STUDENT: **SILJE UNDHEIM**
VEILEDER: EVA-MARIA REICH

Samarbeidsbasert problemløsing i matematikkundervisningen på småskolen.

Hvordan finner elevene løsninger sammen?

Masteroppgave i matematikk
År: 2023/2024

Grunnskolelærerutdanning for trinn 1-7

Institutt for grunnskolelærerutdanning, idrett og spesialpedagogikk

Fakultet for utdanningsvitenskap og humaniora

Universitetet i Stavanger

Antall ord: 36 259

Antall vedlegg/annet: 32

EMNEORD: Problem, problemløsing, løsningsstrategier, samarbeid, småskolen

Forord

I 2019 begynte jeg på lærerstudiet, rett etter videregående skole, med et sterkt ønske om å bli lærer. Det virker uvirkelig at det er fem år siden. Disse årene har flydd av gårde. Lærerutdanningen har gitt meg kunnskap og ferdigheter, som gjør at jeg føler meg godt rustet for arbeidslivet. Studietiden har også gitt meg vennskap, som jeg tar med meg videre i livet.

Først og fremst vil jeg takke min veileder Eva-Maria Reich. Takk for din kunnskap og støtte, gjennom hele forskningsprosjektet. Dine råd, tilbakemeldinger og innsikt, har vært til stor hjelp og nytte i masterskrivingen. Takk til universitetet i Stavanger, for interessante og lærerike emner. Takk til foreleserne, som har engasjert seg i studentenes læring, samt delt av erfaringer og kunnskap. Praksisskolene jeg har vært på, ønsker jeg også å takke. Jeg har lært så utrolig mye i praksisperiodene. Takk til elever og lærere som bidro i denne studien.

Jeg vil også takke min samboer som har tålt og møtt alle følelsene denne masteroppgaven har ført med seg. Takk for at du har heiet på meg gjennom hele prosessen. Jeg vil også takke min familie, som alltid stiller opp, er interesserte og involverte. Jeg vil også gi en takk til vennene mine, som har tatt meg med på store og små «eventyr» dette året. Dere har gjort at jeg har fått meningsfulle pauser, som har gitt meg motivasjon og energi. Takk til mine medstudenter, takk for utallige timer på biblioteket, fylt med kantinebesøk, effektivitet, latter og frustrasjon.

Silje Undheim

Mai. 2024

Sammendrag

Læreplanen og kjerneelementene i matematikkfaget (LK20) legger stor vekt på problemløsing og samarbeid. Både eldre og nyere litteratur og forskning viser tydelige fordeler med både samarbeid og problemløsing, samt kombinasjonen av disse. Ved å jobbe med problemløsing kan elevene oppnå en mer helhetlig forståelse av matematiske ideer. Gjennom samarbeidet er elevene nødt til å forklare og begrunne matematiske valg. Samtidig blir de nødt til å tolke og evaluere andres ideer og andres matematiske valg. For å undersøke samarbeidsbasert problemløsing på småskolen, har jeg valgt problemstillingen: *Hvilke løsningsstrategier bruker elevene på 3. trinn i arbeidet med samarbeidsbasert problemløsing i matematikkfaget.* Gjennom den deduktive innholdsanalysen av datamaterialet, ble det tydelig at dette forskningsspørsmålet måtte deles opp for å belyse temaet bedre. Jeg valgte derfor å dele problemstillingen inn i to forskningsspørsmål; *Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing*? og *Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?*

Studien baserer seg på en analyse av observasjoner og lydopptak av tredjeklasseelever. Elevene arbeider i grupper med problemoppgaver over tre undervisningsøkter. Mitt fokus er å undersøke hvilken innvirkning samarbeidet har på problemløsingsprosessen. Samt se på hvilke løsningsstrategier elevene bruker. Elevene i denne studien har lite erfaring med samarbeidsbasert problemløsing. Derfor viser løsningsstrategiene som kommer frem i studien, hvilke strategier elevene opplever som forståelige og gjennomførbare. I resultatene i denne studien, presenteres noen fordeler med samarbeid i problemløsingsprosesser, for eksempel støtte av medelever og at elevene oppdager hverandres feil. Alle strategiene som elevene brukte over de tre undervisningsøktene, blir presentert, Det blir også tydelig i studien hvor relevant Polyas strategier er for elever i problemløsingsprosesser. Hensikten med denne studien, er å synliggjøre de matematiske fordelene ved samarbeidsbasert problemløsing.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Matematikk har alltid vært mitt favorittfag. Jeg har hatt gode lærere, gode rollemodeller og gode samarbeidspartnere. Matematikken har gitt meg en opplevelse av mestring og økt nysgjerrighet. For ikke å snakke om et stort engasjement. Et engasjement for at matematikken i skolen skal være motiverende og spennende. Under problemløsingskurset i studiet, fikk jeg virkelig opp øynene for bruk av problemløsing i undervisningen. Jeg erfarte hvor mye matematisk innhold som finnes i problemløsingsoppgaver, og hvor motiverende det kan være å løse problem sammen med andre. Dette gjorde at jeg ønsket å skrive masteroppgaven min om dette emnet.

1.1 Bakgrunn for studien

På Utdanningsdirektoratet sine sider kan man lese om hva som er nytt i LK20:

> *I læreplanen er det lagt vekt på at elevene skal bli gode problemløsere og oppdage sammenhenger i, og mellom fagets kunnskapsområder og andre fags kunnskapsområder. Det er disse sammenhengene som legger til rette for dybdelæring og forståelse i faget. Faget legger også til rette for at elevene skal utforske matematikken og kommunisere om den. Læreplanene knytter seg tett til elevenes hverdag og skal forberede dem på et samfunn og arbeidsliv i stadig endring.* (Kunnskapsdepartementet, 2023).

Den nye læreplanen har et stort fokus på problemløsing, både i kjerneelementene og i læringsmål (Kunnskapsdepartementet, 2019). Læreplanen har et økt fokus på å få inn problemløsing i matematikkundervisningen på småskolen. Jeg har derimot oppdaget gjennom litteratursøk, at overvekten av forskning gjort på problemløsing omhandler elever på mellomtrinn, ungdomsskole eller på elever i videregående skole. Liljedahl og Cai (2021) skriver om tidligere forskning på problemløsing. Den første forskningen på problemløsing ble gjort på elever som jobbet alene. Dette ga et begrenset innblikk i elevenes tenking og elevene hadde bare egen kunnskap å lene seg på i arbeidet (Liljedahl & Cai, 2021). Dersom elevene kan bruke andre ressurser utenfor seg selv, får de mye utbytte av problemløsingen. I denne oppgaven vil dette bli henvist til som kunnskapsmobilitet (Liljedahl, 2021). Polya er en kjent matematiker innenfor problemløsing. I hans bok «How to solve it» presenterer han blant annet fire steg for problemløsing: forstå problemet, lag en plan, utfør planen og se tilbake. I tillegg til stegene gir han råd om hvordan man kan tenke og motivere seg selv, gjennom problemløsingsprosessen (Polya, 2014).

I norsk ordbok defineres samarbeid som å arbeide sammen, arbeide i felleskap. Samarbeid har også fått en større plass i LK20, sammenlignet med tidligere læreplaner. «Resonnering og argumentasjon» og «representasjon og kommunikasjon», står i kjerneelementene til matematikkfaget (Kunnskapsdepartementet 2019), disse kan alle kobles opp mot samarbeid i matematikkfaget. Disse kjerneelementene legger blant annet vekt på at elevene skal kunne «komme med egne resonnementer», «følge andres resonnement», «begrunne resonnement», «bevise», «bruke matematisk språk», «ha matematiske samtaler» og «begrunne matematiske valg» (Kunnskapsdepartementet, 2019). I kjerneelement om «utforsking og problemløsing» (Kunnskapsdepartementet 2019), står det at elevene skal kunne diskutere seg frem til en felles forståelse. I matematikken skal det legges mer vekt på strategier og fremgangsmåter, enn på selve svaret. Det skal legges mer vekt på prosessen og læringen som skjer. I kjerneelementene legges det frem strategier, som å bryte ned problem i mindre problem og sette prøve på svaret (Kunnskapsdepartementet, 2019), (Polya, 2014).

> *En stor internasjonal undersøkelse der elever fra 1. og 2. trinn fra Norge deltok, viste det at læringsutbyttet var best når elevene arbeidet i grupper. Mye individuelt arbeid synes i noen grad å ha negativ innvirkning på læringsutbyttet i matematikk (Birkemo, 2003b)* (Olafsen & Maugesten, 2015, s. 110).

Under samarbeidet jobber elevene sammen, og arbeider mot et felles mål, som er å finne løsninger på den gitte oppgaven. Samarbeidet fører til et resultat, resultatet blir diskutert og styrkes av medlemmene i gruppen. Styrkingen skjer gjennom at elevene tolker og vurderer hverandres bidrag (Liljedahl & Cai, 2021). Utbyttet elevene sitter igjen med er avhengig av kvaliteten på samarbeidet (Liljedahl & Cai, 2021). Det å jobbe sammen i grupper er en sosiokulturell prosess, elever lærer av en kompetent annen. Hva elevene kan klare alene er mindre enn hva elevene kan klare sammen med andre (Vygotsky et al. et al., 1978).

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmålet

I lys av litteraturen som understreker hvordan samarbeid kan fremme problemløsing og støtte matematisk utvikling, og med tanke på den betydelige vektleggingen dette har fått i LK20, ønsket jeg å utforske samarbeidsbasert problemløsing gjennom min studie. Problemstillingen min er *Hvilke løsningsstrategier benytter tredjeklassinger under samarbeidsbasert problemløsing i matematikk*?. Den deduktive innholdsanalysen av datamaterialet avdekket at spørsmålet kunne fordypes ytterligere, for å få besvare forskningsspørsmålet på best mulig måte. Dermed delte jeg problemstillingen i to: *Hvilke løsningsstrategier benytter elevene* *under samarbeidsbasert problemløsing*? og *Hvilken innvirkning har samarbeid på problemløsningsprosessen ?*. For å besvare disse spørsmålene, ble det nødvendig å trekke ut noen definisjoner på begrep, som problem, problemløsing, løsningsstrategier og samarbeid. Disse definisjonene er en del av det teoretiske rammeverket for oppgaven:

> *something or some situation is a problem only when someone experiences a state of problematicity, takes on the task of making sense of the situation, and engages in some sense-making activity* (Mason, 2016, s. 263).

> *problem solving is not the precise application of a known procedure. It is not the implementation of a taught algorithm. And it is not the smooth execution of a formula. Problem solving is a messy, non-linear, and idiosyncratic process. Students will get stuck. They will think. And they will get unstuck. And when they do, they will learn—they will learn about mathematics, they will learn about themselves, and they will learn how to think*. (Liljedahl, 2021. s. 19-20).

> *Med strategier menes overordnede fremgangsmåter, som kan brukes i forskjellige sammen- henger og ved forskjellige oppgaver* (Alseth, 1998, s. 15).

> *Samarbeid defineres som en arbeidsmåte der elevene opplever det slik at de bare kan nå sitt mål hvis de andre elevene, som de samarbeider med, når sine mål* (Johnson,1984, s.9).

1.3 Relevans og betydning

Schoenfeld (1992) legger vekt på viktigheten av at elevene utvikler egenskapen å skape mening og vurdere egen tenkning. Dette mener han at læreren kan gjøre via å engasjere dem i problemløsing, og at problemløsingen kan være med å skape kritisk tenking og dypere forståelse av matematikk hos elevene (Schoenfeld, 1992) .

I denne enkeltcasestudien utforsker jeg hvordan elever i tredjeklasse finner løsninger på problemoppgaver sammen. Gjennom denne studien gir jeg et konkret eksempel på hvordan man kan implementere problemløsing i matematikkundervisningen, samt potensielle fordeler og ulemper ved denne undervisningsmetoden. Gjennom litteratursøket ble det oppdaget en tydelig mangel på litteratur og forskning knyttet til problemløsing på småskolen, spesielt i forhold til norsk fagfellevurdert litteratur på emnet.

En stor studie som forsket på problemløsing hos ungdomsskoleelever er Boaler sin artikkel: *Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings* Boaler (1998) forsket på to ulike skoler i en periode på 3 år. Den ene skolen hadde fokus på å jobbe i matematikkbøker, mens den andre hadde en mer utforskende vinkling, og jobbet med problemløsing. Denne studien viste at elevene som jobbet mest i lærebøker klarte i mindre grad å bruke matematikken i ulike settinger, sammenlignet med elevene som jobbet med problemløsing. Elevene som jobbet med problemløsing, hadde et mer åpent syn på matematikk, og tenkte at matematikk er nyttig i flere arenaer enn kun i skolesammenheng (Boaler, 1998). Boaler forsket på elever i ungdomsskolen. I startfasen av dette prosjektet var hans forskning en stor inspirasjon for mitt prosjekt. Jeg synes funnene var interessante og det åpnet øynene mine for hvor stor effekt problemløsing i matematikkundervisningen kunne ha for elever.

Studiens mål er ikke bare å belyse hvordan elevene i den aktuelle tredjeklassen samarbeider om å finne løsninger på problem, men også å fremme en dypere forståelse av hvordan samarbeid kan påvirke problemløsingsprosessen, og hvilke strategier som er passende for elever på småskolen. Dette er en enkeltcase studie, som baserer seg på data fra en bestemt gruppe elever. Jeg håper likevel at ved å dokumentere og analysere elevenes løsningsprosesser, at jeg kan komme med et lite bidrag til den eksisterende forskningslitteraturen, samt gi lærere innsikt i hvordan elevene tenker. Denne innsikten kan være nyttig i arbeidet med å predikere elevsvar, eller for å sette seg inn i elevenes tenkning. Oppgaven kan også bli sett på som et eksempel eller inspirasjon for hvordan lærere kan bruke samarbeidsbasert problemløsing i matematikkundervisningen. Kanskje kan denne oppgaven være mitt lille bidrag til å løfte frem samarbeidsbasert problemløsning som en engasjerende og lærerik del av matematikkundervisningen.

1.4 Struktur av oppgaven

Oppgaven er delt inn i innledning, teori, metode, resultat, diskusjon og konklusjon. Innledningen setter oppgaven min inn i en samfunnskontekst, og presenterer relevante begrep, forskning, samt forklarer hva oppgaven skal inneholde og hvilket samfunnsbidrag oppgaven kan komme med. Teorien presenterer relevant forskning og litteratur, for å belyse min studie og for å kunne besvare mine forskningsspørsmål på best mulig måte. Metodedelen forklarer forskningsprosjektet steg for steg, for å synliggjøre for leseren hva som er gjort i studien. Metodedelen viser også hvordan dataene har blitt analysert. Den tar for seg kvaliteten i studien og viser hvilke forskningsetiske vurderinger som har blitt tatt. Resultatdelen presenterer funnene i studien, denne delen består av dialog mellom elevene og bilder av deres notater. I Resultatene forklarer jeg hva som har blitt observert, uten å blande inn teoretiske perspektiv. Jeg forklarer heller hvordan resultatene i studien har blitt tolket. Resultatdelen er viktig for å tydeliggjøre sammenhengen mellom dataene, elevdialog, deres notater, og observasjoner gjort under gjennomføringen. Loggene som ble laget etter undervisningen, flettes sammen med dette, for å gi et tydelig innblikk i de aktuelle dataene i studien. I diskusjonskapittelet drøftes og diskuteres resultatene, i lys at litteratur og forskning, som har blitt presentert i teorikapittelet. Konklusjonen oppsummerer studien og trekker frem de mest sentrale funnene i denne studien.

2 Teoretisk innramning

I denne delen av oppgaven tar jeg for meg teori og forskning som er nyttige for å kunne besvare forskningsspørsmålene mine: *Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing?,* og *Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?* For å besvare spørsmålene, og for å holde oppgaven ryddig, er det nødvendig å velge definisjoner som vil bli brukt i oppgaven. Det er også nødvendig å ta med teori om ulike løsningsstrategier for å senere i oppgaven kunne identifisere elevenes bruk av ulike strategier. Samarbeidet er også en sentral del av studien, dette vil bli belyst gjennom teori i denne delen. Denne studien har fokus på elevene i problemløsing, det vil dermed bli lagt liten vekt på lærerrollen i problemløsingssituasjoner. Lærerrollen er en svært viktig faktor i undervisningen, likevel er det ikke det som blir undersøkt i denne studien. Teorien legger heller vekt på elevene i samarbeid og i problemløsing. Denne teorien er grunnlaget i oppgaven. Den deduktive analysen er grunnlagt i teorien presentert i denne delen. Analysen ga resultat, og resultatene blir diskutert i del 5 av oppgaven, igjen opp mot teorien.

2.1 Problem

Forskere og matematikere har ulike definisjoner på hva et problem er (Grevholm, 2016). Disse ulike definisjonene gjør at det er et begrep som kan oppleves vanskelig å tolke, samtidig som det kan oppleves som selvsagt. Det er interessant for min oppgave å se på hva noen matematikkdidaktikere sier om dette komplekse begrepet. Jeg ønsker å se hvilke elementer som går igjen for å få en helhetlig forståelse av problem som et matematisk begrep. Jeg ønsker deretter å velge meg ut en av definisjonene på begrepet, som jeg videre i oppgaven vil benytte meg av.

Schoenfeld kommer med to krav for hva et problem er:

> *For any student, a mathematical problem is a task:*
> *a. in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain a resolution, and*
> *b. for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution* (Schoenfeld, 1992, s. 71)

Oversatt kan man tolke Schoenfeld sin definisjon av et problem, som noe elevene er interessert i, engasjert i, samt at elevene har et ønske om å løse problemet. En problemoppgave skal ikke ha en umiddelbar tilgjengelig fremgangsmåte, elevene må bruke tid på å finne frem til en metode for å løse problemet (Schoenfeld, 1992).

Bill Brooks mener at et problem er kun et problem dersom personen som skal løse problemet opplever det som et problem (Brooks, 1976).

Lester og Cai presenterer problemløsing som: «matematikkproblem en oppgave presentert for elever i en undervisningssammenheng som stiller et spørsmål som skal besvares, men som elevene ikke har en umiddelbart tilgjengelig prosedyre eller strategi for å svare på.» (Lester & Cai, 2016, oversatt), de setter begrepet mer inn i en undervisningssammenheng.

Karlsen (2023) bruker definisjonen «en oppgave regnes som et problem, dersom man ikke på forhånd har en ferdig oppskrift for å løse oppgaven» (Breiteig et.al, 2008, henvist i Karlsen, 2023, s.37). Denne definisjonen samsvarer godt med det andre kriteriet til Schoenfeld (1992). Mason presenter at et problem er:

«Something or some situation is a problem only when someone experiences a state of problematicity, takes on the task of making sense of the situation, and engages in some sense-making activity" (Mason, 2016, s.263). Denne definisjonen legger vekt på at problemet må oppleves som et problem for å kalles et problem.

For ordens skyld, velger jeg videre i min oppgave å ta utgangspunkt i Mason sin definisjon, da jeg opplever at den er utfyllende og inneholder viktige element i forståelsen av begrepet problem, i denne oppgavens sammenheng. Denne definisjonen tolker jeg som at et problem er et problem bare når personen opplever oppgaven som vanskelig, utfordrende eller uklar og at det krever en innsats for å løse den. Personen tar på seg oppgaven med å engasjere seg i en meningsskapende aktivitet. Denne definisjonen tar for seg to hovedkriterier for et problem, problemet må oppleves som et problem, samt at problemløseren også må ha et ønske om å løse og forstå problemet aktivt (Mason. 2016). Denne definisjonen stemmer overens med definisjonen fra kjerneelementene i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019), som sitert i kapittel 2.2 Den gir også det kriteriet, at elevene må ha et ønske om å delta i en meningsskapende prosess, for at det skal kunne kalles et problem (Mason, 2016). Definisjonen tar med seg flere av aspektene fra andre definisjoner, noe som gjør at definisjonen omfatter begrepet på en god måte. Jeg kommer til å bruke begrepene problem og problemoppgaver synonymt i denne oppgaven.

