STUDENT: **SIMEN GISKEGJERDE**
VEILEDER: RAYMOND BJULAND

En matematikklærers handlingsmønster i et tenkende klasserom

A Mathematics Teachers Behavioral Pattern in a Thinking Classroom

Masteroppgave i matematikk

År: 2023/2024

Grunnskolelærerutdanning for trinn 5-10

Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora

Universitetet i Stavanger

Antall ord:	32 449
Antall vedlegg/annet:	**+** 4 651
EMNEORD:	Tenkende klasserom, Lærerhandlinger, Handlingsmønster, Matematiske undervisningsoppgaver

Forord

For en reise denne masteroppgaven har vært å skrive. Oppturer og nedturer i dataanalyse og innsamling. Gjennom masterprosjektet har jeg lært mye. For eksempel har jeg lært at prokrastinering før veiledning ikke lønner seg i lengden. Jeg vil takke veilederen min, Professor Raymond Bjuland, for støtte, motivasjon og gode ord gjennom arbeidet med masteroppgaven, spesielt når datainnsamlingen ikke gikk etter første, andre eller tredje plan, på grunn av deltakeres sykdom.

Endelig har jeg fullført denne oppgaven gjennom en siste kraftanstrengelse de siste par ukene. Det å skrive såpass mye har vært et slit, men det har jo også til tider vært moro.

Jeg vil gjerne takke familie og venner for støtte og gode stunder, samt at dere har tålt sytingen min gjennom denne masterskrivingen. God sommer.

Simen Giskegjerde

Stavanger, juni 2024

Sammendrag

I Valbekmo og Bjuland (2023) presiserer viktigheten av læreren som veileder og tilrettelegger i Tenkende Klasserom (Liljedahl, 2021). Denne casestudien følger én lærer gjennom to undervisningstimer på 9. trinn, og ett intervju for å undersøke matematikklærerens handlingsmønster i et tenkende klasserom i tre undervisningsfaser. Studien finner at læreren som observeres bruker flest fremdriftshandlinger i «Presentasjon av oppgaven» og «Konsolidering», men at læreren bruker flest fokuserende handlinger under «Hint og utvidelser under elevenes arbeid».

Innhold

1 Introduksjon

Dette kapittelet vil redegjøre for bakgrunnen for denne studien, og valg som ligger til grunn for utformingen av en problemstilling studien tar utgangspunkt i. Noen sentrale begreper for studien vil også defineres.

1.1 Bakgrunn

Problemløsing har lenge vært et forskningsfelt innenfor matematikkdidaktikken (Liljedahl og Cai, 2021; Valbekmo og Bjuland, 2023). Før tusenårsskiftet var forskningsfeltets fokus på den individuelle problemløsingsprosessen som kognitiv aktivitet, og som mål i seg selv, og på problemløsing som undervisningsmetode (Stanic og Kilpatrick, 1989). I Liljedahl og Cai (2021) gjennomgås forskningen på problemløsning og problem posing over de siste 25 årene, og forskningsområdets tilstand undersøkes. Liljedahl og Cai (2021) trekker frem kollaborativ problemløsing i undervisningen som et område som bør undersøkes nærmere. Valbekmo og Bjuland (2023) undersøkte hvordan elever bruker samtalehandlinger under kollaborativ problemløsing i tenkende klasserom. Blant Valbekmo og Bjuland (2023) sine funn, ble den viktige rollen læreren har som veileder i kollaborativ problemløsing understreket.

Jeg ble i starten av masterfaget tilbudt av min veileder å observere et utviklingsarbeid rundt oppgavebruken i undervisningsmetodikken tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) som skulle foregå gjennom seks samlinger på en skole i Rogaland over skoleåret 2023/2024. I tillegg til utviklingsarbeidet, ønsket jeg å observere noen av de deltakende lærerne i deres egen undervisning når de benyttet undervisningsmetodikken tenkende klasserom. En sykemelding fra instruktøren i utviklingsarbeidet (3.3), medførte at jeg valgte å vende studiens søkelys mot lærerens handlingsmønster i tenkende klasserom. Endringen til lærerens handlingsmønster kom fra at jeg tidligere har gjennomført et eksamenspaper som tok utgangspunkt i Drageset (2014; 2015a; 2015b) sitt rammeverk for lærer- og elevutsagn i helklassesamtaler.

I løpet av min tid som student på Universitetet i Stavangers grunnskolelærerutdanning med matematikk som masterfag, ble halvparten av åttende semester brukt på faget «MGL4121 Problemløsing i matematikkundervisningen». Faget har, som tittelen viser til, fokus på hvordan problemløsing som arbeidsmetode kan brukes i matematikkundervisningen, og tar studenten gjennom historien for problemløsningsmetoder, fra Polyas modell for problemløsing (Polya, 2014), Liping Mas observasjoner om forskjellene mellom østasiatiske og amerikanske læreres kompetanse innen fundamental matematikk (Ma, 2020), og videre til Liljedahls metodikk for å bygge et tenkende klasserom (Liljedahl, 2021). Skår (2023) beskriver i sitt metodekapittel at underviserne ved Universitetet i Stavanger snakket varmt om metodikken tenkende klasserom. I min egen erfaring er tilfellet det samme som i Skår (2023). Jeg har også prøvd ut deler av metodikken tenkende klasserom i praksis, og observerte stort engasjement hos elevene, selv om elevene ikke kjente til arbeidsmåtene som ble benyttet fra før av. Da jeg ble tilbudt å samle datamateriale fra et utviklingsarbeid rundt tenkende klasserom, grep jeg derfor muligheten, og designet forskningsprosjektet basert på datainnsamlingen som ble planlagt.

1.2 Problemstillingen

Gjennom planleggingen og gjennomføringen av denne studien, har problemstillingen i dette forskningsprosjektet gjennomgått en stor endring som resultat av et sammenbrudd i den planlagte datainnsamlingen, som vises i metodekapittelet (3.3.1). Fra å ha søkelys på hvordan lærerens utviklingsarbeid påvirker undervisningen i klasserommet, måtte jeg endre problemstillingen slik at den ble forskbar og spisset og mulig å besvare ut fra datamaterialet jeg utviklet gjennom forskningsprosessen (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018).

Tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) har vært et interesseområde for meg helt siden jeg for første gang fikk kjenne undervisningsmetodikken på kroppen i faget «MGL-4121 Problemløsning i matematikkundervisningen» i vårsemesteret av mitt fjerde år på Universitetet i Stavanger. Jeg ble i høstsemesteret av 5. året, og i begynnelsen av prosessen med masteroppgaven, tilbudt av veilederen min om å delta i en datainnsamling på et utviklingsarbeid for tenkende klasserom.

Derfra hadde jeg et utgangspunkt for problemstillingen, nemlig utviklingsarbeid i tenkende klasserom, og jeg vurderte fram og tilbake før jeg landet på en problemstilling, og startet en datainnsamling rundt utviklingsarbeidet. I løpet av vårsemesteret viste det seg at jeg ikke fikk samlet inn nok data rundt utviklingsarbeidet for tenkende klasserom, så jeg måtte legge om problemstillingen min for å kunne besvare den.

Tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) er utviklet basert på sosiokulturell læringsteori (Imsen, 2014; Vygotsky, 1978). Derfor er diskusjon og samtale en sentral del i undervisningsmetodikken (Liljedahl, 2021). Gjennom Valbekmo og Bjuland (2023) blir viktigheten av læreren som veileder og tilrettelegger av diskusjonen i tenkende klasserom trukket frem, og jeg ønsket gjennom dette forskningsprosjektet å se på hvordan læreren arbeider i det tenkende klasserommet. Jeg tar utgangspunkt i forskningsspørsmålet for å spisse problemstillingen:

> Hvordan ser en matematikklærers handlingsmønster ut ved undervisning i et tenkende klasserom?

For å besvare forskningsspørsmålet, vil jeg undersøke en lærerens handlinger i tre faser av undervisningen i et tenkende klasserom: presentasjon av oppgaven, hint og utvidelser gitt under elevenes problemløsing, og konsolideringen ved enden av en undervisningstime. For å analysere lærerens handlinger og elevenes deltakelse, benytter jeg Dragesets rammeverk (Drageset, 2014; 2015a; 2015b) for lærerhandlinger og elevresponser. Samtidig vil analysen se etter hvordan de tre undervisningsfasene samsvarer med Liljedahl (2021) sin beskrivelse av de tre fasene i tenkende klasserom gjennom en spørsmålsliste jeg har utviklet selv (3.4.2), og jeg vil observere hvilke matematiske undervisningsoppgaver (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010) læreren utfører i hver undervisningsfase.

1.3 Begrepsavklaring

Dette delkapittelet vil avklare noen sentrale begreper for studien.

1.3.1 Tenkende klasserom

Med tenkende klasserom menes det i denne studien undervisningsmetodikken presentert i Liljedahl (2021) «Building Thinking Classrooms in Mathematics Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhacing Learning». Tenkende klasserom vil refereres til som: undervisningsmetodikken, det undervisningsmetodiske rammeverket, og tenkende klasserom, for å skape flyt i teksten, så den samme formuleringen ikke gjentas gang på gang.

1.3.2 Drageset (2014; 2015a; 2015b) sitt rammeverk for lærer- og elevutsagn

Drageset (2014; 2015a; 2015b) presenterer sammen et rammeverk for lærer- og elevutsagn, som har til hensikt å beskrive den detaljerte tur-for-tur-sammenhengen mellom en lærers utsagn og en elevs responderende utsagn. Lærerutsagnene kalles for lærerhandlinger, og elevutsagnene kalles for elevresponser. I denne oppgaven defineres en tur som én sammenhengende ytring fra en person, uten lengre stans, eller avbrytninger fra andre personer. Dette vil presiseres nærmere i kapittel 3.3.3.

2 Teoretisk bakgrunn

Dette kapittelet vil bygge opp en forståelse av tenkende klasserom som en arena for kollaborativ problemløsing, og gi et innblikk i hvordan sosiokulturell læringsteori (Vygotsky, 1978) ligger til grunn for det tenkende klasserommet, og hvordan lærerens handlinger kan identifiseres. Deler av praksisene i tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) gjennomgås i detalj, og da spesielt tre undervisningsfaser i tenkende klasserom jeg legger til grunn for analysen i denne studien: Presentasjon av oppgaven, Hint og utvidelser under gruppearbeid og Konsolidering.

2.1 Det sosiokulturelle perspektivet

For å forstå tenkende klasserom som metodikk kreves et innblikk i læringssynet som ligger til grunn. I metodikken foregår læring i det sosiale samspillet i klasserommet, og det sosiokulturelle læringssynet danner grunnlaget for praksisene i tenkende klasserom. Elevenes arbeid, gruppevis på vertikale, ikke-permanente tavler for å løse matematiske problemer, danner kjernen i et tenkende klasserom. Læreren fungerer som en fagekspert, og veileder elevene når de står fast, eller gir utvidelser og utfordringer når elevenes arbeid går over fra å være krevende til å være lett (Liljedahl, 2021).

I det sosiokulturelle læringssynet utvikles kunnskap i det sosiale samspillet mellom mennesker, eller i skolens tilfelle mellom medelever og lærer (Imsen, 2014; Vygotsky, 1978). Lærerens oppgave i den sosiokulturelle konteksten er å fungere som et stillas, for å gi elevene mulighet til å løse problemer de ikke hadde klart å løse alene. Det grunnleggende prinsippet er at en gruppe sammen kan løse vanskeligere problemer enn et individ klarer selv (Imsen, 2014). Kunnskap og ferdigheter til å bruke dem deles inn i tre nivå i det sosiokulturelle perspektivet, ut fra kompetansen en elev innehar: det eleven får til selv, det eleven får til i samspill med andre, men ikke selv, og det en elev ikke får til, selv i samspill med andre. Den midterste sonen, mellom det eleven får til og ikke får til, kalles for den proksimale sonen, eller den nærmeste utviklingssonen (Imsen, 2014; Liljedahl, 2021; Vygotsky, 1978).

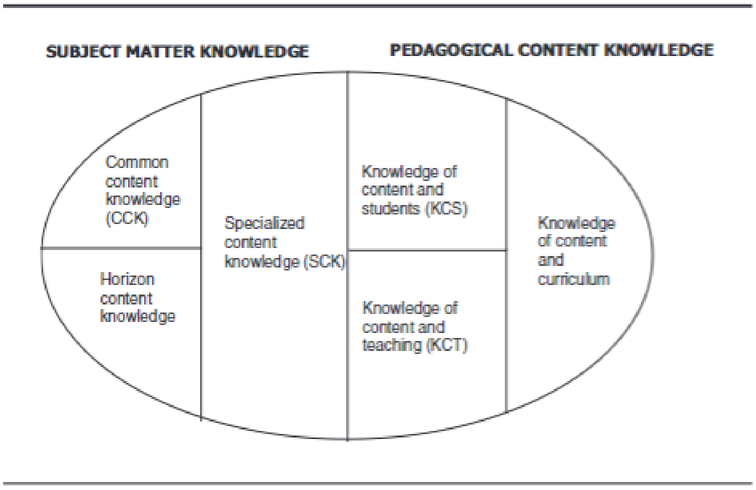
Den proksimale sonen ligger nært det eleven kan og får til alene, og vi kan tenke på den nærmeste utviklingssonen som det neste eleven vil lære å gjøre selv. Likevel trenger eleven hjelp fra andre for å kunne arbeide i den proksimale sonen. I sosiokulturell læringsteori omtales denne hjelpen som «den kompetente andre» (Imsen, 2014; Vygotsky, 1978), og den kompetente andre kan være en medelev eller en lærer. Den kompetente andre fungerer som et stillas for eleven, slik at de i samspill får til det eleven ikke hadde klart alene. Som eksempel kan vi ta for oss en problemløsingsoppgave, der eleven med sine forkunnskaper ikke klarer å løse oppgaven alene. I samspill med den kompetente andre dekkes kunnskapshullet som hindrer eleven i å gjennomføre oppgaven, og gjennom samarbeid klarer eleven å løse problemet. Etter hvert vil eleven selv inneha kompetansen for å løse liknende oppgaver selv. Da har kompetansen flyttet seg fra elevens nærmeste utviklingssone og inn i det eleven får til uten hjelp.

Det er gjennom slike interaksjoner at læring foregår i den sosiokulturelle konteksten. Først lærer elevene å løse et problem i fellesskap, og gjennom den sosiale interaksjonen, lærer de å løse problemene alene.

2.2 Lærerens undervisningskunnskap og de matematiske undervisningsoppgavene

I 1986 publiserte Lee S. Shulman en artikkel som tok opp et paradigme som manglet i undervisningsforskningen og lærerutdanningen. Shulman (1986) viser til hvordan den amerikanske lærerutdanningen og undervisningsforskningen over 110 år skiftet sitt kunnskapsfokus fra fag til pedagogikk. I 1870 viste eksamensoppgavene lærere gikk gjennom for å godkjennes for undervisning et overveldende fokus på fagkunnskap læreren burde inneha, med en liten andel av pedagogikk, som tilsvarte 5 % av den totale poengsummen som kunne oppnås. I 1980 var lærerutdanningens fokus totalt endret og blant læringsmålene for ferdigutdannede lærere var det ingen læringsmål som fokuserte på lærerens fagkunnskaper, og det rent pedagogiske i læreryrket dominerte utdanningen. Shulman (1986) påpeker at mellom disse rene fagkunnskapene og den rene pedagogiske kunnskapen, er det en tredje form for kunnskap, den fagdidaktiske kunnskapen, og i 1986 var fagdidaktisk en del av undervisningsforskningen som manglet. Didaktikk er et hovedområde under fagfeltet pedagogikk, og defineres som læren om undervisning i organisert sammenheng. Shulman

(1986) bemerket at forskning som understreket faginnholdets viktighet i didaktikken manglet fra utdanningsforskningen. Det ble forsket på og utviklet didaktiske metodikker, men fagkunnskapen som ble undervist i, hadde kun en birolle, og var aldri sentral for hovedessensen i didaktikkforskningen Shulman (1986) gjennomgikk. Shulman (1986) refererte derfor til fagdidaktikken som «det manglende paradigmet» innen under utdanningsforskning, og etterspurte forskning som belyste hvordan fagstoffet som ble undervist i påvirket didaktikken.



Figur 1: Domener for matematisk undervisningskunnskap (Ball et al. 2008, s. 403)

Ball et al. (2008) videreutvikler det teoretiske begrepet pedagogisk fagkunnskap, eller fagdidaktisk kunnskap. Gjennom konseptuelle analyser av undervisningsarbeid sett gjennom matematiske og pedagogiske forskningslinser, utvikler Ball et al. (2008) en liste over oppgaver læreren utfører i arbeid for å videreutvikle og utdype Shulmans (1986) teoretiske rammeverk for kunnskap læreren må inneha for å utføre god undervisning. Ball et al. (2008) sitt datagrunnlag er i faget matematikk, og utviklingen av det teoretiske rammeverket baseres på matematikklæreres undervisningspraksis.

Ball et al. (2008) samler begrepet i en modell, kjent innenfor det matematikkdidaktiske forskningsmiljøet som «egget» (figur 1). Her deles Shulmans (1986) inndeling av fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap i tre deler hver for seg. Fagkunnskapen deles inn i allmenn fagkunnskap, matematikk som det blir brukt generelt over flere yrkesgrupper, spesialisert fagkunnskap, kunnskap om matematikk som er særegent for læreryrket, og matematisk horisontkunnskap, kunnskap læreren har om hvorfor elevene skal lære matematikken. Den fagdidaktiske kunnskapen deles inn i kunnskap om innhold og elever, som kjennskap til typiske misoppfatninger elever kan utvikle innen matematikk, kunnskap om innhold og undervisningsmetoder, som i hvordan læreren kan legge opp undervisningstimene for å gi elevene best mulig sjanse til å forstå innholdet, og kunnskap om innhold og læreplan, som inneholder kunnskap om hvordan læreren forholder seg til læreplan, og legger opp undervisningsplanen slik at den treffer læreplanens mål (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010).

Ball (2017) trekker frem at det å forstå hva matematikklæreren må kunne for å undervise matematikk krever en forståelse av hva læreren *gjør* underveis i matematikkundervisningen. Ball (2017) går gjennom en videosnutt på 3,5 minutt, og identifiserer hvordan lærerens matematiske arbeid i undervisningssituasjonen bygger på de generelle matematiske undervisningsoppgavene utviklet i Ball et al. (2008; Figur 2). En av konklusjonene Ball (2017) trekker er at lærerens arbeid i undervisning er komplekst, og foregår i relasjonen mellom læreren og de unike elevene i klasserommet. Ball (2017) konkluderer også med at noe av det viktigste i den videre forskningen på lærerens arbeid i undervisningen vil være å se på deler av arbeidet som tas for gitt, og dermed ikke er gitt navn eller forskningslinser som observerer dem. Deler av lærerens arbeid er også å *ikke* gjøre noe, som å la være å irettesette oppførsel hos elevene mens en annen elev presenterer en viktig matematisk idé. Slike vurderinger og handlinger av læreren er ikke synlige, men de er utført bevisst for å fremme matematikken fremfor for eksempel oppførselskorreksjon.

Mathematical Tasks of Teaching

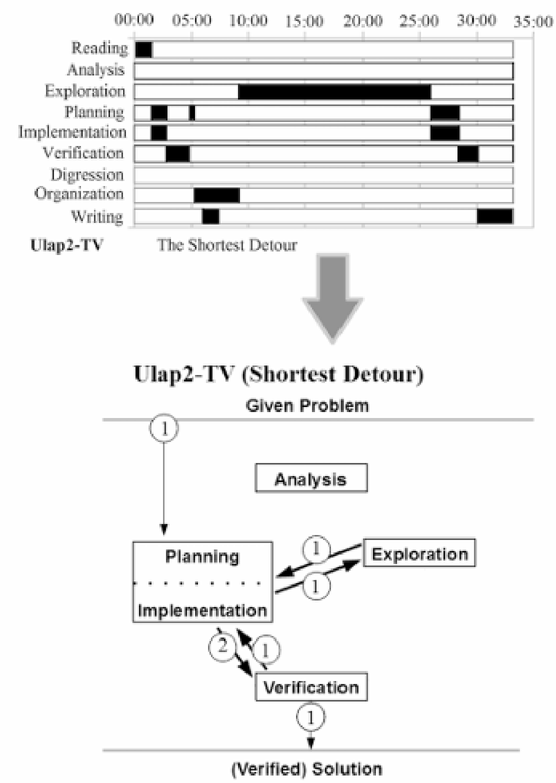
Presenting mathematical ideas
Responding to students' "why" questions
Finding an example to make a specific mathematical point
Recognizing what is involved in using a particular representation
Linking representations to underlying ideas and to other representations
Connecting a topic being taught to topics from prior or future years
Explaining mathematical goals and purposes to parents
Appraising and adapting the mathematical content of textbooks
Modifying tasks to be either easier or harder
Evaluating the plausibility of students' claims (often quickly)
Giving or evaluating mathematical explanations
Choosing and developing useable definitions
Using mathematical notation and language and critiquing its use
Asking productive mathematical questions
Selecting representations for particular purposes
Inspecting equivalencies

Figur 2: Matetiske undervisningsoppgaver (Ball et al., 2008, s. 400)

2.3 Problemløsing som forskningsfelt

I «Empirical Research on Problem Solving and Problem Posing: A Look at the State of the Art» (Liljedahl og Cai, 2021), gjennomgås forskning på problemløsing, samt problem posing fra de foregående 25 årene, og fra de siste 5 årene spesielt. I dette delkapittelet tar jeg utgangspunkt i denne artikkelen for å danne et bilde av problemløsing som undervisningsmetode, og for å koble det inn mot denne studiens fokus på tenkende klasserom.

Undervisning gjennom problemløsing har lenge hatt en plass i matematikkdidaktikken (Liljedahl og Cai, 2021). I 1945 formaliserte George Polya (2014) en heuristikk for problemløsning som var enkel å ta i bruk. Heuristikken bestod av fire steg: Forstå problemet, lag en plan, utfør planen og se tilbake. Disse fire stegene er grunnleggende i problemløsingsprosessen. For å starte en problemløsningsprosess, kreves det at problemløseren forstår hva som faktisk er problemet gitt i en oppgave. For å løse problemet må problemløseren legge en plan, og gjennomføre planen for å komme frem til et løsningsforslag. Det siste steget i heuristikken fastsetter et viktig poeng, i at problemløseren må kontrollere svaret sitt, og finne ut av om det er sannsynlig, og om planen er utført på riktig måte.



Figur 3: En problemløsingsprosess. Grafen øverst viser hvor lang tid problemløseren bruker på de forskjellige stegene i problemløsingsprosessen. Modellen under viser hvordan problemløseren beveger seg gjennom prosessen. Tallene på pilene indikerer hvor mange ganger problemløseren beveget seg i pilens retning. (Rott et al., 2021, s. 747)

Stanic og Kilpatrick (1989) oppsummerte den tidligere forskningen på problemløsning, og delte forskningsfeltet i tre hovedkategorier. Problemløsing som kognitiv aktivitet, problemløsing som et mål i seg selv, og problemløsing som undervisningsmetode (Liljedahl og Cai, 2021). Lester (1994) avdekket at problemløsning er en aktivitet som er betydelig mer kompleks og avhengig av sosiale normer enn fagfeltet tidligere hadde antatt, og at forskningen til da stort sett hadde sett på problemløsing som en individuell aktivitet (Liljedahl og Cai, 2021). Lester (1994) etterlyste at forskningsfeltet utvidet feltet ved å se på problemløsing i andre kontekster.

I den kontemporære forskningen på problemløsing har Rott et al. (2021) utfordret de eldre heuristikkene for problemløsing, blant annet Polya (2014), og påstår at problemløsing i virkeligheten ikke følger disse ideelle prosessene for problemløsing, men at en problemløser beveger seg mellom det gitte problemet og en verifisert løsning gjennom fire steg; analyse, planlegging og implementering, utforsking og verifisering. Overgangen mellom disse stegene er ikke nødvendigvis i en satt sekvens, men problemløseren beveger seg gjennom prosessens steg for å løse problemet. Rott et al. (2021) sin problemløsingsprosess er illustrert i figur 3. Tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) trekkes også frem i konteksten av problemløsing i grupper, og hva gruppene gjør når problemløsingsressursene i gruppen går tom (Liljedahl og Cai, 2021; Pruner og Liljedahl, 2021).

Liljedahl og Cai (2021) fortsetter gjennomgangen av problemløsning som forskningsfelt, men jeg har valgt å stoppe gjennomgangen her, for å holde det relevant for denne studien. Jeg har altså trukket frem hvordan problemløsingsprosessen ikke er så lineær som den tidligere har blitt presentert (Rott et al. 2021), og at tenkende klasserom springer ut av forskningen på problemløsing.

I et forskningsprosjekt der Boaler (1998) fulgte to klasser ved to forskjellige skoler over tre år, viste det seg at en klasse som fikk prosessbasert undervisning scoret signifikant bedre enn en klasse som fikk innholdsbasert undervisning. Boaler nevner at dette ikke var uventet, og skriver at elevene som fikk innholdsbasert undervisning «… had developed an *inert* knowledge that they found difficult to use in anything other than textbook questions» (Boaler, 1998, s. 56).

Elevene som fikk innholdsbasert undervisning fortalte i intervju at de slet med å forstå hva komplekse oppgaver ønsket at de skulle gjøre, og de syntes det var vanskelig å vite hvordan de kunne bruke formlene og løsningsmetodene lært å bruke for å løse komplekse oppgaver. Elevene var vant til at all den relevante informasjonen ble presentert kort og konsist, og at de i forkant kjente til hvilken formel eller fremgangsmetode de skulle bruke for å løse matematikkoppgaven (Boaler, 1998).

Elevene i klassen som fikk prosessbasert undervisning mente at de var vant til å tolke komplekse oppgaver. Oppgavene i den prosessfokuserte undervisningen var åpne problemløsingsoppgaver, der elevene fikk trent på å tenke og forstå oppgavene de arbeidet med. Dermed var de mer forberedt på å løse problemer som krevde at de koblet sammen flere disipliner innenfor matematikkfaget (Boaler, 1998).

Forskningsprosjektet i Boaler (1998) viste altså at elevene hadde store fordeler av at undervisningen fokuserte på å trene opp evnen til problemløsing, gjennom et fokus på prosessen elevene går gjennom i kontakt med problemer de ikke umiddelbart vet hvordan de skal løse. Elevene som ble undervist prosessbasert utviklet altså evnene sine til å lese og forstå problemer, slik at de kunne bruke matematikken de hadde lært i komplekse og realistiske situasjoner.

En av fordelene med å undervise gjennom problemløsing er at elever ofte bruker forskjellige strategier for å løse problemene, dersom læreren klarer å hjelpe elevene med å samle idéene og løsningsmetodene som blir brukt i klasserommet (Liljedahl, 2021; Liljedahl og Cai, 2021; Stein et al., 2008). Peter Liljedahl utga i 2021 boken «Building Thinking Classrooms in Mathematics», som tar for seg undervisningsmetodikken tenkende klasserom, som er utviklet for å få elevene til å tenke, og dermed lære, i matematikktimene. Denne metodikken skal vi se nærmere på.

2.4 Tenkende klasserom

Tenkende klasserom er en undervisningsmetodikk med problemløsing som undervisningsmetode i kjernen. Metodikken presenterer likevel noen innovative ideer for hvordan læreren kan legge til rette for at elevenes læring. Et av utgangspunktene for tenkende klasserom er at elevene lærer gjennom å tenke. Og for å tenke, må læreren legge til rette slik at elevene kan danne seg vanen å tenke i klasserommet (Liljedahl, 2021). Liljedahl (2023) har kommet i en norsk utgave, men siden jeg er uenig med mange av oversettelsene i den versjonen, har jeg gjennomført alle oversettelser av Liljedahl (2021) selv. Eventuelle sammenfall med Liljedahl (2023) er tilfeldige, med mindre Liljedahl (2023) er henvist til.

Inspirasjonen for forskningsprosjektet som over et tiår har resultert i undervisningsmetodikken kom fra en observasjon Liljedahl gjorde i et samarbeid med en lærer som ønsket å arbeide mer problemløsende i klasserommet sitt. Liljedahl ga læreren flere oppgaver som, i hans egen undervisningspraksis, hadde fungert veldig godt. Når læreren prøvde ut oppgavene i sitt eget klasserom, med Liljedahl som observatør, fungerte oppgavene langt i fra like godt. Oppgavene ble presentert og elevene stod fast, men det var ikke produktivt strev. Elevene gav opp, og ble frustrerte, i stedet for å stå på og arbeide seg gjennom oppgavene. Etter tre forsøk med problemløsing i undervisningen over en uke gav læreren opp (Liljedahl, 2021).

Under økten fikk Liljedahl et inntrykk av at elevene ikke tenkte i løpet av undervisningstimen. De utførte aktivitetene, men tenkte sjelden selv, og kopierte i stedet lærerens oppgaveløsningsprosess, uten å tenke på hvordan eller hvorfor denne prosessen fungerte, eller fokuserte på andre ting enn matematikken (Liljedahl, 2021). Tenkende klasserom forsøker å samle elevene tenkende rundt matematikken i klasserommet, ved å endre rammene for undervisningen, slik at elevene lærer å tenke selv.

Liljedahl (2021) legger til grunn 14 praksiser for et tenkende klasserom. De fjorten praksisene er som følger:

1. What Types of Tasks We Use in a Thinking Classroom
2. How We Form Collaborative Groups in a Thinking Classroom
3. Where Students Work in a Thinking Classroom
4. How We Arrange the Furniture in a Thinking Classroom
5. How We Answer Questions in a Thinking Classroom
6. When, Where, and How Tasks Are Given in a Thinking Classroom
7. What Homework Looks Like in a Thinking Classroom
8. How We Foster Student Autonomy in a Thinking Classroom
9. How We Use Hints and Extensions in a Thinking Classroom
10. How We Consolidate a Lesson in a Thinking Classroom
11. How Students Take Notes in a Thinking Classroom
12. What We Choose to Evaluate in a Thinking Classroom
13. How We Use Formative Assessment in a Thinking Classroom
14. How We Grade in a Thinking Classroom

(Liljedahl, 2021, s. 14)

For denne studien er praksis 5, 6, 9 og 10 relevante for analysen, og praksis 1, 2 og 3 er relevante for å gi kontekst for undervisning i et tenkende klasserom. Jeg vil først gå gjennom praksis 1, 2, og 3, som sammen danner det jeg kaller for rammene i et tenkende klasserom. Deretter vil jeg gjennomgå praksis 5, 6, 9 og 10, siden disse praksisene ligger til grunn for utviklingen av spørsmålene i kapittel 3.4.2 (tabell 6).

2.4.1 Rammene i et tenkende klasserom

Praksis 1, 2 og 3 konstituerer det jeg har valgt å kalle rammene i et tenkende klasserom. For å lære elevene å tenke kreves oppgaver som stimulerer elevene, slik at de ønsker å engasjere seg med oppgaven. Liljedahl beskriver det slik: «[…] I still believed that the best way to get students to think was to give them a task that would motivate, even necessitate, them to think.» (Liljedahl, 2021, s. 20).

Praksis 1 beskriver hvilke oppgaver som får elevene til å tenke i klasserommet (Liljedahl, 2021). Målet er å bruke oppgavetyper som stimulerer elevene til å tenke på pensum i matematikkfaget. For å få elevene til å tenke på matematikkpensumet, er første steg i tenkende klasserom å arbeide med matematiske oppgaver som stimulerer elevene til å tenke på matematikk til å begynne med. Tre oppgavetyper vises til i praksis 1 som utgangspunktet for oppgaver som inviterer og tvinger elevene til å tenke; høyt engasjerende tenkende oppgaver, korttriks, og regneferdighetsoppgaver (Liljedahl, 2021, s. 21-22). Oppgavetypene har forskjellige kvaliteter som stimulerer til tenking. De høyt engasjerende tenkende oppgavene er oppgaver som er så engasjerende og interessante at de gir en bortimot uimotståelig trang til å løse dem, og dermed tenke på matematikk. Korttriksene er matematiske korttriks, ikke «magiske» korttriks, og har også som mål å friste elevene til å knekke koden bak trikset for å finne ut hvordan det fungerer. Regneferdighetsoppgaver er oppgaver fra elevenes hverdag, og er utformet som åpne, rike oppgaver der elevene må løse tvetydigheter og ta avgjørelser, i tillegg til å utføre matematiske utregninger som naturlig følger av elevenes avgjørelser. Problemet med disse oppgavetypene er at mesteparten ikke er pensumsbaserte. Fremgangsmåtene elevene velger å bruke vil bestemme hvilke deler av pensum de kommer innom, om noen i det hele tatt (Liljedahl, 2021).

