TESS SERINA ØKSNEVAD
VEILEDER: ÅSMUND LILLEVIK GJÆRE

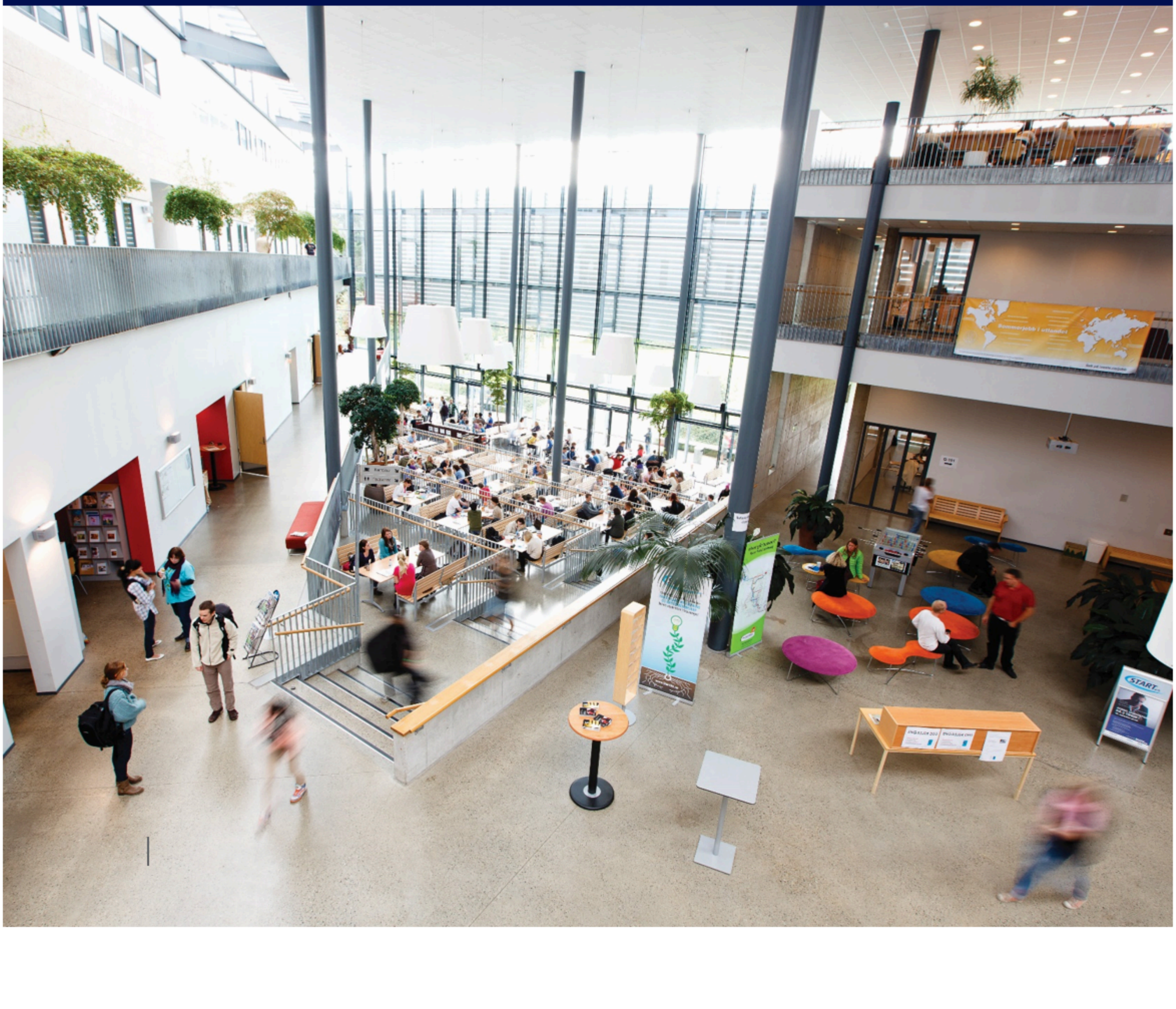
Hvordan presenteres brøk i de ulike læreverkene Multi og Matematikk?

Masteroppgave, 2024

Grunnskolelærerutdanning for trinn 1-7

Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Fakultet for utdanningsvitskap og humaniora



Forord

Tenk at med innlevering av denne masteroppgaven kan jeg (forhåpentligvis) kalle meg selv en ferdigutdannet lærer. Jeg vil derimot aldri være ferdig med utvikle meg eller danne nye erfaringer på veien til å bli den beste læreren jeg kan bli. Dette studieløpet har tatt mange år med oppturer og nedturer, men nå er jeg kommet i mål.

Jeg vil starte med å takke alle mine gode venner som har hjulpet meg i løpet av dette lange studieløpet. De har vært der for meg og bidratt med mange oppmuntrende ord. Spesielt takk til Jannik, som har vært en streng og god støtte i skrivingen. Alle sparkene bak har ført til mye bra arbeid!

Jeg vil også takke min kjære Patrick som har støttet meg og gitt gode tilbakemeldinger på skrivingen min. Takk for at du har gitt meg troen på at dette er noe jeg kan og kan gjøre bra!

Til slutt vil jeg takke min fantastiske veileder, Åsmund. Uten han hadde jeg nok aldri kommet i mål. Vi har hatt mange gode samtaler og du har kommet med mange gode tilbakemeldinger og råd.

Tess Serina Øksnevad

Sandnes, juni 2024

Sammendrag

Denne masteroppgaven er en læreverksanalyse av bøkene *Multi* og *Matematikk*, der hovedfokuset har vært å se på hvordan brøkbegrepet presenteres for elever i bøkene fra 1. trinn til 5. trinn. Dette er gjort med bakgrunn av fagfornyelsen som kom i 2020, der kunnskapsmålene rundt brøk ble endret. Dermed ble problemstillingen for denne studien:

Hvordan presenteres brøk i læreverkene Multi *og* Matematikk *fra 1.-5.trinn?*

For analysen ble rammeverket til Charalambous et al. (2010) brukt, som igjen er delt inn i en horisontal og vertikal analyse. For den vertikale analysen ble også et sekundært rammeverk fra Cady et al. (2015) brukt for koding av funnene i de to læreverkene.

Resultatene fra denne studien viser at læreverket *Matematikk* presenterer brøk i 3. trinn, mens *Multi* ikke presenterer brøk for elevene før i 4. trinn. Funnene mine viser at de fleste sidene som omhandler brøk er i bøkene for 5.trinn for begge to læreverk. Videre viser jeg at begge læreverkene starter brøkinnlæringen med å bruke ord for brøk. De bruker ord som halvparten, halv og kvart, koblet opp mot mengde. Noe som kommer tydelig frem i analysen som er utført var at læreverket *Multi* har langt flere oppgaver koblet opp mot brøk enn det som fremkommer i *Matematikk*. Et annet aspekt som også kommer tydelig frem i min analyse var at *Multi* har mange flere oppgaver kodet til å inneholde bilde representasjoner enn *Matematikk*. En visuell gjennomgang av læreverkene viser at i *Multi* fremkommer det langt mer bruk av farger og bilder enn i *Matematikk*, hvor det er en større andel av ren tekst.

Det ble ikke gjennomført en kontekstuell analyse av læreverkene, hvor man ser på hvordan læreverk blir brukt i undervisningen. På samme måte ble det heller ikke sett nærmere på de kognitive kravene til oppgavene som finnes i *Multi* eller *Matematikk*. Denne studien har i tillegg bare hatt som formål å se på to læreverk, noe som gir en begrensning på hvilke konklusjoner man kan trekke. Dersom man skal si noe om læreverk generelt i Norge må det gjøres en større og bredere forskning av flere læreverk, slik at det vil være mulig å trekke større og bredere slutninger mellom likheter og ulikheter.

Innholdsfortegnelse

Innledning

Fagfornyelsen ble innført i 2020, og det ble gjort radikale endringer fra Kunnskapsløftet 2006 (LK06) når det gjelder brøk. På grunnskolen gikk det fra å være tre kompetansemål som spesifikt nevner brøk, til at det blir nevnt ni ganger i den nye læreplanen. (Kunnskapsdepartementet, 2013; Kunnskapsdepartementet, 2019). Det er færre kompetansemål i den nye læreplanen enn i den gamle og det er da interessant at det har blitt flere koblet til brøk. Dette kan tyde på en større vektlegging av brøk og arbeid med det i skolen.

Verbene brukt om brøkbegrepet har også endret seg. I LK06 ble verbene beskrive, bruke, uttrykke, regne, plassere, finne og utføre brukt, mens i LK20 ble verbene utforske, forklare, bruke, beskrive, vurdere, representere, oversette, diskutere, knytte, formulere, løse og utvikle brukt (Kunnskapsdepartementet, 2013; Kunnskapsdepartementet, 2019). Det kan argumenteres for at vektingen i kompetansemålene har endret seg med bakgrunn av verbendringene. Verbbruken viser hvordan kunnskapen skal anvendes av elevene og verbendringen tyder på en annen vekting av kunnskapen. Da elevene før skulle regne, finne og utføre skal de nå diskutere, representere og formulere. Derimot er det ikke særskilt at verbene bare har blitt endret rundt brøk, da det har forekommet i flere av kompetansemålene. Dette tyder på at i LK20 legges det vekt på at elever skal bruke tid på å forstå og utforske, fremfor å kun utføre.

Samtidig som det har blitt gjort endringer i verbbruk, har det også forekommet endringer i når brøk blir omtalt i læreplanen. I LK06 blir brøk først omtalt i kompetansemål etter 4. årstrinn, mens i LK20 er det nevnt i kompetansemål etter 5. årstrinn. Dette kan tolkes på ulike måter, og det er derfor interessant å se på hvordan ulike norske læreverk som *Multi* og *Matematikk* gir uttrykk for dette.

I motsetning til tiden før år 2000, har det i Norge de siste 24 årene ikke vært en godkjenningsordning for læreverk i grunnskolen. I tiden før årtusenskiftet var det Nasjonalt Læremiddelsenter som hadde ansvar for denne godkjenningen. Læreverkene ble vurdert etter læreverkets pedagogiske utforming og fagdidaktisk vurdering i forhold til læreplanens generelle del (Forskrift om godkjenning av lærebøker, 1984, § 1–9). Disse kravene eksisterer ikke lengre.

Resultatet av denne avviklingen er at forlag og forfattere selv tolker læreplaner og legge til rette innholdet i læreverkene etter beste evne. Skoler og lærer står fritt til å velge selv hvilke læreverk som de ønsker å ta i bruk, og det finnes mange å velge mellom. Jeg anser det da som spesielt nyttig å se på eventuelle forskjeller – store eller små – mellom læreverkene *Multi* og *Matematikk*, spesielt med det perspektivet at disse lærebøkene aldri har gått gjennom noen form for godkjenningsprosess.

Som Howson (2015) bemerker er en av nøkkelfaktorene for å være i stand til å forbedre matematikkundervisning er å styrke læreres *egne* matematikkunnskaper, og undervisningsevne. Howson viser til at det å endre nasjonal læreplan fører til en del omtanke og en håper også i den sammenheng forbedring. Lærere trenger derimot hjelp med denne endringen og den mest åpenbare hjelpen er lærebøker og medfølgende lærerveiledninger (Howson, 2015). Pepin og Guedet (2020) viser også til at læreverk er ett viktig verktøy for lærere med å være med å overføre læreplan til praksis (Pepin & Guedet, 2020).

Ved å utføre forskning og studie på ulike læreverk kan man få et innblikk i hva forfatterne tror matematikk er, og hvordan det kan læres og læres vekk. Man kan se at en sammenheng mellom ulike emner kan organiseres og illustreres på flere ulike vis på tvers av forskjellige læreverk. Funnene som hentes fra slike studier kan være bidragsytende til å forklare de ulikhetene som finnes i elevers læringserfaringer i forskjellige klasserom, og også på tvers av landegrenser. Slike studier, og konklusjonene som kommer av disse, kan være med på å utvikle og forbedre læreverkene i fremtiden (Johansson, 2005). I tillegg kan læreplanutviklere, lærere og flere andre som er involvert i matematikkundervisning få nyttig lærdom (Johansson, 2005).

Ved å studere ulike læreverk får en innblikk i deres tro på hva matematikk er og hvordan det kan læres. En kan se at sammenheng mellom emner kan organiseres og illustreres annerledes på tvers av læreverk. Funn fra slike studier kan være med å forklare ulikheter i elevers læringserfaringer i forskjellige klasserom og på tvers av land. For fremtiden kan også læreplanutviklere, lærere og andre som er involvert i matematikkundervisning lære av disse studiene og resultatene kan være med å utvikle og forbedre læreverk (Johansson, 2005).

Problemstilling:

I løpet av masterstudiet har jeg personlig erfart en økende interesse for lærerens viktige arbeid med å formidle matematisk kunnskap og da spesielt i sammenheng med brøk. Det er et komplekst tema med mange elementer som elevene skal lære. Læreverk er et hjelpemiddel som lærere bruker for å formidle denne kunnskapen og kan også i noen tilfeller gi føringer for undervisning. I lys av dette, er det derfor interessant å se på læreverkene og hvordan de "måler seg opp" mot den nye læreplanen.

Hvordan presenteres brøk i læreverkene Multi og Matematikk fra 1.-5.trinn?

Oppbygging av teksten

Teksten er bygget opp med flere kapitler og jeg ønsker her å gi en kort gjennomgang av innholdet i de påfølgende kapittelene. Første kapittel omhandler hovedteori, som starter med definisjonsforklaringer av brøkbegrepet. Deretter blir annen relevant teori presentert, etterfulgt av tidligere forskning gjort innenfor læreverk og brøk. Videre blir de analytiske rammeverkene brukt i studien introdusert. Etter teorikapittelet kommer metode, hvor metode brukt i forskningen blir introdusert og i tillegg blir et utvalg av læreverk som brukes i studien presentert. Deretter kommer analyse av data og validitet, samt en diskusjon om reliabilitet i studien. Deretter omtales det forskningsetiske perspektiver som må tas hensyn til i studien. I neste kapittel blir resultatene av studien lagt frem. Først blir den horisontale analysen presentert og deretter den vertikale analysen. Videre blir funnene drøftet og til slutt konkluderes studien.

Teori

Læreverk

Et læreverk er i bunn og grunn en trykket gjenstand som har til hensikt å veilede elevers arbeid gjennom året. De kan ta form av bøker, hefter, arbeidsark og/eller lærerveiledninger (Johansson, 2003). I senere tid har det også kommet digitale læreverk, og flere andre typer programvare knyttet til læreverk. Som Fan et al. (2013) skriver, har vi en lang historie med matematiske læreverk, der *Elementer* skrevet av grekeren Euklid rundt 300 fvt. ofte blir sett på som "det mest vellykkede matematiske læreverk som noen gang er skrevet" her i vesten.

Til tross for den lange eksistensen av matematiske læreverk, var det ikke før etter 1980-tallet at man kunne finne forskning gjort på matematiske læreverk. Vedrørende forskning på matematiske læreverk, skriver Fan et al. (2013) at studier kan bli delt inn i fire kategorier.

Den første kategorien er lærebøkenes rolle, der litteraturen ser på lærebøkenes rolle i matematikkundervisning.

Den andre kategorien er lærebokanalyse og sammenligning, hvor litteraturen ser på de spesifikke egenskapene til de ulike matematiske læreverkene som studeres. Denne formen for studie kan også gjøres ved å sammenligne likhetene og forskjellene til to, eller flere, serier av matematikklærebøker.

Den tredje kategorien er lærebokbruk, hvor litteraturen ser på hvordan lærebøker brukes av lærere og/eller elever. For eksempel, hvordan lærebøker former måten det å undervise og lære matematikk på.

Den siste kategorien er en samlingskategori. Her kan man finne litteratur som ikke faller inn under de andre kategoriene samlet. Det kan være studier om forholdet mellom lærebøker og elevenes prestasjoner eller studier på elektroniske lærebøker.

Johansson (2005) viser derimot til fire andre kategorier. Den første av disse kategoriene omhandler innholdet og strukturen vi finner i matematikklærebøker. I denne kategorien undersøkes karaktertrekk ved læreverk, eller det gjennomføres en innholdsanalyse av spesifikke emner innenfor matematikk. I denn kategorien kan an også studere hvordan lærebøker er rettet direkte mot offisielle mål for matematikkstudier.

Den andre kategorien ser på bruk av lærebøker i matematikkundervisningen. Dette kan gjøres ved å studere hvordan lærere bruker læreverkene i sin undervisning, eller så kan en studere hvordan forskjellige ulke læreverk blir brukt i kombinasjon av lærere i undervisning.Den tredje kategorien som Johansson (2005) bruker viser til status for lærebøker gjennom dokumentasjon og rapportering fra statenes utdanningsmyndigheter. I den siste kategorien studeres lærebøker i læreplanreformer, hvor man ser nærmere på effekten av innføringen av nye læreverk introdusert etter reform av læreplaner. Dette gjøres eksempelvis ved å se på elevers måloppnåelse.

Charalambous et al. (2011) fant gjennom sine studier at de kunne dele forskning gjort på tvers av nasjoner inn i tre brede kategorier: horisontal, vertikal og kontekstuell. I den horisontale analysen ser en på generelle trekk ved lærebøker som hvordan de ser ut, hvordan innholdet er organisert og lignende. I den vertikale analysen studeres et spesifikt matematisk emne. Til slutt kommer den kontekstuelle analysen, hvor en ser på hvordan lærebøker blir brukt i undervisning – da av enten lærere eller elever.

En kan enkelt se at det fortsatt finnes en god del variasjon innenfor studier og forskning på læreverk, og Fan et al. (2013) viser til flere aspekter som de mener må arbeides videre med dersom man skal kunne fremme forskning på matematiske læreverk. Fan et al. (2013) peker på at læreverk som regel ble sett på som en isolert identitet, og at det første steget da vil være å se på lærebøker fra et bredere perspektiv. Så vises det til at det også finnes et sterkt behov for mer bekreftende forskning på den direkte sammenhengen mellom læreboken og elevens læringsutbytte. Flere studier er ofte basert på sammenligning av utvalgte lærebøker, undersøkelse av forskjellene mellom lærebøker i forskjellige land, og sammenligning av elevenes prestasjoner i disse landene. I disse studiene mente Fan et al. (2013) at det var vanskelig å vite om de valgte lærebøkene er en god representasjon av alle tilgjengelige lærebøker, og om elevers faglige prestasjoner som var sammenlignet faktisk brukt lærebøkene som ble analysert.

Videre peker Fan et al. (2013) på at en trenger flere studier som fokuserer på prosessen med utvikling av lærebøker, da en ofte ser at forskningen har vært basert på lærebøker som et produkt. De viser også til at en må ta i bruk mer avansert og sofistikert metodikk innenfor forskningsområdet rundt læreverk, da mange studier bruker en liten skala i sin forskning med forsøkspersoner eller deltakere som ikke er tilfeldig valgt, og uten kontroll- eller sammenligningsgrupper. Til slutt ønsker Fan et al. (2013) at studier begynner å se nærmere på problemstillinger rundt bruk og utvikling av elektroniske lærebøker i matematikk, da dette er et område som har opplevd hurtig og stor utvikling.

Brøkbegrepet

Vi kan dele tall inn i forskjellige tallmengder; naturlige tall, hele tall, rasjonelle tall, irrasjonelle tall, reelle tall og komplekse tall. Brøk faller under tallmengden rasjonelle tall (Aarnes, 2021). Det er et matematisk uttrykk som skrives vanligvis med formen *a/b* der *a* og *b*. Tallet *a* kalles nevner, og tallet *b* kalles teller og streken som deler dem heter brøkstrek. Nevner uttrykker hvor mange deler enheten er delt inn i (b ≠) og hvor mange deler brøken inneholder blir uttrykt av teller (Aubert, 2021).

Det finnes forskjellige brøker med ulike navn. Stambrøker er brøker som har 1 som teller og har et positivt helt tall som nevner (Aarnes, 2017). En ekte brøk er en brøk der telleren er mindre enn nevner. Når telleren er større en nevneren kalles det en uekte brøk og da er tallet større en. Dersom en skriver den uekte brøken om til et helt tall og en ekte brøk kalles det et blandet tall. For eksempel kan 8/3 skrives som 2 ⅔ . Når vi regner med brøk kan vi både utvide og forkorte brøker. Når man utvider en brøk multipliserer vi det samme tallet med teller og nevner. Dersom vi dividerer teller og nevner med en felles faktor forkorter vi brøken.(Aubert, 2021)

For yngre elever kan det være gunstig å starte med å bruke ord for brøk, som for eksempel å si en fjerdedel heller enn å skrive ¼. Symbolet kan være vanskelig for elever å forstå, og ved å begynne med å beskrive brøk med ord kan en fokusere på forståelse av selve begrepet uten at de også skal forstå symbolet (Van de Walle et al., 2020). Det å få visualisert brøk på ulike måter er også hensiktsmessig, da det ofte i lærebøker blir vist brøk gjennom figurer som sirkler og rektangler delt i like store deler. For å få en fullstendig forståelse av begrepet bør elevene bli utsatt for ulike visuelle representasjonsformer (Van de Walle et al., 2020, s. 381). Andre måter å visualisere brøk på er med linjestykker eller brøk som en del av en mengde. Dette kan gjøres ved å for eksempel bruke mengde drops, bamser eller biler.

