler og ved samtaler med elevgrupper i et tenkende klasserom på ungdomstrinnet? - I hvilken grad gis elevene muligheter til å utvikle matematisk forståelse i et tenkende klasserom gjennom bruken av oppgaver? -Hvilke vurderingssituasjoner kan en identifisere i de ulike delene av et tenkende klasserom. Enda mer spisset, hvordan kan en identifisere lærerens underveisvurdering gjennom lærerens handlinger? - Hvilke refleksjoner gjør læreren seg rundt vurdering i et tenkende klasserom?

Begrunn hvorfor det er nødvendig å behandle personopplysningene

Studien baserer seg på elev- og læreraktivitet i undervisningssituasjoner. Samt lærerens før og etterarbeid som danner grunnlaget for god undervisningspraksis.

Prosjektbeskrivelse

Samlet prosjektskisser.pdf

Ekstern finansiering

Ikke utfyllt

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Dylan Irons, 250576@uis.no, tlf: 48045104

Behandlingsansvar

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Stavanger / Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora / Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Raymond Bjuland, raymond.bjuland@uis.no, tlf: 51833494

Skal behandlingsansvaret deles med andre institusjoner (felles behandlingsansvarlige)?

Nei

Utvalg 1

Beskriv utvalget

Ungdomsskoleelever

Alder

12 - 16

Personopplysninger for utvalg 1

Navn (også ved signatur/samtykke)

Bilder eller videoopptak av personer

Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 1?

Deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Hvem samtykker for ungdom 16 og 17 år?

Foreldre/foresatte

Informasjon for utvalg 1

Informerer du utvalget om behandlingen av personopplysningene?

Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Informasjonsskriv

Informasjonsskriv - foreldre.pdf

Utvalg 2

Beskriv utvalget

Ungdomsskolelærer

Alder

25 - 60

Personopplysninger for utvalg 2

Navn (også ved signatur/samtykke)

Adresse eller telefonnummer

E-postadresse, IP-adresse eller annen nettidentifikator

Bilder eller videoopptak av personer

Lydopptak av personer

Hvordan samler du inn data fra utvalg 2?

Personlig intervju

Vedlegg

Pre-intervjuguide - lærer.pdf

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Deltakende observasjon

Grunnlag for å behandle alminnelige kategorier av personopplysninger

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Informasjon for utvalg 2

Informerer du utvalget om behandlingen av personopplysningene?

Ja

Hvordan?

Skriftlig informasjon (papir eller elektronisk)

Informasjonsskriv

Informasjonsskriv - lærer1.pdf

Tredjepersoner

Skal du behandle personopplysninger om tredjepersoner?

Nei

Dokumentasjon

Hvordan dokumenteres samtykkene?

Manuelt (papir)

Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?

Muntlig eller skriftlig beskjed til prosjektansvarlig eller ungdomsskolelærer

Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet personopplysninger om seg selv?

Muntlig eller skriftlig beskjed til prosjektansvarlig eller ungdomsskolelærer

Totalt antall registrerte i prosjektet

1-99

Tillatelser

Skal du innhente følgende godkjenninger eller tillatelser for prosjektet?

Ikke utfyllt

Behandling

Hvor behandles personopplysningene?

Mobile enheter tilhørende behandlingsansvarlig institusjon

Private enheter

Retningslinjer/tillatelse til å behandle opplysninger på private enheter

UiS Retningslinjer for behandling av personopplysninger i studentprosjekter -27.5.21 - versjon 1.2.pdf

Hvem behandler/har tilgang til personopplysningene?

Student (studentprosjekt)

Prosjektansvarlig

Tilgjengeliggjøres personopplysningene utenfor EU/EØS til en tredjestat eller internasjonal organisasjon?

Nei

Sikkerhet

Oppbevares personopplysningene atskilt fra øvrige data (koblingsnøkkel)?

Ja

Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?

Personopplysningene anonymiseres fortløpende

Endringslogg

Flerfaktorautentisering

Adgangsbegrensning

Varighet

Prosjektperiode

01.12.2022 - 31.12.2023

Hva skjer med dataene ved prosjektslutt?