Liljedahl (2021) trekker frem skriptede pensumsoppgaver som en måte læreren kan sette opp en koreografi for å gjøre tradisjonelle undervisningsoppgaver om til problemløsingsoppgaver. Når målet er å gjøre tradisjonelle pensumsoppgaver tenkende, må læreren introdusere oppgaven for elevene uten å eksponere en bestemt fremgangsmåte (Liljedahl, 2021). En skriptet pensumsoppgave bygger på samme matematiske innhold som en tradisjonell pensumsoppgave, men elevene bes løse oppgaven med forkunnskapene de har fra tidligere undervisning, uten at læreren først går gjennom en liknende oppgave på tavlen. Dermed må elever selv syntesere fremgangsmåter ut fra sine egne forkunnskaper, slik at de kan brukes på det matematiske problemet som står for hånden. Liljedahl (2021, s. 27) eksemplifiserer en skriptet pensumsoppgave som tar utgangspunkt i en repetisjon av multiplikasjon av to parenteser, $(x + 2)(x + 3)$. Elevene kommer fort med svaret: $x^2 + 5x + 6$ siden elevene allerede har lært å multiplisere to parenteser. Deretter introduserer læreren en ny oppgave, ved å skrive «faktoriser $(\quad)(\quad) = x^2 + 7x + 6$» på tavlen. Siden elevene ikke er kjent med faktorisering av andregradsuttrykk fra før av, må elevene selv utforske hvordan de skal gå frem for å faktorisere uttrykket.

Smith og Stein (1998) presenterer et rammeverk for å kategorisere matematikkoppgaver etter kognitive krav. Rammeverket ble designet for å brukes i læreres profesjonsutvikling, og kan gi et innblikk i hvilke krav oppgavene elevene utsettes for stiller. I rammeverket deles matematiske oppgaver inn i to nivå, høyere og lavere kognitivt nivå. Nivåene deles også i to kategorier hver for seg. Lavere kognitivt nivå deles inn i memorering og prosedyrer uten sammenheng. Memorering kan for eksempel være å gjengi en regel eller definisjon. Memoreringsoppgaver kan ikke løses ved hjelp av fremgangsmåter, siden oppgaven kun ber deg om å gjengi informasjon. Prosedyrer uten sammenheng kan eksemplifiseres gjennom algoritmiske oppgaver, der fremgangsmåten er kjent, og det er gjerne trening i å bruke en formel, eller utføre en algoritmisk fremgangsmåte. Samtidig krever ikke oppgaven at elevene trekker sammenhenger mellom underliggende konsepter eller kobler sammen forskjellige representasjonsformer. Oppgaver som ligger på disse lavere nivåene av kognitiv utfordring fremtvinger ikke tenking, men herming hos elevene. Smith og Stein (1998) presiserer også, som Liljedahl (2021) at de kognitive kravene en oppgave stiller avhenger av elevenes forkunnskaper. Dersom vi ser på tradisjonelle pensumsoppgaver, ser vi ofte lave kognitive krav i «And now you try one»-situasjoner (Liljedahl, 2021, s. 2), der undervisningen legger opp til at læreren først viser hvordan oppgavetypen skal løses, og så skal elevene løse liknende oppgaver. Men dersom oppgavene presenteres som skriptede pensumsoppgaver, vil det stilles høyere kognitive krav til elevene, fordi elevene ikke blir gitt prosedyren, eller fremgangsmåten.

Felles for de høyere kognitive nivåene er kravet om at elevene må tolke oppgavene, som i Boaler (1998) sin prosessbaserte undervisning (Smith og Stein, 1998). Oppgaver med høye kognitive krav er ofte komplekse, og elevene må samle informasjon fra forskjellige kilder, for eksempel en modell og en tabell i samme oppgave for å løse den. Oppgaver med høyere kognitive krav deles inn i prosedyrer med sammenheng og utføring av matematikk. Prosedyrer med sammenheng med konsepter og mening er oppgaver der elevene kan bruke generelle fremgangsmåter, men ikke direkte uten å se sammenhengen. Smith og Stein (1998, s. 349) eksemplifiserer dette med en oppgave der eleven skal finne $\frac{1}{6}$ av $\frac{1}{2}$, ved bruk av konkreter. Eleven skal så tegne svaret sitt og forklare løsningsmetoden. Eleven må altså finne en måte å representere $\frac{1}{6}$ av $\frac{1}{2}$ ved hjelp av likesidede trekanter. I Smith og Stein (1998, s. 349) sitt løsningsforslag representerer to sammensatte heksagon den hele, ved hjelp av 12 likesidede trekanter, med et kort avsnitt som forklaring på hvordan eleven videre finner $\frac{1}{6}$ av $\frac{1}{2}$ ved hjelp av figuren. Her må eleven selv finne ut av hvordan en hel bør representeres, og så finne frem til løsningen, og beskrive fremgangsmåten sin på en forståelig måte.

Oppgaver med høye kognitive krav kan presenteres gjennom flere måter, som for eksempel diagrammer, symboler og problemsituasjoner. Denne koblingen mellom representasjonsmåter hjelper elevene med å utvikle mening ut fra det matematiske arbeidet de gjennomfører i oppgaven. For å finne sammenhengen mellom oppgaven og en fremgangsmåte, må elevene tolke uttrykksformene oppgaven bruker for å finne informasjonen som trengs for å løse oppgaven (Smith og Stein, 1998).

Den siste oppgaveformen som presenteres i rammeverket er å gjøre matematikk (Smith og Stein, 1998). Oppgaven i seg selv presenterer ikke en eksplisitt fremgangsmåte eller formel som skal brukes, og eleven må bruke kunnskap den innehar fra før i en ny situasjon, og utforske problemet for å finne en løsning. Eleven må selv analysere oppgaven for å finne begrensningene som settes av oppgaveteksten, slik at den kommer frem til et svar som ligger innenfor oppgavens rammer. Eksempelet Liljedahl (2021) presenterer med skriptede pensumsoppgaver $(\quad)(\quad) = x^2 + 7x + 6$), som demonstrert tidligere, vil falle innenfor denne kategorien. Elevene må bruke informasjonen de kjenner til fra før, for å finne ut hvordan de skal løse faktoriseringen av andregradslikningen, og læreren gir ingen eksplisitt fremgangsmåte for å finne svaret.

I overgangen fra tradisjonelle klasserom med tradisjonelle pensumsoppgaver til tenkende klasserom med tenkende oppgaver, ble det påvist en tilvenningsperiode for å bli vant til den mer mentalt krevende jobben tenkende oppgaver er for elever (Liljedahl 2021). I de fleste tilfellene vendte elevene seg til tenkende oppgaver etter tre økter med ikke-pensumsbaserte oppgaver, men noen caser krevde opptil fem økter før de vendte seg til arbeidsmåten. I nesten hvert tilfelle kunne læreren selv oppfatte når elevene var klare for å arbeide med tenkende oppgaver knyttet til pensum (Liljedahl, 2021, s.29).

Praksis 2 i et tenkende klasserom forklarer hvordan grupper bør dannes og hvor store de bør være. I utviklingen av rammeverket kom Liljedahl (2021) fram til at små, tydelig randomiserte grupper var den mest effektive arbeidsgruppen for elever fra andre trinn og oppover. Gruppestørrelser på tre elever medfører størst sannsynlighet for at hele gruppen engasjerer seg i oppgavene. Ved større grupper var det ofte tilfelle at elever havnet utenfor arbeidsfellesskapet, og de som havnet utenfor engasjerte seg ikke lenger i oppgavene. Ved mindre grupper var det naturlig nok mindre ressurser i gruppene, som medførte mindre stillas for elevene når de skulle drive problemløsning (Liljedahl, 2021).

Når lærere danner grupper for undervisningstimer, skjer det ofte ved hjelp av en generell randomisering, som deretter modifiseres for eventuelle læringsmiljømessige faktorer som påvirker hvordan læreren ønsker at gruppene skal se ut. Gruppene deles gjerne inn på forhånd, uten at elevene er vitne til gruppefordelingsprosessen (Liljedahl, 2021). Noen ganger kommer modifikasjonene fra et lovmessig grunnlag, som ved en aktivitetsplan dannet etter en §9A-sak, der en elev ikke kan være på gruppe med en annen fordi det går utover den ene elevens trygge og gode læringsmiljø (Opplæringslova, 1998). Andre ganger kommer det fra lærerens pedagogiske ståsted, der læreren ønsker å danne grupper som kan fungere som stillas for hverandre, eller for å minske uønsket støy i timene, som elever som diskuterer andre ting enn fag. Læreren tenker ofte at endringene er usynlige for elevene, og at de ikke legger merke til slike endringer. Likevel viser det seg at elever fort plukker opp slike endringer, og de kan for eksempel bite seg merke i at de aldri havner på samme gruppe som en annen elev. Dersom elevene ikke har troen på at gruppene faktisk er randomiserte, og at læreren aktivt hindrer dem fra å være på gruppe med en bestevenn eller liknende, kan det påvirke elevenes motivasjon i en negativ retning, som igjen medvirker til at eleven ikke ønsker å delta inn i gruppen den er plassert i. Ved en tydelig og overbevisende randomisering av gruppene i hver time kan et slikt fall av motivasjon motvirkes (Liljedahl, 2021). Liljedahl (2021) foreslår å dele inn gruppene ved hjelp av en kortstokk, men andre tydelige randomiserte måter fungerer like bra, så lenge elevene kan observere at gruppene faktisk er tilfeldige.

Praksis 3 tar opp hvor elevene arbeider i tenkende klasserom. Den mest synlige forskjellen mellom et tradisjonelt og et tenkende klasserom er at elevene arbeider stående i grupper, og de skriver på vertikale, ikke-permanente tavler. I det tradisjonelle klasserommet arbeider eleven stort sett alltid sittende ved en pult, og skriver i en skrivebok, og elevene arbeider individuelt eller med én medelev som læringspartner.

Det er flere fordeler med stående arbeid på ikke-permanente tavler. Rent fysiologisk vil en stående posisjon ha mer muskelaktivitet og større blodgjennomstrømming enn en sittende posisjon, som medfører et høyere energinivå. Psykologisk og historisk sett er også den sittende posisjonen sterkt knyttet til passiv læring. En sittende arbeidsstilling har sterke assosiasjoner til passiv ikke-tenkende aktivitet (Liljedahl, 2021), og passer seg derfor ikke i et tenkende klasserom. Gjennom intervjuer av elever, der elevene ble vist stillbilder av elever i forskjellige arbeidsposisjoner, eksempelvis sittende eller stående, viste det seg også at elever generelt forbinder stående aktivitet med en kjekkere og mer engasjerende time (Liljedahl, 2021).

Ikke-permanente skriveflater har også stor innvirkning på elevers engasjement. Liljedahl (2021) viser til en markant forskjell mellom første notasjon på ikke-permanente skriveflater som whiteboard, og relativt permanente skriveflater som papir og notatbok. Liljedahl (2021) trekker frem at når elever arbeider på ikke-permanente skriveoverflater, har de muligheten til å viske ut feil de gjør umiddelbart. Muligheten til å endre eventuelle feil fortløpende reduserer elevenes følelse av risiko når de prøver seg fram for å løse et problem, som medfører den betydelig kortere tiden til første notasjon på ikke-permanente skriveoverflater.

Stående tavler gjør det også lettere for læreren å se hva elevene arbeider med. Dermed er det lettere for læreren å få et inntrykk av om elevene står fast i oppgaven de arbeider med og trenger et hint, eller om elevene syns at oppgaven er for lett, og trenger en utfordring eller utvidelse (Liljedahl, 2021).

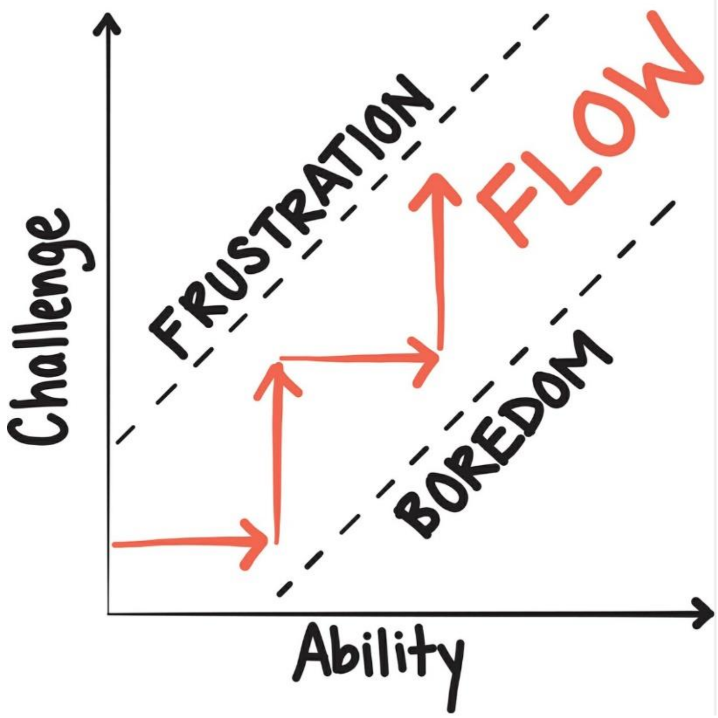
2.4.2 Tre undervisningsfaser i et tenkende klasserom

Til nå har jeg vist frem rammene rundt elevene i et tenkende klasserom. Jeg har også vist hvordan tenking og problemløsingsoppgaver danner kjernen for matematikkundervisningen i et tenkende klasserom. Videre skal jeg vise frem tre faser i matematikkundervisning gjennom praksis 5, 6, 9 og 10. Undervisningsfasene er presentasjon av oppgaver, hvordan læreren besvarer spørsmål og gir hint og utvidelser under elevenes gruppearbeid, og hvordan konsolidering av kunnskap foregår i et tenkende klasserom (Liljedahl, 2021).

Praksis 5 tar for seg hvordan læreren presenterer oppgavene elevene skal arbeide med. Liljedahl (2021) anbefaler at oppgaver presenteres muntlig for elevene, men at detaljer som kommer frem om oppgaven, som vekt, lengde, forhold eller liknende skrives ned på en tavle. Målet er at hovedessensen i oppgaven overleveres muntlig. Den muntlige presentasjonen krever at elevene lytter for å få med seg hva som skal skje i timen. Oppgaven bør også presenteres i løpet av de 5 første minuttene etter at læreren adresserer alle elevene for første gang for å starte undervisningen med tenkende aktivitet for elevene (Liljedahl, 2021, s. 102). Liljedahl (2021) kommenterer at en god kontrollsjekk for læreren kan være å se for seg at den er en elev som kommer inn i klasserommet etter at oppgaven er presentert. Dersom eleven, ut fra det som står på tavlen, kan sette i gang med oppgaven uten tilhørende muntlig instruksjon, har læreren skrevet ned for mye på tavlen.

Historisk sett har matematikkdidaktikken lagt opp undervisningsmetodikker med en antakelse om synkron aktivitet i undervisningen (Liljedahl, 2021). Den ideelle antakelsen baseres på at elever jobber i samme hastighet. Antakelsen impliserer at elever skriver, bearbeider informasjon og utvikler kunnskap og ferdigheter unisont innenfor en tidsramme læreren setter. Antakelsen stemmer åpenbart ikke med virkeligheten, der forskjellene mellom elever som individuelle personer medfører at de arbeider og lærer asynkront (Liljedahl, 2021).

For å ta hensyn til denne asynkrone læringen hos elever, krever opplæringsloven (1998) at opplæringen i klasserommet skal tilpasses evnene og forutsetningene hver elev har. Tilpasset opplæring er også fastsatt i læreplanverket i overordnet del 3.2. (Kunnskapsdepartementet, 2017). Utdanningsdirektoratet forklarer det slik: «Tilpasset opplæring innebærer at dere må ta utgangspunkt i elevenes forkunnskaper og hvordan de lærer når dere planlegger opplæringen ut fra læreplanen» (Utdanningsdirektoratet, 2022).



Figur 4: Flytsonen
"Graphical representation of the balance between challenge and skill as a dynamic process"
(Liljedahl, 2021, s. 149)

Tilpassing i tenkende klasserom skjer ved at læreren bruker hint og utvidelser i oppgaver for å holde matematikken krevende, uten at det blir overveldende for elevene. For å holde elevenes engasjement og dermed tenking ved like, er det sentralt at de får utfordringer som samsvarer med evnene elevene har til å løse matematiske problem. Når utfordringene er proporsjonale med elevenes evner, og elevene er engasjerte i oppgaven, utvikles en indre motivasjon for å fortsette å tenke. Denne balansen mellom utfordring og evne, som medfører en indre motivasjon for å fortsette med aktiviteten beskrives som flytsonen (Csíkszentmihályi, 1990; Liljedahl, 2021; figur 4).

Figur 4 illustrerer hvordan flytsonen ligger i balansen mellom utfordring som y-akse og evne som x-akse. De horisontale pilene viser hvordan elevene alltid utvikler evnene når de arbeider med matematiske problem, og de vertikale pilene illustrerer en økning i utfordringen for elevene. En slik økning i utfordring kan eksempelvis være en utvidelse læreren gir, der eleven må ta i bruk andre verktøy for å løse den utvidede oppgaven.

Vi ser at den hypotetiske eleven, eller elevgruppen, holder seg innenfor de stiplede linjene i denne modellen (figur 4). Dersom en utvidelse blir for vanskelig i forhold til elevenes evne, og de står fast og stanger i veggen uten å komme seg videre, blir elevene frustrerte, og de gir opp. Likevel kan det av og til merkes at elever ikke mister fokus selv om de blir frustrerte og utfordringen ligger i frustrasjonssonen. Her kommer elevenes matematiske utholdenhet inn i bildet. Utholdenheten danner en buffer mellom å gi opp på grunn av frustrasjon, og å arbeide i flytsonen der elevene får det til og ønsker å arbeide videre. På samme måte danner tålmodighet en buffer på kjedsomhetssiden av modellen (figur 4). Når elevene ikke får utfordring, og arbeidet blir repetitivt, kjeder de seg, og de distraherer seg selv (Liljedahl, 2021).

For å justere elevene inn i flytsonen når de arbeider i tenkende klasserom, bruker læreren hint for å minske utfordringen eller øke elevenes evne til å løse oppgaven, og utvidelser av oppgavene for å gi elevene en større utfordring (figur 4). Siden elevenes evner alltid er i utvikling når de arbeider, er lærerens timing viktig. Når elevgruppene begynner å kjede seg, er det viktig at læreren identifiserer dette, og gir dem større utfordringer å bryne seg på (Liljedahl, 2021).

Siden en matematikklærer ønsker å utvikle elevenes matematiske evner mest mulig, er hint som underbygger elevenes evne til å løse matematikkproblemer den beste typen hint å gi (figur 4; Liljedahl, 2021). Ulempen med hint som øker elevenes evne til å løse problemet, er at slike hint eller verktøy krever en relativt stor tidsinvestering fra læreren. Hint som minsker utfordringen krever mindre tid fra læreren (Liljedahl, 2021). Et hint som senker utfordringen kan for eksempel være et delsvar på en oppgave, som gjør at elevene kan gå videre uten å løse problemet.

Det er klart at å utvikle elevenes evne er en bedre langtidsløsning, der elevene kan dra nytte av hintet i videre arbeid med liknende oppgaver. Å fjerne problemet eller senke de kognitive kravene ved å gi et delsvar kun hjelper elevene med akkurat det området de stod fast på. For å unngå at læreren fjerner eller forminsker problemløsingsprosessen for elevene, tar praksis 5 opp hvordan det er ment at læreren skal besvare spørsmål i tenkende klasserom.

Liljedahl (2021) deler elevspørsmål under gruppearbeid i tre spørsmålstyper: periferispørsmål, slutt å tenke-spørsmål og fortsett å tenke-spørsmål. Periferispørsmål er spørsmål elevene stiller når læreren beveger seg nært gruppen. Forskjellen fra de to andre spørsmålstypene er at elevene ikke rekker opp hånden for å stille disse spørsmålene, og eleven vet som regel svaret fra før. Slutt å tenke-spørsmål er spørsmål som «Er dette riktig?», og gjenkjennes ved at elevens intensjon bak spørsmålet er å overgi ansvaret for tenkingen til læreren. Forsett å tenke-spørsmål er spørsmål elevene stiller for å fortsette å tenke og engasjere seg i oppgaven, som å be om tillatelse til å bruke en annen fremgangsmåte, eller som å be om en utvidelse når de har gjort seg ferdige med en oppgave.

I slutten av arbeidet med en oppgave eller en oppgavestreng i et tenkende klasserom legger det undervisningsmetodiske rammeverket opp til at de matematiske idéene elevene har funnet fram til konsolideres, eller oppsummeres i plenum. I tradisjonelle matematikklasserom foregår ofte en konsolideringsfase i etterkant av at læreren har illustrert en fremgangsmåte, og elevene har prøvd selv. Dette er et typisk tidspunkt der elevene ikke tenker selv og heller hermer etter det læreren gjorde i eksempeloppgaven, bare later som at de arbeider, eller fordriver tiden på en annen måte. Når læreren konsoliderer oppgaven elevene har gjennomført i den tradisjonelle normen, begynner læreren ofte med den mest effektive, og gjerne mest kognitivt krevende løsningsmetoden, som de fleste av elevene ikke har fått til. Elevene noterer ned den effektive løsningsmetoden, og tror at de lærer når læreren forteller dem hvordan de skal løse en oppgave, og at kopieringen av løsningsmetoden ned i egen skrivebok er enstydig med å inneha kunnskapen og ferdighetene for å løse liknende oppgaver. Denne misoppfatningen av læring og kunnskap hos elever, og hos mange lærere, er en del av hva tenkende klasserom som metodikk forsøker å løse og korrigere (Liljedahl, 2021).

I stedet for å begynne med det vanskeligste i problemløsingsoppgavene først, foreslår Liljedahls metodikk (Liljedahl, 2021) gjennom praksis 10 å begynne konsolideringen fra bunnen av. Det vil si at læreren begynner på det letteste nivået av oppgaven, slik at alle elevene kan følge det som diskuteres. Hvis elevene har arbeidet med en oppgavestreng der hver oppgave i strengen har økende vanskelighetsgrad, og dermed utfordring for elevene, vil læreren i et tenkende klasserom bruke mest tid på de første oppgavene som alle elevene fikk til, og som ligger lavest på utfordringsnivået i flytdiagrammet (figur 4), slik at alle elevene får delta inn i konsolideringen lengst mulig. En slik konsolidering legger til rette for å holde elevene engasjert og tenkende lengre enn en konsolidering som begynner på det mest utfordrende nivået som er vanlig i tradisjonelle klasserom (Liljedahl, 2021). Videre er det også et viktig poeng at det er elevene som skal konsolidere sin tenkning. Det vil si at læreren fungerer som ordstyrer og veileder i diskusjonen, og elevene forklarer hvordan oppgavene løses. Konsolideringen legges opp slik at mindre og mindre tid blir brukt på oppgavene dess mer krevende oppgaven er (Liljedahl, 2021). På denne måten starter læreren konsolideringen fra alle elevene på et tidspunkt i problemløsingen har befunnet seg, og trekker elevene med oppover, i stedet for å starte der læreren ønsker at alle elevene skulle befinne seg, og miste elevenes fokus når de ikke forstår hva som konsolideres.

Tenkende klasserom presenterer tre ulike måter en slik konsolidering kan foregå. Den første er at læreren leder en generell diskusjon om oppgavene og løsningene som har kommet frem uten å skrive noe ned. Den andre er en detaljert diskusjon om oppgavene og løsningene, der læreren skriver det som blir diskutert ned på en tavle. Den tredje er en detaljert diskusjon rundt oppgavene og løsningene der elevenes arbeid på de vertikale tavlene brukes til å illustrere de forskjellige utfordringsnivåene i flyt-modellen, referert til som en gallerivandring (figur 4; Liljedahl, 2021).

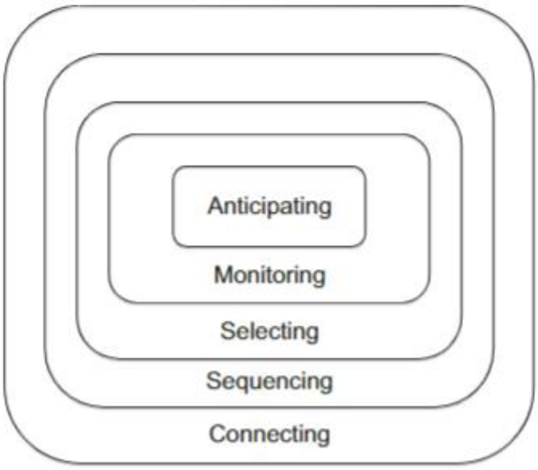
Det første alternativet fungerer best for å diskutere generelle strategier. Liljedahl eksemplifiserer den første måten med spørsmålet: «What should we do first when making a graph?» (Liljedahl, 2021, s. 182). Den første konsolideringsmåten er også en viktig del av gallerivandringen i bevegelsen mellom tavlene. Det andre alternativet kan også brukes inn i gallerivandringer for å illustrere en gruppes løsningsmetode på en annen oppgave. Det bemerkes likevel at lærere bør være forsiktige med å bruke den andre måten alene, på grunn av likheten til en tradisjonell konsolidering, som kan frembringe ikke-tenkende aktivitet hos elevene (Liljedahl, 2021).

Det tredje alternativet, gallerivandring, hadde høyest elevengasjement blant de tre. Liljedahl (2021) påpeker et interessant funn i denne konsolideringsmåten. Når elever forklarer sin egen fremgangsmåte, følger ikke medelevene med. Når elevene bes tolke andres fremgangsmåte, derimot, engasjerer de seg i å forstå tenkingen bak løsningsmetoden. Derfor er det viktig at elevene som gjennomførte arbeidet på tavlen ikke forklarer sitt eget arbeid, men at medelevene får tolke fremgangsmåten og prøve å forklare den (Liljedahl, 2021).

For å forberede en gallerivandring må læreren følge med på elevenes vertikale tavler gjennom hele arbeidsprosessen. Da kan læreren ramme inn arbeid de ønsker å bruke i konsolideringsprosessen med en egen tusjfarge, slik at elevene ikke visker det ut (Liljedahl, 2021). Dette understrekes i Stein et al. (2008) sin praksis om å observere og velge ut elevsvar for å illustrere fremgangsmåter elevene har brukt.

Konsolideringsfasen i tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) har mye til felles med Stein et al. (2008) sine fem praksiser for å tilrettelegge for produktive matematiske diskusjoner. Stein et al. (2008) sitt rammeverk tar utgangspunkt i å forutse, observere, velge ut, sette i rekkefølge og koble sammen elevenes fremgangsmåter. Stein et al. (2008) er utviklet i konteksten av tradisjonelle klasserom, med tradisjonell tavleundervisning som kjerne.

De fem praksisene tilhører forskjellige faser av undervisningen. Den første praksisen, forutse elevsvar henger sammen med lærerens planlegging av undervisningstimen. Når læreren velger ut en oppgave for undervisningen, bør læreren forutse mulige elevsvar, og forberede seg på hvordan de ønsker å håndtere elevsvarene. Den andre og tredje praksisen, observere og velge ut elevsvar, gjennomføres mens elevene arbeider med oppgaven. Lærerens oppgave er da å følge med på elevenes løsningsforslag, og velge ut interessante fremgangsmåter fra elevsvarene som læreren ønsker å trekke frem for hele klassen i diskusjonen. Rett før læreren starter helklassediskusjonen rundt oppgaven, velger læreren ut rekkefølgen den ønsker å presentere de utvalgte elevsvarene i. Under helklassediskusjonen bør læreren koble sammen elevsvarene, og sammen med elevene komme frem til en eller flere gunstigste måter å løse oppgavetypen på (Stein et al., 2008). Fra figur 5 er det tydelig at de fem praksisene bygger på hverandre. Læreren forutser elevsvar på forhånd, og observerer elevene for å finne forutsette og uforutsette løsningsmetoder. Læreren velger ut løsningsmetoder fra elevene for å illustrere forskjellige deler av løsningsmetodene. Rekkefølgen læreren velger å presentere de forskjellige løsningsmetodene i bestemmer hvilke detaljer i løsningsmetoden velger å illustrere for å koble sammen elevenes varierte fremgangsmåter (Stein et al., 2008).



Figur 5: En modell av Stein et al. (2008, s. 322) sine fem praksiser.

2.5 Tidligere forskning

I denne studien seg jeg på hvordan lærerens handlingsmønster inviterer til elevdeltakelse i konteksten av et tenkende klasserom, og hvordan handlingsmønsteret kan kobles sammen med Liljedahl (2021) sitt undervisningsmetodiske rammeverk. Tidligere har Valbekmo og

Bjuland (2023) sett på hvordan samtalehandlinger (Warwick et al., 2016) blir brukt av elever i en kollektiv problemløsningsprosess i kontekst av et tenkende klasserom, og hvordan bruken av whiteboardtavler støtter elevene når de diskuterer i problemløsingsprosessen. Valbekmo og Bjuland (2023) sitt forskningsprosjekt springer ut fra Liljedahl og Cai (2021) sin formaning om å undersøke hvordan problemløsingsprosessen ser ut i forskjellige kontekster. Valbekmo og Bjuland (2023) konkluderer at undervisningsmetodikken tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) danner et miljø som legger til rette for høyt engasjement hos elevene i den kollektive problemløsingsprosessen, der elevene danner og forbedrer ideene sine i samarbeid med hverandre. Funnene i studien (Valbekmo og Bjuland, 2023) peker også på at lærerens rolle som ordstyrer og veileder i den matematiske diskusjonen er essensiell for å hjelpe elevene med å undersøke hverandres ideer i dybden. I denne studien ser jeg nærmere på lærerens handlinger i tenkende klasserom.

Liljedahl (2016; 2021) har undersøkt hvordan læreren gjennom relativt enkle endringer, kan tilrettelegge for elevers tenking i klasserommet. Resultatet og implikasjonene fra Liljedahl (2016) danner utgangspunktet for undervisningsmetodikken tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) og de 14 praksisene som jeg i kapittel 2.4 har gått i dybden på.

Drageset (2014; 2015a; 2015b) har utviklet et rammeverk for å studere lærer- og elevutsagn i helklassediskusjoner. Rammeverket deler inn utsagnene i lærerhandlinger og elevresponser, og er utviklet basert på tradisjonelle IRE-klasserom (Drageset, 2014). Flere masteroppgaver har tidligere sett på forskjellige klasserom i forskjellige kontekster gjennom Dragesets forskningslinse (Mjaavatn, 2015; Sanderød, 2020; Tokheim, 2021). Mjaavatn (2015) studerte hvordan lærer- og elevhandlinger benyttes på videregående skole, og Sanderød (2020) studerte hvordan læreren responderer med lærerhandlinger på uforutsette situasjoner ved 5.-10. trinn. Tokheim (2021) har studert hvordan lærerens handlingsmønster i matematikk kan bidra til muligheter for læring for elevene, og studien ble utført som en del av MERG-prosjektet, der en klasse på fjerde trinn ble observert i 12 matematikktimer over 2 uker. Jeg har selv deltatt i MERG-prosjektet høsten 2023. Tokheim (2021) ser på lærerens handlingsmønster gjennom å studere lærerhandlinger (Drageset, 2014; 2015a), sammen med to andre rammeverk for matematiske samtaler.

2.6 Et teoretisk rammeverk for analyse av lærerhandlinger

Tenkende klasserom som metodikk som springer ut av et sosiokulturelt og konstruktivistisk kunnskapssyn, og dermed er dialogen i klasserommet sentral (Liljedahl, 2021; Liljedahl og Cai, 2021; Valbekmo og Bjuland, 2023). Lærerne gir elevene oppgaven muntlig, helst i en dialog, og elevene arbeider i grupper med én skriveoverflate som de bruker sammen i gruppen (Liljedahl, 2021). Derfor vil et analytisk rammeverk med fokus på hva som blir sagt i klasserommet være hensiktsmessig for å strukturere funn som dukker opp i forskning på tenkende klasserom. I Drageset (2014; 2015a; 2015b) presenteres nettopp et slik rammeverk. Rammeverket ble utviklet basert på observasjon av undervisning i matematikklasserommet, og koder lærerutsagn i 3 overkategorier. I Drageset (2015a; 2015b) inkluderes elevresponser med 5 koder. Til forskjell fra andre dialogbaserte rammeverk for analyse, tar Dragesets rammeverk (2014; 2015a; 2015b) for seg hver tur i kontekst av turen før og etter, for å finne turens rolle i dialogen. En tur defineres som en uavbrutt, muntlig ytring. Elev- og lærerutsagnene deles inn etter hvilken rolle de har i dialogen, og hver tur gis én rolle i Dragesets egen bruk av rammeverket (Drageset, 2015a).

Lærerutsagnene deles inn i tre overkategorier, eller lærerhandlinger, som igjen deles inn i underkategorier, eller underhandlinger; omdirigerende handlinger, fremdriftshandlinger og fokuserende handlinger (tabell 1; Drageset, 2015a).

