

Et matematisk bevis på at det alltid er  
vindstille et sted.

Universitetet i Stavanger



---

Universitetet  
i Stavanger

Mathilde Kroslid Kristensen

15. Mai 2024

# Abstrakt

I denne avhandlingen blir sentrale temaer innen topologi, algebra og analyse brukt til å bevise at det alltid er vindstille et sted på jorden. Analysen baserer seg på en topologisk betraktning av jorden som en sfære og anvender dens geometriske egenskaper som grunnlag for å løse denne problemstillingen. Sentrale konsepter fra matematikk og fysikk vil bli introdusert for å belyse og støtte denne undersøkelsen. Spesielt vil topologi, homomorfi, Euler-karakteristikk og Hairy Ball-teoremet være nøkkelpbegreper som danner grunnlaget for analysen og bevisførselen.

# Contents

<b>Introduksjon</b>	<b>3</b>
<b>Nødvendig forkunnskap</b>	<b>5</b>
<b>Hoveddel</b>	<b>6</b>
Topologi . . . . .	6
Topologisk invariant . . . . .	8
Metrikk . . . . .	9
Kompakthet . . . . .	11
Kontinuerlig funksjon . . . . .	12
Gruppe teori . . . . .	13
Undergrupper . . . . .	14
Homomorfi . . . . .	16
Simplekser og simplisielle komplekser . . . . .	16
Kjedegruppen til det simplisielle komplekset . . . . .	18
Trianguleringer . . . . .	19
Randoperatører . . . . .	20
Homologi grupper . . . . .	22
Betti-tallene . . . . .	24
Hull av ulike dimensjoner . . . . .	26
Vektorfelt . . . . .	29
Hairy ball theorem . . . . .	29
Euler karakteristikk . . . . .	30
Utregning av homologi gruppe ved hjelp av simplisielle komplekser .	34
<b>Konklusjon</b>	<b>36</b>
<b>References</b>	<b>37</b>

# Introduksjon

Denne bacheloravhandlingen tar sikte på å utnytte temaer innen topologi, homomorfi, gruppeteori og geometri for å løse et matematisk problem, nemlig å vise at det alltid finnes minst ett sted på jorden hvor det er vindstille. For å kunne gjøre dette vil topologien til en sfære bli utforsket i sammenheng med andre figurers topologi, både med samme og ulik topologi. Topologi er matematikken bak "å se forskjell på" ting og dermed kunne skille mellom ulike figurer. Det vil også tas nytte av de ulike egenskapene som følger med topologisk likhet mellom figurer som ikke nødvendigvis ser lik ut for å komme frem til en matematisk konklusjon.

I matematikken liker vi å klassifisere ting. Det er en viktig metode for å skille mellom og kategorisere objekter. Gruppeteorien er et godt redskap som lar oss skille mellom forskjellige geometriske strukturer og klassifisere dem. Gruppeteori vil også spille en sentral rolle i å kunne analysere de matematiske sammenhengene og dermed svare på problemstillingen.

Samtidig ønsker jeg som lektorstudent å forsøke å presentere de ulike begrepene på en mer tilgjengelig måte som er forståelig for flere, selv de uten en omfattende matematisk bakgrunn. Derfor vil teksten inneholde både nøyaktige matematiske definisjoner og formler, samt enklere forklaringer for å fremme en bredere forståelse blant lesere.

De matematiske definisjonene som blir brukt vil hovedsaklig være hentet fra Mikio Nakaharas bok *Geometry, Topology and Physics*, publisert i 2003 [1]. I tillegg vil enkelte emner bli støttet av andre kilder, som vil vises nederst i dokumentet.

I denne avhandlingen blir det essensielt å etablere en forbindelse mellom topologiske og algebraiske applikasjoner, og anvende analytiske tilnærminger til å oppnå en dypere forståelse av de ulike funnene. Forbindelser mellom emnene kan bli fremhevet av homologi, som knytter sammen topologi og al-

gebra. En analytisk tilnærming til evaluering av resultater innen topologi og algebra kan potensielt lede til utforskningen av Hairy Ball-teoremet, som vi senere vil se er en ”praktisk” tilnærming av funnene. Det vil være avgjørende for å kunne utnytte de ulike egenskapene i ulike kontekster og dermed muliggjøre funn av løsninger.

Jeg ønsker å rette en spesiell takk til veileder, Eirik Eik Svanes. Takk for god hjelp både før og underveis i arbeidet. Han har, sammen med hans doktorgradstudent, gitt god undervisning i de relevante temaene, samt bidratt med oppfølging og tilbakemeldinger underveis.

# Nødvendig forkunnskap

For å kunne lese denne oppgaven uavbrutt, kan det være hensiktsmessig å ha en viss kjennskap til begrepene som blir brukt, men det er ikke et absolutt krav. Flere av begrepene vil bli forklart på enklere måter dersom en ikke har kjennskap til dem fra før. Den neste delen av oppgaven vil dermed bli brukt til å forklare de relevante matematiske begrepene både matematisk og på en mer tilgjengelig måte.

# Hoveddel

## Topologi

Topologi er en veldig abstrakt gren innen matematikk, og kan derfor være utfordrende å lære. Derfor kommer det nå en triviell forklaring på begrepet. Topologi er et begrep innen matematikk som ser på hvordan en figur kan deformeres uten å rive, klippe eller lime den. La oss ta en enkel figur som en sirkel eller en firkant. Da handler topologi om å se på hva som skjer med figuren dersom man bøyer, strekker, vrir og klemmer figuren uten å rive den i stykker. Dersom disse transformasjonene kan gjennomføres uten å endre figurenes grunnleggende egenskaper, ansees figurene ”topologisk like”. En kube kan for eksempel kontinuerlig deformeres til en sfære, og derfor betraktes disse to figurene som topologisk like, til tross for deres åpenbare forskjeller i form. Det samme gjelder for torusen og kaffekoppen. Begge disse geometriske formene har 1 hull, og kan dermed deformeres til den andre uten at vi limer, klipper eller river i figuren. Når vi snakker om torusen så er det en doughnut lignende struktur ”uten fyllet”, altså vi har kun med overflaten og ikke det inne i figuren.

For å forstå hvordan dette fungerer, kan en bruke plastelina som hjelpemiddel. Dersom en lager en kule av plastelina, kan en uten å rive figuren i stykker forme den om til en kube. Dette gjør en ved å deformere ved å klemme på plastelinaen og dermed omgjøre den ene figuren til den andre. Dette fungerer begge veier. Alle figurer du kan gjøre dette med ansees topologisk ”lik”. Når det kommer til torusen og kaffekoppen kan vi gjøre det samme fordi begge har ett eksisterende hull, så vi trenger ikke lage noen rifter for å omforme den ene til den andre. Her har ikke størrelsen på den geometriske figuren noen betydning. Det er lov å strekke på figurene. Det vil si at uansett hvilken størrelse den geometriske figuren har så kan vi omforme den til en figur med samme mengde hull.

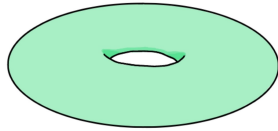


Figure 1: Torus

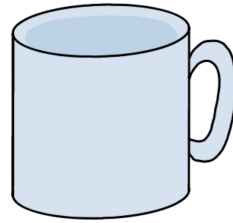


Figure 2: Kopp

Siden begge disse figurene har ett og kun ett hull, vil vi ved kontinuerlig deformering kunne omforme torusen til koppen uten å klippe eller lime. Da er disse to figurene topologisk "like". Det samme ser en for andre geometriske figurer som har ett og kun ett hull. Denne likheten gjelder også som nevnt for figurer uten hull, som for eksempel kuben, pyramiden eller sfæren.

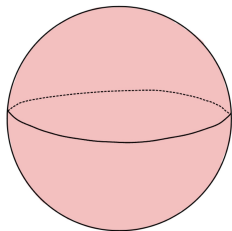


Figure 3: Kule

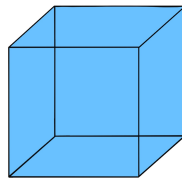


Figure 4: Kube

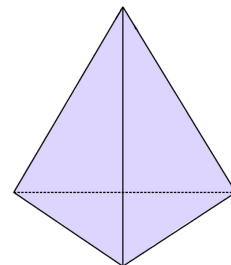


Figure 5: Pyramide

Når vi ser på figurene over som geometriske figurer, er det helt tydelig at disse mangfoldighetene er veldig ulike. Derimot om en ser på deres topologiske egenskaper er de helt lik siden ingen av de har noen gjennomgående hull. Hullene kalles for *genus*. Så kulen, pyramiden og kuben har genus null, altså null hull. Torusen og kaffekoppen har begge genus "g" lik 1 og for dobbel-torusen er  $g=2$ . Sånn fortsetter det etter hvor mange hull figuren har.

Matematisk skrives dette:



**Definisjon 1** (Topologisk rom , basert på [1] 2.3.1 ). Et *topologisk rom* består av et sett  $X$ , og et sett  $T$  bestående av åpne delmengder  $U \subset X$ .  $(X, T)$  er ett topologisk rom dersom  $T$  oppfyller de følgende tre kravene:

- $\phi, X \in T$

Den tomme mengden  $\phi$  og mengden  $X$  må begge være elementer i topolgien  $T$ .

- $\{U_i \in T\} \Rightarrow \bigcup_i U_i \in T$

Der  $U_i$  i prinsippet et uendelig antall undermengder.

- $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subseteq T$

Her oppgis en endelig mengde undermengder  $U_n$  slik at vi kan ta snitt av undermengdene og finne hva som er felles for dem.

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in T$$

For topologiske rom er det enklere å se på forskjeller enn likheter. For vektorrom er de mest interessante funksjonene lineære. For topologien derimot er de mest interessante funksjonene kontinuerlige. Grunnen til dette er at da kan vi gjøre en kontinuerlig deformasjon fra f.eks torusen til kaffekoppen som har samme topologi. Torusen er også topologisk lik produktet av to sirkler og kan derfor skrives som enten  $T^2$  eller  $S^1 \times S^1$ .