Data slettes (sletter rådataene)

Vil de registrerte kunne identifiseres (direkte eller indirekte) i oppgave/avhandling/øvrige publikasjoner fra prosjektet?

Nei

Tilleggsopplysninger

---

be7833c8a

Vedlegg G – Sikt godkjenning

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer

560419

Vurderingstype

Standard

Dato

09.01.2023

Prosjekttittel

Undervisning i et tenkende klasserom

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Stavanger / Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora / Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Prosjektansvarlig

Raymond Bjuland

Student

Dylan Irons

Prosjektperiode

01.12.2022 - 31.12.2023

Kategorier personopplysninger

Alminnelige

Lovlig grunnlag

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.12.2023.

Meldeskjema

Kommentar

OM VURDERINGEN Sikt har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket. UTDYPENDE OM LOVLIG GRUNNLAG UTVALG 1 Prosjektet vil innhente samtykke fra foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake. FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER Vi har vurdert at du har lovlig grunnlag til å behandle personopplysningene, men husk at det er institusjonen du er ansatt/student ved som avgjør hvilke databehandlere du kan bruke og hvordan du må lagre og sikre data i ditt prosjekt. Husk å bruke leverandører som din institusjon har avtale med (f.eks. ved skylagring, nettspørreskjema, videosamtale el. Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). MELD VESENTLIGE ENDRINGER Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Se våre nettsider om hvilke endringer du må melde: https://sikt.no/melde-endringar-i-meldeskjema OPPFØLGING AV PROSJEKTET Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet. Lykke til med prosjektet!

b6515db63

Vedlegg H – TRU intervjuguide

The Mathematics

Core Questions: How do mathematical ideas from this unit/course develop in this lesson/lesson sequence? How can we create more meaningful connections?

Students often experience mathematics as a set of isolated facts, procedures and concepts, to be rehearsed, memorized, and applied. Our goal is to instead give students opportunities to experience mathematics as a coherent and meaningful discipline. This requires identifying the important mathematical ideas behind facts and procedures, highlighting connections between skills and concepts, and relating concepts to each other—not just in a single lesson, but also across lessons and units. It requires engaging students with centrally important mathematics in an active way, so that they can make sense of concepts and ideas for themselves and develop robust networks of understanding. And it requires engaging students in authentic performances of important disciplinary practices (e.g., reasoning abstractly and quantitatively, constructing mathematical arguments and critiquing the reasoning of others).

Planning

How will important mathematical ideas and practices develop in this lesson and unit? How can we connect the ideas and practices that have surfaced in recent lessons to this lesson and future lessons?

Reflecting

How have we seen students engage with important mathematical ideas and practices? How has this engagement looked and sounded in specific cases?

Things to think about

- What are the mathematical goals for the lesson?
- What connections exist (or could exist) between important ideas in this lesson and important ideas in past and future lessons?
- How do important mathematical practices develop in this lesson/unit?
- How are facts and procedures in the lesson justified?
- How are facts and procedures in the lesson connected with important ideas and practices?
- How do we see/hear students engage with important ideas and practices during class?
- Which students get to engage deeply with important ideas and practices?
- How can we create opportunities for more students to engage more deeply with important ideas and practices?

Cognitive Demand

Core Questions: What opportunities do students have to make their own sense of mathematical ideas? How can we create more opportunities?

We want students to engage authentically with important mathematical ideas, not simply receive knowledge. This kind of learning requires that students engage in *productive struggle,* grappling with difficult concepts and challenging problems. As teachers, we must support students in ways that maintain their opportunities to do this grappling for themselves. Our goal is to help students understand the challenges they confront and persist in solving them, while leaving them room to make their own sense of those challenges.

Planning

What opportunities might students have to make their own sense of important mathematical ideas? How can we create more of these opportunities?

Reflecting

How have we seen students make their own sense of important mathematical ideas? How has this sense-making looked and sounded in specific cases?