Redirecting actions	Progressing actions	Focusing actions
Put aside	Demonstration	Request
Advising a new strategy	Simplification	Enlighten detail
Correcting question	Closed progress details	Justification
	Open progress initiatives	Apply to similar problems
		Request assessment from other students
		Point out
		Notice
		Recap

Tabell 1: Dragesets rammeverks inndeling av lærerutsagn "Redirecting, progressing, and focusing actions" (Drageset, 2015a, s. 261)

Vi ser i tabell 2 at omdirigerende handlinger (redirecting actions, tabell 1) inkluderer tilsidesetting av elevsvar (put aside, tabell 1), foreslå nye strategier (advising a new strategy, tabell 2) og korrigerende spørsmål (correcting questions, tabell 1). Handlingene er ganske selvforklarende i denne kategorien. Tilsidesetting av elevsvar inneholder handlinger der læreren lar en elevrespons ligge, enten for å ta det opp igjen senere, eller fordi responsen ikke var relevant for undervisningen. Å foreslå nye strategier brukes dersom læreren ser at elevene står fast, eller dersom læreren enkelt og greit ønsker at elevene skal benytte en annen strategi for å løse en oppgave. Korrigerende spørsmål er spørsmål som har til hensikt å få eleven til å korrigere sitt eget svar når den sier noe feil. Drageset (2015a) trekker frem omdirigerende handlinger som de sjeldneste av de tre handlingene læreren foretar i sitt datamateriale, med korrigerende spørsmål som den som brukes oftest av underkategoriene i casen der rammeverket illustreres.

Fremdriftshandlinger (progressing actions, tabell 1) er utsagn der læreren forsøker å drive samtalen forover, og er den mest brukte av de tre overkategoriene Drageset (2014, 2015a) presenterer for lærerutsagn. I kategorien finner vi demonstrasjoner (demonstration, tabell 1) av fremgangsmåter for å løse oppgaver eller presentasjon av fagstoff, forenkling (simplificaton, tabell 1) av oppgaver for å gjøre oppgaver lettere for elevene å svare på, og lukkede fremdriftsdetaljer (closed progress details, tabell 1) og åpne fremdriftsinitiativer (open progress initiatives, tabell 1).. Et karakteristisk trekk ved lukkede fremdriftsdetaljer er at de er spørsmål læreren stiller for å få korte, konkrete svar, og de brukes gjerne mens læreren gjengir en fremgangsmåte en elev har brukt steg for steg. Læreren spør eleven om hvert enkelt steg, og eleven svarer på hvert steg. Denne formen for fremdriftshandling henger ofte sammen med lærerledede elevresponser i en sekvens av turer. Den siste av fremdriftshandlingene er åpne fremdriftsinitiativer. I denne formen for lærerhandling gir læreren fra seg kontrollen over retningen på samtalen, ved å invitere en elev til å svare uten at det finnes et korrekt svar eleven er tenkt å komme med. I denne underkategorien inkluderes turer der lærerens intensjon er å gi neste taletur til en elev, ved å si elevens navn, for eksempel (Drageset, 2014; 2015a).

Fokuserende lærerhandlinger (focusing actions, tabell 1) har som mål å zoome inn på detaljene i en elevrespons. De fokuserende handlingene deles inn i forespørsler (request, tabell 1) og utpekninger (point out, tabell 1). Læreren kan etterspør at en elev belyser en detalj i responsen sin (enlighten detail, tabell 1), begrunner svaret sitt (Justification, tabell 1), benytter fremgangsmåten sin på et liknende problem (apply to similar problems, tabell 1), eller be en medelev vurdere elevresponsen (request assesment from other students, tabell 1). Når læreren ønsker å peke seg ut noe i en elevrespons, kan læreren utpeke det ved å gjenta (recap, tabell 1) denne delen av elevens respons i etterkant av elevutsagnet, eller læreren bemerke noe i læreren forstår som viktig, og utrede dette selv (notice, tabell 1). Fokuserende handlinger er de nest mest brukte av lærerhandlingene i Dragesets eksempelcase (Drageset, 2015a) .

Elevresponser deles inn i forklaringer, initiativer, delvise svar, lærerledede responser og uforklarte svar (Drageset, 2015a; 2015b). Forklaringer er responser der eleven utreder et svar, eller gir en fullt forståelig besvarelse der læreren ikke trenger å be eleven om deler av besvarelsen. Initiativer er turer der en elev stiller et spørsmål, eller kommer med et utsagn læreren ikke har etterspurt gjennom direkte spørsmål. Delvise svar er ufullstendige svar er elevresponser der elevens svar på en oppgave er avkuttet, eller ikke svarer på hele spørsmålet læreren stiller. Lærerledede responser henger, som nevnt, ofte sammen med lukkede fremdriftsdetaljer, og læreren etterspør delsvar på forholdsvis enkle deloppgaver av én større, mer kompleks oppgave. Uforklarte svar er elevresponser som kun inneholder svaret på en oppgave, uten at elevens fremgangsmåte kommer til uttrykk i samme eller foregående turer (Drageset, 2015a; 2015b).

Dragesets rammeverk er opprinnelig utviklet for analyse av samtaler i klasserom som følger IRE-strukturen, der læreren kommer med en initiasjon, eleven responderer, og svaret evalueres av læreren (Drageset, 2014; 2015a; 2015b). I lys av dette er det viktig å ta hensyn til forskjellen mellom tenkende klasserom og et slikt IRE-klasserom. Nic Mhuiri (2019) bemerker at undervisningskulturen et rammeverk er utviklet i, og utviklerens syn på undervisning kan påvirke hvilke detaljer et rammeverk fanger opp eller utelater. Undervisningskulturelle forskjeller mellom rammeverket og klasserommet rammeverket brukes for å analysere kan derfor medføre «feilkodinger», der viktige elementer i klasserommet som analyseres gjennom en forskningslinse ikke kommer til uttrykk etter at datamaterialet har gjennomgått analysen. Derfor vil det i bruk av et analytisk rammeverk være viktig å være obs på hva som kommer til uttrykk gjennom det analytiske rammeverket, og spesielt hva som ikke kommer til uttrykk.

3 Metode

Dette kapittelet vil redegjøre for studiens forskningsdesign, hvilke data som ble samlet inn, analytisk tilnærming, og valg innen metode og etiske vurderinger som de har blitt gjort underveis i masterprosjektet (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018). I kapittelet begrunnes de metodiske valgene som har blitt tatt for å besvare forskningsspørsmålet som danner det strukturelle utgangspunktet for studien. Denne gjennomgangen av metodiske valg og etiske vurderinger er nødvendig for å underbygge studiens relabilitet og validitet, slik at studiens funn fremstår troverdige, og kan benyttes i videre forskning (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018). Kapittelet vil steg for steg gjøre rede for studiens forskningsdesign, utvalg av deltakere, hvordan datamateriale er samlet inn, hvordan datamaterialet har blitt analytisk gjennomgått og kodet, hvordan det kodede datamaterialet har blitt analysert, studiens relabilitet og gyldighet, og til slutt de forskningsetiske vurderingene som har blitt gjort for å ivareta deltakernes rettigheter til personvern.

Forskningsspørsmålet er retningsgivende for studien, og setter derfor ned rammer for hvilke personer som observeres, hvordan personene observeres, og hvordan analysen av de innsamlede dataene gjennomføres (Thagaard, 2018). Metodekapittelet vil derfor forklare hvordan studien er strukturert for å undersøke problemstillingen og besvare forskningsspørsmålet. Forskningsspørsmålet som ligger til grunn for denne studien er:

> Hvordan ser en matematikklærers handlingsmønster ut ved undervisning i et tenkende klasserom?

For å besvare forskningsspørsmålet, vil jeg undersøke en lærerens handlinger i tre faser av undervisningen i et tenkende klasserom: presentasjon av oppgaven, hint og utvidelser gitt under elevenes problemløsing, og konsolideringen ved enden av en undervisningstime. For å analysere lærerens handlinger og elevenes deltakelse, benyttes Drageset rammeverk (Drageset, 2014; 2015a; 2015b) for lærerhandlinger og elevresponser. Samtidig vil analysen se etter hvordan de tre undervisningsfasene samsvarer med Liljedahl (2021) sin beskrivelse av de tre fasene i tenkende klasserom gjennom et analytisk rammeverk jeg har laget selv, og jeg vil observere hvilke matematiske undervisningsoppgaver (Ball et al. 2008) læreren utfører i hver undervisningsfase.

3.1 Forskningsdesign

I denne studien benyttes et kvalitativt forskningsdesign for å studere sosiale fenomener mellom deltakerne i feltet (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018). En kvalitativ studie har til hensikt å gå i dybden på et fenomen, og i casestudier undersøkes én eller noen få enheter for å få et rikt innblikk i situasjonen der et fenomen forekommer (Thagaard, 2018). Thagaard (2018) presiserer at problemstillingen, og gjennom problemstillingen, forskningsspørsmålet, bør arbeides med gjennom hele studien, for å kunne ta høyde for forståelsen for fenomenet som utvikles gjennom datainnsamling og analyse. Forskningsdesignet skal i utgangspunktet fastsette hva studien vil undersøke, hvem studien undersøker, og hvor og hvordan studien gjennomføres (Thagaard, 2018).

Innen epistemologien for forskning trekker Postholm og Jacobsen (2018) frem tre skoler, positivismen, konstruktivismen og post-positivismen. Post-positivismen kommer inn som en «gyllen middelvei» mellom konstruktivismen og positivismen. Vitenskapelig kunnskap dannes i kontekst, men det kan finnes elementer som kan trekkes ut av konteksten, og som har et større gyldighetsområde enn den enkelte casen der kunnskapen er utviklet. Det post-positivistiske synet på utvikling av vitenskapelig kunnskap et rådende innen samfunnsvitenskapelig forskning, og danner også utgangspunktet for denne studiens syn på utvikling av vitenskapelig kunnskap (Postholm og Jacobsen, 2018).

Postholm og Jacobsen (2018) trekker frem samspillet mellom lokal kunnskap og forskningskunnskap. Lokal kunnskap defineres i skolekonteksten som kunnskapen lærerne har om elevgruppen sin, og hvordan ulike undervisningsmetoder fungerer for klassene de underviser i. Den utvikles gjennom erfaring, men den lokale kunnskapen er kun gjeldende for situasjonene den er utviklet i, eksempelvis for læreren på enkeltklassenivå. Et undervisningsopplegg som fungerer fantastisk bra i et klasserom med en spesiell elevgruppe, kan, i et annet klasserom med en annen elevgruppe, ende opp med å ikke fungere i det hele tatt. Den lokale kunnskapen er rett og slett en erfaringsbasert kunnskap som lærerne selv danner gjennom sin egen praksis. Forskningskunnskapen skiller seg fra den lokale kunnskapen ved at erfaringene som er gjort fortolkes av en forsker, og generaliseres for å kunne gjelde for en større andel situasjoner.

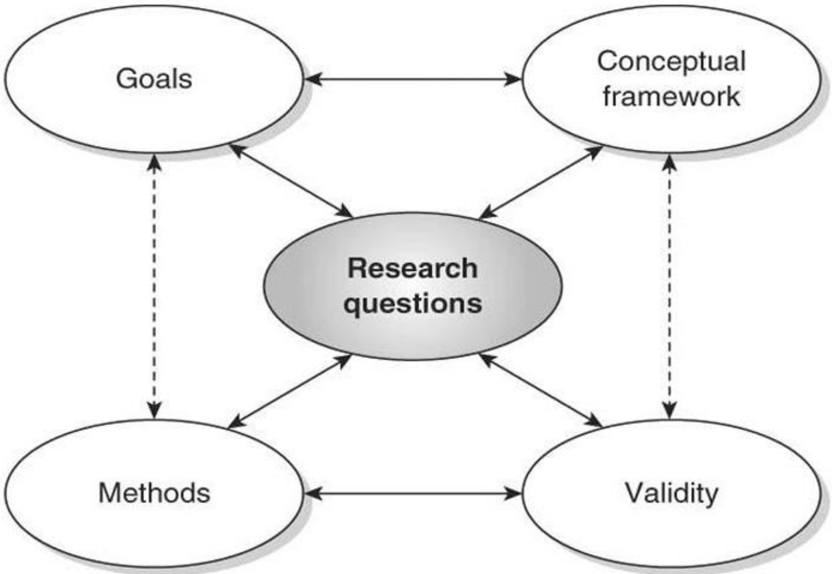
Denne studien vil undersøke én case for å lære mer om hvordan læreren bruker lærerhandlinger for å invitere elevene til å engasjere seg med faget. Casen involverer én lærer og lærerens matematikklasse, og strekker seg fra desember 2023 til april 2024. Hvor og hvordan studien gjennomføres vil videre gjennomgås senere i metodekapittelet.

3.1.1 Kvalitativ forskningsmetode

Denne studien benytter kvalitativ forskningsmetode for å gå inn i helklasse- og gruppesamtalene og undersøke hvordan lærerens handlinger påvirker elevenes engasjement.

Gjennom å bruke en kvalitativ metode kan forskeren dykke dypere inn i datamateriale og få en mer helhetlig forståelse av fenomenet som studeres (Thagaard, 2018; Postholm og Jacobsen, 2018).

Hovedessensen i forskjellen mellom kvalitativ og kvantitativ forskningsmetode ligger i hvor fleksibel forskeren kan være gjennom studiens forløp (Christoffersen og Johannessen, 2012). Dette ble viktig for denne studien, da det viste seg at datainnsamlingen ikke ble gjennomførbar etter den opprinnelige planen (3.3). Siden forskning har som mål å bli kjent med noe ukjent (Thagaard, 2018), vil en slik fleksibilitet i forskningsmetoden gi mulighet til å velge ut interessante funn i datamaterialet for å undersøke dem nærmere. Gjennom å benytte en kvalitativ metode, har jeg kunnet endre studiens fokus fra hvordan lærerens utviklingsarbeid påvirker lærerens undervisning i tenkende klasserom, til å undersøke hvordan lærerens handlinger i løpet av tre faser av undervisningen inviterer elevene til å delta aktivt og engasjere seg med fagstoffet i et tenkende klasserom. Denne studien ser på helklassesituasjoner rundt oppgavepresentasjon og konsolidasjon, og gruppesituasjoner der læreren fungerer som veileder og gir elevgruppene hint og utvidelser. Studiens læringssyn bygger på den sosiokulturelle og konstruktivistiske læringsteorien (Imsen, 2014), der metodikken tenkende klasserom også har sitt utspring (Liljedahl, 2021).



Figur 6: Modell for samspillet av elementene i kvalitativ forskning. (Maxwell, 2008, s. 217)

Maxwell (2008) illustrerer hvordan kvalitativ forskning konstant er i endring gjennom mål, metode, konseptuelt rammeverk, validitet og forskningsspørsmål. Utviklingen av en kvalitativ studie er ikke en lineær prosess, som vi ser fra modellen, men alle elementene påvirker hverandre, samtidig som de springer ut fra forskningsspørsmålet eller problemstillingen som skal undersøkes. For eksempel kan vi tenke oss at en casestudie ønsket å se på elevers misoppfatninger innen brøk, men så viser det seg i datamaterialet at ingen misoppfatninger kommer til syne. Da må forskeren finne noe annet interessant å undersøke gjennom det innsamlede datamateriale. Maxwell (2008) forklarer at forskningsetiske vurderinger finner sted i alle delene av modellen (figur 6), og derfor representeres de ikke med en egen «boble».

I denne studien har endringer i datainnsamlingen (3.3) medført at forskningsspørsmålet som ble stilt i prosjektbeskrivelsen ikke lenger kunne besvares tilfredsstillende for meg som forsker, og jeg måtte dermed legge om deler av metoden og endre problemstillingen, slik at datamaterialet som ble samlet inn kunne brukes (Thagaard, 2018).

3.1.2 Casestudier

Casestudier faller innenfor det kvalitative forskningsområdet. En casestudie har som mål å utvikle en rik forståelse av situasjonen casen rammer inn (Thagaard, 2018). Denne studien presenterer en case som består av to undervisningsøkter med samme lærer, samt ett preintervju før undervisningsøktene og ett postintervju etter undervisningsøktene, der målet var å få et innblikk i hvordan læreren bruker forskjellige handlinger for å undervise og veilede elevene i et tenkende klasserom, og hvordan disse handlingene inviterer elevene til å delta og engasjere seg med faget.

I Flyvbjerg (2006) presenteres fem konvensjonelle misoppfatninger rundt casestudier, spesielt rundt om teori kan utvikles fra enkeltcaser, og casestudiers relabilitet og validitet. Flyvbjerg (2006) presenterer sine argumenter mot disse konvensjonelle misoppfatningene. Flyvbjerg (2011, s. 313) trekker frem at disse misoppfatningene begynner å svike i den konvensjonelle kunnskapen, og at akademikere nå generelt drives av problemet som skal besvares, og ikke metoden. Konflikten mellom forskere som støtter kvalitative metoder og forskere som støtter kvantitative metoder, har havnet i bakgrunnen, og det blir mer og mer konvensjonelt akseptert at kvantitative og kvalitative metoder har forskjellige, men ofte komplimenterende, styrker og svakheter.

Styrkene med en casestudie er at forskeren får et rikt innblikk i konteksten rundt et fenomen, og at fenomenet i seg selv kan forstås gjennom konteksten av en case. Svakhetene ligger i at casestudiens natur er utvelgende, og derfor kan forhold mellom årsak og virkning av fenomen over- eller underdrives i den spesifikke casen som analyseres. En casestudie vil heller ikke i seg selv gi en forståelse av hvor ofte fenomenet opptrer generelt, og den statistiske signifikansen av casestudiens funn er ofte uklare (Flyvbjerg, 2011). Dette er viktige utgangspunkt å være klar over i denne studien. Forskningsspørsmålet i denne studien er utviklet med klarhet over disse svakhetene, og er derfor snevret inn på å undersøke fenomenet som det opptrer i casens datamateriale, og å sette det i kontekst av tidligere utviklede teorier.

3.1.3 Klasseromsobservasjoner

Denne studien benytter i stor del observasjoner fra klasseromsundervisning som empiriske data. Datainnsamlingen ble utviklet av meg og en medstudent, sammen med veileder høsten 2023. Undervisningssituasjoner relevante for studien ble transkribert av meg alene, og er ikke gjennomgått av min medstudent, siden de valgte å utsette gjennomføringen av deres masteroppgave. Under klasseromsobservasjonene ønsket jeg å opptre passivt (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018), for å forstyrre den ordinære situasjonen i klasserommet minst mulig. Siden synlige filmkamera og lydopptaker ble benyttet for å sikre nøyaktige transkripsjoner av undervisningssituasjonene, og elevene kjente til at jeg var en masterstudent som skulle observere læreren som underviste i tenkende klasserom, var det en åpen observasjon (Thagaard, 2018). I gjennomgangen av datamaterialet i etterkant virker det sannsynlig at observatørenes tilstedeværelse i klasserommet påvirket elevenes oppførsel noe, siden det ble observert at en elev vinket til kameraet. Jeg kan ikke sikkert si om min tilstedeværelse som observatør påvirket elevenes arbeid med det faglige i undervisningen.

3.1.4 Intervjuer

Intervjuene med lærerne ble satt opp semistrukturert (Kvale og Brinkmann, 2015). Det vil si at det forelå et intervjuskjema som utgangspunkt, men meg og min medstudent åpnet for at tilleggsspørsmål og utdypende spørsmål kunne stilles for å undersøke interessante utsagn fra læreren i større dybde.

Intervju 1 (vedlegg 4) var mer strukturert, og var satt opp for å få et inntrykk av læreren i forkant av klasseromsobservasjonene. Samtidig hadde Intervju 1 som mål å danne grunnlag for en god, profesjonell relasjon mellom oss som forskere og læreren. Intervju 2 (vedlegg 5) var noe mindre strukturert og baserte seg på videoutdrag fra klasseromsobservasjonen i timene der læreren hadde undervist. Her ble undervisningssituasjonene diskutert i en refleksjonssamtale, og noen spørsmål var satt på forhånd for å starte samtalen rundt undervisningssituasjonen. Intervjuene var hensiktsmessige for å få innblikk i lærerens eget inntrykk av undervisningen i eget klasserom, og for å forstå konteksten lærerens avgjørelser ble tatt i (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018).

3.2 Utvalg

Utvalget av deltakere i denne studien foregikk gjennom utviklingsarbeidet jeg gjennom veileder ble invitert til å observere. I utviklingsarbeidet deltok det 14 lærere fra flere skoler innen samme kommune, og utviklingsarbeidet var knyttet til undervisningsmetoden tenkende klasserom. En seminarrekke med seks samlinger over skoleåret 2023/2024 ble organisert og utviklet av en lærer som har flere års erfaring innen tenkende klasserom. Jeg og min medstudent ble invitert med på den andre samlingen, som var satt til 31. oktober 2023, der vi fikk se hvordan en samling i utviklingsarbeidet strukturert. Opprinnelig skulle utviklingsarbeidet ha dannet kjernen i denne masteroppgaven, men grunnet de uforutsette endringene i datainnsamlingen (3.3), fungerte utviklingsarbeidet som arena der vi kunne komme i kontakt med og rekruttere lærere som brukte, eller ønsket å bruke, tenkende klasserom som metodikk i sitt matematikklasserom, til studien (Thagaard, 2018).

Planen for utvelging av deltakende lærere i denne studien var å hente inn 3-5 lærere som takket ja til å delta i pilotintervju og observasjon i deres egen undervisning, slik at jeg og min medstudent strategisk kunne velge caser for å besvare våre separate problemstillinger (Thagaard, 2018). Vi fikk tre lærere som ønsket å delta videre i studien utenfor samlingene i utviklingsarbeidet. Vi kaller disse tre lærerne for Lærer A, B og C. Videre ble det arrangert pilotintervju med de tre lærerne, som alle underviste ved samme skole, og det ble satt en dato for første runde av klasseromsobservasjoner 26. januar. Lærer C ble syk i forkant av observasjonsrunden, og deltok derfor ikke videre etter pilotintervjuet. Den andre runden med klasseromsobservasjoner ble planlagt sammen med Lærer A og B. Postintervjuer ble planlagt med de to lærerne, men kun intervjuet med lærer A ble gjennomført (3.3).

Utvelgelsen av casen har altså skjedd gjennom et snøballutvalg (Thagaard, 2018) gjennom min veileder, som satte meg i kontakt med instruktøren for utviklingsarbeidet, som igjen satte meg i kontakt med lærerne. Når lærerne var kontaktet gjennom utviklingsarbeidet, ble utvalget for den videre studien snevret inn organisk (Thagaard, 2018), gjennom Lærer A, B og C sitt samtykke til å delta videre i studien. Case A rundt Lærer A ble valgt ut fordi den bestod av den mest komplette datainnsamlingen, samtidig som at casen viste frem to forskjellige oppgavetyper i tenkende klasserom. Siden casen er valgt på grunnlag av at den viser frem deler av et *typisk* tenkende klasserom, vil jeg argumentere for at utvelgelsen av case er *typisk* og ikke *spesiell*, som det er beskrevet i Thagaard (2018, s. 58-59). Selv om læreren underviser ved hjelp av metodikken tenkende klasserom, som kan sees på som spesielt for matematikklærere som gruppe, vil utvalget være typisk for lærere som underviser med tenkende klasserom som metode. Forskningsspørsmålet rammer inn tenkende klasserom som et av kravene for at en case skal treffe innenfor studiens rammer, som medfører at tenkende klasserom er *typisk* for de mulige utvalgene av deltakere.

Utvalget består også av 20 elever i Case A, der elevenes foresatte ble kontaktet gjennom Lærer A, som delte ut samtykkeskjema til sine elever. De samme elevene deltok i begge undervisningstimene i Case A. Dette beskriver nok en gang et snøballutvalg, der samtykke for forskningen ble hentet inn gjennom et mellomledd jeg hadde kontakt med fra tidligere i studien (Thagaard, 2018).

Lærer A, som jeg har valgt å gi navnet Eva, har 13 års erfaring som matematikklærer og er utdannet adjunkt. Eva har benyttet tenkende klasserom som metodikk i én undervisningstime hver uke siden begynnelsen av skoleåret 2023/2024, og hun deltok på samling 1-3 av utviklingsarbeidet. Hun forteller selv i pilotintervjuet (Intervju 1.1, vedlegg 4) at hennes interesse for tenkende klasserom startet ved at hun deltok på et seminar holdt av Peter Liljedahl våren 2023. På initiativ fra lærerne i kommunen, kontaktet skoleledelsen i kommunen en instruktør, som organiserte og instruerte i seminarrekken på 6 seminar. Eva forteller også i pilotintervjuet at ledelsen ved skolen hennes er veldig interesserte i tenkende klasserom, og ønsker å tilpasse metodikken for andre fag enn matematikk ved skolen.

Videre forteller Eva i pilotintervjuet (vedlegg 4) at 9. klassen hun underviser i Case A består av en relativt normal elevgruppe. Hun kommenterer at elevene er aktive og engasjerer seg, som av og til medfører at diskusjoner kan gå over i krangling, men at elevgruppen ikke avviker særlig fra andre klasser hun har undervist.

3.3 Data

I dette delkapittelet vil tabellen for datainnsamlingen presentere planlagte observasjoner og intervju tilknyttet studien, og gjennomførte observasjoner og intervju. For å forklare forskjellen mellom den opprinnelige planen og den gjennomførte datainnsamlingen, ser jeg det som nødvendig å gi bakgrunnen for endringene. Videre vil kapittelet gi en innramming av Case A, og et hendelsesforløp i dataene som er benyttet i denne oppgaven.

3.3.1 Bakgrunn, plan og gjennomføring av datainnsamlingen

I utgangspunktet startet planen for datainnsamlingen ved at jeg fikk tilbud om å observere et utviklingsarbeid fra veilederen min. Utviklingsarbeidet hadde hovedfokus på bruk av problemløsingsoppgaver i tenkende klasserom, som jeg tidligere har vist som et sentralt element i Liljedahl (2021) sin metodikk. Det opprinnelige ønsket var å observere lærerne i utviklingsarbeid gjennom video- og lydopptak av samlingene over en fem-måneders periode, og koble læreren i utviklingsarbeid sammen med lærerens undervisning i eget klasserom.

Hver enkelt av de planlagte utviklingsarbeidssamlingene var strukturert i tre timer, med pauser mellom hver time. Den første timen skulle lærerne som deltok dele sine erfaringer med tenkende klasserom som undervisningsmetodikk, og styrker og svakheter i undervisningsmetodikken skulle diskuteres. Den andre timen ble brukt på en praktisk utførelse av en time i tenkende klasserom, der instruktøren tok rollen som lærer, og lærerne tok rollen som elever. Tilfeldige grupper på tre og tre ble delt inn, instruktøren presenterte en tenkende oppgave som lærerne arbeidet seg gjennom. Til slutt i den andre timen ble det gjennomført en gallerivandring for å se hvordan forskjellige løsninger kom frem på de forskjellige tavlene. Den tredje timen av hver samling skulle brukes på å dele oppgaver som lærerne ville benytte i tenkende klasserom, og planlegging av hvordan de ønsket å gjennomføre disse undervisningstimene.

I forkant av denne studiens datainnsamling ble det gjennomført to utviklingsarbeidssamlinger, og jeg skulle observere samling 3 til 5. Instruktøren som ledet samlingene ble dessverre sykemeldt i etterkant av tredje samling, og de resterende samlingene planlagt til vårhalvåret 2024 ble ikke gjennomført. Instruktørens langtidssykemelding ble ikke kommunisert til meg, og jeg fikk kun beskjed om at samling 4 var avlyst en time før den skulle starte. Når samling 5 heller ikke ble gjennomført, medførte det en betydelig endring i rammene rundt hver case.

Siden samlingene var sykliske, og gikk gjennom erfaringsdeling, gjennomføring av en ny oppgave og planlegging av oppgaver som kunne brukes i lærernes tenkende klasserom, ønsket jeg å følge Lærer A, B og C gjennom samling 3 til 5, og observere dem i klasserommet for å hente data rundt hvordan de selv veiledet oppgavene som ble diskutert under utviklingsarbeidet. På grunn av de tapte dataene fra utviklingsarbeidet, arrangerte jeg et ekstra intervju i etterkant av klasseromsobservasjonene for å hente inn lærerens eget perspektiv på undervisningen, som substitusjon for lærerens erfaringsdeling som ellers ville ha kommet til uttrykk i utviklingsarbeidssamlingene.

Tabell 2 viser hvordan datainnsamlingen var planlagt, hvilke innsamlingsmetoder som ble benyttet ved gjennomførte innsamlinger, eventuelle notater som gir begrunnelser for ikke gjennomførte datainnsamlinger, og hvilken lærer som deltok i intervjuer og klasseromsobservasjoner.

Hva	**Planlagt**	**Gjennomført**	**Innsamlingsmetode**	**Notat**
Samling 3	28. nov	28. nov	Oversiktskamera Lydopptak Håndholdt kamera	Innsamling startet fra 2. time i samlingen
Intervju 1.1	8. jan	8. jan	Videoopptak	Lærer A
Intervju 1.2	11. jan	11. jan	Videoopptak	Lærer C
Intervju 1.3	12. jan	12. jan	Videoopptak	Lærer B
Case A 1. undervisningstime	26. jan	26. jan	Oversiktskamera Lydopptak Håndholdt kamera	Lærer A
Case C 1. undervisningstime	26. jan	N/A	N/A	Lærer C Avlyst grunnet sykdom
Case B 1. undervisningstime	26. jan	26. jan	Oversiktskamera Lydopptak Håndholdt kamera Feltnotat	Lærer B Timen delt i forskjellige fag, data samlet inn fra matematikkdelen med tenkende klasserom
Samling 4	29. jan	N/A	N/A	Avlyst grunnet instruktørs sykdom
Samling 5	5. mar	N/A	N/A	Avlyst grunnet instruktørs sykdom
Case A 2. undervisningstime	5. apr	5. apr	Oversiktskamera Lydopptak	Lærer A
Case B 2. undervisningstime	5. apr	5. apr	Oversiktskamera Lydopptak Feltnotat	Lærer B Lærer B ønsket ikke første 15 minuttene av timen på film. Samtykke ble gitt til å samle

				observasjoner fra de første 15 minuttene gjennom feltnotat.
Intervju 2.1	10. apr	10. apr	Videoopptak	Lærer A
Intervju 2.3	11. apr/18. apr.	N/A	N/A	Lærer B 11. april Avlyst grunnet sykdom 18. april Lærer B dukket ikke opp

Tabell 2: Planlagt og gjennomført datainnsamling i forbindelse med studien

Gjennom samling 3 ble det samlet samtykke fra lærerne for observasjon av utviklingsarbeidssamlingene (vedlegg 2), og tre av lærerne ønsket å delta i intervjuer alene og i klasseromsobservasjoner sammen med sine elever, gitt at nok av elevenes foresatte samtykket til observasjon i klasserommet (vedlegg 3).

I studien har alt datamateriale utenom 15 minutter i Case B 2. undervisningstime blitt samlet inn ved hjelp av lyd- og videoopptak. Intervjuer er tatt opp gjennom Microsoft Teams, mens samling 3 og undervisningstimene har blitt tatt opp ved hjelp av en lydopptaker og videokamera. Lyd- og videoopptakene danner grunnlag for anonymiserte transkripsjoner. Siden transkripsjonene er gjort på grunnlag av opptak, kan analyser gjennomføres på det transkriberte datamaterialet med utgangspunkt i at transkripsjonene er nøyaktige og at handlingene som beskrives er korrekte. Transkripsjonene er gjort på normert bokmål, slik at dialekten ikke skal være gjenkjennbar, for å sikre deltakerne i studien sin anonymitet.

3.3.2 Datamateriale i og innramming av Case A

Dette delkapittelet vil gi en innramming av Case A, som denne oppgaven analyserer. I tabell 3 vises det hvilke innsamlede data som har blitt gjennomgått i resultatdelen av denne oppgaven, og et handlingsforløp blir gitt for hver av undervisningstimene.

Hva		Tid (minutt)	Kommentar
Case A 1. undervisningstime	Oppstart	0-5	Elever og lærer kommer inn og opprop tas.
	Presentasjon av oppgaven	5-8	Muntlig, med elevene stående rundt kateteret. Transkribert.
	Gruppeinndeling	8-10	Grupper deles inn med kort, og lærer tildeler gruppene tavler.