2.2 Problemløsing

Begrepet problemløsing har vært en del av matematikkfaget i mange år. Allerede i 1938 ble begrepet presentert av John Dewey i boka: Experience and Education, der la han vekt på at problemløsing og teori burde henge sammen. Et kjent sitat av Dewey er «learning by doing», og det er en stor del av hva problemløsing handler om, man lærer ved å gjøre. Georg Polya var også tidlig med å koble problemløsing til matematikkfaget. I boka hans «How to solve it» fra 1945, legger han frem hvordan man kan jobbe systematisk med problemløsing. Blant annet hans fire steg for problemløsing, som vil bli videre beskrevet i kapittel 2.4 og i tilhørende delkapittel. Polyas fire steg er fortsatt anerkjent som en god modell for problemløsing i dag (Olafsen & Maugesten, 2015).

Problemløsing er prosessen der man løser problemet. Liljedahl og Cai (2021) bruker definisjonen: «problemløsning er en kompleks menneskelig aktivitet som involverer kunnskap, kontroll, tro og følelser innenfor en sosial og kulturell kontekst.» (Liljedahl & Cai

2021. Problemløsing er en ferdighet elevene må trene opp, på lik linje som multiplikasjon, divisjon, addisjon og lignende (Posamentier, 2009). Problemløsing har vært en del av læreplanen i matematikk siden mønsterplanen i 1987 (Olafsen & Maugesten, 2015), og har blitt mer og mer lagt vekt på i læreplanene siden. Kjerneelementene i matematikk fra LK 20 sier: «Problemløsing i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før.» (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Grevholm har oversatt Lester (1983) sine tre kriterier for hva en matematisk oppgave må inneholde for å være et matematisk problem:

- *Individet eller gruppen som møter oppgaven, vil eller må finne en løsning.*
- *Det finnes ingen tilgjengelig fremgangsmåte som garanterer eller innebærer en fullstendig løsning.*
- *Individet eller gruppen må gjøre en viss innsats for å komme frem til løsningen.* (Grevholm, 2016, s. 208)

Liljedahl forklarer problemløsing kort og godt som: «Problem solving is what we do when we don't know what to do.» (Liljedahl, 2021, s. 19). Han mener at dette er en universell forklaring som det er enighet om. Han utdyper utsagnet ved å forklare:

> *That is, problem solving is not the precise application of a known procedure. It is not the implementation of a taught algorithm. And it is not the smooth execution of a formula. Problem solving is a messy, non-linear, and idiosyncratic process. Students will get stuck. They will think. And they will get unstuck. And when they do, they will learn— they will learn about mathematics, they will learn about themselves, and they will learn how to think.* (Liljedahl, 2021. S. 19-20).

Denne definisjonen tar for seg et mer omfattende syn på hva problemløsing er. Definisjonen har likhetstrekk med de andre definisjonene presentert i dette kapittelet. Den tar også tydelig for seg hvordan denne prosessen kan oppleves for individet. Det blir lagt vekt på at problemløsing er «rotete» og «ikke-lineær», altså at man må jobbe med problemet (Liljedahl, 2021). Det kan dras paralleller fra Liljedahl sin definisjon til Polyas problemløsningsmetode. Polya ser også på problemløsing som en prosess, hvor man møter på motstand og at man kommer til å «get stuck» og «unstuck» (Polya. 1945/2014). Liljedahls forklaring er omfattende og tar med seg flere relevante deler av problemløsingen. Den passer godt til min problemstilling *Hvilke løsningsstrategier bruker elevene på 3. trinn i arbeidet med samarbeidsbasert problemløsing i matematikkfaget*. Den er også relevant til mine to forskningsspørsmål: *Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing?*, og *Hvilke påvirkninger kan samarbeid ha i problemløsing?*

Liljedahls definisjon passer godt i min studie, da jeg har fokus på eleven i løsningsprosessen. Definisjonen tar for seg løsningsprosessen, samt hvilke utfordringer problemløseren kan møte i problemløsningen. Problemløseren i min oppgave er eleven. Derfor er det denne definisjonen som vektlegges i denne oppgaven. Jeg syntes at denne definisjonen får frem målene ved å benytte problemløsning på en god måte, de lærer av å gjøre. De lærer både om matematikk, om seg selv og generelt om å tenke. Som nevnt tidligere er det nettopp derfor problemløsningen bør få sin fortjente plass i undervisningen.

2.3 Oppgaver i matematikk.

I denne delen vil jeg se nærmere på ulike oppgaver i matematikk. Ulike typer oppgaver har ulike formål. Senere i metodedelen, kapittel 3.4, forklarer jeg hvordan oppgavene brukt i denne studien, ble valgt. For å bygge opp under valget mitt av oppgaver til studien, ønsker jeg i denne delen å belyse ulike typer oppgaver, deres ulike kjennetegn og fordeler. Jeg vil ha et spesielt fokus på problemoppgaver også i denne delen. Grunnen til at jeg ønsker å presentere noen andre oppgavetyper, er at jeg ønsker å vise forskjellene på problemoppgaver og andre oppgaver. Dette er relevant for oppgaven for å begrunne valget av oppgaver som skulle brukes i studien, se kapittel 3.5.

2.3.1 Rutineoppgaver og standardoppgaver

Rutineoppgaver og standardoppgaver er oppgaver der elevene trener eller terper på sine ferdigheter. Metoden er klar, og elevene vet hvordan de skal løse oppgaven. Ferdighetstrening handler om at elevene skal øve seg på å automatisere matematikken og løsningsprosessene, mer enn å utforske matematikk (Grevholm, 2016). Dette er oppgaver som, i følge Lockhart, er tankeløse prosesser som dreper elevenes interesse for matematikk (Lockhart. 2002). Som nevnt, trekker til motsetning Grevholm frem at i disse oppgavene blir elevene trent på automatisering, som også er en viktig ferdighet innen matematikk.

2.3.2 tekstoppgaver

I tekstoppgaver lærer elevene å løse matematikk ut fra en tekst. Teksten og oppgaven er ofte knyttet til dagliglivet. Slike oppgaver er ikke nødvendigvis vanskeligere enn rutineoppgaver, men elevene kan møte på utfordringer i å forstå hva oppgaven spør om (Grevholm. 2016). Slike oppgaver kan også kalles problemoppgaver, dersom kriteriene for en problemoppgave er oppfylt. Se definisjon til denne oppgaven i kapittel 2.1.

2.3.3 Rike oppgaver

Rike oppgaver er en type problemoppgaver. Definisjonen av rike oppgaver er på lik linje med problemoppgaver vanskelig å definere, da det er flere definisjoner på begrepet. En måte å forstå rike oppgaver på, er at det er oppgaver som «kobler sammen forskjellige matematiske tema eller løsningsmetoder» (Grevholm, 2016. s. 209). Kriteriene for en problemoppgave er inkludert i kriteriene for en rik oppgave, totalt er det sju kriterier som må være oppfylt for at oppgaven kan kalles rik. Disse kriteriene er opprinnelig presentert av Taflin (2007, s. 56) og oversatt av Grevholm slik:

1. *problemet må introdusere viktige matematiske ideer.*
2. *problemet må være lett å forstå, og alle må ha mulighet til å jobbe med det.*
3. *Problemet må oppleves som en utfordring og krever en innsats, og det må tillates at det kan ta tid å løse det.*
4. *problemet må kunne løses på ulike måter, ved hjelp av ulike matematiske ideer og representasjoner.*
5. *problemet må kunne føre til matematiske resonnement ut fra elevenes forskjellige løsninger- resonnement som viser til ulike matematiske ideer.*
6. *problemet må kunne fungere som en brobygger.*
7. *problemet må kunne føre til at elever og lærere formulerer nye interessante problem.*

(Grevholm, 2016, s. 215).

En kriterieliste fra et norsk forskningsprosjekt, som omhandler rike og åpne oppgaver, mener at rike oppgaver er oppgaver som:

- *Det er lett for alle å komme i gang med problemene.*
- *De innbyr til problemløsing og valg av en metode eller fremgangsmåte.*
- *De passer til samarbeid.*

- *De løses over lengre tid.*
- *Nye spørsmål kan dukke opp.*
- *De kan gjenskapes av en modell.*

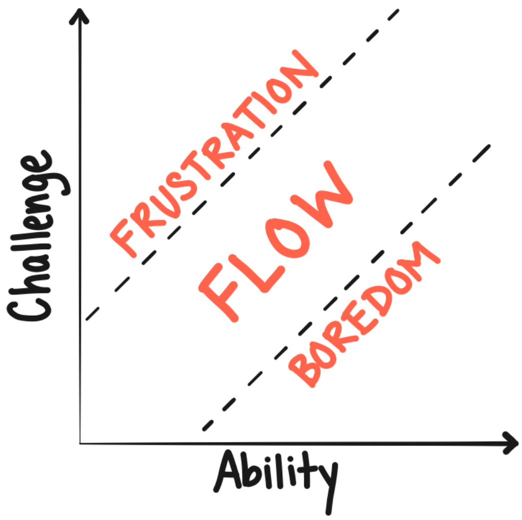
(Grevholm, 2016, s. 215)

Rike oppgaver er altså problemoppgaver som inneholder gitte kriterier. I denne oppgaven vektlegges kriteriene fra den norske studien som Grevholm (2016) henviser til. Denne studien er skrevet av Jaworski et al. (2007). Kriteriene er korte, enkle å forstå og oppleves greie å identifisere i oppgaver. Rike oppgaver er altså problemoppgaver, derimot oppfyller ikke alle problemoppgaver kriteriene for å kunne kalles rike oppgaver. I kapittel 3.4 forklarer jeg nærmere valget av oppgavene i denne studien, og hvordan jeg har brukt teori om rike oppgaver i valget.

2.3.4 Kognitivt krevende oppgaver

Ulike typer oppgaver aktiverer ulike deler av elevenes interesse og motivasjon. Lockhart setter det på spissen og sier at alle oppgaver som ikke er problemløsing er tankeløs aktivitet og dreper interessen hos elevene (Lockhart, 2002). Som nevnt i kapittel 2.3.1 er det kanskje mer nyansert enn Lockhart sin mening, og det er fordeler med ulike typer oppgaver i matematikken. I boka «Motivasjon i matematikk», er det et kapittel som omhandler oppgaver som fremmer resonering og problemløsing. Disse oppgavene har som mål å legge til rette for refleksjon rundt *egen tenking og egne arbeidsmåter* (Wæge & Nosrati, 2018). En type oppgave som presenteres er kognitivt krevende oppgaver. Dette er oppgaver som fremmer resonering og problemløsning. Kognitivt krevende oppgaver vil si at oppgaven krever at elevene blir utfordret, samtidig som oppgaven ikke er for vanskelig (Wæge & Nosrati, 2018). Problemoppgaver er vanligvis kognitivt krevende oppgaver (Zhang & Cai, 2021), det at oppgavene er kognitivt krevende kan gjøre at elevene ser sammenhenger mellom matematiske tema samt får en dypere forståelse (Zhang & Cai, 2021), I arbeidet med kognitivt krevende oppgaver, er det viktig at læreren ikke gjør oppgaven lettere i løpet av en økt, men heller støtter elevene og motiverer dem. Wæge og Nosrati mener at det er viktig at lærere setter høye krav til elevene. Liljedahl (2021) mener ikke bare at man bør sette høyere kognitive krav til elevene, men også at elever selv ønsker å bli utfordret. Han mener at elever ønsker å tenke og gruble over problem, og at de synes det er motiverende, samtidig som elevene får høyere selvtillit og blir bedre matematiske tenkere. (Liljedahl, 2021)

Dette kan kobles til teorien om Flow, altså flyt. For å få en god flyt i arbeidet med problemløsing, er det viktig at det er en god balanse mellom vanskelighetsgrad og hvilke evner elevene har (Csíkszentmihályi, 1990). Dersom elevene ikke har de nødvendige matematiske evnene for å løse en oppgave, skapes det en ubalanse mellom utfordring og evne, noe som kan føre til at problemløseren kan oppleve frustrasjon (Csíkszentmihályi, 1990). Ubalansen kan også gå andre veien, altså at eleven har større evne, slik at oppgaven ikke er nok utfordrende. Dette kan føre til at elevene føler at arbeidet er kjedelig. I balansen mellom utfordring og evne kan det oppstå en flyt i arbeidet. Dette konseptet representerer Liljedahl (2021) i en modell:



Figur 1, Flow, hentet fra Liljedahl (2021), s. 148.

I en problemløsingsprosess er det ideelle å havne i flytsonen. Da er problemet passende for elevene, uten at arbeidet avbrytes av kjedsomhet eller frustrasjon (Liljedahl, 2021). Liljedahl (2021) presenterer også hvordan man kan bruke hint for å holde elevene i flytsonen, det ble ikke brukt i denne studien. Denne teorien velger jeg å ta med i oppgaven fordi min forskningsgruppe består av unge elever, og det er derfor viktig at de opplever flyt i arbeidet sitt. Dette samsvarer med Polya sin teori. Jeg ønsker at elevene i denne studien skal mestere å «get unstuck» når de opplever å «get stuck» (Polya 1945/2014) Da er det å ha fokus på elevenes flytsone et viktig perspektiv.

2.4 Polyas problemløsningsmetode

Georg Polya er et velkjent navn innenfor problemløsing. I hans bok *How to solve it* fra 1945, introduserte han problemløsing, som en del av matematikkfaget (Olafsen & Maugesten, 2015). Han presenterer blant annet fire steg for å løse et problem. Polya ser på problemløsing som en ferdighet som kan trenes opp. Disse fire stegene viser hvordan man kan jobbe og tenke i en problemløsingsprosess. Stegene legger vekt på og legger til rette for, at den som løser problemet kan bruke mange innfallsvinkler og metoder for å løse et problem. Disse stegene blir omtalt som en guide for å løse et problem, og tar for seg spørsmål man kan stille seg selv, for å komme videre i problemløsingsprosessen (Posamentier, 2009). Polya sin teori blir vektlagt i denne oppgaven. Hans forskning er relevant i denne sammenheng fordi elevene i studiet skal arbeide med ukjente problem. Polya sin teori viser fire steg for problemløsing. Stegene blir presentert i kapitlene nedenfor.

2.4.1 Forstå problemet

For å løse et problem kreves det at problemløseren har forstått problemet (Polya, 2014) Dermed er Polyas første steg i problemløsingsprosessen, å forstå problemet. Dette er noe som for mange kan virke åpenbart, Polya mener at hvis man bruker tid i starten på å forstå problemet, vil problemløsingen bli lettere. Man skal i denne delen spørre seg selv flere spørsmål. Forstår jeg alle begrepene? Hva skal jeg finne ut? Kan jeg omformulere problemet? Kan jeg tegne eller lage et diagram som hjelp til å forstå problemet? Har jeg nok informasjon til å forstå problemet? (Polya, 2014). Disse spørsmålene kan gjøre det lettere å forstå problemet. Fordelen med å ta seg tid til å forstå problemet er at elevene vil løse problemet raskere (Olafsen & Maugesten, 2015). Polya mener det er tåpelig å løse et problem som man ikke forstår, men peker også på at elevene skal ha en interesse for å løse problemet (Polya, 2014).

2.4.2 Lag en plan

Andre steg i prosessen er å lage en plan. Polya presiserer at det er mange måter å løse et problem på, trikset er å finne en strategi som man tenker kan være hensiktsmessig i det aktuelle problemet (Polya, 2014). I boka viser han noen ulike strategier i problemløsing og han mener at desto mer man jobber med problemløsing, desto flinkere blir man på å velge effektive strategier for å løse problemer. Flere av disse strategiene skal jeg se nærmere på i

denne oppgaven. De ulike strategiene som elevene brukte i denne studien er presentert i kapittel 2.5, og tilhørende delkapittel. Disse strategiene vil også bli brukt for å diskutere resultatene i denne studien. Listen under viser problemløsingsstrategier som Polya (2014) og Posamentier (2009) presenterer i sine bøker, denne listen viser ikke alle mulige strategier, men gir et innblikk i noen ulike strategier som kan brukes i problemløsingen. Videre i oppgaven skal jeg gå nærmere inn på de strategiene som ble relevante i denne oppgaven.
Liste over strategier:

- Gjett og sjekk
- Lag en ordnet liste
- Eliminer muligheter
- Bruk symmetri
- Vurder spesialtilfeller
- Bruk direkte resonnement
- Løs en ligning
- Se etter mønster
- Tegn et bilde
- figurer
- Løs et lignende problem
- Bruk en modell
- Arbeid baklengs
- Bruk en formel
- Vær oppfinnsom
- Se på det ukjente

(Polya, 2014) (Posamentier, 2009)

Polya skriver at det å lage en plan kan være tidkrevende og vanskelig. Det er vanskeligere for elevene å lage en plan om de ikke er godt kjent med det matematiske innholdet i oppgaven (Polya, 2014). Det er fordi gode ideer ofte er basert på tidligere erfaringer som elevene har. I jakten på å lage en plan kan man se på lignende problem som man har kunnskap til (2.5.7). Dersom man ikke kjenner til lignende problem, kan man prøve å omformulere problemet, eller lage et mindre problem som man kan løse. Da kan man kanskje få nyttig kunnskap om problemet, eller kanskje man kommer med en god ide, som kan være til hjelp for å lage en plan (Polya, 2014).

2.4.3 Utfør planen

I det tredje steget skal man utføre planen. I denne delen legges det frem at man trenger tålmodighet og de nødvendige matematiske kunnskapene, som kreves for å løse oppgaven. Dersom man i dette steget opplever at planen ikke fungerer, må man gå tilbake til steg to, og lage en ny plan (Polya, 2014). En fare i dette steget er at eleven kan glemme hva som var planen, dette skjer oftest dersom planen kommer fra læreren eller fra noen andre enn dem selv. Dersom elevene har laget planen selv, og har en forståelse av hva de gjør og hvorfor, er det mindre sannsynlig at de glemmer planen (Polya, 2014). I dette steget legger Polya vekt på at elevene må bli minnet på av læreren, at de må sjekke om hvert steg er rett (Polya, 2014).

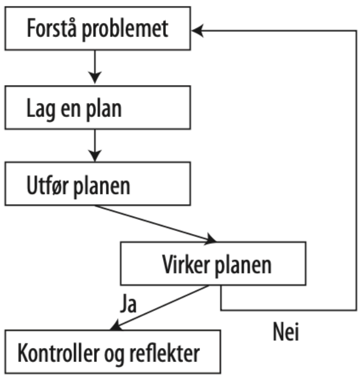
> *Trying to find the solution, we may repeatedly change our point of view, our way of looking at the problem. We have to shift our position again and again. Our conception of the problem is likely to be rather incomplete when we start the work; our outlook is different when we have made some progress; it is again different when we have almost obtained the solution* (Polya, 1945/2014, s.5).