Van de Walle et al. (2020) påpeker at det første begrepet elever må forstå innenfor brøk er brøk som en del av en helhet. Innenfor dette begrepet er partisjonering (dele likt) og iterasjon (telling av gjentagende deler) en viktig del av forståelsen til elever. Det å dele en hel i like deler for så å dele andelen er en god måte for elever å bygge forståelse på partisjonering. De kan dele pizza, kake, kjeks, drops o.l. i like deler som skal deles likt mellom et visst antall mennesker. Elever kan øve på å telle brøkdeler, iterering, og da danne en forståelse mellom teller og nevner og at de er en del av en helhet. Dette er også en forutsetning for å forstå brøk større enn 1, som blandet tall og uekte brøk der nevner er større enn teller. Det er viktig for elever å forstå disse begrepene, og ikke bare algoritmen som de bruker (Van de Walle et al., 2020, s.386).

Lamon (2020) viser til fem begreper innenfor brøk som er viktige for at elever skal få en fullverdig forståelse av brøkbegrepet; del av hel, måling, forhold, kvotient og operatør:

Del av hel: Å bruke del av hel konstruksjon er en effektiv måte å bygge mening av brøker. Det kan være å skygge et område, en del av en gruppe av klassen, eller en del av en lengde (Van de Walle et al., 2020). Her er det viktig at elevene forstår at det hele skal deles i like store deler, ellers kan elever danne misoppfatninger (Lamon, 2020).

Måling: Måling innebærer å identifisere en lengde og deretter bruke den lengden som en måleenhet for å bestemme lengden på et objekt. For eksempel, i brøken $\frac{5}{8}$, kan man bruke stambrøken $\frac{1}{8}$ som enhet og telle eller måle for å vise at det tar fem av disse enhetene for å nå $\frac{5}{8}$. Med andre ord, $\frac{5}{8}$ er tenkt som 5 ganger $\frac{1}{8}$. Elevene ser da brøker som multipler av stambrøk (Van de Walle et al., 2020).

Forhold: Begrepet forholdstall er enda en annen kontekst der brøk brukes. For eksempel er 3:4 et forhold der man har 3 A-er sammenlignet, i en multiplikativ snarere enn en additiv betydning, med 4 B-er. (Lamon, 2020).

Kvotient: Som med hele tall betyr divisjon deling i like store grupper. På grunn av de meningsfulle forbindelsene som kan knyttes til likeverdig deling, noe unge elever forstår, bør brøkundervisning bygge på erfaringer med deling og partisjonering. Et eksempel på en oppgave som illustrerer dette er følgende: “Fire venner deler 8 kjeks og sørger for at hver venn får samme mengde. Hvor mange kjeks får hver venn?” Eleven kan med slike oppgaver øve på å representere mengden som en brøk som også er et svar på et brøkstykke (Van de Walle et al., 2020).

Operator: Brøk som operator bygger på konseptet om å se på en brøk som et multiplum av en stambrøk. Brøk kan brukes til å indikere en operasjon, som $\frac{4}{5}$ av 20 m^2, eller $\frac{2}{3}$ av et publikum. Disse situasjonene indikerer en brøkdel av et helt tall, og elevene kan kanskje bruke mental matematikk for å finne svaret (Van de Walle et al., 2020).

Sammenligner man inndelingen til Van de Walle et al. (2020) og Lamon (2020), ser en at det er mange fellestrekk, men selve inndelingen av begreper er annerledes.

Vanskeligheter med brøk

Brøk er et emne som er grunnleggende om en skal få en god forståelse for algebra. En studie gjort på datasett fra USA og Storbritannia viste at kunnskap om brøk i 5. klasse kan forutsi prestasjon innen generell matematikk i 10. klasse (Siegler et al., 2012). Dermed kan det å ha en grunnleggende forståelse for brøk være en god predikator for videre utvikling av matematisk kunnskap. Flere studier viser derimot at mange elever har dårlig forståelse av brøk (Van de Walle et al., 2020, s. 377).

Ettersom jeg skal se på begrepet brøk og hvordan det blir innført, er det hensiktsmessig å se på hva elever syns er utfordrende med brøk. Lortie-Forgues et al. (2015) peker på minst syv kilder til vanskeligheter for å mestre brøkregning som er til stede uavhengig av hvilket utdanningssystem og kulturen til eleven. Vanskelighetene involverer brøkdelnotasjon, tilgjengelighet av brøkstørrelser, ugjennomsiktighet for standard brøkaritmetiske prosedyrer, komplekse forhold mellom rasjonelle og heltallsaritmetiske prosedyrer, komplekse forhold mellom rasjonelle og heltall i aritmetiske prosedyrer, motsatt retning av effektene ved å multiplisere og dele positive brøker under og over én, og rent antall distinkte komponenter i brøkregningsprosedyrer (Lortie-Forgues et al., 2015).

Ved vanskeligheter med brøkdelnotasjon viser Lortie-Forgues et al. (2015) til at brøk har en annen konfigurasjon en heltall. De har tre deler; en teller, en nevner og en linje som skiller tallene. Elever kan ha vanskeligheter med å lese brøk. Tar en brøk $\frac{1}{2}$ som eksempel kan elever lese det som to heltall (1 og 2), lese det som en aritmetisk operasjon (1+2) eller lese det som et heltall (12). Videre vil det være krevende å regne med brøker da det krever mer kognitive ressurser å opprettholde to brøker i arbeidsminnet en to hele tall (Lortie-Forgues et al., 2015)

I motsetning til hele tallstørrelser, må brøkstørrelser forstås ut ifra forholdet mellom to verdier. Dette reduserer nøyaktigheten, hastigheten og automatikken når elever skal få tilgang til størrelsesrepresentasjonene for brøk. Å få tilgang til brøkstørrelse krever også forståelse av heltall divisjon, som ofte blir sett på den vanskeligste av de fire aritmetiske operasjonene. Dette tyder til at barn må gå gjennom en grunnleggende omorganisering av forståelsen av tall før de kan representere brøker (Lortie-Forgues et al., 2015).

I tillegg peker Lortie-Forgues et al. (2015) på vanskeligheten ved ugjennomsiktighet for standard brøkaritmetiske prosedyrer. Det vil si at elever kan ha vanskeligheter med å forstå de aritmetiske prosedyrene for brøk, da de er langt fra åpenbare. Ett spørsmål elever kan ha er: Hvorfor nevnere må være like når de skal addere og subtrahere, men ikke ved multiplikasjon og divisjon? Svar på slike spørsmål krever ofte forståelse for algebra, noe som vanligvis læres etter brøk og som gjør at elever mangler relevant kunnskap for å få forståelse for brøkalgoritmer (Lortie-Forgues et al., 2015).

Videre ser en at kartleggingen mellom aritmetiske prosedyrer for heltall og brøk er kompleks. For addisjon og subtraksjon med like nevnere blir tellere lagt til eller subtrahert som om de var hele tall, mens nevneren får ingen endringer. For multiplikasjon blir tellere multiplisert med teller og nevnere multiplisert med nevner. Dermed blir de behandlet som om de var uavhengige multiplikasjonsproblemer med hele tall, uavhengig av om nevnerne er like. For standard divisjonsprosedyre inverteres nevneren, og deretter teller og nevner behandles som om de var uavhengig multiplikasjon av hele tall problemer. Disse komplekse relasjonene mellom heltall og brøkprosedyrer bidrar sannsynligvis til utbredelsen av uavhengige heltallsfeil, som det å addere teller med teller og nevner med nevner (Lortie-Forgues et al., 2015).

Tilsvarende vil det være vanskeligheter med relasjoner mellom prosedyrer for ulike brøkaritmetiske operasjoner. For eksempel det å legge til og trekke fra brøker med en lik nevner krever å la nevneren være uendret i svaret, mens multiplisering av brøker med en lik nevner krever å multiplisere nevnerne. Dette kan føre til at elever blander de ulike prosedyrene og gjøre at elever regner feil som $2/3 * 2/3 = 4/3$ (Lortie-Forgues et al., 2015).

Retning av effekter ved å multiplisere og dele ekte brøk. Det å forstå retningen til effektene av å multiplisere og dele ekte brøker (de mellom 0 og 1) utgjør spesielle problemer for elevene. Multiplisering av naturlige tall resulterer alltid i et produkt som er større enn begge faktorene, men multiplikasjon av to ekte brøk resulterer alltid i et produkt mindre enn begge faktorene. På samme måte vil det å dividere et naturlig tall aldri gi en kvotient som er større enn dividend, men å dele med ekte brøk gjør det. Dette er vanskeligheten som ble kalt motsatt retning av effektene ved å multiplisere og dele positive brøker under og over én (Lortie-Forgues et al., 2015).

Den siste vanskeligheten er at ved brøkregning er det et stort antall prosedyrer som må læres. Elever trenger dermed ferdigheter i alle fire hele tallaritmetiske prosedyrer, samt mestring av prosedyrer for å finne ekvivalente brøker, forenkle brøker, konvertere brøker til blandede tall og blandede tall til uekte brøker, vite om man skal invertere telleren eller nevneren når man deler brøker, og forstå når like nevnere opprettholdes i svaret (addisjon og subtraksjon) og når operasjonen i oppgaven skal brukes på nevneren så vel som telleren (multiplikasjon og divisjon) (Lortie-Forgues et al., 2015).

I tillegg til de syv iboende kildene til vanskeligheter for å mestre brøkregning, så finnes det også kulturelt betingede variabler. Disse kulturelt betingede variablene inkluderer undervisningen elevene møter og deres tidligere relevante kunnskaper, som påvirker i hvilken grad de kan overvinne de iboende vanskelighetene.

Imidlertid betyr iboende ikke uoverkommelig; i land med overlegne utdanningssystemer og kulturer som setter stor pris på matematikkundervisning, overvinner de fleste elevene vanskelighetene. Som de peker på i teksten sin så kan en se på hvordan det kan være normalt i noen land, slik som i Norge, at en kan si at en ikke kan matte og at det er greit, men i for eksempel Korea er det ikke kulturelt akseptabelt (Lortie-Forgues et al., 2015).

Videre har Yoshida og Kooji Sawano (2002) undersøkt hvordan kunnskap om like deler og lik hel kunne gi elever en dypere forståelse for brøk. De peker på at elever kan ha uformell kunnskap om like deler i brøk, slik som halvparten, allerede fra barnehagen. I tillegg viser de til at barn kan dele en hel i like store deler før de har lært om brøk. Men selv om de har uformell kunnskap om like deler så er det vist at det ikke er så lett for elevene å forstå det, for eksempel når figurer er delt ulikt i forhold til det vanlige antall deler i en slik hel. Videre ser de på at når en representerer et tall mindre enn én, bør størrelsen på én som helhet være av samme størrelse for alle brøker. Dette er en grunnleggende kunnskap for lik hel.

Van de Walle et al. (2020) mener at brøkinnlæringen burde starte allerede i første klasse da elever trenger betydelig tid og erfaring for å utvikle en dyp forståelse av emnet. (Van de Walle et al, 2020, s.378). Videre er likeverdige brøker enda et begrep som er viktig, men også ofte misforstått av elever. De må oppleve ulike kontekster og modeller med likeverdige brøker for å kunne forstå at en brøk kan skrives på flere måter (Van de Walle et al., 2020, s.400). Keijzer (2003) viser til at det er spesielt viktig å arbeide med likeverdige brøker og sammenligning av brøker for å utvikle et godt brøkbegrep.

Tidligere forskning på brøk i læreverk

Det har vært mange studier som ser på brøk i læreverk. Mange av studiene (Hellestø, 2017; Hwang et al., 2021; Rahmawati et al., 2020; Tokheim, 2015; Vula et al., 2015) bruker rammeverket til Charalambous et al. (2010), eller en variasjon av dette et rammeverk i sine studier. Dette rammeverket ble laget av Charalambous et al. (2010) da de opplevde mangelen på koherens i kriterier for læreboksammenligninger på tvers av studier. Det gjorde det vanskelig for leserne å foreta meningsfulle sammenligninger og å gjenskape analysene som ble utført i disse studiene. Av den grunn utviklet de et rammeverk som integrerte vertikale og horisontale analyser og er eksplisitt om hva som analyseres, noe som gjør sammenligninger lettere på tvers av lærebøker og land.

Videre ser noen studier på læreverk på tvers av land, mens andre ser på læreverk innenfor ett land. Studier som ser på læreverk i internasjonal sammenheng har forskjellig bakgrunn for hvorfor de ser på de ulike læreverkene fra ulike land. Noen studier ser på sammenheng mellom nasjonale studieresultater og læreverk. Yang ser på læreverk i Finland og Taiwan som begge skårer høyt i PISA (Yang, 2017). Alajmi (2011) foretok en analyse av læreverk i tre land med bakgrunn i at de har ulike ytelsesnivåer i TIMSS. Japanske elever i fjerde klasse presterte godt; elever i fjerde klasse i USA presterte litt over gjennomsnittet på TIMSS-skalaen og kuwaitiske elever presterte dårlig. Hwang et al. (2021) gjorde en komparativ analyse av læreverk i USA og Sør-Korea på bakgrunn av at de presterer ulikt på TIMSS; der USA presterer dårlig og Sør-Korea har gode resultater.

Alajmi (2011) sine funn viser til at USA og Kuwaitiske lærebøker er større enn japanske lærebøker, men at det kobles til at det er mer repetisjon i disse bøkene. Det var også en forskjell i når brøk blir introdusert for elevene da USA og Kuwait introduserer det i første klasse, mens de japanske læreverkene ikke tar for seg brøk før tredje klasse (Alajmi, 2011). Videre viser resultater fra Hwang et al. og Li et al. at læreverk fra land som presterer høyt ofte har mer kognitivt utfordrende oppgaver (Hwang et al., 2021; Li et al., 2009), mens Vula et al. peker på mangel av kognitivt utfordrende oppgaver i lærebøkene i Kosovo og Albania som presterer lavt i internasjonale studier (Vula et al., 2015).

I kategorien studier som utelukkende ser på læreverk i ett enkelt land blir det studert ulike begreper innenfor brøk og sammenlignet på tvers av læreverk for å se ulikheter mellom dem (Cady et al., 2015; Rahmawati et al., 2019; Sun, 2019). Cady et al. (2015) sine funn tyder på at læreverkene som blir undersøkt mangler sammenheng i deres prestasjoner av brøkbegrepet, noe som står i motsetning til læreplanen i USA (Cady et al., 2015). Rahmawati et al. har gjennom sin forskning sett at det er viktig for forskere, forfattere og utviklere av læreplaner å legge vekt på ulike forklaringer til å introdusere brøk. De viser til at kontekstbaserte oppgaver kan hjelpe å forbedre bevisstheten og kunnskapen til elever om hvordan man bruker brøk i hverdagen (Rahmawati et al.,2019).

Det finnes noen masteroppgaver i Norge der forfatterne ser på norske læreverk. Tokheim har sett på tre norske læreverk i matematikk for 1. trinn der fokuset var å se på ulikheter og likheter mellom læreverkene (Tokheim, 2015), og Hellestø har sett på ett læreverk og hvordan det legger til rette for elevers arbeid med brøk på 2.- 7. trinn (Hellestø, 2017). Fokuset i den sistnevnte studien var å se på forståelse, tilpasset opplæring og motivasjon (Hellestø, 2017). Resultatene av de ulike masteroppgavene i Norge viser at *Multi* som læreverk har mangler på oppgaver som har større kognitive krav (Hellestø, 2017; Tokheim, 2015). Tokheim ser også på hvordan de grunnleggende ferdighetene i læreplanen kobles opp mot de ulike læreverkene. Funnene viser at de legger opp til ferdighetene på ulike måter, mens læreverket *Matematikk* ikke har fokus på digitale ferdigheter (Tokheim, 2015).

Gjennom denne litteraturgjennomgangen ser man at det er flere studier som har undersøkt brøk i læreverk da det er et tema som er krevende for elever. Flere bruker også det samme rammeverket som gjør at det blir en kontinuitet mellom flere studier der en kan se sammenhenger mellom flere læreverk. Det finnes derimot få studier som ser på hvordan brøk blir omtalt i læreplaner og hvordan sammenhengen er opp mot læreverk. Det er noen studier som ser på dette i andre land (Cady et al, 2015; Rahmawati et al. 2019; Yang, 2018) og en i Norge (Tokheim, 2015), men i mitt litteratursøk var det ingen norske studier som omhandlet den nye læreplanen som kom i 2020.

Analytisk rammeverk

I gjennomgang av litteraturen har jeg funnet at det er en kjensgjerning at elever i barneskolen har vanskeligheter med å lære brøk. Kunnskap om brøk er en predikasjon for fremtidige ferdigheter innenfor matematikk. Dermed er det viktig å legge til rette for elevers læring av brøk slik at de kan få en grunnleggende forståelse av begrepet, og danne minst mulig misoppfatninger. Av denne grunn har jeg valgt å studere hvordan læreverk innfører brøk og sammenhengen mellom dette og læreplanen.

Det finnes flere rammeverk som man kan bruke under en læreverksanalyse. Gjennom min litteraturstudie har jeg sett at mange bruker Charalambous et al. (2010) sitt rammeverk i sine studier, og jeg ønsker å bruke det samme da dette rammeverket gjør det mulig å sammenligne funn på tvers av studier. Som nevnt tidligere ble dette rammeverket dannet da Charalambous et al. (2010) skulle utføre en læreverksanalyse og opplevde en mangel på koherens i kriterier for læreboksammenligninger på tvers av studier i tidligere brukte rammeverk. Flere studier brukte det Charalambous et al. (2010) omtaler som en *horisontal analyse*. En slik analyse ser på antall sider, størrelse på sidene og emne og emneinndeling. Dette gir mye informasjon, men går ikke i dybden på hvordan forfattere behandler innholdet. En *vertikal analyse* går derimot i dybden da den fokuserer mer på analyse av innholdet (Charalambous et al., 2010). Charalambous et al. opplevde at bruken av forskjellige og ulike metoder på tvers av studier ledet til store utfordringer for leseren. Det ble vanskelig å utføre meningsfulle sammenligninger, og det å gjenskape analysene som ble gjort i studiene opplevdes unødvendig komplisert. Av den grunn utviklet Charalambous et al. (2010) et rammeverk som integrerte vertikale og horisontale analyser.

Charalambous et al. (2010) utviklet gjennom sin studie et rammeverk for analyse av matematiske læreverk der en ser på to kategorier: horisontal og vertikal analyse. For å gi rammeverket struktur dannet de ulike kategorier og underkategorier. Den horisontale analysen har to kategorier: bakgrunnsinformasjon og overordnede struktur. Den første kategorien, bakgrunnsinformasjon, inneholder tittel på læreverk, antall bøker, antall sider, profil/portrett/biografi av forfattere og rådgivende komite, forlag og utgivelsesår, tilleggslitteratur som lærerveiledning og andre ressurser. Dette gir en beskrivende oversikt over læreverket og bakgrunnen for produksjonen. Den andre kategorien, overordnede struktur, ser på antall emner og sidetall per emne, strukturen på emnene, emner som blir dekket, og emnenes inndeling. Dette gir innblikk i emner og organisering av dem.

Den vertikale analysen har tre kategorier; kommunisert til elever, elevkrav og sammenheng. Den første kategorien refererer til hvordan læreboken formidler matematikken til elevene. Denne kategorien inneholder også tre underkategorier: matematisk innhold, matematiske praksiser og holdninger til faget. Den andre kategorien refererer til krav som læreboka har til elevene. Denne har to underkategorier som er; potensielle kognitive krav og typer respons. Den tredje kategorien er sammenheng og ser på sammenhenger mellom matematiske emner, mellom læreboken og annet klasseromsarbeid, og til situasjoner utenfor skolen. Nedenfor er en figur laget for å vise rammeverket:

HORIZONTAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Background Information	Overall Structure
• Title • Number of books • Pages (Number and Density) • Profile of authors and advisory committee • Publisher and year of publication • Accompanying materials (e.g., teachers' guides, resource materials)	• Number of units/lessons and average number of pages per unit/lesson • Structure of units/lessons • Topics covered • Sequencing of topics

VERTICAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Communicated to Students	Required of Students	Connections
Mathematical Content • Topic-specific construct, structure etc. (e.g. part-whole, ratio, operator, quotient, measure fraction constructs) • Definitions, rules, conventions • Illustrations-representations (irrelevant, relevant to the context but not to the mathematics, supporting the mathematics)	• Potential Cognitive Demands (memorization, procedures with connections, procedures without connections, doing mathematics) • Type of Response (answer only, answer and mathematical sentence, explanation, justification)	• Connecting within and between strands • Classroom instruction - textbook connections • Connecting to situations outside of school
Mathematical Practices • Worked examples • Modeling thinking		
Attitudes • Equity • View of mathematics		

Key: Dimension: Uppercase letters; Categories: bold; Sub-categories: italicized; Criteria: bulleted points.