## Topologisk invariant

Invariant betyr i matematikk generelt at noe ikke endrer seg under en transformasjon. I topologi handler det om at et rom blir uendret etter en bestemt type transformasjon. Dersom to topologiske rom har samme invariant,  $I$ , kan de være enten like eller ulike, men dersom invariantene er ulike kan de ikke være like.

1.  $I(X) \neq I(Y) \Leftrightarrow X \neq Y$

2.  $I(X) = I(Y)$ , betyr ikke nødvendigvis at  $X=Y$ , men det er mulig

En form for invariant er genus,  $g$ . Genus av en figur tilsvarer antall hull i figuren. Sfæren som ikke har noen hull har  $g=0$ , mens torusen har ett hull og dermed  $g=1$ . Det betyr at de har forskjellig invarians og dermed forskjellig topologi. Per definisjon er topologiske invarianter bevart under homomorfi. Det er et begrep vi vil komme innpå når vi senere snakker om gruppeteori.

Men enkelt fortalt kan invariantene også bevares under homotopi som betyr det at de er bevart under en kontinuerlig deformasjon som ikke nødvendigvis har en invers. Homotopi skrives med symbolet,  $\simeq$ . Invariantene spiller en viktig rolle i topologisk analyse og identifiseringen av topologiske rom siden de lar oss skille mellom rom som på overflaten er topologisk lik, men kanskje har strukturelle egenskaper som er ulike.

## Metrikk

[2]

Innen matematikk er en metrikk en funksjon som beskriver avstanden mellom to punkter i en mengde. Funksjonen er kun en metrikk om alle av fire av følgende krav er oppfylt [2]:

1. Den kan aldri ha en negativ verdi. Avstand kan ikke beskrives med et negativt tall.
2. Den må oppfylle trekantulikheten. Det betyr at i en trekant vil summen av lengdene av to sider alltid være større eller lik lengden av den tredje siden [3].
3. Avstanden fra a til b må være den samme som avstanden fra b til a.
4. Den kan aldri bli null med mindre a og b har samme verdi.

Matematisk skrives dette:

**Definisjon 2.** (Metrikk definisjon, hentet fra [2])

1.  $d(x, y) \geq 0$
2.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
3.  $d(x, y) = d(y, x)$
4.  $d(x, y) = 0$  kun når  $x = y$

For denne definisjonen gjelder  $x, y, z \in X$ .

Her er  $d(x, y)$  lengden mellom punktene x og y. I punkt to er  $d(x, z)$  og  $d(z, y)$  lengdene mellom punktene x, y og z.

Grunnen til å inkludere metrikk i denne oppgaven er fordi det gir oss muligheten til å regne på topologi. Ved å la epsilon  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$  og  $x \in X$  kan vi definere en "åpen ball". Her er  $X$  et metrisk rom.

**Definisjon 3.** (Definisjon for åpne baller, hentet fra [1] kapittel 2.3.1 )

$$U_{(x,\epsilon)} = \{y \in X | d(y, x) < \epsilon\} \quad (1)$$

$(X, d)$  er et metrisk rom. Figuren under illustrerer den åpne ballen  $U_{x,\epsilon}$ .

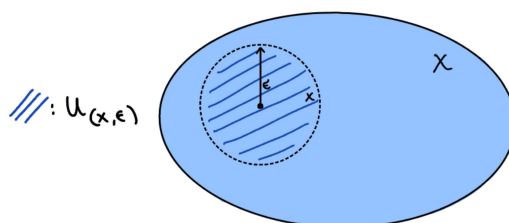


Figure 6: Figuren viser den åpne ballen i  $X$  med radius  $\epsilon$

Den åpne ballen kan brukes til å definere "vanlig" topologi ved å finne alle mulige åpne baller i  $X$ . Unionen av disse gir mengder i topologien. For å kunne bruke metrikk til å definere åpne mengder, definerer vi åpne kuler rundt hvert punkt i den åpne mengden. Den åpne ballen er alle punkter innenfor en bestemt avstand,  $\epsilon$ , fra det gitte punktet i rommet. En mengde er åpen dersom det for et hvert punkt i mengden eksisterer en åpen kule som er helt inneholdt i mengden.

Metrisk topologi kan beskrives slik:

$$T_d = \{\text{alle mengder av åpne baller i } X\} \quad (2)$$

Det betyr at alle unioner av åpne baller gir den metriske topologien.  $T_d$  er den vanlige topologien på rommet  $\mathbb{R}^n$ . Om vi forestiller oss den som en åpen firkant begrenset av punktene a, b, c og d som er en åpen undermengde  $U$  av  $\mathbb{R}^2$ , kan vi prøve å definere topologien ved hjelp av åpne baller. For å gjøre dette bruker vi uendelig mange åpne baller med ulik størrelse for å klare å dekke hele den åpne mengden. Så lenge hele den åpne kulen er innefor den åpne mengden. Det vil gi oss den åpne firkanten som her er den "vanlige topologien". Da kan vi definere at unionen av åpne baller har samme topologien som unionen av åpne intervaller. Dette er det direkte produktet av åpne intervaller. Under vil det være en illustrasjon av dette:

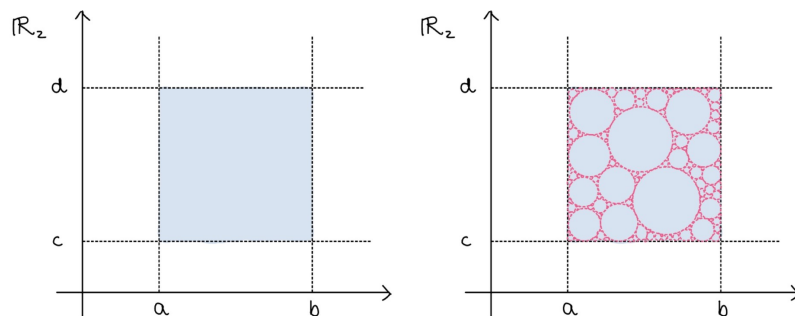


Figure 7: Illustrasjonen til venstre viser den vanlige topologien på  $\mathbb{R}^2$  som her er en åpen firkant. Den andre viser hvordan vi bruker åpne baller til å bestemme topologien til den åpne firkanten.

Dermed kan vi definere topologien på  $\mathbb{R}^2$  ved at:

$$T_{\text{vanlig}} = T_d \tag{3}$$

Dette kan vi gjøre nettopp fordi den "vanlige" topologien tar union av åpne intervaller og  $T_d$  består av unionen av åpne baller som er definert topologisk "lik" de åpne intervallene.. På denne måten kan vi finne den vanlige topologien ved hjelp av unionen av uendelig mange åpne baller.

## Kompakthet

(Basert på [1] kapittel 2.3.5)

Udermengden  $U$  av  $\mathbb{R}^n$  er kompakt hvis og bare hvis  $U$  er lukket og bundet.  $X$  er bundet dersom  $X \subseteq B_a(\vec{x}, a)$ . Det betyr at  $X$  er inneholdt i en endelig stor boks eller kule. Dersom vi kan definere en åpen kule med formelen 3, som inneholder hele figuren så er figuren bundet. Vi kan for eksempel finne en åpen disk som inneholder hele sirkelen,  $S^1$ , og dermed er sirkelen bundet. En annen måte å beskrive at noe er bundet er ved å si at den ikke tar uendelig mye plass. Funksjonen  $f(x) = x^2$  er ikke begrenset og er dermed ikke bundet. Dersom man definerer funksjonen for bestemte verdier derimot, så vil den være bundet. Et eksempel på dette er  $f(x) = x^2, [-2, 2]$ . Siden den ikke er uendelig stor vil vi kunne plassere den inne i en åpen mengde. Udermengden må også være lukket for å være kompakt. Den er lukket dersom den inneholder alle sine grensepunkter.

## Kontinuerlig funksjon

En kontinuerlig funksjon er et begrep innen matematikken som beskriver funksjoner uten hopp eller sprang. For eksempel en funksjon som kan tegnes uten at en løfter blyanten. Grafen til en slik funksjon vil ikke ha værken hopp, sprang, avbrudd eller hull. Et eksempel på en slik funksjon er kontinuerlige målinger av temperatur. Dersom en konsekvent måler temperaturen ved jevne mellomrom, vil linjen mellom hvert punkt gå gradvis og fint. Det vil med andre ord ikke skje noen brå endringer. En diskontinuerlig funksjon derimot kunne vært hvor mange bøker en leser. Her vil det gå lang tid mellom hver fullførte bok siden vi ikke kan lese en kvart bok og dermed vil vi få brå, diskontinuerlige sprang.

Innen topologi er begrepet kontinuitet også viktig, men på nytt nivå enn for elementær matematikk. I topologi handler kontinuitet om å undersøke geometriske figurer og rom sine egenskaper på en måte som er uavhengig av deres spesifikke metriske egenskaper. Kontinuitet spiller en stor rolle i denne sammenhengen fordi det lar oss å forstå hvordan figurene kan deformeres og transformeres uten at deres grunnleggende topologiske egenskaper blir endret.

For eksempel, hvis vi er gitt to topologiske rom  $A$  og  $B$ , og en kontinuerlig funksjon fra  $A$  til  $B$ , betyr det at vi kan kartlegge punkter i  $A$  til punkter i  $B$  uten å bryte opp noen opprinnelige egenskaper som eksempelvis forbindelser og avstander. Dette gir mulighet for å studere romlige egenskaper på en måte som er mer generell og abstrakt.