	Gruppearbeid	10-30	Hint og utvidelser. Utvalgte deler transkribert.
	Konsolidering	30-40	Elevene samles rundt en ubrukt tavle, og læreren leder konsolideringen. Noen av elevene sitter. Transkribert
	Avslutning	40-45	Elevene rydder, og går videre til neste fag i et annet klasserom.
Case A 2. undervisningstime	Oppstart	0-5	Elever og lærer kommer inn og opprop tas.
	Presentasjon av oppgaven	5-6	Muntlig, med elevene stående rundt kateteret. Transkribert.
	Gruppeinndeling	6-8	Grupper deles inn med kort, og lærer tildeler gruppene tavler.
	Gruppearbeid	8-33	Hint og utvidelser. Utvalgte deler transkribert.
	Konsolidering	33-38	Elevene samles rundt en ubrukt tavle, og læreren leder konsolideringen. Alle elevene sitter. Transkribert.
	Avslutning	38-40	Elevene rydder, og går videre til neste fag i et annet klasserom.
Intervju 2.1	Intervjuskjema (vedlegg 5)	0-55	Refleksjonssamtale med utgangspunkt i videoklipp fra presentasjon av oppgaven og konsolidering i 1. og 2. undervisningstime. Transkribert.

Tabell 3: Oversikt over datamateriale i Case A

Fra tabell 3 ser vi at 1. og 2. undervisningstime starter med en klasseromsorganisatorisk oppstart, før oppgaven umiddelbart etter presenteres for elevene. Elevene blir så delt i tilfeldige grupper av læreren, og så arbeider de i gruppene for å løse oppgaven som ble gitt. Læreren går rundt i klasserommet, og gir elevene hint og utvidelser, før klassen samles rundt en tom tavle, og læreren leder en konsolidering for elevene. Timen avsluttes i etterkant av konsolideringen, og elevene rydder, og går videre til neste time.

Intervju 2.1 (tabell 3) er en refleksjonssamtale mellom meg som forsker og intervjuer, og Lærer A, eller Eva, som lærer og informant. Intervjuet tar utgangspunkt i videoklipp av presentasjon av oppgaven og konsolideringen i begge undervisningstimene. I slutten av intervjuet diskuterte vi også hvordan Eva brukte hint og utvidelser i sin undervisning. I samtalen rundt de tre delene av hver undervisningstime, ble Liljedahl (2021, s. 115, s. 166, s.183) sine makro- og mikrohandlinger brukt for å supplere diskusjonen rundt hver undervisningsfase, og knytte refleksjonene til det undervisningsmetodiske rammeverket tenkende klasserom.

Presentasjonen av oppgavene og konsolideringene er transkribert i sin helhet, mens eksemplifiserende deler av lærerens interaksjon med gruppene i gruppearbeidet er valgt ut og transkribert i gjennomgangen av datamaterialet. Utdrag fra intervjuet er transkribert for å få et innblikk i lærerens tanker og refleksjoner rundt undervisningsstegene i det tenkende klasserommet.

3.3.3 Transkripsjon

Siden jeg alene har transkribert datamaterialet for denne oppgaven, valgte jeg å ikke transkribere alt datamaterialet i alle datainnsamlingene, men heller å gjennomgå videoene for å identifisere interessante situasjoner som eksemplifiserte hvordan læreren brukte hint og utvidelser i undervisningen. Jeg valgte å ta med presentasjon av oppgavene og konsolideringen i sin helhet fra begge undervisningstimene, siden disse er spesielt interessante med tanke på forskningsspørsmålet sentrert rundt lærerens handlinger, mens jeg valgte å ta med eksempler på lærerens hint og utvidelser fra gruppearbeidet for å eksemplifisere hvordan læreren bruker dem for å holde elevene interessert i arbeidet, og hvordan Eva bruker rammeverket for tenkende klasserom i sin undervisning.

Når rådatamaterialet transkriberes, må utsagnene gjennomgås nøye for å kontrollere at transkripsjonen korrekt reflekterer det som blir sagt og gjort i rådataene. Jeg har gjennomgått hvert utsagn flere ganger for å sikre at transkripsjonen stemmer overens. I oversettelsesprosessen mellom dialekt og normert bokmål, har jeg valgt å fokusere på meningen med utsagnet fremfor en direkte oversettelse av setningene, siden det analytiske rammeverket i denne oppgaven koder utsagnenes mening, og ikke ordbruk i utsagnene. Det medfører at jeg har foretatt noen fortolkninger av dialektutsagnene, for at utsagnene skal gi mening på normert bokmål. I tilfeller der det som blir sagt ikke er hørbart, eller er ordbruken er upresis, har jeg i transkripsjonene notert i parentes en tolket sammenheng for ordbruken eller de fysiske handlingene som blir utført mens utsagnet pågår. Siden jeg har benyttet både lyd fra videokamera og lyd fra lydopptaker festet til læreren for å sikre at transkripsjonene er nøyaktige, vil jeg påstå at transkripsjonene er svært nært, om ikke identisk med, utsagnet fra rådatamaterialet. En mulig feilkilde i transkripsjonene er at jeg selv har kontrollert at transkripsjonene stemmer, og dermed er det mer sannsynlig at eventuelle feil kan ha blitt oversett enn hvis transkripsjonene hadde blitt gjennomgått av en annen person.

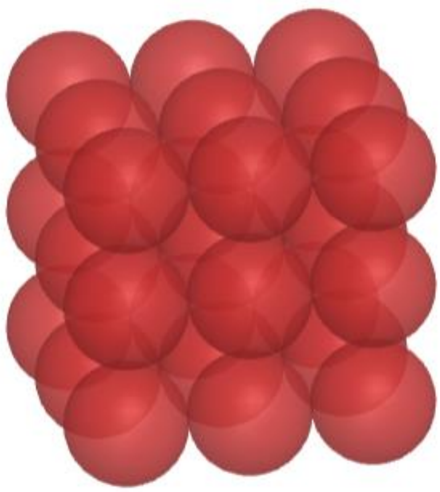
3.3.4 De matematiske oppgavene

I forkant av presentasjon av oppgavene, må læreren velge ut oppgavene som skal presenteres (Ball, 2017; Ball et al., 2008; Liljedahl, 2021; Smith og Stein, 1998). I Liljedahl (2021) beskrives fire oppgavetyper for tenkende klasserom. Oppgavene i denne casen faller inn under høyt engasjerende ikke-pensumsoppgaver, og skriptede pensumsoppgaver. Høyt engasjerende ikke-pensumsoppgaver er matematiske oppgaver som er så interessante at en problemløser ikke kan motstå å tenke på oppgaven (Liljedahl, 2021). En skriptet pensumsoppgave er baserte på tradisjonelle undervisningsoppgaver, men læreren unngår å vise elevene en «korrekt» fremgangsmåte i forkant av elevenes arbeid med oppgaven (Liljedahl, 2021). Smith og Stein (1998) trekker fram hvordan oppgaver i matematikkundervisningen har varierende kognitive krav. For at en oppgave skal være kognitivt krevende, er det essensielt at elevene ikke eksplisitt blir gitt en fremgangsmåte for å løse oppgaven (Smith og Stein, 1998).

For å gjøre det lettere å henge med i resultatdelen, vil jeg gå gjennom de matematiske oppgavene som ble brukt i Case A sitt datamateriale her.

1. undervisningstime:

Oppgaven i 1. undervisningstime er basert på en fysisk modell av figur 7, og spillet bondesjakk, som jeg antar at lesere kjenner til. I bondesjakk forsøker to spillere å få tre på rad på en $3 \cdot 3$ flate, og spillerne representerer typisk trekkene sine med kryss (x) og sirkel (o), Spillerne velger etter tur hvilken ledig rute de ønsker å sette sitt merke i. Oppgaven elevene fikk var å finne unike tre på rad-rekker i figur 7.



Figur 7: Modell av en $3 \cdot 3 \cdot 3$ kube sammensatt av kuler fra Case A, 1. undervisningstime.

For å finne antallet unike rekker i figuren, begynner jeg med å telle rekker som er ortogonale på kubens sideflater. Siden det er 9 rekker per sideflate, og tre dimensjoner i figuren, finnes det 27 rekker der. Deretter finner jeg diagonalene som ligger på de todimensjonale utsnittene av figuren i de

$3 \cdot 3$ flatene. Det er 2 diagonaler per utsnitt, og 3 utsnitt per dimensjon i kuben. Da får vi $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ diagonaler. Til slutt teller vi de tredimensjonale diagonalene gjennom sentrum i figur 7. Totalt er det 4 unike tredimensjonale diagonaler. Samlet har vi da $27 + 18 + 4 = 49$ unike tre på rad-rekker i modellen (figur 7).

Naturlige utvidelser for oppgaven er å øke dimensjonene på kuben til 4x4x4, og denne hadde Eva planlagt (kapittel 4.4). Derfra kan oppgaven videre utvides til å finne en formel for rekken. Formelen jeg har kommet frem til for antall rekker i en $n \cdot n \cdot n$ kube, basert på oppgaven over, er: $3(n \cdot n) + 2 \cdot 3 \cdot n + 4 = 3n^2 + 6n + 4$.

Oppgaven Eva planla for 1. undervisningstime vil i kontekst av Liljedahl (2021) kategoriseres som en høyt engasjerende ikke-pensumsoppgave, siden den ikke er koblet til pensum per se. I lys av Smith og Stein (1998) vil jeg definere oppgavens kognitive krav som høye i utgangspunktet, siden den legger til rette for at elevene selv må utforske og argumentere for svar de kommer frem til, uten at de blir gitt en fremgangsmåte, eller prosedyre, de skal bruke i oppgaven.

2. undervisningstime:

Oppgave: Overbevis deg selv om at du har større sannsynlighet for å få 9 enn 10 når du triller to terninger og legger sammen tallene du får.

Utvidelse: Kan du finne nøyaktig sannsynlighet for å få 9 og for å få 10, når du triller to terninger?

Figur 8: Oppgavetekst for den presenterte oppgaven, og utvidelsen gitt til alle gruppene, i Case A, 2. undervisningstime.

For å løse oppgaven i figur 8 finnes det flere fremgangsmåter som kan brukes, blant annet utfallstabell eller et utfallstre. Jeg vil vise hvordan en utfallstabell kan brukes for å løse oppgaven.

Utfall	1	2	3	4	5	6
1	1+1=2	1+2=3	1+3=4	1+4=5	1+5=6	1+6=7
2	2+1=3	2+2=4	2+3=5	2+4=6	2+5=7	2+6=8
3	3+1=4	3+2=5	3+3=6	3+4=7	3+5=8	3+6=9
4	4+1=5	4+2=6	4+3=7	4+4=8	4+5=9	4+6=10
5	5+1=6	5+2=7	5+3=8	5+4=9	5+5=10	5+6=11
6	6+1=7	6+2=8	6+3=9	6+4=10	6+5=11	6+6=12

Figur 9: Utfallstabell ved kombinasjon av to terninger.

Oppgaven kan løses gjennom kombinatorikk.
Siden en enkelt terning har en jevnt fordelt sannsynlighet for hvert mulige utfall, kan vi kombinere utfallene fra to terninger i en tabell (figur 9) for å finne alle mulige utfall for to terninger trillet samtidig. Når utfallene er satt opp, og vi vet at det er jevn sannsynlighet for

hver rute i tabellen (figur 9), kan vi telle hvor mange utfall som gir oss 10 som sum, og hvor mange som gir oss 9 som sum. Vi ser fra figur 9 at det er 4 utfall som gir 9 som sum, og 3 utfall som gir 10 som sum. Dermed er det større sannsynlighet for å få 9 som sum når to terninger trilles.

I utvidelsen i figur 8 skal vi finne den nøyaktige sannsynligheten for å få 9 som sum, og for å få 10 som sum, når to terninger trilles. For å finne den nøyaktige sannsynligheten finner vi gunstige utfall og deler på mulige utfall. Antall gunstige utfall for 9 og 10 som sum har vi fra oppgaven over, 4 og 3 respektivt. Mulige utfall finner vi ved å multiplisere de mulige utfallene for hver terning: $6 \cdot 6 = 36$. Sannsynligheten for å få 9 er da $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, og sannsynligheten for å få 10 er $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Oppgaven Eva planla for vil i kontekst av Liljedahl (2021) kategoriseres som en skriptet pensumsoppgave, som resultatdelen (4.1.2) vil gå nærmere inn på. Innen Smith og Stein (2008) stiller oppgaven høye kognitive krav ved at elevene bes bevise hvilket utfall som har høyest sannsynlighet, og faller under å gjøre matematikk. Utvidelsen vil også kategoriseres som høyere kognitive krav, siden fremgangsmåten ikke er gitt i oppgaven.

3.4 Analytisk rammeverk

For å sikre en bred forståelse av matematikklærerens handlinger i et tenkende klasserom, har jeg valgt å bruke to måter å gjennomgå transkripsjonene. Dragesets rammeverk (2014; 2015a; 2015b) for lærerhandlinger og elevresponser danner utgangspunktet for en grundig gjennomgang av transkripsjonsutdragene i resultatdelen. Jeg har også laget egne spørsmål, basert på Liljedahl (2021) sitt rammeverk for tenkende klasserom, spesielt rundt de tre undervisningsfasene, og Smith og Stein (2008) sitt rammeverk for organisering av konsolidering. Dette delkapittelet vil vise hvordan jeg har valgt å bruke disse rammeverkene, ved hjelp av et utdrag brukt i resultatdelen, for å gjøre analyseprosessen gjennomsiktig.

I resultatdelen vil lærerens perspektiv på casen også belyses gjennom utdrag fra intervju 2.1, og utdragene fra intervjuet er valgt ut fordi de belyser utdrag fra de tre undervisningsfasene (2.4.2). Innblikkene fra læreren kan gi grunnlag for å tolke om lærerens handlinger var bevisste eller tilfeldige i utdragene fra undervisningstimene.

I diskusjonsdelen vil resultatdelen ses i lys av lærerens undervisningsoppgaver (Ball et al., 2008) og i lys av tidligere forskning (2.5).

3.4.1 Lærerhandlinger og elevresponser

Dragesets rammeverk (2014) koder lærerhandlinger og elevresponser basert på turer. En tur defineres som ett sammenhengende utsagn fra én person. I utdragene fra datamaterialet har turene blitt nummerert for å gjøre det lett å referere til hvilken tur som analyseres. Utdragene er også nummererte for å kunne referere til spesifikke turer i spesifikke utdrag.

Tabell 3 viser lærerhandlinger og tabell 4 viser elevresponsene som de er benyttet i denne oppgavens resultatdel med en beskrivelse av hva hvilken koding inneholder, og gir eksempler på utsagn fra datamaterialet som eksempler på hvordan kodingen gjennomføres. Kodinger som ikke kommer opp i datamaterialet er ikke eksemplifisert.

Lærerhandling		Forklaring	Eksempel fra Case A
Retningsendring	Legge til side	Læreren legger til side en elevrespons, enten fordi det er irrelevant eller for å komme tilbake til det siden.	«Jeg vet ikke, jeg vil høre argumentasjonen.»
	Foreslå en ny strategi	Læreren foreslår at elevene benytter en annen strategi.	N/A
	Korrigerende spørsmål	Læreren stiller et spørsmål for å belyse et problem med elevenes strategi.	«Mhm, kan det være at dere har telt noen 2 ganger?»
Fremdrift	Demonstrasjon	Læreren viser hvordan en oppgave kan løses.	«Sant, så på her er det den grønne terningen som har 6 og den røde som har 3 (peker på 6 + 3), og her er det den grønne som har 3 og den røde som har 6 (peker på 3 + 6). Det er to forskjellige ting. Men her (peker på 5 + 5)…»

		Forenkling	Læreren forenkler oppgaven for elevene ved å gjøre oppgaven snevrere, eller ved å gi elevene delsvar.	N/A
		Lukket fremdriftsdetalj	Læreren leder elevene gjennom detaljene i en oppgave.	«Tre på rad. Hvis vi skal spille det nå, hva gjør vi da liksom?»
		Åpent fremdriftsinitiativ	Læreren inviterer elevene til å komme med mulige fremgangsmåter.	«Ja, klarer du å bevise, eller motbevise, at det er lettere å få 9 som sum enn 10.»
Fokuserende	Etterspørre	Belyse detalj	Læreren ber eleven om å forklare en detalj fra deres egen respons.	«8. Hvor tenkte du da, Elev 1, at det går an å ha? (Streker)»
		Begrunnelse	Læreren ber eleven om å begrunne svaret sitt.	«7? Hvorfor det?»
		Benytt på liknende problem	Læreren ber elevene om å benytte strategien sin på et liknende problem.	N/A
		Vurdering fra annen elev	Læreren ber medelevene om å komme med vurderign av en elev sin respons.	N/A
	Peke ut	Gjenta	Læreren gjentar noe en elev har sagt, gjerne med litt andre ord, for å understreke en detalj, eller et viktig element i elevens utsagn.	«(Mens hun skriver på nabotavlen) La meg se nå, Elev 3 sier 49. Og så har dere 72. Og så har dere..»
		Bemerke	Læreren bemerker noe som er implisitt eller relevant for en elevs utsagn.	«Ja, det er ni kuler, på en måte.»

Tabell 4: Lærerhandlinger med forklaring og eksempel fra Case A.
Lærerutsagn er hentet og oversatt fra Drageset (2014, s. 299; 2015a, s. 261).

Elevresponser	Forklaring	Eksempel fra Case A
Forklaring	Eleven gir et svar som har en eksplisitt forklaring, eller en implisitt forklaring i sammenheng med tildigere turer.	«Ja, men det er jo fordi du kan få 5, og så kan du få 5. Og så kan du få 5 fra den andre, og 5 fra den (første).»
Initiativ	Eleven kommer med et utsagn som bryter undervisningens flyt. Dette kan være spørsmål, eller responser som læreren ikke har etterspurt.	«Betyr det større sannsynlighet for 9?»
Delvis svar	Eleven kommer med deler av et svar. Forklaringen bak svaret er ufullstendig.	«Vi har 12, det er 4 av 12…»
Lærerledet svar	Eleven svarer, men læreren forventer tydelig et spesifikt svar.	«Ja.»
Uforklart svar	Eleven gir kun svaret på en oppgave, uten at fremgangsmåten i samme eller foregående turer har blitt forklart.	«Jeg ville gått for 7, jeg, da.»

Tabell 5: Elevresponser med forklaring og eksempler fra Case A.
Elevresponser er hentet fra Drageset (2015a, s. 262; 2015b, s. 38).

For å forstå hvordan lærerhandlinger og elevresponser henger sammen, skal vi se på utdrag 4 som er brukt i resultatdelen.

		Eva står sentralt i klasserommet og lytter til elever som diskuterer oppgaven. En elevgruppe tar kontakt fra tavlen sin. Modellen de har tegnet på tavlen er lik en rubikskube.	
1	Elev 1:	Jeg svarer 68.	Initiativ
2	Eva:	Svarer 68? Jeg er faktisk ikke helt sikker selv, altså. Forklar hva dere har tenkt.	Etterspørre Begrunnelse
3	Elev 1:	Okei, se, det er 6 sider, ikke sant, i kuben, og da må det være. Og så er det 8 løsninger på en side. Så da har du 8 ganger 6 som er 48. Og så er det 3 sånne vegger inni også, med 8 (refererer til de midterste utsnittene ortogonalt på en sideflate), så da tar du 11 ganger seks som er 66 (feil i matematikken, det er 8 ganger 9 som vil stemme med elevens forklaring), og så er det to sånne skrå inni (3-dimensjonale diagonaler)	Forklaring
4	Eva:	Mhm, kan det være at dere har telt noen 2 ganger?	Korrigerende spørsmål
5	Elev 1:	Nei, fordi du kan telle på andre siden.	Forklaring
6	Elev 2:	Vet du svaret?	Initiativ
7	Eva:	På innsiden… (Eva blir avbrutt)	
8	Elev 1:	Se, da det er innsiden (elevgruppens tegning har overflater som en rubikskube).	Forklaring
9	Eva:	Ja, men det er jo på en måte samme kulen. Hvis det er den samme kula, så er det den samme tre på raden.	Bemerke

10	Elev 1:	What?	Initiativ
11	Elev 2:	Er det 54, Eva?	Uforklart svar
12	Eva:	Jeg vet ikke, jeg vil høre argumentasjonen.	Legge til side
13	Elev 2:	Du vet ikke hva svaret er en gang?	Initiativ
14	Eva:	Nei, det er ikke så viktig med svaret alltid. Jeg er ikke enig med argumentasjonen, kom med et bedre tall.	Åpent fremdriftsinitiativ
		Eva går bort fra gruppen.	

Utdrag 1: Case A 1. undervisningstime, 14. minutt til 15. minutt

Utdragene i denne oppgaven vil starte med en beskrivelse av elementer i situasjonen som er relevante for å gi kontekst til transkripsjonene. Utsagn fra elevene og Eva er nummerert, og hvert nummer refereres til som en tur. I utdrag 4 ser vi at utsagnet i en tur er transkribert, og i høyre kolonne ser vi kodingen jeg har valgt å bruke for turen. Hver tur gis bare én kode. Selv om en tur passer inn i flere lærerhandlinger eller elevresponser, gis turen kun en kode, som beskriver kodens hovedfunksjon i kontekst av turene før og etter (Drageset, 2014; 2015a).

I resultatdelen vil hvert utdrag gjennomgås, og jeg vil vise til kodingen av hver tur. I situasjoner der jeg har vært i tvil om hvilken kode jeg skulle velge, vil jeg argumentere for hvorfor jeg har tolket turen som jeg har gjort. For å vise hvordan dette kan se ut, vil jeg gå gjennom utdrag 4 her, med en detaljert beskrivelse av hvorfor jeg har kodet turene som jeg har gjort.

I utdrag 4 ser vi en situasjon fra gruppearbeidet i 1. undervisningstime fra Case A. Elevgruppen i utdraget tar kontakt med Eva. Innholdet i tur en kan kodes på to forskjellige måter. Isolert sett er det et uforklart svar, siden eleven ikke forklarer utsagnet sitt på noen måte. Likevel må jeg se utsagnet i kontekst av at turen inviterer Eva inn for å delta i diskusjonen, og jeg tolker derfor turen som et initiativ. I tur 2 gjentar Eva spørsmålet, men hun ber også Elev 1 om å begrunne initiativet som den kom med. Siden forespørselen om begrunnelse medfører at Elev 1 svarer i tur 3, er dette alternativet jeg går for i tur 2. I tur 3 kommer Elev 1 med en forklaring som de blir forespurt om, og turen kodes deretter. Eva fanger opp at det er sannsynlig at elevgruppen har telt flere av de unike tre på rad-rekkene flere ganger, og forsøker å endre elevenes svar ved å stille et korrigerende spørsmål i tur 4. I tur 5 forklarer Elev 1 hvorfor de mener at de kan telle flere unike rekker. Jeg tolker tur 5 som at elevenes modellering av oppgaven som en 3x3x3 rubikskube medfører at de teller tre på rad-rekker på hver sideflate av kubene som danner en 3x3x3 rubikskube, i stedet for 3 kuler på rad i en 3x3x3 kube. I tur 6 kommer Elev 2 med et spørsmål som bryter diskusjonens flyt, og derfor kodes denne turen som et initiativ. Eva blir i tur 7 avbrutt, og siden jeg ikke kan anta hva hun kom til å si, velger jeg å ikke kode turen i det hele tatt. I tur 8 viser Elev 1 til tavlen for å understreke forklaringen i tur 5, og jeg koder dette som en forklaring. Dette gjør jeg fordi jeg kommer frem til at en visuell forklaring er likestilt med en muntlig forklaring. I tur 9 bemerker Eva at kuben oppgaven er basert på er bygget opp av kuler. Jeg tolker det som at hun bemerker dette for å illustrere for elevgruppen at kulene kun har én overflate, til forskjell fra kubene i en rubikskube, som medfører færre unike rekker i modellen. Elev 1 bryter flyten med et initiativ gjennom spørsmålet «What?» i tur 10. I tur 11 kommer Elev 2 med et spørsmål, men spørsmålet inneholder et uforklart svar, og kodes som et uforklart svar av denne grunn. I tur 12 legger Eva responsen til side, og Elev 2 om å forklare seg i stedet for. Siden Elev 2 ikke responderer på forespørselen om forklaring, har jeg kodet turen som at Eva legger svaret til side. Elev 2 aksepterer ikke at Eva legger svaret til side, og prøver med et initiativ en gang til i tur 13. Eva legger nok en gang svaret til side, men svarer med et åpent fremdriftsinitiativ for å sette elevene i arbeid igjen i tur 14. Eva beveger seg så bort fra gruppen igjen.

Kodene som settes for hver tur baserer seg altså på min fortolkning av turens betydning i sammenheng med turene før og etter.

3.4.2 Undervisningsmetodisk tolkning av casen og identifisering av undervisningsoppgaver

For å få en forståelse av hvordan undervisningsmetodikken tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) sammenfaller med lærerhandlingene (Drageset, 2014) i de forskjellige undervisningsfasene, har jeg utviklet en serie spørsmål som jeg ønsker å besvare i resultatdelen i denne oppgaven.

Undervisningsfase	Teoribakgrunn	Spørsmål	Datagrunnlag
Presentasjon av oppgaven	Liljedahl (2021)	Hvor presenteres oppgaven?	1. og 2. undervisningstime
		Hva presenteres i oppgaven?	1. og 2. undervisningstime
		Hvordan blir oppgaven presentert?	1. og 2. undervisningstime
Hint og utvidelser	Liljedahl (2021)	Når får elevene hint?	1. og 2. undervisningstime

		Hvordan får elevene hint?	1. og 2. undervisningstime/ Intervju 2.1
		Når får elevene utvidelser?	1. og 2. undervisningstime/ Intervju 2.1
		Hvilke utvidelser får elevene?	1. og 2. undervisningstime/ Intervju 2.1
	Liljedahl (2021)/ Smith og Stein (1998)	Hvordan påvirker hint/utvidelse kognitive krav?	1. og 2. undervisningstime
Konsolidering	Liljedahl (2021)/ Stein et al. (2008)	Hvordan sekvenseres svar til tenkende klasserom?	1. og 2. undervisningstime
		Hvor konsolideres oppgaven?	1. og 2. undervisningstime
		Hva legger konsolideringen vekt på?	1. og 2. undervisningstime/ Intervju 2.1
		Hvordan struktureres konsolideringen?	1. og 2. undervisningstime/ Intervju 2.1

Tabell 6: Analytiske spørsmål.
Utviklet basert på Liljedahl (2021), Smith og Stein (1998) og Stein et al. (2008).

I resultatdelen vil disse spørsmålene besvares etter hvert utdrag, ettersom de er relevante. Jeg vil også observere hvilke matematiske undervisningsoppgaver (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010, s. 104) Eva utfører i hver fase av undervisningstimene. Analysen av matematikklærerens undervisningsoppgaver (Ball et al., 2008) og lærerhandlinger (Drageset, 2014, 2015a) vil gi meg et empirisk grunnlag for å diskutere lærerens handlingsmønster i et tenkende klasserom i lys av tidligere forskning. Som eksempel vil jeg svare på spørsmålene fra tabell 6 som er relevante for utdrag 4. Deretter vil jeg kommentere på hvordan jeg tolker hvilke undervisningsoppgaver (tabell 7) som Eva utfører i utdrag 4.

Nummer	Matematisk undervisningsoppgave
1	Presentere matematiske ideer
2	Respondere på elevenes "hvorfor"-spørsmål
3	Finne eksempel for å få frem et bestemt matematisk poeng
4	Være klar over hva som involveres når en bestemt fremstilling tas i bruk
5	Knytte representasjoner til underliggende ideer og til andre representasjoner
6	Knytte emnet en underviser i, til emner fra tidligere år, eller til kommende emner
7	Forklare matematiske spørsmål og hensikter til foreldre
8	Vurdere og tilpasse det matematiske innholdet i lærebøker/læremidler
9	Endre oppgaver slik at de blir mer eller mindre utfordrende
10	Evaluere[1] om elevenes påstander er rimelige (ofte raskt)
11	Gi, eller evaluere, matematiske forklaringer
12	Velge og utvikle gode definisjoner
13	Bruke matematisk notasjon og språk, og bedømme bruken
14	Stille fruktbare matematiske spørsmål
15	Velge ut hensiktsmessige representasjoner
16	Undersøke likheter

Tabell 7: Oversatte matematiske undervisningsoppgaver (Ball et al. 2008; oversatt i Fauskanger et al., 2010, s. 104)

*1 * Egen oversettelse, oversettelsen i Fauskanger et al. (2010) bruker «Forklare» men Ball et al. (2008) bruker «Evaluate».*

Utdrag 4 tilhører undervisningsfasen hint og utvidelser. I utdrag 4 får elevene hint når de selv trekker lærerens oppmerksomhet ved å spørre om de har funnet riktig svar i tur 1. Elevene får ikke bekreftelse på om svaret er riktig eller ikke (tur 2, tur 12, tur 14), men Eva kommenterer på fremgangsmåten de har brukt (tur 4, tur 9), og viser til at hun er mer interessert i fremgangsmåten og argumentasjonen elevene legger bak (tur 2, tur 12, tur 14). I tur 1 blir Eva spurt et periferispørsmål (Liljedahl, 2021), fordi hun beveger seg forbi gruppen. Hun blir trukket inn i elevenes diskusjon, men hun passer også på at hun ikke forenkler oppgaven for elevene. Hintene Eva gir utdrag 4 karakteriseres av at de ikke forminsker de kognitive kravene i oppgaven, men heller hjelper elevene med å tolke oppgaven riktig. Når elevene er satt på riktig spor, trekker Eva seg bort fra gruppen. Hun responderer på slutt å tenke-spørsmål med å stille elevene motspørsmål, og ber heller elevene om å overbevise henne gjennom argumentasjonen deres.

I utdrag 4 identifiserer jeg tre undervisningsoppgaver Eva utfører. I tur 2 og 3 tolker jeg at Eva evaluerer Elev 1 sin påstand, undervisningsoppgave 10, for så å stille et fruktbart matematisk spørsmål, undervisningsoppgave 14, i tur 4, etter å ha evaluert Elev 1 sin forklaring i tur 3, undervisningsoppgave 11.

3.5 Studiens kvalitet

Med kvalitet i kvalitativ forskning menes relabilitet og validitet. Relabilitet refererer til i hvor stor grad prosessen bak utviklingen av datamaterialet er troverdig og pålitelig, mens validitet refererer til i hvor stor grad tolkningene forskeren har gjort på datamaterialet er tydelig og relevant for problemstillingen. I dette delkapittelet vil studiens kvalitet redegjøres og argumenteres for å synliggjøre studiens relabilitet og validitet (Kvale og Brinkmann, 2015; Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018).

3.5.1 Relabilitet

Relabilitet i kvalitativ forskningsmetode skiller seg fra relabilitet i kvantitativ forskningsmetode, der relabilitet er en vurdering av forsøkets metode og dens repliserbarhet. I kvalitativ forskning er relabiliteten avhengig av at forskeren tydelig redegjør for hvordan data i forskningsprosjektet er utviklet (Thagaard, 2018).

Åpenhet om fortolkningsprosessen av datamaterialet er viktig for oppgavens relabilitet (Postholm & Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018). Derfor har jeg trukket frem en situasjon fra analyseprosessen i 3.4.1 (utdrag 4) for å vise hvordan turer som kan ha to tolkninger innen rammeverket for Drageset (2014; 2015a; 2015b) plasseres. Jeg har også vist spørsmål jeg har formulert på grunnlag av Liljedahl (2021) og Smith og Stein (2008) for å tolke undervisningstimene i lys av teori. Gjennom metodedelen har jeg tydelig og konkret redegjort for denne studiens datainnsamling, og jeg vil påstå at dette medbringer en høy relabilitet i studiens datamateriale. Jeg har tydelig redegjort for hvordan jeg analyserer dataene jeg har fremstilt, og hvordan jeg i resultatdelen har kodet og tolket dataene. Resultatdelen i denne oppgaven er oversiktlig, og gir leseren mulighet for å selv tolke utdragene ved hjelp av tabell 4, 5, 6 og 7 i kapittel 3.4.

Det å ta lyd- og videoopptak av observasjonene for bruk i transkripsjon styrker datamaterialets relabilitet (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018), siden leseren kan være sikker på at ordlyden som presenteres og datamaterialet som analyseres er så nær den opprinnelige situasjonen som mulig. Oversettelsen til normert bokmål kan medføre noen endringer i ordlyden av utsagnene i datamaterialet, og dette svekker relabiliteten noe. Jeg har også alene transkribert og tolket dataene i denne studien, og dette kan svekke relabiliteten. Observasjoner i klasserom ble utført med ikke-deltakende, passive observatører for å minimere observatørenes kontaminering av de ordinære klasseromssituasjonene, men eksterne personer i et klasserom vil alltid påvirke handlingene som foregår i klasserommet. Elevene kan være roligere eller mer urolige enn vanlig, læreren planlegger kanskje timen nøyere enn vanlig, og ikke-deltakende observatører er et distraksjonselement i seg selv. Det er rett og slett slik at når du setter forskeren inn i klasserommet, så er den et forstyrrende element, selv om forskeren ikke deltar (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018). Jeg har selv hatt lite relasjon med elevene i studien, og min direkte interaksjon med dem er begrenset til når jeg presenterte meg selv for dem i den første undervisningstimen jeg observerte. Jeg har gjennom forskningsprosjektet holdt en profesjonell relasjon til Eva (Lærer A), og den profesjonelle relasjonen kan ha påvirket hvilke tanker og refleksjoner Eva valgte å dele i Intervju 2.1.