Things to think about

- What opportunities exist for students to struggle with important mathematical ideas?
- How are students' struggles supporting their engagement with important mathematical ideas?
- How does (or how could) the teacher respond to students' struggles, and how do (or how could) these responses maintain students' opportunities to develop their own ideas and understandings?
- What resources (other students, the teacher, notes, texts, technology, manipulatives, various representations, etc.) are available for students to use when they encounter struggles? Are there more resources we can make available?
- What resources are students actually using, and how might they be supported to make better use of resources?
- Which students get to engage deeply with important mathematical ideas?
- How can we create opportunities for more students to engage more deeply with important mathematical ideas?
- What community norms seem to be evolving around the value of struggle and mistakes?

Equitable Access to Content

Core Questions: Who does and does not participate in the mathematical work of the class, and how? How can we create more opportunities for each student to participate meaningfully?

All students should have access to opportunities to develop their own understandings of rich mathematics, and to build productive mathematical identities. For any number of reasons, it can be extremely difficult to provide this access to everyone, but that doesn't make it any less important! We want to challenge ourselves to recognize who has access and when. There may be mathematically rich discussions or other mathematically productive activities in the classroom—but who gets to participate in them? Who might benefit from different ways of organizing classroom activity?

Planning

What opportunities exist for each student to participate in the intellectual work of the class? How can we create more opportunities for more students?

Reflecting

Who have we seen participate in the intellectual work of the class? How has this participation looked and sounded in specific cases?

Things to think about

- What is the range of ways that students can and do participate in the mathematical work of the class (talking, writing, leaning in, listening hard; manipulating symbols, making diagrams, interpreting text, using manipulatives, connecting different ideas, etc.)?
- Which students participate in which ways?
- Which students are most active, and when?
- In what ways can particular students' strengths or preferences be used to engage them in the mathematical activity of the class?
- What opportunities do various students have to make meaningful mathematical contributions?
- What are the language demands of participating in the mathematical work of this class (e.g., academic vocabulary, mathematical discourse practices)?
- How can we support the development of students' academic language?
- How are norms (or interactions, lesson structures, task structure, particular resources, etc.) facilitating or inhibiting participation for particular students?
- What teacher moves might expand students' access to meaningful participation (such as modeling ways to participate, holding students accountable, point out students' successful participation)?
- How can we support particular students we are concerned about (in relation to learning, issues of safety, participation, etc.)?
- How can we create opportunities for more students to participate more actively?

Agency, Ownership, and Identity

Core Questions: What opportunities do students have to see themselves and each other as powerful doers of mathematics? How can we create more of these opportunities?

Many students have negative beliefs about themselves and mathematics, for example, that they are "bad at math," or that math is just a bunch of facts and formulas that they're supposed to memorize. Our goal is to support all students—especially those who have not been successful with mathematics in the past—to develop a sense of mathematical agency and ownership over their own learning. We want students to come to see themselves as mathematically capable and competent—not by giving them easy successes, but by engaging them as sense-makers, problem solvers, and creators of mathematical ideas.

Planning

What opportunities might exist for students to generate and explain their own ideas? To respond to each other's ideas? How can we create more opportunities?

Reflecting

How have we seen students explain their own and respond to each other's ideas? What has that looked and sounded like in specific cases?

Things to think about

- Who generates the ideas that get discussed?
- What kinds of ideas do students have opportunities to generate and share (strategies, connections, partial understandings, prior knowledge, representations)?
- Who evaluates and/or responds to others' ideas?
- How deeply do students get to explain their ideas?
- How does (or how could) the teacher respond to student ideas (evaluating, questioning, probing, soliciting responses from other students, etc.)?
- How are norms about students' and teachers' roles in generating ideas developing?
- How are norms about what counts as mathematical activity (justifying, experimenting, connecting, practicing, memorizing, etc.) developing?
- Which students get to explain their own ideas? To respond to others' ideas in meaningful ways?
- Which students seem to see themselves as powerful mathematical thinkers right now?
- How might we create more opportunities for more students to see themselves and each other as powerful mathematical thinkers?