**Definisjon 4.** (Definisjon av kontinuerlig funksjon, basert på [1] kapittel 2.3.2)

La oss ta for oss to topologiske rom,  $X$  og  $Y$ . Da kan vi skrive funksjonen mellom  $X$  og  $Y$  som  $f : X \rightarrow Y$ . Funksjonen vil være kontinuerlig dersom det inverse bildet av en åpen undermengde  $U$  i  $Y$  også er en åpen undermengde  $f^{-1}(U)$  i  $X$ .

$$f : X \rightarrow Y \text{ er kontinuerlig dersom } , U \in \mathcal{T}_Y \text{ og } f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \quad (4)$$

Så funksjonen er kontinuerlig hvis for en åpen  $U \subseteq Y$  så er  $f^{-1}(U) \subseteq X$  også er åpen. Det inverse bildet skrives i følge [1] kapittel 2.1.1:

$$f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\} \quad (5)$$

Definisjonen illustreres i bildet under:

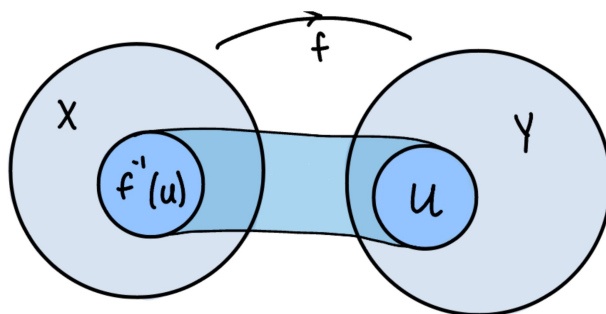


Figure 8: Figuren viser hvordan det inverse bildet,  $f^{-1}(U)$  av en åpen undermengde  $U$  i  $Y$  også er en åpen undermengde i  $X$ , for en kontinuerlig  $f$ .

## Gruppe teori

Gruppeteori er et område innen matematikk som ser på grupper, som er algebraiske strukturer med en binær operasjon. Binær operasjonen skrives som stjerne ( $*$ ) istedet for vanlig multiplikasjonstegn siden det ikke nødvendigvis dreier seg om multiplikasjon, men en mer generell operasjon men ulike tolkninger [4]. For at en gruppe skal eksistere, må denne operasjonen være veldefinert, det vil si at den gir et unikt resultat når den utføres på to elementer i gruppen. En gruppe er derfor definert av både mengden av elementer og operasjonen som kombinerer dem, og vi skriver en gruppe som  $(G, *)$ , der  $G$  er mengden av elementer og  $*$  er operasjonen. Det betyr at  $G$  er lukket under binær operasjonen. Mengden av elementer kan være både endelig og uendelig.

**Definisjon 5.** (Basert på [5])

Vi kan si at mengden  $G$  er en gruppe om følgende aksiomer oppfylles:

- Mengden må være assosiativ. Det betyr at:  $(a * b) * c = a * (b * c)$
- Den må ha identitet. Det betyr at det finnes et bestemt symbol  $e \in G$ ,  $e * a = a$  og  $a * e = a$
- Den må også ha en invers. For å finne invers må vi først ha identitet. Inversen sier at for hver  $a$  finnes  $a'$  slik at  $a * a' = e$  og  $a' * a = e$ .

**Eksempel 1.** (Noen enkle eksempler på grupper, basert på [5])

Starter med å sjekke om  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  er en gruppe. Her er mengden alle heltallene, og binær operasjonen er vanlig addisjon.

- Den er veldefinert siden summen av to tall i mengden gir ett helt nytt tall.
- Den er kommutativ, og dermed abelsk, siden  $1 * 2 = 1 + 2 = 2 * 1$
- Den er assosiativ siden f.eks  $(1 * 2) * 3 = 1 + 2 + 3 = 1 * (2 * 3)$
- Den har et identiteselement lik null.  $1 + 0 = 1$
- Den additivt inverse til  $x$  er  $-x$

Det samme vil gjelde den additive gruppen til  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  og  $\mathbb{C}$ . Her vil også aksiomene gjelde på samme måte.

En gruppe kan også være det vi kaller syklisk, dersom den har en generator,  $a \in G$  [5]. Et eksempel på en syklisk gruppe er  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ . Den er generert av 1 siden ett hvert element i den additive gruppen til heltallene  $\mathbb{Z}$  kan uttrykkes som en kombinasjon av 1 og  $(-1)$ . Den sykliske undergruppen generert av  $a$  skrives,  $\langle a \rangle$ , eller i dette tilfellet hvor generatoren er 1,  $\langle 1 \rangle$  Dette vil senere brukes når vi ser på blant annet homologi grupper.

## Undergrupper

(Basert på [5] kapittel 1.5)

I alle grupper  $G$ , vil det også eksistere en undergruppe  $H \subseteq G$  som er lukket under den binære operasjonen i  $\langle G, * \rangle$ . Det betyr at for at  $H$  skal være en undergruppe av  $G$ , så må binæroperasjonen i  $G$  gjelde for alle elementer i  $H$  også.  $H$  må dermed i seg selv være en gruppe med operasjonen fra  $G$  for at  $H$  skal være en undergruppe. Vi skriver  $H \leq G$  eller  $G \geq H$  for å vise at  $H$  er en undergruppe av  $G$ . Dersom  $H \neq G$ , så holder det å skrive  $G > H$  eller  $H < G$ .

**Eksempel 2.** La  $\langle G, \cdot \rangle$  være en gruppe. En delmengde  $H \subseteq G$  er en undergruppe av  $G$  dersom gruppeoperasjonen i  $G$ ,  $\cdot$ , gjør at  $H$  blir en gruppe. For å sjekke om delmengden  $H$  er en undergruppe:

- Begynn med å sjekke at  $H$  er lukket under binæroperasjonen,  $\cdot$ . Det betyr at hvis  $(a, b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H)$  så er  $H$  lukket under multiplikasjon.
- Må også sjekke om identitets-elementet ligger i  $H$ .
- Til slutt må en finne ut om inverset fra  $G$  ligger i  $H$  ved å sjekke at  $(a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H)$ .

Om dette stemmer og gruppeaksiomene arves fra  $G$ , så er  $\langle H, \cdot \rangle$  en undergruppe av  $G$ .

**Eksempel 3.** (Undergruppe eksempel, basert på [5])

Alle heltallene  $\mathbb{Z}$  som en gruppe med binæroperasjon addisjon,  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ , er inneholdt i gruppen  $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$  som er inneholdt i gruppen  $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ . Dersom en derimot hadde sett på gruppen  $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ , så ville den ikke lengre være noen undergruppe av  $\mathbb{R}$  under addisjon. Da ville  $a=1$  og  $b=2$  gi to ulike svar for  $\mathbb{Z}$  og  $\mathbb{R}$  siden de ikke lengre er under samme binæroperasjon.

**Eksempel 4.** Et eksempel hvor  $H$  ikke er en undergruppe kan være:

Vil se om  $H = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$  er en undergruppe av  $\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$ . Da begynner vi ved å se om den er lukket under addisjon. For å gjøre dette må vi se om summen av to og to elementer i  $H$  gir ett element som også er i  $H$ .

$\rightarrow 0 + 2 = 2$  (modulo 13), 2 er et element i  $H$ .

$\rightarrow 2 + 4 = 6$  (modulo 13), 6 er et element i  $H$ .

$\rightarrow 2 + 10 = 12$  (modulo 13), 12 er ikke ett element i  $H$ .

Da ser vi at siden  $2 \in H$  og  $10 \in H$ , men  $2 + 10 \notin H$ , så er ikke  $H$  lukket under addisjon, og dermed er den ikke en undergruppe.

Akkurat som det finnes sykliske grupper, vil det også eksistere sykliske undergrupper. Om vi ser på gruppen  $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$  fra tidligere. Den består av 12 elementer fra 0 til 11. Da kan vi finne en syklisk undergruppe ved å velge ett element som er i gruppen som er delelig med 12!. Det kan for eksempel være 2. Den sykliske undergruppen  $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Her ser vi at den inneholder identitets-elementet som er 0, og videre alle elementene som går opp i to modulo 12 [5]. Den additive gruppen  $\mathbb{Z}_{12}$  har flere sykliske undergrupper, blant annet  $\langle 3 \rangle$  som har generator 3,  $\langle 4 \rangle$  med generator 4 og  $\langle 6 \rangle$  som har generator 6. Jo høyere generatoren er, jo færre tall er det i undergruppen.

**Definisjon 6.** (Hentet fra [5] theorem 5.17 side 53.)

En matematisk formel for de sykliske undergruppene gis ved:

La  $a \in G$ , hvor  $G$  er en gruppe. Da er

$$H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\} \tag{6}$$

en undergruppe av  $G$ .



## Homomorfi

Homomorfi, også kalt gruppehomomorfi, er et begrep for en struktur bevarende avbildning.

**Definisjon 7.** (En definisjon av homomorfi begrepet basert på seksjon 13 i [5])

En homomorfi mellom to grupper  $G$  og  $H$  er en avbildning

$$\varphi : G \rightarrow H \quad (7)$$

som har homomorfiens egenskapen

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \forall a, b \in G \quad (8)$$

Dersom homomorfin i tillegg er bijektiv, har vi en isomorfi. Det er en bijeksjon mellom to mengder  $A$  og  $B$  dersom det for hvert element i  $A$  eksisterer nøyaktig ett element i  $B$  koblet til. Det betyr at det ikke er noen overlappinger, hvor et element i  $A$  går til to elementer i  $B$ , eller tap av elementer. [5]

Gruppeteorien tilhører feltet algebra. Og her er vi kun interessert i  $f : G_1 \rightarrow G_2$  hvor den algebraiske struktur bevares. Homomorfi er topologiens isomorfi. Vi har en homomorfi innen topologi dersom  $f$  er kontinuerlig og har en kontinuerlig invers,  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Alle topologiske egenskaper er bevart under homomorfier. Så homomorfi er for topologi det isomorfi er for algebra. Det betyr at homomorfi sier når to rom er like. Det å være kontinuerlig innen topologi korresponderer med homomorfi for algebra. Det er de matematiske strukturene vi er interessert i for algebra og topologi.

## Simplekser og simplisielle komplekser

Simplisielle komplekser er en samling enkle figurer kalt, simplekser. Simplekser kan være punkter, linjer, trekkanter og høyere dimensjonale figurer. Et 0-simpleks er det samme som ett punkt. 1-simpleks er linjer osv. De skrives:

**Definisjon 8.** (Hentet fra [1] kapittel 3.2.1)

$$\mathbf{r\text{-simplex:}} \langle p_0 p_1 \dots p_r \rangle \quad (9)$$

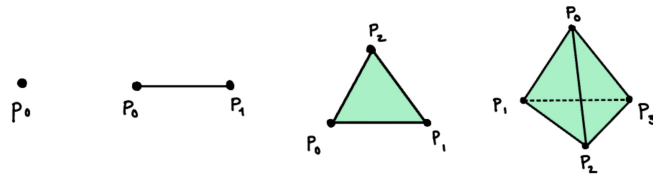


Figure 9: Figuren viser en illustrasjon av 0-, 1-, 2- og 3-simplekser.