I dette sitatet er det tydelig at Polya ser på problemløsing som en prosess. Han vektlegger viktigheten av det første steget, å forstå problemet, og forklarer at når man utfører planen, kan man se nye sider av problemet. Dersom man setter i gang med å løse problemet, kan man bedre forstå problemet, fordi man har en bedre forståelse (Polya, 2014). Da kan det være nyttig og se tilbake, som er det fjerde steget til Polya.

2.4.4 Se tilbake

Polya presiserer hvor viktig det er å se tilbake på arbeidet sitt og reflektere over valg og løsninger. Dette steget er viktig for å bli en god problemløser. Her kan man lære hva som var lurt og ikke like lurt i prosessen, for så å ta med seg disse erfaringene i senere oppgaver. I dette steget er det også lurt å sjekke at svaret man har fått faktisk er riktig, og reflektere om denne løsningen kan bli brukt i andre problemer man kjenner til (Polya, 2014). Dersom elevene ser tilbake og reflekterer over løsningsprosessen vil elevene forstå bedre hva de har gjort, og det blir lettere for dem å løse lignende problem senere (Olafsen & Maugesten, 2015). Polya mener at når man skal lage en plan, er det nødvendig med matematisk kunnskap og erfaringer (Polya, 2014). Ved å se tilbake kan elevene få disse erfaringene, slik at det kan bli lettere å løse andre problemer senere.

Polyas fire steg i problemløsing kan illustreres slik:



Figur 2. Polyas steg for problemløsing (Olafsen & Maugesten, 2015, s.49)

Som tidligere nevnt i kapittel 2.2 så er problemløsing en ikke-lineær prosess, dette er det enighet om fra blant annet Liljedahl (2021) og Polya (2014). Den ikke- lineære prosessen kan illustreres slik som figur 2 ovenfor. Dersom man utfører planen og ser at den ikke fungerer, bør man gå tilbake til å forstå problemet igjen, for deretter å gå gjennom stegene på ny (Polya, 2014). Mer om dette vil bli forklart i kapittel 2.7.5.

2.5 Løsningsstrategier

«Med strategier menes overordnede fremgangsmåter, som kan brukes i forskjellige sammen-henger og ved forskjellige oppgaver» (Alseth, 1998, s. 15). Schoenfeld (1992) mener at problemløsingsstrategier utgjør et fundamentalt aspekt med matematisk tenking (Schoenfeld, 1992). De presenterte løsningsstrategiene i dette kapitelet er de som elevene i denne studien har brukt i sitt arbeid med samarbeidsbasert problemløsing. Strategiene er en viktig del av å belyse forskningsspørsmålet «Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing?». Denne delen av teorien ble viktig i arbeidet med analysen, for å identifisere de ulike løsningsmetodene som elevene brukte. I Posamentiers (2009) bok *Problemsolving in mathematics, grade 3-7*, skriver han at noen av disse løsningsstrategiene blir presentert i lærebøker, mens andre uteblir, samt at ikke alle strategiene er passende for alle skoletrinn (Posamentier, 2009). Charles, Lester og O'Daffer (1992) mener i likhet med Posamentier (2009) at «gjett og sjekk, tegne et bilde, spille ut problemet, bruke konkreter, velg en regneoperasjon, løse et lettere problem, lag en tabell, se etter mønster, lage en organisert liste, skriv en ligning, lage logiske resonnement eller jobbe baklengs (Charles, Lester & O'Daffer (1992)», kan passe som strategier på barneskolen (Elia. et al. 2009, s. 607, oversatt av meg). Strategiene som Elia et al. nevner, som de har hentet fra Charles. et al. (1992), inneholder flere av strategiene som nevnt i listen i kapittel 2.4.2. Flere av strategiene som Charles. et al. (1992) mener passer godt for yngre elever, ble brukt av tredjeklassingene i denne studien.

Når elever jobber med problemoppgaver, finnes det som regel flere måter å løse problemet på. Dette stiller krav til elevene om at de må kunne forklare hvordan de har tenkt (Karlsen, 2023). I Kjerneelementene i matematikk står det:

> *Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige*. (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Problemoppgaver gir også elevene bekreftelse på at det finnes flere måter å tenke på og gjøre matematikk på (Karlsen, 2023). "Å bruke flere representasjoner for å diskutere, forklare og se sammenhenger mellom matematiske ideer bidrar til at elevene utvikler en rasjonell forståelse i matematikk.» (Wæge & Nosrati, 2018, s. 97). Slike representasjoner kan være verbal, visuell, symbolsk, kontekstuell eller fysisk (Wæge & Nosrati, 2018). I et arbeid kan man være innom flere representasjonsformer, noe som kan gi elevene et mer helhetlig bilde av det matematiske innholdet i for eksempel en problemoppgave. Dette kan hjelpe elevene til å forstå matematiske ideer, prosedyrer eller begrep (Wæge & Nosrati, 2018). Det kan altså være gunstig å være innom flere typer strategier og andre representasjoner i problemløsingssammenheng, for å kunne få et mer helhetlig bilde av, og/eller forstå bedre det matematiske innholdet i oppgaven.

Når elever jobber i grupper og får mulighet til å diskutere med andre og finne egne løsninger på problem, får elevene utvikle metoder som er oppleves som relevante (Alseth, 1998). Elevene jobber da gjennom hele prosessen og kan trekke konklusjoner som gir mening for dem. Elevene får også utforske oppgavene på en god måte, da det ikke er lagt noen føringer fra start på hvilken løsningsmetode de bør velge. Når læreren presenterer et løsningsforslag, kan dette tolkes som den «riktige» løsningen, og elevene bruker bare den (Alseth, 1998).

Dersom elevene får mulighet til å oppdage egne metoder kan disse være lettere å huske og elevene får konstruere egen kunnskap, slik at de bedre husker (Zimmermann, 2016). Zimmermann (2016) skriver i sin forskning at elevene ofte gjenoppfinner matematiske ideer, gjennom arbeidet med problemløsing.

> *Holdningsundersøkelser blant ungdomsskoleelever viser at de ofte tror at matematikk er utviklet av noen få «genier», og at de selv aldri kan klare å finne på noe selv. De tror at matematikk er å kopiere andre, enten læreren eller læreboka*. (Alseth, 1998, s. 26)

Ved å utvikle eller oppdage egne metoder for problemløsing, går elevene bort fra å utføre en algoritme de har pugget. Når man selv har utviklet eller oppdaget løsningsmetoden, kan det føre til at eleven føler seg friere til å gjøre endringer og variere løsningsmetode (Alseth, 1998). Videre i dette kapitelet presenteres løsningsstrategiene som elevene i denne studien brukte i problemløsingen.

2.5.1 Gjett og sjekk

Elever i matematikkundervisningen på skolen blir ofte minnet på at man ikke skal gjette (Gay, 1992). I problemløsingsaktiviteter, trenger ikke det å gjette på et svar, være negativt. Et gjett kan gjøre det mindre farlig å teste ut en metode, det kan gjøre det lettere å komme inn i arbeidet. Et gjett kan gi problemløseren mer informasjon om problemet man står ovenfor. Man kan lære av sine feil og oppdage nye aspekter ved oppgaven, som man kanskje ikke hadde oppdaget før (Gay, 1992). I sammenheng med å gjette, er det nødvendig å sjekke om gjettet kan være rett. Dermed kan man enten gjette og sjekke igjen, eller man kan ha fått nye ideer eller inspirasjon, til å prøve andre løsningsstrategier, basert på hva man har lært om problemet (Alseth, 1998). Alseth skriver at dersom man bruker løsningsmetoden gjett og sjekk så:

> *vil man kunne få en bedre forståelse av problemet, og man vil kunne nærme seg en løsning. Det er imidlertid ikke slik at en strategi nødvendigvis fører til en løsning av problemet. Mens en algoritme alltid gir en, om enn feilaktig, løsning, kan det vise seg under løsningsarbeidet at det er umulig å fortsette med den strategien man har valgt. Derfor er det viktig at man vurderer strategien man bruker underveis: er jeg på rett*

vei, kan jeg effektivisere denne strategien, bør jeg heller velge en annen strategi? (Alseth, 1998, s. 15).

Det er forskjell på å komme med et tilfeldig gjett og det å komme med et *intelligent gjett*. For at elevene skal ha *intelligent gjett* må elevene gjette *systematisk, informert, og validert* (Posamentier, 2009). Gjettet bør bli gjort på grunnlag av matematiske kunnskaper, og av informasjonen gitt i oppgaven (Posamentier, 2009). Polya mener at «ingen ideer er dårlige så lenge det ikke er et helt ukritisk gjett, det som er dårlig er å ikke ha noen ideer» (Polya, 1945/2014. s.99, oversatt).

2.5.3 Å se for seg problemet - Tegn et bilde, visualisere, figur og mønster

Ifølge Alseth (1998) er «Den mest nyttige strategien i arbeidet med matematiske problemer er antakeligvis det å lage en tegning eller et diagram av det aktuelle problemet» (Alseth, 1998, s.15). I en problemløsingsprosess kan det å tegne et bilde, gjøre at man får en forståelse av hva problemet handler om, tegningen kan også være en strategi for å finne løsninger. Den opprinnelige tegningen kan bli forbedret og redigert utover i prosessen (Gay. 1992). Hvordan elevene tegner, er et resultat av hvordan de har tolket problemet (Ahlberg & Moen, 1999). Wæge og Nosrati (2018) mener at det å tegne et bilde er like nyttig for en førsteklassing som for en elev på videregående skole. Slike tegninger kan gjøre det lettere for elevene å forstå oppgaven, de kan også hjelpe læreren med å sette seg inn i hvordan eleven har tenkt (Wæge & Nosrati, 2018). Spesielt for de unge elevene, kan det å tegne et bilde gjøre at de klarer å løse komplekse problem, som de neppe ville klart å løse uten tegningen (Alseth, 1998). Dersom elevenes tegninger blir diskutert kan elevene bygge en relasjonell forståelse (Mason, 2016) for matematikken i oppgaven (Wæge & Nosrati, 2018). Det vil si at elevene kan få øve seg på å se matematikk representert i ulike former, kunne veksle mellom dem og ta med seg denne relasjonelle forståelsen videre inn i nye problemoppgaver (Wæge & Nosrati, 2018). Fordelen ved å tegne et bilde, er at elevene klarer å se for seg problemet, eller visualisere problemet, noe som er avgjørende for løsningsprosessen (Polya, 2014). Det å visualisere kan være det å tegne et bilde eller å bruke konkreter. Wæge og Nosrati (2018) mener at det å bruke konkreter eller andre visualiseringsformer er gunstig for alle som skal løse et problem, uansett alder og nivå (Wæge & Nosrati, 2018).

Bruk av symmetri, mønster eller figurer kan være at man bruker en figur som hjelpemiddel for å løse et problem. Man kan starte med å tegne opp en figur relevant for problemet, legger så ved relevant informasjon som oppgaven gir (Polya, 2014). Om denne figuren er god nok til å løse problemet vet man ikke før man begynner. Underveis i prosessen kan man lage nye figurer, legge til info eller redigere informasjon om figuren (Polya, 2014). Polya (2014) stiller seg spørsmålet om figuren bør bli tegnet for frihånd eller helt figurlig, med hjelpemidler, dette kan for eksempel være en passer eller en linjal. Han mener at begge formene, både for frihånd og figurlig har hver sine fordeler. Eksakte kopier viser geometriske egenskaper som kan være komplekse og kompliserte. Hva problemet spør etter, har påvirkning på valget mellom eksakt kopi eller frihånd, hva som blir mest hensiktsmessig. I de fleste tilfeller er det tilstrekkelig å tegne en figur med frihånd (Polya, 2014). I likhet med å tegne en figur, kan det å se etter et mønster også brukes som en strategi for å løse et problem.

> *Some problems will actually state that a pattern exists in a sequence of numbers and ask the student to find the pattern and/or continue the sequence for an additional few terms. Other problems may require a table or list to organize the data and see if a pattern emerges. However, a very powerful problem-solving strategy for problems that do not directly call for finding a pattern is, in fact, to search for a pattern and then use it to solve the problem.* (Posamentier, 2009, s. 71)

Dersom man løser deler av oppgaven, kan man se et mønster, som kan gi en ide på hva som er løsningen på problemet. Dersom man ser et mønster, kan man videre gjøre et kalkulert gjett og sjekke om mønsteret kan brukes for å løse oppgaven (Gay. 1992).

2.5.5 Arbeid baklengs

For elevene kan det oppleves unaturlig å arbeide baklengs (Posamentier, 2009). Vanligvis jobber elevene fra starten og løser oppgaver steg for steg til de finner et svar. Løsningsstrategien arbeid baklengs, handler om at man starter med sluttresultatet og jobber seg tilbake til svaret, for så å reversere regneoperasjonene (Posamentier, 2009).

> *Studentene begynner med sluttresultatet av problemet og utfører handlingen baklengs for å finne betingelsene i begynnelsen. De matematiske operasjonene blir reversert; så, for eksempel, blir det som var subtraksjon nå den inverse operasjonen, nemlig, addisjon. Når svaret er funnet, kan resultatene sjekkes ved å starte med dette svaret og gjennomføre handlingen fra start til slutt.* (Posametier, 2009, s. 60, oversatt)

Polya (2014) beskriver, i likhet med Posamentier (2009) at det å arbeide baklengs handler om å starte der man vil ende, regne ut, bli klokere på hva problemet spør om, deretter reversere stegene. Polya mener også at denne løsningsmetoden krever at elevene klarer å være kritiske og bruke sunn fornuft (Polya, 2014)

2.5.6 Sette prøve på svar

I dette kapitelet, 2.5.7 og 2.4.4 presenteres råd fra Polya. *Sette prøve på svar, se på kjente problem* og *gå tilbake* (Polya, 2014) er ikke direkte og anerkjente løsningsstrategier, de vil likevel bli sett på som løsningsstrategier i min studie. Dette kommer av at elevene bruker disse rådene for å komme frem til ukjente løsninger på problemene. *Med strategier menes overordnede fremgangsmåter, som kan brukes i forskjellige sammenhenger og ved forskjellige oppgaver* (Alseth, 1998, s. 15). Elevene bruker disse rådene som fremgangsmåter, for å forstå oppgaven og for å finne løsninger. Rådene er en stor del av løsningsprosessen for noen av gruppene, derfor blir sette prøve på svar, se på kjente problem og å gå tilbake, sett på som løsningsstrategier i denne studien.

Det er ikke bare når man bruker løsningsstrategien gjett og sjekk at man skal sjekke svar. Polya ser på det å sette prøve på svar, som en del av selve løsningsprosessen. Hans fjerde steg i problemløsingsprosessen er å se tilbake (kap. 2.3.4), dersom du kan sjekke svaret, styrker det troverdigheten til resonnementene og tankene dine gjennom løsningsprosessen (Polya, 2014). Ved å analysere egen prosess, kan man ta med seg erfaringene sine fra hva som fungerte og ikke fungerte, videre til andre problem. Å sette prøve kan bli gjort med flere ulike metoder, ett eksempel er å sjekke argument (Polya, 2014). Å sjekke argument handler om at man går gjennom utregningene steg for steg. Man kan gå gjennom og se at utregningene stemmer og at argumentene holder. I denne metoden å sette prøve på svar, kan det være nyttig å gruppere i delproblem og gjøre om på rekkefølgen, slik at man ikke gjør eventuelle slurvefeil flere ganger. Etter at man har sjekket argument kan man gjøre det samme igjen flere ganger, dersom man enda er usikker, kan man eventuelt bruke en annen måte å sette prøve på svaret (Polya, 2014).

2.5.7 Ser på kjente problem

Når man begynner løsningsprosessen, lager en plan (kap. 2.4.2), kan det være nyttig å bruke erfaringer man har fra tidligere problemløsing. Det kan være at du har løst et lignende problem, eller at du har brukt en strategi som kan være nyttig i problemet (Polya, 2014). Man kan ikke vite på forhånd hva som kan være relevant til dette problemet, og det skader ikke å teste ut ideer (kap. 2.4.1). Selv om problemet ikke er likt noe du har gjort før, kan man kanskje se deler som kan ligne. Kanskje kan man bruke kunnskapen fra tidligere problem, fra noe man har kunnskap om, eller fra noe man har laget bevis om, til å løse problemet. Polya mener at problemløsing er en egenskap som man kan trene opp, desto flere erfaringer man gjør seg innen problemløsing, desto lettere blir det å sette i gang med nye ukjente problemer (Polya, 2014).

2.6 Samarbeid

Samarbeid er sentralt i denne studien, for å besvare forskningsspørsmålet: «Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen? For å kunne besvare dette forskningsspørsmålet på best mulig måte, vil jeg her i denne delen av oppgaven presentere relevant teori angående samarbeid.

Wæge og Nosrati henviser til Nosrati og Andrews (2018) og kommer med utsagnet: «i Norge er individuelt arbeid fortsatt den mest dominerende arbeidsformen i klasserommet, og noen elever får sjeldent eller aldri mulighet til å jobbe i grupper og samarbeide.» (Wæge & Nosrati, 2018, s.110). På tross av kunnskap om at samarbeid gjør at matematikken oppleves mer meningsfylt for elevene, er det fortsatt slik at individuelt arbeid er den vanligste arbeidsformen i klasserommet. «matematiske diskusjoner og samtaler kan bidra til at elevene opplever matematikk som mer meningsfylt» (Wæge & Nosrati, 2018, s. 128. henvist til Jansen, 2008.). «Samarbeid defineres som en arbeidsmåte der elevene opplever det slik at de bare kan nå sitt mål hvis de andre elevene, som de samarbeider med, når sine mål» (Johnson, 1984, s. 9). Definisjonen vektlegger at elevene har et felles mål som de sammen skal oppnå. Elevene som samarbeider mot et felles mål, har samme ønske og motivasjon. Johnson legger også vekt på videre i sin forklaring av samarbeid, at elevene i et samarbeid er «positivt avhengig av hverandre». (Johnson,1984 s. 9). I en problemløsingsaktivitet kan denne avhengigheten av hverandre være avgjørende for arbeidet. Når elevene bruker hverandre som ressurser, lytter, tolker og tar innover seg hverandres ideer og tanker, da kan gruppen sammen lykkes i problemløsingen. På den andre siden, vil denne avhengigheten kunne sette en stopper for arbeidet, dersom noen elever velger å ikke bidra. Det kan føre til at arbeidet stopper opp eller til at elevene får mindre utbytte. Johnson bruker metaforen at «elevene er i samme båt» for å belyse dette. Elevene må jobbe sammen, hvis ikke synker båten (Johnson,1984). Liljedahl (2021) skriver i likhet med Johnson (1984), om elever som bruker hverandre som ressurser. Han bruker begrepet kunnskapsmobilitet for å beskrive dette. Mer om Liljedahls teorier angående kunnskapsmobilitet kommer i kapittel 2.9.

I norsk ordbok defineres samarbeid som å arbeide sammen, arbeide i felleskap. Den første forskningen på problemløsning ble gjort på elever som arbeidet alene med oppgaver (Liljedahl & Cai 2021). Dette ga lite innblikk i elevenes tankemønster og elevene hadde bare sin egen kunnskap å lene seg på. Videre ble forskningen bredere og den begynte å se på problemløsning med elever som samarbeider (Liljedahl & Cai, 2021). I Forskningen til Liljedahl og Cai «Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art», ser de på grupper som jobber med problemløsning og hvordan de brukte ressurser innad og utenfor gruppen. Forskningen viser at enkeltpersoner i en samarbeidsbasert problemløsningsprosess, får mye utbytte av å bruke medelever som ressurser, dette kan innebære at medelever forklarer hvordan de tenker. De får mye utbytte av å dele sine egne ideer, forklaringer, tenking og begrunne sine egne konklusjoner og løsninger. Elevene utvikler seg sammen og motiveres av medelever (Liljedahl & Cai, 2021). Liljedahl og Cai skriver også at utbyttet elevene sitter igjen med etter en samarbeidsaktivitet varierer av kvaliteten på samarbeidet. Dette blir knyttet opp til et sosiokulturelt perspektiv (kap. 2.9.2) Samarbeid i matematikken trenger ikke å være gruppearbeid. Utfra mitt forskningsspørsmål som omhandler samarbeidsbasert problemløsing, og hvilke løsningsstrategier eleven bruker, er det gruppearbeid som er samarbeidsformen som blir diskutert.

