Toplogi

University of Stavanger

Simran Raja

15. Mai 2023

Forord

Denne oppgaven er en besvarelse av bacheloroppgave i matematikk, LMABAC på Universitetet i Stavanger vår 2023. Under oppgaven har Eirik Eik Svanes vært en god veileder og gitt stor hjelp og gode forklaringer. Takk for den gode hjelpen og veiledningen du ga.

Stavanger 15.mai 2023

Simran Raja

Contents

1 Topologi **4**
1.1 Topologi og toplogiske rom 4
1.1.1 Lineær Algebra/ Vektorer 7
1.1.2 Metrikk 7
1.2 Kontinuitet 8
1.3 Kompakthet 10
1.4 Homeomorfi 11

2 Gruppeteori **12**

3 Simplekser **16**

4 Homologigrupper **19**
4.1 Homologigrupper 21

5 Konklusjon **25**

References **27**

Introduksjon

I matematikken er det mange ulike grener å utforske, og geometri er en av dem. Innenfor geometri finner vi et fascinerende tema kalt topologi, som står sentralt i denne oppgaven. Topologi er et relativt nytt felt og har opplevd stor fremgang i moderne tid. I topologi utforsker vi likheter og forskjeller mellom former og romlige strukturer. Målet med denne oppgaven er å bruke prinsippene i topologi til å forklare hvorfor det alltid vil være et sted på jordens overflate hvor vinden er stille. Denne oppgaven har som mål å presentere ulike konsepter som hjelper oss å forstå topologi. Oppgaven er inndelt i fire deler: først gir vi en introduksjon til topologi, deretter utforsker vi gruppeteori, videre diskuterer vi homologigrupper, og til slutt presenteres en konklusjon der vi bruker det vi har gjennomgått til å forklare formålet med oppgaven. Oppgaven er basert på teori fra Mikio Nakaharas bok "Geometry, Topology and Physics" [1], "A first Course in Abstract algebra" [2] av John B. Fraleigh og "topological spaces" av Gerard Buskes Arnoud van Rooij[3].

Chapter 1

Topologi

I første del blir begrepet topolgoi presentert med forsøk på å forklare det både er matematisk definert og med dagligspråk, suplert med eksempler for å gi en fullstendig forståelse. Videre blir begreper som vektorer og metrikk forklart, noe som også kan være nyttig for å forstå topologiske sammenhenger videre. Kontinuitet, kompakthet og homeomorfi blir også introdusert. Det kan være nyttig å ha en forståelse av notasjonen for mengder og elementer. Poenget med topologi er å se forskjell på ting.

1.1 Topologi og toplogiske rom

Topologi kan for mange være et utfordrende begrep å forstå når det først blir introdusert. Toplogi er et av de nye grenene innenfor matematikken og har hatt mest framgang i moderne tid. Toplogi handler om å studere egenskaper til rom, hvor vi ser på hvordan ulike objeketer kan endres og deformeres. Vi ser på hvordan ting kan strekkes, bøyes, og formeres uten at vi klipper eller river det i stykker eller limer ender sammen.

Ulike objekter kan ha samme toplogi, selv om de er geometrisk ulike. For eksempel har en disk samme topologi som en trekant i planet. Disken kan formes til en firkant og denne har derfor samme toplogi. Topologien endres når formen må limes sammen eller klippes/rives i. Derfor vil en annalus ikke ha samme toplogi som en disk fordi endene må limes sammen som vi ser i figur 1.1.

Tenk på figurene som leire. Vi har lov til å bøye og forme leiren til mange ulike figurer, så lenge vi ikke river leira fra hverandre eller limer ender sammen, så har de ulike figurene samme topologi.

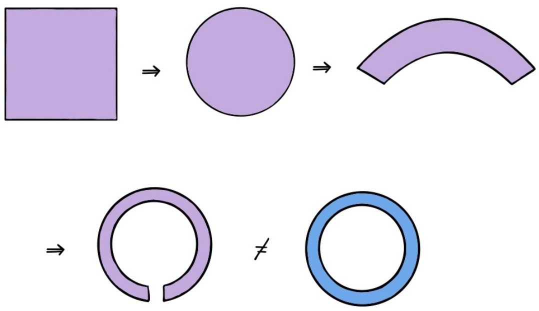

Figure 1.1: En firkant har samme toplogi som en disk, men ikke en annalus fordi den må limes i endene for å danne en ring.

En torus og en tekopp har samme topologi. Det er fordi de kan formes fra den ene til den andre formen, uten at det må klippes eller limes. På bildet kan vi se at begge har ett hull 1.2. Torusen har et hull i midten, mens tekoppen har et hull i håndtaket. (*Merk*: Ja, tekoppen har bare ett hull. "Hullet" inni er jo ikke et hull, da det rommer teen eller kaffien vi drikker. Hadde det vært et hull hadde det ikke vært mulig å hatt kaffi i koppen!). Disse to eksemplene viser hvordan former kan være topologisk like. Alså at de kan formes til hverandre. Men hvordan kan vi vise dette på en matematisk måte?

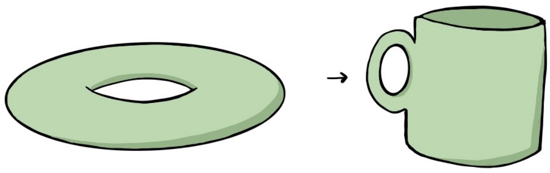

Figure 1.2: En torus har samme toplogi som en tekopp. Begge har bare et hull.

Når to toplogiske rom er like sier vi at de er *homeomorfe*. For at det skal være en homeomorfi må det være en *kontinuitet* mellom rommene. Disse begrepene skal forklares nærmere.

Først må det bemerkes at når vi sier at vi har en toplologi, er det snakk om rom eller mengder som har toplogi. For at det skal være en toplogi for rom eller mengder, er det noen krav som må være tilfredstilt.

Definisjon 1 (Topologisk rom, [1] definition 2.3)**.** For at et rom skal være toplogisk, må noen aksiomer være oppfylt. La X være en mengde og $\mathcal{T} = \{U_i\}$ være en samling av undergrupper av X. Da er (X,$\mathcal{T}$) et *topologisk rom* dersom:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, hvor $\emptyset$ er den tomme mengden.
- $\{U_j\} \subseteq \mathcal{T} \xrightarrow{=} \bigcup_j U_j \in \mathcal{T}$
- $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{T} \xrightarrow{=} (\bigcap_{i=1}^n U_i) \in \mathcal{T}$

Det første punktet krever at den tomme mengden og mengden X, altså elementene i X, må være med i toplogien. Andre punkt sier oss at dersom vi tar unionen mellom elementene i topologien gir det elementer som finnes i topologien. Det siste kravet er at endelige snitt av elementene skal være et element i det toplologiske rommet. Elementene $\{U_i \in \mathcal{T}$ kalles den åpne mengder. La oss se på noen eksempler:

Eksempel 1. La $X = \{a, b, c\}$ og $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Vi sjekker om alle tre punktene for topologi er oppfylt:

- $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$.
  Første kravet er oppfylt, fordi enhver mengde inneholder den tomme mengden, i tillegg til sine egne elementer.
- $X \cup \emptyset = X$
  Unionen mellom elementene gir elementer som finnes i $\mathcal{T}$.
- $X \cap X = X$, $X \cap \emptyset = \emptyset$ Snittet mellom elementene gir element som finnes i $\mathcal{T}$.