For at vi skal kunne bruke  $r$ -simpleksene til å representere et  $r$ -dimensjonalt objekt, må punktene i simpleksene være geometrisk uavhengige [1] s.118. For at en samling punkter i rommet skal kunne kalles geometrisk uavhengige kan det ikke finnes noe plan eller noen linjer som kan gå gjennom alle punktene. Altså ingen  $(r-1)$ -dimensjonalt hyperplan inneholder alle punktene [1].

**Definisjon 9.** En formel som viser  $r$ -simpleksene,  $\sigma_r$ , hentet fra [1] kapittel 2.3.1:

$$\sigma^r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^r c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^r c_i = 1 \right\} \quad (10)$$

$(c_0, \dots, c_r)$  kalles de Barysentriske koordinatene til  $x$ .

Om vi lar  $K$  være en endelig samling av simplekser i  $\mathbb{R}^n$ .  $K$  kalles et simplisielt kompleks dersom følgende punkter oppfylles (basert på [1] kapittel 3.2.2):

1. Overflaten av en simpleks i  $K$ , må også være i  $K$ . Det innebærer at om  $\sigma \in K$  og  $\sigma' \leq \sigma$ , så må  $\sigma' \in K$ .
2. Om både  $\sigma$  og  $\sigma'$  hører til  $K$ , så må  $\sigma \cap \sigma'$  enten være tom eller overflaten av  $\sigma$  og  $\sigma'$ .

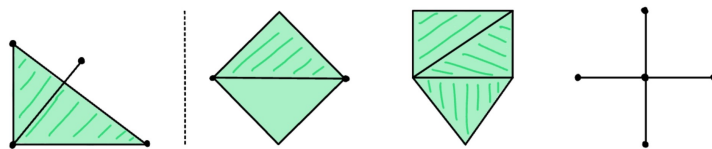


Figure 10: Figuren lengst til venstre er ikke et simplisielt kompleks, men resten er det.

Dimensjonen til  $K$  er definert av den største dimensjonen av simplekser i  $K$  [1].

**Eksempel 5.** Simplekset  $\sigma_2 = \langle p_0 p_1 p_2 \rangle$  gir det simplisielle komplekset:

$$K = \{p_0, p_1, p_2, \langle p_0 p_1 \rangle, \langle p_0 p_2 \rangle, \langle p_1 p_2 \rangle, \langle p_0 p_1 p_2 \rangle\} \quad (11)$$

Her har vi også med det indre, så dette er komplekset til disken. Det er ikke alltid ønskelig, så da lar vi være å ta med  $\langle p_0 p_1 p_2 \rangle$ . Det gir komplekset til sirkelen  $S^1$ .

Fra eksempelet kan vi se at elementene i et simplisielt kompleks,  $K$ , består av simplekser. Først alle punktene (0-simplekser), dermed alle linjene mellom punktene (1-simplekser), flaten mellom alle linjene (2-simplekser) og videre. Dersom en hver simpleks i  $K$  er en undermengde av rommet  $\mathbb{R}^n$ , hvor  $n \geq \dim K$ , vil også unionen av simpleksene være en undermengde av rommet. Det kalles et polyeder  $|K|$  av  $K$ . Dimensjonen til polyederet og det simplisielle komplekset er like. [1]

## Kjedegruppen til det simplisielle komplekset

Kjedegruppen til det simplisielle komplekset  $K$ , kalt  $C_r(K)$ , er en fri abelsk gruppe generert av  $r$ -simplekser i  $K$ . For kjedekomplekser må  $r$ -simpleksene være orienterte. Det betyr at dersom vi har to like simplekser, men med motsatt orienteringer så vil de kansellere hverandre i kjedegruppen. Når  $r > \dim K$ , så vil kjedegruppen være null.

**Definisjon 10.** (Definisjon av kjedekomplekset, hentet fra [1] kapittel 3.4.1) Et kjedekompleks  $C_r(K)$  er summen av  $r$ -simplekser multiplisert med  $\mathbb{Z}$ . Et element i  $C_r(K)$  kalles en  $r$ -kjede. Så når  $c \in C_r$ , med  $I_r$  antall  $r$ -simplekser gitt ved  $\sigma_{r,i} (1 \leq i \leq I_r)$  har vi:

$$C_r(K) = \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i} \text{ for } c_i \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Det betyr at vi kan definere en  $r$ -kjede som:

$$c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + \dots + c_i \sigma_i, \text{ hvor } c_i \in \mathbb{Z} \text{ og } \sigma_i \in K. \quad (13)$$

Det er disse  $r$ -kjedene som utgjør kjedegruppen  $C_r(K)$ .

**Definisjon 11.** (Kjedekompleks, hentet fra [1] kapittel 3.3.2)

$$C_r(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}. \quad (14)$$

**Eksempel 6.** Ønsker å ta et eksempel med et simplisielt kompleks. Har valgt tetraederet.

For tetraederet er  $K = \{(p_0), (p_1), (p_2), (p_3), (p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_0, p_2), (p_0, p_3), (p_1, p_3), (p_2, p_3), (p_0, p_1, p_2), (p_0, p_1, p_3), (p_1, p_2, p_3), (p_0, p_2, p_3), (p_0, p_1, p_2, p_3)\}$

Fra  $K$  kan vi beregne kjedene:

$$C_0(K) = \{c_1(p_0), c_2(p_1), c_3(p_2), c_4(p_3) \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Kan også skrives:

$$C_0(K) = \mathbb{Z}(p_0, p_1, p_2, p_3)$$

$$C_1(K) = \{c_{12}(p_0, p_1), c_{23}(p_1, p_2), c_{13}(p_0, p_2), c_{14}(p_0, p_3), c_{24}(p_1, p_3), c_{34}(p_2, p_3) \mid c_{12}, c_{23}, c_{13}, c_{14}, c_{24}, c_{34} \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Kan også skrives:

$$C_1(K) = \mathbb{Z}((p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_0, p_2), (p_0, p_3), (p_1, p_3), (p_2, p_3))$$

$$C_2(K) = \{c_{123}(p_0, p_1, p_2), c_{124}(p_0, p_1, p_3), c_{234}(p_1, p_2, p_3), c_{134}(p_0, p_2, p_3) \mid c_{123}, c_{124}, c_{234}, c_{134} \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Kan også skrives:

$$C_2(K) = \mathbb{Z}((p_0, p_1, p_2), (p_0, p_1, p_3), (p_1, p_2, p_3), (p_0, p_2, p_3))$$

$$C_3(K) = \{c_{1234}(p_0, p_1, p_2, p_3) \mid c_{1234} \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Kan også skrives:

$$C_3(K) = \mathbb{Z}((p_0, p_1, p_2, p_3))$$

## Trianguleringer

Triangulering innebærer å dele en kompleks form, som torusen eller store polyedere, inn i mindre trekanter ved å trekke linjer eller diagonaler i figuren. Trianguleringer gjør rommet mer algebraisk.

**Definisjon 12.** (Triangulering, basert på [1] kap. 3)

For å kunne lage en triangulering av det topologiske rommet  $X$ , må  $X$  være et par  $(K, f)$  hvor  $K$  er et simplisielt kompleks og  $f : |K| \rightarrow X$  er en homeomorfi.  $X$  er triangulerbar og paret er selve trianguleringen.

**Eksempel 7.** Trianguleringen av en sfære [6]: Siden simplekser er lukket, betyr det at tetraederet er lukket. Den i seg selv er ikke homeomorf med sfæren, men det er den lukkede ballen  $D^3$ . Dermed finnes en triangulering

mellom  $D^3$  og  $\sigma_3$ . Sfæren er overflaten til disken, som i følge forutsetningene for simplisielle komplekser også må være i  $K$ . Dermed er tetraederet også en triangulering av sfæren.

$$f : |K| \rightarrow D^3 \Rightarrow f' : |K'| \rightarrow S^2 \quad (15)$$

Her er  $|K'| \rightarrow S^2$  polyeder sfæren.

## Randoperatører

En av de viktigste tingene som gjør at vi kan definere homologigruppene er at randen til randen er null.

**Definisjon 13.** Randen til randen lik null skrives slik: [1]

$$\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0 \quad (16)$$

**Definisjon 14.** (Den generelle formelen å finne randen til et hvilket som helst orientert simpleks hentet fra [1] kapittel 3.3.2:

$$\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K) \quad (17)$$

$$(p_0 p_1 \dots p_r) \rightarrow \partial_r(p_0 p_1 \dots p_r) := \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r) \quad (18)$$

Her betyr "hatten" over  $p$  at det elementet fjernes. Det betyr at for eksempel at  $(p_0 \hat{p}_1 p_2) = (p_0 p_2)$ .

**Eksempel 8.** Randen til en 0-simpleks, en 1-simpleks og en 2-simpleks [1] 3.3.2:

Siden en 0-simpleks ikke har noen grense får vi:

$$\partial_0 p_0 = 0 \quad (19)$$

1-simpleksen kan vi definere ved

$$\partial_1(p_0 p_1) = p_1 - p_0 \quad (20)$$

2-simpleksen er gitt ved:

$$\partial_2(p_0 p_1 p_2) = p_1 p_2 - p_0 p_2 + p_0 p_1 \quad (21)$$

Fremgangsmåten her er at vi alltid hopper over det første elementet og tar med resten. Så tar vi med alle elementer utenom det andre elementet og setter minus foran. Slik fortsetter det til vi har sykler hvor alle elementene ikke er med en gang. Vi kunne gjort det samme for alle r-simplekser. Skulle vi tatt tetraederet som eksempel så er det en 3-simpleks. Den ville hatt 4 sykler med 3 elementer i hver. Siden den består av 4 elementer får vi 4 parenteser, men de skal alle utelate ett av elementene så derfor er det 3 elementer i hver parentes.