Problemløsning i grupper er en sosiokulturell prosess (kap. 2.9.2). Det skjer samhandling i gruppen, det arbeides mot et felles mål, og det fører til et resultat som blir diskutert og styrkes av medlemmene i gruppen. Gruppen blir formet og utviklet av gruppemedlemmenes bidrag (Liljedahl & Cai, 2021). Gruppens størrelse kan påvirke hvordan eleven jobber sammen om det matematiske problemet. Liljedahl (2021) mener at i elevgrupper som går i tredje klasse og oppover, er det mest gunstig med grupper på tre, denne teorien ble grunnlag for valg om gruppestørrelse i kapittel 3.3.

> *We also learned that, from Grade 3 up, the optimal group size was three. Groups of two struggled more than groups of three, and groups of four almost always devolved into a group of three plus one, or two groups of two.* (Liljedahl, 2021, s.44)

Ahlberg & Moen (1999) skriver at det er også en fordel for læreren at elevene jobber i små grupper. Dette begrunner hun med at da kan læreren lettere lytte til elevenes tankeganger, samt hjelpe elevene mens de er engasjert i arbeidet. Hun skriver videre at lærerens støtte er nødvendig for at samtalen skal føre til elevenes læring. Læreren kan gjøre dette gjennom å sette seg inn i elevenes tanker og hjelpe dem å forklare ideene sine til de andre i gruppa (Ahlberg & Moen, 1999).

> *Hvis vi fokuserer på å undervise prosedyrer i aritmetikk, i stedet for å utvikle innsikt, kommer vi til å vektlegge individuelle øvinger. Presset som læreren kan føle på, i «å komme gjennom boka» fører til at læreren setter av for lite tid til samtale og diskusjon. Det er nettopp disse samtalene og diskusjonene – og ikke mengden av løste oppgaver – som sikrer dybdelæringen hos elevene (Van Galen m. fl., 2008)* (Torkildsen, 2017. s. 2)

For å legge til rette for å snakke matematikk sammen, kan det være tilstrekkelig å bare sette elever sammen i grupper, for så å la dem diskutere. Dette kan også føre til at en i gruppen tar all styringen og at de andre ikke slipper til med sine tanker, eller det motsatte, at ingen tar ordet og at diskusjonen stopper opp (Wæge& Nosrati, 2018). «At elevene sitter i grupper, er altså ikke ensbetydende med at de samarbeider, eller at samarbeidet fungerer godt.» (Wæge & Nosrati, 2018. s.112). For å legge til rette for godt samarbeid, kan man gi elevene rike oppgaver (kap. 2.3.3), dette kan blant annet være problemoppgaver. Når elevene blir gitt problemoppgaver der det finnes flere strategier på å løse oppgaven, kan det bidra til at elevene føler at de har noe å bidra med til gruppa, ved å presentere sin løsningsstrategi (Wæge & Nosrati, 2018). Man kan også heve statusen til gruppemedlemmene for å gjøre at samarbeidet glir lettere. Ved å gi ros til tanker og ideer til elever i gruppen, som kanskje har en litt lav status, kan man gi dem en sterkere posisjon i gruppen (Wæge & Nosrati, 2018). Ved å gjøre dette kan gruppemedlemmene bli sett på som mer likeverdige og samarbeidet kan heves, «og flere elever føler at de lykkes i matematikk» (Wæge & Nosrati, 2018. s. 113). Man kan også gi elevene ulike roller for å sikre et bedre samarbeid. For eksempel «tilrettelegger, gruppeleder, og ressursansvarlig» (Wæge & Nosrati, 2018, s. 113). Liljedahl (2021) skriver også om det å gi roller til gruppemedlem. Han kommer med rolleeksemplene: «Leder, referent, den som passer tiden, den som henter ressurser, motivator osv.» (Liljedahl, 2021, s. 42, oversatt) Liljedahl (2021) mener i motsetning til Wæge og Nosrati (2018), at det å lage roller til gruppemedlemmene ikke er med på å gjøre samarbeidet bedre, men heller gjør elevene mindre engasjerte og motiverte. Han har observert i sine studie at elevene ble mer opptatt av å være i sin «rolle» enn det det egentlig handlet om; å løse et problem og å tenke sammen (Liljedahl, 2021).

2.7 Læringsteorier

I denne delen skal jeg presentere noen læringsteorier, som kan være med å belyse dataene som kom frem i denne studien. Læringsteoriene forsøker å forklare hvordan læring skjer for elevene. Det er derfor relevant å se på for å kunne drøfte hvorvidt elevene faktisk klarer å lære av hverandres ideer og tenking i problemløsingsprosessen.

2.7.1 Sosialkonstruktivistisk læringssyn

Det sosialkonstruktivistiske læringssynet bygger på Lev Vygotsky sine teorier om læring som en sosial prosess, og at læring skjer gjennom samhandling med andre (Keagan, 1994). Dette læringssynet har mange likheter med sosiokulturell læringsteori (2.7.3). Forskjellen er at sosialkonstruktivistisk læringssyn har et større fokus på språket, og at læringen skjer gjennom samtale med andre som har en annen oppfattelse av læringsstoff enn deg selv. I slike situasjoner utfordres vår egen forståelse, og læring skjer (Keagan, 1994).

2.7.2 Sosiokulturell læringsteori

Lev Vygotsky er kjent som grunnleggeren av den sosiokulturelle læringsteorien. I boken *Mind in society: Development of higher psychological processes*, fra 1978 presenterer Vygotsky den sosiokulturelle læringsteorien. Vygotsky mener at kognitiv utvikling skjer gjennom samhandling med andre, altså sosial læring (Vygotsky et al. et al., 1978). Vygotsky mener at barn lærer og utvikler seg gjennom sosiale interaksjoner (Vygotsky et al., 1978). Han forklarer barnas kognitive læring gjennom to nivå: det faktiske utviklingsnivået og det potensielle utviklingsnivået. Disse nivåene skiller mellom hva elevene kan klare helt alene, og hva eleven kan klare med støtte av en kompetent annen (Vygotsky et al., 1978). En kompetent annen er en person som vet mer enn deg selv i et gitt område, dette kan være for eksempel en lærer eller medelever. Sonen mellom hva eleven kan klare alene og hva eleven kan klare ved hjelp av en kompetent annen er den sonen hvor læringen er mest effektiv, denne sonen heter den proksimale utviklingssonen. Sonen utenfor den proksimale utviklingssonen har ikke eleven kunnskap til å forstå, selv med hjelp. Læringen er mer effektiv i den proksimale utviklingssonen fordi da kan eleven bygge på kunnskap som de allerede har og tilføye den nye kunnskapen som de får veiledning fra av en kompetent annen (Vygotsky et al., 1978). Læringen som skjer mellom sonene, gjør at sonene utvider seg. Eleven som har fått hjelp kan ta til seg den nye kunnskapen, noe som gjør at det har skjedd en kognitiv utvikling hos eleven, slik at den nye kunnskapen nå er en del av det faktiske utviklingsnivået som eleven har. Sammen med utvidelsen av det faktiske utviklingsnivået utvider også den proksimale utviklingssonen seg. (Vygotsky et al., 1978).

2.7.3 Kognitiv læringsteori

I den kognitive læringsteorien er det de kognitive prosessene, altså tankevirksomheten til mennesker som er utgangspunktet for læring (Lyngsnes & Rismark, 2016). Denne læringsteorien ble utviklet av Jean Piaget. Piaget sin teori tar utgangspunkt i at all læring bygger på noe man allerede kan. Det som man allerede kan, er plassert inn i ulike skjema. Begrepet skjema blir brukt som erfaringene man har med seg (Lyngsnes & Rismark, 2016). I denne studien kan kognitiv læringsteori være med på å begrunne de matematiske valgene elevene tar. Ved å bruke kunnskapen de allerede har, kan de bygge videre på skjema og tanker, for å danne en forståelse av sine egne og andres tanker. Blant annet Mason (2016) kobler problemløsing til kognitiv læringsteori. Gjennom at elevene tar med seg kunnskap til nye problem og bygger på kunnskapen de allerede har.

> *Piaget mener det er naturgitt hos mennesket at vi organiserer tankeprosessene i det han kaller kognitive strukturer. Skjemaene er de kognitive strukturene som inneholder den erfaringen og kunnskapen og de tenkemåtene hvert enkelt menneske er i besittelse av. Piaget betrakter skjemaene som byggesteinene i tenkningen* (Lyngsnes & Rismark, 2016, s. 62).

Skjemaene inneholder hver sine kunnskapsområder, som for eksempel kunnskap om planter eller om matematikk. Informasjon som elevene får, blir plassert inn i de ulike kognitive skjemaene. Enten så passer den nye kunnskapen inn i et eksisterende skjema, assimilasjon (Lyngsnes & Rismark, 2016). eller så passer ikke kunnskapen inn i et eksisterende skjema, altså at de eksisterende skjemaene ikke er tilstrekkelige for å plassere informasjon, da lages det et nytt skjema, akkomodasjon (Lyngsnes & Rismark, 2016). Assimilasjon er når elevene prober å forstå noe nytt med noe de allerede kan fra før, skjemaene utvides hele tiden når man lærer seg ny kunnskap. Man må tolke og forstå kunnskapen slik at man kan plassere den inn i et kognitivt skjema. «Vanligvis er begge prosessene nødvendig for all læring.» (Lyngsnes & Rismark, 2016. s. 63). Piaget mener at om man møter på noe man ikke forstår så oppstår det en kognitiv konflikt, som gjør at man blir motivert for å lære (Lyngsnes & Rismark, 2016).

I motsetning til sosialkonstruktivistisk og sosiokulturelt læringssyn så mente Piaget at læring ikke er en sosial prosess, og at kunnskap ikke kan bli overført gjennom individ. Han mente at kunnskap må utvikles i hvert enkelte individ (Lyngsnes & Rismark, 2016). Denne oppgaven tar for seg det sosiale samarbeidsaspektet i problemløsing. En gruppe består av individer, som skal skape egne meninger og egen forståelse av matematikken. Derfor blir denne teorien relevant i denne oppgaven.

2.7.1 Matematiske samtaler- Støtte i klassen og hverandre

«Matematiske samtaler kan fremme elevenes tenking, læring og motivasjon i matematikk.» (Wæge & Nosrati, 2018, s. 128. henvist til Jansen, 2008.). I en samarbeidsaktivitet blir elevene nødt til å lytte til andres matematiske tenkning, men også til å forstå hva andre har tenkt og evaluere informasjonen. De må presentere egne ideer og redegjøre for disse. For å komme til en løsning må elevene begrunne hvorfor det de har tenkt fungerer i det gitte problemet, denne prosessen gjør elevene bevisst på hvordan de selv tenker (Ahlberg & Moen, 1999). Ved å snakke om et problem med andre kan man få gode ideer og tips som man kan lære av, slik at man kan løse lignende oppgaver på en bedre og mer effektiv måte (Alseth, 1998). Mange barn kan ha en usikkerhet til egne evner i matematikk, ved å jobbe sammen kan elevene lene seg på hverandre og de kan oppleve støtte av å se at de ikke er alene om å føle på usikkerhet. Elevene kan se at de ikke er alene om å syntes at noe er vanskelig, og da kan noe av usikkerheten forsvinne (Ahlberg & Moen, 1999). Det å snakke matematikk er også en del av kjerneelementene i læreplanen (LK20): «komme med egne resonnementer, følge andres resonnement, begrunne resonnement, bevise, bruke matematisk språk, ha matematiske samtaler og begrunne matematiske valg» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dette kan bli sett i sammenheng med Liljedahl og Cai (2021) sin forskning, som ble presentert i samarbeids kapittelet (2.3).

I en gruppediskusjon må elevene argumentere for egne og andres forslag, samt forklare og forstå disse. I et gruppearbeid kan det være flere ulike argumentasjonsstrategier. Noen elever vil holde på sine egne tanker og argumentasjoner, stå urokkelig på sitt, mens andre kan heie på et annet forslag som blir presentert, hvis de har tro på dette. Noen elever kan forstå en slik diskusjon som en konkurranse, der det handler om å få sitt forslag gjennom. Andre kan se på diskusjonen som et samarbeid, der de sammen skal finne en god løsning, uavhengig av hvem løsningsstrategien kom fra. De fleste elevene vil nok bytte mellom disse «rollene» mens noen står fast i en av dem (Ahlberg & Moen, 1999).

Alseth (1998) skriver at det er viktig at elevene får tid til å diskutere matematikk, samt at de får dele sine refleksjoner med andre i etterkant av at de har løst en oppgave. Hun skriver at når elevene presenterer sin vei til svaret eller sine algoritmer, må de gå tilbake og tenke over egen løsningsprosess og gjenta trinnene i den brukte algoritmen. «Det er en kjent erfaring at når man forklarer ting for andre, får man en bedre forståelse av stoffet selv.» (Alseth, 1998 s. 28). Mason (2016) mener at om problemløseren tviler på egne evner, kan de komme med unnskyldninger for å ikke prøve (Mason, 2016). Gode samarbeid kan være en faktor om elevene tørr å prøve, selv om de er usikre.

2.7 Samarbeidslæring- oppdager hverandres feil

Samarbeidslæring eller «Collaborative learning» eller «CL» er når elever i et klasserom jobber sammen for å danne kunnskap, denne kunnskapen kan være faglig eller sosiale ferdigheter (Medaille & Usinger, 2020). Gruppene i samarbeidslæring varierer, noen ganger er det en gruppe kun en økt eller en aktivitet, andre ganger kan de samme gruppene bli brukt over tid. Gruppestørrelsen kan også variere. Samarbeidslæring bygger på sosialkonstruktivistisk læringssyn (2.7.2), og bygger på teorien om læring som en sosial aktivitet (Medaille & Usinger, 2020). Kunnskap finnes ikke bare i individet som gir kunnskapen videre til andre, i samarbeidslæring danner og skaper elevene kunnskap sammen (Medaille & Usinger, 2020). Medaille og Usinger (2020) skriver at det er flere studier som har funnet store fordeler med samarbeidslæring, de presenterer fordeler som:

> *høyere nivå av resonnementstrategier, større langtidsbevarelse, mer intrinsisk motivasjon, større overføring av læring, større tidsbruk på oppgaver og mer positive holdninger til læring (Johnson og Johnson 2005, 2009; Johnson, Johnson, og Smith 2007). I tillegg har studier vist at samarbeidslæring er effektiv for læring av fagspesifikt innhold, for å skape og anvende kunnskap, og for å utvikle ferdigheter og*

disposisjoner som samarbeidsevne, kritisk tenkning, problemløsning og å sette pris på ulike synspunkter (Cabrera et al. 2002; Davis og Arend 2012; Johnson og Johnson 2005; Johnson, Johnson, og Smith 2007; Sellitto 2011; Springer, Stanne, og Donovan 1999; Svinicki og Schallert 2016). (Medaille & Usinger, 2020, s.241, oversatt).

I Medaille & Usinger (2020) skrives det at selv om forskningen viser til mange fordeler med samarbeidslæring så kommer det ofte klager fra elevene. De presenterer at elevene klager på forvirring, at de er ikke fornøyde med gruppene, at det er ulik motivasjon innad i gruppen, usikkerhet om hvordan man samarbeider og at noen på gruppen lurer seg unna (Medaille & Usinger, 2020, s.241). Samarbeidslæring kan også styrke klassemiljøet og føre til at elevene føler på en tilhørighet (Keagan, 1994)

Olafsen og Maugesten presenterer en liste over hensikten med gruppearbeidet:

- Å hjelpe og stimulere hverandre i bearbeiding av nye problemstillinger og i definering av lærebehov

- Å utvikle evne til muntlig formulering av matematikken

- Å øve på samarbeidsevne

(Olafsen & Maugesten, 2015, s. 61)

Olafsen og Maugesten (2015) legger også vekt på de positive innvirkningene av å jobbe i grupper. De bruker ikke begrepet samarbeidslæring, men utfra deres liste over hensikt og hvordan de legger frem gruppearbeid, tenker jeg at begrepene kan brukes synonymt i denne sammenheng. Olafsen og Maugesten (2015) skriver

En stor internasjonal undersøkelse der elever fra 1. og 2. trinn fra Norge deltok, viste det at læringsutbyttet var best når elevene arbeidet i grupper. Mye individuelt arbeid synes i noen grad å ha negativ innvirkning på læringsutbyttet i matematikk (Birkemo, 2003b) (Olafsen & Maugesten, 2015, s. 110).

Med samarbeidslæring og sosialkonstruktivistisk læringssyn i fokus skriver Keagan (1994):

Elevene skal ikke lære én om gangen, når læreren har tid, men samtidig. Og hver eneste elev i klassen skal engasjeres. Målet blir at alle elever som en grunnleggende forutsetning i undervisningen er i dialog, får sparring og tilbakemelding, og dermed formulerer seg frem til deres forståelse av lærestoffet og av verden. (Keagan, 1994, s. 13, oversatt).

2.8 Følelser og problemløsing

Lockhart kommer med påstanden om at oppgaver som ikke er problemløsning, men som kun er drill og pugg, dreper elevenes interesse for matematikk og trener elevene til å bli tankeløse aper (Lockhart. 2002). Interesse og indre motivasjon er tett knyttet sammen, derfor kan det være grunn til å tro at elevene vil oppleve større motivasjon i problemløsingsaktiviteter (Lockhart, 2002).

Mason peker på de ulike følelsene som kan komme frem i arbeidet med problemløsning (Mason, 2016). Han peker på at frustrasjon er en nærliggende følelse i problemløsning. Og presiserer at det kan være lett for en lærer å reagere med å gi elevene hjelp for å finne en løsning lettere, for at elevene ikke skal kjenne på frustrasjon. Mason (2016) mener at man ikke skal hjelpe elevene videre, heller la dem kjenne på følelsene som problemløsningen bærer med seg, slik at de blir kjent med disse (Mason, 2016). Elevene kommer en dag til å sitte fast og ikke ha noen der til å hjelpe dem videre, for å trene elevene i utholdenhet i problemløsning, skal man la elevene lære å stå i følelsene sine (Mason, 2016). Begrepet «Reflecting in action» handler om evnen til å reflektere og resonnere mens man er engasjert. For at elevene skal kunne gjøre dette er det viktig at de på forhånd har blitt presentert det matematiske innholdet de trenger for å løse problemoppgaven. Dersom elevene blir sittende fast og blir frustrerte, trenger de ikke å lære seg noe nytt, de kan heller se på de verktøyene de har, slik at de ikke utforsker i blinde. Fremfor å gi elevene instrukser i hvordan de skal komme seg videre eller hvordan de kan løse problemet, bør man heller gi elevene kjennskap til og et repertoar av kjente matematiske ideer, som de selv kan bruke (Mason, 2016). Polya (2014) skriver "The student should acquire as much experience of independent work as possible. But if he is left alone with his problem without any help or with insufficient help, he may make no progress at all. "(Polya, 1945/2014, s.1). Polya legger, i likhet med Mason (2016) vekt på, at elevene bør jobbe mest mulig selvstendig, han understreker også at dersom elevene ikke får hjelp videre, vil de muligens ikke komme seg videre i arbeidet (Polya, 2014). Polya og Mason skriver at læreren bør hjelpe elevene, ikke for mye og heller ikke for lite. Man skal ikke ta fra elevene arbeidet, elevene skal gjøre mesteparten av jobben. Læreren bør prøve å sette seg inn i elevenes tanker og møte dem der. Deretter kan læreren stille spørsmål eller hjelpe eleven videre til neste steg i oppgaven, men da gi neste steg som passer det arbeidet, de resonnementene, tankene og ideene som eleven selv er i, ikke gi en annen løsningsmetode til eleven (Polya, 2014).