Formative Assessment

Core Questions: What do we know about each student's current mathematical thinking? How can we build on it?

We want instruction to be responsive to students' actual thinking, not just our hopes or assumptions about what they do and don't understand. It isn't always easy to know what students are thinking, much less to use this information to shape classroom activities—but we can craft tasks and ask purposeful questions that give us insights into the strategies students are using, the depth of their conceptual understanding, and so on. Our goal is to then use those insights to guide our instruction, not just to fix mistakes but to integrate students' understandings, partial though they may be, and build on them.

Planning

What do we know about each student's current thinking, and how might this lesson or unit build on that thinking? How can we learn more about each student's thinking?

Reflecting

What have we learned in recent lessons about each student's thinking? How did this thinking look and sound in specific cases? How was this thinking built upon?

Things to think about

- What opportunities exist (or could exist) for students to develop their own strategies, approaches and understandings of mathematics?
- What opportunities exist (or could exist) for students to share their ideas and reasoning and to connect their ideas to others'?
- What different ways do students get to share their mathematical ideas and reasoning (writing on paper, speaking, writing on the board, creating diagrams, demonstrating with materials/artifacts, etc.)?
- Who do students get to share their ideas with (a partner, a small group, the whole class, the teacher)?
- What opportunities exist to build on students' mathematical thinking, and how are teachers and/or other students taking up these opportunities?
- How do students seem to be making sense of the mathematics in the lesson, and what responses might build on that thinking?
- How can activities be structured so that students have more opportunity to build on each other's ideas?
- What might we try (what tasks, lesson structures, questioning prompts, etc.) to surface student thinking, especially the thinking of students whose ideas we don't know much about yet?

Vedlegg I – TRU observasjonsguide

<table>
<tr><td colspan="2">THE MATHEMATICS
The extent to which central mathematical content and practices, as represented by State or he Common Core State Standards, are present and embodied in instruction. Every student should have opportunities to grapple meaningfully with key ideas and, in doing so, to become a knowledgeable, flexible, and resourceful mathematical thinker and problem solver. Teachers should have opportunities to consider and discuss how each lesson's activities connect to the concepts, practices, and habits of mind they want students to develop over time.</td></tr>
<tr><td>Each Student…
• Engages with grade level mathematics in ways that highlight important concepts, procedures, problem solving strategies, and applications
• Has opportunities to develop productive mathematical habits of mind
• Has opportunities for mathematical reasoning, orally and in writing, using appropriate mathematical language
• Explains their reasoning processes as well as their answers.</td><td>Teachers…
• Highlight important ideas and provide opportunities for students to engage with them
• Use materials or assignments that center on key ideas, connections, and applications
• Explicitly connect the lesson's big ideas to what has come before and will be done in the future
• Support the purposeful use of academic language and of representations (e.g., graphs, tables, symbols) central to mathematics
• Support students in seeing mathematics as being coherent, connected, and comprehensible</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Other focal points for observation:</td></tr>
<tr><td colspan="2">What are the big ideas in this lesson? How do they connect to what has come before, and/or establish a base for future work? How do the ways students engage with the material support the development of conceptual understanding and the development of mathematical habits of mind?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Goal: All students work on core mathematical issues in ways that enable them to develop conceptual understandings, develop reasoning and problem solving skills, and use mathematical concepts, tools, methods and representations in relevant contexts.</td></tr>
</table>