Alle kravene er oppfylt, og dermed er $(X, \mathcal{T})$, en topologi. $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ for et rom X kalles trivielle topologien.

Eksempel 2. La $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, hvor $X = \{a, b, c\}$, som i forrige eksempel.

- $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$
  Her finnes alle elementene og den tomme mengden i topologien, så første kravet er oppfylt.
- $X \cup X = X$, $X \cup \emptyset = X$, $X \cup \{a, b\} = X$, $X \cup \{b, c\} = X$
  Unionene mellom elementene gir elementer som finnes i $\mathcal{T}$.
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
  $\{b\}$ er ikke et element i $\mathcal{T}$, og derfor er ikke $\mathcal{T}$ en topologi på X.

1.1.1 Lineær Algebra/ Vektorer

Før vi går videre med å forklare viktige begreper innenfor toplogi, kan det være lurt å se på vektorer først.

Definisjon 2 (Vektorrom 2.2.1 [1])**.** Et vektorrom består av en mengde elementer kalt vektorer. Disse vektorene kan legges sammen (adderes) og skaleres. Å skalere en vektor er det samme som å multiplisere vektoren med en konstant. Vektorene må oppfylle følgende aksiomer:

1. **Addisjon av vektorer**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Kommutativ lov)
2. **Assosiativitet ved vektoraddisjon**: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. **Identitetselement for vektoraddisjon**: Det finnes en nullvektor $\mathbf{0}$ slik at $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ for enhver vektor $\mathbf{v}$
4. **Invers for vektoraddisjon**: For hver vektor $\mathbf{v}$, finnes det en invers $-\mathbf{v}$ slik at $\mathbf{v} + -\mathbf{v} = \mathbf{0}$
5. **Skalarmultiplikasjon med identitetselementet**: $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ for enhver vektor $\mathbf{v}$
6. **Distributivitet av skalarer over vektoraddisjon**: $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$
7. **Distributivitet av vektorer over skalaraddisjon**: $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$
8. **Assosiativitet av skalarmultiplikasjon**: $a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{v}$

1.1.2 Metrikk

Et metrisk rom i matemmatikk er en mengde der det er definert en metrikk eller et avstandsmål mellom to vilkårlige elementer i mengden. Det er altså en måte å måle avstand på. For eksempel hvis du har to punkter, A og B, på en linje, er metrikken hvor stor avstanden er mellom punktene. En avstand kan aldri være negativ, eller mindre enn 0. Avstanden er også like stor om du begynner å måle fra punkt A eller punkt B. Dette er kravene som må være tilfredstilt for at en funksjon skal være en metrikk. Vi kan skrive dem som følgende:

Definisjon 3 (Metrisk rom, Topological spaces [3], s.83)**.** En funksjon $d : X \times X \to \mathbb{R}$ er en metrikk på mengden X hvis den oppfyller følgende krav:

- **Positivitet:** $d(x, y) \geq 0$ for alle $x, y \in X$.
- **Symmetri:** $d(x, y) = d(y, x)$ for alle $x, y \in X$.
- **Trekantulikheten:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ for alle $x, y, z \in X$.
- $d(x, y) = 0$ hvis og bare hvis $x = y$.

Metrikken i et metrisk rom tillater oss å måle avstanden mellom elementer i rommet. Dette er nyttig for å forstå konsepter som konvergens, åpenhet og lukkethet i metriske rom. Men hva har metrikk med topologi å gjøre? Metrikk og topoloi er knyttet sammen gjennom begrepet kontinuitet. Vi kan bruke en metrikk til å gi X en topologi: den meriske "vanlige" topologien.

1.2 Kontinuitet

Du er sikkert kjent med begrepet kontinutitet hvor en funksjon er kontinuerlig dersom den er sammenhengende overalt, altså at den kan tegnes uten at man trenger å løfte blyanten.

Eksempel 3. La $f(x) = x + 1$. Dette er en lineær funksjon som er kontinuerlig over den reelle tallinja og har ingen brudd eller hull i grafen.

Eksempel 4. La $g(x) = \frac{1}{x}$. Denne rasjonale funksjonen er ikke kontinuerlig når $x = 0$, fordi funksjonen ikke er definert for $x = 0$.

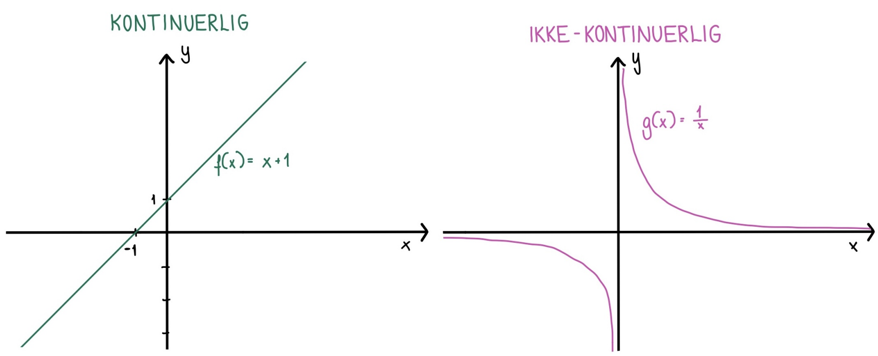

Figure 1.3: Ekesempel på en kontinuerlig og en ikke-kontinuerlig funkjson

I topologien handler kontinuitet om at det er jevn/sammenhengende overgang mellom åpne mengder i to toplogiske rom.

Vi kan derfinere kontunuitet i topologi slik:

Definisjon 4 (Kontinuitet, [1] definition 2.4)**.** La X og Y være topologiske rom. En avbildning $f : X \to Y$ er kontinuerlig dersom det inverse bildet av en åpen mengde i Y er en åpen mengde i X. Altså, hvis $U \in \mathcal{T}_Y$, da er $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

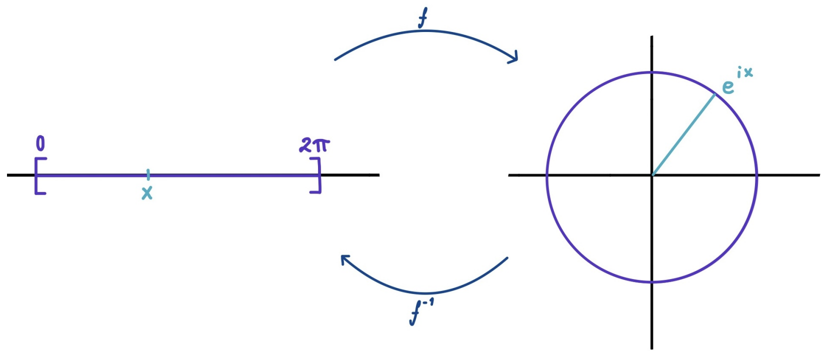

Figure 1.4: Topologisk kontinuitet mellom sirkel og en rett linje

Eksempel 5. La oss se på et eksempel med en sirkel i planet med omkrets 2π (Se figur 1.4). La intervallet være $[0, 2\pi]/\sim$, hvor $0 \sim 2\pi$. Sirkelen er kontinuerlig, altså sammenhengende. Vi kan sammenligne sirkelen med en rett linje som går fra punktet 0 til 2π på en akse. En rett linje og en sirkel ser forskjellige ut hvis vi ser på dem fra et geometrisk synspunkt, men de kan faktisk ha like topologiske egenskaper. For eksempel, hvis vi beveger oss langs sirkelens omkrets, vil det være som å gå langs linjen fra 0 til 2π. Vi går tross alt samme lengde, uten noen hull, så både sirkelen og linjen er sammenhengende.