Liljedahl (2021) fokuserer også på følelsene som elevene møter i sin definisjon av problemløsing. Sitatet til Liljedahl (2021) i kapittel 2.2, side 12, sier Liljedahl at elevene vil «learn about themselves», dette kan tolkes i sammenheng med Mason sine tanker om hvilke følelser problemløsing kan bringe med seg. At man skal kjenne på følelsene som problemløsing får frem i en, og bli kjent med disse, slik at man lærer å stå i følelsene, og øver seg på «Reflecting in action» (Mason, 2016).

2.9 Ressurser i klasserommet, kunnskapsmobilitet.

Kunnskapsmobilitet er hvordan kunnskapen overføres, i denne sammenheng, i klasserommet. Liljedahl (2021) presenterer kunnskapsmobilitet i tre ulike former:

1. *medlemmer av en gruppe går ut til andre grupper for å låne en ide for å ta med tilbake til deres gruppe.*
2. *medlemmer av en gruppe går ut for å sammenligne svaret sitt med andre svar*
3. *to (eller flere) grupper kommer sammen for å debattere ulike løsninger.*

(Liljedahl, 2021, s.48, oversatt)

Kunnskapsmobilitet trenger ikke kun å være en av disse kategoriene, det kan også være en blanding. I et klasserom med god kunnskapsmobilitet blir ikke elevene så avhengig av læreren, men heller mer avhengig av hverandre, både innad i gruppen (*intragruppe avhengighet*) og av andre grupper (*mellomgruppe avhengighet*) (Liljedahl, 2021, s. 48, begrep oversatt av meg). Grunnen til at elevene blir mindre avhengige av læreren, er at i et klasserom med god kunnskapsmobilitet, er det ikke bare læreren som er kilden til ny kunnskap, men elevene kan lene seg på de i og utenfor gruppen for svar og veiledning (Liljedahl, 2021). Liljedahl (2021) skriver at dersom alle i gruppen har hver sin penn, så er det lett at samarbeidet blir omgjort til at eleven jobber individuelt med oppgaven. En løsning på dette mener han er at elevene kan dele på en penn (Liljedahl, 2021). Dette kan sees i sammenheng med kunnskapsmobilitet innad i gruppene. Dersom elevene har en penn på deling, så er de avhengig av å forklare hva de tenker til de andre gruppemedlemmene, slik at alle forstår hva som blir notert. Han legger frem forslaget om å oppfordre elevene til å la en på gruppen forklare og en annen notere. På denne måten må eleven som har en ide være tydelig og forklare godt hva som er tenkt, for at tankene skal bli overført til arket (Liljedahl, 2021). Han foreslår at læreren kan lage en rutine på at elevene bytter på pennen jevnlig, og at etter hvert vil elevene gjøre dette på egenhånd. Læreren kan også lage en regel på at den som holder pennen ikke kan skrive ned sine egne ideer, da blir elevene tvunget til å bruke hverandre som ressurser i gruppa, altså ha en god kunnskapsmobilitet, for å komme videre i oppgaven (Liljedahl, 2021).

2.9.1 Elevenes spørsmål

Liljedahl (2021) presenterer ulike former for spørsmål som elever stiller læreren. Disse er: Proximity questions, stop thinking og keep thinking questions. Disse spørsmålene blir relevante i denne studien, siden det er fokus på elevene, Hvilke type spørsmål elevene stiller kan gi en indikator på deres følelser og forståelse i problemløsingsprosessen. Elevenes spørsmål er ikke noe som bli nøye undersøkt i studien, men de vil i noen grad bli diskutert i kapittel 5.Fokuset i denne studien er å besvare problemstillingen og forskningsspørsmålene, disse skal bli besvart ut fra et elevperspektiv. Derfor der det også aktuelt å se på elevenes spørsmål, og hvordan disse kan tolkes.

Proximity questions er spørsmål som elevene stiller egentlig siden læreren er i nærheten. Disse spørsmålene kan være både stop thinking og keep thinking spørsmål, men elevene rekker ikke opp hånda for å stille spørsmålet. Disse spørsmålene kan bli stilt bare fordi læreren er i nærheten og elevene ønsker å vise at de arbeider til læreren (Liljedahl, 2021).

Stop thinking questions er spørsmål som elever stiller til læreren for å kunne sleppe å tenke selv (Liljedahl, 2021). Dette kan være spørsmål som: «er dette rett», da kan elevene henvise til et svar, eller en utregning. Grunnen til at elevene spør disse spørsmålene i følge Liljedahl er at elevene syns tenking er vanskelig, og elevene synes det er vanskelig å evaluere om det de gjør er rett. Målet med at elevene stiller stop thinking questions er at de ønsker å slutte å tenke selv (Liljedahl, 2021).

Keep thinking questions derimot er spørsmål som elevene stiller mens de er engasjert i en oppgave. Spørsmålene omhandler noe som elevene selv ønsker å utforske siden de vil fortsette å tenke videre selv (Liljedahl, 2021).

3 Metode

I denne studien skal jeg undersøke hvordan elever på småskolen løser problemoppgaver sammen. Dette skal undersøkes gjennom en kvalitativ datainnsamling og en deduktiv innholdsanalyse av datamaterialet. Studien foregikk over tre dager, hvor elevenes problemløsing i grubber ble observert, mens de jobbet med tre ulike problemoppgaver. Jeg var observatør i klasserommet, og faglærer eller kontaktlærer ledet undervisningen. I dette kapittelet skal jeg gå i dybden i å forklare hva som har blitt gjort, og hvorfor. Studiens kvalitet og etiske betraktninger i oppgaven vil også bli diskutert.

3.1 Kvalitativ metode

Kvalitativ metode betyr å samle inn data «først og fremst i form av ord som er rettet mot å beskrive og forstå menneskers handlinger og meningsskaping i deres naturlige kontekst» (Postholm & Jacobsen 2018, 113). I en kvalitativ studie forskes det på et begrenset antall forskningsdeltakere. I denne studien har jeg fulgt en klasse på tredje trinn og deres møte med samarbeidsbaserte problemløsingsoppgaver. Fokuset i oppgaven var å belyse hvordan elever kunne finne løsninger på problemoppgaver sammen og hvilke løsningsstrategier de brukte. Da passet det fint å velge en kvalitativ tilnærming. Jeg ønsket å undersøke menneskers handlinger, noe som den kvalitative metoden passer godt til (Postholm & Jacobsen, 2022). Fokuset i oppgaven var å undersøke forskningsspørsmålene: «Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing?», og «Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?». For å gjøre dette på best mulig måte har oppgaven fokuset på elevene, altså et elevperspektiv.

Metodene som ble brukt for å undersøke elevenes strategier er, observasjon og intervju. Jeg laget tre undervisningsaktiviteter, som ble gjennomført tre ulike dager. Elevene skulle jobbe i grupper. Jeg ønsket å bruke grupper på tre, grunnet at dette blir sett på som en god gruppestørrelse, for å sikre deltakelse og inkludering innad i gruppen (Liljedahl, 2021). Jeg har observert undervisningsaktivitetene. I tillegg til observasjon hadde hver gruppe en diktafon og notatark på pulten. Ønsket var da å få innblikk i hvordan løsningsprosessen hadde foregått i gruppene. Etter den tredje undervisningsaktiviteten, gjennomførte jeg gruppeintervju med noen av elevene. I dette intervjuet ønsket jeg å få et bedre innblikk i elevenes løsningsprosess og i hvordan elevene jobbet sammen mot løsninger.

3.2 Design

Designet på oppgaven er en casestudie av en elevgruppe, på en skole, mer spesifikt en enkeltcasestudie. En enkeltcasestudie er et forskningsdesign, som har fokus på en bestemt gruppe, i et bestemt tidsrom/aktivitet. Oppmerksomheten i en enkeltcasestudie kan rettes mot en eller flere personer. Enkeltcasestudie fokuserer observasjonen mot en bestemt aktivitet, organisering eller partnerskap (Postholm & Jacobsen, 2022). I denne enkeltcasestudien har jeg gått inn i en klasse og har hentet ut data om hvordan elever på tredje trinn finner løsninger sammen. Jeg fokuserte spesielt på hvilke løsningsstrategier elevene brukte og så også på hvordan elevene jobbet og tenkte sammen. Jeg ønsket å bruke grupper på tre, da dette blir sett på som en god gruppestørrelse for å sikre deltakelse og inkludering innad i gruppen. (Liljedahl, 2021). En enkeltcasestudie kan ofte bli lite aktuell i en større kontekst, da det kun blir hentet data fra en gruppe mennesker (Postholm & Jacobsen 2022). Kanskje kan denne studien vise funn som er interessant i en større kontekst, enn kun i denne aktuelle klassen. Studien vil presentere løsningsstrategier som kommer naturlig for elever på småskolen. Elevene hadde begrenset erfaring med problemløsing, derfor vil funnene i denne studien kunne speile hvordan elever i denne aldersgruppen tenker, uten føringer fra læreren. Elevenes lærebok har oppgaver om problemløsing, men oppgavene i boka oppleves ikke som et problem for alle, og oppfyller ikke denne oppgavens krav for et problem, kapittel 2.1. Flere av oppgavene i boka har også et tydelig matematisk innhold som elevene skal bruke for å finne svar, dette drøftes videre i kapittel 2.4.

Som nevnt, presenterer denne studien løsningsstrategier for uerfarne problemløsere. Muligens kan studien også være nyttig for lærere, som skal sette seg inn i elevenes tenking. Studien kan for eksempel hjelpe lærere som skal predikere elevsvar, i oppgaver som velges til undervisning. Samt at studien kan synliggjøre hvor mye matematisk tenkning elevene gjør i en samarbeidsbasert problemløsingsaktivitet. Fordeler med samarbeid i undervisningen blir også fremhevet. I oppgaven vises et eksempel på hvordan samarbeidsbasert problemløsing kan se ut på småskolen. Da jeg ønsket å både rette fokus på løsningsmetodene og på samarbeidet, har jeg valgt å dele opp problemstillingen min i to forskningsspørsmål. Problemstillingen min er: *«Hvilke løsningsstrategier bruker elevene på 3. trinn i arbeidet med samarbeidsbasert problemløsing i matematikkfaget.»*. Forskningsspørsmålene som vil bli besvart i denne oppgaven er: «hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing», og «hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsing»

3.3 Elevgruppen

Elevene går i tredje klasse på en skole i Rogaland. Elevene har gått sammen siden førsteklasse og har to lærere, en kontaktlærer og en faglærer, samt 2-3 læringsmedarbeider i klasserommet i de aller fleste timer. Lærerne har fulgt klassen siden første klasse. De er 26 elever i klassen. I klasserommet sitter tre og tre sammen.

Det er to elever i klassen som har krav på full oppfølging av læringsmedarbeider og har spesialundervisning. Læreren informerte om at den matematiske forståelsen i klassen er av varierende nivå. Det er fire elever som av og til jobber med matematikk i en bok med matematikk for andre trinn. Av de elevene som har full oppdekning, er det en av de som vanligvis følger et annet matematikkopplegg enn resten av klassen og en som får støtte av læringsmedarbeider. Alle elevene som pleier å jobbe med andre oppgaver fikk tilpassede oppgaver i denne studien og er derfor ikke en del av datamaterialet.

Det var enkelte elever som ikke leverte inn samtykkeskjema i tide, eller som ikke ønsket å delta i deler av prosjektet. Disse er heller ikke en del av studien, grunnet etiske retningslinjer , diskutert i kap. 3.8.3.1. Totalt i datainnsamlingen er det 18 deltakende elever, som har blitt observert. Elevene satt allerede tre og tre i klasserommet, noe som var praktisk, da jeg ønsket å observere i grupper på tre. Dette fordi dette er en gruppestørrelse som blant annet Liljedahl presenterer som en effektiv gruppestørrelse i samarbeidsaktiviteter, dette kan leses om i kapittel 2.7.

3.4 Rammer

Problemløsning er et stort og spennende tema og i en masteroppgave kunne man sett på flere ulike problem og undervisningsmetoder. For at masteroppgaven skal bli mest mulig spisset, jeg har derfor gjort noen begrensninger.

Jeg har begrenset datainnsamlingen til en klasse. Oppgaven er begrenset til tre problemoppgaver, med ulikt matematisk innhold og ulik form. Alle oppgavene kan løses på forskjellige måter, jeg har valgt å oppfordre elevene til å finne ulike måter å løse oppgavene på. I hver økt var det de samme rammefaktorene for elevene. De jobbet sammen i grupper på tre elever, det er de samme elevene de pleier å sitte sammen med. Elevene løste oppgavene gjennom diskusjon i gruppene, mens de noterte på A3-ark. Hver av gruppene fikk en penn på deling, disse valgene ble gjort utfra Liljedahls teori om gruppestørrelse og kunnskapsmobilitet, se kapittel 2.7 og 2.9.

Samarbeidsbasert problemløsing var nytt for elevene, derfor ønsket jeg at mest mulig skulle være som i en «vanlig» skoletime, for å unngå eventuelle feildata. Målet med denne oppgaven var å undersøke hvilke løsninger elevene finner sammen. Endring av plasser i klasserommet og hvem du samarbeider med tror jeg kunne ført til unødvendig uro, som kunne forstyrret innhenting av dataene relevant for mitt forskningsspørsmål. Denne vurderingen vektlegges i teori om at elever har ofte lav selvtillit på egne ferdigheter i matematikk (Ahlberg & Moen, 1999), og at de er avhengig av å forklare og begrunne egne ideer og tolke andres ideer for å komme til løsninger på problemer (Ahlberg & Moen, 1999). Det ble derfor valgt å holde gruppene og rammene mest mulig like, for å trygge elevene i problemløsingsprosessen.

Lærerne som gjennomførte undervisningen fikk noen retningslinjer, dette var for å sikre at dataene ble mest mulig autentiske, i det som kommer frem av elevenes tanker og ideer. Læreren fikk i forkant av gjennomføringen utdelt et skriv (vedlegg 25.) om hvordan prosjektet ville foregå, om hvordan jeg ønsket oppgavene presentert og om hvordan jeg ønsket at de skulle møte elevenes spørsmål. De fikk beskjed om: «Dersom elevene har spørsmål, ønsker jeg at dere ikke gir svaret eller viser dem hva de skal gjøre videre. Heller stille spørsmål og la elevene resonere sammen om hva de kan gjøre videre.» (vedlegg 25). Denne beskjeden ble grunnlagt i Polyas og Masons tanker om at elevene bør jobbe mest mulig selvstendig i problemløsingen (Polya, 2014), (Mason, 2016). Det begrunnes også i Liljedahl (2021) sin teori om ulike spørsmål som elevene stiller (kap. 2.8). Han forteller at mange av elevenes spørsmål er «stop thinking questions», som kommer av at elevene ikke orker eller ønsker å tenke selv (Liljedahl, 2021). I denne oppgaven ønsket jeg å se på elevenes løsningsstrategier og samarbeid, derfor ønsket jeg minst mulig påvirkning fra voksne, lærerne fikk derfor beskjed om å ikke svare rett ut på slike spørsmål.

3.5 Valg av problem

Når jeg skulle velge hvilke problem jeg skulle bruke i undervisningsaktivitetene, begynte jeg å lete i matematikkbøkene som disse tredjeklassingene bruker i undervisningen. Problemløsing er en stor del av læreplanen, allikevel var det lite problemløsingsoppgaver i bøkene til elevene. I alle fall dersom man definerer problemløsing, ut fra definisjonen i denne oppgaven: «something or some situation is a problem only when someone experiences a state of problematicity, takes on the task of making sense of the situation, and engages in some sense-making activity" (Mason, 2016, 263). Matematikkbøkene er preget av at det blir presentert et matematisk tema, deretter skal man løse oppgaver likt som i eksempelet. I matematikkbøkene brukt på trinnet har hvert kapittel tre oppgaver som heter «problem». Disse oppgavene byr ikke på mye kreativitet, for eksempel i kapittelet om multiplikasjon og divisjon er det tydelig at oppgaven skal løses med multiplikasjon og divisjon. Flere av oppgavene presenterer også hvordan svaret skal skrives, eks: «___ · ___ =». Dette kan for noen elever være et problem, men ikke for alle. Dersom man ser på Lester sin definisjon på problemløsing, sier den blant annet at: «Det finnes ingen tilgjengelig fremgangsmåte som garanterer eller innebærer en fullstendig løsning» (Grevholm, 2016, s. 208). Jeg vil si at problemene i boka ikke oppfyller denne beskrivelsen. Oppgavene tilhører kapittel og det er tydelig hvilken metode som skal bli brukt for å løse problemene. Da oppgavene har tekniske rammer, kommer det tydelig frem at det finnes en fremgangsmåte som garanterer svaret (Grevholm, 2016). Jeg ville kategorisert disse oppgavene som tekstoppgaver, mer enn rike oppgaver eller problemoppgaver (kap. 2.3.2), (kap. 2.3.3). Derfor valgte jeg å gå videre og lete andre steder, etter oppgaver som jeg ønsket å bruke i min oppgave.

Deretter begynte jeg å søke på internett. Jeg kom over Matematikksenteret sin realfagsløype (Stedøy& Valbekmo, 2018) og videre derfra fant jeg kenguruoppgavene (Matematikksenteret, u.å.), som Matematikksenteret har. Matematikksenteret presenterer kenguruoppgavene slik: *Bruk oppgaver/oppgavesett fra Kenguru for å berike undervisningen. Kenguruoppgaver kan brukes i undervisningen på ulike måter, og er spesielt egnet for problemløsing, samarbeid og diskusjon* (Matematikksenteret u.å.). Jeg så på de ulike oppgavene og begynte selv å jobbe med de på ulike måter, for å se hvilket matematisk innhold oppgavene hadde og for å se hvor rike de var. Jeg så også på Matematikksenteret sine andre ressurser for å finne problemoppgaver. Jeg fokuserte på nivået på oppgavene, hvilke var for lette og hvilke var for vanskelige? Hvor vanskelige skal oppgavene være? Utfordringen var å finne balansen mellom for vanskelig og for lett. Polya sier at oppgaver skal ikke være for lette og ikke for vanskelige, men interessante (Polya, 2014). Viktigheten av å velge problem som er passe vanskelige kan også begrunnes i teorien om flytsone. Det er viktig at det er en balanse mellom utfordring i oppgaven og elevenes evne i matematikk slik at elevene ikke havner i frustrasjon eller kjedsomhet (Csíkszentmihályi, 1990), (Liljedahl, 2021), (kap.2.3.4). Liljedahl (2021) presenterer også hvordan man kan bruke hint for å holde elevene i flytsonen, men det ble ikke brukt i denne studien. Dette er fordi jeg ønsket å se på hvilke løsningsstrategier 3. klassingene brukte uten hjelp av voksne. Derimot kunne elevene få hint av hverandre, ved å bruke en kompetent annen, og dermed utvikle sin utviklingssone (2.7.1), samt å bruke ressurser innenfor og utenfor gruppen (kap. 2.7.4) (Liljedahl, 2021)

Lockhart stiller seg spørsmålet:
Hvordan får vi elevene til å gjøre matematikk? Svaret på dette mener han er:

> *By choosing engaging and natural problems suitable to their tastes, personalities, and level of experience. By giving them time to make discoveries and formulate conjectures. By helping them to refine their arguments and creating an atmosphere of healthy and vibrant mathematical criticism. By being flexible and open to sudden changes in direction to which their curiosity may lead* (Lockhart. 2002, s. 10).