Figur 1. Fra « A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries" av C. Y. Charalambous, S. Delaney, H. Y. Hsu og V. Mesa, 2010, *Mathematical thinking and learning*, 12(2), s. 123 (https://doi.org/10.1080/10986060903460070)

Cady et al. (2015) utformet en modell for å kode brøkoppgaver da de studerte hvordan brøk blir introdusert i læreverk. Denne modellen ser på fire faktorer som de fant i sin litteraturstudie som de bruker til sin koding. Faktorene er representasjoner, kontekst, visuelle modeller, aspekter ved brøk og matematiske konsepter. Innenfor representasjonene blir oppgaver kodet etter om de bruker ord, symboler, bilder, oppgaver fra den virkelige verden og konkreter. Videre blir oppgaver kodet etter kontekst der de ser på om de omhandler matlaging, vitenskap, handling, penger, deling, sport, «discrete mixtures» som frukt og nøtter, «continuous mixtures» som væske, ingen kontekst eller andre. Ved visuelle modeller blir oppgaven kodet etter om de bruker lengde, areal eller mengde modell. Innenfor aspekter ved brøk sees det på om oppgavene inneholder aspekter av brøk som; del av hel, tall/måling, forhold, kvotient og operator. Den siste faktoren er matematiske konsepter og da sees det på om oppgaven inneholder tema som sammenligning av brøk, uekte eller blandet tall, likeverdige brøk, ekvivalens mellom brøk, desimaltall og/eller prosent, estimere brøk, stambrøk, invers eller regning med brøk. Under er kategoriene og kodene Cady et al. (2015) brukte i studien:

Representation Mode
1. Words
2. Symbols
3. Pictures
4. Real world
5. Manipulatives

Problem Context
1. Cooking
2. Science
3. Shopping
4. Money
5. Sharing
6. Sports
7. Discrete mixtures—fruit/nut mix
8. Continuous mixtures—liquids
9. No context (naked)
10. Other

Models
1. Length
2. Region/area
3. Set

Representation Mode
1. Words
2. Symbols
3. Pictures
4. Real world
5. Manipulatives

Interpretation
1. Part/whole
2. Measurement/quantity
3. Ratio
4. Quotient
5. Operator

Concepts
1. Magnitude–comparing/ordering
2. Improper fractions and mixed number
3. Equivalence–fraction-to-fraction
4. Equivalence–decimal/percent/fraction
5. Benchmarks/estimation
6. Unit fraction
7. Reciprocal
8. Computation

Figur 2. Fra "A comparison of textbooks' presentation of fractions. School Science and Mathematics" av J. A. Cady, T. E. Hodges og R. L. Collins, 2015, 115(3), s. 109. (https://doi.org/10.1111/ssm.12108)

Metode

I forskning er det viktig at vi «gjør rede for de fremgangsmåtene vi anvender, og hvordan vi vurderer sammenhenger mellom teoretisk utgangspunkt, problemstilling og opplegg for utvikling og analyse av data» (Thaagard, 2018, s.14). Dette er med på å gi grunnlag for utenforstående til å vurdere kvaliteten av forskningsarbeidet (Thaagard, 2018). I dette delkapitlet skal jeg gjøre rede for mine valg i min studie.

Forskningsdesign

Målet med denne studien er, som nevnt i innledningen, å svare på problemstillingen «Hvordan presenteres brøk i læreverkene *Multi* og *Matematikk* fra 1.-5.trinn?». Det finnes flere metoder som man kan ta i bruk for å svare på denne problemstillingen. En metode som kan tas i bruk er å gjennomføre en kvantitativ tilnærming, hvor en analyserer tekst ut ifra forhåndsdefinerte kategorier og beregner antall enheter i hver kategori (Thaagard, 2018). Alternativt så kan man bruke en kvalitativ tilnærming i tekstanalysen der tekstens meningsinnhold blir fortolket av forskeren på grunnlag av de virkemidler som anvendes i teksten (Thaagard, 2018).

I denne studien skal jeg se på innholdet i ulike tekster og tolke hvordan det kobles opp mot ulik teori og forskning. Det er derfor hensiktsmessig å bruke en kvalitativ metode for tekstanalyse, der jeg i tillegg bruker en kvantitativ tilnærming med forhåndsdefinerte kategorier og beregner antall enheter i hver kategori. Dette vil gjøre det mulig å kunne se nærmere på hvordan emnet brøk blir introdusert. Ettersom jeg skal bruke ulike kategorier til koding av tekstdataen basert på eksisterende teoretisk rammeverk blir analysen jeg gjør en innholdsanalyse (Fauskanger & Mosvold, 2014).

Johansen (2005) peker på funn fra tidligere studier som viser til hvorfor innholdsanalyser av læreverk er meningsfulle. De matematiske emnene i læreverkene blir ofte presentert av lærere, men vi ser videre at de emnene som ikke finnes i læreverkene sjelden blir brakt inn i klasserommet. Videre ser en at lærerne introduserer emner i samme rekkefølge som læreverket gjør, og at læreres pedagogiske strategier er ofte påvirket av materialets instruksjonstilnærming. Til slutt sier lærere at læreverk ofte er en primær informasjonskilde som er med på å forme undervisning og hvordan innhold presenteres (Johansson, 2005) .

Utvalg – Valg læreverk og trinn

For grunnskolen finnes det flere matematiske læreverk, for eksempel; *Matematikk* (Barentsforlaget), *Multi* (Gyldendal), *Matematikk* (Cappelen Damm), *Volum* (Fagbokforlaget) og *Matemagisk* (Aschehoug). Det finnes også flere digitale læreverk, men de har som regel oppgaver med svaralternativer og blir dermed annerledes enn de mer tradisjonelle lærebøkene. For denne studien valgte jeg å se på lærebøker i skriftlig form og valgte *Matematikk* fra Barentsforlaget og *Multi* fra Gyldendal. Dette er bøker jeg selv har erfaringer med fra praksis, og som jeg opplever har forskjellig utforming og tilnærming i forhold til hverandre.

Boken *Multi* er bygget opp etter klare tema, hvor brøk stort sett finnes i sin modul, mens boken *Matematikk* tar opp brøk som tema gjennom hele boken. Den forskjellige oppbygningen og tilnærmingen i disse to bøkene er grunnen til at de er valgt. Er en utforming mer effektiv som måte å innføre brøk til elever enn en annen? Er det mer hjelpsomt å holde brøk som et klart definert tema, eller å hente brøk frem igjen med jevne mellomrom? Dette er noe av spørsmålene som jeg skal undersøke og besvare i analysen som kommer.

Ettersom brøk blir nevnt i LK20 som mål etter 5. årstrinn blir det hensiktsmessig å se på læreverk opptil 5. trinn. Jeg fikk låne læreverket *Matematikk* fra veilederen min og fra skolen jeg arbeider på.

Læreverket *Multi* fikk jeg låne av en kontaktlærer fra en annen skole. Jeg har ikke brukt de nyeste versjonene av lærebøkene, men brukte de jeg fikk tilgang til. Mer nøyaktig beskrivelse av utgavene av læreverkene brukt i denne studien finnes i analysen lengre nede.

Analyse av data

Horisontal analyse

Jeg startet den horisontale analysen ved å finne informasjon i læreverkene og nettsidene til de ulike forlagene. Der fant jeg informasjon om selve læreverkene og om forfatterne. For *Multi* var det mye informasjon på nettsidene til Gyldendal om selve læreverket og det var skrevet en liten biografi om hver av forfatterne. Her var det også mye informasjon om de digitale læremidlene de har tilgjengelig. På nettsidene til Barentsforlaget fantes det en salgside for læreverket, men det var ikke så mye ekstra informasjon skrevet om læreverkene eller forfatttere. Der fant jeg derimot en nettside som het *Matematikk landet,* som er en nettside som omhandler utviklende matematikk. Her fant jeg mye om bakgrunnen for dannelsen av læreverket *Matematikk*, men ikke så mye informasjon om selve læreverkene. Det var heller ingen oversikt med forfatterne, så jeg måtte lete gjennom nettsiden for å finne informasjon om dem. Den ene forfatteren var det ingen informasjon om på nettsiden, så det måtte gjøres et generelt nettsøk for å kunne finne litt informasjon.

For å danne en oversikt over informasjonen, laget jeg en tabell med generell informasjon om læreverket *Multi* og *Matematikk*. Jeg laget så en tabell for å vise informasjon som utgave, utgivelsesår, antall sider og størrelse på læreverkene For å få bedre innblikk i læreverkene valgte jeg å skrive informasjon som jeg fant på nettsidene om læreverkene slik at den som leser studien kan få innblikk i tanken bak dannelsen av læreverkene. I tillegg ble det lagt en tabell med oversikt over de ulike kapittelene i læreverkene. Dette ble gjort slik at man kan se når de ulike læreverkene presenterer brøk og utføre en sammenligning. Videre ble det lagt til litt informasjon om forfatterne slik at man kan få en fornemmelse for hvem som har produsert litteraturen i læreverkene.

Vertikal analyse

I denne studien har jeg tilpasset rammeverkene slik at de passer til forskningsspørsmålet mitt. Charalambous et al. (2010) baserte sin studie på addisjon av brøk, og av den grunn ville jeg også bruke Cady et al. (2015) som et sekundært rammeverk, da Cady et al. (2015) studerte hvordan brøk blir introdusert i læreverk. Cady et al. (2015) sitt rammeverk har derimot andre grunnlag for sin koding da de ser på konteksten knyttet til oppgavene, og om oppgavene var fra den virkelige verden. For min egen studie var det ikke like nødvendig å gå i dybden etter hvilken type kontekst som er knyttet til oppgavene – om den var fra den virkelige verden eller ikke. Dermed falt valget heller på å se om det finnes kontekst eller ikke. Nedenfor er en tabell som viser de ulike kategoriene jeg brukte i kodingen i denne studien:

<table>
<tr><td>Representasjoner</td><td>Modell</td></tr>
<tr><td>1. Ord
2. Symboler
3. Bilder
4. Konkreter</td><td>1. Areal
2. Mengde
3. Linje</td></tr>
<tr><td>Kontekst</td><td>Aspekter ved brøk</td></tr>
<tr><td>1. Kontekst</td><td>1. Del av hel
2. Tall, måling
3. Forhold
4. Kvotient
5. Operator</td></tr>
<tr><td colspan="2">Konsepter</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Sammenligne brøker
2. Uekte/Blandet tall
3. Likeverdige brøker
4. Ekvivalens mellom brøk, desimaltall og/eller prosent
5. Estimere brøk
6. Stambrøk
7. Invers
8. Regning med brøk</td></tr>
</table>

Tabell 1. Kategorier brukt under koding

Videre vil jeg beskrive hver av kategoriene i tabellen ovenfor, og gi eksempler på oppgaver og hvordan de blir kodet. Jeg har prøvd å finne lignende oppgaver fra *Multi* og *Matemematikk* der de presenterer like emner innenfor brøk.

Representasjoner

Ord: Oppgaver som bruker ord for brøk som halv, halvparten, kvart, teller, nevner, stambrøk og lignende ble kodet til å inneholde ord. Under er et eksempel fra Multi Elevbok 2A og et annet eksempel fra Matematikk Grunnbok 3B. I disse oppgavene brukes bare ord, og det finnes ingen symboler for brøk.

Figur 3. Fra "Multi Elevbok 2A" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2020c, s. 65.

332 a) Hva er felles for oppgavene?

I) To brødre delte 6 kjeks likt. Hvor mange fikk hver av dem?
II) To brødre delte 2 kjeks likt. Hvor mange fikk hver av dem?
III) To brødre delte 1 kjeks likt. Hvor mange fikk hver av dem?

b) Hvilken regneoperasjon vil du bruke for å løse oppgavene? Skriv ned et uttrykk til hver oppgave.

c) Kan du finne verdien til hvert av uttrykkene? Skriv ned de verdiene du kan bestemme.

d) Kan verdien til det tredje uttrykket skrives med et naturlig tall? Begrunn.

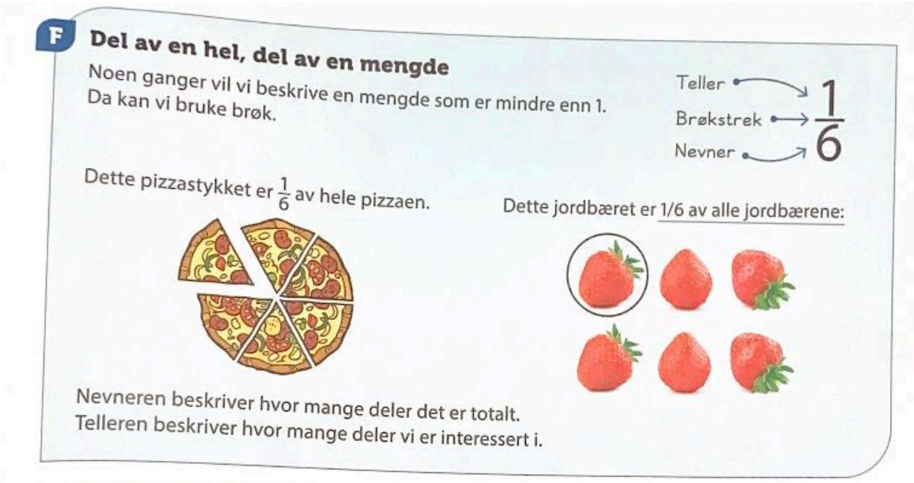
e) Er du enig i at vi ikke kan skrive verdien til det tredje uttrykket som et naturlig tall siden hver av brødrene fikk en halv kjeks, som er mindre enn det minste naturlige tallet **èn**?

Når vi deler i to like deler sier vi ofte at hver del utgjør **halvparten**, men vi kan også si at vi får **en halv** av det vi delte. To like halvdeler utgjør til sammen *det hele*.

Tallet **en halv** kalles en **brøk**.

Figur 4. Fra "Matematikk Grunnbok 3B" av Arginskaya et al., 2016b, s. 70

Symboler: I oppgaver som bruker symboler for brøk, som for eksempel brøkstrek, ble de kodet til å inneholde symboler. Nedenfor er eksempler fra Multi Elevbok 5A og Matematikk Grunnbok 3B. Begge oppgavene introduserer bruk av brøkstrek.


F **Del av en hel, del av en mengde**

Noen ganger vil vi beskrive en mengde som er mindre enn 1.
Da kan vi bruke brøk.

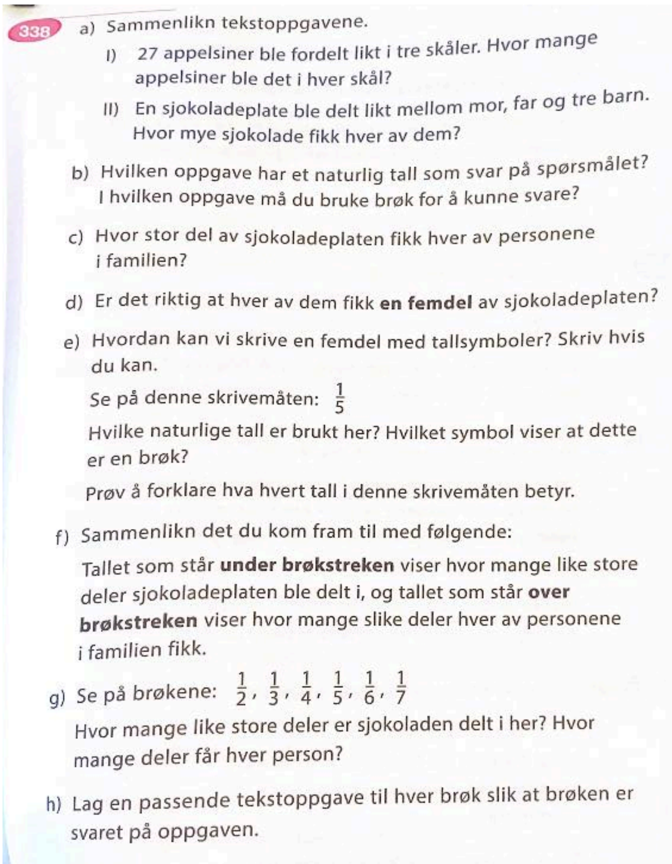
Teller → 1
Brøkstrek → —
Nevner → 6

Dette pizzastykket er $\frac{1}{6}$ av hele pizzaen.

Dette jordbæret er 1/6 av alle jordbærene:

Nevneren beskriver hvor mange deler det er totalt.
Telleren beskriver hvor mange deler vi er interessert i.

Figur 5. Fra "Multi Elevbok 5A" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2020f, s. 45.


338 a) Sammenlikn tekstoppgavene.

I) 27 appelsiner ble fordelt likt i tre skåler. Hvor mange appelsiner ble det i hver skål?

II) En sjokoladeplate ble delt likt mellom mor, far og tre barn. Hvor mye sjokolade fikk hver av dem?

b) Hvilken oppgave har et naturlig tall som svar på spørsmålet? I hvilken oppgave må du bruke brøk for å kunne svare?

c) Hvor stor del av sjokoladeplaten fikk hver av personene i familien?

d) Er det riktig at hver av dem fikk **en femdel** av sjokoladeplaten?

e) Hvordan kan vi skrive en femdel med tallsymboler? Skriv hvis du kan.

Se på denne skrivemåten: $\frac{1}{5}$

Hvilke naturlige tall er brukt her? Hvilket symbol viser at dette er en brøk?

Prøv å forklare hva hvert tall i denne skrivemåten betyr.

f) Sammenlikn det du kom fram til med følgende:

Tallet som står **under brøkstreken** viser hvor mange like store deler sjokoladeplaten ble delt i, og tallet som står **over brøkstreken** viser hvor mange slike deler hver av personene i familien fikk.

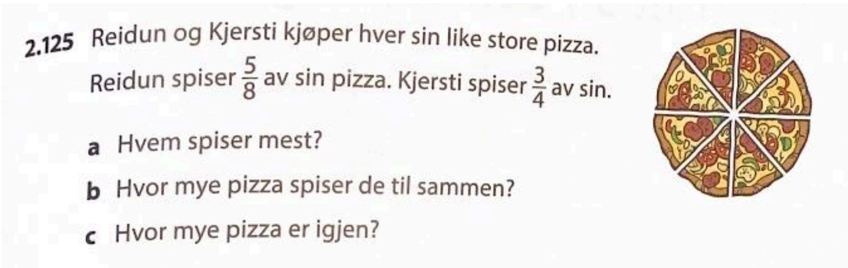
g) Se på brøkene: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$

Hvor mange like store deler er sjokoladen delt i her? Hvor mange deler får hver person?

h) Lag en passende tekstoppgave til hver brøk slik at brøken er svaret på oppgaven.

Figur 6. Fra "Matematikk Grunnbok 3B" av Arginskaya et al., 2016b, s. 70

Bilder: I oppgaver som bruker bilder må bildene ha en matematisk kobling til oppgaven dersom de skulle kodes til å inneholde bilder. Det vil si at om det var et bilde på siden som ikke omhandlet oppgaven, ble det ikke oppgaven kodet til å inneholde bilder. Under er eksempler fra Multi Elevbok 5A og Matematikk Grunnbok 5A som begge bruker bilder av pizza i oppgaver som handler om brøk.



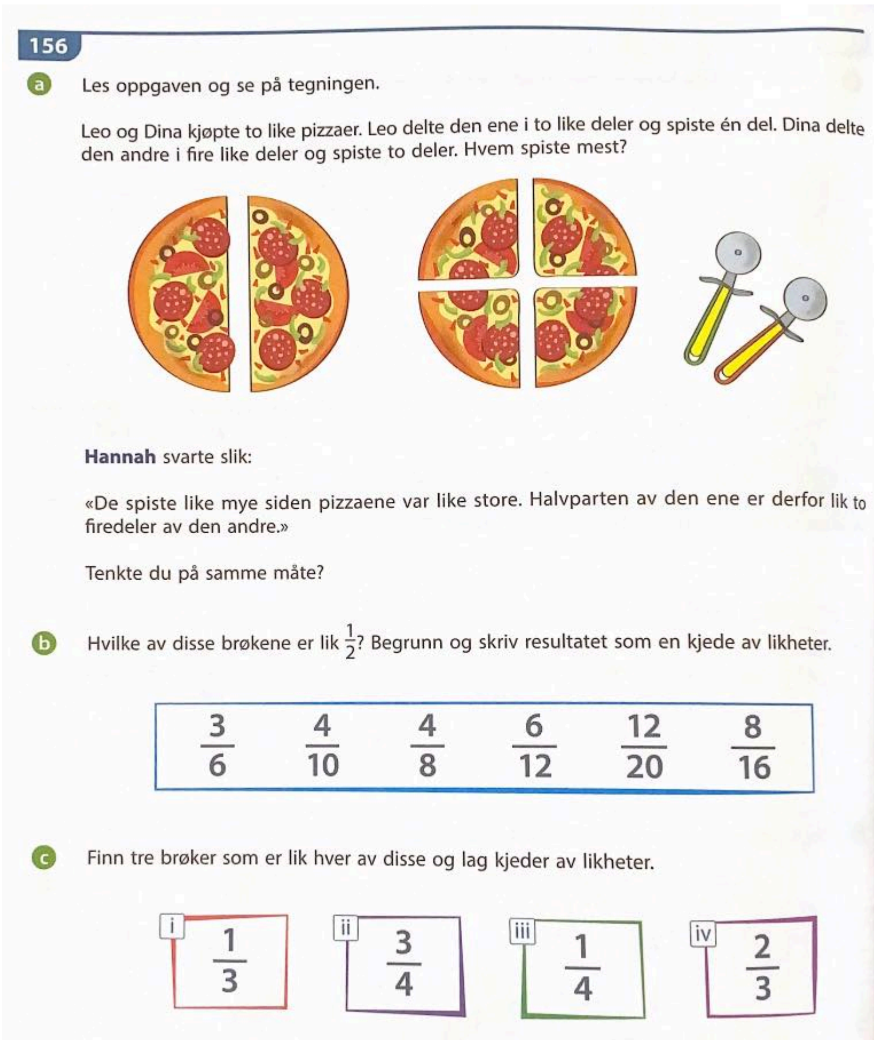
2.125 Reidun og Kjersti kjøper hver sin like store pizza.
Reidun spiser $\frac{5}{8}$ av sin pizza. Kjersti spiser $\frac{3}{4}$ av sin.

a Hvem spiser mest?

b Hvor mye pizza spiser de til sammen?

c Hvor mye pizza er igjen?