Vi kan betrakte linjen som et lukket intervall på den reelle tallinjen. Dette intervallet inkluderer alle tallene mellom 0 og 2π, så linjen er en lukket mengde i topologien. Sirkelen kan betraktes som en lukket kurve.

Så når vi snakker om topologisk kontinuitet mellom linjen og sirkelen, tenker vi på hvordan vi kan matche hvert punkt på linjen med et tilsvarende punkt på sirkelen på en kontinuerlig måte, til trosse for forskjellene i geometri og egenskeper mellom de to formene. Vi tenker oss at linja er mengden X og sirkelen er mengden Y. Og at vi har en kontinuerlig funksjon $f : X \to Y$. Når vi bruker definisjonen ovenfor, kan vi tenke oss at avbildningen $f : X \to Y$ går fra linjen til sirkelen, der linjen er X og sirkelen er Y. Sirkelen er en åpen mengde, og den inverse, som er intervallet på linjen, er også åpen. Derfor er det kontinuitet mellom dem.

Når vi i eksempelet beskriver sirkelen som en lukket mengde, mener vi topologisk sett. Mens når vi sier at sirkelen er en lukket kurve, snakker vi om dens geometriske form. Disse to konseptene kan virke utfordreende å gripe tak i, men viser hvordan en sirkel har ulike egenskaper utifra hvilket perspektiv vi ser fra.

1.3 Kompakthet

La oss betrake disken i planet, representert som S^1. Den har både en tydelig omkrets og et rom inni, slik vi kan se i figur 1.5. Vi kaller disken for en lukket mengde fordi den består av både rommet inni og selve randen. I tillegg er de begrenset, da den ikke strekker seg uendelig langt i noen retning. Dermed er sirkelen både lukket og begrenset. Vi sier derfor at sirkelen er kompakt.

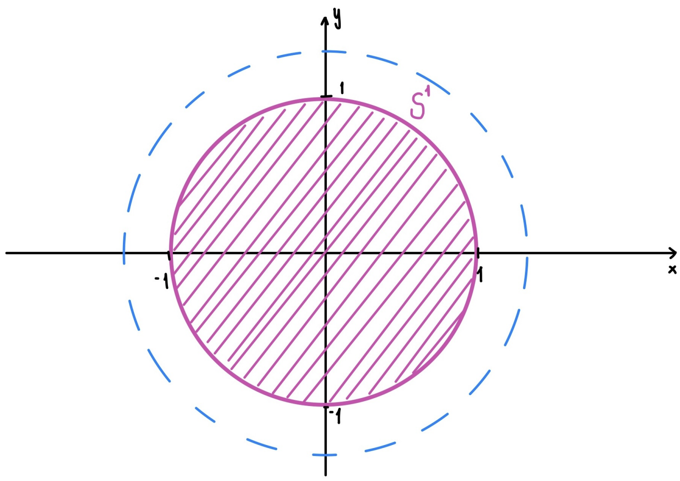

Figure 1.5: En disk er kompakt fordi den er lukket og begrenset.

En annen måte vi kan se om disken er lukket og begrenset, er om vi klarer å lage en nye mengde eller disk slik at disken S^1 er inneholdt i den nye mengden. På bildet ser vi at vi kan lage en mengde, den blå disken, hvor den rosa disken er inneholdt i den mengden.

Definisjon 5 (Kompakt, [1] definition 2.1)**.** Når vi sier at et område er kompakt, mener vi at det er både "lukket" og "begrenset".

Eksempel 6. La oss bruke et gi et annet eksempel for å forklare dette bedre. Forestill deg et stykke tau som er strukket ut over en lang avstand. Hvis tauet har en begynnelse og en slut, og det er trukket stramt uten å løsne eller strekke seg uendelig, da er tauet lukket og begrenset. Det kan være kort eller langt, men det er alltid innenfor en definert grense.

Eksempel 7. Et eksempel på en ikke-kompakt mengde er den åpne mengden $(0, \infty)$ i $\mathbb{R}$. Dette er en ikke kompakt mengde fordi den ikke er lukket og ikke begrenset.

1.4 Homeomorfi

I topologien definerer vi to objekter eller figurer som like, dersom det går an å gå fra den ene formen til den andre, og tilbake igjen, uten at det trengs å rives, klippes eller limes i. Vi kan kalle formeringen fra den ene formen til den andre for en *kontinuerlig deformasjon.* Formeringen er kontinuerlig, fordi vi ikke lager noen hull eller river i formen. Vi sier at formene er homeomorfe. Forklarer vi dette mer matametisk kan vi si at dersom du har to topologsike rom X_1 og X_2 er disse homeomorfe hvis det finnes to funksjoner: $f : X_1 \to X_2$ og en innvers: $f^{-1} : X_2 \to X_1$ slik at vi ender opp med det samme rommet når vi går fra det ene rommet til det andre, og tilbake igjen. Det er akkurat som når vi forklarte den topologiske likheten mellom leire, hvor leira kan formes fra den ene formen til den andre, og en torus som kan formes til en tekopp og omvendt. Torusen og tekoppen er homeomorfe.

Definisjon 6 (Homeomorfi, [1] Definition 2.9)**.** La X_1 og X_2 være to topologiske rom. En avbildning $f : X_1 \to X_2$ er en homeomorfi hvis den er kontinuerlig og har en invers $f^{-1} : X_2 \to X_1$ som også er kontinuerlig..

Eksempel 8. La oss se på samme eksempelet med $[0, 2\pi]/\sim$, hvor $0 \sim 2\pi$, på den reelle tallinjen og en sirkel S^1 i planet. Disse to er homeomorfe. For å se dette, kan vi definere en avbildning $f : [0, 2\pi] \to S^1$ fra intervallet til sirkelen. Avbildningen tar et punkt fra intervallet $[0, 2\pi]$ og avbilder det til et punkt på sirkelen. Den inverse funksjonen, $f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi]$, tar et punkt fra sirkelen og returnerer det til intervallet $[0, 2\pi]$. Disse to avbildningene er gjensidig inverse av hverandre og er begge kontinuerlige. Derfor er det en homeomorfi mellom $[0, 2\pi]$ og S^1.