3.5.2 Validitet

Grunnet studiens kvalitative natur, er det viktig for oppgavens gyldighet at metoden som benyttes er transparent, og at tolkningene og presentasjonen av tolkningene inviterer leseren til å vurdere om de kjenner seg igjen i situasjonene som beskrives. Det at tolkningene og funnene presenteres på en slik måte at fortolkningens subjektive natur ikke skjules for leseren, er viktig for oppgavens gjennomsiktighet (Postholm & Jacobsen, 2018). Jeg vil påstå at det tydelig kommer frem i eksempelet fra kapittel 3.4 og resultatdelen hva som er direkte transkripsjoner fra datamaterialet, og hva som er mine tolkninger gjort på dataene. Prosessen for tolkning av datamaterialet kommer også tydelig frem i kapittel 3.4. Dilemmasituasjoner i tolkningen kommer tydelig frem i resultatdelen, sammen med argumentene bak hvorfor et alternativ er valgt fremfor andre. I diskusjonsdelen kobles resultatene med resultater fra tidligere forskning, som styrker studiens validitet. Den teoretiske bakgrunnen for studien er redegjort for i kapittel 2, og bruken av begreper er redegjort for i introduksjonen og i løpet av teoridelen.

Siden jeg alene har stått for tolkningene og transkripsjonene i studien, svekker det tolkningenes validitet, sammenlignet med om flere forskere hadde gjennomgått transkripsjonene og analysen. Samtidig er leseren invitert til å selv gå gjennom utdragene i resultatdelen ved hjelp av tabell 3, 4 og 5, som styrker validiteten igjen. Det at det kun er én lærer som er fulgt, og det er relativt få undervisningstimer studien samler datamateriale fra, svekker validiteten. En komparativ casestudie kunne ha gitt et større og mer valid inntrykk av matematikklærerens handlinger i et tenkende klasserom (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018).

3.5.3 Svakheter ved studien

Svakhetene ved denne studien ligger ikke hovedsakelig innen studiens kvalitet i seg selv, men i hvordan tidslinjen for oppgaven endret seg når jeg måtte reorganisere hele studien på bakgrunn av problemene i datainnsamlingen (kapittel 3.3.1). Problemstillingen jeg hadde sett for meg og forberedt teori og metode for frem til 5. mars (tabell 2), ville på grunnlag av dataene som faktisk ble samlet inn ikke være gjennomførbar. Siden oppgaven i praksis dermed er skrevet over 2 måneder i stedet for de 6 månedene som settes av i masterstudiet, vil studiens kvalitet sannsynligvis være negativt påvirket av dette. Dataene som blir brukt i studien har høy relabilitet, og det er fyldig transkribert, basert på lyd- og videoopptak (Thagaard, 2018), men datagrunnlaget ville vært bedre om jeg tidligere i forskningsprosessen hadde vært klar over langtidssykemeldingen, og kunne planlagt flere observasjonsrunder i klasserommet for å få et større utvalg av data å basere transkripsjonene og analysen på.

Ved masterprosjektets start skulle også en medstudent skrive sin oppgave basert på datainnsamlingen, og dersom medstudenten min ikke hadde trukket seg fra masterfaget, kunne transkripsjonene og analysen vært gjennomgått av to forskere, i stedet for meg alene. Dette ville ha styrket validiteten av tolkningene (Postholm og Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018). Dersom Lærer B hadde møtt til intervju 2.3, kunne jeg også ha gjennomført en komparativ casestudie med likt datagrunnlag i Case A og Case B, og dette kunne styrket studiens validitet (Thagaard, 2018).

3.6 Forskningsetiske vurderinger

Siden transkripsjonene ble gjort basert på observasjonsdata gjennom lyd- og videoopptak, er det garantert at det kom frem personopplysninger som navn i datamaterialet. Siden deler av datamaterialet inneholdt personopplysninger om barn, er det særs viktig at rådataene er sikkert lagret. Sannsynligheten for at det kommer frem informasjon som kan skade barn eller voksne i datamaterialet er lav, men likevel til stede. Derfor er kun relevante deler av datamaterialet som har med matematikkundervisning å gjøre fra undervisningstimene transkribert. Transkripsjonene er også anonymiserte, det vil si at jeg ikke benytter opprinnelige navn i transkripsjonene, og at eventuelle utsagn som kan identifisere stedet observasjonene er gjennomført endres, eller ikke transkriberes i det hele tatt. Rådatamaterialet er kun tilgjengelig for veileder, meg og min medstudent (vedlegg 1).

Studien er godkjent av Sikt – Kommunesektorens tjenesteleverandør (vedlegg 1), som har tatt over for NSD for sikker lagring og prosessering av personinformasjon som kommer frem i forskningsprosjekt ved Universitetet i Stavanger. Sikt sikrer at datainnsamlingen i et forskningsprosjekt foregår etter nasjonalt lovverk angående forskningsetikk (NESH, 2023) og dataoppbevaring.

For å forskningsetisk forsvare observasjon og intervju, har jeg samlet informert samtykke (vedlegg 2; vedlegg 3) fra alle deltakere i denne studien før observasjonen startet. Lærerne involvert i datainnsamlingen ble tilsendt samtykkeskjema på mail, og jeg tok med fysiske skjema de kunne signere på samling 3, som ble signerte av samtlige før observasjonen startet (vedlegg 2). Gjennom Lærer A, B og C samlet jeg samtykke fra elevene og deres foreldre (vedlegg 3) i forkant av første observasjon i klasserommet. Sikt godkjente informasjonsskrivene med forbehold om at elever, som alene eller med foresatte ikke samtykket til observasjon, ikke oppholdt seg i rommet der observasjonen foregikk. Forbeholdet ble kommunisert til Lærer A, B og C, og observasjonsrundene i klasserom ble planlagt etter forbeholdet.

Lærerne og elevene som har deltatt i forskningsprosjektet er ikke identifiserbare i forskningen, og Eva er et fiktivt navn jeg plukket ut fordi det var lett å skrive. Elevene refereres til ved nummer, og nummereringen tilbakestilles for hvert utdrag. I tilfeller der jeg ikke har klart å identifisere hvilken elev som snakket i datamaterialet har jeg referert til dem som bare Elev. Ingen sensitive data dukker opp i transkripsjonene, og rådatamaterialet har vært, og vil fortsette å være sikkert lagret frem til senest slettefristen 15. desember 2024. Kun jeg, min medstudent og veileder har mulighet til å se rådatamaterialet for å beskytte deltakernes identitet og lokasjon. Jeg har aktivt valgt å ikke presisere hvor studien er gjennomført, annet at det er på en ungdomsskole i en kommune i Rogaland. Der lokasjonen er nevnt i informasjonsskrivene (vedlegg 2; vedlegg 3), har jeg valgt å erstatte teksten med en linje, for å skjerme deltakerne.

4 Resultat

Resultatdelen gjennomgår Case A ved hjelp av de tre undervisningsfasene beskrevet i tabell 5 (kapittel 3.4.2). Til slutt ser resultatdelen på lærerens kommentarer og refleksjoner fra intervju 2.1 rundt de tre undervisningsfasene.

4.1 Presentasjon av oppgavene

I denne delen undersøkes den første undervisningsfasen, der Eva presenterer oppgaven elevene skal arbeide med i undervisningstimene.

4.1.1 1. undervisningstime

Oppgaven som ble benyttet i første observerte undervisningstime (A1) ble introdusert som følger:

		Eva tegner opp et kvadrat delt inn i 3x3 ruter på en whiteboard-tavle til venstre forklasserommets front. Elevene er samlet rundt tavlen stående i en halvsirkel.	
1	Eva:	Har dere sett dette her før?	Lukket fremdriftsdetalj
2	Elev:	Ja.	Lærerledet respons
3	Eva:	Hva tenker dere at det skal brukes til?	Lukket fremdriftsdetalj
4	Elev:	Tre på rad.	Lærerledet respons
5	Eva:	Tre på rad. Hvis vi skal spille det nå, hva gjør vi da liksom?	Lukket fremdriftsdetalj
6	Elev:	Setter et kryss, eller en runding.	Lærerledet respons
7	Eva:	Setter et kryss, sant. Hvor er det lurt å sette et kryss?	Lukket fremdriftsdetalj
8	Elev:	Midten.	Lærerledet respons
		Eva setter et kryss i midterste rute i 3x3-figuren. Bondesjakken spilles til det er tydelig at hverken kryss eller sirkel vil få tre på rad (ca. 30 sek).	
9	Eva:	Hvis vi ikke hadde spilt nå, sant, og bare tenkte sånn potensielt, liksom. Hvor mange plasser kan du få tre på rad? Hvor mange streker er det lov å ha?	Åpent fremdriftsinitiativ
10	Elev 1:	6.	Uforklart svar
11	Eva:	Elev 1 sier 6. Noen høyere?	Etterspørre Vurdering fra annen elev
12	Elev:	8.	Uforklart svar
13	Eva:	8. Hvor tenkte du da, Elev 1, at det går an å ha? (Streker)	Etterspørre Belyse detalj

14	Elev:	Opp der, og til siden.	Delvis svar
15	Eva:	(Tegner inn den ene diagonalen og nummererer den som 1.) Det var 1. Og så den andre skrå?	Lukket fremdriftsdetalj
16	Elev 1:	Ja.	Lærerledet respons
17	Eva:	(Mens hun tegner inn den andre diagonalen) 2.	Lukket fremdriftsdetalj
18	Elev:	Og så til siden sånn (Vifter fingeren frem og tilbake horisontalt).	Delvis svar
19	Eva:	(Mens hun tegner inn de tre horisontale mulighetene) 3, 4, 5.	Lukket fremdriftsdetalj
20	Elev:	Også de opp og ned.	Delvis svar
21	Eva:	(Mens hun tegner inn de vertikale mulighetene) 6, 7, 8. Har vi noen flere da, eller?	Lukket fremdriftsdetalj
22	Elev:	Nei.	Lærerledet respons
23	Eva:	Alle enige om at det er maks? Okei. Se for dere at det er 3D, med tre etasjer (Holder opp en fysisk modell av kuler med 1 cm diameter limt sammen i en 3x3x3 kube). Denne figuren her er, liksom, mega hjemmesnekret, men se for dere at dette er en perfekt figur, det er det jeg pleier å si til dere, sant? Se for dere at dette er en perfekt figur. Hvor mange måter går det an å få tre på rad her? For da har du både oppå toppen, men du har også nedover og på skrå inni figuren, og så videre. Så det er oppgaven deres. Prøv å finne ut av, og argumenter for, du må kunne forklare det tallet du har kommet frem til, hvor mange det er.	Åpent fremdriftsinitiativ

Utdrag 2: Case A, 1. undervisningstime, 5. minutt til 7. minutt

Gjennom Dragesets rammeverk ser vi fra start av utdrag 1 en serie med lukkede fremdriftsdetaljer og lærerledede responser fra elevene fra tur 1 til tur 8. Her stiller Eva spørsmål som har kjente svar, og hun leder elevene gjennom en kjent prosess i spillet bondesjakk. Fra tur 9 ser vi at matematikken kommer mer i fokus. Turen er fortsatt en lukket fremdriftsdetalj, et spørsmål der Eva ønsker ett konkret svar, nemlig 8, men i tur 10 kommer svaret 6 i stedet for, som et uforklart svar. Som respons benytter Eva fokuseringshandlingen etterspør vurdering fra medelever i tur 11, og får 8 som et delvis svar i tur 12. I tur 13 etterspør Eva detaljene bak det riktige svaret i tur 12, som starter en serie med delvise svar og lukkede fremdriftsdetaljer frem til tur 21. I tur 21 stiller Eva et lukket fremdriftsspørsmål med den antakelse at elevene kommer til å svare negativt, som de gjør i tur 22. I tur 23 presenterer Eva det matematiske problemet elevene skal arbeide med i den første undervisningstimen. Her overgir Eva kontrollen til elevene for å velge fremgangsmåte innenfor det tenkende klasserommets ramme for å finne svaret på problemet, som medfører at turen blir et åpent fremdriftsinitiativ.

Eva presenterer oppgaven til siden for klasserommets front. Oppgaven som blir presentert er gjennomgått i metodekapittelet (3.3.4). Oppgaven er ferdig presentert 4 minutt og 30 sekunder etter første gang Eva adresserer hele klassen i undervisningstimen. Det faller innenfor rammen for når oppgaven bør presenteres (Liljedahl, 2021). Problemet ble presentert for elevene muntlig gjennom en dialog som startet med noe som var kjent, det å spille bondesjakk og å finne antall mulige vinnende rekker i det todimensjonale spillet, og over i noe ukjent, å finne vinnende rekker i det tredimensjonale spillet. Problemet som skal løses er altså en naturlig utvidelse av diskusjonen før oppgavens introduksjon. Dette stemmer overens med det undervisningsmetodiske rammeverket (Liljedahl, 2021).

4.1.2 2. undervisningstime

I andre observerte undervisningstime A2 presenterer Eva oppgaven som følger:

		Elevene står samlet rundt klasserommets kateter.	
1	Eva:	Nå har vi jo holdt på med sannsynlighet og statistikk, sant? Og kombinatorikk og så videre. Så oppgaven vår går på å finne ut, er det større sannsynlighet… Eller, jeg har en teori da, om at det er større sannsynlighet for å få 9 enn 10 hvis du triller to terninger. Okei? Så hvis du triller to terninger og får 1 og 4, så er jo det summen, sant, da har du fått 5. Så hvis du triller to terninger, så er min teori at det er større sannsynlighet for å få 9 i sum enn å få 10 i sum. Så skal dere på en måte prøve å enten bevise, eller motbevise, at det stemmer, da. Okei? Er oppgaven forstått? (Elevene nikker)	Åpent fremdriftsinitiativ
		Videre nummererer Eva whiteboardene i rommet, og deler elevene inn i grupper.	

Utdrag 3: Case A, 2. undervisningstime, 5. minutt til 6. minutt

I andre undervisningstime foregår hele presentasjonen av oppgaven i 1. tur av utdraget, og turen kodes som et åpent fremdriftsinitiativ, siden turens funksjon er å presentere og initiere elevenes arbeid med oppgaven som gis.

Presentasjonen er ferdig 3 minutter etter første gang Eva adresserer hele klassen samlet. Dette treffer også innenfor rammen Liljedahl (2021) setter ned for når oppgaven bør introduseres. Oppgaven presenteres i dette tilfellet rundt kateteret, og elevene står samlet rundt Eva mens hun presenterer oppgaven. Eva presenterer hele oppgaven som en monolog, og setter oppgaven i kontekst av det elevene har arbeidet med i tidligere matematikktimer. Oppgaven som blir presentert er gjennomgått i metodekapittelet (3.3.4). Presentasjonen følger ikke den ideelle strukturen som Liljedahl (2021) legger frem for introduksjon, til forskjell fra 1. undervisningstime, men presentasjonen oppleves likevel tydelig.

I dette delkapittelet (4.1) tolker jeg at Eva utfører undervisningsoppgave 3 i utdrag 1 gjennom å bruke eksempelet bondesjakk for å illustrere hva som konstituerer en unik rekke. Hun utfører undervisningsoppgave 4 når hun representerer kuben sammensatt av kuler i steder for en ordinær rubikskube for å implisitt poengtere at tre på rad-rekkene går gjennom sentrum av kulene (figur 7, 3.3.4), og ikke på siden av de mindre kubene som bygger opp en rubikskube. Hun utfører også undervisningsoppgave 10 i tur 11 til 23, når elevene svarer på spørsmålene hun stiller, og det er spesielt tydelig i tur 11, når hun ber medelevene spille inn for å få det riktige svaret. Eva utfører undervisningsoppgave 15 når hun velger kuben sammensatt av kuler, fordi, som neste delkapittel viser (4.2.1), representasjonen rammer inn de gyldige unike rekkene annerledes enn en ordinær rubikskube.

I utdrag 2 er det vanskeligere å bestemme hvilken undervisningsoppgave Eva utfører. Det å presentere en matematisk oppgave kan falle inn under undervisningsoppgave 1 eller undervisningsoppgave 8. Jeg vil påstå at de matematiske undervisningsoppgavene som de er fremstilt i tabell 7 må utvides for å inkludere presentere oppgaver som en matematisk undervisningsoppgave. Dette tar jeg opp igjen i diskusjonsdelen. Denne plasseringen av presentasjon av matematiske oppgaver gjelder også i utdrag 1.

4.2 Hint og utvidelser under elevenes arbeid

Videre skal vi se på den andre undervisningsfasen. I denne delen av undervisningstimene arbeider elevene i grupper på tre og tre, på whiteboardtavler plassert langs to av veggene i klasserommet.

4.2.1 1. undervisningstime

Eva står og hører på en gruppe etter å ha blitt spurt om å komme bort for å se. Transkripsjon starter etter at elevene har introdusert to forslag til svar, 27 (på tavlen står det 72) og 40.

1	Elev 1:	(Mens de peker på forskjellige sider en tegnet figur av en kube) Ja, men det er 9 (streker) der, 9 der, 9 bak der, 9 bak der, 9 oppå der, og så er det 9 inni der.	Delvis svar
2	Eva:	Hva er forklaringen på 9?	Etterspørre Belyse detalj
3	Elev 1:	Det er 3 der, 3 der og 3 der (viser horisontale linjer med fingeren på en sideflate av kuben).	Forklaring
4	Elev 2:	Så du sier det ikke går an å ta 3 der og 3 der? (trekker diagonalene på sideflaten med fingeren) (Eleven hører ikke til på gruppen)	Initiativ
5	Eva:	Ja, det er ni kuler, på en måte.	Peke ut Bemerke
6	Elev 1:	Ja, det er ni kuler.	Lærerledet respons
7	Eva:	Men på en side, hvor mange (måter) går det å få tre på rad?	Korrigerende spørsmål
8	Elev 1:	8.	Lærerledet respons
9	Elev 3:	3.	Uforklart svar
10	Elev 1:	Så hvorfor 9?	Initiativ
11	Eva:	Så hvorfor 9. For spørsmålet er ikke hvor mange kuler er det.	Etterspørre Begrunnelse
12	Elev 1:	Ja, men vi vet jo det, da. Hvorfor 78? Sånn, 78 tre på rad greier. (Sirkler inn 72)	Initiativ
13	Eva:	Okei, dere kan gå bort på den modellen også se litt, og prøve å telle litt opp og se om det… Er dette, er dette Elev 1 sin teori, eller er dere flere om…	Etterspørre Belyse detalj
14	Elev 4:	Jeg vet ikke, jeg kan ingenting.	Uforklart svar
15	Eva:	Men hvis dere går bort på modellen da, så prøver Elev 1 å forklare hva de har tenkt?	Forslå en ny strategi
		Elevene går bort til den fysiske modellen i midten av klasserommet.	

Utdrag 4: Case A Time 1, 12. minutt til 13. minutt

I utdrag 3 ser vi en elevgruppe som har bedt læreren om å komme bort og transkripsjonen starter etter en hurtig introduksjon av noen mulige svar før tur 1. Det første elevutsagnet er et delvis svar, der Elev 1 forklarer hva som er addert for å få løsningen 40, selv om det det ikke vil gå opp. Eva noterer seg at 9 blir brukt, selv om det i introduksjonen av oppgaven (utdrag 1), og etterspør i tur 2 en belysning av detaljene for å få oppklaring i hvorfor 9 blir brukt (utdrag 3). Elev 1 responderer med å forklare hvorfor den mener at det er ni på hver sideflate, og ser ut til å snakke om kulene i stedet for tre på rad-linjene som går ut fra kulene ortogonalt på sideflaten. Elev 4 kommer med et spørsmål, som kodes som initiativ i rammeverket, og trekker frem de diagonale linjene på sideflaten, men utsagnet blir ignorert i den videre diskusjonen. I tur 5 bemerker Eva at det er 9 kuler per sideflate i figuren, og det virker som at hun antar at det er antall kuler elevene har telt opp. Elev 1 responderer etter lærerens utsagn, med å gjenta det læreren sa. Det er hverken et svar, initiativ eller en forklaring, så det kodes som en lærerledet respons. Deretter spør Eva om hvor mange tre på rad-muligheter det er på en sideflate, og siden handlingen endrer retningen på samtalen, fungerer den som et korrigerende spørsmål. Elev 1 svarer riktig, 8, og Elev 3 svarer feil, 3. Elev 3 sitt svar blir ignorert til fordel for det riktige svaret som kom først. Elev 1 tar initiativet og stiller spørsmålet om hvorfor de da har brukt 9 på sideflatene. Tur 11 er ikke et spørsmål i seg selv, men fungerer som en forespørsel om begrunnelse om hvorfor akkurat 9 har blitt brukt hvis det er 8 mulige vinnerrekker på en sideflate. I tur 12 stiller Elev 1 spørsmål til hvorfor akkurat 78 er et svarforslag, selv om vi kan anta at eleven snakker om 72, som står på tavlen. Tur 12 fungerer som et initiativ, siden det er et spørsmål. Tur 13 fungerer som en forespørsel for å få oppklaring i hvem som kom med svarforslaget. I tur 15 foreslår Eva en ny strategi, der elevene kan se på den fysiske modellen av kuben for å forklare de mulige tre på rad-linjene for hverandre, og elevene ender opp med å følge Evas forslag.

Når Eva først kommer inn i situasjonen lytter hun til elevenes forslag til svar, og jeg tolker det som at hun prøver å forstå elevenes tenkning. Hun stiller spørsmål for å få oppklaring i svarene, og finne ut hva som ligger bak. Eva legger merke til at det virker som at gruppen har mistet tråden litt og forsøker å styre dem inn mot å finne unike tre på rad-rekker igjen ved å gjenta spørsmålet fra oppgaveintroduksjonen om hvor mange muligheter det er for tre på rad i flaten fra introduksjonen (utdrag 1). Eva foreslår også at elevene bruker den fysiske modellen som en modell for å forklare tre på rad-rekkene.

		Eva står sentralt i klasserommet og lytter til elever som diskuterer oppgaven. En elevgruppe tar kontakt fra tavlen sin. Modellen de har tegnet på tavlen er lik en rubikskube.	
1	Elev 1:	Jeg svarer 68.	Initiativ
2	Eva:	Svarer 68? Jeg er faktisk ikke helt sikker selv, altså. Forklar hva dere har tenkt.	Etterspørre Begrunnelse
3	Elev 1:	Okei, se, det er 6 sider, ikke sant, i kuben, og da må det være. Og så er det 8 løsninger på en side. Så da har du 8 ganger 6 som er 48. Og så er det 3 sånne vegger inni også, med 8 (refererer til de midterste utsnittene ortogonalt på en sideflate), så da tar du 11 ganger seks som er 66 (feil i matematikken, det er 8 ganger 9 som vil stemme med elevens forklaring), og så er det to sånne skrå inni (3-dimensjonale diagonaler)	Forklaring
4	Eva:	Mhm, kan det være at dere har telt noen 2 ganger?	Korrigerende spørsmål
5	Elev 1:	Nei, fordi du kan telle på andre siden.	Forklaring

6	Elev 2:	Vet du svaret?	Initiativ
7	Eva:	På innsiden… (Eva blir avbrutt)	
8	Elev 1:	Se, da det er innsiden (elevgruppens tegning har overflater som en rubikskube).	Forklaring
9	Eva:	Ja, men det er jo på en måte samme kulen. Hvis det er den samme kula, så er det den samme tre på raden.	Peke ut Bemerke
10	Elev 1:	What?	Initiativ
11	Elev 2:	Er det 54, Eva?	Uforklart svar
12	Eva:	Jeg vet ikke, jeg vil høre argumentasjonen.	Legge til side
13	Elev 2:	Du vet ikke hva svaret er en gang?	Initiativ
14	Eva:	Nei, det er ikke så viktig med svaret alltid. Jeg er ikke enig med argumentasjonen, kom med et bedre tall.	Åpent fremdriftsinitiativ
		Eva går bort fra gruppen.	

Utdrag 5: Case A 1. undervisningstime, 14. minutt til 15. minutt

I utdrag 4 ser vi at Elev 1 kommer med et uforklart svar, som trekker Eva inn for å vurdere elevens utsagn og ber om en begrunnelse for svaret. Elev 1 gir en fyldig forklaring på hvordan gruppen har telt mulige vinnerrekker i oppgaven. Eva oppdager at elevene har telt flere av rekkene i modellen flere ganger, og velger å stille et korrigerende spørsmål for å forsøke å ordne opp i elevenes misoppfatning. Videre i tur 5 og 8 gir Elev 1 en forklaring som viser for oss hvordan misoppfatningen har oppstått. Siden modellen de har tegnet opp er en 3x3x3 kube, har hver av de mindre kubene i figuren mer enn én sideflate. Når elevene teller mulige kombinasjoner på flatene i en kube sammensatt av kuber i stedet for en kube sammensatt av kuler, får de mange flere mulige kombinasjonen enn oppgavens opprinnelige rammer gir. Tur 7 er ikke gitt en kode, siden turen ble avbrutt, og dermed kommer det ikke frem hva læreren tenkte å si, og turen får ingen funksjon i diskusjonen. Elev 2 stiller et spørsmål i tur 7 som er kodet som et initiativ, men utsagnet blir ignorert i diskusjonen som foregår mellom Eva og Elev 1. Eva bemerker i tur 9 at figuren oppgaven er basert på er bygget opp av kuler, som ikke inneholder sider, for å rette elevenes fokus mot deres egen misoppfatning rundt oppgaven. Tur 10 er kodet som et initiativ i rammeverket, siden det er et spørsmål og et uttrykk fra eleven om at den ønsker en mer forståelig forklaring. I tur 11 kommer Elev 2 med et uforklart svar som ikke begrunnes i utdraget. I tur 12 sier Eva at hun selv ikke har kommet frem til ett korrekt svar på oppgaven, og i tur 14 sier hun at svaret i seg selv ikke er så viktig.

Eva viser for elevene i utdrag 4 at det matematiske argumentet som ligger bak svaret er viktigere enn svaret i seg selv. Samtidig observerer jeg også at elevene i både utdrag 3 og 4 har misoppfattet hva en unik rekke vil tilsi i $3 \cdot 3 \cdot 3$-kuben. På grunn av misoppfatningen rundt hva som konstituerer en unik rekke i oppgavens kontekst, følger det at argumentene eller forklaringene elevene kommer med ikke er gjeldende for oppgaven. Eva benytter korrigerende spørsmål for å forsøke å korrigere misoppfatningen i utdrag 3 og 4.

Utdrag 4 eksemplifiserer også periferispørsmål gjennom initiativet i tur 1. Elev 1 forteller læreren at de har et svar, og jeg tolker et som at eleven ønsker at læreren skal svare på om det er riktig eller ikke. I tur 11 stiller Elev 2 et slutt å tenke-spørsmål, ved å be læreren bekrefte eller avkrefte svaret.

		Eva beveger seg fra sentrum i klasserommet til en gruppe i et av hjørnene. Hun stiller seg opp og lytter til gruppen.	
1	Elev 1:	Det er en av de der, det er en av de. Fordi nå bare tok vi på litt.	Uforklart svar
2	Elev 2:	(Mens de skriver på tavlen) Nei, vente, vente. La meg tenke litt.	Initiativ
3	Elev 1:	Men hvordan fikk du 54?	Initiativ
4	Eva:	Oi, (uhørlig, 1 s.)	
5	Elev 2:	La meg tenke, la meg tenke (Mens de skriver på tavlen)	Initiativ
6	Elev 3:	Jeg gjetter fortsatt 49.	Uforklart svar
7	Eva:	Okei, du står på 49? (Til Elev 3)	Peke ut Gjenta
		(Uhørlig diskusjon mellom elevene, men oppsummeres i neste tur. 5 s.)	
8	Eva:	(Mens hun skriver på nabotavlen) La meg se nå, Elev 3 sier 49. Og så har dere 72. Og så har dere..	Peke ut Gjenta
9	Elev 1:	54 og 56.	Lærerledet respons
10	Eva:	(Mens hun skriver opp på nabotavlen) 54 og 56.	Peke ut Gjenta
		Eva beveger seg videre til andre grupper, og samler inn gruppenes svar.	

Utdrag 6: Case A, 1. undervisningstime, 28. minutt til 29. minutt

I utdrag 5 ser vi at Eva beveger seg bort til en gruppe mot slutten av gruppearbeidsfasen. I 1. tur får vi et utsagn fra Elev 1 uten kontekst til hva Elev 1 snakker om. Derfor kodes utsagnet som et uforklart svar. Elev 2 prøver i tur 2 å bremse ned Elev 1 sin tankerekke for å få de mulige svarene de har kommet frem til opp på tavlen. Det kodes som et initiativ, siden det ikke er en form for svar eller forklaring, eller en lærerledet respons. I tur 3 spør Elev 1 Elev 2 om hvordan de kom fram til et av svaralternativene som ble skrevet opp. Tur 4 kodes ikke, siden innholdet i turen ikke kan identifiseres i transkripsjonen. I tur 5 fortsetter Elev 2 med å bremse ned diskusjonen, slik at den får skrevet opp alternativene på tavlen gjennom et initiativ. Elev 3 gjetter i tur 6 på 49 som antall mulige tre på rad-rekker i oppgaven. Eva gjentar det Elev 3 sier i tur 7. I tur 8 starter Eva en oppsamling av gruppens svar. Elev 1 supplerer med to svar som Eva ikke har notert opp før eleven responderer. I tur 10 gjentar Eva

Elev 1 sin respons, og noterer det på en tom nabotavle. I etterkant av utdraget fortsetter Eva å hente inn forskjellige responser fra gruppene, og så samler hun gruppene til konsolidering av 1. undervisningstime.

I utdrag 5 lytter Eva først til elevenes diskusjon, og responderer først i tur 7 på Elev 3 sitt svarforslag. Fra tur 8 samler hun gruppens svar, som medfører at Eva og gruppen har svarene ferskt i minne før konsolideringen som begynner rett i etterkant. Utdraget inneholder ikke hint eller utvidelser, men belyser hvordan Eva klargjør gruppene for konsolideringsfasen som følger etter. Denne utvelgingsprosessen har likhetstrekk med observasjon og utvelging fra Stein et al. (2008) sitt rammeverk for å arrangere klasseromsdiskusjoner.

I datamaterialet fra 1. undervisningstime er det ingen av elevgruppene som får utvidelsen av oppgaven Eva hadde klargjort i forkant av undervisningstimen (3.3.4).

I utdrag 3 og 4 identifiserer jeg at utfører Eva undervisningsoppgave 10 og 11 i sammenheng. En elev gir et svar, som Eva raskt vurderer, og hun ber eleven om å begrunne svaret, så hun kan evaluere den matematiske forklaringen som ligger bak. Når Eva stiller spørsmål til elevene er det enten for å forstå hvordan eleven har tenkt og samle informasjon for å kunne identifisere misoppfatninger hos eleven, eller for å korrigere og belyse misoppfatninger som påvirker elevenes matematiske resonnement. Den andre spørsmålstypen Eva bruker i denne undervisningsfasen identifiserer jeg som undervisningsoppgave 14, fordi spørsmålene gir elevene et utgangspunkt for å se tilbake på fremgangsmåten sin, samtidig som det fungerer som et hint i Liljedahl sitt metodiske rammeverk (Liljedahl, 2021). I utdrag 3 responderer Eva på en elev sitt «hvorfor»-spørsmål (undervisningsoppgave 2), ved å sende spørsmålet rett tilbake for å la elevene selv finne ut hvorfor. Generelt i 1. undervisningstime tolker jeg det som at Eva utfører undervisningsoppgave 4 og 15, gjennom at hun er klar over hva som er involvert i å representere oppgaven gjennom en kube basert på kuler i stedet for en rubikskube (undervisningsoppgave 4), og at hun har valgt ut representasjonen som hensiktsmessig for oppgaven (undervisningsoppgave 15). Pågående gjennom 1. undervisningstime evaluerer Eva elevenes påstander og forklaringer (undervisningsoppgave 10 og 11), og hun bruker spørsmål for å grave frem elevenes fremgangsmåte, og for å hjelpe elevene med å se feil i fremgangsmåten deres (undervisningsoppgave 14). Eva responderer også på elevenes «hvorfor»-spørsmål (undervisningsoppgave 2) med å sende spørsmålet i retur til elevene, for at elevene selv skal tenke seg fram til svaret, og forstå hvorfor deres tidligere fremgangsmåte ikke fungerer.

4.2.2 2. undervisningstime

Videre skal vi se på hint og utvidelser fra 2. undervisningstime.