Figur 7. Fra “Multi Elevbok 5A” av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2020f, s. 81.



156

a Les oppgaven og se på tegningen.

Leo og Dina kjøpte to like pizzaer. Leo delte den ene i to like deler og spiste én del. Dina delte den andre i fire like deler og spiste to deler. Hvem spiste mest?

Hannah svarte slik:

«De spiste like mye siden pizzaene var like store. Halvparten av den ene er derfor lik to firedeler av den andre.»

Tenkte du på samme måte?

b Hvilke av disse brøkene er lik $\frac{1}{2}$? Begrunn og skriv resultatet som en kjede av likheter.

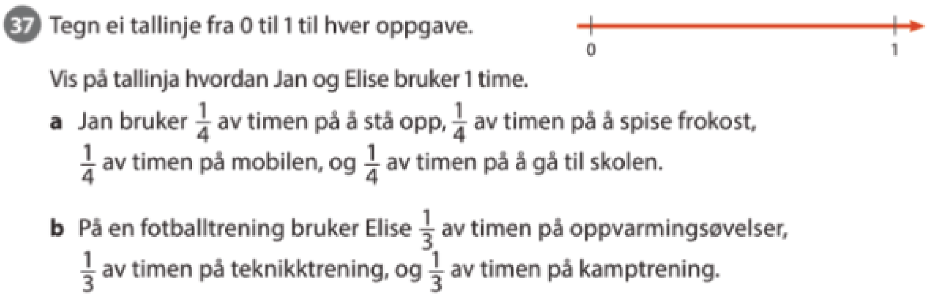
$\frac{3}{6}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{12}{20}$ $\frac{8}{16}$

c Finn tre brøker som er lik hver av disse og lag kjeder av likheter.

i $\frac{1}{3}$ ii $\frac{3}{4}$ iii $\frac{1}{4}$ iv $\frac{2}{3}$

Figur 8. Fra “Matematikk Grunnbok 5A” av Aslanov et al., 2018, s. 168

Konkreter: I oppgaver som bruker konkreter kan konkretene være fysiske, som terninger, kortstokk og linjal, eller de kan være visuelle, som for eksempel et bilde av konkreter som tallinjer/linjer, centikuber eller lignende. Nedenfor er eksempler fra Multi Elevbok 4B og Matematikk Grunnbok 3B, som begge bruker tallinje som konkret i arbeid med brøk.



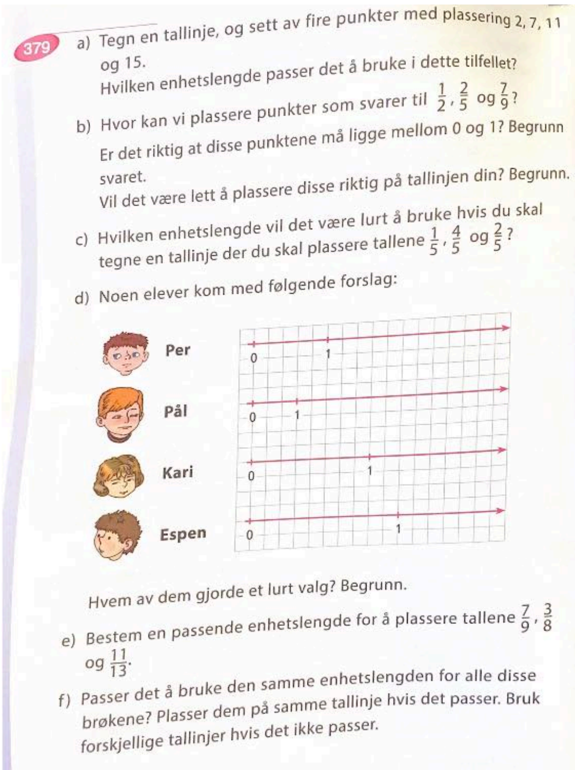
37 Tegn ei tallinje fra 0 til 1 til hver oppgave.

Vis på tallinja hvordan Jan og Elise bruker 1 time.

a Jan bruker $\frac{1}{4}$ av timen på å stå opp, $\frac{1}{4}$ av timen på å spise frokost, $\frac{1}{4}$ av timen på mobilen, og $\frac{1}{4}$ av timen på å gå til skolen.

b På en fotballtrening bruker Elise $\frac{1}{3}$ av timen på oppvarmingsøvelser, $\frac{1}{3}$ av timen på teknikktrening, og $\frac{1}{3}$ av timen på kamptrening.

Figur 9. Fra "Multi Elevbok 4B" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2021c, s. 19.



379 a) Tegn en tallinje, og sett av fire punkter med plassering 2, 7, 11 og 15.
Hvilken enhetslengde passer det å bruke i dette tilfellet?

b) Hvor kan vi plassere punkter som svarer til $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ og $\frac{7}{9}$?
Er det riktig at disse punktene må ligge mellom 0 og 1? Begrunn svaret.
Vil det være lett å plassere disse riktig på tallinjen din? Begrunn.

c) Hvilken enhetslengde vil det være lurt å bruke hvis du skal tegne en tallinje der du skal plassere tallene $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ og $\frac{2}{5}$?

d) Noen elever kom med følgende forslag:

Hvem av dem gjorde et lurt valg? Begrunn.

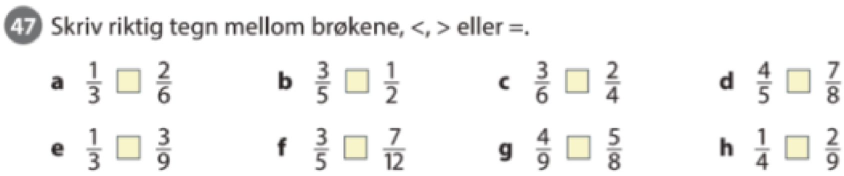
e) Bestem en passende enhetslengde for å plassere tallene $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{8}$ og $\frac{11}{13}$.

f) Passer det å bruke den samme enhetslengden for alle disse brøkene? Plasser dem på samme tallinje hvis det passer. Bruk forskjellige tallinjer hvis det ikke passer.

Figur 10. Fra "Matematikk Grunnbok 3B" av Arginskaya et al., 2016b, s. 90

Kontekst

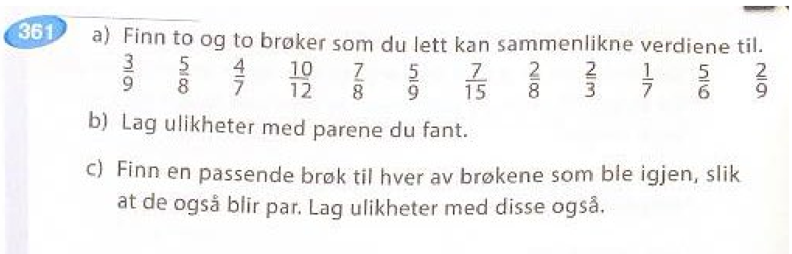
Kontekst: I oppgaver som har kontekst er de som regel knyttet til det virkelige liv, mens oppgaver uten kontekst er bare rent matematiske oppgaver uten noen som helst kobling til det virkelige liv. Under finnes noen eksempler uten kontekst fra Multi Elevbok 4B og Matematikk Grunnbok 3B.


47 Skriv riktig tegn mellom brøkene, <, > eller =.

a $\frac{1}{3} \square \frac{2}{6}$ b $\frac{3}{5} \square \frac{1}{2}$ c $\frac{3}{6} \square \frac{2}{4}$ d $\frac{4}{5} \square \frac{7}{8}$

e $\frac{1}{3} \square \frac{3}{9}$ f $\frac{3}{5} \square \frac{7}{12}$ g $\frac{4}{9} \square \frac{5}{8}$ h $\frac{1}{4} \square \frac{2}{9}$

Figur 11. Fra “Multi Elevbok 4B” av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2021c, s. 25.


361 a) Finn to og to brøker som du lett kan sammenlikne verdiene til.

$\frac{3}{9}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{10}{12}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{15}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{9}$

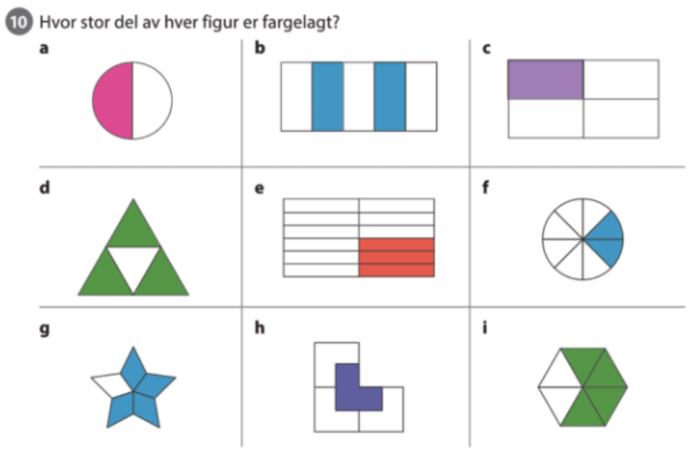
b) Lag ulikheter med parene du fant.

c) Finn en passende brøk til hver av brøkene som ble igjen, slik at de også blir par. Lag ulikheter med disse også.

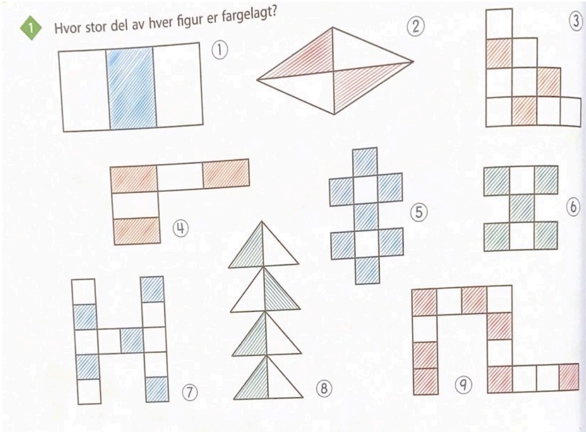
Figur 12. Fra “Matematikk Grunnbok 3B” av Arginskaya et al., 2016b, s. 82

Modell

Areal: I oppgaver som ble kodet til å inneholde arealmodell går oppgavene ut på å bruke areal i brøkoppgaven. Nedenfor er eksempler på oppgaver som inneholder arealmodell fra Multi Elevbok 4B og Matematikk Grunn 3B.



Figur 13. Fra “Multi Elevbok 4B” av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2021c, s. 9.



Figur 14. Fra "Matematikk Grunnbok 5B" av Aslanov et al., 2018b, s. 152

Mengde: I oppgaver som ble kodet til å inneholde mengdemodell gikk oppgavene ut på å bruke mengde i brøkoppgaven. Under er eksempler på oppgaver som ble kodet til å inneholde mengde fra Multi Elevbok 5A og Matematikk Grunnbok 4B.

2.97 I et blomsterbed er det 60 tulipaner. En tredel av tulipanene er høye, resten er lave. Av de høye tulipanene er en firedel gule. Hvor mange høye, gule tulipaner er det i bedet?

Figur 15. Fra "Multi Elevbok 5A" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2020f, s. 73.

433 Løs oppgaven.

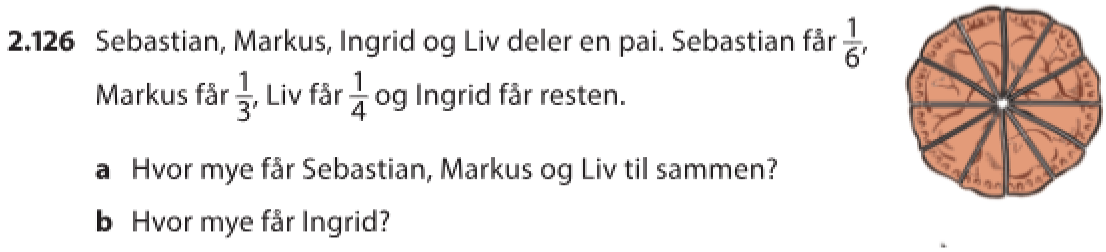
Tre personer plukket til sammen 540 steinsopper. Én plukket $\frac{7}{18}$ av alle soppene, og en annen plukket $\frac{4}{9}$ av alle soppene. Hvor mange sopper plukket den tredje?

Figur 16. Fra "Matematikk Grunnbok 4B" av Arginskaya et al., 2017a, s. 87

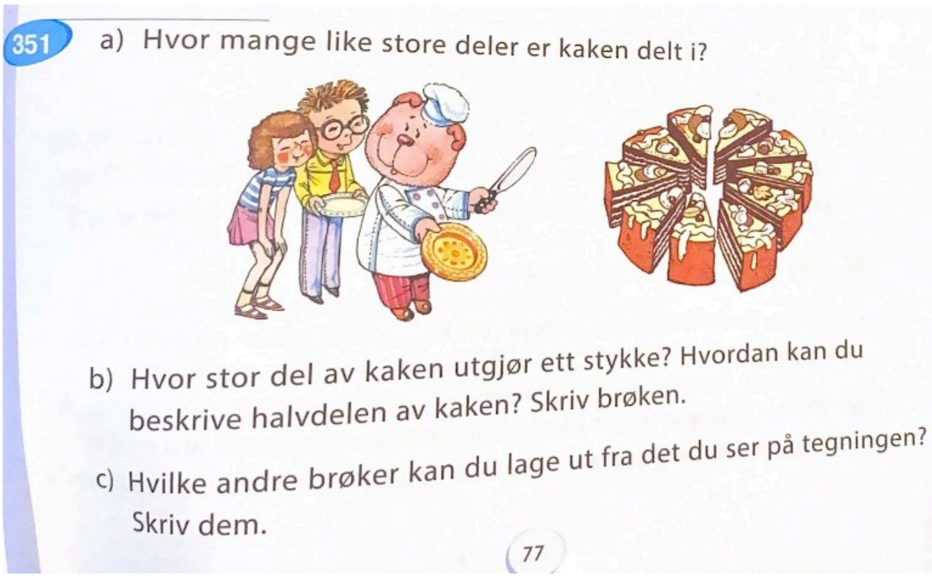
Linje: I oppgaver som ble kodet til å inneholde linje-modell gikk oppgaven ut på å bruke linje i brøkoppgaven. Eksempel på dette kan en se på Figur 9 og Figur 10.

Aspekter ved brøk

Del av hel: Oppgaver med aspektet del av hel kunne handle om at oppgaven presenterte hva en hel er og elevene skulle finne deler av den. Enten ved å tegne eller regne. Under er eksempler på oppgaver som inneholdt aspektet del av hel fra Multi Elevbok 5A og Matematikk Grunnbok 3B.

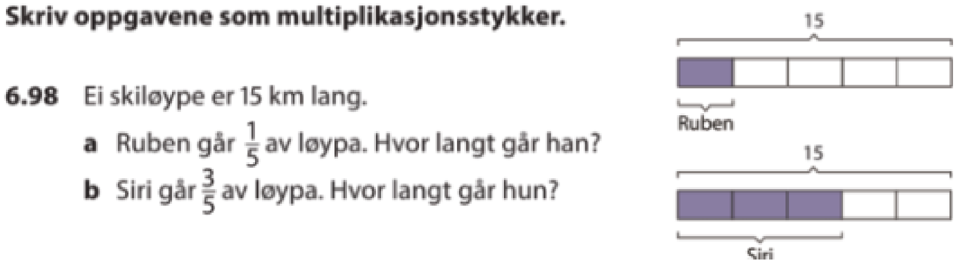


Figur 17. Fra "Multi Elevbok 5A" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2020f, s. 81.



Figur 18. Fra "Matematikk Grunnbok 3B" av Arginskaya, 2016b, s. 77

Tall, måling: Oppgaver med aspekt tall, måling innebærer å identifisere en lengde og deretter bruke den lengden som en måleenhet for å bestemme lengden på et objekt (Van de Walle et al., 2020). Nedenfor er eksempler på oppgaver som inneholder aspektet tall, måling fra Multi Elevbok 5B og Matematikk Grunnbok 3B.

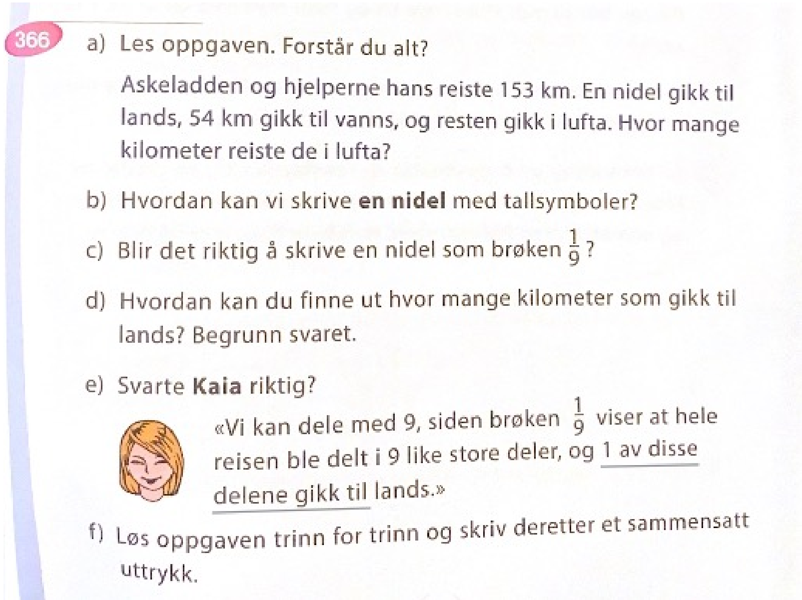

Skriv oppgavene som multiplikasjonsstykker.

6.98 Ei skiløype er 15 km lang.

a Ruben går $\frac{1}{5}$ av løypa. Hvor langt går han?

b Siri går $\frac{3}{5}$ av løypa. Hvor langt går hun?

Figur 19. Fra “Multi Elevbok 5B” av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2021d, s. 63.


366 a) Les oppgaven. Forstår du alt?

Askeladden og hjelperne hans reiste 153 km. En nidel gikk til lands, 54 km gikk til vanns, og resten gikk i lufta. Hvor mange kilometer reiste de i lufta?

b) Hvordan kan vi skrive **en nidel** med tallsymboler?

c) Blir det riktig å skrive en nidel som brøken $\frac{1}{9}$?

d) Hvordan kan du finne ut hvor mange kilometer som gikk til lands? Begrunn svaret.

e) Svarte **Kaia** riktig?

«Vi kan dele med 9, siden brøken $\frac{1}{9}$ viser at hele reisen ble delt i 9 like store deler, og 1 av disse delene gikk til lands.»

f) Løs oppgaven trinn for trinn og skriv deretter et sammensatt uttrykk.

Figur 20. Fra “Matematikk Grunnbok 3B” av Arginskaya et al., 2016b, s. 83

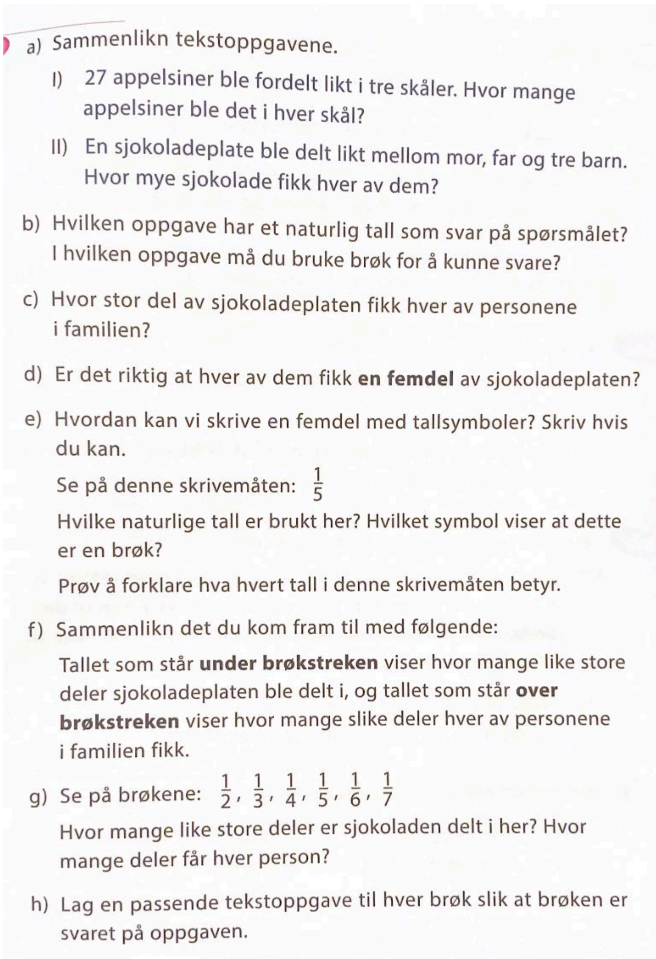
Forhold: I oppgaver som inneholdt aspekt forhold blir brøk representer med formelen a:b, som for eksempel være 3:4 er et forhold der det er 3 A-er sammenlignet, i en multiplikativ snarere enn en additiv betydning, til 4 B-er (Lamon, 2020). Det var derimot ingen oppgaver av denne typen som ble kodet i Muli eller i Matematikk.

Kvotient: I oppgaver som omhandler aspekt kvotient blir brøk presenter som likeverdig deling. Oppgavene vil ofte representere brøk som et svar på en divisjonsoppgave (Van de Walle et al., 2020). Under er eksempler på en slik oppgave fra Multi Elevbok 5B og Matematikk Grunnbok 3B.