Men hva om vi hadde hatt et åpent intervall $(0, 2\pi)$ på den reelle tallinjen i stedet? Da ville vi ikke hatt en homeomorfi, fordi intervallet og sirkelen har forskjellig struktur. Det som menes med dette er at sirkelen er en lukket kurve, men det åpne intervallet $(0, 2\pi)$ er en linje uten endepunkter. Selv om begge rommene er sammenhengende, så kan vi ikke finne en kontinuerlig avbildning som bevarer strukturen og opprettholder alle egenskapene til begge rommene. Det åpne intervallet $(0, 2\pi)$ er ikke-kompakt, mens sirkelen er kompakt.

Chapter 2

Gruppeteori

Gruppeteori er viktig for å forstå noen topologiske konsepter blant annet homologi. Men før dette vises, blir det introdusert noen grunnleggende begreper innen gruppeteori. Først, la oss se på hva en gruppe er.

Definisjon 7 (Gruppe, definisjon 4.1 [2])**.** En gruppe er en samling med elementer der det er definert en operasjon, for eksempel addisjon eller multiplikasjon, og resultatet av operasjonen gir et element i gruppen. I tillegg må noen betingelser være oppfylt:

- **Assosiativitet:** Det betyr at rekkefølgen vi kombinerer elementene på, ikke har noe å si.
- **Identitetselement:** Det finnes et element i gruppen som, når vi kombinerer det med et annet element, gir samme elementet tilbake.
- **Inverser:** For hvert element i gruppen finnes det et element, slik at når disse to kombineres gir det identitetselementet tilbake.

Eksempel 9. Et eksempel på en gruppe er mengden av heltall under addisjon $(\mathbb{Z}, +)$. Denne gruppen er lukket fordi summen at to heltall alltid er et annet heltall. La oss sjekke om de andre betingelsene er oppfylt:

- **Assosiativitet:** Rekkefølgen heltallene blir addert på har ikke noe å si; for eksempel er (2 + 3) +4 = 2+ (3 + 4) = 9.
- **Identitetselement:** I dentitetselementet er 0, fordi når vi adderer 0 med et hvilke som helst tall a gir a.
- **Inverser:** Hvert heltall a har et inver-element $-a$, fordi når vi legger disse to sammen får vi
$$2 + (-2) = 0$$

Denne gruppen, $(\mathbb{Z}, +)$, er en *abelsk* gruppe.

Definisjon 8 (Abelsk gruppe, definisjon 4.3 [2])**.** En abelsk gruppe er en gruppe hvor operasjonen er kommutativ. Det betyr at dersom den binære operasjonen, for eksempel addisjon, er valgt, så vil $a + b = b + a$. Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ er abelsk fordi

$$a + b = b + a \quad \text{for alle heltall } a \text{ og } b.$$

Alle grupper vi studerer her er abelske.

Definisjon 9 (Homomorfi,3.11 Elementary group theory [1])**.** En homomorfi er når elementer fra en gruppe sendes til elementer i en annen gruppe på en måte som bevarer operasjonen. F.eks hvis vi legger sammen to elementer i den første gruppen, skal resultatet når det er sendt gjennom homomorfien være summen av de tilsvarende elementene i den andre gruppen. Vi kan skrive det matematisk slik: $f : G \to H$ er en homomorfi hvis den oppfyller følgende betingelse:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

for alle x, y i G.

Definisjon 10 (Isomorfi,[1] 3.11 Elementar group theory)**.** Dersom en homomorfi er bijektiv og i tillegg bevarer operasjonen, kaller vi den en isomorfi.

Definisjon 11 ([1], Lemma 3.1)**.** La $f : G_1 \to G_2$ være en homomofri. Da er

- **Ker(f):** $\{a \mid a \in G_1, f(a) = 0\}$ er en undergruppe av G_1
- **Im(f):** $\{a \in G_2 \mid a = f(b), \text{ for noen } b \in G_1\}$ er en undergruppe av G_2

Ker(f) står for "kjerne av f". Det er mengden av alle elementer i G_1 som blir sendt til identitetselementet i G_2 under homorfien f. Med andre ord, det er alle elementene x i G_1 slik at f(x), som er et element i G_2, er identiteselementet i G_2. Denne mengden er en underguppe av G_1, noe som betyr at den er en gruppe i seg selv når den opererer med den samme gruppeoperasjonen som G_1. Im(f) står for "bildet av f". Det er mengden av alle elementer i G_2 som bilder av elementer i G_1 under homorfien f. Med andre ord, det er alle elementene x i G_2 som på formen f(y) for noen y i G_1. Denne mengden er en undergruppe av G_2, noe som betyr at den er en gruppe i seg selv når den opererer med den samme gruppeoperasjonen som G_2

Grupper kan være endelige eller uendelige. For eksempel er $(\mathbb{Z}_3, +)$ et eksempel på en endelig gruppe? . Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ er derimot en uendelig gruppe, fordi den består av uendelig mange heltall, og det er alltid mulig å legge til et tall til i gruppen.

Definisjon 12 (Endelig genrerte grupper 3.1.2, [1],)**.** En gruppe G sies å være "endelig generert" hvis vi kan finne et sett med elementer i gruppen kalt generatorer, som sammen kan generere alle andre elementer i gruppen ved å kombinere dem på forskjellige måter.

Eksempel 10. La $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ med addisjon som operasjon. Denne mengden er endelig generert av ett enkelt element: 1 eller 3, fordi disse som generatorer gir alle elementene i mengden:

$$3 + 3 = 6, \quad 3 + 3 + 3 = 9, \quad 3 + 3 + 3 + 3 = 2, \ldots$$

og slik fortsetter prosessen til vi har generert alle elementene i $\mathbb{Z}_{10}$. Dermed er $\mathbb{Z}_{10}$ endelig generert av 3 (eller 1). $\mathbb{Z}$ er generert av enten +1 eller -1.

Definisjon 13 (Fri abelsk gruppe, Definsjon 3.1 [1])**.** En fri abelsk gruppe er en spesiell type gruppe som er endelig generert. Det betyr at vi kan finne et sett med elementer i gruppen, generatorer, som sammen kan kombineres for å lage alle andre elementer i gruppen. Det unike med en fri abelsk gruppe er at generatorer kan velges på en måte som gjør at de ikke har noen relasjoner mellom seg, bortsett fra identitetselementet. Med andre ord, ingen av generatorene kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av de andre, med mindre vi inkluderer identitetselementet.

Hvis en gruppe har r slike lineært uavhengige generatorer, sier vi at den har en fri abelsk gruppe av rang r. Dette betyr at vi trenger r uavhengige generatorer for å generere alle elementene i gruppen, og ingen av disse generatorer kan uttrykkes som en kombinasjon av de andre, med mindre vi inkluderer identitetselementet.

Så en fri abelsk gruppe av rang r er rett og slett en gruppe som kan dannes ved å kombinere r uavhengige elementer på en slik måte at ingen av dem kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av de andre, med mindre vi inkluderer identitetselementet.

Definisjon 14 (Syklisk gruppe 3.13, [1])**.** Når en gruppe har ett enkelt element som generator, kaller vi den syklisk. Hvis en gruppe er generert av dette ene elementet x, ser elementene i G slik ut: $G = \{0, \pm x, \pm 2x, \ldots\}$. En uendelig gruppe kan også være syklisk, og da kaller vi den for en uendelig syklisk gruppe. Dersom gruppa er endelig og syklisk, kaller vi den en endelig syklisk gruppe.