Det er viktig å fange elevenes interesse, gi dem oppgaver som passer deres nivå, gi dem tid og mulighet til å løse problemer, utforske og argumentere. (Lockhart, 2002) Etter å ha jobbet med oppgavene, predikert, sett på matematisk innhold og satt meg inn i Polya og Lockharts teorier, valgte jeg meg ut seks oppgaver. Seks oppgaver, som jeg tenkte var passe vanskelig og som kunne vekke elevenes interesse. Jeg rådførte meg med veileder og med to medstudenter om hvilke tre oppgaver jeg skulle velge. Jeg landet til slutt på de oppgavene som jeg har valgt å bruke, Vedlegg 1, Vedlegg 2 og Vedlegg 3. Den ene oppgaven omhandler en snekker som har 31 ben og skal bygge firbente bord og trebente stoler. Elevene skal finne ut hvilke kombinasjoner snekkeren skal bygge. Oppgave 2 handlet om en snegle, som skulle klatre opp fra en ti meter dyp brønn. Sneglen klarte å klatre opp tre meter hver dag, men når den sov på natten sank den ned to meter. Elevene skulle finne ut hvor mange dager sneglen brukte på å klatre opp. Oppgave 3 var en figuroppgave, der elevene fikk oppgitt to figurer og de skulle finne ut hvordan de to neste så ut. Figurene besto av fliser, der den ene siden var to fliser og den andre siden var en flis. Figuren var et kvadrat og de fikk oppgitt lengden på kvadratet på figur en, to og tre. Figur en hadde en lengde på tre, figur to hadde en lengde på fem og figur tre hadde en lengde på sju.

Jeg fokuserte på hvordan oppgavene skulle se ut for elevene. Alle problemene som jeg valgte hadde bilder til seg, og i noen oppgaver la jeg inn egne bilder, Bilder kan være et verktøy for å fange interesse, spesielt hos de yngre elevene (Mason, 2016). I Matematikksenteret sine kenguruoppgaver hadde noen av oppgavene svaralternativ. Jeg valgte å fjerne svaralternativene, da målet med aktiviteten ikke var å finne rett svar, men heller å utforske løsningsmetoder. Min tanke var at svaralternativ kan føre til mer tilfeldig og ukritiske gjett (kap. 2.5.1), og at svaralternativ vil gjøre oppgavene mindre rike (kap. 2.3.3). Med løsningsforslag kan noen av elevene prøve seg frem og sette prøve på de ulike alternativene, noe det også er mye viktig læring i (kap. 2.5.1). Ved å fjerne svaralternativene håpte jeg at elevene ville bruke ulike løsningsstrategier for å finne ut løsninger, og at de sjekket svaret i etterkant.

3.6 Datainnsamling

I arbeidet med datainnsamlingen, valgte jeg ut noen problemløsingsoppgaver. Oppgaver som utfyller kriteriene for problem, se kapittel 2.1. I forkant av datainnsamlingen reflekterte jeg rundt valg og laget et observasjonsskjema. Jeg predikerte også elevsvar og så på hvilke utfordringer jeg tenkte kunne bli aktuelle i arbeidet. Jeg laget en intervjuguide. Grupper til elevene ble satt sammen slik at alle gruppene som ble observert, besto av elever som hadde levert samtykkeskjema om at de kunne delta i datainnsamlingen. Elevene byttet plasser en uke før datainnsamlingen, slik at de ble vant til å sitte med de elevene som de skulle jobbe med. Før gjennomføringen fikk elevene informasjon om at de skulle jobbe sammen og at de skulle finne løsninger sammen. De fikk beskjed om at oppgavene de jobbet med, var oppgaver som de ikke kom til å bli ferdige med. Dersom de kom frem til en løsning, ble de oppfordret til å finne en annen måte å løse problemet på. Under arbeidet jobbet elevene tre og tre i grupper, elevene ble bedt om å snakke sammen med lave stemmer, slik at de ikke forstyrret andre grupper. De seks gruppene som ble grunnlaget for min datainnsamling, fikk hver sin diktafon på pultene sine, denne tok opp deres dialog og resonnement. Alle gruppene fikk også et A3-ark som de ble bedt om å notere på. Mens elevene jobbet, gikk jeg rundt og noterte og observerte. Etter siste økt hadde jeg gruppeintervju med elevene. Observasjoner, opptak fra gruppediskusjon og elevenes notater ble grunnlaget for mitt datamateriale i denne studien. Intervjuet ble ikke en del av datamaterialet, dette diskuteres i kapittel 3.6.3 og 6.2

3.6.1 Observasjon

Da elevene jobbet med undervisningsaktivitetene, observerte jeg dem. Klassens faglærer eller kontaktlærer presenterte oppgaven for elevene, og elevene satt på sine vanlige plasser. Dette var med på å gjøre observasjonen mest mulig naturlig. Dette er et trekk for den kvalitative metoden, at man observerer naturlige situasjoner (Postholm & Jacobsen 2022). Elevene jobbet i grupper, det var derfor ikke hensiktsmessig å være passiv i observasjonsrollen. Dersom jeg kun hadde vært en fullstendig observatør hadde jeg ikke fått brukt alle sansene. En fullstendig observatør har ingen kontakt med de som blir observert og heller ingen deltakelse i situasjonen som blir observert (Postholm & Jacobsen 2022). I den rollen hadde jeg mistet noe av innholdet, fordi gruppene jobbet stille sammen og jeg hadde ikke hørt eller forstått hvor gruppene var i prosessen. Jeg observerte flere grupper samtidig, det føltes derfor mest effektivt for meg å ta en mer aktiv rolle i undervisningssituasjonen, slik at jeg kunne få innblikk i flere av gruppenes løsninger og strategier. Jeg gikk derfor rundt til gruppene og stilte spørsmål om hva de jobbet med, hva de tenkte og hvorfor de tenkte det. Jeg var i en observatørrolle, mens jeg gikk rundt og snakket med elevene for å samle inn data om hvordan de tenkte (Ahlberg & Moen, 1999). I min observatørrolle, kom jeg ikke med noen innspill om hvordan elevene skulle løse oppgaven, dette er videre diskutert i kapittel 3.8.2. Jeg stilte heller spørsmål og oppsummerte deres tanker, for å sikre meg at jeg ikke hadde misforstått. Min observasjonsrolle var en medlemskapsrolle, nærmere bestemt en perifer observasjonsrolle. Det vil si at jeg som observatør prøvde å forstå, i dette tilfellet, elevenes perspektiv, uten at jeg selv var en del av aktiviteten som elevene jobbet med. (Postholm & Jacobsen 2022). Jeg syns det var vanskelig å finne en definisjon på akkurat min observatørrolle, jeg mener også at jeg brukte trekk fra rollen som observatør- som- deltar. Denne rollen kan være to lærere som har undervisning sammen, der en av lærerne har rollen som observatør (Postholm & Jacobsen 2022). Denne rollen passer til at elevene så på meg som en lærer, som de følte at de kunne stille spørsmål til. Samtidig som rollen ikke passer helt da jeg egentlig ikke hadde en lærerrolle i undervisningen, men heller var en aktiv observatør. Når elevene spurte meg om noe svarte jeg med spørsmål som «hva tror dere», «hvordan har dere tenkt» (kap. 2.6). Jeg kunne også komme bort til en gruppe og be dem forklare hva de hadde tenkt til nå, eller å spørre om en utregning eller en tegning for å få en bedre forståelse. I rollen som observatør- som – deltaker er forskerens avstand stor og forskerens deltakelse stor, noe jeg mener passer rollen som jeg inntok (Postholm & Jacobsen 2022).

Under observasjonen gikk jeg rundt og noterte meg hendelser eller utsagn, som jeg fant relevant for min problemstilling. Jeg brukte ikke et veldig avansert observasjonsskjema, da jeg har erfart fra tidligere forskningsprosjekt i lærerutdanningen at om man skal plassere observasjoner i ulike kolonner og observere mye forskjellig på likt, kan man ende opp med å gå glipp av viktige observasjoner. Fokuset kan bli mer ned i papiret, enn på hva som foregår i klasserommet. Derfor valgte jeg å dele inn mitt observasjonsskjema i tre deler: observasjoner om løsningsstrategier, observasjoner om samarbeid og andre observasjoner. Dette gjorde det lett å plassere ting som skjedde i klasserommet, samtidig som jeg kunne bruke sansene mine effektivt i observasjonen. Samtidig som disse kategoriene rettet observasjonene mot mine to forskningsspørsmål: «hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing», og «hvilke påvirkninger kan samarbeid ha i problemløsing».

For å kunne notere effektivt i de ulike delene av observasjonsskjemaet, var det viktig for meg å ha teoretisk grunnlag, for å kunne rette observasjonen mot denne studien. Jeg hadde spesielt tatt med meg Polyas fire trinn for problemløsing og listen over løsningsstrategier (kap. 2.4.2). Jeg noterte i stikkordsform og noterte meg hvilken gruppe observasjonen tilhørte. Like etter økten satt jeg meg ned og skrev en logg om observasjonene og fylte ut mer fyldig rundt stikkordene i observasjonsskjemaet. Det var seks grupper som ble observert samtidig, det var derfor veldig nyttig med diktafonene, da det ikke var mulig å få med seg alt som skjedde i gruppene på likt. Arbeidet med transkripsjonene ble derfor også en viktig del av observasjonsarbeidet. I sammenheng med transkripsjonene var notatarkene viktige for å kunne se på notatene i sammenheng med det som ble sagt, for å få en bedre forståelse av hva elevene mente og tenkte. Under transkripsjonsprosessen noterte jeg meg interessante funn underveis, da jeg lyttet og transkriberte. Dette kan leses mer om i kapittelet om analytisk tilnærming (kap. 3.7.2).

3.6.2 Intervju

Etter de tre undervisningsaktivitetene tok jeg ut elever for gruppeintervju. Gruppeintervju kan med fordel bli brukt sammen med andre datainnsamlingsmetoder, for å styrke troverdigheten til dataene (Postholm, 2020). Jeg valgte ut fire av de seks gruppene. Disse gruppene ble tatt ut til intervju. Elevintervjuene fant sted noen timer etter undervisningen. Grunnen til at tidspunktet var noen timer senere, var at jeg ønsket å lytte til elevenes problemløsning og lage relevante spørsmål, for å få best mulig utbytte av intervjuet. Grunnen til at det ikke var senere enn noen timer, var at jeg ønsket at elevene skulle huske hva de tenkte og følte i prosessen. Dersom man hadde ventet for lenge med elevintervjuene tror jeg at mye data kunne gått tapt. Under intervjuet hadde jeg klart noen emner og spørsmål på forhånd, samtidig som jeg tilpasset spørsmålene ut fra hva som ble observert etter hver undervisningsaktivitet. Jeg tilpasset også spørsmål utfra hvor elevene selv dro diskusjonen, dette vil si at det er et semi-strukturert intervju (Postholm & Jacobsen, 2022).

I forhold til elevene som skulle intervjues måtte jeg ha en samtale med kontaktlærer om hvilke elever som kunne tas ut. Jeg ønsket faste grupper til intervju, slik at hver gruppe som ble intervjuet kunne dele en felles forståelse av hva de har diskutert, elevene kunne spille på hverandre i intervjuet, utdype, minne på eller dra samtalen i en relevant retning for hva akkurat den gruppen har lært og jobbet med. En annen grunn til at jeg landet på å ha de samme gruppene hver økt, var at jeg da kunne se om samarbeidet endret seg eller om gruppene utviklet problemløsingsteknikker fra gang til gang. I tillegg var det noen praktiske grunner som spilte inn. Elevene var ikke vant til å jobbe i grupper, dermed kunne det å bytte rammefaktorer, som rom og elever man jobbet med i gruppen skapt uro, som igjen kunne forstyrret dataene til studien. Noen elever hadde ikke godkjent eller levert tilbake samtykkeskjemaet, dermed kunne de ikke være en del av dataene, dette var også en av grunnene til at det ble ryddigere å ha de samme gruppene i hver økt.

Jeg gjennomførte intervjuene med gruppene, dataene vil ikke være en del av denne oppgaven. Dette har flere grunner, en grunn var timeplan, som gjorde at det ikke ble intervju etter hver gang. Det ble heller intervju med gruppene etter den tredje økten. Da hadde vi litt lite tid, noe som gjorde at jeg tok beslutningen å ta ut to og to grupper om gangen, noe som jeg i ettertid ser at ikke var en lur avgjørelse. I intervjuene kom det ikke frem noen nye metoder eller observasjoner, som ikke allerede hadde kommet fra gruppearbeidet. Elevene klarte ikke helt å gjengi det de hadde jobbet med eller hva de hadde tenkt. Da intervjuene var på slutten av dagen var elevene slitne og uoppmerksomme, det var flere elever som ikke ønsket å delta, de virket urolige og ufokuserte, noe som forstyrret de andre elevene som deltok og uroen forstyrret lyden på diktafonen, slik at mye ble utydelig. Dette kunne nok blitt unngått med en mindre gruppe, som det opprinnelig var planlagt. Jeg hadde planlagt å sitte på grupperom, men disse var blitt opptatt, dermed ble vi sittende på et bord i biblioteket, der det kom klasser og elever forbi, noe som også forstyrret. En av intervjuene, kom en annen lærer og skulle snakke med en elev og da datt resten av gruppen av og klarte bare å diskutere hva denne eleven skulle. Alt i alt ble intervjuene kaotiske, vanskelig å transkribere, samtidig som at det som ble nevnt og sagt var det samme som kom frem i gruppediskusjonene som ble transkribert. Derfor valgte jeg å ikke ta med intervjuet som en del av datamaterialet, da det ble uoversiktlig, og tilføyet ikke relevant innhold for å besvare forskningsspørsmålene. Hva som kunne endret utfallet av intervjuet, samt økt kvaliteten, vil bli drøftet i kapittel 6.2.

3.6.3 Transkripsjon

Gruppediskusjonen til de ulike gruppene ble tatt opp med en diktafon og deretter transkribert. Dette ble gjort for å få diskusjonene over i skriftform. Når diskusjonene er i skriftform er det lettere å lese gjennom i sitt eget tempo, hoppe frem og tilbake i samtalene, for å få en bedre forståelse av diskusjonene (Jacobsen, 2022). Transkripsjon er en tidkrevende oppgave, og en ensformig oppgave. Jeg har transkribert gruppediskusjonene i sin helhet for å få et godt, helhetlig bilde av diskusjonene (Jacobsen, 2022). Transkripsjonen sin utforming er at alle utsagn ble presentert med det fiktive navnet, kolon så utsagnet. Utydelig lyd ble fremvist som: «*Utydelig», etterfulgt av sekunder tiden var uklar. Dersom lyden var uklar i under tre sekunder, ble ikke sekundene markert, kun at det ble uklart. Pauser blir markert med «...», dersom pausene var naturlige ble ikke dette notert, dersom pausene var betydelig lange, ble pausen notert med sekunder. Tallrekker ble notert som «1-2-3-4» osv. Utsagn som ikke var relevant til det matematiske, ble plassert i parenteser som eks. «Fredrik: det er Spider-Man stolen (synger Spider-Man sang)». Egne innspill fra observasjonen som var viktig for forståelsen av transkripsjonene ble også plassert i parentes, som for eksempel: «Anna: ikke ta på den kim (Lydopptakeren)» eller: «Pål: kan jeg låne den? (linjal)» eller: «... (2 min) (går opp på tavlen og måler)». Under transkripsjonsprosessen skrev jeg også ned notater og koblet sammen observasjoner fra observasjonsskjema og observasjonslogg, samt egne tanker og tolkninger av hva som var interessante funn ol. Dette ble til en logg til hver av transkripsjonene. I transkripsjonene valgte jeg å beholde mitt eget navn når det er jeg som snakker, som for eksempel: «Silje: hvorfor tror du det?».

3.6.4 Oversikt over datamaterialet

Datainnsamlingen foregikk tre etterfølgende dager i en uke. datamateriale består av elevdiskusjon i grupper på tre. Gruppene løste problemløsingsoppgaver som var nøye plukket ut på forhånd. Dataene brukt i denne oppgaven var lydopptak av elevdiskusjon, seks grupper hver økt, samt tilhørende transkripsjon og notater som elevene skrev under løsningsprosessen. Opprinnelig skulle elevintervju også være en del av datamaterialet, men som nevnt i kapittel 3.2.2 ble ikke disse dataene relevante å bruke i studien. Datamaterialet består derfor av 18 lydopptak og transkripsjoner av elevdiskusjon og tilhørende elevnotater. Lydopptakene varte mellom 15 og 25 minutter. Observasjonene som ble gjort i undervisningssituasjonen er også en del av datamaterialet, disse blir brukt, som nevnt, for å begrunne og styrke kredibiliteten på mine tolkninger av lydopptakene, da jeg har skrevet observasjoner som ikke kommer like tydelig frem gjennom en diktafon.