U **6.63** Hvor mye får hver hvis tre barn skal dele

a ei sjokoladeplate?
b to lakrisstenger?
c fire boller?

Figur 21. Fra "Multi Elevbok 5B" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Rømseland, 2021d, s. 50.



a) Sammenlikn tekstoppgavene.

I) 27 appelsiner ble fordelt likt i tre skåler. Hvor mange appelsiner ble det i hver skål?

II) En sjokoladeplate ble delt likt mellom mor, far og tre barn. Hvor mye sjokolade fikk hver av dem?

b) Hvilken oppgave har et naturlig tall som svar på spørsmålet? I hvilken oppgave må du bruke brøk for å kunne svare?

c) Hvor stor del av sjokoladeplaten fikk hver av personene i familien?

d) Er det riktig at hver av dem fikk **en femdel** av sjokoladeplaten?

e) Hvordan kan vi skrive en femdel med tallsymboler? Skriv hvis du kan.

Se på denne skrivemåten: $\frac{1}{5}$

Hvilke naturlige tall er brukt her? Hvilket symbol viser at dette er en brøk?

Prøv å forklare hva hvert tall i denne skrivemåten betyr.

f) Sammenlikn det du kom fram til med følgende:

Tallet som står **under brøkstreken** viser hvor mange like store deler sjokoladeplaten ble delt i, og tallet som står **over brøkstreken** viser hvor mange slike deler hver av personene i familien fikk.

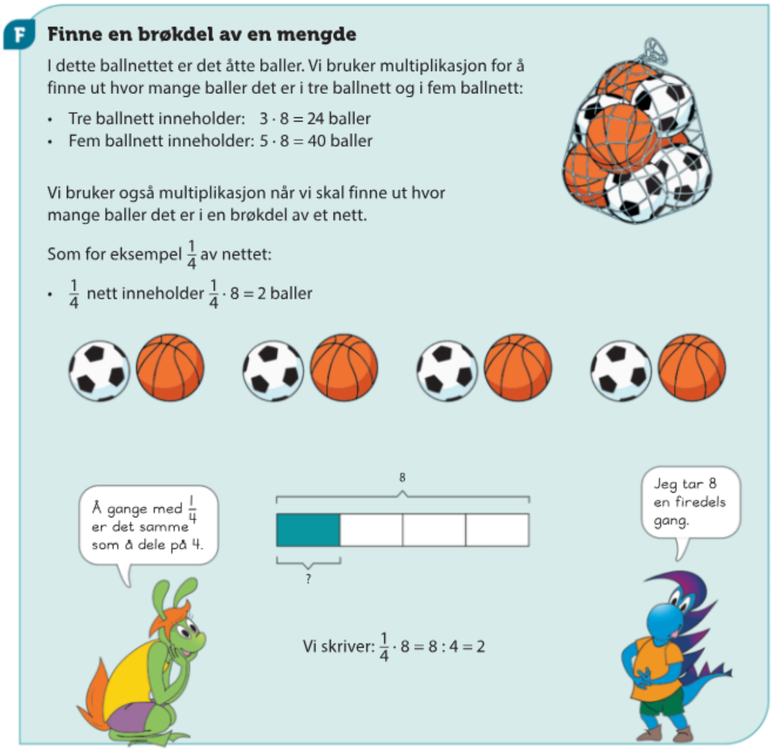
g) Se på brøkene: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$

Hvor mange like store deler er sjokoladen delt i her? Hvor mange deler får hver person?

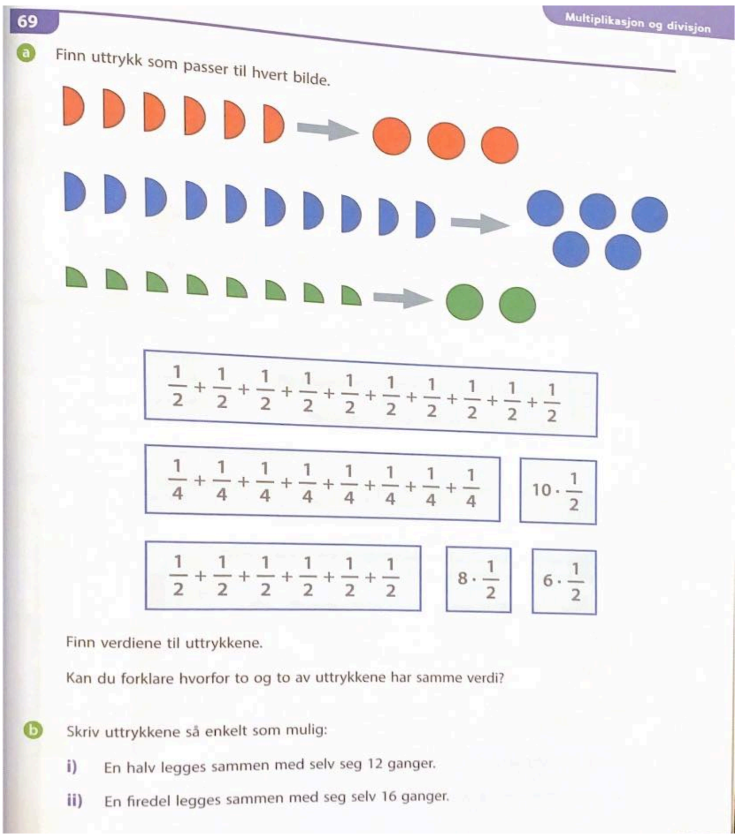
h) Lag en passende tekstoppgave til hver brøk slik at brøken er svaret på oppgaven.

Figur 22. Fra "Matematikk Grunnbok 3B" av Arginskaya et al., 2016b, s. 73

Operator: I oppgaver med aspektbrøk som operator vil en ofte se en brøk som et multiplum av en stambrøk (Van de Walle et al., 2020). Under vises eksempler på slike oppgaver fra Multi Elevbok 5B og Matematikk Grunnbok 5A.



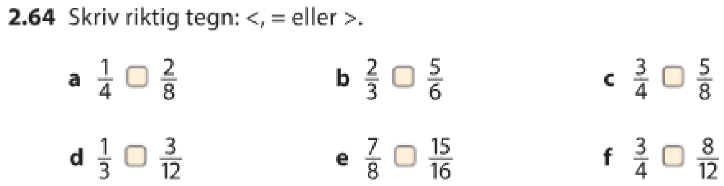
Figur 23. Fra “Multi Elevbok 5B” av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2021d, s. 46.



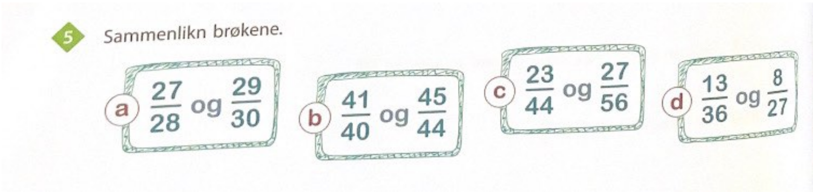
Figur 24. Fra “Matematikk Grunnbok 5A” av Aslanov et al., 2018a, s. 83

Konsepter

Sammenligne brøker: Oppgaver med konseptet å sammenligne brøker er ofte basert på å danne ulikheter og likheter med brøk eller ved å for eksempel å lage tallinje med brøk. Nedenfor er eksempler for slike oppgaver fra Multi Elevbok 5A og Matematikk Grunnbok

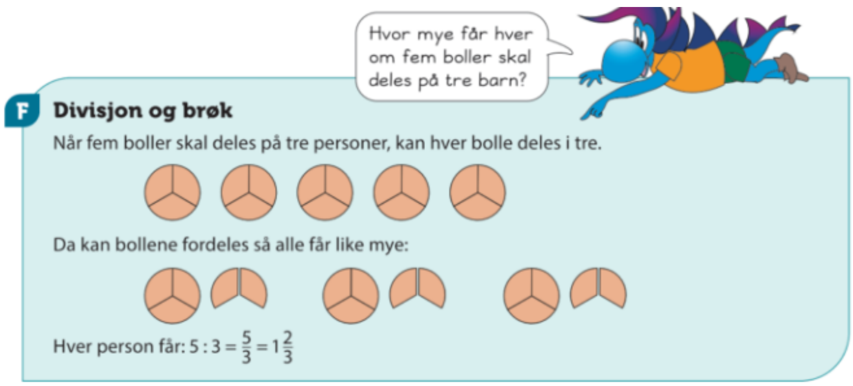


Figur 25. Fra "Multi Elevbok 5A" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2020f, s. 64

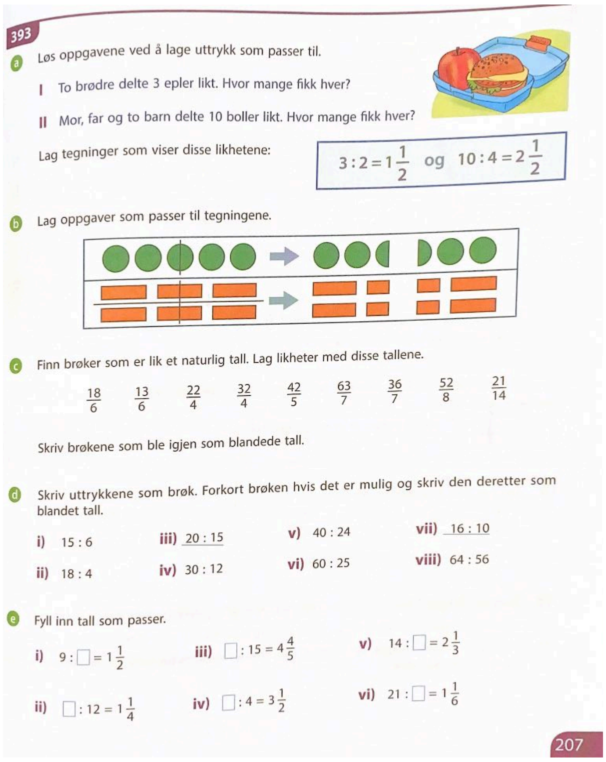


Figur 26. Fra "Matematikk Grunnbok 5B" av Aslanlov et al., 2018b, s. 194

Uekte/Blandet tall: I oppgaver med konseptet uekte og blandet tall vil en ofte gjøre om uekte brøk til blandet tall eller gjøre blandet tall om til uekte brøk. I slike oppgaver kan en også addere, subtrahere, multiplisere og dividere med uekte brøk og blandet tall. Under er eksempler for slike oppgaver fra Multi Elevbok 5B og Matematikk Grunnbok 5B.



Figur 27. Fra "Multi Elevbok 5B" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2021d, s. 50


393
a Løs oppgavene ved å lage uttrykk som passer til.
I To brødre delte 3 epler likt. Hvor mange fikk hver?
II Mor, far og to barn delte 10 boller likt. Hvor mange fikk hver?
Lag tegninger som viser disse likhetene: $3:2=1\frac{1}{2}$ og $10:4=2\frac{1}{2}$

b Lag oppgaver som passer til tegningene.

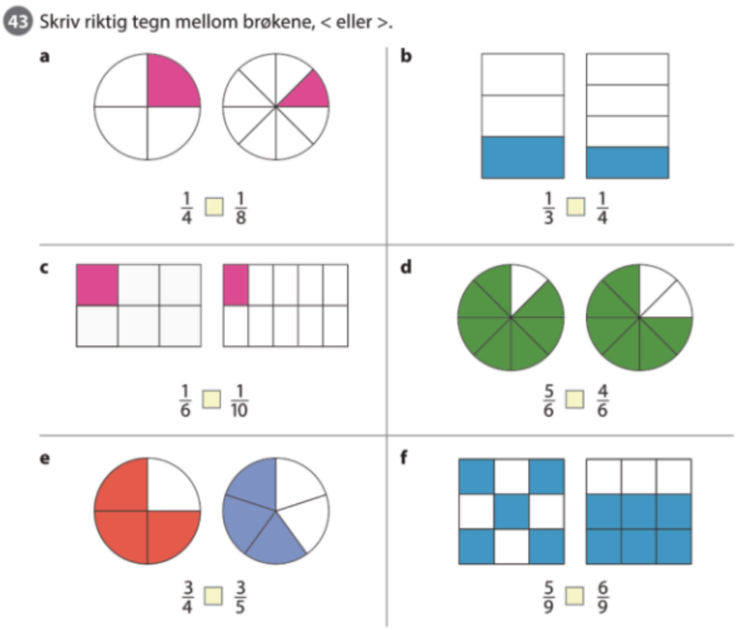
c Finn brøker som er lik et naturlig tall. Lag likheter med disse tallene.
$\frac{18}{6}$ $\frac{13}{6}$ $\frac{22}{4}$ $\frac{32}{4}$ $\frac{42}{5}$ $\frac{63}{7}$ $\frac{36}{7}$ $\frac{52}{8}$ $\frac{21}{14}$
Skriv brøkene som ble igjen som blandede tall.

d Skriv uttrykkene som brøk. Forkort brøken hvis det er mulig og skriv den deretter som blandet tall.
i) 15 : 6 iii) 20 : 15 v) 40 : 24 vii) 16 : 10
ii) 18 : 4 iv) 30 : 12 vi) 60 : 25 viii) 64 : 56

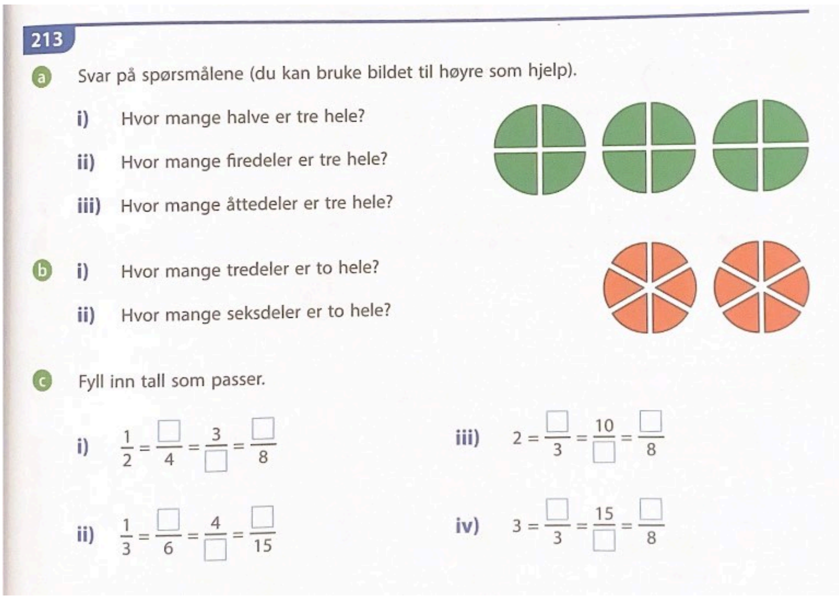
e Fyll inn tall som passer.
i) $9 : \square = 1\frac{1}{2}$ iii) $\square : 15 = 4\frac{4}{5}$ v) $14 : \square = 2\frac{1}{3}$
ii) $\square : 12 = 1\frac{1}{4}$ iv) $\square : 4 = 3\frac{1}{2}$ vi) $21 : \square = 1\frac{1}{6}$
207

Figur 28. Fra “Matematikk Grunnbok 5B” av Aslanov et al., 2018b, s. 207

Likeverdige brøk: I oppgaver som omhandler konseptet likeverdig brøk vil en ofte utvide og forkorte brøker. Nedenfor er eksempel på slike oppgaver fra Multi Elevbok 4B og Matematikk Grunnbok 5B.


43 Skriv riktig tegn mellom brøkene, < eller >.
a $\frac{1}{4} \square \frac{1}{8}$
b $\frac{1}{3} \square \frac{1}{4}$
c $\frac{1}{6} \square \frac{1}{10}$
d $\frac{5}{6} \square \frac{4}{6}$
e $\frac{3}{4} \square \frac{3}{5}$
f $\frac{5}{9} \square \frac{6}{9}$

Figur 29. Fra “Multi Elevbok 4B” av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2021c, s. 23


213

a) Svar på spørsmålene (du kan bruke bildet til høyre som hjelp).

i) Hvor mange halve er tre hele?

ii) Hvor mange firedeler er tre hele?

iii) Hvor mange åttedeler er tre hele?

b) i) Hvor mange tredeler er to hele?

ii) Hvor mange seksdeler er to hele?

c) Fyll inn tall som passer.

i) $\frac{1}{2} = \frac{\square}{4} = \frac{3}{\square} = \frac{\square}{8}$

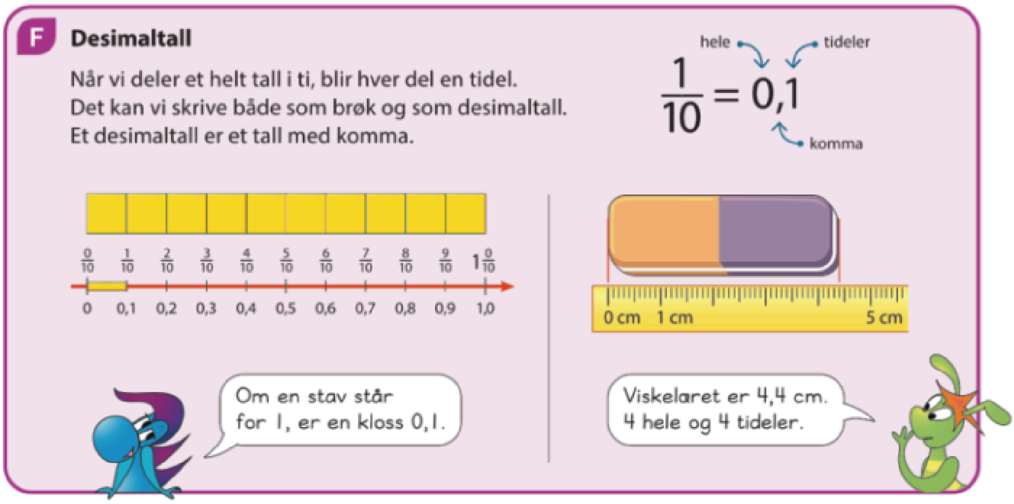
ii) $\frac{1}{3} = \frac{\square}{6} = \frac{4}{\square} = \frac{\square}{15}$

iii) $2 = \frac{\square}{3} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{8}$

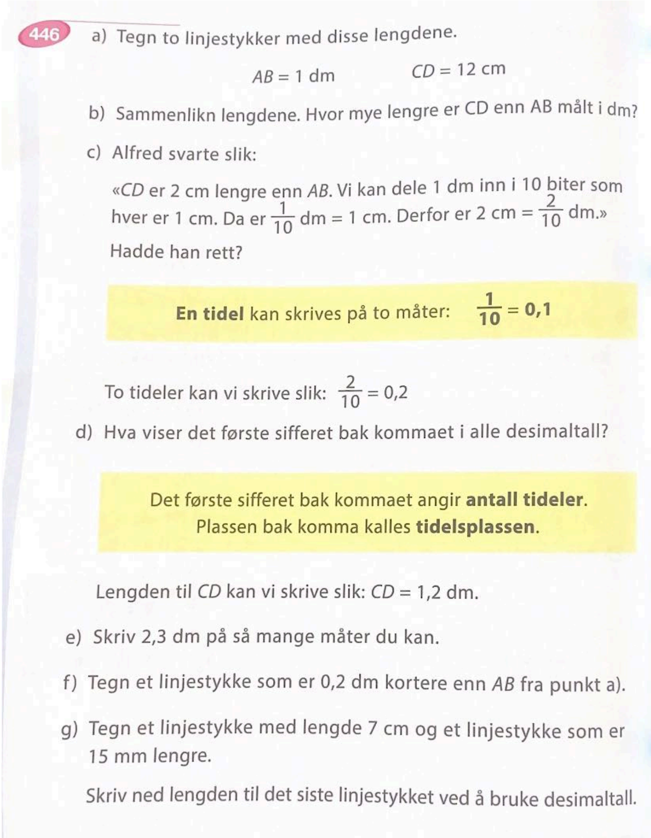
iv) $3 = \frac{\square}{3} = \frac{15}{\square} = \frac{\square}{8}$

Figur 30. Fra “Matematikk Grunnbok 5B” av Aslanov et al., 2018b, s. 27

Ekvivalens mellom brøk, desimaltall og/eller prosent: I oppgaver blir konseptet ekvivalens mellom brøk, desimaltall ofte basert på å se sammenheng mellom disse konseptene. Man jobber ofte med å gjøre brøk om til desimaltall eller ved å gjøre desimaltall om til brøk. En kan også se oppgaver som bruker ord for brøk som halv, brøk ½, 0,5 og 50% der alle disse presenterer samme verdi. Under er eksempler på oppgaver som inneholder konsept ekvivalens mellom brøk, desimaltall og/eller prosent fra Multi Elevbok 4B og Matematikk Grunnbok 4BF



Figur 31. Fra “Multi Elevbok 4B” av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Rørseland, 2021c, s. 26



446 a) Tegn to linjestykker med disse lengdene.

AB = 1 dm *CD* = 12 cm

b) Sammenlikn lengdene. Hvor mye lengre er CD enn AB målt i dm?

c) Alfred svarte slik:

«*CD* er 2 cm lengre enn *AB*. Vi kan dele 1 dm inn i 10 biter som hver er 1 cm. Da er $\frac{1}{10}$ dm = 1 cm. Derfor er 2 cm = $\frac{2}{10}$ dm.»

Hadde han rett?