Teorem 1 (Fundamental teorem av endelig genererte abelske grupper, Teroem 3.2 [1])**.** *Enhver endelig generert abelsk gruppe er isomorf med en direkte sum av sykliske grupper. Vi skriver den direkte summen slik:*

$$G \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_p},$$

hvor k_1 og k_p representerer antall endelige sykliske grupper vi har i direkte summen, og r er rangen til gruppen, altså antall lineært uavhengige generatorer som trengs for å generere hele gruppen. r er antall $\mathbb{Z}$ faktorer + p.

Har vi en endelig abelsk gruppe, kan vi representere den som en samling av mindre grupper kalt sykliske grupper. Det betyr at hvis vi har en kompleks gruppe, kan vi bryte den ned til enkle sirkelformede deler, som gjør det lettere å forstå og analysere strukturen til den større gruppen.

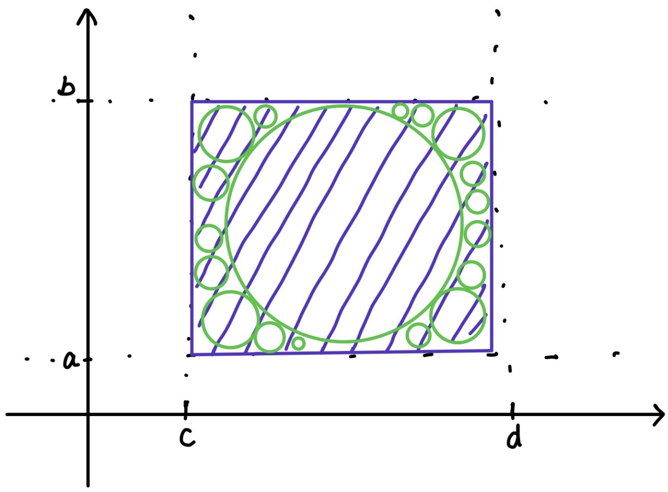

Figure 2.1: Her ser vi en firkant som kan deles opp i flere små mengder som er tegnet som grønne sirkler.

Dette kan illustreres som at vi har en mengde,, se figur 2.1. Det kan lages undermengder, som er tegnet som sirkler, hvor sirklene repsresenterer sykliske undermengder. Det kan lages flere slike sirkler for å dekke hele mengden.

Chapter 3

Simplekser

Simplekser brukes i topologi til å bygge opp mer komplekse topologiske strukturer og for å definere konsepter som homologi. Simplekser kan tenkes på som en "nedbrytning", eller "filtrasjon", av et topologisk rom, som gjør det enklere å beregne.

Definisjon 15 (Eulersk karakteristikk 3.2[1])**.** Eulersk karakteristikk er en topologisk invariant som er knyttet til geometriske figurer som f.eks overflater. Den eulerske karakteristikken til en figur er et heltall som gir informasjon om dens topologiske struktur. For en todimensjonal overflate, som f.eks en torus eller kule, kan den eulerske karakteristikken beregnes ved å telle antall hjørner og kanter og flater i figurene, og bruker deretter formelen X= V - E + F, hvor V er antall hjørner(vertices), E er antall kanter (edges) og F er antall flater (faces). For en todimensjonal overflate, som f.eks et rektangel, vil den eulerske karakteristikken være 0. For en sfære vil den være 2, mens for en torus vil den være 0.

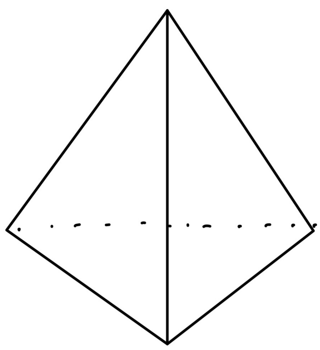

Figure 3.1: Tetraheder: har 4 hjørner, 6 kanter og 4 overflater

Eksempel 11. La oss se på et tetraheder, se figur 3.1. Eulerkarakteristikken for et tetrahder blir X= 4 - 6 + 4= 2. Dette er den samme eulerkarakteristikken som for sfæren. Det er fordi sfæren og tetrahedet kan kontinuerlig formeres fra den ene til den andre, altså de er homeomorfe. Det betyr derimot ikke at de er geometrisk like, ettersom de har forskjellig struktur og egenskaper.

Den enkleste simpleksen er 0-simpleks, som bare er et punkt eller et hjørne. Så har vi 1-simpleks som er en rett linje. En 2-simplex er en trekant, hvor alle sidene er like lange. En 3-simpleks er et tetrahedron, som altså er tre-dimensjonalt. Disse nevnte simpleksene er lette å forestille oss, men kommer vi i høyrere dimensjoner som 4-og 5- dimensjoner, kan det bli litt vanskeligere å forestille.

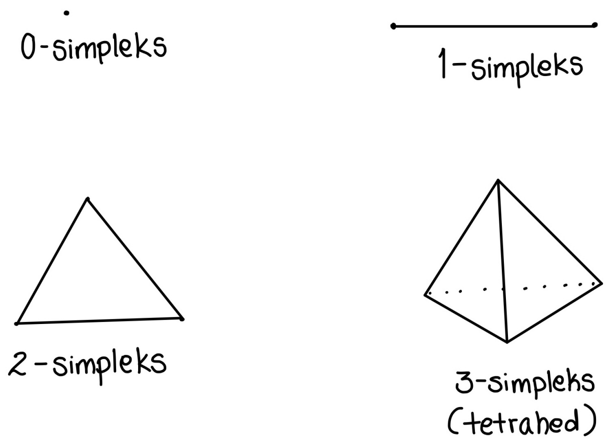

Figure 3.2: For hver dimensjon legges altså et hjørnepunkt til, for å lage en simplex av høyere orden. Men når vi velger punktene, må de være "geometrisk uavhengige", noe som betyr at de ikke kan ligge på samme rette linje eller plan.