**Eksempel 9.** La oss se for oss en 2-simpleks, trekanten, med hjørner i, j, k. Finner randen til simplekset ved å ta:

$$\partial(ijk) = (jk) - (ik) + (ij) \quad (22)$$

Randen til simpleksen gir oss en endimensjonal sirkel. Siden vi vet at sirkelen er homomorf med 2-simpleks med orientering. Illustrert under.

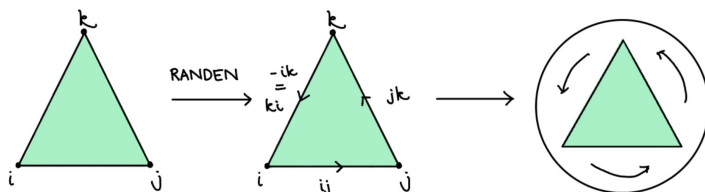


Figure 11: På figuren ser vi den opprinnelige simpleksen, så randen til simpleksen som gir den en orientering som er den samme som for en sirkel.

Randen til randen av  $(ijk)$  blir:

$$\partial(\partial(ijk)) = \partial(jk) - \partial(ik) + \partial(ij) = k - j + i - k + j - i = 0 \quad (23)$$

Her ser vi at randen til randen er null.

$\partial_K$  er en homomorfi. Om vi setter  $K$  til å være et n-dimensjonelt simplisielt kompleks så eksisterer det et kjede kompleks,  $C(K)$ , den frie abelske gruppen av simplekser. Kjedefgruppen  $C_r(K)$  er generert av orienterte r-simplekser. Dette vises i ligningen under hentet fra [1] kapittel 3.3.2:

$$0 \xrightarrow{\partial_0} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (24)$$

Vi har en r-sykel dersom  $c \in C_r(K)$  oppfyller  $\partial_r c = 0$  [1]. Settet av r-sykler heter  $Z_r(K)$  og er en undergruppe av gruppen  $C_r(K)$  [1].

$$\text{Sykler: } Z_r(K) = \{Z \in C_r(K) \mid \partial Z = 0\} \quad (25)$$

Dersom det for  $K$  også eksisterer et element  $d \in C_{r+1}(K)$  som gir  $c = \partial_{r+1}d$ , så er  $c$  det vi kaller en  $r$ -rand [1]. Settet av disse randene har navnet  $B_r(K)$  og er som  $Z_r$  en undergruppe av  $C_r(K)$  [1].  $B_r(K) = \text{im}\partial(r+1)$  [1].

$$\text{Rander: } B_r(K) = \{\alpha_r \in C_r(K) \mid \alpha_r = \partial\alpha_{r+1}\} \subseteq C_r(K) \quad (26)$$

Dette betyr at [1]:

$$\text{Ker}\partial_r = Z_r(K) \subseteq C_r(K) \quad \text{og} \quad \text{Im}\partial_r \subseteq C_{r+1}(K) \quad (27)$$

**Bemerk.** *Det at  $\partial \circ \partial = 0$  fører til at  $B_r(K) \subseteq Z_r(K)$  siden enhver rand også er en sykel.*

Som vist så har vi en  $r$ -sykel dersom  $c \in C_r(K)$   $\partial_r c = 0$ . Som vist i eksempel 9, så stemmer dette for randen til trekanten. Der er  $\partial_1(\partial_2(ijk)) = 0$ . Dette er det som gjør at vi kan definere homologigruppen.

## Homologi grupper

(Hentet fra [1] og [7])

Homologi er et viktig verktøy innen algebraisk topologi som brukes til beregning av antall hull i en geometrisk figur. Mer matematisk betyr det at homologi brukes til å se forskjell på  $H_p(X)$ , som er en topologisk invariant. Det vil si at vi kan skille sirkelen fra disken siden sirkelen har ett hull mens disken har med innsiden og har dermed ingen hull. Samtidig kan vi skille sfæren fra sirkelen siden sfæren omslutter et to-dimensjonalt hull, mens hullet sirkelen omslutter er endimensjonalt. Disse "hullene" er egentlig ikke hull som vi ser, men det skal homologien hjelpe oss med å finne.

På sfæren vil en alltid kunne lage en sirkel som krymper til ett punkt. Så den første homologigruppen til sfæren er triviell.  $H_1(S^2) = 0$ . Torusen derimot har steder hvor det ikke vil være mulig til å krympe til et punkt. Som vist på figuren på neste side.

Den første homologigruppen til torusen er dermed to-dimensjonal siden det går an å lage to forskjellige sirkler som ikke kan krympes til ett punkt. Dette skrives  $H_1(T^2) = \mathbb{Z}_\alpha \oplus \mathbb{Z}_\beta$ . Her korresponderer elementene i  $\mathbb{Z}_\alpha$  og  $\mathbb{Z}_\beta$  med hvor mange runder vi går rundt  $\alpha$  eller  $\beta$ . Ta tallet 3 i  $\mathbb{Z}_\alpha$  som eksempel.  $\mathbb{Z}$  en en gruppe med generator 1 som vil si at hvert element i  $\mathbb{Z}$  forteller oss hvor mange ganger vi har gått rundt sirkelen. Så 3 for  $\mathbb{Z}_\alpha$ , betyr at vi tar 3 hele runder rundt  $\alpha$ .

Skal man ha en mer matematisk måte å finne homologigruppene kan man bruke formelen under.

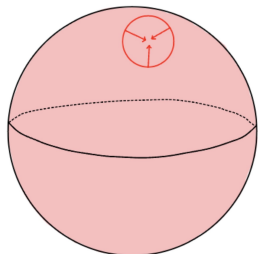


Figure 12: På sfæren kan en alltid lage en sirkel på overflaten som kan krympes til ett punkt.

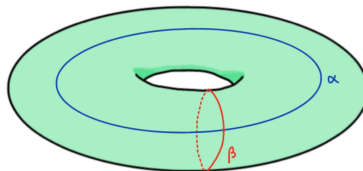


Figure 13: På torusen vil verken  $\alpha$  eller  $\beta$  kunne krympes til et punkt.

**Definisjon 15.** (Definisjonen av homologi grupper, hentet fra [1])

$$H_p(X) := H_p(K) := \frac{Ker \partial_p}{Im \partial_{p+1}} \quad (28)$$

Her er  $X$  et topologisk rom som ikke er et polyeder, men som kan trianguleres til  $K$ . Fra 12 vet vi at  $f : |K| \rightarrow X$  er en homeomorfi. Dermed er  $H_r(X) \cong H_r(K)$  for  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$  [1]. Som vist i 27 er det en sammenheng mellom  $Ker \partial_r$  og syklene, samt mellom  $Im \partial_{r+1}$  og grensene. Det betyr at:

$$\text{Homologi gruppen} = \frac{\text{Sykler}}{\text{Render}} \quad (29)$$

**Eksempel 10.** Vil vise den 0-te homologi gruppen av  $K = \{p_0\}$  ved hjelp av [1]. Kjeden  $C_0(K) = \{ip_0 | i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$  når  $K = \{p_0\}$ . Siden dette er en 0-simpleks, som bare er et punkt, vil  $p_0$  ikke kunne være grensen av noe. Dermed er  $B_0(K) = \{0\}$ . Her må også  $Z_0(K)$  være den samme som 0-kjeden  $C_0(K)$ . Dermed får vi homologi gruppen [1]:

$$H_0(K) \cong \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = C_0(K) \quad (30)$$

Vi bestemte at kjeden  $C_0(K)$  var isomorf med  $\mathbb{Z}$ . Så dermed er homologi gruppen til  $\{p_0\}$ :

$$H_0(K) = \mathbb{Z} \quad (31)$$



$K$  i eksemplene over er en triangulering av  $X$ . Homologigruppene er uavhengig av trianguleringer så lenge de har samme topologi. Så en triangulering av sirkelen kan både vises som en trekant eller firkant med orientering. Det er bare ulike trianguleringer, så siden vi kun bryr oss om topologi vil ikke geometriene ha betydning.

En måte vi kan beskrive disse gruppene litt enklere er ved å se på homologigruppene til geometriene som hull. Det skal bli mer nøyaktig forklart under.

## Betti-tallene

(Hentet fra [8] og kapittel 3.4.3 i [1])

Et begrep vi skal bruke en del nå fremover er Betti-tall. Betti-tall er navnet på homotopitallene siden de først ble definert av matematikeren *Enrico Betti* [8]. Disse brukes til å skille topologiske rom basert på tilkoblingsgraden til  $p$ -dimensjonale simplisierede komplekser. For figurene som vi skal se på som har en endelig dimensjon, så vil Betti-tallene være 0 etter vi kommer til  $p$  større enn dimensjonen av figuren. Betti-tallene representerer rangen av den  $p^{\text{te}}$  homologi gruppen,  $H_p$ . Det tallene forteller oss er hvor mange ”kutt” gjennom figuren vi kan ta før vi deler figuren i to deler.

Nå som dimensjonen til figurene blir viktigere, må vi definere hva dimensjonene til figurene er. Det de fleste vil tenke når noen spør om dimensjonen til en sfære eller en torus eller kanskje en kaffekopp, er at de er tredimensjonale figurer. Dette stemmer ikke helt. Det krever tre dimensjoner for å visualisere disse figurene, men er fundamentalt er de to-dimensjonale figurer. Det samme gjelder sirkler og punkter. Sirkelen er visualisert i to dimensjoner, men er egentlig en-dimensjonal. Og punktet visualiseres i en dimensjon, men er egentlig null-dimensjonal. Det er viktig å kunne dette for at resultatene skal gi mening.

Dersom vi har et simplisert kompleks  $K$  hvor  $H_p(K) \cong 0$  så må Betti-tallet også være null,  $b_p(K) = 0$ . Er  $H_p(K) \cong \mathbb{Z}$  er Betti-tallet  $b_p = 1$ . For  $H_p(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  er Betti-tallet,  $b_p = 2$ . Sånn går det videre oppover etter hvor mange  $\mathbb{Z}$  vi har i  $H_p$ . Her er  $p$  dimensjonen vi ser på; dimensjonen av de ikke-trivielle syklene.