En tidel kan skrives på to måter: $\frac{1}{10} = 0{,}1$

To tideler kan vi skrive slik: $\frac{2}{10} = 0{,}2$

d) Hva viser det første sifferet bak kommaet i alle desimaltall?

Det første sifferet bak kommaet angir **antall tideler**.
Plassen bak komma kalles **tidelsplassen**.

Lengden til *CD* kan vi skrive slik: *CD* = 1,2 dm.

e) Skriv 2,3 dm på så mange måter du kan.

f) Tegn et linjestykke som er 0,2 dm kortere enn *AB* fra punkt a).

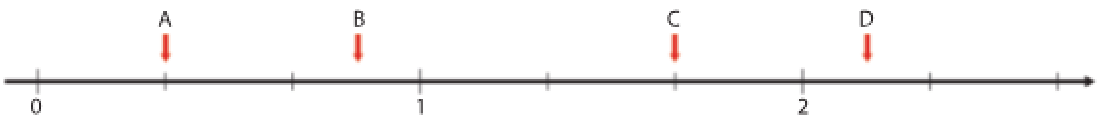
g) Tegn et linjestykke med lengde 7 cm og et linjestykke som er 15 mm lengre.

Skriv ned lengden til det siste linjestykket ved å bruke desimaltall.

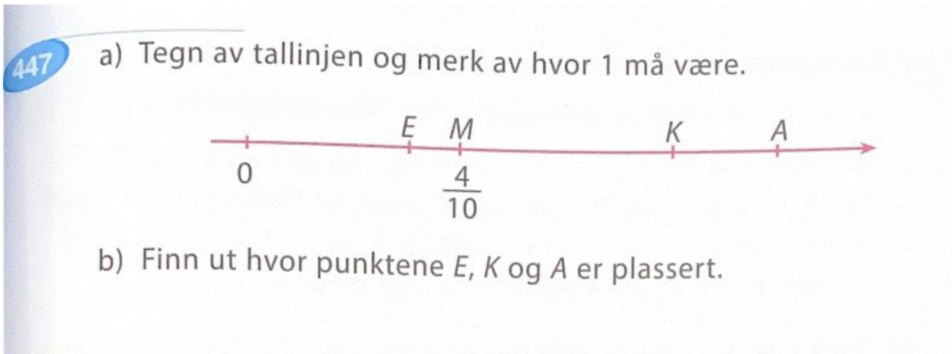
Figur 32. Fra "Matematikk Grunnbok 4B" av Arginskaya et al., 2017b, s. 94

Estimere brøk: I oppgaver der elever arbeider med konseptet å estimere brøk brukes ofte en tallinje/linje der elevene skal estimere hvor brøk skal plasseres, eller hvilke brøk piler peker på. Under er eksempel på slike oppgaver fra Multi Elevbok 5A og Matematikk Grunnbok 4B.

2.104 Hvilke tall peker pilene på?



Figur 31. Fra "Multi Elevbok 5A" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Røsseland, 2020f, s. 77



Figur 32. Fra “Matematikk Grunnbok 4B” av Arginskaya et al., 2017b, s. 95

Stambrøk: Det finnes forskjellige brøk med ulike navn. Stambrøker brøk som har 1 som teller og har et positivt helt tall som nevner (Aarnes, 2017). Eksempler på oppgaver som inneholder konseptet stambrøk finnes i *figur 23* og *figur 24.*

Invers: Ved konseptet invers vil en se oppgaver der den ene mengden øker mens den andre reduseres på en sammenhengende og synkronisert måte. Den ene mengden multipliseres med en viss faktor og den andre multipliseres med den inverse eller gjensidige av den faktoren. Så hvis en mengde halveres, dobles den andre. Dersom en mengde deles på 5 (samme som å multipliseres med 1/5), vil den andre multipliseres med 5 (Lamon, 2020). Dette er et konsept som ikke nødvendigvis blir lært i 1.-5.trinn og det var dermed ingen oppgaver som ble kodet til å inneholde konseptet invers i denne studien.

Regning med brøk: Eksempler på oppgaver som inneholder konseptet regning med brøk finnes i *figur 23* og *figur 24* der elevene skal multiplisere stambrøk.

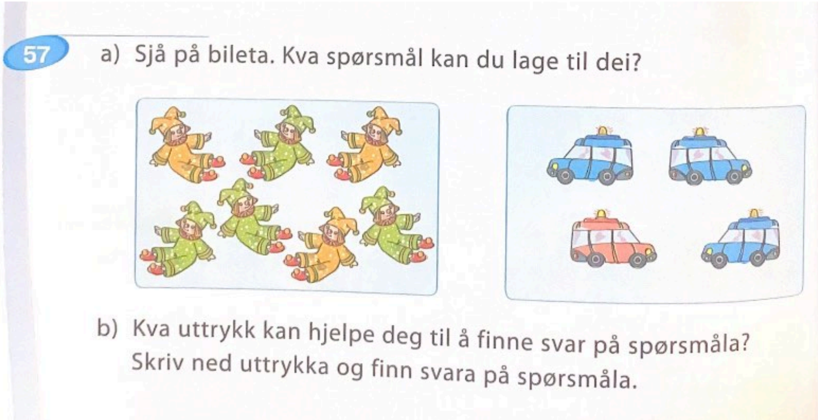
I den vertikale analysen har jeg valgt å se på kategorien som refererer til hvordan læreverkene formidler matematikken til elevene og underkategorien matematisk innhold. Da ser jeg på spesifikt emnet brøk og bruker rammeverket til Cady et al. (2015) for å ordne oppgavene etter hvilket innhold de har. Jeg brukte Excel med kodingen, og lagde egne “ark” for *Matematikk* og *Multi*. Jeg laget en tabell med de overordnede kategoriene øverst og så ligger underkategoriene under. For hver oppgave som inneholdt brøk, skrev jeg ned oppgavenummer og sidetall slik at det var lett å ha oversikt. Etterpå kodet jeg med å sette 1 dersom oppgaven inneholdt kategorien og 0 dersom den ikke gjorde det. Til slutt kunne jeg summere opp slik at jeg kunne se hvor mange oppgaver som innhold de forskjellige kategoriene.

Jeg summerte opp læreverkene hver for seg slik at jeg fikk totalen av alle bøkene til ett læreverk. Deretter summerte jeg opp alle bøkene for 1.-3. trinn, deretter 4.trinn og til slutt 5.trinn for de to læreverkene. Slik kunne jeg sammenligne og se forskjeller mellom de ulike læreverkene innenfor de ulike trinnene. Jeg samlet opp 1.-3.trinn ettersom det ikke var mange oppgaver som handlet om brøk her. Videre tok jeg alle summene over i et annet ark og regnet ut i prosent hvor mange av oppgavene som var innenfor hver kategori. Dette gjorde jeg for totalen, 1.-3.trinn, 4. trinn og 5. trinn. Disse verdiene ble så brukt til å vise resultatene av analysen min.

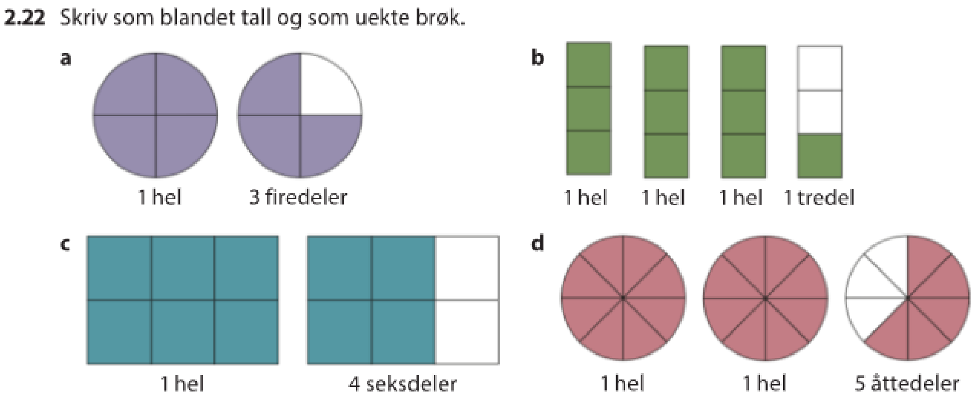
Oppgavene i læreverkene har ulike typer utforming. I *Multi* finnes det fem forskjellige oppgavetyper; samtalebilder, aktivitetsruter, utforskningsruter, forklaringsruter, spill og øvingsoppgaver. I *Matematikk* er det oppgaver som er merket som hovedmål, repetisjonsoppgaver og historier. Disse er alle kodet etter samme rammeverk da dette er alle oppgaver som det er tenkt at elever skal jobbe med i grunnbøkene, selv om de har forskjellig utforming. Noen oppgaver er utformet som en tekst bestående av en historie hvor elever og lærer sammen skal komme til forståelse av innholdet, mens andre har spørsmål elever skal svare på egenhånd. Noen oppgaver er også inndelt i flere deloppgaver, men i denne analysen er samtlige av disse blitt kodet som om de er en oppgave, og ikke flere. Dette er gjort fordi oppgavene er bygget opp for å danne en helhetlig enhet som skal utføres samlet. Innad i hver enkelt oppgave med deloppgaver kan det finnes flere representasjonsformer, men dersom analysen som er utført her skulle tatt hver deloppgave og kodet som egne oppgaver, ville resultatene kunne være misvisende, da analysen ville vist mange flere oppgaver enn som faktisk finnes i læreverkene.

Ettersom kodingen er veldig omfattende arbeid, måtte jeg ta noen valg angående avgrensning med brøkoppgaver. Det er flere oppgaver som kan kobles opp til brøk som for eksempel oppgaver som bruker km/t eller målestokk. Jeg valgte derimot ikke å ta med disse oppgavene da de som regel ikke bygget på matematiske konsepter innenfor brøk, og heller omhandlet å dividere.

Det var også oppgaver der som en lærer kunne brukt til å lære elever brøk, men i denne studien ble oppgavene kodet etter hva oppgaven ba elevene om. Det samme gjelder oppgaver der elever kan sammenligne brøker, men oppgaven ikke tilsier at det er det de skal gjøre. Under viser *figur 33* et eksempel på en oppgave der en kan bruke oppgaven til å presentere brøk til elever, men det er ikke formålet med oppgaven. Nedenfor der igjen viser *figur 34* et eksempel på en oppgave der elever kan sammenligne brøk, men det er ikke intensjonen at elevene skal gjøre det i denne oppgaven.



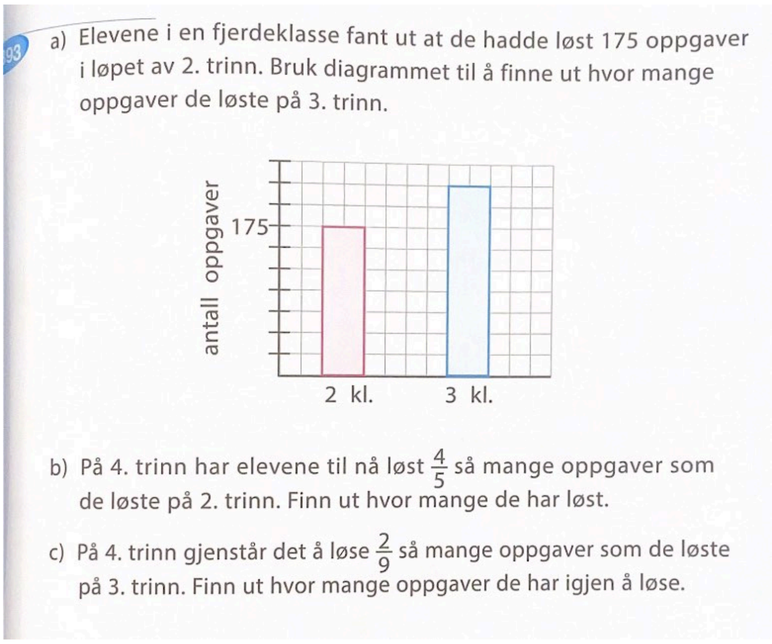
Figur 33. Fra "Matematikk Grunnbok 2B" av Arginskaya et al., 2018b, s. 28



Figur 34. Fra "Multi Elevbok 5A" av B. Alseth, A. C. Arnås og M. Rørsseland, 2020f, s. 53

Dersom en ser på oppgaven i *figur 33* kan en lage spørsmål ut ifra bildene som relaterer seg til brøk. Senere i denne teksten skriver jeg om hvordan *Matematikk* skiller seg fra andre læreverk der manj ikke jobber temabasert, men arbeider med ulike temaer parallelt gjennom hele skoleåret (Barentsforlag, u.å). Dermed kunne det vært en oppgave som presenterer brøk, men ettersom oppgaven ikke inneholder ord for brøk eller symboler for brøk ble den ikke kodet som en brøkoppgave. I tillegg blir ikke ord for brøk og symboler nevnt før i Matematikk Grunnbok 3B, og det vil dermed være vanskelig for elever å kunne arbeide med en slik oppgave om en ikke er blitt presentert for det tidligere i læreverket.

I *figur 34* er det bilde av en oppgave som handler om at elever skal arbeide med blandet tall og uekte brøk. Med konkretene som er brukt i oppgaven kan elever også sammenligne brøk med hverandre, men ettersom det ikke står i oppgaven blir den ikke kodet til å innholde dette konseptet.



a) Elevene i en fjerdeklasse fant ut at de hadde løst 175 oppgaver i løpet av 2. trinn. Bruk diagrammet til å finne ut hvor mange oppgaver de løste på 3. trinn.

b) På 4. trinn har elevene til nå løst $\frac{4}{5}$ så mange oppgaver som de løste på 2. trinn. Finn ut hvor mange de har løst.

c) På 4. trinn gjenstår det å løse $\frac{2}{9}$ så mange oppgaver som de løste på 3. trinn. Finn ut hvor mange oppgaver de har igjen å løse.

Figur 35. Fra “Matematikk Grunnbok 4B” av Arginskaya, 2017b, s. 65

Ettersom jeg ikke kodet oppgaver i deloppgaver, men heller bare i sin helhet, var det flere oppgaver som fikk flere kategorier da oppgavene hadde flere ledd som viste til forskjellige representasjoner, modeller, aspekter ved brøk og/eller konsepter innenfor brøk. For eksempel oppgaven i *figur 28* fra Matematikk Grunnbok 5B. Den ble kodet til å inneholde representasjonene ord, symboler, bilder og konkreter. Innenfor konsepter ble oppgaven kodet til å inneholde sammenligning av brøk, uekte/blandet tall og stambrøk.

Ovenfor, i *figur 35,* finner man et eksempel på en oppgave som var krevende å kode da det var vanskelig å velge hvilken kategori den skulle plasseres i. Under representasjoner ble den kodet til å inneholde symboler fordi den inneholder brøk med brøkstrek. I tillegg kodet jeg den til å inneholde konkreter, da den man kan finne en tabell i oppgaven som visualiserte hvor mange elever det var i 2. og 3.klasse. Den ble kodet til å ha en kontekst, men det som ble vanskelig var hvordan den skulle kodes under kategorien modell. Den inneholder areal med søylene, linje ved x-aksen og mengde med at en skal se på antall elever som har løst oppgaven. Jeg valgte å kode oppgaven til å inneholde mengde modell da det var det som var hovedfokuset med oppgaven.

Validitet og reliabilitet

For å vurdere min forskningskvalitet ser jeg på forskningens validitet og reliabilitet. Validitet omhandler forskningens gyldighet, mens reliabilitet omhandler forskningens pålitelighet (Thagaard, 2018).

Validitet handler om forskerens tolkninger og konklusjoner rundt datamaterialet og kvaliteten av datamaterialet (Postholm & Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018). En måte å styrke validiteten på er å sammenligne funn og resultater fra egen studie med tidligere studiers funn og resultater (Postholm & Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018). I tillegg kan den styrkes ved at en bruker metoder som svarer på problemstillingen og i den sammenheng kan bruk av anerkjent rammeverk fra litteraturen som har blitt brukt i tilsvarende analyser styrke validiteten.

I denne studien analyseres oppgavene i læreverkene isolert fra klasserommet. Dette vil sette begrensninger for funn da bruk av læreverk blir påvirket av lærere og deres valg av arbeidsmåte. Lærere trenger ikke følge læreverk og kan velge rekkefølge og oppgaver som blir brukt i undervisning. Dersom lærere ønsker det, kan de også supplere med andre passende ressurser eller andre læreverk. Kvaliteten av læreverk blir dermed sett i henhold til dens bruk i praksis og læreres og elevers utbytte.

Reliabilitet brukes for å vurdere kvaliteten på forskningsprosessen og handler om undersøkelsen er til å stole på (Postholm & Jacobsen, 2018). Dette kan gjøres ved å gjøre rede for valg en tar i forskningsprosessen og ved å vise hvordan dataen som blir analysert er utviklet. (Postholm & Jacobsen, 2018; Thagaard, 2018). For å styrke reliabiliteten i dette prosjektet har jeg drøftet kodingen av et utvalg spesifikke datamaterialer med min veileder for å redusere det som Postholm og Jacobsen (2018) kaller undersøkelseseffekter, eller bias.

Forskningsetiske perspektiver

Forskningsetikken har som formål å «fremme fri, god og forsvarlig forskning» og «bidrar til å konstituere og sikre god vitenskapelig praksis. (Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, [NESH], 2021, s.5). De skal være med å utvikle «forskningsetisk skjønn og refleksjon, avklare etiske dilemmaer, fremme ansvarlig forskning og forebygge uredelighet.» (NESH, 2021, s.7). Dersom en skal behandle personopplysninger i forskningsprosjektet skal dette meldes inn til SIKT. Ettersom dette er en læreverksanalyse blir ingen personopplysninger brukt i forskningen og er dermed ikke meldepliktig. Jeg har heller ingen interessekonflikter og har ikke som mål i denne analysen å finne det beste eller dårligste læreverket, men se etter forskjeller og likheter.

Resultater

Resultatene blir delt inn i horisontal analyse og vertikal analyse. I den horisontale analysen blir det gitt generell informasjon om læreverkene i form av tabeller. Videre blir det presentert informasjon om læreverkene som er hentet fra forlagene sin nettside. Her blir det også gitt info om forfatterne som har skrevet læreverkene. I den vertikale analysen blir funnene fra analysen presentert i tabeller der det er skilt mellom totalen av analysen, 1.-3.trinn, 4.trinn og 5.trinn. For hver tabell er det kommentarer som peker på funn fra analysen.

Horisontal analyse:

	Multi	Matematikk
Forlag	Gyldendal	Barentsforlaget
Forfatter	Bjørnar Alseth Ann-Christin Arnås Mona Røsseland	Natasha Blank Kjersti Melhus Gerd Inger Moe Cato Tveit
Læreverk tilgjengelig	Multi Lærerens bok (A og B) Multi Elevbok (A og B) Multi Øvebok Multi Parallell bok (A og B, 4.-7. trinn)	Matematikk Lærerveiledning (A og B) Matematikk Grunnbok (A og B) Matematikk Oppgavehefte (A og B) Matematikk oppgavehefte: 1.klasse: Oppgavehefte 1, 2, 3 og 4, løsningsforslag til oppgavehefter og regn og tegn 2.klasse: Oppgavehefte 2A og 2B, løsningsforslag til oppgavehefte 2A og 2B, regn og tegn 3.klasse: Oppgavehefte 3A og 3B, løsningsforslag til oppgavehefte 3A og 3B, regn og tegn 4.klasse: Oppgavehefte 4A og 4B løsningsforslag til oppgavehefte 4A og 4B, regn og tegn

Digitale læremidler	Multi Fagrom (digital versjon av Multi Elevbok og Multi Lærerens bok) Multi Smart Øving (2.-7.trinn) Multi Smart vudering	Ingen
Læreverk brukt i denne studien	Multi Elevbok 1.-5. (A og B)	Matematikk Grunnbok 1.-5. (A og B)

Tabell 2. Oversikt over genrell informasjon om læreverk (Gyldendal, 2021; Barentsforlaget, u.å-a)

I denne tabellen ser en at det er flere forfattere som står for hvert læreverk. En ser også at begge læreverkene har tilleggslitteratur til grunnbøkene og lærerveiledningene. *Multi* Parallellbok 4.-7.trinn er beregnet for elever som "strever litt ekstra med matematikk" (Gyldendal, 2021). *Matematikk* har *oppgavehefter* og *regn og tegn* tilgjengelig opp til 4.trinn. Derimot, av de to læreverkene, er det kun *Multi* som har digitale læremidler tilgjengelig.