Vi gir retning til simplekser ved å angi hvordan vi beveger oss langs kantene. Dette kaller vi for orientering. Ser vi på linja på figur 3.4, er retningen av simplekset fra punkt 1 til punkt 2, Det skriver vi som (12). Det kan også skrives som -(21), som er motsatt retning, og vi tar derfor med et minustegn for å få den riktige retningen. Orienteringen på trekanten er fra punkt 1 til 2 til 3. Vi tegner da en sirkelformet pil inni trekanten for å vise dette. Vi kan skrive retningen slik: (123), som er det samme som -(321). Vi bruker simplekser til å triangualisere geometrier som vi kan bruke til å beregne homologi, se figur 3.3

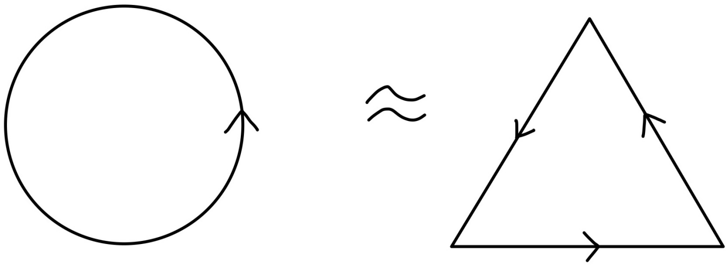

Figure 3.3: En sirkel er homeomorf med en trekant

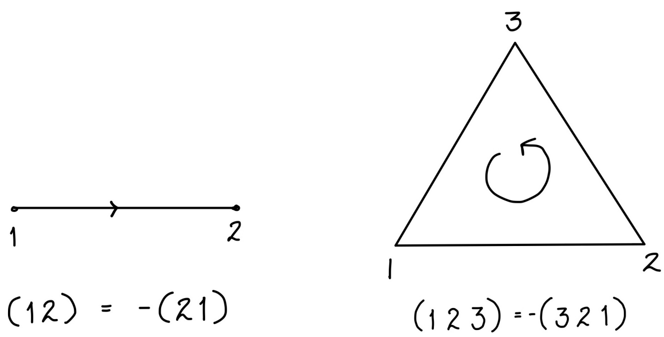

Figure 3.4: Orientering av simplekser. Pilene viser hvilken retning simplekset går i.

Chapter 4

Homologigrupper

Homologigrupper er et verktøy i topologi som hjelper oss med å forstå formen til topologiske rom. Her undersøker vi hull og sykluser i disse rommene. Homologigrupper hjelper oss med å telle og forstå disse forskjellige typene av hull og sykluser, og vi kan sammenlikne forskjellige topologiske rom.

Definisjon 16 (Kjedegrupper, Definisjon 3.2 [1])**.** Kjedegrupper hjelper oss med å studere og forstå formen og strukturen til topologiske rom. Se for deg en trekant, den består av grunnleggende byggesteiner av simplekser: tre hjørner, altså tre 0-simplekser, tre 1-simplekser og en 2-simpleks. En kjedegruppe er en abelsk gruppe som er generert av disse simpleksene. Så for en trekant, vil kjedegruppen bestå av alle mulige kombinasjoner av disse linjene. La K være et simplisialkompleks. Kjedegruppen $C_r(K)$ til K er en fri abelsk gruppe dannet av de orienterte r-simpleksene. Hvis r er større enn dimensjonen til K, er $C_r(K) = 0$. Et element i $C_r(K)$ kalles en r-kjede. La I_r være antall r-simplekser i K, $c \in C_r(K)$. Da er

$$c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i}$$

c_i er koeffisienter som multipliseres med hver enkelt simpleks i kjeden.

For å legge sammen to kjeder, legger vi sammen koeffisientene til hver enkelt simpleks i de to kjedene: $c_1 = \sum_i c_i \sigma_{r,i}$, $c_2 = \sum_i c_{2i} \sigma_{r,i}$,

$$c = \sum_i (c_{1i} + c_{2i}) \sigma_{r,i}$$

Enheteselementet for kjedegruppen en en kjede som består av alle simplekser multiplisert med null, altså vi får en tom kjede. Enhetselementet er $0 = \sum 0 \cdot \sigma_{r,i}$.

For å finne det inverse elementet til en kjede, endrer vi fortegn på koeffisientene til hvert enkelt simpleks i kjeden: Inversen er $-c = \sum(-c_i) \cdot \sigma_{r,i}$.

Definisjon 17 (Randoperator, ∂_r [1])**.** ∂_r brukes som notasjon for randoperator. En 0-simpleks har ingen grense, er definert som null. 1-simpleks har en rand; definert som forskjellen mellom endepunktene. For eksempel hvis vi har en linje fra p_0 til p_1, blir randen $\partial_1(p_0p_1) = p_0 - p_1$.

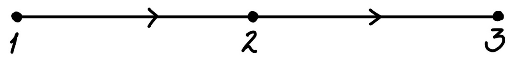

Figure 4.1: 1-simpleks som består av linjene 1,2 og 3

Eksempel 12. La oss se på 1-simplekset i figur 4.1. Det er en linje som består av to deler: $(1,2)$ og $(2,3)$. Hvis vi definerer $\partial_1(1,3)$ til å være $(1)+(3)$ vil vi ikke få riktig svar. Vi vil ende opp med å legge til (2) to ganger: $(1)+(2)+(2)+(3)$. Derfor definerer vi istedet $\partial_1(1,3)$ som $(3)-(1)$ for en rand som går fra startpunktet (1) til endepunktet (3). $\partial_1(1,2)$ blir $(2)-(1)$, og det gir oss den riktige retningen og lengden på randen til 1-simpleksen:

$$\partial_1((1,2)+(2,3)) = (2)-(1)+(3)-(2) = (3)-(1) = \partial_1(1,3)$$

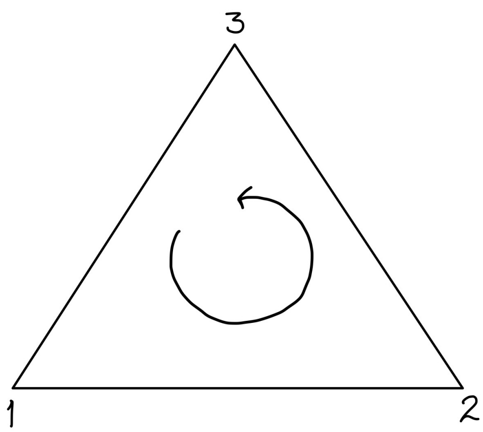

Figure 4.2: Trekant med orientering (123)

Eksempel 13. La oss se for oss en trekant som er en 2-simpleks, som i figur 4.2: Trekaneten er representert av punktene 1,2, og 3, som på figur 3.1. Vi ønsker å finne randen til $\partial_2(123)$. $\partial_2(123)$ = (2 3) -(1 3) + (1 2). Hvis vi bruker regelen $\partial_1(12)$ = ((1)-(2)), vil vi ende opp med å legge til punktet 2 to ganger når vi finner grensen av 2-simplekset, siden hjørnet 2 er en felles ende for både (12) og (23). Istedet bruker vi regelen $\partial_1(12)$= ((2)-(1)), som gir oss en retning fra 1 til 2. på samme måte har vi $\partial_1(23)$ = ((3)-(1)) og $\partial_1(31)$ = ((1)-(3)). Når vi legger sammen disse grensene får vi: $\partial_1(12) + \partial_1(23) + \partial_1(31)$ = ((2)-(1)) + ((3)-(2)) +((1)-(3))= 0 Dette gir mening fordi det betyr at randen av randen er null for en lukket trekant.

Definisjon 18 (R-sykel, Definisjon 3.3 [1])**.** Hvis grensen til en kjede er null, kalles den en syklus $Z_r(K)$ av grad r. Hvis c= $C_r(K)$ oppfyller $\partial_r c$ =0.

Definisjon 19 (R-rand, Definition 3.4 [1])**.** La K være et n-dimensjonalt simplisial-kompleks og la c være et element i $C_r(K)$. Det betyr at vi har et n-dimensjonalt simplisial kompleks bestående av simplekser av ulik dimensjon, og c er en kjede av r-simplekser i dette komplekset.