**Definisjon 16.** (Definisjon for sammenhengen mellom betti-tall og dimensjonen til  $H_p$ . [1] kapittel 3.4.3.)

$$b_p(K) \equiv \dim(H_p(K; \mathbb{R})) \quad (32)$$

Her tillater vi at syklene i  $K$  kan multipliseres med reelle tall.

Når dette skal brukes i oppgaver som denne, ser en på den geometriske bruken av Betti-tall. Figurene vi skal ta for oss er to-dimensjonale, så vi skal ikke finne Betti-tall høyere enn  $b_2$ :

(hentet fra [8])

- $b_0$  tilsvarer antall koblede overflate komponenter
- $b_1$  tilsvarer antall "sirkulære" endimensjonale hull.
- $b_2$  tilsvarer antall todimensjonale hulrom.

**Eksempel 11.** Et hvilket som helst punkt vil ha  $b_0 = 1$  siden det kun er en sammenhengende overflate. Når det kommer til antall "sirkulære" hull i punktet så er det ingen, så  $b_1 = 0$ . Siden det kun er ett enkelt punkt vil det heller ikke eksistere noen todimensjonale hulrom, så  $b_2$  er også null.

På sirkelen vil det som for punktet kun være en enkel sammenhengende overflate, så  $b_0 = 1$ . Sirkelen vil også ha et endimensjonalt sirkulært hull som vil si at  $b_1 = 1$ . Siden sirkelen kun er en todimensjonal figur vil den ikke inneholde noe todimensjonalt hulrom, så  $b_2 = 0$ .

Disken er sirkelen med det inni, så den vil ha  $b_0$  og  $b_2$  lik som sirkelen, men siden den også tar med "fyllet" i sirkelen har vi ikke lengre noen sirkulære hull, så  $b_1 = 0$ .

For alle  $k$ -dimensjonelle rom, vil Betti-tallet  $b_p$  alltid være null når  $p > k$ . Så her i dette eksempelet ser vi at punktet kun vil ha en verdi ulik fra null for  $b_0$  siden den har dimensjon  $k = 0$  og da gjelder det kun for  $p < 1$ . Sirkelen er en endimensjonal figur,  $k = 1$ , så her får vi verdier ulik fra null når  $p < 2$ . Så har vi sfæren og trusen som er todimensjonale figurer, så  $k = 2$ . Da vil vi få Betti-tall  $\neq 0$  når  $p < 3$ . Den alternerende summen av disse tre Betti-tallene for figurene vi skal se på vil være viktige i utregningen.

Det vi har funnet ut fra dette eksempelet er at både to-sfæren og torusen vil ha verdier for Betti-tall opp til  $b_2$  siden begge disse mangfoldighetene er to-dimensjonale figurer.

Dette tas i bruk senere for å finne Betti-tall og homologigrupper for både torusen og sfæren som kan hjelpe oss med å beregne om det faktisk er vindstille et sted.

## Hull av ulike dimensjoner

Hullene vi skal beskrive finnes i flere dimensjoner. Disse dimensjonene er litt annerledes enn de vi vanligvis tenker på i geometrisk sammenheng. Vanligvis tenker vi at både sfæren og torusen er geometriske figurer av 3 dimensjoner. Dette er fordi vi har sett på dimensjoner i vektorrom, hvor dimensjonen bestemmes av hvor mange uavhengige variabler som må til for å spesifisere et spesifikt punkt i det gitte vektorrommet. Som for eksempel planet, hvor en må spesifisere lengde og høyde ( $x$  og  $y$ ) for å spesifisere ett punkt. Da vil planet ha 2 dimensjoner siden vi må spesifisere to individuelle variabler per punkt. Dimensjonene til mangfoldigheter fungerer ikke helt på samme måte. Hvis vi tar det Euklidske tredimensjonale rommet  $\mathbb{R}^3$  så er dimensjonen lik 3, men dette rommet er topologisk det samme som et punkt. Det vil si at rommet er "null dimensjonalt" når en betrakter det. Dimensjonene til valgte geometrier kan regnes ut ved hjelp av formelen under.

**Definisjon 17.** (Basert på [7])

Denne definisjonen viser hvordan vi kan beregne dimensjonen til en hvilken som helst figur  $K$ . Dette gjør vi ved å bruke Betti-tallene og velge den største verdien for  $p$  som gjør at  $b_p(K)$  er ulik fra null.

$$\dim(K) = \max \{n | b_p(M) \neq 0\} \quad (33)$$

Her menes dimensjonen av overflaten til figurene, og den vil 2 siden sfæren og torusen begge er 2-dimensjonale geometrier, som visualiseres i  $\mathbb{R}^3$ .

**Definisjon 18.** Grunnen til at vi kan ta dimensjonen kommer fra formelen:

$$n_1\alpha + n_2\beta \in H_1(T^2) \quad (34)$$

Når  $n_1$  og  $n_2$  er reelle koeffesienter tillater vi at  $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ . Dermed kan vi skrive om til:

$$x\alpha + y\beta \in H_1(T^2, \mathbb{R}), x, y \in \mathbb{R} \quad (35)$$

$$\Rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2; \text{ et 2-dimensjonalt vektorrom.} \quad (36)$$

Som forklart litt innledningsvis i delen om homologi så vil det være flere endimensjonale hull på torusen. Disse "hullene" er sirkler vi kan tegne inn som er ikke-trivielle, altså sirkler som ikke kan krympes til ett punkt. Så for sfæren gjelder ikke dette siden på overflaten til sfæren vil alle sirkler vi tegner være randen til disker som vi kan krympe. Dette kan vises på illustrasjonen tidligere 13. Så her har vi oppdaget at  $b_1(T^2) = 2$  siden det er to ulike sirkler vi kan lage hvor det ikke vil være mulig å krympe. Den ene kan ikke krympes fordi hullet i midten av torusen stopper den, mens den andre sirkelen stoppes av at torusen er "tom". Sfærens  $b_1$  vil være null siden det ikke finnes noen ikke-triviell sirkel. To-dimensjonale hull er de hullene er som nevnt under avsnittet om Betti-tall, som vi kaller hulrommene. Den er den samme for både sfæren og torusen. Det er rart å tenke på hullet inne i kulen som noe todimensjonalt, men det er fordi overflaten til kulen kan sees på som overflaten til jorden som er en todimensjonal overflate siden vi kun kan gå i to retninger, enten opp over eller nedover, eller til høyre og venste [7]. Som forklart tidligere bestemmes dimensjonen av hvor mange ulike variabler vi må definere for å beskrive ett punkt. For å beskrive ett punkt på jorden trenger vi da to variabler. Både sfæren og torusen har begge ett og bare ett hulrom siden vi ikke regner med innholdet i figurene bare overflatene. Den vil være det samme for både kaffekoppen, kuben og polyederet. For  $b_0$  vil begge være 1 siden det kun er en sammenhengende overflate. Dette gjelder så lenge vi ikke har to eller flere figurer som ikke henger sammen med hverandre, som for eksempel to sfærer ved siden av hverandre.

De endimensjonale hullene er lettere å forestille seg om man først ser på torusen som et flatt A4 ark. Arket har ingen hull av noen dimensjoner, men når man limer sammen sidene får man en sylinder som har ett endimensjonalt hull. Når man deretter limer sammen endene av arket får man torusen og da ett ekstra endimensjonelt hull. Det illustreres i figuren under.

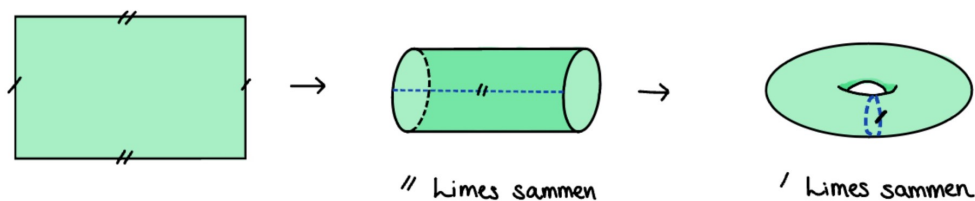


Figure 14: Her indikerer strekene på firkanten sidene som skal limes sammen. Og figurene etter viser sidene limt sammen.

En annen måte å se på dette som er litt enklere å forstå på begge figurene er ved å tenke på endimensjonale hull som mengden hele kutt en kan ta gjennom figuren før den deles i to biter. Metoden over er ikke like enkel å se for seg for sfæren. På sfæren kan en ikke gjøre noen kutt gjennom hele figuren uten at en får to deler. Det vil da si at sfæren har 0 endimensjonale hull og dermed  $b_1(S^2) = 0$ . Torusen derimot kan vi først klippe gjennom og lage ett sylinder og dermed klippe på langsiden av sylindere uten at vi står med to deler. Om man derimot forsøker å klippe gjennom A4 arket som vi nå står igjen med, så vil det ikke være mulig å klippe uten å dele det i to. Da er resultatet at torusen har 2 klipp gjennom figuren, altså to-endimensjonale hull. Da har vi funnet ut at  $b_1(T^2) = 2$ . De to dimensjonale hullene er relativt enkle å se på måten vi har forklart tidligere. Det samme gjelder  $b_0$ .

Den mer matematiske måten å finne Betti-tallene ved øyekast er ved å se på ikke-trivielle undergeometrier av figurene. Da vil  $H_0$  for alle sammenhengende geometrier alltid være  $\mathbb{Z}$ , generert av ett punkt. Dette er fordi alle punktene på geometrien kan deformeres til de andre. Dersom figuren derimot ikke er sammenhengende, for eksempel en torus og en sfære ved siden av hverandre, vil det ikke være sånn at alle punktene kan deformeres til hverandre. Skal vi finne  $H_1$  ved øyekast med en mer matematisk tankegang ser vi på undergeometrien til torusen av en dimensjon som da er sirkler. Svaret på hva  $H_1$  er finner vi da ved å tenke oss om sirklene er trivielle. Torusen har to sirkler som ikke kan krympes til et punkt, som vil si at  $H_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ . For sfæren derimot er undergeometriene sirkler som er trivielle siden de er randen til noe og kan krympes til ett punkt. Da har vi  $H_1(S^2) = 0$  siden det ikke finnes noen ikke-triviell undergruppe. Dette er illustrert i figuren 13. Når det kommer til  $H_2$  så kan vi bare tenke på samme måte som tidligere, identifisere antall hulrom i figurene.