Bok	Utgave	Utgivelsesår	Antall sider	Høyde x Bredde x Lengde/ Høyde x Bredde
Multi Elevbok 1A	3. utgave	2020	95	297mm x 210mm x 9mm
Multi Elevbok 1B	3. utgave	2020	119	297mm x 210mm x 10mm
Multi Elevbok 2A	3. utgave	2020	119	297mm x 210mm x 10mm
Multi Elevbok 2B	3. utgave	2020	119	297mm x 210mm x 12mm
Multi Elevbok 3A	3. utgave	2020	119	297mm x 207mm x 10mm
Multi Elevbok 3B	3. utgave	2021	119	297mm x 210mm x 13mm
Multi Elevbok 4A	3. utgave	2021	119	260mm x 210mm x 10mm
Multi Elevbok 4B	3. utgave	2021	119	260mm x 210mm x 10mm
Multi Elevbok 5A	3. utgave	2020	135	260mm x 210mm x 10mm
Multi Elevbok 5B	3. utgave	2021	135	260mm x 210mm x 12mm
Matematikk Grunnbok 1A	1. utgave	2014	114	214mm x 303mm
Matematikk Grunnbok 1B	1. utgave	2014	128	214mm x 303mm
Matematikk Grunnbok 2A	1. utgave	2018	135	210mm x 297mm
Matematikk Grunnbok 2B	1. utgave	2018	136	210mm x 297mm
Matematikk Grunnbok 3A	1. utgave	2016	108	210mm x 297mm

Matematikk Grunnbok 3B	1. utgave	2016	143	210mm x 297mm
Matematikk Grunnbok 4A	1. utgave	2017	137	210mm x 297mm
Matematikk Grunnbok 4B	1. utgave	2017	120	210mm x 297mm
Matematikk Grunnbok 5A	1. utgave	2018	236	210mm x 260mm
Matematikk Grunnbok 5B	1. utgave	2018	280	210mm x 260mm

Tabell 3. Oversikt over læreverk brukt i analysen (Alseth et al., 2020a, 2020b, 2020c, 2020d, 2020e, 2020f, 2021a, 2021b, 2021c, 2021d; Arginskaya et al., 2018a, 2018b, 2017a, 2017b, 2016a, 2016b, 2014a, 2014b; Aslanov et al., 2018a, 2018b)

I tabellen ovenfor ser en at *Matematikk*bøkene brukt i denne undersøkelsen ble gitt ut før fagfornyelsen i 2020. Det vil være interessant å se i studien om de fortsatt fungerer godt til det nye kunnskapsløftet, eller om det finnes et behov for at læreverket trenger å fornyes. Videre ser en at *Matematikk* grunnbøkene har flere sider en *Multi* elevbøkene, da gjerne spesielt de for 5.trinn.

Multi	**Matematikk**
1A	
1. Tall og telling s. 6-29 2. Tallene til 10 s. 30-59 3. Lengde s. 60-71 4. Addisjon til 10 s. 72-95	Hvorfor trenger vi matematikk? s. 6-7 Sammenlikne gjenstander s. 8-13 Flere/flest – færre/færrest – like mange Mest – minst- like mye s. 14 -21 Hvordan mennesker lærte å skrive tall s. 22-23 Tall og siffer s.24-63 Følgen av de naturlige tall s. 64-75 Addisjon og subtraksjon s.76-114
1B	
5. Subtraksjon til 10 s. 4-27 6. Former og mønster s. 28-57 7. Tallene til 20 s. 58-87 8. Addisjon og subtraksjon til 20 s. 88-119	Addisjon og subtraksjon s. 6-11 Slik målte og måler mennesker lengder s. 12-18 Addisjonstabell s. 19-53 Ensifrete og tosifrete tall s. 54-72 Likninger og løsninger av likninger s. 73-95 Addisjon og tierovergang s. 96-111 Subtraksjon og tierovergang s. 112-123 Hva har jeg lært i første klasse? s. 124 - 128
2A	
1. Tallen til 40 s. 6-43 **2.** Addisjon og subtraksjon til 40 s. 44-75 **3.** Tid s. 76-95 **4.** Former og figurer s. 96-119	Masse – Måling av masse s. 6-39 Hva er en tekstoppgave? s. 40-61 Addisjon og subtraksjon av tosifrede tall s.62-105 Tid – Måling av tid s. 106-135

2B	
5. Tallene til 100 s. 4-41 **6.** Regning til 100 s. 42-75 **7.** Lengde og areal s. 76-99 **8.** Mønster s. 100-119	Multiplikasjon og divisjon s. 5-46 Multiplikasjonstabell s. 47-93 Tresifrede tall s.94 – 136
3A	
1. Tallene til 1000 s. 6-37 **2.** Addisjon og subtraksjon s. 38-69 **3.** Måle masse og lengde s. 70-95 **4.** Multiplikasjon s.96-119	Areal og beregning av areal s. 5-34 Divisjon med rest s. 35-49 Addisjon og subtraksjon av tresifrede tall s. 50-79 Sammenlikne og måle vinkler s. 80-108
3B	
5. Talljakt s. 4-23 **6.** Multiplikasjon og divisjon s. 24-63 **7.** Rutenett og koordinatsystem s. 64-89 **8.** Regning s. 90-119	Multiplikasjon og divisjon s. 5-49 Tallinje s.50-69 Brøk s.70-103 Titallsystemet s. 104-143
4A	
1. Tall og regning s. 7-41 **2.** Multiplikasjon s. 43-67 **3.** Divisjon s. 69-93 **4.** Geometri s. 95-137	Areal av figurer s. 5- 29 Multiplikasjon med flersifrede tall s. 30-73 Avrunding og overslag s.74-101 Divisjon med flersifrede tall s. 102-137
4B	
5. Brøk og desimaltall s. 5-35 **6.** Mønster og algoritmer s. 37-55 **7.** Måling s. 57-87 **8.** Regning s.89-119	Volum og beregning av volum s.5-41 Å regne med størrelser s.42-73 Positive og negative tall s.74-91 Desimaltall s. 92-120
5A	
1. Tall og regning s.7-44 **2.** Brøk s.45-76 **3.** Sannsynlighet s.83-97 **4.** Desimaltall, brøk og prosent s. 99-135	1. Tallsystem s.4-29 2. Algoritmer. Sammenlikne naturlige tall s. 30-49 3. Addisjon og subtraksjon av naturlige tall s. 50-73 4. Multiplikasjon av divisjon av naturlige tall s. 74-105 5. Talluttrykk og bokstavuttrykk s. 106-129 6. Divisjon med rest s. 130-153 7. Potenser s. 154-179 8. Avrunding av naturlige tall s.180-199 Fasit s. 200-236
5B	
5. Tid s. 5-27 6. Regning med brøk s. 29-65 7. Algebra og programmering s. 67-97	9. Primtallsfaktorisering s. 4-33 10. Faktor i et tal og multiplum av et tall s. 34-59

8. Regning s.99-135	11. Største felles faktor. Minste felles multiplum s. 60-85 12. Egenskaper ved divisjon s. 86-103 13. Regler for delelighet s. 104-131 14. Brøk s.132-153 15. Likeverdig brøk s. 154-177 16. Sammenlikning av brøk s. 154-177 17. Blandede tall s.196-217 Fasit s. 218-280

Tabell 4. Oversikt over kaptiler læreverk brukt i analysen (Alseth et al., 2020a, 2020b, 2020c, 2020d, 2020e, 2020f, 2021a, 2021b, 2021c, 2021d; Arginskaya et al., 2018a, 2018b, 2017a, 2017b, 2016a, 2016b, 2014a, 2014b; Aslanov et al., 2018a, 2018b)

I denne tabellen kan en se at brøk blir introdusert i Multi Elevbok 4B i kapittel 5. I denne boken finnes det 30 sider dedikert til brøk og desimaltall. Brøk blir så nevnt igjen i Multi Elevbok 5A der kapittel 2, bestående av 31 sider, omhandler brøk, og i kapittel 4, som er på 36 sider, der det handler om desimaltall, brøk og prosent. Til slutt blir brøk nevnt i Multi Elevbok 5B i et kapittel om regning med brøk som er på 36 sider. Til sammen er det 133 sider dedikert til brøk i Multi Elevbok 1.-5. A og B.

I læreverket *Matematikk* kan man finne at brøk blir nevnt for første gang i Matematikk Grunnbok 3B der det er et kapittel som heter "brøk" som er på 33 sider. Brøk blir så ikke nevnt igjen før i Matematikk Grunnbok 5B, hvor det finnes fire kapitler dedikert til brøk. Kapittel 14 heter "brøk" og er på 21 sider, kapittel 15 heter "likeverdig brøk" og er på 23 sider, kapittel 16 heter "sammenlikning av brøk" og er på 23 sider, og til slutt kapittel 17, som heter "blandede tall", og som er på 21 sider. Til sammen er det 121 sider dedikert til brøk i Matematikk Grunnbok 1.-5. A og B.

Selv om brøk ikke blir spesifikt nevnt i LK20 før kompetansemål for etter 5.trinn så har begge læreverkene introdusert brøk før femte trinn. Multi i 4. trinn og Matematikk i 3. trinn. De fleste sidene som omhandler brøk er i bøkene for 5.trinn.

Multi

På nettsidene til Gyldendal (2021) står det at *Multi* er et læreverk som legger til rette for dybdelæring, da elever kan arbeide med åpne, komplekse og varierte oppgaver som gjør at elever kan utforske, være kreative, samarbeide og diskutere. Dette skal gi grunnlag for at elevene skal danne en solid forståelse av matematiske begreper og metoder som de kan bruke i problemløsning, kommunikasjon og i dagliglivet. I læreverkene er det lagt opp til at alle undervisningsøkter skal preges av oppgaver og aktiviteter som legger opp til utforskning, problemløsning, kommunikasjon og samarbeid. De har gjort dette ved sørge for at det finnes flere forskjellige oppgavetyper som en kan finne utover i bøkene; samtalebilder, aktivitetsruter, utforskningsruter, forklaringsruter, spill og øvingsoppgaver. Alle bøkene er delt inn i fire kapitler som inneholder delkapitteler, som igjen representerer arbeid for omtrent en uke, der to dobbeltsider er beregnet som arbeid til en 60 minutters skoletime.

> *«Fem grunner til å velge Multi:*
>
> *Elevene får utforske matematiske problemstillinger, jobbe sammen og leke seg fram til svarene*
>
> *Varierte oppgaver og aktiviteter som gir dybdeforståelse*
>
> *Gjennom god mengdetrening og elevtilpasset øving blir elevene trygge på faget*
>
> *Rikt utvalg av bøker og digitale læremidler gir fleksibilitet og variasjon*
>
> *Grundig og rikholdig lærerveiledning»* (Gyldendal, 2021)

Forfatterne av læreverket *Multi* er Bjørnar Alseth, Ann Christin Arnås og Mona Røsseland;

Bjørnar Alseth, født 1965, har doktorgrad i barns læring av matematikk. Tidligere har han arbeidet med grunn- og videreutdanning av matematikklærere og med å utvikle nasjonale kartleggingsprøver i matematikk. Ved danning av Kunnskapsløftet 2006 var han leder for læreplangruppen i matematikk. Han er medforfatter i læreverket *Multi* og *Tall og tanke 2* som er en bok som viser hvordan matematikkundervisning for 5.-7. trinn kan utføres. Alseth har bred interesse for elevers læring, undervisning og for matematikk (Gyldendal, u.å.-b).

Ann-Christin Arnås er redaksjonell medarbeider i Gyldendal undervisning og har hold mange kurs og verksteder. Disse er kursene og verkstedene er blant annet tilknyttet Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS). Hun er også matematikklærer på barnetrinnet ved Ridabu skole (Gyldendal, u.å.-a).

Mona Røsseland, født 1956, har doktorgrad i matematikkdidaktikk og arbeider ved lærerutdanningen på Høgskolen på Vestlandet. I tillegg har hun en master i undervisningsvitenskap med vekt på matematikk. Hun har arbeides som allmennlærer og har undervisningserfaring i alle trinn i grunnskolen. Tidligere har hun arbeidet ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen ved NTNU i Trondheim (Gyldendal, u.å.-c)

Matematikk

Læreverket *Matematikk* er bygget på Lev Vygotskys syn på utvikling, læring og undervisning. I tillegg bygger det på Leonid Zankov sin undervisningsmodell som er en videreutvikling av teorien til Vygotskys. Zankov formulerte det didaktiske prinsippet «undervisning på et høyt nivå» basert på Vygotskys tanke om at det blir en raskere utvikling av kunnskap hos barn dersom opplæringen går foran barnets utvikling (Matematikk landet, u.å.-c). Videre er noen av Zankovs didaktiske prinsipper som læreverket *Matematikk* er bygget på:

> «Undervisning på et høyt nivå, ledende rolle av teoretisk kunnskap, rask gjennomgang av lærestoffet, bevisstgjøring av barna i forhold til deres egen læringsprosess og systematisk og målrettet utvikling av hvert eneste barn i klasserommet» (Matematikk landet, u.å.-c)

Matematikk skiller seg fra andre læreverk der en ikke jobber temabasert, men arbeider med ulike temaer parallelt gjennom hele skoleåret. Dette legger opp til at elever får repetisjon samtidig som de lærer nytt stoff (Barentsforlag, u.å.-b).

> *«I læreverket Matematikk realiseres Zankovs fem didaktiske prinsipper. Læreverket sikrer at elevene:*
> *får en forståelse av sammenhengen i det som læres*
> *får en forståelse av grunnleggende begreper og kan anvende disse*
> *kan anvende matematikk i dagliglivet*
> *utvikler evner til å finne og analysere informasjon*
> *kan bruke språket aktivt – både muntlig og skriftlig*
> *kan begrunne og argumentere for påstandene sine*
> *vil være i stand til å diskutere, høre og lytte*
> *får en individuell, tilpasset opplæring»* (Barentsforlag, u.å.-b)

Forfatterne av læreverket *Matematikk* er Natasha Blank, Kjersti Melhus, Gerd Inge Moe og Kato Tveit;

Natasha Blank har arbeidet i lærerutdanningen ved Universitet i Stavanger (UiS) siden 1997 og har doktorgrad innenfor matematikk. Hun har undervisningserfaring fra flere land; Ukraina, Storbritannia, USA og Norge. Dette gjør at hun har over 30 års med bred undervisningserfaring. I samarbeid med Gerd Inger Moe begynte de i 2009 å implementere Zankovs modell i Norge (Matematikk landet, u.å.-b). Av læreverkene brukt i denne studien har Blank vært medforfatter i bøkene Matematikk Grunnbok 1A, Matematikk Grunnbok 1B, Matematikk Grunnbok 2A, Matematikk Grunnbok 2B, Matematikk Grunnbok 3A, Matematikk Grunnbok 3B, Matematikk Grunnbok 4A, Matematikk Grunnbok 4B, Matematikk Grunnbok 5A og Matematikk Grunnbok 5B (Arginskaya et al., 2018a, 2018b, 2017a, 2017b, 2016a, 2016b, 2014a, 2014b; Aslanov et al., 2018a, 2018b).

Kjersti Melhus er universitetslektor ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk ved Universitetet i Stavanger. Hun holder mange kurs innenfor temaet utviklende opplæring i matematikk (UOM) for lærere (Matematikk landet, u.å.-a). Av læreverkene brukt i denne studien har Melhus vært medforfatter i bøkene Matematikk Grunnbok 1A, Matematikk Grunnbok 1B, Matematikk Grunnbok 2A, Matematikk Grunnbok 2B, Matematikk Grunnbok 3A, Matematikk Grunnbok 3B, Matematikk Grunnbok 4A, Matematikk Grunnbok 4B, Matematikk Grunnbok 5A og Matematikk Grunnbok 5B (Arginskaya et al., 2018a, 2018b, 2017a, 2017b, 2016a, 2016b, 2014a, 2014b; Aslanov et al., 2018a, 2018b).

Gerd Inger Moe er pensjonert allmennlærer/adjunkt. Hun har erfaring fra å ha undervist på barnetrinnet og har også vært praksislærer ved Universitet i Stavanger. I samarbeid med Sandnes kommune og UiS jobbet hun fra høsten 2009 til 2015 med utviklende opplæring i matematikk (Matematikk landet, u.å.-b). Av læreverkene brukt i denne studien har Moe vært medforfatter i bøkene Matematikk Grunnbok 1A og Matematikk Grunnbok 1B (Arginskaya et al., 2014a, 2014b).

Cato Tveit er universitetslektor ved Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk ved Universitetet i Stavanger (Universitet i Stavanger, u.å.). Av læreverkene brukt i denne studien har Tveit vært medforfatter i bøkene Matematikk Grunnbok 3A, Matematikk Grunnbok 3B, Matematikk Grunnbok 4A, Matematikk Grunnbok 4B, Matematikk Grunnbok 5A og Matematikk Grunnbok 5B (Arginskaya et al., 2017a, 2017b, 2016a, 2016b; Aslanov et al., 2018a, 2018b).

Vertikalanalyse:

Resultatene fra den vertikale analysen blir presentert i fire tabeller. I den første tabellen presenteres sum av oppgaver som er kodet til å inneholde brøk ut fra alle trinn i de ulike læreverkene. Den andre tabellen viser summen av alle oppgavene som var kodet til å inneholde brøk innenfor de ulike kategoriene som ble presentert i metodedelen. Den tredje tabellen presenterer summen av oppgaver i de ulike kategoriene som var kodet i 1.-3.trinns læreverkene. I den fjerde tabellen fremlegges summen av oppgaver som ble kodet til å inneholde brøk innenfor de ulike kategoriene for 4.trinns læreverkene. I den siste tabellen fremstilles summen av oppgavene som var kodet for 5.trinns læreverkene. Som nevnt tidligere i teksten, vil man med en slik fremstilling kunne få innblikk i hvordan de ulike læreverk presenterer brøk, og en kan også sammenligne hvordan de ulike læreverkene gjør det på de ulike trinnene.

Antall oppgaver kodet til å inneholde brøk

	Matematikk	Multi
1. trinn	1	1
2. trinn	5	17
3. trinn	40	0
4. trinn	40	91
5. trinn	124	370
Total	210	479

Tabell 5. Trinnfordelt sum av oppgaver kodet til å innholde brøk

I tabellen over vises antall oppgaver kodet til å inneholde brøk innenfor hvert trinn i læreverkene. I læreverket Matematikk ser man i horisontalanalysen at brøk blir først presentert i Matematikk Grunnbok 3B. Oppgavene som kommer før i dette læreverket bruker ord for brøk der elever blir bedt om å finne halvparten og kvart i oppgaver som omhandler mengde. I læreverket *Multi* blir brøk først presentert i Multi Elevbok 4B. Det er ingen oppgaver som inneholder brøk i 3. trinn, men oppgavene i de tidligere trinnene bruker ord for brøk, slik som i *Matematikk*. Her er det derimot ikke bare koblet opp mot antall tilfeller av at det ble brukt ord for brøk, som halv og kvart i oppgaver som omhandler klokka.

Total

	Matematikk		**Multi**	
Representasjoner				
Ord	126	60 %	231	48 %
Symboler	165	79 %	333	70 %
Bilder	32	15 %	242	51 %
Konkreter	74	35 %	220	46 %

Kontekst				
Kontekst	87	41 %	232	49 %
Modeller				
Areal	32	15 %	169	35 %
Mengde	59	28 %	154	32 %
Linje	45	21 %	59	12 %
Aspekter ved brøk				
Del av hel	128	61 %	347	73 %
Tall, måling	49	23 %	74	15 %
Forhold	0	0 %	0	0 %
Kvotient	11	5 %	38	8 %
Operator	7	3 %	33	7 %
Konsepter				
Sammenligne brøker	41	20 %	66	14 %
Uekte/blandet tall	70	33 %	116	24 %
Likeverdige brøker	34	16 %	133	28 %
Ekvivalens brøk/desimaltall/prosent	17	8 %	34	7 %
Estimere brøk	1	0 %	7	1 %
Stambrøk	116	55 %	236	49 %
Invers	0	0 %	1	0 %

Tabell 6. Total sum og prosent av oppgaver kodet til å innholde brøk

I denne tabellen kan man se at den største forskjellen ligger under kategorien representasjoner. Når en sammenligner de ulike representasjonene for begge læreverkene, er den største variasjonen innenfor representasjonen bilde. Det er flere oppgaver som er kodet til å inneholde bilder i læreverket *Multi* enn det man finner i *Matematikk*. I de andre underkategoriene for representasjoner er det ikke store variasjoner, og samme ser man i kategorien kontekst. Når en ser på kategorien modeller har *Multi* flere oppgaver koblet til areal enn det *Matematikk* har, men ellers er det ikke stor forskjell i de andre underkategoriene for modeller. Under kategoriene aspekter ved brøk og konsepter er det heller ikke store variasjoner. I aspekter ved brøk er det størst variasjon innenfor del av hel, der *Multi* har flere oppgaver enn *Matematikk*. *Multi* har også flere oppgaver i underkategorien likeverdige brøker.

1.-3.trinn

	Matematikk		Multi	
Representasjoner				
Ord	31	67 %	18	100 %
Symboler	27	59 %	0	0 %
Bilder	8	17 %	16	89 %
Konkreter	16	35 %	4	22 %
Kontekst				
Kontekst	34	74 %	17	94 %
Modeller				
Areal	8	17 %	2	11 %
Mengde	19	41 %	16	89 %
Linje	12	26 %	1	6 %
Aspekter ved brøk				
Del av hel	43	93 %	18	100 %
Tall, måling	18	39 %	8	44 %
Forhold	0	0 %	0	0 %
Kvotient	2	4 %	0	0 %
Operator	0	0 %	0	0 %
Konsepter				
Sammenligne brøker	5	11 %	0	0 %
Uekte/blandet tall	0	0 %	0	0 %
Likeverdige brøker	1	2 %	0	0 %
Ekvivalens brøk/desimaltall/prosent	0	0 %	0	0 %
Estimere brøk	0	0 %	0	0 %
Stambrøk	25	54 %	0	0 %
Invers	0	0 %	0	0 %

Tabell 7. 1.-3.trinns sum og prosent av oppgaver kodet til å innholde brøk

I denne tabellen ser en at den største variasjonen fortsatt er i underkategorien bilder der *Multi* har flest oppgaver koblet opp til denne representasjonen. Det er også store variasjoner i de andre underkategoriene for representasjoner. *Multi* har mest oppgaver der en bruker ord for brøk, mens

Matematikk har flere oppgaver med symboler for brøk. I kategorien kontekst har *Multi* flest oppgaver. Videre i kategorien for modeller ser man forskjell i bruk av mengde og linje, hvor *Multi* har flere oppgaver knyttet til mengde, og *Matematikk* har flere oppgaver som bruker linje. Under kategorien aspekter ved brøk finnes det ikke store variasjoner mellom læreverkene. I kategorien konsepter er det derimot en av underkategoriene som skiller seg ut, og det er at *Matematikk* har flere oppgaver knyttet til stambrøk.