Definisjon 20 (R-randgruppen, Definition 3.4 [1])**.** Hvis det eksisterer et element $d \in C_{r+1}(K)$ slik at $c = \partial_{r+1} d$, kalles c en r-rand. Dette betyr at hvis vi kan finne et høyere dimensjonalt element d slik at c er grensen til d, så er c i r-rand. Randgruppen er mengden av r-rander, og vi bruker notasjonen $B_r(K)$ for denne gruppen. $B_r(K)$ er en undergruppe av $C_r(K)$.

$Z_r(K)$ og $B_r(K)$ er undermengder av $C_r(K)$. Merk at $B_r(K) \subseteq Z_r(K)$. Dette fordi hvis $c = \partial d$ så er $\partial(\partial d) = 0$, siden randen til en rand er null.

4.1 Homologigrupper

Definisjon 21 (Homologigrupper, Definisjon 3.5 [1])**.** Homologigrupper hjelper oss til å studere egenskapene til topologien. De gir oss blant annet informasjon om hullene, forskjeller og likheter mellom rom og former. Trekanten og firkanten (uten indre) er homeomorfe figurer (siden vi kan forme fra den ene til den andre, uten at de blir topologisk forskjellige). For en trekant K_1 blir kjedegruppen

$$C_1(K_1) = \{i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) \,|\, i, j, k \in \mathbb{Z}\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

mens for et kvadrat K_2 blir kjedeguppen:

$$C_1(K_2) = \{i(p_0p_1)+j(p_1p_2)+k(p_2p_3)+l(p_3p_0) \,|\, i, j, k, l \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

[1]

Kjedegrupper er forskjellige måter å kombinere kantene på. Vi ser på gruppene at de ikke er helt like. De har forskjellig form. De er altså ikke isomorfe. Det betyr ar de ikke kan brukes alene til å fortelle oss om figurene er like fra et topologisk synspunkt. Så vi trenger noe annet. Det er her homologigrupper kommer inn. Homologigrupper forteller oss mer om formen på figurene, uavhengig av hvordan vi kombinerer kantene.

Definisjon 22 (Homologi [1])**.** La K være en n-dimensjonal simplicialkompleks. $H_r(K)$, $0 \leq r \leq n$, forbundet med K er definert som

$$H_r(K) \equiv \frac{B_r(K)}{Z_r(K)}$$

hvor $H_r(K)$ er settet av ekvivalensklasser av r-sykler. En r-sykel z tilhører $Z_r(K)$. To r-sykler tilhører samme ekvivalensklase hvis forskjellen mellom dem er en rand, og dermed er de homologe. To sykler er i samme homologiklasse hvis de kan deformeres til hverandre på en måte som opprettholder deres grunnleggende form. Med andre ord, hvis forskjellen mellom dem kan uttrykkes som randen til noe annet i komplekset, er de i samme homologiklasse.

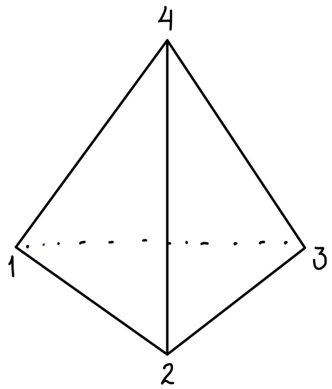

Figure 4.3: Tetrahedron med hjørnene 1,2,3 og 4

(Vi kan se på sfæren som kan triangulariseres til et tetrahedron. Å beregne homologien til en sfære kan være mer utfordrende. Men vi kan også se på øyekast hva homologigruppen blir.

Eksempel 14. La oss nå prøve å gjøre beregninger med homologigrupper. La oss se på et tetrahedron, se figur 4.3, hvor vi bare ser på overflaten. Det består av 4 hjørner. Hvert hjørne kan nunnereres med 1,2,3 og 4.Vi

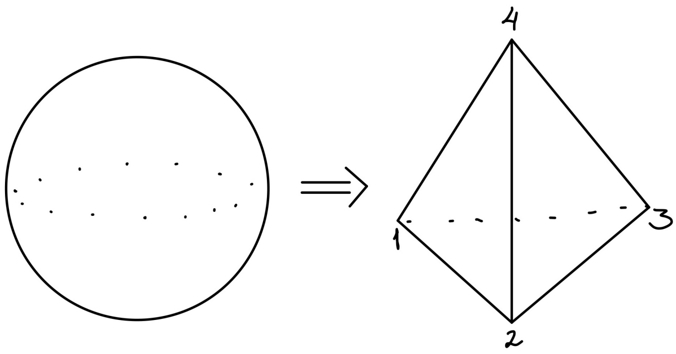

Figure 4.4: En sfære kan triangulariseres til et tetrahedron

ser bare på overflaten. Vi kan skrive mengden av simpleksene slik, og får trianguliseringen av S^2:

$K = \{(1),(2),(3),(4),(12),(13),(14),(23),(24),(34),(123),(142),(134),(234)\}$

Vi ser bare på elementene med 3 hjørner av gangen.

La $s_2 \in C_2(S^2)$ være gitt ved $s_2 = a(123) + b(142) + c(134) + d(243)$. Vi ønsker å finne ut hva som er randen av denne 2-syklusen, som betyr å finne ut hvilke linjer som danner kanten av trekantene og hvordan de er satt sammen.

$\partial s_2 = a((23)-(13)+(12))+b((42)+(12)+(14))+c((34)-(14)+(13))+d((43)-(23)+(24)) = 0$

Vi kan representere faktorene etter a, b, c og d som vektorer **x**, **y**, **z** og **w**. **x**+ **y** + **z** = -**w**, **x**, **y**, **z** er lineært uavhengige . Dermed får vi at $B_1(S^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

La oss se på syklene $z \in Z(S^2)$.

$$z = \mathbf{x}_1(12) + \mathbf{x}_2(23) + \mathbf{x}_3(13) + \mathbf{x}_4(14) + \mathbf{x}_5(24) + \mathbf{x}_6(34)$$

Randoperatoren skal bli null, så vi kan skrivet dette som følgende:

$\partial z = x_1((2)-(1)) + x_2((3)-(2)) + x_3((3)-(1)) + x_4((4)-(1)) + x_5((4)-(2)) + x_6((4)-(3)) = 0$.

Videre kan vi skrive dette om til $\partial z = (1)(-x_1 - x_3 - x_4) + (2)(x_1 - x_2 - x_5) + (3)(x_2 + x_3 - x_6) + (4)(x_4 + x_5 + x_6)$.