3.7 Analyse

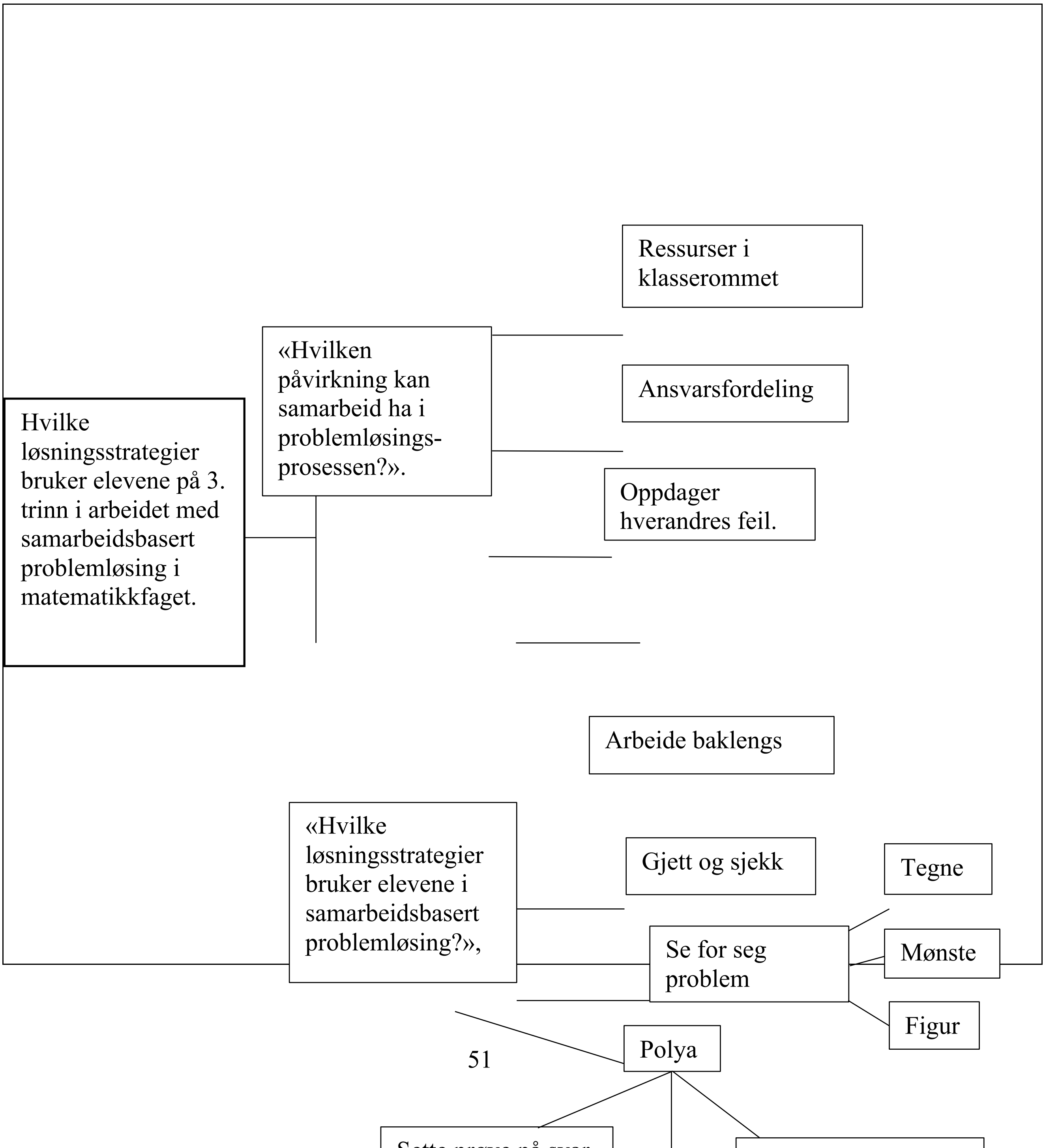
For å belyse problemstillingen og forskningsspørsmålene mine på en god måte valgte jeg å dele inn resultatene i funn som omhandler samarbeidet og funn som belyser løsningsstrategier. Dette er deler som i mange tilfeller overlapper hverandre i et slikt arbeid. Jeg leste gjennom loggene, notatene og transkripsjonene som jeg hadde skrevet, og begynte å tenke over hvordan jeg kunne analysere innholdet av datamaterialet på best mulig måte. Jeg valgte å benytte meg av analysemetoden deduktiv innholdsanalyse (Jacobsen, 2022). Denne analysemetoden tar utgangspunkt i teori. I denne studien er teorien den teoretiske innramningen (kap. 2). Utfra teorien valgte jeg ut noen kategorier og underkategorier, som dannet et kategoritre (figur 3), (Jacobsen, 2022). Kategoriene ble knyttet til datamaterialet og plassert i en tabell for å sortere funnene mer oversiktlig.

3.7.1 Analytisk tilnærming

For å belyse mitt forskningsspørsmål ble det hensiktsmessig å sette sammen transkripsjonene med mine observasjoner fra klasserommet. Dette gjorde jeg ved å sette inn egne kommentarer, i transkripsjonene. Slik kunne jeg få en bedre og samlet oversikt , over hva som ble sagt og hva som ble observert i den aktuelle situasjonen. Det var opprinnelig vanskelig å plassere mine observasjoner inn i et skjema, sammenligne eller sette de i en tabell, da de aller fleste gruppene løste oppgavene på ulike måter. Noen grupper hadde lignende strategier, samtidig som elevdialogen og veien til strategien var ulik. Da problemløsing er en prosess (Polya, 2014), var de fleste gruppene innom forskjellige tanker og ideer. Noe som gjorde det vanskelig å sette disse individuelle prosessene inn i kategorier. Dette førte til en usikkerhet rundt hvordan jeg kunne analysere dataene, for å oppnå et best mulig svar på forskningsspørsmålene. Mens jeg funderte på dette, brukte jeg mye tid på å lese litteratur angående samarbeid og løsningsstrategier.

Jeg landet til slutt på å utføre en deduktiv innholdsanalyse, en analysemetode for å strukturere og analysere kvalitative data basert på forhåndsdefinerte kategorier (Jacobsen, 2022). Årsaken til dette valget, var at jeg hadde store deler av den teoretiske innramningen klar. Gjennom denne analyseformen, kunne jeg systematisk gå gjennom datamaterialet, for så å finne ut hva som var relevant for å besvare forskningsspørsmålene mine. Den deduktive innholdsanalysen, tar utgangspunkt i bestemte begreper, teorier og/eller fenomener, som man ønsker å undersøke (Jacobsen, 2022). I analysen fulgte jeg Jacobsen (2022) sine steg, som inneholder: *Presisering av kategorier, tilordning av tekst til kategorier, «test» av kategoriene og utvikling av nye kategorier og etablere sammenhenger* (Jacobsen, 2022, s. 221-226).

Før jeg hadde landet på analysemetode, gjennomførte jeg datainnsamlingen. Jeg laget da et observasjonsskjema (kap. 3.6.1), som fokuserte på samarbeid og løsningsstrategier. Disse ble opprinnelig mine to kategorier. Etter videre analyse, ble disse endret til de to forskningsspørsmålene. Dermed hadde jeg to forskningsspørsmål, de ble de to første kategoriene. Disse knyttes til teori og tidligere forskning (Jacobsen, 2022). Teorien og tidligere forskning var med på å danne subkategoriene som ble brukt i analysen. De ulike kategoriene ble plassert i et kategoritre før analyse arbeidet startet, se figur 3.



Figur 3, Kategori-tre

Den andre delen av analysen var å tilordne tekst i kategorier (Jacobsen, 2022). I denne delen gikk jeg gjennom datamaterialet og markerte og kategoriserte utsagn og hendelser i de ulike kategoriene og subkategoriene i treet. Jeg startet med å lage fargekoder i min transkripsjon. Gul markering, belyste løsningsstrategier. Grønn markering, markerte interessante funn som omhandlet samarbeidet. Blå markering ble brukt for andre observasjoner som jeg bet meg merke i. Disse fargekodene brukte jeg underveis, mens jeg transkriberte. Dermed gikk jeg over transkripsjonene med kun fokus på de ulike kategoriene: løsningsstrategier og samarbeid (vedlegg 27. figur 2). Underveis i transkripsjonen tok jeg lydopptakene på pause og noterte ned tanker. Etter hvert lydopptak skrev jeg en kort logg, der jeg flettet sammen transkripsjon, tolkninger og elevenes notater. Jeg laget en liste over strategier gruppene var innom, slik at jeg kunne gå systematisk gjennom disse strategiene. Disse strategiene ble med på å redigere subkategoriene i «treet» (vedlegg 26. figur 1).

> Thea: Det er litt vanskelig siden jeg forstår ikke helt
> Lærer: Hvor mange ben hadde et bord?
> Per: 3
> Lærer: Var det 3?
> Per: Nei, det var 4.
> Svein: Det var stolen som hadde 3.
> Lærer: Hvordan kan man tenke da?
> Thea: Jeg vil liksom telle nedover, da har vi liksom 28 også tar vi minus når vi har tatt det.
> Lærer: At du tar 31 også minus en stol?
> Thea: Ja 3 og 3 eller 4, da kan man liksom først gå ned med 3, så blir 31 til 28. Se her, nå har vi 28 igjen, så tar vi 28 minus 3
> Svein: Ja også med et bord er det 7.
> Thea: Ja Svein! Forsett sånn videre.
> Svein: Nå har vi 10, så kan vi ta kanskje 1 til bord. Jeg har ikke flere blyanter
> Thea: Jeg kan hente flere blyanter til deg.
> Svein: Kan vi ikke tegne 16?

Transkripsjon 1 . Gruppe 5 oppgave 1

I Jacobsen (2022) sin bok: *Hvordan gjennomføre undersøkelser*, vises det et eksempel på deduktiv tekstanalyse. Eksempelet vises ved at teksten blir plassert inn i skjema, slik at utsagn, observasjoner og sitater stilles opp mot hverandre. Dermed kan de sammenlignes og drøftes (Jacobsen, 2022). I min analyse ble ikke påstandene sammenlignet, men dialoger og utsagn ble plassert inn i skjema. Kategoriene er vist i tabell 1 og 2. For den utfylte tabellen se vedlegg 27 og 28. I disse vedleggene er det kun lagt ved relevante transkripsjoner, altså transkripsjoner som er presentert og drøftet i denne oppgaven. Dialogene blir ikke satt opp mot hverandre i denne tabellen, slik som i Jacobsens 2022 presentasjon av deduktiv tekstanalyse. Da elevene jobbet med problemløsing, er dialogen en prosess, for å løse oppgaven. Det blir derfor lite hensiktsmessig å sammenligne utsagn opp mot hverandre, da resonnementene og prosessen bør bli sett på som en helhet i problemløsingsarbeidet, inn mot en løsning. Transkripsjonene, observasjonene og elevenes notatark ble plassert i en tabell, som ble en viktig del av analysen.

«Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?».	**Funn**
Ressurser i klasserommet	
Ansvarsfordeling	
Oppdager hverandres feil	

Tabell 1. Resultat for «Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?».

Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	**Funn**
Arbeide baklengs	
Gjett og sjekk	
Se for seg problem (Se underkategorier)	
Tegne	
Mønster	
Figur	
Polya (Se underkategorier)	
Sette prøve på svar	
Se på kjente problem	
Gå tilbake til start	

Tabell 2: resultat for: «Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?»

Gjennom del tre av analysen, *«test» av kategoriene og utvikling av kategorier* (Jacobsen, 2022, s. 225), gikk jeg gjennom de gitte kategoriene fra treet. Jeg så om det var tilstrekkelige data for å belyse den aktuelle kategorien. Det var også noen kategorier som med fordel kunne splittes. Noen funn passet ikke inn i de opprinnelige kategoriene, disse blir diskutert som sideresultat. I siste del av analysen skulle det bli etablert en sammenheng. I denne delen utarbeidet jeg kategoritreet og tabellene, slik at de inneholder alle de aktuelle subkategoriene som ble oppdaget gjennom analyseprosessen. Samt fjernet de som ikke viste seg aktuelle (Jacobsen, 2022).

3.8 Studiens kvalitet

Studiens kvalitet handler om hvordan man har kommet frem til funn i et forskningsprosjekt (Postholm & Jacobsen, 2022). Selve funnene kan ikke si noe om kvaliteten til studien. Hvordan man behandler og fremlegger funn, sier derimot noe om kvaliteten (Postholm & Jacobsen, 2022). Funnene som kommer frem i en studie skal bestå av fakta og data, og ikke ren synsing fra forskeren. For å tilegne dataene mening, vil en forsker være nødt til å tolke dem. For at forskerens egne tanker og meninger ikke skal påvirke dataene er det viktig å drøfte datamaterialet opp mot andre forskere sine funn. Samtidig som forskeren må være bevisst, og må kunne reflektere over hvordan ens egne undersøkelser, datainnsamling eller analysemetoder kan ha påvirket resultatene eller funnene i studien (Postholm & Jacobsen, 2022).

3.8.1. Validitet

Validitet i forskningssammenheng handler om å vurdere metodene, for å undersøke om disse egnet seg til det som skal undersøkes (Dalland, 2017). Validitet handler altså om gyldigheten til forskningen, og om hvorvidt forskeren har grunnlag for å trekke konkusjoner. Det er også viktig å reflektere over begrensningene til egen forskning (Postholm & Jacobsen, 2022). Validitet kan deles inn i ytre og intern validitet. Ytre validitet handler i hovedsak om hvilken grad funn fra en sammenheng kan overføres eller generaliseres, til andre sammenhenger (Postholm & Jacobsen, 2022). For eksempel i denne studiens tilfelle, handler den ytre validiteten om resultatene og/eller konklusjonene fra denne skolen, denne tredjeklassen og disse oppgavene, kan overføres eller videreføres i en annen kontekst. Altså at resultatene er gyldige i andre sammenhenger enn i den som ble observert. Intern validitet handler om to faktorer, disse er:

> *i hvor stor grad det er samsvar mellom den virkeligheten vi påstår at vi studerer og analyserer, og de begreper og teorier vi benytter for å beskrive denne virkeligheten. Det andre forholdet er hvorvidt vi har grunnlag for å uttale oss om kausalitet (årsak og virkning) ut fra den studien vi har gjort* (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 229).

Den ytre validiteten i denne oppgaven kan være noe begrenset, grunnet at dette er en kvalitativ enkeltcasestudie. Resultatene er derfor ikke nødvendigvis generaliserbare, da forskerens egne tolkninger kan påvirke funnene i studien (Postholm & Jacobsen, 2022). Som diskutert tidligere i oppgaven har jeg likevel et ønske om at resultatene skal være aktuelle i en større kontekst. Ønsket med denne studien er at innholdet og resultatene ikke bare skal være aktuelle her og nå. Ikke bare for denne klassen eller bare for tredje trinn. Studiens hensikt er å sette lys på hvordan samarbeidsbasert problemløsing kan bli brukt i matematikkundervisningen. Jeg ønsker å belyse hvor mye matematisk innhold som benyttes i et slikt arbeid. Samt gi et innblikk i hvordan uerfarne problemløsere kommer frem til løsninger, hvilke løsningsmetoder og fremgangsmåter som faller dem naturlig. For at enkeltcasestudien skal være relevant i en større kontekst (Postholm & Jacobsen, 2022), er det viktig med en god kvalitet på studien. At jeg kritisk vurderer metodene valgt, samtidig som jeg vurderer om oppgaven oppfyller kravene til validitet og relabilitet, samt om resultatene kan generaliseres (Dalland, 2017). Videre refleksjoner og betraktninger om studiens kvalitet, blir diskutert i kapittel 6.2.

Den ytre validiteten til denne oppgaven omhandler at funnene kan gi en god innsikt i elevenes samarbeid og i hvilke løsningsstrategier, som er aktuelle for uerfarne unge elever. Det er vanskelig å si helt sikkert om innsikten som denne oppgaven gir, er overførbar til andre elever. Jeg håper og tror at resultatene kan brukes av lærere i undervisningen for å predikere og få et innblikk eller forståelse av elevenes tanker og resonnement i problemløsing. Denne studien kan også fremme styrkene av samarbeidsbaserte aktiviteter i matematikkundervisningen i småskolen. Samt vise hvor mye matematisk innhold elevene er innom i slike aktiviteter.

Den interne validiteten til denne oppgaven er grunnlagt i analysen som jeg har gjennomført. Analysen er grundig beskrevet i kapittel 3.7. Ved å forklare forskningsprosessen og begrunne valg som er tatt, kan man sikre validiteten i oppgaven. Valg som er tatt og begrunnet i metodekapittelet, er derfor i sin helhet med å forklare og styrke validiteten til denne oppgaven. Samtidig som relevant litteratur i teori-kapittelet (kap. 2) styrker validiteten til funnene i studien. Denne teorien er også brukt som et grunnlag for analysen (kap. 3.7), samt for å diskutere funnene i diskusjonsdelen (kap. 5).

3.8.2 Relabilitet

Relabilitet omhandler studiens pålitelighet. For å sikre studiens pålitelighet, kan man reflektere om, og i tilfellet hvordan forskeren kan ha påvirket funnene og resultatene i studien (Postholm & Jacobsen, 2022). Denne refleksjonen skjer ved at forskeren selv reflekterer over egen påvirkning. Samt at forskeren legger tydelig frem forskningsprosessen, slik at leseren kan reflektere over prosessen (Postholm & Jacobsen, 2022).

Det er viktig at jeg som forsker er oppmerksom på min egen rolle og subjektivitet i denne studien (Postholm & Jacobsen, 2022). Postholm og Jacobsen (2022) skriver at i enhver diskusjon av pålitelighet, må forskeren kunne forklare fem punkter, for å beskrive seg selv for andre (Postholm & Jacobsen, 2022). Disse punktene skal jeg diskutere utfra valg i min studie. Jeg kommer ikke til å diskutere i forhold til intervjuene, da de ikke ble en del av datamaterialet.

«Relasjon mellom forsker og forskningsdeltaker» (Postholm & Jacobsen, 2022, s.225) er punkt a). Dette punktet blir diskutert av Postholm og Jacobsen (2022) i sammenheng med intervju og spørreskjema, siden ingen av disse metodene ble brukt i min studie velger jeg heller å rette fokuset på spørsmålstypene presentert. Postholm og Jacobsen (2022) beskriver ulike spørsmålstyper, ledende spørsmål, uklare spørsmål og doble spørsmål (Postholm & Jacobsen, 2022). Før jeg satt i gang med studien reflekterte jeg over spørsmålsbruk, og informerte, som nevnt i kapittel 3.4, lærerne om at de ikke skulle gi elevene svaret, men heller stille spørsmål tilbake slik at elevene kunne tenke selv. Dette var jeg også oppmerksom på selv før og under observasjonene. Likevel ser jeg når jeg jobbet med transkripsjonsarbeidet at flere av spørsmålene fra voksne i klasserommet kan virke ledende, altså at spørsmålene har et «klart favorisert type svar» (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 225). Dette tror jeg kommer av at lærerne og jeg ønsket å hjelpe elevene som sitter fast. Utfra Polya (2014) tanker så skal læreren hjelpe elevene, hvis ikke så kan arbeidet stoppe opp (Polya, 2014). Jeg selv brukte i noen tilfeller ledende spørsmål, dette var noe jeg reflekterte over i logg arbeidet etter hver økt, og dermed forsøkte å rette opp til undervisningsøkt 2 og 3. Min rolle i undervisningen ble mer aktiv en først tenkt, og det ble naturlig at jeg deltok i diskusjon med elevene for å få et bedre innblikk i diskusjonene i gruppene (kap. 3.2.1). Derfor åpnet jeg opp for at elevene skulle stille spørsmål tilbake til meg og de så meg som en de kunne stille spørsmål til (kap.3.2.1). Disse ledende spørsmålene forekom ikke ofte nok til at jeg tenker at det kan ha påvirket resultatene i studien i urovekkende grad. Samtidig så tenker jeg at det er et faktum som det er viktig å ta til betraktning i forhold til validiteten i oppgaven. Derfor var det også viktig for meg at tilfellende der voksne i klasserommet stiller ledende spørsmål kommer frem i transkripsjonene i denne oppgaven. Uklare spørsmål eller doble spørsmål forekom ikke i denne studien.

Punkt b) er «Forhold mellom problemstilling og forskningsdeltaker» (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 225-226). For å besvare min problemstilling «Hvilke løsningsstrategier bruker elevene på 3. trinn i arbeidet med samarbeidsbasert problemløsing i matematikkfaget.». Og mine forskningsspørsmål: «hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing», og «hvilke påvirkninger kan samarbeid ha i problemløsing», Så brukte jeg elever på 3. trinn med lite erfaring innenfor samarbeidsbasert problemløsing. Gjennom å bruke en enkeltcasestudie mener jeg at jeg oppnår validitet i min forskning fordi dette designet retter fokuset på den enkelte elevgruppen i den enkelte situasjonen (Postholm & Jacobsen, 2022), og dermed er det underforstått at resultatene mine på den aktuelle problemstillingen og medfølgende forskningsspørsmål er aktuell for de aktuelle elevene. Deretter har jeg forsøkt å generalisere resultatene slik at de kan være nyttige i en større kontekst.