		Eva går rundt i klasserommet og lytter til hva gruppene sier.	
1	Elev 1:	Bare skriv opp alle.	Initiativ
2	Eva:	God ide, god start.	Peke ut Bemerke
3	Elev 2:	Jeg tror det er 10, jeg.	Uforklart svar
4	Elev 1:	Nei.	Uforklart svar
5	Elev 2:	Jo, fordi det vi skal finne ut er hvorfor 9 er mer... (Slutter å snakke)	Delvis svar
6	Eva:	Ja, klarer du å bevise, eller motbevise, at det er lettere å få 9 som sum enn 10.	Åpent fremdriftsinitiativ
7	Elev 3:	Terningene, at det er mer enn 10, liksom?	Initiativ
8	Elev 2:	Jeg tror det er 10, jeg.	Uforklart svar
9	Elev 1:	For hva da, 9 + 1, 8 + 2, 7 +3...	Delvis svar
10	Elev 2:	Du skal trille to terninger, 6 + 4, 5 + 5, 7 + 3.	Delvis svar
11	Elev 1:	7 er ikke på terninger.	Forklaring
12	Eva:	Det er helt vanlige sånne 1 til 6 terning.	Peke ut Bemerke
13	Elev 3:	Kan vi [skrive sånn 4 + 6, eller har vi allerede...]?	Initiativ
14	Elev 2:	[6 og 4, 5 og, 5 og 4,] og 5 og 5.	Delvis svar
15	Elev 1:	Ja, men vi er ikke på 9.	Initiativ
16	Elev 3:	Hva med 9?	Initiativ
17	Elev 1:	5 og 4.	Delvis svar
		Eva beveger seg bort fra gruppen etter å ha hørt på de siste utsagnene.	

Utdrag 7: Case A, 2. undervisningstime, 11. minutt til 12. minutt

I utdrag 6 ser vi at Elev 1 sitt forslag til strategi i tur 1 tiltrekker seg Evas oppmerksomhet, og hun bemerker i tur 2 at forslaget er en god idé. I tur 3 og 4 ser vi at Elev 2 og Elev 1 kommer med to uforklarte svar. Elev 2 starter en forklaring på svaret sitt, men fullfører ikke forklaringen. I tur 6 trekker Eva frem oppgaven igjen, og turen kodes som et åpent fremdriftsinitiativ, siden elevene står fritt til å bevise påstanden som de selv ønsker. Elev 3 stiller i tur 7 et oppklarende spørsmål til oppgaven, og Elev 2 gjentar sitt uforklarte svar fra tur 3. I tur 9 ramser Elev 1 opp summer som til sammen blir 10, for at disse skal skrives opp på tavlen deres. Elev 2 forsøker å korrigere Elev 1 gjennom å bemerke at det er ordinære 6-sidede terninger som trilles, men ender opp med å trekke med 7 som et ledd i en av summene sine. Elev 1 er da kjapp med å bemerke at 7 ikke eksisterer på en ordinær terning. Eva peker i tur 12 ut at det er ordinære 6-sidede terninger som brukes. I tur 13 initierer Elev 3 videre arbeid ved å spørre om 4 + 6 også kan skrives opp, og vi kan i kontekst av at 6 + 4 allerede er skrevet opp, tolke dette som at eleven lurer på om rekkefølgen på utfallene har noe å si. Videre i utdrag 6 ser vi at Eva ikke lenger tar turer i diskusjonen, men observerer at gruppen ikke lenger stagnerer i fremdriften, og dermed beveger hun seg bort fra gruppen.

I utdrag 6 virker det som at Eva blir dratt inn i gruppens diskusjon fordi hun står rett ved gruppen. Eva reagerer på Elev 1 sitt utsagn i tur 1 som om det er et periferispørsmål (Liljedahl, 2021), men selv om Elev 1 sitt utsagn er kodet som et initiativ, er det ikke et spørsmål. Hun initierer derfor kontakten med å bemerke at Elev 1 sitt strategiforslag er en god idé, men ut fra gruppens diskusjon virker det som at de hadde kommet frem til dette uten Evas innspill. Hun fortsetter å sette seg inn i diskusjonen med å plukke opp Elev 2 sin tankerekke i tur 3 og 5. Elevene fortsetter diskusjonen på egenhånd, og Evas bemerkning om at terningene er 1 til 6, har elevene kommet frem til selv. I siste del av utdrag 6 står Eva og lytter til gruppens diskusjon, og hun velger å trekke seg ut av diskusjonen. Dette kan tolkes som at Eva oppfatter at elevene arbeider i flytsonen, og ikke trenger støtte fra læreren for å fortsette arbeidet (Liljedahl, 2021). Samtidig virker det som at Evas bidrag i diskusjonen kun er fordi hun står ved gruppen, og bidragene har tilsynelatende ingen innvirkning på elevenes diskusjon. Ingen av Evas turer påvirker de kognitive kravene i oppgaven i utdrag 6.

		Eva går bort til en gruppe som prøver å få oppmerksomheten hennes.	
1	Elev 1:	Teorien (påstanden) er feil, siden det er like mange 9-ere, eller like mange som kan bli 9 som kan bli 10.	Forklaring
2	Eva:	Men, her har du jo skrevet det samme to ganger (peker på to tilfeller av 5 + 5).	Etterspørre Begrunnelse
3	Elev 1:	Ja, men det er jo fordi du kan få 5, og så kan du få 5. Og så kan du få 5 fra den andre, og fem fra den (første).	Forklaring
4	Eva:	Ja, men det tenker jo jeg er det samme.	Peke ut Bemerke
5	Elev 2:	Ja, så det står (uhørlig, >1s) for 9, da.	Delvis svar
6	Eva:	Nei, fordi da er det, altså, si du har en rød og en grønn terning, da.	Demonstrasjon
7	Elev 2:	Okei.	Lærerledet respons
8	Eva:	Sant, så på her er det den grønne terningen som har 6 og den røde som har 3 (peker på 6 + 3), og her er det den grønne som har 3 og den røde som har 6 (peker på 3 + 6). Det er to forskjellige ting. Men her (peker på 5 + 5)…	Etterspørre Benytt på liknende problem
9	Elev 1:	Hvorfor det?	Initiativ
10	Elev 2:	Fordi det er samme på rød og grønn.	Forklaring
11	Eva:	Ja, sant, det blir på en måte det samme uansett.	Peke ut Gjenta
12	Elev 1:	Ja, så da er det den som er rett, eller at 9…	Delvis svar
13	Elev 2:	9 er jo mer…	Delvis svar

14	Elev 1:	Så den teorien (påstanden) er rett, da.	Delvis svar
15	Eva:	Ja, mhm. (5s) Men, hva tenker dere, er det noen andre summer som har større sannsynlighet? Si at dere skulle hatt et veddemål om… hvilken sum tror du kommer nå hvis jeg triller disse to terningene? Hva ville du gått for da?	Åpent fremdriftsinitiativ
16	Elev 1:	Jeg ville gått for 7, jeg, da.	Uforklart svar
17	Eva:	7? Hvorfor det?	Etterspørre Begrunnelse
18	Elev 1:	For det er jo 6 1, 5 2, 4 3, 3 4…	Delvis svar
19	Eva:	Ja? Prøv å telle opp hvor mange det er da.	Lukket fremdriftshandling
		Eva beveger seg bort fra gruppen.	

Utdrag 8: Case A, 2. undervisningstime, 13. minutt til 15. minutt

I utdrag 7 ser vi at gruppen initierer kontakt med Eva gjennom tur 1, ved å påstå at oppgavens påstand er feil, og påstanden forklares med at gruppen har funnet like mange alternativer som kan bli 9 som 10. Eva påpeker at de har skrevet opp 5 + 5 to ganger, og implisitt i utsagnet er en forespørsel om begrunnelse av notasjonen. Elev 1 forklarer det med at dersom du får 5 på den ene terningen først, og 5 på den andre etter, så kan du få 5 på den andre terningen først, og så 5 på den første terningen etter. I tur 5 ser vi et delvis svar fra Elev 2, der deler av turen ikke er transkribert, men det virker som at det delvise svaret uttrykker en misoppfatning av hva Eva mener med at 5 + 5 er det samme. Eva fanger opp misoppfatningen som ligger til grunn for den feilaktige forklaringen, og demonstrerer gjennom tur 6 og 8 hvorfor det er to speilede utfall når terningene ikke ender på samme tall. Tur 8 blir likevel kodet som en forespørsel om å benytte tankerekken på et liknende problem, siden det påfølgende initiativet og forklaringen i tur 9 og 10 responderer på den siste delen av tur 8. Eva gjentar i tur 11 Elev 2 sin forklaring fra tur 10 for å understreke hva som medfører at det kun er ett utfall som resulterer i to like tall på terningene. Tur 12 til 14 er en forklaring som veksler mellom Elev 1 og Elev 2 i delvise svar, og de ender opp med en fullstendig forklaring til sammen. I tur 15 kommer Eva med en utvidelse av oppgaven i et åpent fremdriftsinitiativ som gruppen skal utforske. Elev 2 gir umiddelbart den korrekte løsningen, og Eva ber om en begrunnelse i tur 17. I tur 18 starter Elev 2 en forklaring, som blir et delvis svar, siden de ikke fullfører forklaringen. I respons ber Eva gruppen om å skrive ned løsningsforslaget sitt, og så beveger hun seg videre i klasserommet.

Utdrag 7 gir oss den første utvidelsen i datamaterialet, og vi ser umiddelbart i tur 16 at oppgaven ikke øker vanskelighetsgraden nok for gruppen, siden det korrekte svaret kommer umiddelbart. Når Eva ber dem om å skrive ned svaret sitt, utfordrer det ikke gruppens evner, og oppgaven er ikke lenger et problem for gruppen.

Utvidelsen kommer når elevene har løst det forrige problemet, og denne utvidelsen var ikke planlagt på forhånd (3.3.4). I utdrag 7, tur 15 ber Eva gruppen om å finne ut hvilken sum det er mest sannsynlig å få når to terninger trilles. Elevene får i utdrag 7 hint etter at Eva etterspør en begrunnelse for misoppfatningen hun ser rundt å skrive opp 5 + 5 to ganger i summeringen for å få 10. Eva påpeker at hun mener at utfallet blir det samme, og hun demonstrerer videre hvorfor ved å foreslå at elevene tenker på terningene som en rød og en grønn terning for å skille dem fra hverandre i utfallsmengden, og eksemplifiserer hvordan to utfall med ulike utfall på den røde og grønne terningen er forskjellige, og så legger hun opp til at elevene skal forstå at det kun er ett utfall der begge terningene ender opp på 5 for å få summen 10.

		Eva deltar i diskusjonen i en gruppe.	
1	Elev 1:	Så det er mer sannsynlig å få 9 da, for da er det 4 + 5 og 5 + 4 og 6 + 3 og…	Forklaring
2	Eva:	Ja.	Lukket fremdriftshandling
3	Elev 2:	Betyr det større sannsynlighet for 9?	Initiativ
4	Eva:	Det var størst sannsynlighet.	Lukket fremdriftshandling
5	Elev 3:	Det var det jeg sa!	Initiativ
6	Eva:	Ja, så bra. Og da er neste spørsmålet hvor stor er faktisk sannsynligheten, som brøk eller prosent? Gjerne brøk.	Åpent fremdriftsinitiativ
7	Elev 1:	Vi har 12, det er 4 av 12…	Delvis svar
8	Eva:	Er det 12 alternativer? 12 ulike ting du kan få når du triller to terninger? 1 og 1, 1 og 2…	Korrigerende spørsmål
9	Elev 1:	Å ja, å, det er $6 \cdot 5 \cdot 4$… Det er sånn 6 utropstegn.	Forklaring
		Eva blir kontaktet av en annen gruppe, og går over til dem. Over det neste minuttet skriver gruppen opp 36 på tavlen sin.	

Utdrag 9: Case A, 2. undervisningstime, 17. minutt

I utdrag 8 følger vi Eva i en pågående diskusjon. I tur 1 forklarer Elev 1 løsningen vi kjenner igjen fra utdrag 7. Eva fortsetter med lukkede fremdriftshandlinger mens gruppen oppfatter at de har funnet fram til løsningen frem til tur 5. I tur 6 ser vi en annen utvidelse av oppgaven enn i utdrag 7. Eva ber gruppen finne sannsynligheten for å få 9 og 10 som sum når to terninger trilles, og å representere sannsynligheten som brøk. Elev 1 tar feil i antall mulige utfall, og Eva responderer med et korrigerende spørsmål for å endre gruppens retning i problemløsingen. Elev 1 fortsetter med en forklaring som ikke stemmer, men Eva forlater gruppen til fordel for en annen. Av datamaterialet framkommer det at gruppen finner frem til antall mulige utfall i løpet av det neste minuttet.

For gruppen i utdrag 8 virker utvidelsen basert på mer krevende enn utvidelsen som gruppen i utdrag 7 får. Til forskjell fra i utdrag 7, går Eva i utdrag 8 bort fra gruppen før de har kommet frem til riktig svar på utvidelsen. Utvidelsen i utdrag 7 stiller lavere kognitive krav til elevene, sammenlignet med de relativt høyere kognitive kravene som stilles i utdrag 8, gjennom at elevene må finne ut hvor mange utfall det er mulig å få når to terninger trilles, som krever en ny fremgangsmåte de ikke blir gitt. Igjen får gruppen en utvidelse når de har løst den opprinnelige oppgaven (4.1.2). Utvidelsen i utdrag 8 er utvidelsen Eva hadde planlagt for oppgaven på forhånd (3.3.4).

I utdrag 8 gir Eva et hint i tur 8 gjennom et korrigerende spørsmål. Jeg tolker Elev 1 sitt utsagn i tur 7 som at eleven forsøker å bruke mulige summer når to terninger trilles som antall mulige utfall. Det korrigerende spørsmålet belyser denne detaljen i Elev 1 sitt forslag, og Elev 1 korrigerer seg selv og sier at det må være 6! mulige utfall, som for øvrig ikke stemmer. Eva beveger seg bort fra gruppen når de er i gang, etter å ha endret gruppens svarretning.

I tur 3 og 4 stiller Elev 2 et slutt å tenke-spørsmål, og Eva gir et konkret ja/nei-svar på spørsmålet. Dette bryter med det undervisningsmetodiske rammeverket (Liljedahl, 2021).

I kapittel 4.2 ser vi at gruppene får hint når Eva registrerer at elevenes arbeid ikke går mot en korrekt løsning på oppgaven de arbeider med. I 1. undervisningstime kommer hintene etter at Eva lytter til en gruppes argumentasjon for svaret, mens i 2. undervisningstime kommer hintene når Eva oppdager misoppfatninger i elevenes fremgangsmåte. Utvidelser av oppgavene kommer først når gruppene er ferdige med den introduserte oppgaven (4.1.1; 4.1.2). I 1. undervisningstime ble det ikke gitt utvidelser i det hele tatt, mens i 2. undervisningstime ble det gitt to forskjellige utvidelser, der en av utvidelsene var planlagt på forhånd.

I 2. undervisningstime identifiserer jeg undervisningsoppgave 2, 3, 4, 10, 11, 14 og 15. Eva responderer i utdrag 7 på en elevs «hvorfor»-spørsmål ved å gjenta en medelevs forklaring (undervisningsoppgave 2). Undervisningsoppgave 3, 4 og 15 dukker opp i utdrag 7 når Eva velger å representere terningene som forskjellige farger, når Eva, med hjelp fra gruppen, demonstrerer hvordan det kun er ett utfall der begge terningene lander på 5. Når Eva deltar i gruppenes diskusjoner utfører hun undervisningsoppgave 10 og 11, ofte i sammenheng med hverandre når hun evaluerer elevenes påstander og forklaringer og etterspør elevenes begrunnelse for en påstand. Når Eva introduserer en ny utvidelse for en elevgruppe, stiller hun fruktbare matematiske spørsmål, som setter elevene i gang med oppgaveløsing igjen.

4.3 Konsolidering

I den tredje undervisningsfasen, konsolidering, står Eva ved en whiteboardtavle til venstre for kateteret i begge undervisningstimene.

4.3.1 1. undervisningstime

I 1. undervisningstime foregikk konsolideringen slik:

		Elevene samles rundt en av tavlene til venstre for klasserommets front. Ca 50/50 splitt mellom stående og sittende elever.	
1	Eva:	Okei, jeg har skrevet opp noen svar her som noen kom fram til. 49, 72, 54, 56, 51. Var det noen som hadde noen flere?	Åpent fremdriftsinitiativ
2	Elevene:	41, 31, 48, 44, 65, 52	Uforklart svar
3	Eva:	Ja, 44. Men det vi i alle fall kan være enige om var at det var ikke dødslett å komme frem til en soleklar plan. På bare en etasje, bare en flate, så var det jo ganske lett, sant? Det klarte vi jo på 1 2 3. Og så la jeg jo på en måte frem et litt sånn nytt prinsipp her, som jeg faktisk er litt usikker på om at det egentlig er gjeldende.	Lukket fremdriftshandling
4	Elev:	(Uforståelig)	
5	Eva:	Neida, men vi forholder oss til det prinsippet, sant? For det jeg sa var at i og med at dette er sånne kuler (peker på 3d-modellen), så er det, så har jeg sagt at hvis vi har telt disse tre (peker på én rad kuler), så kan vi ikke snu den (modellen) slik (90 grader rundt vertikal akse), og telle de samme tre en gang til fra andre siden. Hadde dette vært en sånn rubikskube, så hadde den jo vært gul på ene siden og rød på andre siden. Da hadde det på en måte vært tre nye ruter. Men i og med at dette var disse kulene, så la jeg liksom ned det som prinsipp, da. Og det påvirker jo hvor mange det blir. Så, skal vi prøve å gjøre dette sammen, da?	Lukket fremdriftshandling
6	Elevene:	Mhm.	Lærerledet respons
7	Eva:	Og, jeg vet jo at når dere kommer med kjempegode forslag, så er det ikke sikkert at jeg klarer å forklare og vise det på en bedre måte, men nå må vi samarbeide her, sant? Så må dere si ifra om dere er enige, eller om jeg sier noe feil.	Lukket fremdriftshandling

		Eva teller seg gjennom oppgaven sammen med elevene. De 6 todimensjonale diagonalene inni figuren blir ikke telt, og 2 av de ortogonale linjene som går gjennom sentrum i modellen blir ikke telt. Summert sammen ender de på 41, som er 8 fra riktig svar.	
8	Eva:	Men det jeg ser da, er at dere er kjempegode på å være engasjerte, og ikke gi opp. Og mange av dere er gode på å forklare hva dere tenker. Og alle prøver i alle fall å forklare hva dere tenker. Noen kommentarer? (Ser på armbåndsuret sitt)	Åpent fremdriftsinitiativ
		Den matematiske konsolidasjonen avsluttes.	

Utdrag 10: Case A, 1. undervisningstime, 32. til 38. minutt

Elevene samles rundt en tavle til venstre for klasserommets designerte front, og det er omtrent 50 % av elevene som står, og 50 % som sitter. Eva åpner med å liste opp løsningsforslagene hun noterte ned i utdrag 5, og inviterer elevene til å komme med flere mulige løsninger. Elevene svarer med løsninger uten forklaringer. I tur 3 og 5 trekker Eva frem at oppgaven var vanskeligere enn elevene kanskje tenkte fra begynnelsen av, og at oppgaven implisitt inneholdt begrensningen på unike tre på rad-rekker som kunne trekkes, og hvordan denne begrensningen påvirket oppgaven. Tur 3, 5 og 7 er lukkede fremdriftshandlinger, der elevene enten ikke responderer, eller kun mumler bekreftende. Eva trekker også frem i tur 7 at hun ønsker at elevene skal hjelpe til, og komme med innvendinger i løpet av hennes gjennomgang av oppgaven, dersom de har noe å tilføye eller korrigere. Oppgaven gjennomgås steg for steg, men det noteres at 6 indre diagonale rekker og to indre ortogonale rekker ikke blir telt, som medfører at tellingen ender opp på 41 og ikke 49. I tur 8 avslutter Eva med å rose elevene for måten de arbeidet på i løpet av timen. Elevene holdt fokus, og de forklarte hvordan de tenkte til hverandre og henne når hun gikk rundt under problemløsingen.

Eva bygger konsolideringen av oppgaven opp fra det laveste nivået gjennom å starte prosessen med å få elevgruppenes svaralternativer opp på tavlen. På denne måten samler hun elevenes fokus ved å sette en lav terskel for elevenes respons. Videre går hun sakte, men sikkert gjennom problemet elevene arbeidet med. Konsolideringen avdekker ikke den konkrete løsningen på problemet, men vektlegger prosessen for å finne unike rekker. Siden Eva teller seg gjennom de unike rekkene som avdekkes, en etter en, kan vi trygt si at konsolideringen starter fra bunnen av. Konsolideringen bruker også mest tid på de utvendige rekkene, som er de letteste å telle, og dermed det laveste kognitive nivået for oppgaven. Oppgaven i seg selv ligger på et høyt kognitivt nivå.

4.3.2 2. undervisningstime

I den undervisningstime A2 foregikk konsolideringen på denne måten:

		Elevene samles rundt en av tavlene til venstre for klasserommets front. Samtlige elever i kameraets vinkel sitter.	
1	Eva:	Okei, den første oppgaven, den løste dere temmelig kjapt, veldig bra. Det var jo å finne ut av hvor mange kombinasjoner som gir 9 som sum, og gir 10 som sum. Så hvis vi tar 9 som sum først, da, hvilke kombinasjoner var det som gav 9 som sum?	Lukket fremdriftshandling
2	Elev:	5 og 4.	Lærerledet respons
3	Eva:	5 og 4, 4 og 5 (skriver opp begge versjonene på tavlen)	Lukket fremdriftshandling
4	Elev:	3 og 6.	Lærerledet respons
		Eva skriver opp 3 + 6 på tavlen. Hun peker på en ny elev.	
5	Elev:	6 og 3.	Lærerledet respons
		Eva skriver opp 6 + 3 på tavlen.	
6	Eva:	Okei, det var de fire. Ingen klager på den? Og så hadde vi 10 som sum. Hvilke alternativer hadde vi da?	Lukket fremdriftshandling
7	Elev:	5 + 5.	Lærerledet respons
8	Eva:	5 + 5.	Lukket fremdriftshandling
9	Elev:	4 + 6.	Lærerledet respons
10	Eva:	4 + 6.	Lukket fremdriftshandling
11	Elev:	6 + 4.	Lærerledet respons
12	Eva:	6 + 4. Noe mer?	Lukket fremdriftshandling
		En kort ufaglig distraksjon foregår (10s)	
13	Eva:	Greien her er at, nå er det sånn at her har vi 5 og 4, og så har vi 4 og 5. Og da kan en jo tenke, er det to ulike ting? Det er jo de samme tallene som blir regnet sammen, på en måte. Men si at du ser for deg at du har to, du får to unger. Så får du først en gutt, og så ei jente. Eller noen andre, de har fått først ei jente, og så en gutt. Begge to har jo en gutt og ei jente, men det er jo forskjell, på en måte. Skjønner dere? Så, når vi snakker sannsynlighet og sånn, så ofte er det forskjell på hva som kommer først og hva som kommer sist. Eller i dette tilfellet at vi har to ulike terninger. Si at vi har en grønn og en rød, da. Så er det forskjell om det er den grønne som er 5, eller om det er den røde som er 5. Men, det var jo noen da, som kunne tenkt seg å ha 5 + 5 også som to alternativer. Men si at vi har en rød og en grønn terning, sant? Så hvis du først får grønn (peker på en 5er) 5er, og så får du grønn røder (Mener nok rød 5er). Uansett om du triller i motsatt rekkefølge, at du får en rød 5er og så en grønn 5er, det blir på en måte det samme, fordi vi har ikke sagt noe om at rekkefølgen skulle ha noe å si. Så det blir på en måte definert i dette tilfellet	Demonstrasjon

		som, som det samme alternativet, da, uansett. Så derfor er det 9 som er størst sannsynlighet.	
14	Eva:	Og det andre dere fikk beskjed om var, hva er sannsynligheten for å få en 9er. Og da måtte dere jo finne ut av hvor mange ulike alternativer fantes, for dere fant jo ut at det var 4 alternativer som hadde 9 som sum. Men hvor mange alternativer var det til sammen?	Lukket fremdriftshandling
15	Elev:	36.	Lærerledet respons
16	Eva:	Det var 36. Det tror jeg alle fant ut. Men, det er ingen av dere gjorde, som gjerne kunne gjort det lettere å se for seg, det var jo ikke sånn at dere hadde så himla mye behov, heller. Men si det at du deler opp her, skal vi se… (Tegner opp en 6 * 6 tabell)	Demonstrasjon
		Eva demonstrerer hvordan elevene kunne brukt tabellen for å enkelt identifisere totalt antall utfall og antall spesifikke utfall.	
17	Eva:	Det er alltid lurt hvis du har muligheten til å tegne og visualisere ting, å gjøre det mest mulig. Sant, noen av dere skriver og tegner mye på tavlene, mens andre står mye og bare snakker, mye bra i det også, men jeg tenker at det er ingen som har noe å tape på å få tegnet opp flere ting, på en måte. Det gjelder jo når dere holder på med oppgaver selv, eller med en prøve eller sånn, også. Få visualisert det på en måte.	Forslag om å bruke en annen strategi
		Timen avsluttes.	

Utdrag 11: Case A, 2. undervisningstime, 34. minutt til 40. minutt

Samtlige av elevene forble sittende under hele konsolideringsprosessen i 2. undervisningstime, selv om den foregikk på tavlen til venstre for klasserommets front. I tur 1 ser vi at Eva initierer en serie lukkede fremdriftshandlinger og lærerledede responser for å gjennomgå oppgaven som den ble presentert i kapittel 4.1.1. Denne serien fortsetter frem til tur 13, der Eva demonstrerer hvorfor utfallet 5 + 5 kun dukker opp en gang i listen. I tur 14 begynner Eva å gå gjennom utvidelsen som ble gitt til alle gruppene der poenget er å identifisere gunstige delt på mulige utfall. Elevene svarer som de blir ledet, men så kommer en demonstrasjon av en ny strategi som ingen av gruppene benyttet, nemlig å lage en 6x6 tabell der terningenes utfall kan summeres i hver sin celle i tur 16. Eva demonstrerer så hvordan tabellen kan brukes. I tur 17 kommer et generalisert tips fra Eva til elevene om å implementere en ny strategi ved å tegne og visualisere tenkningen de gjør, siden de ikke vil tape noe på det uansett.

Eva bygger, som i utdrag 9, konsolideringen opp fra bunnen av. Eva bruker mest tid på å gå gjennom den første delen av oppgaven som alle ble ferdige med. Deretter bruker hun mindre tid på oppgavens utvidelse, før hun går videre på et generelt tips for matematisk problemløsing, nemlig å visualisere problemet. Konsolideringen gjennomføres på samme sted som i utdrag 9, til venstre for klasserommets front.

Over utdrag 9 og 10 er det bemerkelsesverdig hvordan Eva dominerer taletiden i konsolideringsfasen. Eva benytter kun fremdriftshandlinger i konsolideringsfasen, ekskludert tur 17 i utdrag 10, og det er overveldende mange lukkede fremdriftshandlinger som topper listen. Elevene forholder seg også passive under konsolideringen, noe som ikke stemmer overens med tenkende klasseromsmetodikkens teoretiske grunnlag for å få elevene til å tenke underveis i konsolideringsprosessen. Dette illustrerer at konsolideringsfasen er krevende for læreren (Stein et al., 2008).

I konsolideringen av 1. og 2. undervisningstime identifiserer jeg undervisningsoppgave 1, 3, 4, 5, 11, 12, 13 og 15. Eva, sammen med elevene, presenterer i konsolideringen de matematiske ideene og fremgangsmåtene elevene har utviklet og brukt, og Eva noterer dem ned ved hjelp av matematisk notasjon (undervisningsoppgave 1, 11 og 13). Hun tar også opp igjen eksempelet der terningene har forskjellig farge fra utdrag 7, og bruker dette som et eksempel for å vise hvorfor det kun er ett utfall som gir 5 + 5 (undervisningsoppgave 3). I utdrag 9 trekker Eva frem definisjonen for en unik tre på rad-rekke hun valgte (undervisningsoppgave 12), og hvordan denne definisjonen påvirker oppgaven (undervisningsoppgave 4, 5 og 15). I utdrag 10 gjennomgår Eva en alternativ løsningsmetode som ingen av elevene benyttet (figur 8), for å illustrere hvordan elevene kan gjøre arbeidet med slike oppgaver lettere for seg selv (undervisningsoppgave 1, 5 og 11).

4.4 Lærerens innblikk i case A

I intervjuet kommer det fram i Evas vurdering av egne oppgavepresentasjoner etter at hun selv har sett introduksjonen av oppgavene i utdrag 1 og 2:

Intervjuer:	Hva gikk bra, og hva kunne gått bedre? Er det noe du har tenkt over?
Eva:	Jeg tenker jo at på den nummer 2 (Utdrag 2), så. Det er jo en superenkel forklaring, på en måte, altså jeg har jo ingen konkreter og

ingen forklaring på en måte. Så jeg kunne jo hatt med meg noen terninger for å vise. Samtidig er jo litt av poenget at en ikke skal si for mye heller, da. For på slutten så tegnet jeg jo opp et sånt skjema som en forklaring, og det kunne jeg jo gitt dem fra begynnelsen av. Men det var jo litt bevisst, at de ikke skulle være låst av en idé fra meg, på en måte. At de skulle prøve å sette det opp på egenhånd.

Utdrag 12: Intervju 2.1

Eva retter kritikk mot sin egen gjennomgang av oppgaven i utdrag 2, siden hun ikke benytter konkreter eller knytter oppgaven til en historie. Hun trekker frem at hun kunne benyttet to terninger som konkreter for å demonstrere hvordan terningene skulle summeres. Konkretene kunne gjort oppgaven tydeligere for elevene. I etterkant av utdrag 2 setter elevene i gang med bevisproblemet, og ut fra diskusjonene de har gjennom utdrag 6, 7 og 8, ser vi at elevene, med litt hjelp fra Eva, kommer seg gjennom den presenterte oppgaven med få problemer. Skjemaet, eller utfallstabellen Eva omtaler i utdrag 11 er presentert i kapittel 3.3.4. Dersom tabellen hadde blitt presentert for elevene i forkant av oppgavearbeidet, ville det redusert de kognitive kravene for oppgaven. Gjennom å låse hvilket verktøy elevene skulle brukt, ville oppgaven havnet på det lavere kognitive kravet for å gjennomføre en prosedyre. Likevel medfører oppgavens klausul om å bevise eller motbevise påstanden at elevene må gjøre matematikk (Smith og Stein, 1998).

I utdrag 11 reflekterer Eva rundt hvordan hun kunne presentert oppgaven i 2. undervisningstime, og hvordan hun kunne brukt to farger av terninger, og konkreter som representasjonsform for oppgaven. Her identifiserer jeg det som at Eva reflekterer rundt undervisningsoppgave 1, 4 og 15. Hun trekker frem hvordan konkreter og en gitt arbeidsmetode kunne endret elevenes fremgangsmåte i oppgaveløsingen, men også hvordan det å gi elevene en fremgangsmåte kunne fjernet det matematiske problemet i oppgaven, og gjort problemet trivielt å løse. Når elevene selv måtte velge hvordan de skulle gå fram, krevde det at de utforsket og forstod problemet i oppgaven, slik at de kunne designe en hensiktsmessig fremgangsmåte selv.

Videre kommenterer Eva på hvordan elevene starter tenkingen med en gang etter at presentasjonen av oppgaven i utdrag 2:

Eva: […] Når jeg da begynner å dele inn i grupper, så er det jo flere av dem som allerede står, liksom, og teller og tenker får begynt å løse oppgaven, på en måte. Og jeg tenker at det er jo et godt tegn, i alle fall.

Utdrag 13: Intervju 2.1

Her kan vi trekke koblingen til den tillærte oppførselen elevene har i møte med matematikklasserommet (Liljedahl, 2021). Når elevene entrer klasserommet, bringer de med seg fordommer om hvordan timene skal foregå, ut fra hvordan timen er lagt opp. Ut fra dette virker det som at elevene har lagt seg til vanen *å tenke* når de kommer inn i matematikklasserommet med tavler på veggene.