Hadde man derimot tatt med det inne i torusen og ikke bare overflaten ville regnestykket sett ganske annerledes ut. Da ville ikke  $H_2$  lengre vært  $\mathbb{Z}^2$  siden da kan vi krympe sirkelen som før gikk rundt overflaten til ett punkt. Det vil fremdeles være slik at sirkelen som går rundt hullet i torusen ikke kan krympes til ett punkt siden hullet fremdeles er der. Det vil si at  $H_1(\text{smultringen}) = \mathbb{Z}$  som gir  $b_1(\text{smultringen}) = 1$ . Også  $H_2$  ville endret seg til  $b_2(\text{smultring}) = 0$  siden hulrommet når er fylt opp.  $b_0$  ville fremdeles vært den samme siden det enda er en sammenhengende figur.

## Vektorfelt

Et vektorfelt er en funksjon hvor alle punkter i rommet,  $\mathbb{R}^n = X$ , får en vektor. Vektorfelt anvendes i matematikken når vi trenger noe som representerer både størrelse og retning til en fysisk mengde i rommet [9].

Vektorfeltet minner en del om vindkartene en kan se på værmeldingene. Vind kan nemlig i denne sammenheng sees på som et vektorfelt siden både retningen og styrken (magnitudo) er av betydning. Disse pilene representerer både vindretning og vindstyrke. På overflaten til sfæren skal vi nå se om det er mulig at alle punktene alltid har en vektor med verdi eller om det må være noen nullvektorer. Nullvektorene tilsvarer da steder hvor det er vindstille. Om man har studert vindkartene på værmeldinger kan det hende at en har observert ”hull” i kartet, steder hvor det ikke er noen pil som viser vindretning og -styrke. Dette er nullvektoren vi nå vil prøve å bevise at eksisterer.

## Hairy ball theorem

(Based on [10])

Hvis man ser på den fysiske implikasjonen av teoremet, kan man forestille seg en basketball som kastes mot en basketkurv. På veien mot kurven vil ballen snurre om sin egen akse, så vil den stå stille i begge ender av denne aksene. Grunnen til dette er nemlig fordi den spinner om sin egen akse. For å løse dette ”problemet” kan en tenke at en skal drille ett hull gjennom ballen. Da vil det ikke lengre være noen stasjonære punkter, men da står vi jo igjen med torusen.

Det kan sammenlignes med at en ikke kan kamme alt hår i en retning på en tennisball (hårete ball). Det vil alltid finnes et punkt på toppen av ballen hvor det er et ”hull”, altså ett sted hvor hårene ikke vil ha samme retning, men heller vende oppover. Hårene på ballen tilsvarer tangerende vektorer på sfæren. Hvert punkt på sfæren vil ha en vektor, men det vil oppstå en diskontinuitet hvor vi får en vektor som ikke tangerer med sfæren og er dermed lik null. Siden teoremet omhandler figurer innen topologi, vil det også gjelde andre hårete objekter så lenge de ikke har hull. Så om man skulle tenkt seg en bamse eller en hårete kube, ville det fremdeles gjelde.

**Definisjon 19.** En matematisk formulering av Hairy ball-teoremet. Basert på [11].

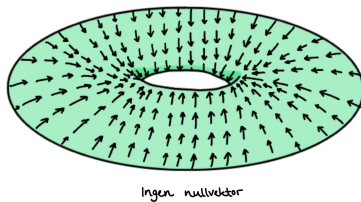


Figure 15: Torusen har ingen nullvektor

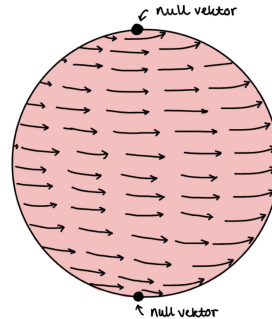


Figure 16: Sfæren har to nullvektorer

En påstand fra [11] forteller at et jevnt vektorfelt  $V$  på enhetssfæren  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  hvor  $n \geq 2$  og  $n$  er et partall, må bli null et sted. Dette gir:

For  $n \geq 2$ , hvor  $n$  er partall, finnes ingen kontinuerlige vektorfelt  $V$  uten nullpunkt. (37)

Teoremet kan brukes i flere ulike praktiske eksempler, som den over med basketballen eller noe så enkelt som å pakke inn en ball i innpakningspapir som viser seg å være veldig krevende, nettopp på grunn av dette teoremet. Det praktiske bruksområdet vi er mest interessert i derimot, er vind. Vinden strømmer i kontinuerlig sirkulasjon rundt jorden, og vi kan dermed se på dens fart og størrelse som tangerende vektorer. Dette vil oppfylle teoremets premisser i at vindkastene må dø ut et sted og ikke lengre tangere jorden. Det kan skje i "øyet av en tornado" eller bare fordi vinden blåser rett opp istedet.

## Euler-karakteristikk.

Euler-karakteristikken er et viktig konsept i topologi og geometri som benyttes til å bestemme minimum antall nullpunkter i geometriske figurer. Dette kan blant annet brukes til å vise at det alltid finnes minst et sted hvor det er vindstille på jordens overflate. Dermed er formelen et godt hjelpemiddel i denne oppgaven.

Først må vi definere Euler-karakteristikken for en geometrisk form  $X$ , representert ved  $\chi(X)$ .

**Definisjon 20.** (Euler karakteristikk (basert på [1]))

For en geometrisk for  $X$ , for eksempel en sfære  $S^2$  eller en torus  $T^2$ , er Euler karakteristikken gitt ved formelen

$$\chi(X) = b_0 - b_1 + b_2 \dots \pm b_r \quad (38)$$

der  $\dim(X) = k$ , og  $b_0 - b_1 + b_2 \dots \pm b_r$  er Betti-tallene som representerer dimensjonene til de topologiske egenskapene til  $X$ .

I denne oppgaven begrenser vi oss til geometrier i  $\mathbb{R}^3$ , og derfor brukes kun Betti-tall opp til  $b_2$ , siden alle  $p \geq 3$  vil gi 0.

(Basert på [1] kapittel 2.4.4)

Euler-karakteristikken tilsvare minimum antall nullpunkter til et vektorfelt på mangfoldigheten  $X$ . Dette kan brukes til å vise homologien til  $X$ :

**Definisjon 21.** (Homologigruppe gitt ved fundamentalteoremet av endelig genererte abelske grupper, basert på [1] kapittel 3.1.3)

$$H_p(X) = \mathbb{Z}_{K_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{K_p} \oplus \mathbb{Z}^{b_p} \quad (39)$$

La meg illustrere dette med noen eksempler. Starter med å definere homologigruppen til sfæren.

**Eksempel 12.** Homologigruppen til sfæren,  $S^2$ :

$$H_p(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ 0 & p = 1 \\ \mathbb{Z} & p = 2 \end{cases} \quad (40)$$

Tallene for  $p$  er de tallene vi har funnet for de ulike Betti-tallene for sfæren. Setter så inn Betti-tallene i Euler karakteristikken:

$$\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2 \quad (41)$$

Dette viser at sfæren har minst to nullpunkter, som tilsvare steder på jordens overflate uten vind. Dette er illustrert i figur 16.

Tallene som settes inn for *betti-tallene* er basert på  $B_p$  fra  $\mathbb{Z}^{b_p}$  i ligningen for  $H_p(x)$ . For eksempelet over er  $\mathbb{Z}^1$ , så 0 og til slutt  $\mathbb{Z}^1$ . Verdien for  $b_p$  som settes inn i formelen for Euler-karakteristikken.



**Eksempel 13.** Vi kan gjøre tilsvarende beregninger for å se om det eksisterer nullvektorer på torusen,  $T^2$ :

Siden vi har funnet Betti-tallene til torusen kan vi også finne  $H_p$ . Så fra kan vi finne  $H_p$  fra Betti-tallet ved å sette inn verdien av  $b_p$  i  $\mathbb{Z}^{b_p}$ . For torusen er  $b_0 = 1$  som vil si at  $H_0 = \mathbb{Z}^1$ ,  $b_1 = 2$  som vil si at  $H_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$  og  $b_2 = 1$  som vil si at  $H_2 = \mathbb{Z}^1$ . Kan så sette dette inn i formelen for homologien til torusen,  $H_p(T^2)$ :

$$H_p(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & p = 1 \\ \mathbb{Z} & p = 2 \end{cases} \quad (42)$$

Dette gir Euler-karakteristikken:

$$\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0 \quad (43)$$

Resultatet fra Euler-karakteristikken viser at torusen ikke har noen nullvektorer. Det betyr ikke nødvendigvis at det ikke er vindstille noe sted, fordi det finnes også vektorfelt med bare nullvektorer. Da ville også Euler-karakteristikken gitt 0 som resultat. Dette er tilfellet figur 15 viser.

En alternativ metode for å beregne Euler-karakteristikken er ved å bruke Eulers polyederformel. Den ser på antall hjørner, kanter og sideflater på mangfoldigheten. Formelen bruker samme prinsipper som Euler karakteristikk, bare at vi bruker hjørner, kanter og sideflater i stedet for Betti-tallene.

$$\chi(X) = \text{antall hjørner på } X - \text{antall kanter på } X + \text{antall sideflater på } X \quad (44)$$

Dette prinsippet er ikke like lett å bruke på sfæren. Derfor må vi utnytte at topologisk like geometrier tillater oss å beregne Euler-karakteristikken for figurer med samme topologi som har mer passende geometriske egenskaper for dette prinsippet. Dermed kan resultatene generaliseres og anvendes på ulike geometrier.