COGNITIVE DEMAND	
The extent to which students have opportunities to grapple with and make sense of important mathematical ideas and their use. Students learn best when they are challenged in ways that provide room and support for growth, with task difficulty ranging from moderate to demanding. The level of challenge should be conducive to what has been called "productive struggle."	
Each student… • Engages individually and collaboratively with challenging ideas • Actively seeks to explore the limits of their current understandings • Is comfortable sharing partial or incorrect work as part of a larger conversation • Reasons and tests ideas in ways that connect to and build on what they know • Explains what they have done so far before asking for help • Continues to wrestle with an idea after the teacher leaves	Teachers… • Position students as sense makers who can make sense of key conceptual ideas. • Use or adapt materials and activities to offer challenges that students can use, individually or collectively, to deepen understandings • Build and maintain classroom norms that support every student's engagement with those materials and activities • Monitor student challenge, adjusting tasks, activities, and discussions so that all students are engaged in productive struggle • Supports students without removing the challenge from the work they are engaged in
• Other focal points for observation:	
What opportunities do students have to make sense of mathematical content and practices? How are they supported in sense making so that they are not lost – yet real challenge has been maintained, so that they have opportunities to grapple with important ideas?	
Goal: All students have opportunities to make their own sense of important mathematical ideas, developing deeper understandings, connections, and applications by building on what they know.	

EQUITABLE ACCESS TO MATHEMATICS	
The extent to which classroom activities invite and support the meaningful engagement with core mathematical content and practices by all students. Finding ways to support the diverse range of learners in engaging meaningfully is the key to an equitable classroom.	
Each student… • Contributes to collective sense making in any of a number of different ways (e.g., proposing ideas, asking questions, creating diagrams…) • Actively listens to other students and builds on their ideas • Supports other students' developing understandings • Explains, interprets, applies and reflects on important mathematical ideas • Participates meaningfully in the mathematical work of the class	Teachers… • Create safe environments • Use tasks and activities that provide multiple entry points and support multiple approaches to the mathematics • Provide opportunities for students to see themselves, and their personal and community interests, reflected in the curriculum • Validate different ways of making contributions • Build and maintain norms that support every student's participation in group work and whole class activities • Support particular needs, such as those of language learners, for full participation • Expect and support meaningful mathematical engagement from all students, helping them contribute and build on contributions from others
• Other focal points for observation:	
In what ways does each student engage in the work of the class? How can more opportunities for every student to participate in meaningful ways be created?	
Goal: All students are supported in access to central mathematical content, and participate actively in the work of the class. Diverse strengths and needs are built on through the use of various strategies, resources, and technologies that enable all students to participate meaningfully.	

AGENCY, OWNERSHIP, AND IDENTITY *The extent to which every student has opportunities to explore, conjecture, reason, explain, and build on emerging ideas, contributing to the development of agency (the willingness to engage academically) and ownership over the content, resulting in positive mathematical identities.*	
Each student… • Takes ownership of the learning process in planning, monitoring, and reflecting on individual and/or collective work • Asks questions and makes suggestions that support analyzing, evaluating, applying and synthesizing mathematical ideas • Builds on the contributions of others and help others see or make connections • Holds classmates and themselves accountable for justifying their positions, through the use of evidence and/or elaborating on their reasoning	Teachers… • Provide time for students to develop and express mathematical ideas and reasoning • Work to make sure all students have opportunities to have their voices heard • Encourage student-to-student discussions and promote productive exchanges • Assign tasks and pose questions that call for mathematical justification, and for students to explain their reasoning • Employ a range of techniques that attribute ideas to students, to build student ownership and identity
• Other focal points for observation:	
What opportunities do all students have to see themselves and others as proficient mathematical thinkers, to grapple with challenges and construct new understandings, to build on others' ideas, and demonstrate their understandings? How can more of these opportunities be created?	
Goal: All students build productive mathematical identities through taking advantage of opportunities to engage meaningfully with the discipline and share and refine their developing ideas.	

FORMATIVE ASSESSMENT

The extent to which classroom activities elicit all students' thinking and subsequent interactions respond to that thinking, by building on productive beginnings or by addressing emerging misunderstandings. High quality instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to develop deeper understandings, both as shaped by the teacher and in student-to-student interactions.