Intervjuer:	Planla du for å utvide oppgavene videre?
Eva:	På den siste (utdrag 2), så hadde jeg jo klar en plan for utvidelse på en måte. Da stod jo det i oppgaven (3.3.4, 2. undervisningstime), […] neste steg var tre terninger, og hva er faktisk sannsynligheten for de ulike, men jeg hadde ikke helt bestemt meg på forhånd om jeg skulle gå for den ene eller andre oppgaven som utvidelse, så det varierte litt fra gruppe til gruppe, men det gjorde egentlig ingenting om de ikke gjorde det samme i samme rekkefølge. […] Den andre (utdrag 1) var den klossen som 4x4x4 […]

Utdrag 14: Intervju 2.1

Oppgavene i begge undervisningstimene hadde utvidelser som var planlagt på forhånd. Eva forteller i utdrag 13 at problemet i utdrag 1 hadde en utvidelse ved å gå til en 4x4x4 kube for å finne antall vinnerrekker i fire på rad. I datamaterialet blir denne utvidelsen ikke brukt, siden elevene fortsatt var engasjert i oppgaven som den først ble presentert (utdrag 1) gjennom hele 1. undervisningstime. Utvidelsene som var planlagt for 2. undervisningstime er vist i kapittel (3.3.4). Her viser Eva også at hun reflekterer rundt hvordan oppgaven kan tilpasses ut fra en grunnoppgave, og jeg identifiserer denne formen for refleksjon under undervisningsoppgave 8.

Eva forteller også om utvelgelsen av oppgaven fra utdrag 1:

Eva:	I og med at jeg hadde, litt sånn på impuls gått for den oppgaven, så hadde jeg jo ingen fasitsvar, sant, så de fikk jo aldri en sånn tommel opp om at, ja, nå har du klart det! Det er jo litt greit, i forhold til at da må de arbeide med å argumentere for sitt svar videre til de andre gruppene, på en måte. Samtidig hadde det også vært greit å ha hatt en liten fasit, sånn at jeg kunne forklart litt med begrunnelse på slutten.

Utdrag 15: Intervju 2.1

Hun sier at oppgaven ble valgt litt impulsivt i forkant av 1. undervisningstime, og at hun derfor ikke hadde en fasit klar. Når dette sees i sammenheng med utdrag 4, tur 12 og 14, oppdager vi en av grunnene til at Eva ikke gir elevene tommel opp eller ned på om svaret er riktig er at hun selv ikke har et fasitsvar på oppgaven. Med bakgrunn i hvordan hint benyttes i tenkende klasserom (2.4.2), kan det også være flere grunner bak valget om å ikke gi et konkret svar. Eva trekker også frem dette i utdrag 14, når hun forteller om hvordan det å ikke ha en fasit tvinger gruppene til å argumentere for svarene de kommer med, for å overbevise medelevene om at løsningen de presenterer er gyldig for problemet. Videre forteller Eva at hun likevel hadde likt å ha et fasitsvar klar, for å selv kunne vurdere svaret Eva og elevene kom fram til i konsolideringen (Utdrag 9), og avslutte oppgaven med en korrekt løsning.

Når Eva forteller om struktureringen av oppgavepresentasjonen fra utdrag 1 og 2, kommer hun med en observasjon rundt rekkefølgen av gruppeinndelingen og presentasjonen av oppgavene:

Eva:	Jeg lurer på om jeg delte… Forklarte jeg oppgaven først, og så delte de inn i gruppene begge gangene?
Intervjuer:	Det tror jeg du gjorde, ja.
Eva:	Ja, for alternativet hadde jo vært at jeg delte inn i grupper først, og så forklarte oppgaven. Men da tror jeg at det gjerne hadde blitt mye fokus på gruppene, at de ikke hadde tenkt så mye på oppgaven. Motsatt blir jo sånn at en da forklarer oppgaven, så står de og tenker på den mens jeg deler ut kort. Så jeg tenker jo det er positivt, på en måte. Men som sagt, om du har noe teori først, men i den settingen som er, så tenker jeg det er lurt å komme raskt i gang.

Utdrag 16: Intervju 2.1

Hun kommenterer på at hun begge gangene begynte med å presentere oppgaven, og så delte hun elevene inn i grupper i etterkant. Hun reflekterer også rundt at å bytte rekkefølgen på disse to stegene kan ha konsekvenser for hva elevene tenker på når oppgaven blir presentert. Dersom gruppene deles inn først, antar Eva at det er sannsynlig at elevene vil tenke på hvem de er på gruppe med, i stedet for å holde fokus på oppgaven som presenteres. Når oppgaven introduseres først, mener Eva at elevene kan tenke på oppgaven de har fått mens de venter på å få vite hvilken gruppe de er i. Hun forteller også at i begge settingene vurderte hun det som lurt å introdusere oppgavene først, for å la elevene komme raskt i gang med tenkingen i forkant av gruppeinndelingen.

I samtale rundt flowsonemodellen (figur 4) blir Eva spurt om hvordan hun bruker hint i undervisningen:

Intervjuer:	På hvilken måte føler du at du bruker hint i klasserommet ditt?
Eva:	Det er jo det jeg prøver på, på en måte. Men det er jo ofte vanskelig å ikke si for mye, for det er jo litt sånn standard lærergreie å ville si «Ja, men det er jo sånn!» (Ler litt). Det er jo litt sånn at jeg på en måte må være bevisst på at jeg gir dem hint, og ikke svar. Og så må en jo ta det litt sånn på hælen når en holder på, for det varierer jo fra elev til elev hvor store eller små hint de trenger.
Intervjuer:	Og fra elevgruppe til elevgruppe?
Eva:	Ja. Hvis du har hatt en runde med oppgaven før, så har du jo inne litt hvilke variasjoner om hva som kan komme, men det er ikke sånn at jeg kunne sittet og skrevet ned en liste over hint på forhånd, det må en ta som det kommer.

Utdrag 17: Intervju 2.1

Eva forteller at det kan være vanskelig å ikke si for mye når en skal gi hint som lærer. Hun mener at som lærer, så ønsker en å kunne gi elevene forståelsen ved å fortelle dem hvordan oppgaven skal løses. Hun forteller også at når det kommer til hint, så kreves det ofte at læreren kan gi hint på sparket ut fra problemløsningssituasjonen elevene er i. Eva påpeker at hun ikke kunne skrevet en liste på forhånd, men at hintene må gis ut fra hvordan elevene arbeider. Når hun bruker samme problemløsningsoppgave i to separate undervisningstimer, mener hun at hun bygger opp en forståelse gjennom erfaring av hvilke problemer elevene støter på i gjennomføringen, og hvordan hun kan da kan gi elevene hint som forbedrer elevenes evner, uten at hun forminsker oppgavens kognitive krav.

Eva ble også spurt om hvordan hun syntes at læringsmålene hennes for timene kom til uttrykk i konsolideringen og hun svarte som følger:

Eva:	Nei, altså, jeg har jo på en måte bare fokusert på å gå gjennom svaret, på en måte. Det er jo ikke så mye teorien rundt, eller, det er jo mer hvilke løsninger som er brukt og så videre. Så, ja, det kunne jeg gjerne hatt mer fokus på. Det jeg ser på den siste oppgaven (utdrag 10) var at jeg kunne jo gjerne gått gjennom dette med, for jeg stopper jo på en måte litt før jeg er ferdig med hele det her. Det handler jo litt om klokken også, da, men. Jeg sier at «Dere må finne ut hvor mange svaralternativer dere har», men jeg sier jo ikke noe videre om hvorfor de trenger det, på en måte. Nå visste jeg jo der og da at alle gruppene hadde kommet frem til at de trengte det, og så videre, men samtidig så

> er det jo ikke sikkert at alle på hver gruppe har *skjønt det*. Så det hadde jo absolutt vært en fordel å ha forklart det, på en måte.

Utdrag 18: Intervju 2.1

Eva sier at konsolideringsfasene hennes i utdrag 9 og 10 har fokus på å finne fram til svaret sammen med elevene, og å få fram hvilke løsningsmetoder som har blitt brukt. Hun forteller at i utdrag 10 måtte hun avslutte konsolideringen på grunn av tid, men at hun skulle ønsket at hun fikk gått gjennom hvorfor elevene måtte vite hvor mange mulige utfall det var for to terninger som trilles, siden det ikke var sikkert at alle elevene på hver gruppe hadde skjønt hvorfor det er nødvendig å kjenne til antall mulige for å finne sannsynligheten for å få gunstig utfall. Fra utdrag 9 og 10 har jeg observert at Eva konsoliderer fra bunnen av, og det stemmer overens med det hun selv sier i utdrag 17.

4.5 Oppsummering av undervisningstimene

I gjennomgangen av Case A har jeg vist frem hvordan Eva har brukt lærerhandlinger (tabell 4) og matematiske undervisningsoppgaver (tabell 7) i utdrag fra de tre undervisningsfasene (tabell 6) jeg har valgt å analysere i de to undervisningstimene. I dette delkapittelet vil jeg kort trekke fram hvordan bruken av lærerhandlinger (tabell 4) er forskjellig i de tre undervisningsfasene (tabell 6), og jeg vil summere opp hvilke matematiske undervisningsoppgaver (tabell 7) som kommer til syne i Case A. Jeg vil også gå kort gjennomgå spørsmålene fra tabell 6 for å gi et sammenhengene blikk på Case A.

Undervisningsfase\Lærerhandling	Retningsendring	Fremdrift	Fokuserende	Antall handlinger
Presentasjon av oppgave	0	11	2	13
Hint og utvidelser	5	8	16	29
Konsolidering	1	14	0	15

Tabell 8: Lærerhandlinger i de tre undervisningsfasene i Case A.

I tabell 8 ser vi hvordan lærerhandlingene er fordelt i de forskjellige undervisningsfasene. Vi ser at fremdriftshandlinger dominerer i den første og den tredje undervisningsfasen, med 11 av 13 og 14 av 15 av lærerhandlingene i de to delene respektivt. Vi ser også at fremdriftshandlinger blir betydelig mindre brukt i den andre undervisningsfasen, der de utgjør

8 av 29 lærerhandlinger. Siden fremdriftshandlinger har til hensikt å drive den matematiske samtalen fremover, gir det mening at disse lærerhandlingene blir brukt mest i presentasjon av oppgavene og konsolideringen. Når Eva presenterer oppgavene og konsoliderer timen i helklassesituasjoner, har hun ordet mesteparten av tiden. For presentasjonen av oppgavene stemmer dette godt med det undervisningsmetodiske rammeverket, men i konsolideringen trekker Liljedahl (2021) frem at det er elevene som bør konsolidere hva de har lært i undervisningen, som ikke stemmer overens med det vi ser i utdrag 9 og 10. Elevene deltar med lærerledede svar, mens Eva styrer og kontrollerer samtalen og hun står for gjennomgangen av fremgangsmåtene og presenterer dem.

I den første undervisningsfasen presenterer Eva oppgaven som danner utgangspunktet for en undervisningstime i hennes tenkende klasserom. Hun presenterer i begge tilfeller i casen oppgaven med elevene samlet stående rundt seg selv nært eller i fronten av klasserommet. I 1. undervisningstime presenterer Eva en oppgave der elevene skal finne unike tre på rad-rekker i en $3 \cdot 3 \cdot 3$ kube som består av kuler (figur 7). I 2. undervisningstime presenterer Eva en sannsynlighetsoppgave, der elevene skal bevise eller motbevise påstanden om at det er mer sannsynlig å få 9 som sum enn 10, dersom man triller to terninger. I 1. undervisningstime presenteres oppgaven gjennom at Eva tar utgangspunkt i bondesjakk, som elevene kjenner fra før, og presenterer hva hun definerer som en unik tre på rad-rekke gjennom å spille bondesjakk med elevene, og telle mulige vinnerrekker i spillet. Derfra utvider hun oppgaven til tre dimensjoner, og gir elevene i oppgave å finne antall unike rekker i figur 7. I 2. undervisningstime presenterer Eva oppgaven direkte, uten at elevene er med på å utvikle oppgaven.

I delkapittel 4.1.2 trekker jeg fram at det er vanskelig å plassere presentasjon av en oppgave fra et tenkende klasserom innenfor Ball et al. (2008) sine matematiske undervisningsoppgaver. Provisorisk kan oppgavepresentasjonene plasseres i undervisningsoppgave 1, siden oppgavene presenterer en matematisk ide elevene skal undersøke gjennom problemløsing. De kan også plasseres innenfor undervisningsoppgave 14, siden vi kan tenke på oppgavene som fruktbare matematiske spørsmål. Det kan også argumenteres for at presentasjonen av oppgavene er bruk og tilpassing av læremiddel (undervisningsoppgave 8 og 9), men det krever at vi kjenner til utgangspunktet for oppgavene. Jeg vil gå nærmere inn på dette i diskusjonsdelen.

Fremdriftshandlinger dominerer den første undervisningsfasen, siden Eva styrer helklassesituasjonen, og jeg tolker det som at hun ønsker å la elevene sette i gang med problemløsingen så fort som mulig.

I den andre undervisningsfasen (4.2) får elevgruppene hint når Eva oppdager at elevene har misoppfatninger som resulterer i feil svar. Eva bruker korrigerende spørsmål og demonstrasjoner for å gi elevene hint, eller hun bemerker en feil i elevenes resonnement. Elevgruppene får utvidelser når Eva har kontrollert at de har kommet frem til riktig svar og hun forstår fremgangsmåten de har brukt som riktig. I 1. undervisningstime fikk ingen elevgrupper utvidelser av oppgaven, siden Eva aldri identifiserte et svar som riktig. I 2. undervisningstime brukte Eva to forskjellige utvidelser, der den ene var planlagt på forhånd (3.3.4), mens den andre utvidelsen var å finne ut hvilken sum som er mest sannsynlig å få når to terninger trilles. Hintene Eva gir i andre undervisningsfase påvirker i liten grad de kognitive kravene i problemløsingsoppgavene, og baseres ofte på å belyse en feil elevene har gjort gjennom en bemerkning eller et korrigerende spørsmål. I ett tilfelle fra andre undervisningsfase (utdrag 6) demonstrerer Eva for elevene hvorfor svaret blir feil ved å trekke frem et konkret eksempel. Hintene Eva gir, fungerer ofte som verktøy elevene selv kan bruke for å se tilbake på sine egne fremgangsmåter for å identifisere feil.

Fokuserende handlinger er mest benyttet i den andre undervisningsfasen, og de utgjør 16 av 29 lærerhandlinger. Fra kapittel 4.2 har vi sett at Eva i den andre undervisningsfasen undersøker elevenes svar, og stiller spørsmål for å kunne evaluere elevenes fremgangsmåter og løsningsforslag. Hun bruker undervisningsoppgave 10 og 11 i sammenheng, og når hun gjennom undervisningsoppgave 10 oppdager at elevene har en misoppfatning eller ikke har kommet fram til riktig svar, ber hun elevene utdype og forklare hvordan de har kommet frem til svaret for å kunne evaluere den matematiske forklaringen som ligger til grunn (undervisningsoppgave 11). Når Eva oppfatter elevenes svar som riktige, gir hun elevene en utvidelse, som kan kategoriseres som undervisningsoppgave 9 og 14. Gjennom den andre undervisningsfasen er det også tydelig at Eva er klar over hva som involveres i de bestemte fremstillingene hun bruker i oppgavene (undervisningsoppgave 4), og at representasjonene hun bruker er valgt fordi de er hensiktsmessige for oppgaven (undervisningsoppgave 15).

I den tredjeundervisningsfasen setter Eva ikke elevsvarene i en bestemt rekkefølge. I 1. undervisningstime samler hun opp elevsvar på tavlen, som passer bedre inn i observering og utvelging av elevsvar til diskusjon i klasserommet (Stein et al., 2008). I begge undervisningstimene konsolideres oppgavene på den samme whiteboardtavlen til venstre for kateteret. I konsolideringen legger Eva vekt på å gå gjennom oppgaven elevene har utført. I 1. undervisningstime gjennomgår Eva oppgaven foran elevene, og ber dem være observante for å korrigere henne om hun teller noen av tre på rad-rekkene to ganger, eller om hun glemmer å telle noen av rekkene. I 2. undervisningstime går Eva først gjennom den vanligste fremgangsmåten elevene har brukt for å løse den opprinnelige oppgaven sammen med elevene, og så utvidelsen (3.3.4) hun hadde planlagt på forhånd. Deretter gjennomgår hun en ny fremgangsmåte elevene kan bruke på liknende problemer i fremtiden, ved å illustrere hvordan en tabell (figur 9) kan brukes for å enkelt finne svar på både den opprinnelige oppgaven og utvidelsene hun gav elevene gjennom andre undervisningsfase. Eva konsoliderer i begge undervisningstimene fra det minst utfordrende nivået opp til det høyeste nivået. Hun bruker mest tid på det laveste nivået, og mindre tid dess vanskeligere matematikken blir for elevene. Jeg påstår at Eva konsoliderer fra bunnen av, som Liljedahl (2021) anbefaler for tenkende klasserom.

Eva bruker fremdriftshandlinger i 14 av de 15 turene hun har i den tredje undervisningsfasen. Fra delkapittel 4.3 har vi sett at Eva presenterer de matematiske ideene elevene har kommet frem til i den andre undervisningsfasen, og Eva gjengir og fyller ut de matematiske forklaringene elevene har kommet frem til sammen med elevene (undervisningsoppgave 1 og 11). I 2. undervisningstime trekker Eva frem en annen måte å representere fremgangsmåten på ved å bruke en tabell (figur 9). Hun velger ut en hensiktsmessig representasjon, og viser elevene hvordan representasjonen henger sammen med fremgangsmåtene de har brukt (undervisningsoppgave 4, 5 og 15).

Generelt i begge undervisningstimene bruker Eva konsekvent matematisk notasjon (undervisningsoppgave 13).

5 Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg diskutere funnene i resultatdelen i lys av teorien presentert tidligere i oppgaven (2). I diskusjonen vil jeg diskutere hvordan lærerhandlingene (Drageset, 2014; 2015a), praksisene i Liljedahl (2021) for tenkende klasserom og Ball et al. (2008; Fauskanger et al., 2010) sine matematiske undervisningsoppgaver spiller sammen og overlapper for å illustrere en lærers handlingsmønster i et tenkende klasserom i de tre undervisningsfasene (2.4.2), og hvordan lærerens handlingsmønster korresponderer med tidligere forskning på lærerens handlingsmønster (Tokheim, 2021), og hvordan studiens tenkende klasserom korresponderer med tenkende klasserom fra en annen studie i et tenkende klasserom (Valbekmo og Bjuland, 2023).

5.1 Lærerens handlingsmønster

I resultatdelen av kapittelet har lærerens utsagn og handlinger i undervisningsfasene «Presentasjon av oppgaven», «Hint og utvidelser under elevenes arbeid» og «Konsolidering» blitt beskrevet ved hjelp av Dragesets lærerhandlinger (Drageset, 2014; 2015a), Ball et al. (2008) sine matematiske undervisningsoppgaver og Liljedahl (2021) sitt undervisningsmetodiske rammeverk for et tenkende klasserom. Analysen har beskrevet lærer Eva sitt handlingsmønster i et tenkende klasserom. I løpet av resultatdelen har jeg funnet særtrekk for lærerhandlinger (Drageset, 2014; 2015a) som skiller de forskjellige undervisningsfasene i de to undervisningstimene resultatdelen har undersøkt i detalj. Jeg vil derfor diskutere lærerens handlingsmønster i hver av de tre undervisningsfasene hver for seg i sammenheng med teorien denne oppgaven trekker frem. Deretter vil jeg se denne studien i lys av en annen studie som ser på lærerens handlingsmønster (Tokheim, 2021), og en annen studie som ser på den kollaborative problemløsingsprosessen i kontekst av tenkende klasserom (Valbekmo og Bjuland, 2023).

5.1.1 Presentasjon av oppgavene

I presentasjonen av oppgavene i Case A (4.1) og oppsummeringen av undervisningstimene (4.5), ser vi at Eva i all hovedsak benytter fremdriftshandlinger under presentasjonen av en oppgave for tenkende klasserom. Av fremdriftshandlingene bruker Eva desidert flest lukkede fremdriftsdetaljer, da 8 av de 11 fremdriftshandlingene i den første undervisningsfasen er lukkede fremdriftsdetaljer. Jeg vil påstå at overvekten av lukkede fremdriftsdetaljer i presentasjonen av oppgavene i denne studien henger sammen med den dialogbaserte oppgavepresentasjonen Liljedahl (2021) anbefaler for tenkende klasserom, der Liljedahl (2021) skriver at læreren bør trekke koblingen mellom elevenes forkunnskaper og oppgaven læreren ønsker å presentere. Eva trekker selv frem (utdrag 15) at hun i begge undervisningstimene ønsket å sette elevene raskt i gang med tenkningen.

Liljedahl (2021) presiserer at presentasjonen av en oppgave for tenkende klasserom bør skje innen de første 5 minuttene etter at læreren for første gang henvender seg til klassen som helhet, noe Eva gjør i begge undervisningstimene (4.1.2).

I kapittel 4.1.2 og 4.5 trekker resultatdelen frem vanskeligheten av å plassere oppgavepresentasjonen i casen under de matematiske undervisningsoppgavene. Denne vanskeligheten kan stamme i forskjellen mellom undervisningsmetodikken Ball et al. (2008; Fauskanger et al., 2010) sine matematiske undervisningsoppgaver er basert på. Fra Ball (2017, s. 23) har vi at lærerens matematiske arbeid starter når læreren velger ut oppgaven som skal presenteres for elevene. I kontekst av denne studien har Eva valgt ut modellen hun bruker for å illustrere oppgaven i 1. undervisningstime, og hun har sannsynligvis tenkt over hva som ligger bak bruken av akkurat den modellen av en $3 \cdot 3 \cdot 3$ kube der kulene utgjør elementene i kuben (4.1.1). Hun velger å representere en unik tre på rad-rekke gjennom bondesjakkspillet, og denne representasjonen er også overveid av Eva. Eva sier selv (utdrag 14) at oppgaven i 1. undervisningstime var valgt på impuls, men presentasjonen av oppgaven viser at Eva har gjennomgått betydningen bak modellen, og hvordan det innvirker på oppgaven elevene skal gjennomføre.

Selv om Ball (2017) trekker frem at lærerens undervisningsarbeid starter når læreren velger ut og tilpasser oppgavene for undervisningstimen, belyser ikke de matematiske undervisningsoppgavene (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010) at selve presentasjonen av oppgaven elevene skal arbeide med er en matematisk undervisningsoppgave.

5.1.2 Hint og utvidelser under elevenes arbeid

Lærerhandlingene (Drageset, 2014; 2015a) som Eva benyttet oftest under den andre undervisningsfasen (4.2), er fokuserende handlinger (tabell 8). Likevel viser tabell 8 en jevnere fordeling av lærerhandlingene enn i de to andre undervisningsfasene. En grunn til denne jevnere fordelingen av lærerhandlingene kan være at gruppearbeidsfasen i undervisningstimene var lenger, og flere utdrag kunne dermed hentes derfra. Tabell 8 viser at det er omtrent dobbelt så mange lærerhandlinger i denne undervisningsfasen, sammenlignet med fasene før og etter. Utdragene fra gruppearbeidet foregår også ikke i en helklassesituasjon (Liljedahl, 2021), som kan medføre at læreren ikke kjenner det som utrygt å la elevene styre diskusjonen (Drageset, 2015a). Samtidig er gruppearbeidet også sentrert rundt elevenes diskusjon med hverandre innad i gruppen (Liljedahl, 2021). Da er det naturlig at Eva spiller inn med fokuserende handlinger for å forstå hvordan elevene har tenkt når hun først kommer i kontakt med en gruppe. Når vi følger Eva fra første kontakt med en gruppe, er Evas første tur som oftest en etterspørsel om en begrunnelse for en påstand som har kommet fra en elev på gruppen (4.2; 4.5).

De fokuserende handlingene i hint og utvidelsesfasen er jevnt fordelt mellom «Etterspørre»- og «Peke ut»-handlinger. Konsentrasjonen av fokuserende lærerhandlinger henger sammen med hvordan Liljedahl (2021) beskriver hint i tenkende klasserom. Når elevene får hint, skiller Liljedahl (2021) mellom hint som øker elevenes evne til å løse problemet, og hint som senker utfordringen problemet utgjør. Dersom hintene hadde kommet som fremdriftshandlinger, kunne de for eksempel vært kategorisert som forenklinger eller demonstrasjoner læreren gir elevene, og da hadde hintene senket utfordringen (Liljedahl, 2021) og de kognitive kravene (Smith og Stein, 1998) i oppgaven. I stedet for evaluerer Eva elevenes påstander og forklaringer (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010), og så stiller hun fruktbare matematiske spørsmål (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010), slik at elevene selv lærer å fange opp problemene i sine egne resonnement (Liljedahl, 2021). Eva bruker i ett tilfelle en demonstrasjon (Drageset, 2014; 2015a) som hint (Liljedahl, 2021), når hun illustrerer hvorfor 5 + 5 som utfall i 2. undervisningstime ikke kan skje to ganger (4.2). Likevel bruker hun en «Etterspørre»-handling for å la elevene bruke den nye forståelsen på 5 + 5, i stedet for å forklare sammenhengen direkte selv. Eva forklarer selv i utdrag 16 at hun «tar det litt sånn på hælen», og at hun som lærer dynamisk må tilpasse hintene for å ikke gi elevene svaret, men heller gi dem verktøy for å løse problemet selv (Liljedahl, 2021)

Når Eva gir utvidelser (4.2; 4.5) etter at elevene har fullført den tidligere oppgaven, kommer utvidelsen i seg selv som et åpent fremdriftsinitiativ (Drageset, 2014, 2015a). Utvidelsene (Liljedahl, 2021) er fruktbare matematiske spørsmål (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010).

5.1.3 Konsolidering

Konsolideringen i casen skiller seg en del fra Liljedahl (2021) sitt undervisningsmetodiske rammeverk (4.3; 4.5). Casens konsolideringer ligger nærmest den andre konsolideringsformen beskrevet i kapittel 2.4.2. En sentral del av konsolideringen i tenkende klasserom (Liljedahl, 2021), er at det er elevene som skal samle og gjøre mening av sin egen tenking og problemløsing i samarbeid med hverandre. I resultatdelen (4.3; 4.5) karakteriseres konsolideringsfasen av at Eva dominerer taletiden i helklassesituasjonen, og at det er Eva som samler elevenes tenking, i stedet for at elevene konsoliderer tenkingen selv. Gjennom lærerhandlingene (Drageset, 2014; 2015a) i tabell 8 ser vi at konsolideringen preges av fremdriftshandlinger, og i begge undervisningstimene er det lukkede fremdriftsdetaljer etterfulgt av lærerledede responser (4.3) som utgjør mesteparten av konsolideringen. I en slik konsolideringsfase inviteres ikke elevene til å tenke (Liljedahl, 2021). Eva bemerker (4.4) at en av grunnene til at konsolideringsfasen gjennomføres på denne måten, er at hun må holde seg innenfor tidsrammen i en ordinær 45-minutters undervisningstime.

I konsolideringsfasen presenterer Eva de matematiske ideene (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010) elevene har samlet og oppdaget gjennom den foregående undervisningsfasen (4.2; 5.2). Eva gjengir også de matematiske forklaringene (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010) elevene har kommet med i gruppearbeidet. I resultatdelen (4.3; 4.5) henger presentasjonen av de matematiske ideene og Evas matematiske forklaringer (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010) sammen med de lukkede fremdriftsdetaljene (Drageset, 2014; 2015a).

5.1.4 Sammenheng med tidligere forskning på lærerens handlingsmønster

Til forskjell fra tidligere forskning på lærerens handlingsmønster (Tokheim, 2021), har jeg i denne oppgaven gått ned på detaljnivå i én case basert på to undervisningstimer (3.3.2). Derfor vil denne studien i sammenligning med Tokheim (2021) stille svakt basert på det innsamlede datamaterialet som danner grunnlag for studien (2.5; 3.3.2). Likevel er det interessant å se hvordan de overlappende delene av de analytiske rammeverkene (Drageset, 2014; 2015a) har likheter og ulikheter mellom tenkende klasserom i denne studien, og utviklende matematikk i Tokheim (2021). I begge studiene er lukkede fremdriftsdetaljer, eller «lukkede fremdriftshandlinger» (Tokheim, 2021) den mest brukte lærerhandlingen. Drageset (2015a) bemerker at lærerens bruk av lukkede fremdriftsdetaljer ofte sammenfaller med at læreren ønsker å drive undervisningen fremover. Dette stemmer overens med det jeg har observert og tolket i denne studien (4.1; 4.3; 5.1.1; 5.1.3).

Drageset (2015a) trekker frem at fremdriftshandlinger kombinert med fokuserende handlinger er en kombinasjon av verktøy som gjør at læreren kan drive undervisningen forover, samtidig som at læreren kan plukke ut interessante elevresponser og sette dem under lupen ved hjelp av fokuserende handlinger. Denne studien avviker her (4.1; 4.2; 4.3) fra normen i Drageset

(2015a) og Tokheim (2021) ved at læreren nesten eksklusivt bruker fremdriftshandlinger i helklassesamtalene rundt oppgavepresentasjon og konsolidering. De fokuserende handlingene i denne casen dukker nesten eksklusivt opp i gruppearbeidet. Denne distinkte forskjellen mellom studiene antar jeg at kommer fra hvordan Eva velger å arrangere konsolideringsfasen sin (4.3), i kombinasjon med at Eva gjennom gruppearbeidet (4.2; 4.5) gjennomgår disse interessante stoppunktene, og selv trekker dem frem i konsolideringen, uten at elevene trenger å presentere sin egen tenking.

5.1.5 Sammenheng med tidligere forskning på tenkende klasserom

Denne studiens forskning på lærerens handlingsmønster i tenkende klasserom, springer ut fra Liljedahl og Cai (2021) sin anbefaling om å fortsette forskningen på kollaborativ problemløsing i forskjellige kontekster, samt Valbekmo og Bjuland (2023) sin indikasjon på lærerens rolle som veileder i de matematiske diskusjonene i tenkende klasserom.

I Valbekmo og Bjuland (2023) spiller læreren i konsolideringsfasene rollen som veileder og støtte for elevene når elevene presenterer sine fremgangsmåter. I denne studien (4.3; 4.5) innehar læreren selv presenteringsrollen, og elevene er stort sett passive lyttere og observatører i konsolideringsfasen. I 1. undervisningstime i denne studien deltok elevene noe i gjennomgangen av kube-oppgaven (3.3.4; 4.3.1), men gjennom rammeverket for lærerhandlinger, observerer jeg ingen tilfeller av at det er elevene som konsoliderer sin egen tenking. I denne studien tar læreren på seg ansvaret for å konsolidere den matematiske tenkingen som har foregått på gruppene i klasserommet, men elevene gir svar og responderer hovedsakelig gjennom lærerledede responser (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010) (4.3; 4.5; 5.1.3).

Denne forskjellen i sammenlikningen med Valbekmo og Bjuland (2023), kan ha flere grunner. For det første er denne studiens datamateriale betydelig mindre enn i Valbekmo og Bjuland (2023). I Valbekmo og Bjuland (2023) er konsolideringsutdragene valgt ut for å illustrere spesielle situasjoner i kollaborativ problemløsing, mens utdragene i denne studien er valgt gjennom nødvendighet (3.3.1; 3.5.3). Dermed er det begrenset i hvor stor grad denne studiens funn kan sammenlignes med de utvalgte situasjonene i Valbekmo og Bjuland (2023). En annen grunn kan være alderen på elevene som observeres. Valbekmo og Bjuland (2023) studerer 12-13 år gamle 7. klassinger, mens jeg i denne studien har observert 14-15 år gamle 9. klassinger. En tredje grunn kan være at læreren i Valbekmo og Bjuland (2023) hadde brukt kollaborative problemløsingsoppgaver med klassen en gang i uken i over 2 år, mens Eva har brukt tenkende klasserom som undervisningsmetode siden høsten 2023. En slik forskjell i lærernes erfaring med problemløsing som undervisningsmetodikk vil sannsynligvis medføre at Eva har en mindre trygghet i undervisningssituasjonen enn læreren fra Valbekmo og Bjuland (2023). Eva sier også selv i utdrag 17 (4.4) at hennes fokus i konsolideringsfasen har vært på å gå gjennom oppgaven, og at hun ikke har hatt så mye fokus på å knytte oppgaven til større matematiske ideer. En femte og siste grunn jeg vil ta opp er forskjellen i lengden på undervisningstimene. I Valbekmo og Bjuland (2023) observeres 90-minutters undervisningstimer, mens undervisningstimene i denne studien er i underkant av 45 minutter lange (3.3.2).

6 Konklusjon

Gjennom denne studien har fokuset vært på hvordan lærerens handlingsmønster ser ut i et tenkende klasserom, og på hvordan lærerens handlingsmønster varierer mellom de tre undervisningsfasene. Studien har i seg selv noen interessante funn i analysen av Case A. Samtidig har jeg vist hvordan problemløsing ligger som et bakteppe for all undervisning i tenkende klasserom som undervisningsmetodikk, og at Ball et al. (2008; Fauskanger et al., 2010) sine matematiske undervisningsoppgaver med fordel kan inkludere en undervisningsoppgave i presentasjon av oppgaver i matematikkundervisningen. Jeg har også vist hvordan en matematikklærers handlingsmønster henger sammen med lærerhandlinger (Drageset, 2014; 2015a), lærerens matematiske undervisningsoppgaver (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010), i en kontekst av tre faser i det tenkende klasserommet (Liljedahl, 2021).