**Eksempel 14.** Begynner med å beregne Eulerkarakteristikken for kubens ved hjelp av Eulers-polyeder formel. På figuren over kan vi telle at kubens har 8 hjørner, 12 kanter og 6 sideflater. Setter dette inn i Eulers-polyederformel, 44, og får:

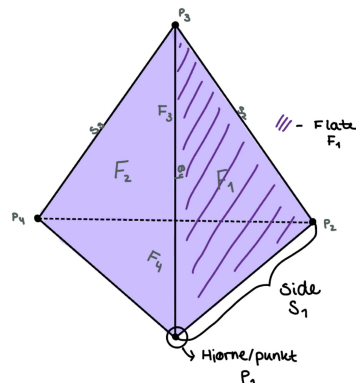
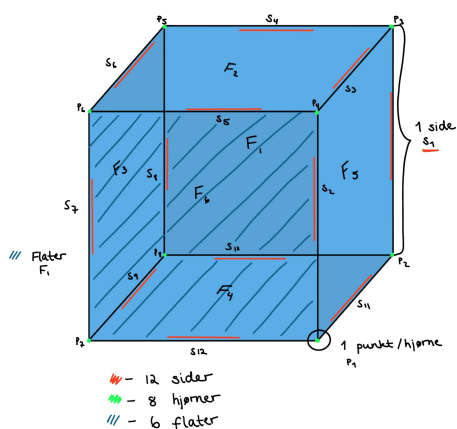


Figure 17: Kuben m. kanter, hjørner og sideflater

Figure 18: Pyramide m. kanter hjørner og sideflater

$$\chi(kuben) = 8 - 12 + 6 = 2 \quad (45)$$

Sammenligner vi dette med resultatene for sfæren funnet med den andre metoden, 12, så stemmer svarene godt over ens.

**Eksempel 15.** Dette eksempelet beregner Euler-karakteristikken pyramiden eller *tetraeder* som det også kalles. Pyramiden har 4 hjørner, 6 kanter og 4 sideflater. Setter verdiene inn i ligningen for Euler-karakteristikken og får:

$$\chi(Pyramiden) = 4 - 6 + 4 = 2 \quad (46)$$

Også for denne geometiske figuren med genus null vil det være 2 nullvektorer. Begge figurene fra eksemplene over er det vi kaller et *polyeder*. Et polyeder er definert som et legeme avgrenset av plane flater [12]. Slike figurer, eksempelvis pyramiden og kuben, består av sideflater som møtes i kanter og danner hjørner [12]. For de fleste polyedre gjelder Eulers karakteristikk, som fastslår at summen av sideflater og hjørner alltid vil være to mer enn summen av kanter. Eksempler på andre polyedre som også vil ha minst to nullvektorer inkluderer prisme, dodekaeder og oktaeder. Det betyr at dersom jorden ikke var en sfære, men heller en av disse andre geometiske figurene uten hull, ville det likevel eksistert plasser hvor det var vindstille.

## Utregning av homologi gruppe ved hjelp av simplisielle komplekser

I dette avsnittet av oppgaven betraktes et litt enklere eksempel å matematisk vise homologi gruppen til. Derfor har jeg valgt sirkelen som vi startet litt på i avsnittet om randoperatører. Velger det topologiske rommet  $X = S^1$ , som er homomorf med en trekant sammensatt av 3 linje segmenter. Trekanten, representert av en to-simplex bestående av tre punkter  $i, j, k$  og tre sider, danner komplekset:

$$K = \{i, j, k, \langle ij \rangle, \langle jk \rangle, \langle ki \rangle\} \quad (47)$$

Vi ser ikke på disken, så vi ekskluderer overflaten,  $\langle ijk \rangle$ , fra komplekset. For å beregne homologigruppen brukes formelen  $H_k(X) \cong \frac{Z_k}{B_k}$ . Må derfor finne  $B_0$  og  $Z_0$ . Starter med å opprette kjedekomplekset:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (48)$$

Her tilsvarer  $C_2$  bare 0 siden det indre ikke er med,  $C_1 = a\langle ij \rangle + b\langle jk \rangle + c\langle ki \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  og  $C_0 = m(i) + n(j) + o(k) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Fra dette kan vi finne randoperatorene.

Vi får  $\partial_0 = 0$  siden punktene ikke kan være randen til noe.  $\partial_1$  blir  $a(j-i) + b(k-j) + c(i-k)$ , mens  $\partial_2$  bare blir null siden  $C_2 = 0$ .

Syklene  $Z_0 = \ker \partial_0 = C_0 = \langle i, j, k \rangle$  og rendene  $B_0 = \text{Im} \partial_1 = \langle j-i, k-j, i-k \rangle$  gir homologigruppen  $H_0 = \frac{Z_0}{B_0} = \frac{\langle i, j, k \rangle}{\langle j-i, k-j, i-k \rangle}$ . Det vi egentlig gjør her når vi deler med  $B_0$  er at vi setter elementene i  $B_0 = 0$ . Det betyr at:

$$j-i=0 \Rightarrow j=i, k-j=0 \Rightarrow k=j \Rightarrow i=j=k \quad (49)$$

Kan derfor definere  $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$  siden vi viser at alle elementene er like, som betyr at vi kun har ett element. Alternativt kan dette skrives  $H_0 = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ . Dette ser kanskje umiddelbart rart ut, men grunnen til at  $B_0$  kan skrives som  $\mathbb{Z}^2$  er fordi den er to dimensjonal. Det er lett å tenke at den er 3 dimensjonal siden den består av 3 elementer, men i  $\langle j-i, k-j, i-k \rangle$  er  $i-k$  bare en kombinasjon av de to forrige, og dermed er  $B_0 = \mathbb{Z}^2$ .

For å finne homologigruppen til sirkelen, må vi også finne en verdi for  $H_1 = \frac{Z_1}{B_1}$ . Begynner med å finne  $Z_1$  som er det samme som  $\text{Ker} \partial_1$ . Vi bestemte tidligere at  $\partial_1 = a(j-i) + b(k-j) + c(i-k)$ . For å finne  $\text{Ker} \partial_1$  setter vi  $i(c-a) + j(a-b) + k(b-c) = 0$  som kun lar seg løse dersom  $a = b = c$ . Så  $\text{Ker} \partial_1 = \langle (ij) + (jk) + (ki) \rangle$ . Siden  $Z_1$  nå kun genereres av en sykel

$\langle (ij) + (jk) + (ki) \rangle$ , så vil  $Z_1 = \mathbb{Z}$ .  $B_1 = \text{Im} \partial_2$ , men siden innsiden ikke er med, så er  $\partial_2 = 0$  som nevnt tidligere. Dermed er  $B_1 = 0$ , som gir  $H_1 \cong \frac{Z_1}{B_1} \cong \frac{\mathbb{Z}}{0} \cong \mathbb{Z}$ .  $H_2$  for sirkelen vil bare være null siden figuren vår ikke inkluderer det inne i trekanten.

Denne tilnærmingen viser en mer matematisk måte å finne homologigruppen til sirkelen på, hvor vi ikke baserer oss på visuelle betraktninger.

# Konklusjon

I dette arbeidet er det blitt demonstrert ved en kombinasjon av algebraiske og topologiske tilnærminger at det alltid må eksistere minst ett sted på jorden hvor det er vindstille. Approksimasjonen involverte verktøy fra både algebra og topologi for å identifisere nullvektorene på sfæren. For å overføre resultatene til den "virkelige verden" har det vært nødvendig å bruke analytiske metoder, hvor vind ble illustrert som et vektorfelt, sfæren som jordkloden og nullvektorer som steder hvor det er vindstille. Ved hjelp av ulike definisjoner fra topologi, homologi og gruppeteori kunne vi vurdere geometriske figurer som like basert på en egenskap som er enkel å se, nemlig om de har hull, og eventuelt hvor mange. Det har gitt muligheten til å bruke egenskapene til figurene på tvers av hverandre for å komme frem til et svar på problemstillingen.

Ordet dimensjoner har fått en betydelig rolle for å beregne verdier av undergeometrier som kunne anvendes i Eulers karakteristikk, som viste seg å være veldig nyttig. Det som oppgaven kom frem til er at ved hjelp av to ulike fremgangsmåter kan vi finne antall nullvektorer til sfæren. Både ved å bruke sfæren selv, men også ved hjelp av enklere metoder som kun tar hensyn til kanter, hjørner og sideflater på geometrier uten hull. Det har blitt vist at begge disse metodene førte til samme antall nullvektorer, siden de betraktete figurene hadde lik topologi.

Som vist så garanterer "Hairy ball theorem" at det alltid vil være vindstille minst to steder på jorden til enhver tid. Teoremet gjelder ikke bare for sfæreformede objekter, men også for objekter med lik topologi som kan deformeres kontinuerlig til sfæren uten at vi gjør noen kutt eller limer. Dermed ville jorden, selv om den var formet som en kube, sylinder eller pyramide, fortsatt hatt minst to steder hvor det er vindstille.

Det har vært en svært lærerik og interessant prosess for å komme frem til svaret.

# References

- [1] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics (2nd edition)*. England: Institute of Physics Publishing, 2003.
- [2] Store Norske Leksikon. *Metrikk, matematikk*. 2020. URL: [https://snl.no/metrikk\\_-\\_matematikk](https://snl.no/metrikk_-_matematikk).
- [3] Store norske leksikon. *Trekantulikheten*. Hentet fra SNL.no. URL: <https://snl.no/trekantulikheten>.
- [4] Store Norske Leksikon. *Gruppeteori*. 2024. URL: <https://snl.no/gruppeteori>.
- [5] John B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra (7th edition)*. Person Education Limited, 2013.
- [6] Wikipedia contributors. *Triangulation (topology)*. Hentet 14.05.2024. 2024. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Triangulation\\_\(topology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Triangulation_(topology)).
- [7] Store norske leksikon. *Homologi*. 2022. URL: <https://snl.no/homologi>.
- [8] Wikipedia contributors. *Betti number — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2022. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Betti\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Betti_number).
- [9] Wikipedia contributors. *Vektorfelt*. 2020. URL: <https://no.wikipedia.org/wiki/Vektorfelt>.
- [10] Natalie Wolchover. *Math's Hairy Ball Theorem Has Surprising Implications*. 2013. URL: <https://www.scientificamerican.com/article/math-hairy-ball-theorem-has-surprising-implications/>.
- [11] Brian Conrad. "The Hairy Ball Theorem, Math 396". In: *Stanford University* (2006). Nettdokument. URL: <https://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/diffgeomPage/handouts/hairyball.pdf>.
- [12] Store norske leksikon. *Polyeder*. 2022. URL: <https://snl.no/polyeder>.