Each student…	Teachers…
• Explains their thinking, even if somewhat preliminary • Sees errors as opportunities for new learning • Consistently reflects on their work and the work of peers • Sees fellow students as resources for their own learning • Provides specific and accurate feedback to fellow students • Makes use of feedback in revising their work	• Create safe climates in which students feel free to express their ideas and understandings • Use materials that elicit multiple strategies, and have students explain their reasoning, in order to gain information about student' emerging understandings • Flexibly adjust content and process, providing students opportunities for re-engagement and revision • Provide timely and specific feedback to students, as part of classroom routines that prompt students to make active use of feedback to further their learning • Create opportunities for students' individual and collaborative reflection on their knowledge and learning

• Other focal points for observation:

What opportunities exist for all students to demonstrate their understandings? What opportunities exist to build on the thinking that is revealed? How do teachers and/or other students take up these opportunities? Where can more be created?

Goal: Every student's learning is continually enhanced by the ongoing strategic and flexible use of techniques and activities that allow students to reveal their emerging understandings, and that provide opportunities both to rethink misunderstandings to build on productive ideas.

Vedlegg J – TRU Scoring rubric

Summary Rubric

	The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, and Identity	Uses of Assessment
	How accurate, coherent, and well justified is the mathematical content?	*To what extent are students supported in grappling with and making sense of mathematical concepts?*	*To what extent does the teacher support access to the content of the lesson for all students?*	*To what extent are students the source of ideas and discussion of them? How are student contributions framed?*	*To what extent is students' mathematical thinking surfaced; to what extent does instruction build on student ideas when potentially valuable or address misunderstandings when they arise?*
1	Classroom activities are unfocused or skills-oriented, lacking opportunities for engagement with key grade level content (as specified in the Common Core Standards)	Classroom activities are structured so that students mostly apply memorized procedures and/or work routine exercises.	There is differential access to or participation in the mathematical content, and no apparent efforts to address this issue.	The teacher initiates conversations. Students' speech turns are short (one sentence or less), and constrained by what the teacher says or does.	Student reasoning is not actively surfaced or pursued. Teacher actions are limited to corrective feedback or encouragement.
2	Activities are at grade level but are primarily skills-oriented, with few opportunities for making connections (e.g., between procedures and concepts) or for mathematical coherence (see glossary).	Classroom activities offer possibilities of conceptual richness or problem solving challenge, but teaching interactions tend to "scaffold away" the challenges, removing opportunities for productive struggle.	There is uneven access or participation but the teacher makes some efforts to provide mathematical access to a wide range of students.	Students have a chance to explain some of their thinking, but the teacher is the primary driver of conversations and arbiter of correctness. In class discussions, student ideas are not explored or built upon.	The teacher refers to student thinking, perhaps even to common mistakes, but specific students' ideas are not built on (when potentially valuable) or used to address challenges (when problematic).
3	Classroom activities support meaningful connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) and provide opportunities for building a coherent view of mathematics.	The teacher's hints or scaffolds support students in productive struggle in building understandings and engaging in mathematical practices.	The teacher actively supports and to some degree achieves broad and meaningful mathematical participation; **OR** what appear to be established participation structures result in such engagement.	Students explain their ideas and reasoning. The teacher may ascribe ownership for students' ideas in exposition, **AND/OR** students respond to and build on each other's ideas.	The teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings.

Whole Class Activities: **L**aunch, Teacher **E**xposition, Whole Class **D**iscussion

On the score sheet, Circle one of ***L / E / D*** *if the episode is primarily of that type. If a* ***L****aunch is primarily logistical, some dimensions may be labeled N/A.*