Likningene vi får er da

$-x_1 - x_3 - x_4 = 0$
$x_1 - x_2 - x_5 = 0$
$x_2 + x_3 - x_6 = 0$
$x_4 + x_5 + x_6 = 0$

Disse ligningene beskriver forholdet mellom faktorene x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 og x_6 for å oppfylle randoperatoren. Vi kan fra disse likningene finne ut av at løsningen skal bli en 3-dimensjonal løsning. Vi kan lage den 3-dimensjonal løsningen: $Z(S^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3$ og $B(S^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3$

Vi kan se på overflaten til tetrahedet som overflatnen av en sfære. Derved kan vi finne homologigruppen for overflaten til sfæren S^2

$$H_1(S^2) \cong \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}^3} = \{0\}$$

Altså homologigruppen $H_1(S^2)$ av sfæren er den trivielle gruppen. Dette betyr ar det ikke finnes noen ikketrivielle en-sykluser i S^2, eller med andre ord, det er ingen lukkede kurver i S^2 som ikke kan kontinuerlig deformeres til et enkelt punkt.

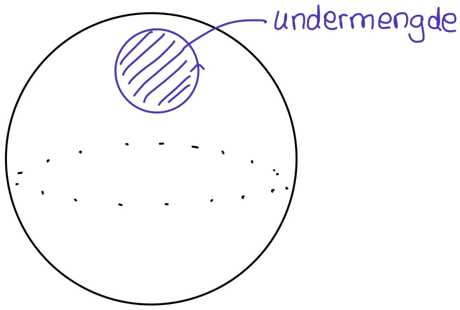

Figure 4.5: En undermengde på sfæren, som en sirkel, kan krympes til et punkt.

Eksempel 15. Vi kan også beregne homologigrupper ved øyekast. Beregninger kan ofte bli omfattende jo høyere dimensjon vi kommer opp i. La oss prøve å se hvordan vi kunne ha beregnet homologien til sfæren ved øyekast.

Ser vi på formen til en sfære, kan vi se at vi kan lage 1-dimensjonale undermengder som sirkler. Disse sirklene er topologisk trivielle, det vil si at de kan krympes til et punkt på sfæren. Dermed ser vi at $H_1(S^2) = 0$.

For 2-dimensjonale sykluser, kan vi se at hele sfæren utgjør en 2-dimensjonal syklus som ikke kan krympes til et punkt uten å forlate overflaten. Dermed er denne syklusen ikke-triviell, og vi har at $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Til slutt, siden S^2 er sammenhengende, har vi $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Chapter 5

Konklusjon

Nå har vi introdusert noen viktige konsepter for å forstå topologi. Disse konseptene vil være nyttige for å illustrere hovedpoenget med oppgaven, som er å vise hvorfor det alltid vil finnes et punkt på jordoverflaten hvor det ikke er vind. Mens å demonstrere dette algebraisk kan være utfordrende, kan topologi tilby en mer intuitiv tilnærming. Vi sammenligner jordoverflaten med en sfære, og ved hjelp av topologiske prinsipper kan vi undersøke egenskapene til denne sfæriske overflaten for å forstå hvordan vinden beveger seg.

La $\chi(X) = (b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots$ være Eulers tall. Og la

$$H_p(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_p}$$

$\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ kalles Betti-tall, b_p. De gir oss informasjon om dimensjonene til de fri abelske gruppene i de ulike homologigruppene til et simplisialkompleks.

Ved å anvende prinsippene om kontinuerlige deformasjoner og topologiske invariantene til en sfære, kan vi vise at det alltid vil være minst ett punkt på jordoverflaten hvor vinden ikke blåser. Dette skyldes egenskapene til sfæren, som tillater en jevn fordeling av vind og muliggjør eksistensen av slike "vindstille soner".

La oss bruke det vi har lært til å vise dette. Først kan vi se på konstruksjonen av sæfren. Sfæren en 2-dimensjonal, og består av 0-simplekser (punkter), 1-simplekser (kanter) og 2-simplekser (trekanter). Deretter kan vi se på homologigrupper, hvor vi definerer grenser og sykluser på sfæren. For eksempel kan vi tenke på sykluser som lukkede baner rundt sfæren, og grenser som kantene til disse banene. Så kan vi identifisere homologiklassene på sfæren S^2 som ikke er kant til noe annet objekt. Sfæren er sammenhengdene, så hvert punkt kan kontinuerlig deformeres til et annet. Dermed får vi $H_0(S^2) = \mathbb{Z}$, fordi det er ett uavhengig 0-dimensjonalt hulll. $H_1(S^2) = \{0\}$

som vist ovenfor, og $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ fordi det er ett uavhengig 2-dimensjonalt hull (det indre hulrommet).

$$\text{Altså vi får } H_p(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{når } p = 0 \\ \{0\}, & \text{når } p = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{når } p = 2 \end{cases}$$

For å finne bhettitallene $b_r(K)$ til sfæren, ser vi på antallet simplekser som utgjør hver homologiklasse for å bestemme dimensjonen til hvert hull.

Bettiallene til sfæren S^2 er $b_0(K) = 1$ fordi det er ett uavhengig 0-dimensjonalt hull, $b_1(K) = 0$ fordi det ikke er noen uavhengige 1-dimensjonale hull, og $b_2(K) = 1$ fordi det er ett uavhengig 2-dimensjonalt hull.

Vi har da et Eulerstall til S^2: $\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2$ Altså, det vil være vindstille i minst 2 punkter på sfæren. Dette kan også forklare med noe som kalles for "Hairy Ball Theorem" som går ut på at det dannes stille punkter på en sfære.

Vinden kan betraktes som en vektor som beveger seg i en bestemt retning. Når vi visualiserer dette på sfæren, som illustrert i figur 5.1, observerer vi at det ikke er noen vindstrømmer ved polene (Det er viktig å presisere at dette ikke nødvendigvis betyr at det er vindstille ved polene på jordkloden. Illustrasjonen er kun et eksempel som viser prinsippet. Vindstille kan forekomme andre steder på jorden avhengig av hvordan vinden beveger seg). Vinden sirkulerer bare rundt disse punktene, likt bevegelsen i en orkan. I sentrum av en orkan er det alltid et område med lite eller ingen vind, og tilsvarende finner vi to slike punkter på sfæren, hvor det er vindstille. Dette resultatet kan tolkes som en konsekvens av vindens sirkulære bevegelse rundt jordens poler, slik vi regnet oss frem til.

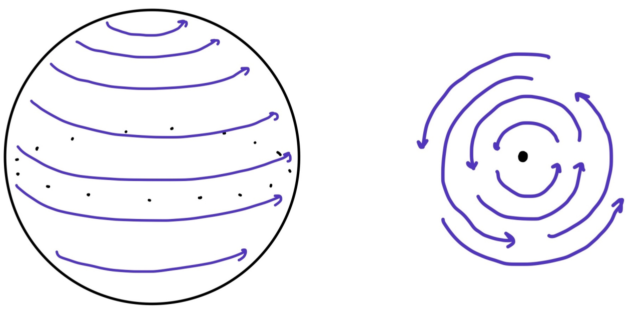

Figure 5.1: Pilene indikerer retning av vinden på sfæren. Det kan observeres at det ikke er noe vind på polene. Til høyre ser vi retningen ovenfra til de vindtille punktene, som ligner en orkan.

References

[1] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics (2nd edition)*. England: Institute of Physics Publishing, 2003.

[2] John B. Fraleigh. *A Fisrt Course in Abstract Algebra (7.th edition)*. Pearson, 2014.

[3] Rooij Buskes. *Topological spaces*. Springer, 1997.