6.1 Svar på forskningsspørsmålet

I denne studien har lærerhandlinger i kontekst av tenkende klasserom, samt de matematiske undervisningsoppgavene som kommer til uttrykk gjennom casen, vært kjernen i for oppgaven. Jeg har analysert datamateriale fra en case bestående av to undervisningstimer, et pilotintervju, og et intervju strukturert som en refleksjonssamtale rundt tenkende klasserom (3.3.2). For å konkludere oppgaven starter jeg med en gjennomgang av hvordan forskningsspørsmålet har blitt besvart gjennom prosjektet:

> Hvordan ser en matematikklærers handlingsmønster ut ved undervisning i et tenkende klasserom?

Forskningsspørsmålet peker på en casestudie av én matematikklærer, for å undersøke lærerens handlinger i en kontekst av det tenkende klasserommet (Liljedahl, 2021). Gjennom resultatdelen (kapittel 4), og diskusjonen (kapittel 5) har jeg observert og analysert hvordan matematikklæreren Eva bruker lærerhandlinger (Drageset, 2014; 2015a) og utfører matematiske undervisningsoppgaver (Ball et al., 2008; Fauskanger et al., 2010) i tre undervisningsfaser innen undervisningsmetodikken tenkende klasserom (Liljedahl, 2021). I analysen av lærerhandlingene kommer det frem at det er tydelige skiller mellom de tre undervisningsfasene i hvilke lærerhandlinger som brukes. I «Presentasjon av oppgavene» og «Konsolidering» er fremdriftshandlinger, og spesielt lukkede fremdriftsdetaljer de dominerende lærerhandlingene (4.5). I «Hint og utvidelser under elevenes arbeid» er det en jevnere fordeling av lærerhandlinger, og fokuserende handlinger utgjør brorparten av dem, med en jevn fordeling mellom «Etterspørre»- og «Peke ut»-handlinger (4.5). Samspillet mellom undervisningsmetodikken tenkende klasserom (Liljedahl, 2021) og lærerhandlingene (Drageset, 2014; 2015a) har blitt illustrert i diskusjonen (5.1.1-5.1.3), og studiens funn har blitt sett i sammenheng av en tidligere masteroppgave som har undersøkt lærerens handlingsmønster gjennom en delvis overlappende metodikk (Tokheim, 2021), og en studie på kollaborerende problemløsing i tenkende klasserom (Valbekmo og Bjuland, 2023) (5.1.4; 5.1.5).

På grunn av sykdom hos deltakere i studien, måtte studien endres sent i forskningsprosessen, og datamaterialet studien baseres på er derfor tynnere enn ønskelig (3.3).

Gjennom analysen av en matematikklærers handlingsmønster i et tenkende klasserom viser det seg at presentasjonen av oppgavene og elevenes gruppearbeid med oppgaven reflekterer det undervisningsmetodiske rammeverket for tenkende klasserom (Liljedahl, 2021). Konsolideringsfasen i denne casen bærer preg av å være lærerstyrt, og i de to undervisningstimene som har blitt gjennomgått, tar læreren opp mesteparten av taletiden, noe som ikke reflekterer tenkende klasserom som undervisningsmetodikk (Liljedahl, 2021).

De matematiske undervisningsoppgavene læreren utfører i casen utgjør nesten hele Ball et al. (2008; Fauskanger et al., 2010) sin liste (tabell 7, 3.4.2). I tillegg anbefales det gjennom diskusjonen at listen over lærerens matematiske undervisningsoppgaver utvides til å inkludere et punkt som dekker opp for presentasjon av matematiske oppgaver (5.1.1).

Refleksjonsintervjuet med læreren gir et innblikk i hvordan læreren selv forstår sin egen undervisning gjennom tenkende klasserom som rammeverk (4.4).

Gjennom arbeidet med masteroppgaven har jeg fått et bedre innblikk i hvordan lærerens handlingsmønster kan forme undervisningen elevene får. Jeg har også fått en god forståelse for tenkende klasserom som undervisningsmetodikk, og hvordan læreren effektivt kan gi hint i elevers arbeid med oppgaver. Tenkende klasserom er en metodikk jeg gleder meg til å prøve ut med en egen matematikkklasse når jeg trer til som lærer. Dette masterprosjektet har hatt en bratt læringskurve, og jeg har fått kjenne på kraftige nedturer under sene endringer i datainnsamlingen, og solide oppturer når jeg har oppdaget interessante funn i datamaterialet. Prosjektet har gitt meg mange gode verktøy, som jeg gleder meg til å ta i bruk som lærer.

6.2 Kritisk drøfting av studiens funn

Denne studien har sett på én case basert på ett pilotintervju, to undervisningstimer, og ett refleksjonsintervju. Dataene som har blitt brukt i studien, og oppgaven ellers, bærer preg av en sen endring i masterprosjektets retning, grunnet en svikt i datainnsamlingen. Størrelsen på datamaterialet og valget av analytisk metode, medfører at studien kun forteller om én matematikklærers handlingsmønster i ett tenkende klasserom.

Gjennom analysen er noen av lærerhandlingene benyttet veldig lite, eller ikke i det hele tatt. Dette kan komme av at datamaterialet ikke var stort nok og ikke inkluderte lærerens bruk av lærerhandlingen, eller det kan komme av en misoppfatning av det opprinnelige rammeverket av meg som forsker. Konsolideringsfasens dominans av læreren kan være unormale tilfeller, siden kun to undervisningstimer er observert.

6.3 Videreføring av studien

I en videreføring av denne studien, vil det være interessant å undersøke en longitudinell studie av én matematikklærers handlingsmønster i et tenkende klasserom. En kortere casestudie med et større datagrunnlag med samme problemstilling vil også kunne underprøve resultatene i denne studien. En tilnærming til tenkende klasserom gjennom elevenes opplevelse av lærerens undervisning, eller en studie av elevers respons på lærerhandlinger i et tenkende klasserom, vil også gi et interessant innblikk i elevenes forståelse av lærerens handlingsmønster i det tenkende klasserommet.

Referanser

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Ball, D. L. (2017). Uncovering the special mathematical work of teaching. I G. Kaiser (Red.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (s. 11-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 41-62. https://doi.org/10.2307/749717

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). Forskningsmetode for lærerutdanningene. Abstrakt forlag AS.

Csikszentmihalyi, M. (1990). Flow: The psychology of optimal experience. New York: Harper & Row.

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions—a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(2), 281–304. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9515-1

A: Drageset, O. G. (2015a). Student and teacher interventions: a framework for analysing mathematical discourse in the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(3), 253-272. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9280-9

B: Drageset, O. G (2015b). Different types of student comments in the mathematics classroom, *The Journal of Mathematical Behavior*, 38, 29-40, https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.003.

Fauskanger, J., Bjuland, R. & Mosvold, R. (2010). «Eg kan jo multiplikasjon, men ka ska eg gjørr?» - det utfordrende undervisningsarbeidet i matematikk. I T. Løkensgard Hoel, G. Engvik & B. Hansen (Red.), *Ny som lærer - sjansespill og samspill* (s. 99-114). Tapir Akademisk Forlag.

Flyvbjerg, B. (2006). Five Misunderstandings About Case-Study Research. Qualitative Inquiry, 12(2), 219–245. https://doi.org/10.1177/1077800405284363

Flyvbjerg, B. (2011). «Case Study», i Norman K. Denzin and Yvonna S. Lincoln, (Eds.), The Sage Handbook of Qualitative Research, 4th Edition (Thousand Oaks, CA: Sage, 2011), Chapter 17, pp. 301-316.

Gunn Imsen (2014) *Elevenes Verden.* (5. utg) Oslo: Universitetsforlaget

Kunnskapsdepartementet (2017). Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). Det kvalitative forskningsintervju (3. utg.). Gyldendal.

Lester, F. (1994). Musings about mathematical problem solving: 1970–1994. *Journal of Research in Mathematics Education*, 25, 660–675.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: conditions for problem solving. In P. Felmer, J. Kilpatrick & E. Pekhonen (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: advances and new perspectives* (s. 361–386). Springer. www.doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_21

Liljedahl, P. (2021). Building thinking classrooms in mathematics, grades K–12: 14 teaching practices for enhancing learning. Corwin.

Liljedahl, P. & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM*, 53 (4), 723–735. www.doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Ma, L. (2020). KNOWING AND TEACHING ELEMENTARY MATHEMATICS : teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. (Third edition.). ROUTLEDGE.

Maxwell, J. A. (2008). Designing a qualitative study. I L. Bickman & D. J. Rog (Red.), *The SAGE handbook of applied social research methods* (2. utg., s. 214-253). Sage.

Mjaavatn, G. (2015). Mønstre og kvalitet – analyse av samtaler i matematikkundervisning [Masteroppgave]. Universitetet i Bergen.

NESH (2023). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. De nasjonale forskningsetiske komiteene.

https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Nic Mhuirí, Siún (2019) A lens on two classrooms: implications for research on teaching. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11).* 6-10 Feb 2019, Utrecht, Netherlands. https://hal.science/hal-02430144

Opplæringslova. (1998). Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa (LOV-1998-07-17-61). Lovdata. https://lovdata.no/lov/1998-07-17-61

Polya, G. (2014). How to solve it. Princeton University Press.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning. Cappelen Damm Akademisk.

Pruner, M. & Liljedahl, P. (2021). Collaborative problem solving in a choice affluent environment. *ZDM*, 53, 753–770. www.doi.org/10.1007/s11858-021-01232-7

Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM*. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3

Sanderød, I. K. (2020). En kvalitativ analyse av lærerens undervisningskunnskap i matematikk ved respons på uforutsette hendelser i matematikklasserommet [Masteroppgave]. OsloMet.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Skår, & Bjuland, Raymond. (2023). Hvordan kan Teaching for Robust Understanding brukes for å gjennomføre profesjonsutvikling i et tenkende klasserom? [Masteroppgave]. Universitetet i Stavanger.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. Mathematics teaching in the middle school, 3(5), 344-350.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and* *assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–22). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning*, 10(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Thagaard, T. (2018). Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode (5. utg.). Fagbokforlaget.

Tokheim, A. V. (2021). Hvordan kan lærerens handlingsmønster i matematikk bidra til muligheter for læring hos elevene? [Masteroppgave]. Universitetet i Stavanger.

Utdanningsdirektoratet (2022, 3. mars) *Tilpasset opplæring*. Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/tilpasset-opplaring/

Valbekmo, I. & Bjuland, R. (2023). Students' reasoned dialogs during problem solving in a Norwegian thinking classroom. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 28 (1-2), 59–78.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: the development of higher psychological processes. Harvard University Press.

Warwick, P., Vrikki, M., Vermunt, J. D., Mercer, N. & Halem, N. V. (2016). Connecting observations of student and teacher learning: an examination of dialogic processes in Lesson Study discussions in mathematics. ZDM Mathematics Education, 48, 555-569. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0750-z

Vedlegg

Vedlegg I Meldeskjema Sikt

Meldeskjema

Skriv ut

Referansenummer

294166

Hvilke personopplysninger skal du behandle?

Navn

Kontaktinformasjon

Personer på bilde eller videoopptak

Stemme på lydopptak

Bakgrunnsopplysninger, som i kombinasjon vil kunne identifisere en person

Beskriv bakgrunnsopplysningene

Opplysninger som ikke er relevante for forskningsprosjektet, men kan komme frem i lyd- og video-opptak av lærere i utviklingsmøter med hverandre, og elever på ungdomsskole. I lærerintervjuet ønsker vi å stille en del spørsmål som til sammen kanskje kan føre til at personen kan identifiseres.

Prosjektinformasjon

Tittel

Kvalitativ undersøkelse "Studere utviklingsarbeid i tenkende klasserom"

Sammendrag

Forskningsprosjektet har som mål å undersøke hvordan lærere arbeider, og hvilke grep de tar, for å implementere Peter Liljedahls "Thinking Classroom" i sine egne klasserom, i tillegg til å observere utviklingsarbeidet i lærergrupper som ligger bak. Planlagt datainnsamling er tre til fire observasjoner av utviklingsarbeidsøkter lærere mellom, og en til to observasjoner av to til tre lærere i klasserommet, der bruken av det som ble diskutert i utviklingsarbeidet, i tillegg til bruken av oppgaver, er i hovedfokus. Det ønskes å foreta datainnsamlingen ved hjelp av video- og lyd-opptak i begge tilfeller. I tillegg ønskes det å gjennomføre et lærerintervju av lærerne som observeres i klasserommet.

Hva er formålet med behandlingen av personopplysninger?

For å kunne transkribere og systematisere data som blir innsamlet.

Dersom personopplysningene skal behandles til flere formål, beskriv hvilke

Personopplysningene som behandles vil kun benyttes i kodenøkkel for anonymisert transkripsjon av opptak.

Ekstern finansiering

Ikke utfyllt

Type prosjekt

Master

Kontaktinformasjon, student

Simen Giskegjerde, s.giskegjerde@stud.uis.no, tlf: 47753791

Behandlingsansvar

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Stavanger / Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora / Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Prosjektansvarlig

Raymond Bjuland, raymond.bjuland@uis.no, tlf: 91837186

Er behandlingsansvaret delt med flere institusjoner?

Nei

Utvalg 1

Beskriv utvalget

Ungdomsskoleelever i en klasse der læreren er med i utviklingsarbeid innen "Tenkende klasserom".

Beskriv hvordan du finner frem til eller kontakter utvalget

Utvalget kontaktes via læreren som ønsker å delta i studien, som tar med samtykkeskjema til klassen, til foreldres signering.

Aldersgruppe

12 - 16

Inngår noen av disse gruppene i utvalget?

Sårbare grupper

Hvilke personopplysninger vil bli behandlet om utvalg {{i}}? 1

Navn

Personer på bilde eller videoopptak

Stemme på lydopptak

Bakgrunnsopplysninger, som i kombinasjon vil kunne identifisere en person

Hvordan innhentes opplysningene om utvalg 1?

Ikke-deltakende observasjon

Lovlig grunnlag for å behandle alminnelige personopplysninger

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Hvem samtykker for ungdom 16 og 17 år?

Foreldre/foresatte

Ikke-deltakende observasjon

Lovlig grunnlag for å behandle alminnelige personopplysninger

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Hvem samtykker for barn under 16 år?

Foreldre/foresatte

Hvem samtykker for ungdom 16 og 17 år?

Foreldre/foresatte

Informasjon til utvalg 1

Mottar utvalget informasjon om behandlingen av personopplysningene?

Ja

Hvordan mottar utvalget informasjon om behandlingen?

Skriftlig (papir eller elektronisk)

Informasjonsskriv

Informasjonsskriv - Foreldre.docx

Utvalg 2

Beskriv utvalget

Lærere som deltar i matematikkfaglig utviklingsarbeid ved -----------,---------.

Beskriv hvordan du finner frem til eller kontakter utvalget

Via Raymond Bjuland, masterveileder. Målet er å snakke med deltakende lærere den 31. oktober for å høre om muligheten for å kunne utføre forskningsprosjektet. Vi har også kontakt med eksperten som skal lede utviklingsarbeidet via e-post.

Aldersgruppe

18 - 70

Hvilke personopplysninger vil bli behandlet om utvalg {{i}}? 2

Navn

Kontaktinformasjon

Personer på bilde eller videoopptak

Stemme på lydopptak

Bakgrunnsopplysninger, som i kombinasjon vil kunne identifisere en person

Hvordan innhentes opplysningene om utvalg 2?

Ikke-deltakende observasjon

Lovlig grunnlag for å behandle alminnelige personopplysninger

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Personlig intervju

Vedlegg

Intervjuskjema - Lærer.docx

Lovlig grunnlag for å behandle alminnelige personopplysninger

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Informasjon til utvalg 2

Mottar utvalget informasjon om behandlingen av personopplysningene?

Ja

Hvordan mottar utvalget informasjon om behandlingen?

Skriftlig (papir eller elektronisk)

Informasjonsskriv

Informasjonsskriv - Lærer.docx

Tredjepersoner

Innhenter prosjektet informasjon om tredjepersoner?

Nei

Dokumentasjon

Hvordan dokumenteres samtykkene?

Manuelt (papir)

Hvordan kan samtykket trekkes tilbake?

E-post eller telefon til prosjektansvarlig/veileder.

Hvordan kan de registrerte få innsyn, rettet eller slettet personopplysninger om seg selv?

Ved å sende e-post eller ringe til prosjektansvarlig/veileder.

Totalt antall registrerte i prosjektet

1-99

Tillatelser

Vil noen av de følgende godkjenninger eller tillatelser innhentes?

Ikke utfyllt

Sikkerhetstiltak

Vil personopplysningene lagres atskilt fra øvrige data?

Ja

Hvilke tekniske og fysiske tiltak sikrer personopplysningene?

Kryptert lagring

Kryptert overføring

Endringslogg

Flerfaktorautentisering

Adgangsbegrensning

Andre sikkerhetstiltak

Adgangslogg

Hvilke

Biometisk lås på telefon. Alle involverte forskere har politiattest for arbeid med utvalgsgruppen.

Hvor blir personopplysningene behandlet?

Maskinvare

Mobile enheter

Hvem har tilgang til personopplysningene?

Prosjektansvarlig

Student (studentprosjekt)

Overføres personopplysninger til et tredjeland?

Nei

Avslutning

Prosjektperiode

28.11.2023 - 15.12.2024

Hva skjer med dataene ved prosjektslutt?

Data anonymiseres (sletter/omskriver personopplysningene)

Hvilke anonymiseringstiltak vil bli foretatt?

Koblingsnøkkelen slettes

Lyd- eller bildeopptak slettes

Personidentifiserbare opplysninger fjernes, omskrives eller grovkategoriseres

Vil enkeltpersoner kunne gjenkjennes i publikasjon?

Nei

Tilleggsopplysninger

Vil du delta i forskningsprosjektet
«Studere utviklingsarbeid tenkende klasserom»?

Dette er et spørsmål om deltakelse i et forskningsprosjekt til to masteroppgaver, hvor formålet er å utvikle forståelse for hvordan lærere arbeider i et tenkende matematikklasserom. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
«Tenkende klasserom» er en måte å sette opp et matematikklasserom på, der målet er å skape et miljø som legger til rette for at elevene lærer å tenke matematisk, og for at det skal oppnå dybdelæring. En gruppe ungdomsskolelærere i -------------- har vært på kurs og blitt introdusert for metoden tenkende klasserom og er motiverte for å prøve dette ut i egen undervisning. Vi er to masterstudenter som ønsker å studere nærmere hvordan dette utviklingsarbeidet påvirker lærerens arbeid i klasserommet.

Prosjektet utføres ved Universitetet i Stavanger. Masterstudentene vil bruke datamaterialet videre i sine masteroppgaver.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta fordi du underviser i matematikk ved skolen utviklingsarbeidet foregår på.

Hva innebærer det for deg å delta?
Prosjektet som helhet har en varighet på ett år, og vi vil i løpet av våren 2024 besøke skolen tre til fire ganger for å gjennomføre observasjon av utviklingsarbeidsøktene lærerne har i løpet av perioden. Vi ønsker i tillegg å gjennomføre observasjon av to eller tre lærere i matematikklasserommet deres to ganger i løpet av prosjektets varighet. For din del innebærer deltakelse i prosjektet først og fremst at vi vil observere, samt gjøre lyd- og video-opptak av, utviklingsarbeidet rundt tenkende klasserom over en periode på ca. fem måneder (tre til fire økter). Vi ønsker i tillegg å observere noen lærere som holder matematikktimer i klasserommet (en til to skoletimer i løpet av utviklingsarbeidsperioden). Da ønsker vi også gjennomføre et intervju med lærerne vi observerer i klasserommet (hvert intervju vil ha en varighet på maksimalt en time).

Vi vil sende ut informasjonsskriv med samtykkeskjema til foreldrene i forkant av en eventuell observasjon i klasserommet.

Dersom du ønsker å se intervjuskjema som skal benyttes på forhånd, kan følgende kontaktes: Professor Raymond Bjuland.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Lyd- og videoopptak vil kun være tilgjengelig for oss to masterstudenter og veileder, så lenge prosjektet varer.
- Opptakene vil lagres sikkert på krypterte lagringsløsninger, og opptakene vil transkriberes og anonymiseres. Alle navn vil erstattes med fiktive navn, og vi vil sørge for at kontaktopplysninger lagres sikkert adskilt fra øvrige data.

I publikasjoner fra prosjektet vil alle opplysninger anonymiseres, og vi vil sørge for at det ikke blir gitt opplysninger som gjør at deltakerne kan gjenkjennes.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er senest *15. desember 2024.* Da vil alle lyd- og videoopptak slettes, og vi vil kun oppbevare anonymiserte transkripsjoner fra undervisningstimene, utviklingsarbeidsøktene og intervjuene.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Universitetet i Stavanger* har personverntjenestene ved Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør, vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved professor Raymond Bjuland (tlf.: 918 37 186, e-post: raymond.bjuland@uis.no).
- Vårt personvernombud: Rolf Jegervatn (e-post: personvernombud@uis.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til Sikts vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt på e-post: personverntjenester@sikt.no, eller på telefon: 73 98 40 40.

Med vennlig hilsen

Professor Raymond Bjuland (Veileder)	*Simen Giskegjerde* (Masterstudent)	*Karl Peter Jensen Larsen* (Masterstudent)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Det komplekse undervisningsarbeidet i matematikk*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

□ å delta i *intervju*, og å bli observert (ved hjelp av video- og lydopptak) i en eller to matematikktimer over en periode på ca. fem måneder.
□ Å bli observert (ved hjelp av video- og lydopptak) i utviklingsarbeid over en periode på ca. fem måneder.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg III Informasjonsskriv Elev og Foresatte

Vil du delta i forskningsprosjektet *«Studere utviklingsarbeid i tenkende klasserom»?*

Dette er et spørsmål om deltakelse i et forskningsprosjekt til to masteroppgaver, hvor formålet er å utvikle forståelse for hvordan lærere arbeider i et tenkende matematikklasserom. Du får dette informasjonsskrivet på vegne av ditt barn. I dette skrivet gir vi informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål

«Tenkende klasserom» er en måte å sette opp et matematikklasserom, der målet er å skape et miljø som legger til rette for at elevene lærer å tenke matematisk, og for at de skal oppnå dybdelæring. En gruppe ungdomsskolelærere i ------------ har vært på kurs og blitt introdusert for metoden tenkende klasserom og er motiverte for å prøve dette ut i egen undervisning. Vi er to masterstudenter som ønsker å studere nærmere hvordan dette utviklingsarbeidet påvirker lærerens arbeid i klasserommet.

Prosjektet utføres ved Universitetet i Stavanger. Masterstudentene vil bruke datamaterialet videre i sine masteroppgaver.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får denne henvendelsen om å delta fordi du er forelder/foresatt til en elev ved skolen som deltar i prosjektet.

Hva innebærer det å delta?

Prosjektet som helhet har en varighet på ett år, og vi vil i løpet av våren 2024 besøke skolen tre til fire ganger for å gjennomføre observasjon av utviklingsarbeidsøktene lærerne har i løpet av perioden. Vi ønsker i tillegg å gjennomføre observasjon av to eller tre lærere i matematikklasserommet deres to ganger i løpet av prosjektets varighet. For ditt barn innebærer deltakelse i prosjektet først og fremst at vi vil observere (samt gjøre lyd- og video-opptak av) noen matematikktimer som sammenfaller med våre besøk på skolen. Opptakene vil kun danne utgangspunkt for en skriftliggjøring (transkripsjon) av det som skjer og blir sagt i undervisningen. Det er de anonymiserte transkripsjonene som vil bli analysert og eventuelt gjengitt.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis ditt barn velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger om ditt barn vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller ditt barn hvis de ikke vil delta eller senere velger å trekke seg. Hvis du ønsker at ditt barn ikke skal bli filmet, vil barnet tilbys alternativt opplegg i et annet rom. Dersom det blir for mange elever i klassen som ikke ønsker å delta, vil vi finne en annen klasse å observere.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Lyd- og videoopptak vil kun være tilgjengelig for oss to masterstudenter og veileder, så lenge prosjektet varer.
- Opptakene vil lagres sikkert på krypterte lagringsløsninger, og opptakene vil transkriberes og anonymiseres. Alle navn vil erstattes med fiktive navn, og vi vil sørge for at kontaktopplysninger lagres sikkert adskilt fra øvrige data.

I publikasjoner fra prosjektet vil alle opplysninger anonymiseres, og vi vil sørge for at det ikke blir gitt opplysninger som gjør at deltakerne kan gjenkjennes.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er senest *15. desember, 2024.* Da vil alle lyd- og videoopptak slettes, og vi vil kun oppbevare anonymiserte transkripsjoner fra undervisningstimene.

Dine rettigheter
Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om ditt barn, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om ditt barn,
- å få slettet personopplysninger om ditt barn, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av ditt barns personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Universitetet i Stavanger* har personverntjenestene ved Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør, vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Universitetet i Stavanger ved professor Raymond Bjuland (tlf.: 918 37 186, e-post: raymond.bjuland@uis.no).
- Vårt personvernombud: Rolf Jegervatn (e-post: personvernombud@uis.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til Sikts vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt på e-post: personverntjenester@sikt.no, eller på telefon: 73 98 40 40.

Med vennlig hilsen

Professor Raymond Bjuland	*Simen Giskegjerde*	*Karl Peter Jensen Larsen*
(Veileder)	(Masterstudent)	(Masterstudent)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Studere matematikkundervisning*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ at mitt barn blir observert (ved hjelp av lyd- og video-opptak) i en eller to ordinære matematikktimer over en periode på fem måneder.

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet.

Hvis du *ikke* samtykker, krysser du av nedenfor:

- ☐ Jeg samtykker *ikke* til at mitt barn skal delta i prosjektet

----
(Signert av foreldre/foresatte på vegne av elev, dato)

Vedlegg IV Intervjuskjema 1

Intervjuskjema 1- Lærer 1 ca. 60 min

Rød tekst er lagt til etter intervju 1.1, men ble stilt av observatøren i intervju 1.1.

Introduksjon: Intervjuer, intervjunummer, dato. Hvem deltar?

1. Hvilken/hvor lang erfaring har du som lærer/innenfor matematikkundervisning.
    a. Hvilken utdanningsbakgrunn har du med tanke på matematikkundervisning?
    b. Hvor lenge har du jobbet ved denne skolen? (hvor lenge som lærer)
    c. Hvor lenge har du jobbet medv denne klassen?
    d. Hvordan vil du beskrive din egen undervisning?
    e. Hva legger du mest vekt på i undervisningen?
2. Hva tenker du om utviklingsarbeidet dere holder på med i matematikkgruppen i år?
    a. Hvordan forventer du at utviklingsarbeidet skal påvirke din praksis?
    b. Hvordan skiller dette seg fra hva du forventet om utviklingsarbeidet og dets påvirkning på din praksis før prosjektets start?
    c. Hva tenker du er viktige elementer å ta med seg fra utviklingsarbeidet inn i egen undervisning?
    d. Hvordan jobber du med å utvikle tenkende klasserom-metodikken for dine klasserom?
    e. Hvordan oppleves utviklingsarbeidet for deg som lærer?

    Utviklingsarbeidet er strukturert i tre deler, en «re-cap» av hva som har pågått i mellomtiden, en oppgavedel, og en planleggingsdel.

    f. Hva tenker du om stukturen og utformingen av utviklingsarbeidet.
3. Hvor lenge har du vært kjent med «Thinking Classroom»-metodikken?
    a. … har du anvendt … (åpen formulering basert på første del av intervjuet)
    b. Hvilke av de 14 stegene i tenkende klasserom jobber du med å implementere i din(e) klasse(r)?
    c. Hvor mange av disse ser du for deg å implementere ila. skoleåret?
4. I planleggingsfasen:
    a. Hva gjør du mest av? Finner du eksisterende oppgaver, lager du egne, nye oppgaver, eller tilpasser du eksisterende oppgaver? Hvorfor/Hvordan?

b. Samsvarer svaret ditt med hvordan du ideelt sett ville gjort det? Hvorfor/Hvorfor ikke?
c. Hvilke typer oppgaver bruker du i timene dine? Oppgavestrenger, tallbehandlingsoppgaver (numeracy). (om spørsmålet forvirrer, følg opp med å spørre om hvilke oppgaver som er brukt, og om alle disse r fra utviklingsarbeidet)
d. Hvordan forbereder du deg for å håndtere elevsvar og andre klasseromssituasjoner?
e. Hvordan legger du til rette for å utforske interessante elevsvar i timene dine?
f. Har utviklingsarbeidet påvirket timeplanleggingen din? Hvordan? Hva gjør du som er forskjellig fra før?

5. Koblet til TRU-rammeverket. Teaching for robust understanding legger vekt på at elevene danner seg en dybdeforståelse av matematikken de holder på med. I denne konteksten er det et analyseverktøy for å se etter elevenes muligheter for dybdelæring i et tenkende klasserom.
   a. Hvordan legger du opp helklassesamtaler i klasserommet ditt? Evt. Hvordan ser en helklassesamtale ut i klasserommet ditt?
   b. Hvor mange elever deltar til vanlig i helklassesamtaler?
   c. Bruker du elevsvarene videre i undervisningen? Hvordan?
   d. Hvordan prøver du å bruke hint og spørsmål for å hjelpe elevene?

   Produktivt strev kan beskrives som arbeidet elever gjør i en problemløsningsprosess, spesielt den delen som krever høy kognitiv aktivitet.

   e. Hvordan mener du tenkende klasseroms-metodikken legger til rette for elevenes produktive strev i ditt klasserom?
6. Etter timen:
   a. Hvordan bearbeider du en gjennomført time?
   b. Hva tar du med deg til planleggingen av senere timer?
   c. Hva tar du med til neste utviklingsarbeid?
7. Andre avsluttende spørsmål?
8. ~~I timen (Til senere intervju):~~

   ~~Denne spørsmålsseksjonen baseres på hva som observeres i undervisningsøktene. Eksempelvis:~~

   ~~a. Hvordan synes du timen gikk?~~

b. ~~Hva tenkte du i denne situasjonen?~~

c. ~~Hvorfor håndterte du denne situasjonen på den måten?~~

d. ~~Skjedde det noe utenfor dine forventninger i løpet av timen? Hva skjedde? Hvordan valgte du å håndtere situasjonen?~~

Vedlegg V Intervjuskjema 2

Intervjuskjema 2 - Lærer ca. 60 min

Forklare for informanten:

- Utviklingsarbeidet for tenkende klasserom har ikke gått som planlagt.
- Dette intervjuet vil virke som en refleksjonssamtale rundt klipp fra undervisningsøktene.
- Avvæpne situasjonen. Jeg sitter med masse teori, men læreren sitter med en praktisk tilnærming. Ønsker å skape en bro mellom teorien og casene.
- Spørsmål før vi begynner refleksjonssamtalen?

Spørsmål før videoklippdel:

Introduksjon: Navn, Intervjunummer, Dato

- Hvilket trinn underviser du på?
- Hvor mange elever har du i tenkende klasserom til vanlig?

Kjør videoklipp fra lærerens oppgaveintroduksjon(er) (1-2 klipp)

- Hvordan synes du introduksjonen gikk? Hva gikk bra, hva kunne gått bedre? (Utgangspunkt) Finne lærerens tanker og refleksjoner rundt startfasen og introduksjonen av oppgaven.
  La du til rette for eller planla utvidelse av oppgaven? Hvordan?
- Trekke frem makro- og mikro-prinsippene for presentasjon av oppgaven i Liljedahl (2021, s. 115)
  Samtale rundt sjekklisten og finne frem til lærerens egne refleksjoner.

Kjør videoklipp fra lærerens konsolideringsfase (1-2 klipp)

- Hvordan kommer faginnholdet gjennomgått i timen til uttrykk i oppsummeringen? Hva var bra, hva kunne vært bedre? (Utgangspunkt) Finne lærerens tanker og refleksjoner rundt konsolideringen av kunnskapen utviklet i klasserommet i løpet av timen.

- Trekke frem makro- og mikro-prinsippene for konsolidering i tenkende klasserom. (Liljedahl, 2021, s. 183)
  Samtale rundt sjekklisten og finne frem til lærerens egne refleksjoner.

Spørsmål etter videoklippdel:

- Hva trekker fokuset ditt i tenkende klasserom?
- Hvordan bestemmer du deg for at en gruppe er moden for en utvidelse av oppgaven?
- Hva synes du du selv har blitt bedre på i tenkende klasserom i løpet av året? Hvorfor?
- Hva tenker du om de kognitive kravene oppgavene du brukte stiller elevene?
- Diskutere makro- og mikro-prinsippene for hint og utvidelser i tenkende klasserom og utfordringer med å holde elevene i flow-sonen (Liljedahl, 2021, s. 166).