4.trinn

	Matematikk		**Multi**	
Representasjoner				
Ord	14	35 %	43	47 %
Symboler	33	83 %	74	81 %
Bilder	4	10 %	70	77 %
Konkreter	15	38 %	40	44 %
Kontekst				
Kontekst	20	50 %	37	41 %
Modeller				
Areal	4	10 %	32	35 %
Mengde	13	33 %	23	25 %
Linje	10	25 %	82	90 %
Aspekter ved brøk				
Del av hel	30	75 %	14	15 %
Tall, måling	16	40 %	0	0 %
Forhold	0	0 %	0	0 %
Kvotient	0	0 %	2	2 %
Operator	0	0 %	19	21 %
Konsepter				
Sammenligne brøker	3	8 %	13	14 %
Uekte/blandet tall	2	5 %	6	7 %
Likeverdige brøker	0	0 %	6	7 %
Ekvivalens brøk/desimaltall/prosent	8	20 %	0	0 %
Estimere brøk	1	3 %	46	51 %

Stambrøk	26	65 %	0	0 %
Invers	0	0 %	0	0 %

Tabell 8. 4.trinns sum og prosent av oppgaver kodet til å inneholde brøk

I denne tabellen finner man størst variasjon i underkategoriene representasjoner, modeller og konsepter. *Multi* har flere oppgaver i bilde og linje, mens *Matematikk* har flest oppgaver innenfor konseptet stambrøk. I de andre underkategoriene for representasjoner er det ikke store variasjoner, og heller ikke i kategorien kontekst. I underkategorien for modeller er det variasjon i underkategorien areal der *Multi* har flere oppgaver. Under kategorien aspekter ved brøk har *Multi* flest oppgaver kodet til del av hel og tall, måling. *Matematikk* har flest oppgaver i underkategorien operator. Ser en på kategorien konsepter har *Multi* flere oppgaver koblet til å estimere brøk og *Matematikk* har flere oppgaver koblet til ekvivalens brøk/desimaltal/prosent.

5.trinn

	Matematikk		**Multi**	
Representasjoner				
Ord	81	65 %	170	46 %
Symboler	105	85 %	275	74 %
Bilder	20	16 %	152	41 %
Konkreter	43	35 %	146	39 %
Kontekst				
Kontekst	33	27 %	175	47 %
Modeller				
Areal	20	16 %	130	35 %
Mengde	27	22 %	106	29 %
Linje	23	19 %	35	9 %
Aspekter ved brøk				
Del av hel	55	44 %	247	67 %
Tall, måling	15	12 %	52	14 %
Forhold	0	0 %	0	0 %
Kvotient	9	7 %	38	10 %
Operator	7	6 %	31	8 %
Konsepter				

Sammenligne brøker	33	27 %	47	13 %
Uekte/blandet tall	68	55 %	103	28 %
Likeverdige brøker	33	27 %	127	34 %
Ekvivalens brøk/desimaltall/prosent	9	7 %	28	8 %
Estimere brøk	0	0 %	7	2 %
Stambrøk	65	52 %	190	51 %
Invers	0	0 %	1	0 %

Tabell 9. 5.trinns sum og prosent av oppgaver kodet til å innholde brøk

I denne tabellen er det ikke like store variasjoner som i de andre tabellene. Den største variasjonen er i kategoriene representasjon, aspekter og konsepter. Her har *Matematikk* flere oppgaver koblet til underkategorien uekte/blandet tall, mens *Multi* har flere oppgaver koblet til bilder og del av hel. I de andre kategoriene og underkategoriene er det ikke store variasjoner.

Diskusjon

I denne delen av studien vil jeg legge frem de forskjeller og likheter som er funnet og lagt frem mellom læreverkene, og samtidig ta for meg mulige årsaker til dem. Jeg vil også diskutere funn fra analysen og koble dette opp mot tidligere presentert teori.

Funnene mine viser at begge læreverkene starter brøkinnlæringen med å bruke ord for brøk. De bruker ord som halvparten, halv og kvart, koblet opp mot mengde. I *Multi* brukes også ord som halv og kvart i oppgaver som omhandler klokken. Dette er noe som Van de Walle et al. (2020) påpeker kan være gunstig for yngre elever, der symboler som ¼ kan være for vanskelig å forstå for den yngre gruppen i barneskolen. Dermed kan det å begynne å beskrive brøk med ord hjelpe elever med å forstå selve begrepet uten at de også skal forstå symbolet (Van de Wall et al., 2020).

Noe som kommer tydelig frem i min analyse var at *Multi* har langt flere oppgaver koblet opp mot brøk enn det man finner i læreverket *Matematikk*. *Matematikk* har derimot en annen oppbygging av læreverket enn *Multi*. I *Multi* finner man langt flere deloppgaver lagt inn i hver oppgave. Dersom denne studien hadde tatt for seg de kognitive kravene til oppgaver i de to læreverkene, kunne jeg sagt mer om hvordan læreverkene kan sammenlignes på tross av den store variasjonen innenfor antall oppgaver. Dette må derimot gjøres i en annen studie da det ville blitt for omfattende å gjøre det her. Det er klart at det ville vært et interessant og hjelpsomt tillegg til analysen og funnene presentert her.

Forskere som Hwang et al. og Li et al. viser til at læreverk fra land som presterer høyt ofte har mer kognitivt utfordrende oppgaver (Hwang et al., 2021; Li et al., 200). Dette er noe *Matematikk* baserer sine bøker på ved å bygge på Zankovs prinsipper. *Multi* har utfordringsoppgaver i sine læreverk som er mer kognitivt utfordrende. For fremtidige forskningsstudier hadde det derfor vært interessant om det ble sett på hvor kognitivt utfordrende oppgavene i de ulike læreverkene er.

Et aspekt som kommer tydelig frem i min analyse var at *Multi* har langt flere oppgaver kodet til å inneholde bilderepresentasjoner enn *Matematikk*. Når man ser i læreverkene kommer dette tydelig frem ved at Multi har mye mer bilder og farger, mens Matematikk har mer tekst. Dette er noe som kan tas videre i nye forskningsstudier, hvor det da ville vært gunstig å se på hvilken innvirkning dette kan ha for elever. Vil bilder være med på å motivere elever, eller har det kanskje ingen innvirkning?

Forskere Van de Walle et al. (2020) mener at brøkinnlæringen burde starte allerede i første klasse da elever trenger betydelig tid og erfaring for å utvikle en dyp forståelse av emnet. (Van de Walle et al, 2020, s.378). I litteraturstudiet til denne studien viser Alajmi (2011) at det var en forskjell i når brøk blir introdusert for elevene. USA og Kuwait introduserer det i første klasse, mens de japanske læreverkene ikke tar for seg brøk før tredje klasse (Alajmi, 2011). I læreverkene tatt for seg i denne studien er det også variasjon i når brøk blir presentert. Læreverker *Matematikk* presenterer det i 3. trinn, mens *Multi* presenterer det i 4. trinn. Funnene mine viser at de fleste sidene som omhandler brøk er i bøkene for 5.trinn.

Matematikken er ikke delt opp i ulike emner, dette er noe vi har gjort for å kunne lære vekk faget. Alle emner går parallelt, men i skolen er de skilt. Det kan derfor ses på som kunstige skiller, da det ikke er naturlig å dele opp faget på den måten. I læreverket *Multi* arbeides det temabasert og de fleste oppgaver som handler om brøk blir introdusert i 4. trinn. Derimot har ikke *Matematikk* slike skiller da de arbeider med temaer parallelt. Det er brøkoppgaver i flere kapitler som ikke har brøk som tema. Brøk blir også presentert i 3. trinn i *Matematikk*, mens i *Multi* er det ingen oppgaver koblet til brøk i 3. trinn. For fremtidige studier hadde det vært interessant å sett på hvilken innvirkning dette kan ha på elevers prestasjoner.

Det finnes flere typer digitale læreverk som er tilgjengelig for bruk i matematikkundervisning i barneskolen, som *Multi Smart Øving* og *Kikora*. Det hadde vært interessant å sett på hvordan de legger opp til innlæring av brøk. Jeg valgte derimot ikke å bruke slike læreverk i denne studien da de skiller seg fra tradisjonelle lærebøker på flere måter. Ved oppgaver i lærebøker skriver elever svarene sine ned, og må så vente på å få tilbakemelding. Derimot får elever umiddelbar tilbakemelding på svarene sine ved bruk av digitale læreverk, enten det er flervalgsoppgaver eller om elevene skriver inn svarene selv. Det hadde dermed vært interessant å ha sett på bruken av digitale læreverk i undervisning for å se på hvordan elever arbeider med digitale oppgaver i forhold til tradisjonelle oppgaver.

Selv om flere lærere bruker samme lærebok i undervisningen, blir undervisningen ulik. Elevene og klassene er forskjellige, og undervisning må legges opp ulikt etter deres behov. Dermed vil det være store variasjoner med tanke på hvilket utbytte de ulike lærebøkene gir, ofte på grunn av forskjellene mellom ulike lærere, elever og klasser. I tillegg har lærere ulike typer konkreter og ressurser som kan brukes i undervisning, som også spiller en betydningsfull rolle i hvilken undervisning som blir gitt. Lærere har den sentrale rollen som koblingen mellom læreverk og elever. De har sine egne meninger om matematikkundervisning og egen forståelse av matematikken. Dermed kan jeg ikke gjennom denne studien trekke konklusjoner angående elevers læreingsmuligheter. Dette er noe som krever dedikert forskning i andre studier.

Konklusjon

Jeg har i denne masteroppgaven lest 24 læreverk og kodet 689 brøkoppgaver, og når man kobler læreverkene og stoffet i disse opp mot læreplanen ser det positivt ut. Da den nye læreplanen kom kunne man fort bli urolig for at brøk ikke ville bli presentert for elevene i barneskolen før 5. trinn, da det er først nevnt som kompetansemål for etter 5.trinn. Man ser derimot at brøk allerede blir introdusert med symboler i 3. trinn i læreverket *Matematikk*, og i 4.trinn for *Multi*.

Funnene i studien peker på at begge læreverkene starter brøkinnlæringen med å bruke ord for brøk. De bruker ord som halvparten, halv og kvart, koblet opp mot mengde. Noe som kommer tydelig frem i min analyse var at *Multi* har langt flere oppgaver koblet opp mot brøk enn det som fremkommer i læreverket *Matematikk*. Et annet aspekt som også kommer tydelig frem i min analyse var at *Multi* har mange flere oppgaver kodet til å inneholde bilderepresentasjoner enn *Matematikk*. Når man åpner læreverkene kommer dette tydelig frem i den fremtredende bruken av bilder og farger i *Multi*, mens det i *Matematikk* finnes mye mer tekst.

I denne studien ble det gjort en vertikal og en horisontal analyse. Det ble ikke gjort en kontekstuell analyse, hvor man ser på hvordan læreverk blir brukt i undervisning. På samme måte ble det ikke sett på de kognitive kravene til oppgavene. Denne studien har bare sett på to læreverk, noe som gir begrensninger for hvilke konklusjoner en kan trekke. Dersom en skal si noe om læreverk generelt i Norge må det gjennomføres en større forskning av flere læreverk, slik at det vil være mulig å trekke større slutninger om likheter og ulikheter.

Læreplanen gir føringer for hvordan undervisningen skal utføres på skolene. Den har blitt utviklet av en læreplangruppe som baserer seg på forskning og teori som skal legge til rette for undervisning. Læreplanen blir tolket av skoler og lærere, og det er gjennom denne tolkningen at læreplanen gjøres om til undervisning og læring hos elevene i den norske grunnskolen. Læreverkene er en del av denne reisen gjennom at de blir utviklet i henhold til læreplanen, og blir brukt i undervisning av lærere. Gjennom studier på læreverk kan man finne ut hvorvidt læreverkene følger, og oppdaterer seg etter, læreplanene, og per nå kan konklusjonen trekkes at de ligger godt an på temaet brøk.

Referanser

Aarnes, J. F. (2021, 23. desember). rasjonelle tall. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/rasjonale_tall

Aarnes, J. F. (2017, 15. juni). stambrøk. I *Store norske leksikon*. https://snl.no/stambrøk

Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational studies in mathematics*, *79*(2), 239–61. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9342-1

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2020a). *Multi Elevbok 1A* (3.utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2020b). *Multi Elevbok 1B* (3.utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2020c). *Multi Elevbok 2A* (3.utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2020d). *Multi Elevbok 2B* (3.utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2020e). *Multi Elevbok 3A* (3.utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2020f). *Multi Elevbok 5A* (3.utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2021a). *Multi Elevbok 3B* (3.utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2021b). *Multi Elevbok 4A* (3.utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2021c). *Multi Elevbok 4B* (3.utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A.C., & Rørsseland, M. (2021d). *Multi Elevbok 5B* (3.utg.). Gyldendal.

Arginskaya, I., Ivanovskaya, E., Kormishina, S., Blank, N., & Melhus, K. (2018a). *Matematikk Grunnbok 2A* (1.utg.). Barentsforlag.

Arginskaya, I., Ivanovskaya, E., Kormishina, S., Blank, N., & Melhus, K. (2018b). *Matematikk Grunnbok 2B* (1.utg.). Barentsforlag.

Arginskaya, I., Ivanovskaya, E., Kormishina, S., Blank, N., Tveit, C. & Melhus, K. (2017a). *Matematikk Grunnbok 4A* (1.utg.). Barentsforlag.

Arginskaya, I., Ivanovskaya, E., Kormishina, S., Blank, N., Tveit, C. & Melhus, K. (2017b). *Matematikk Grunnbok 4B* (1.utg.). Barentsforlag.

Arginskaya, I., Ivanovskaya, E., Kormishina, S., Blank, N., Tveit, C. & Melhus, K. (2016a). *Matematikk Grunnbok 3A* (1.utg.). Barentsforlag.

Arginskaya, I., Ivanovskaya, E., Kormishina, S., Blank, N., Tveit, C. & Melhus, K. (2016b). *Matematikk Grunnbok 3B* (1.utg.). Barentsforlag.

Arginskaya, I., Benenson, E., Itina, L., Kormishina, S., Blank, N., Melhus, K. & Moe, G. I. (2014a). *Matematikk Grunnbok 1A* (1.utg.). Barentsforlag.

Arginskaya, I., Benenson, E., Itina, L., Kormishina, S., Blank, N., Melhus, K. & Moe, G. I. (2014b). *Matematikk Grunnbok 1B* (1.utg.). Barentsforlag.

Aslanov, M., S., Blank, N., Tveit, C. & Melhus, K. (2018a). *Matematikk Grunnbok 5A* (1.utg.). Barentsforlag.

Aslanov, M., S., Blank, N., Tveit, C. & Melhus, K. (2018b). *Matematikk Grunnbok 5B* (1.utg.). Barentsforlag.

Aubert, K. E. (2021, 11. mars). brøk. I Store norske leksikon. https://snl.no/brøk

Barentsforlag. (u.å.-a). LÆREBØKER. Hentet 02.06.24 fra https://www.barentsforlag.com/product-category/laereboker/

Barentsforlag. (u.å.b). MATEMATIKK 1: GRUNNBOK 1A (BOKMÅL) – MATEMATIKK FOR GRUNNSKOLEN. Hentet 11. mai 2024 fra https://www.barentsforlag.com/product/matematikk-1-grunnbok-1a-bokmal/

Cady, J. A., Hodges, T. E., & Collins, R. L. (2015). A comparison of textbooks' presentation of fractions. School Science and Mathematics, 115(3), 105–116. https://doi.org/10.1111/ssm.12108

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, *12*(2), 117–151. https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora [NESH]. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora.*

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, *45*(5), 633-646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Fauskanger, J., & Mosvold, R. (2014). Innholdsanalysens muligheter i utdanningsforskning. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *98*(2), 127–139. https://doi.org/10.18261/ISSN1504-2987-2014-02-07

Forskrift om godkjenning av lærebøker. (1984). Forskrift for godkjenning av lærebøker for grunnskole og videregående skole (FOR-1984-01-13-3520). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/SFO/forskrift/1984-01-13-3520

Gyldendal. (2021, 17. mars) *Multi og fagfornyelsen i matematikk.* Gyldendal. https://www.gyldendal.no/grunnskole/aktuelt/multi-og-fagfornyelsen/?tags=10065

Gyldendal. (u.å.-a). *Ann-Christin Arnås.* Hentet 11. mai 2024 fra https://www.gyldendal.no/forfattere/ann-christin-arn%C3%A5s/a-10007327-no/

Gyldendal. (u.å.-b). *Bjørnar Alseth.* Hentet 10. mai 2024 fra https://www.gyldendal.no/forfattere/bj%C3%B8rnar-alseth/a-10000636-no/

Gyldendal. (u.å.-c). *Mona Røsseland* Hentet 11. mai 2024 fra https://www.gyldendal.no/forfattere/mona-r%C3%B8sseland/a-10000638-no/

Hellestø, H. (2017). Brøk-En studie av hvordan læreverket Multi legger til rette for elevers arbeid med brøk på 3.-7. trinn [Masteroppgave, Universitet av Stavanger]. UiS Brage. http://hdl.handle.net/11250/2451723

Howson, G. (2013). The development of mathematics textbooks: historical reflections from a personal perspective. *ZDM*, *45*(7), 647–658. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0511-9

Hwang, S., Yeo, S., & Son, T. (2021). A comparative analysis of fraction addition and subtraction contents in the mathematics textbooks in the US and South Korea. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *13*(4). https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Johansson, M. (2005). The mathematics textbook. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *25*(3).

Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education: A study of textbooks as the potentially implemented curriculum* [Doktorgradsavhandling] Luleå tekniska universitet.

Keijzer, R. (2003). *Teaching Formal Mathematics in Primary Education. Fraction Learning as Mathematising Process.* [PhD-avhandling, Vrije Universiteit Amsterdam]. CD-Beta Press, Center for Science and Mathematics Education.

Kunnskapsdepartementet. (2013). Læreplan i matematikk (MAT01-04). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. https://www.udir.no/kl06/mat1-04

Kunnskapsdepartementet. (2019). Læreplan i matematikk (MAT01-05). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* (4. utg.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003008057

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM*, *41*(6), 809–826. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0177-5

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review, 2015*(38), 201–221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Matematikk landet. (u.å.-a). *INTERAKTIVE KURS*. Hentet 11. mai 2024 fra https://matematikklandet.no/kurs-2/

Matematikk landet. (u.å.-b). *VÅRE FORFATTERE*. Hentet 11. mai 2024 fra https://matematikklandet.no/vare-forfattere/

Matematikk landet. (u.å.-c). *ZANKOVS UNDERVISNINGSSYSTEM.* Matematikk landet. Hentet 11. mai 2024 fra https://matematikklandet.no/zankovs-undervisningssystem/

Pepin, B., & Gueudet, G. (2020). Curriculum resources and textbooks in mathematics education. Lerman, S. (Red.) *Encyclopedia of mathematics education* (2. utg., s. 172–176). Springer.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Cappelen damm akademisk.

Rahmawati, T., Pangesti, S. R., Nuriadin, I., Kurniasih, M. D., & Purnomo, Y. W. (2020). How do Indonesian elementary school mathematics textbooks introduce fractions?. *In Journal of Physics: Conference Series*, *1581*(1). IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1581/1/012024

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., ... & Wray, J. (2010). *Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten through 8th Grade. IES Practice Guide*. NCEE 2010–4039. What Works Clearinghouse.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., ... & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science, 23*(7), 691–697.

Sun, X. H. (2019). Bridging whole numbers and fractions: Problem variations in Chinese mathematics textbook examples. *ZDM*, *51*(1), 109–123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01013-9

Swafford, J., & Kilpatrick, J. (Red.). (2002). *Helping Children Learn Mathematics*. National Academies Press.

Thaagard, T. (2018). Systematikk og innlevelse - en innføring i kvalitative metoder.

Tokheim, E. H. (2015). En analyse av tre norske læreverk i matematikk for 1. Trinn [Masteroppgave, Universitet av Stavanger]. UiS Brage. http://hdl.handle.net/11250/299385

Universitet i Stavanger. (u.å). *Cato Tveit.* Hentet 11. mai 2024 fra https://www.uis.no/nb/profile/cato-tveit

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2020). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. (10. utg.) Pearson.

Vula, E., Kingji-Kastrati, J., & Podvorica, F. (2015). A comparative analysis of mathematics textbooks from Kosovo and Albania based on the topic of fractions. In CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 1759–1765.

Yang, D. C. (2018). Study of fractions in elementary mathematics textbooks from Finland and Taiwan. *Educational Studies*, *44*(2), 190–211. https://doi.org/10.1080/03055698.2017.1347493

Yang, D. C., Reys, R. E., & Wu, L. L. (2010). Comparing the Development of Fractions in the Fifth‐and Sixth‐Graders' Textbooks of Singapore, Taiwan, and the USA. *School Science and Mathematics*, *110*(3), 118–127. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2010.00015.x

Yoshida, H., & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal‐partitioning and equal‐whole 1. *Japanese Psychological Research, 44*(4), s. 183–-195. https://doi.org/10.1111/1468-5884.00021