	The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, and Identity	Uses of Assessment
	How accurate, coherent, and well justified is the mathematical content?	*To what extent are students supported in grappling with and making sense of mathematical concepts?*	*To what extent does the teacher support access to the content of the lesson for all students?*	*To what extent are students the source of ideas and discussion of them? How are student contributions framed?*	*To what extent is students' mathematical thinking surfaced; to what extent does instruction build on student ideas when potentially valuable or address misunderstandings when they arise?*
1	Classroom activities are unfocused or skills-oriented, lacking opportunities for engagement with key grade level content (as specified in the Common Core Standards)	Classroom activities are structured so that students mostly apply memorized procedures and/or work routine exercises.	There is differential access to or participation in the mathematical content, and no apparent effort to address this issue.	The teacher initiates conversations. Students' speech turns are short (one sentence or less), and constrained by what the teacher says or does.	Student reasoning is not actively surfaced or pursued. Teacher actions are limited to corrective feedback or encouragement.
2	Activities are at grade level but are primarily skills-oriented, with few opportunities for making connections (e.g., between procedures and concepts) or for mathematical coherence (see glossary).	Classroom activities offer possibilities of conceptual richness or problem solving challenge, but teaching interactions tend to "scaffold away" the challenges, removing opportunities for productive struggle.	There is uneven access or participation, but the teacher makes some efforts to provide mathematical access to a wide range of students.	Students have a chance to explain some of their thinking, but the teacher is the primary driver of conversations and arbiter of correctness. In class discussions, student ideas are not explored or built upon.	The teacher refers to student thinking, perhaps even to common mistakes, but specific students' ideas are not built on (when potentially valuable) or used to address challenges (when problematic).
3	Classroom activities support meaningful connections between procedures, concepts and contexts (where appropriate) and provide opportunities for building a coherent view of mathematics.	The teacher's hints or scaffolds support students in productive struggle in building understandings and engaging in mathematical practices.	The teacher actively supports and to some degree achieves broad and meaningful mathematical participation; **OR** what appear to be established participation structures result in such engagement.	Students explain their ideas and reasoning. The teacher may ascribe ownership for students' ideas in exposition, **AND/OR** students respond to and build on each other's ideas.	The teacher solicits student thinking and subsequent instruction responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing emerging misunderstandings.

Small Group Work

If students are engaged in early brainstorming, the role of the teacher is to support students in exploring and justifying. This is the reason for "ORs" in the scoring.

	The Mathematics	Cognitive Demand	Access to Mathematical Content	Agency, Authority, and Identity	Uses of Assessment
	How accurate, coherent, and well justified is the mathematical content?	*To what extent are students supported in grappling with and making sense of mathematical concepts?*	*To what extent are all students supported in meaningful participation in group discussions?*	*To what extent do teacher support and/or group dynamics provide access to "voice" for students?*	*To what extent does the teacher monitor and help students refine their thinking within small groups?*
1	The mathematics discussed is not at grade level; **OR** discussions are aimed at "answer getting." Explanations, if they appear, are largely procedural.	Activities or teacher intervention constrain students to activities such as applying straightforward or memorized procedures.	Some students are disengaged or marginalized, and differential access to the mathematics or to the group is not addressed.	Teacher interventions, if any, either constrain students to producing short responses to the teacher **OR** do not address clear imbalances in group discussions.	Teacher actions are simply corrective (e.g., leading students down a predetermined path) and the teacher does not meaningfully solicit or pursue student thinking.
2	Discussions are at grade level but are primarily skills-oriented, with few opportunities for making connections (e.g., between procedures and concepts) or for mathematical coherence (see glossary).	Activities offer possibilities of productive engagement or struggle with central mathematical ideas, BUT students are either left unsupported when lost, OR the teacher's actions scaffold away challenges.	All team members appear to be doing mathematics, but some are not participating in group activities; the teacher does not support their engagement in student-to-student discussion.	At least one student has a chance to talk about the mathematical content, but the teacher is the primary driver of conversations and arbiter of correctness. Students are not supported in building on each other's ideas.	Teacher solicits student thinking, but subsequent discussion does not build on nascent ideas. Teacher actions are corrective in nature, possibly by leading students in the "right" directions.
3	Explanation of and justification for central grade level mathematical ideas is coherent.	Students are supported in engaging productively with central mathematical ideas. This may involve struggle; it certainly involves having time to think things through.	Everyone in the team contributes to group or subgroup mathematical discussions, **OR** teacher moves to have all team members make meaningful contributions.	At least one student puts forth and defends his/her ideas/reasoning **AND, EITHER** students build on each other's ideas **OR** the teacher ascribes ownership for students' ideas in subsequent discussion.	The teacher solicits student thinking, **AND** subsequent discussion responds to those ideas, by building on productive beginnings or addressing possible misunderstandings.