«Forskningens kontekst» (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 226) er punkt c). All forskning foregår i en gitt kontekst (Postholm & Jacobsen, 2022). Konteksten i denne oppgaven er i den aktuelle tredjeklassen over tre undervisningsøkter, der de arbeider med tre forskjellige oppgaver i grupper. En annen kontekst er at problemløsing er høyst aktuell i læreplanen i matematikk (kap. 2.2 og 1.1), og at læreboka til elevene inneholder problemoppgaver selv om jeg har diskutert at disse kanskje ikke er fullverdige problem (kap. 3.5). Denne konteksten gir noen begrensninger til oppgaven. Det kan hende at elevene har mer erfaring innenfor problemløsing enn det jeg har fått informasjon og inntrykk av, siden det er en så stor del av matematikkfaget på skolen i dag, samt de har jobbet med oppgaver i bøkene. Selv om dette kan være tilfelle står jeg enda med utsagnet om at elevene i studien er uerfarne og at samarbeidsbasert problemløsing er noe de har liten erfaring med. Dette begrunner jeg i at problemløsing må trenes opp (Finn kilde), og selv om elevene har gjort noen problemoppgaver så er enda temaet nytt for dem. Det er nytt både på grunn av deres unge alder, men også siden lærerne har utrykt at problemløsing ikke har vært en stor del av undervisningen. Utsagnet om at elevene ikke har jobbet med samarbeidsbasert problemløsing stemmer, informasjonen jeg har fått sier at elevene ikke jobber sammen i grupper i undervisningen, og det er lite gruppediskusjon.

I punkt d), «hvem har vi ikke fått tak i» (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 227), diskuteres det hvem som ikke deltar i undersøkelsen og hvilke påvirkninger det kan ha gjort for relabiliteten til en studie (Postholm & Jacobsen, 2022). I denne enkeltcasestudien er utvalget begrenset og dermed vil også resultatene ha tilsvarende begrensninger. Siden denne studien ikke påstår at funnene gjelder alle tredje klassinger, men heller tredje klassingene i denne klassen, så mener jeg at deltakelsen ikke har stor påvirkning på funnene. I studien deltok 18 av 26 elever i klassen. fem av elevene ble valgt ut fordi de arbeidet med andre oppgaver enn resten av klassen, og de resterende tre, som ikke leverte tilbake samtykkeskjema, ble plassert på en egen gruppe uten diktafon. Jeg vil påstå at frafallet av disse åtte elevene ikke hadde betydelige følger for resultatene, da de 6 resterende gruppene kunne gi tilstrekkelige data for å belyse problemstilling og forskningsspørsmålene.

Siste punkt på listen, punkt e) «Har vi fått registret alt det viktige?» (Postholm & Jacobsen, 2022, s. 227), tar for seg at ofte får en datainnsamling inn bredere data enn det som klarer å bli registrert, og at forskerens notater og oppfatning kan være mangelfulle eller uforståelige for andre parter (Postholm & Jacobsen, 2022). Gjennom min analytiske tilnærming, mener jeg at jeg har fått med meg mye viktig for å belyse den aktuelle problemstillingen min og mine forskningsspørsmål. Som man kan se i kapittel 3.7 så har jeg tatt grunnlag i teori, for så å dele opp problemstillingen i to underkategorier, dermed har jeg systematisk lett etter resultater som omhandler disse kategoriene. Denne metoden mener jeg at jeg fikk sikret at jeg fikk belyst fordelene med samarbeidet som kom frem i denne studien samt hvilke løsningsstrategier som ble brukt. Samtidig som jeg er klar over at datamaterialet har mye mer informasjon enn det som blir presentert i denne oppgaven. I en masteroppgave må det dannes begrensninger for å kunne svare på problemstillingen i oppgaven (Postholm & Jacobsen, 2022). Og hvordan jeg har tolket elevenes tenking kan være ulik fra hvordan elevene faktisk har tenkt, men jeg har brukt god tid og hatt et stort fokus på at oppgaven skal fremstille reelle fakta, derfor har jeg prøvd å begrense hva jeg påstår eller tolker og heller lent meg mye på reelle elevdiskusjoner, slik at leseren selv kan se og tolke ha som blir sakt.

3.8.3. Forskningsetiske vurderinger

«Forskningsetikk består av et sett grunnleggende normer, som er utviklet over tid og forankret i det internasjonale forskerfellesskapet» *(NESH, 2021)* og består av normer og ansvaret som forskere forplikter seg til i forskningsprosessen. De forskningsetiske vurderingene tatt i denne oppgaven er også med å sikre kvaliteten i denne studien. I denne studien var det noen hensyn å tenke på både før, underveis og etter at studien var utført. Derfor gjorde jeg meg i forkant av datainnsamlingen godt kjent med NESH sine rettlingslinjer. Jeg leste gjennom Sikt sin veiledning for forskning i barnehage og skole, samt sendte inn meldeskjema til *Sikt* (Sikt u. å), (vedlegg 24). Sikt sitt meldeskjema er et søknadskjema som er tilegnet forskere eller studenter som jobber med personopplysninger i forskningsprosjekter. For å få godkjent et forskningsprosjekt må prosjektet følge kravene til personvern (Sikt, u.å.). Jeg var også i kontakt med avdelingsleder og rektor på skolen, jeg presenterte mitt prosjekt og fikk godkjennelse for å gjennomføre.

3.8.3.1 Informert samtykke

Forskning som foregår i barnehage og skole skal være frivillig (Sikt, u.å.).
Da elevene er barn, trengte jeg også samtykke fra foresatte. Det ble sendt hjem et samtykkeskjema til foresatte, for å få samtykke eller ikke samtykke fra elev og foresatte. Samtykket inneholdt godkjennelse på om de kunne delta i studien, om de kunne bli observert, bli med i lydopptak, intervjuet. Dette samtykkeskjemaet ble sendt med elevene hjem (vedlegg 24). Det er viktig at elever og foresatte ikke føler seg presset til å delta, derfor var det viktig i denne sammenheng å informere om at studien var uavhengig av skolen og lærere, at valget angående deltakelsen ikke ville påvirke forhold til lærer eller skolen (Sikt, u.å.). Foresatte skulle også bli informert om at det på et hvert tidspunkt var mulig å trekke elevenes deltakelse i studien, både i forkant og i etterkant av datainnsamlingen. Foresatte ble informert om at de kunne få innsikt i intervjuguide, observasjonsskjema og i oppgavene på forhånd. Det ble lagt ved kontaktinfo til meg og til andre instanser, dersom de hadde flere spørsmål som ikke ble besvart i samtykkeskjemaet (Sikt, u.å.). Da mitt forskningsprosjekt var en del av undervisningen, var det viktig å gi en grundig beskrivelse over hvordan dette ville foregå. Samt informasjon om hvordan elevene som ikke ønsket å delta i prosjektet ble sikret. Hvordan deres anonymitet ble ivaretatt og hvordan de ikke ble en del av dataene (Sikt, u.å.).

3.8.3.2 Beskyttelse av barn

Forskning med elever går under kategorien forskning på sårbare grupper (Sikt, u.å.). Det er derfor ekstra viktig å ha fokus på etiske valg gjennom hele forskningsprosessen. Det er viktig å ha fokus på barnets beste i forskningen, være ekstra nøye med å sikre deres anonymitet. I transkripsjonsprosessen valgte jeg derfor å ikke ta med utsagn som kunne sette enkeltelever i dårlig lys, eller som ga informasjon som kunne være med å identifisere elever. Det er også viktig å ivareta de barna som ikke deltar, derfor ble alle utsagn hvor jeg ikke klarte å identifisere hvem som snakket, uteblitt. En annen etisk vurdering som jeg vurderte som viktig, var å tenke gjennom hvordan elevene ble omtalt i oppgaven. Masteroppgaven kommer til å være en offentlig oppgave, som arbeidsgivere, elevene selv, foresatte m.m. kan lese. Det å ha et positivt elevsyn er alltid viktig, også i en slik oppgave. Man må være bevisst på sin egen rolle som forsker, jeg skal ikke påvirke, legge ord i munnen på elevene eller endre svar og resultat, til å passe min problemstilling (NESH, 2021). For å beskytte barn, er det viktig at foresatte har gitt et informert samtykke. Dersom barnet selv sier eller viser at de ikke ønsker å delta, skal dette også tas hensyn til (NESH, 2021).

3.8.3.3 Anonymitet og konfidensialitet

Taushetsplikten i skolen er for å sikre at ikke ansatte ved skolen kan omtale barna på en måte som gjør at de kan identifiseres (Sikt, u.å.). En viktig etisk vurdering i prosjektet er at elevene skal være anonyme. Dette gjelder informasjon om navn og om hvilken skole de går på. I studien vil alle deltakerne ha fiktive navn, som brukes i transkripsjon og i oppgaven. Ingen utenforstående skal kunne finne ut hvem elevene som diskuteres i prosjektet er. Elever med spesialundervisning ble ikke en del av datamaterialet (Sikt, u.å.). I dette prosjektet var det aktuelt at jeg måtte anonymisere elevene etter innsamlingen. Dette ble gjort gjennom lagring av data (3.9.4) og ved bruk av fiktive navn i alle dokument. Da studien omhandler matematisk tenkning er det lite personlig informasjon i transkripsjonen, samt det er lite utleverende informasjon, da dialogen omhandlet matematikk (NESH, 2021).

3.8.3.4 Lagring og deling av datamaterialet

Bruk av bilde, lyd og video i skolesammenheng er etisk utfordrende (Sikt, u.å.). Jeg måtte vurdere i hvilken grad dette var nødvendig i min oppgave. Jeg vurderte det slik at video av problemløsingsaktivitetene, kunne bli utfordrende, da ikke alle elevene/foresatte nødvendigvis kom til å samtykke for deltakelse i forskningen. Datainnsamlingen foregikk i en hel klassesituasjon, det var derfor nødvendig med diktafoner på hver gruppe. Jeg vurderte at dette var tilstrekkelig sammen med elevenes notatark og mine observasjoner. Jeg vurderte at videoopptak ikke ville gi nok fordeler til at det var nødvendig i min datainnsamling. Elevdiskusjonene ønsket jeg at skulle være mest mulig naturlige, og muligens vil et videokamera gjøre at noen elever vegrer seg fra å delta i diskusjon, mer enn med en diktafon. Et videokamera tenkte jeg også at ville gjøre det mer synlig for ansatte og medelever i klasserommet, hvem som var deltakere i studien og hvem som ikke var det. Jeg ønsket med dette å sikre elevens anonymitet. Diktafonene var nødvendig for å få brukbare data av elevdiskusjon i flere grupper på samme tidspunkt. Lydopptakene gjorde det også lettere for meg å kunne gå tilbake, og dermed kunne få med meg alle innspill og resonnement mot løsningsstrategiene. For å videre sikre elevenes anonymitet ble det brukt et trygt lagringsprogram, nextcloud, for å oppholde originale lydopptak og sensitiv informasjon om elevene.

4 Resultater

I dette kapitelet skal jeg presentere resultater og funn som kom frem i datamaterialet. Datamaterialet består av 18 opptak av diskusjon rundt problemløsingsoppgaver. Elevene jobber i grupper på tre og aktivitetene foregår i helklasse. Kapittelet er delt inn i to deler. En del om «hvilke påvirkninger kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?» og en del om «hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasertproblemløsing?». Disse resultatene er spennende å se nærmere på, da elevene ikke har fått opplæring eller veiledning i hvordan arbeide med problemløsingsoppgaver eller hvordan de skal samarbeide. Datamaterialet består av tre ulike oppgaver. Bildene og transkripsjonene er markert med hvilken oppgave elevene jobber med. Oppgave en (vedlegg 1) omhandler en snekker som skal bygge firbente bord og trebente stoler, han har til sammen trettien ben. Elevene skulle finne ut hvor mange stoler og hvor mange bord snekkeren kunne bygge til sammen. I oppgave to (vedlegg 2), ble elevene bedt om å finne ut hvor mange dager en snegle brukte på å klatre opp en brønn. Brønnen var ti meter dyp, og sneglen klarte å klatre opp tre meter hver dag. Hver natt datt sneglen ned to meter. Oppgave tre (vedlegg 3) var en oppgave om figurtall. Elevene fikk her et bilde av to figurer, oppgaven sier at Katrine bygger en gang rundt hvert av kvadratene ved å bruke rektangulære fliser, der langsiden er to og kortsiden er en. Elevene skulle finne ut hvor mange fliser Katrine brukte på de to neste figurene. Figur en hadde en lengde på tre, figur to hadde en lengde på fem og figur tre hadde en lengde på sju.

4.1 Hvilken påvirkning kan samarbeidet ha i problemløsing?

For å besvare mine forskningsspørsmålet om «hvilke påvirkninger kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?» skal jeg i denne delen presentere hvilke funn som ble gjort angående elevenes samarbeid. Funnene bygger på resultatene som kom frem gjennom den deduktive innholdsanalysen beskrevet i kapittel 3.7.

4.1.1 Ressurser i klasserommet

En fordel med denne måten å jobbe på, er at læreren blir veldig frigjort. Oppgaven har elevene i fokus, og dette resultatet kan derfor bli sett på som et sideresultat. Det ble likevel tatt med fordi det at læreren er friere kan gagne elevene, og kan gi dem mulighet for bedre veiledning om nødvendig. Resultatet kan også være med å belyse hvordan samarbeidet kan påvirke problemløsingsprosessen, fordi det viser at elevene bruker hverandre og dermed er egentlig det at læreren frigjøres et resultat av elevenes samarbeid.. Derfor der dette funnet tatt med.

I mine data var det kun tre tilfeller der elevene rakk opp hånda for å stille et spørsmål om oppgaven. To av disse gangene lurte elevene på om de hadde rett svar, en gang stilte de spørsmål til oppgaven. Det var sytten tilfeller der elevene ropte ut at de var ferdig med oppgaven, de ble da oppfordret til å finne nye løsninger eller sjekke svaret. Nesten hver gang læreren eller jeg lyttet til enkeltgrupper, kommuniserte elevene med oss, enten i form at spørsmål eller for å fortelle om arbeidet. Det at få elever rakk opp hånda ga læreren mulighet til å bruke lengre tid med de gruppene som trengte mer veiledning, og observere gruppediskusjonene. Elevene fant ut sammen hva de skulle gjøre og hvordan de skulle løse oppgavene. I den første økten fant gruppe fem en løsning innen et par minutter, videre minsket interessen for å komme frem til flere løsninger. Læreren satt seg ned med denne gruppen og veiledet dem til å finne flere løsninger, resten av klassen jobbet videre. En sammenhengende fordel med dette er at de aller fleste elever, fikk tenke og snakke matematikk. Det var ikke alle gruppene som forsto oppgaven med en gang eller forsto helt hva målet var, men alle elevene jobbet med matematikk. Elevene prøvde seg fem og forsto mer og mer underveis når de jobbet. De brukte hverandre, de bidro med de egenskapene hver enkelt hadde. Det var tilfeller hvor elever ikke forsto oppgaven før helt mot slutten. Da har elevene hørt matematikk, de har regnet ut fra det de kunne, deretter har forståelsen økt og det gikk opp et lys etter hvert. Dersom disse elevene hadde jobbet alene, er det mulig å tenke at de bare hadde blitt sittende uten denne utviklingen.

Kim: Kan vi bare skrive vi tror at, også skriver vi svaret? For eksempel 16+15 er 31.

Sandra: Men det er jo ikke det vi skal gjøre nå, vi skal vite hvor mange stoler og hvor mange bord.

Anna: Du skal liksom forklare hva vi mener, du skal liksom ikke bare skrive 16+15 du skal skrive «han laget …»

Kim: Det var det jeg mente, at man skriver han laget 15 bord og 16 stoler

Sandra: *snakker mens hun skriver* han laget..

Anna: Den der er på* henviser til lydopptaker

Kim: Haaallllllooooooo

Sandra: Han laget 16 bord og 15 stoler, hvilken vei var b nå igjen?

Transkripsjon 2. Gruppe 3, oppgave 1.

I dette utdraget var gruppen fornøyd med svaret «16 bord og 15 stoler», men de har misforstått litt. Det er helt korrekt at 15+16= 31, men de mangler leddet i tankerekken der de tenker at de 16 bordene faktisk er 16:4= 4 bord, og at 15 stoler egentlig er 15:3= 5 stoler. Selv om svaret er «feil» og selv om de ikke har forstått oppgaven helt, så har de gjort mye lur matematikk. Videre i lydopptaket forklarer Kim hvordan han visste dette, og Anna og Sandra følger hans tankerekke.

Sandra: 15 stoler, da må vi lage det. 1-2-3-4-5-6.........15.

Anna: Men da er det bare 3, så gjør vi det samme som vi gjorde med den.

Sandra: Okey, 3-6-9-12-15

Anna: Så må du skrive 15

Transkripsjon 3, Gruppe 3, oppgave 1

Selv om det var Kim som fant denne ideen raskt, så ser vi senere i transkripsjonen at Sandra og Anna bygger videre på Kim sin tanke, for så å komme frem til det som oppgaven spurte etter. Hadde Kim jobbet alene er det mulig at han hadde sagt seg fornøyd med at det var 16 bord og 15 stoler. Sammen fant de en løsning, som alle kunne enes om og alle kunne forstå hvorfor det var det som var svaret. Gruppen klarte å forstå oppgaven, de klarte å finne en løsning på oppgaven, selv om de misforsto i starten. Dette uten å spørre læreren.

4.1.2 Ansvarsfordeling

Flere av gruppene fordelte på ansvarsoppgaver uten at de ble oppfordret til å gjøre det. Tre av seks grupper praktiserte at det var en person som forklarte og at det var en annen person som noterte, skrev eller tegnet opp hva eleven forklarte. De tre gruppene som gjorde det på denne måten, gjorde dette i hver oppgave. Dette resulterte i at flere på gruppen ble inkludert og i at diskusjonen gikk lett. Det ble i disse gruppene flere spørsmål til hverandre. For eksempel måtte den som forklarer, tydeliggjøre eller forklare på en annen måte hva de mente.

> Mats: Det er 6.
>
> Fredrik: Det er 7
>
> Mats: Nei, fordi se 9-8-7-6, man hopper 3
>
> Fredrik: Åja, det var det jeg sa. Okey også 6- 3 det er 3, også 3-3 det er null
>
> Mats: Nå må vi telle alle treerne.
>
> Fredrik: Okey vi hadde komt til 5-6-7-8-9-10
>
> Mats: Da har vi svaret. 10 stoler
>
> Lise: Da må vi gå over til bord, da gjør vi det samme bare med 4 og ikke 3.
>
> Fredrik: Ja, det vet jeg.
>
> Mats: Hva skriver du?
>
> Fredrik: Stol
>
> Fredrik: Da tar vi 31 og tar vekk 4
>
> Mats: Ja 4. hvert bord trenger 4 ben, da skriver du 31 først, så minus 4, er lik, det er en mindre en når vi gjorde det med 3, så da er det 27
>
> Fredrik: Dette svaret blir 27.
>
> Mats: 27 minus 4, og det blir 24
>
> Fredrik: Så det blir 24.
>
> Mats: Se nå, vi hadde 27, og så tar vi bort 1-2-3-4. nei det blir 23.
>
> Fredrik: Også minus 4 igjen.

Transkripsjon 4. Gruppe 1, oppgave 1

Dette er hentet fra en gruppe som fordelte arbeidsoppgavene, det er Fredrik som skriver og Mats har forsøkt å forklare de andre hva han har tenkt. Fredrik og Lise fortalte Mats at de ikke forsto hva han mente, da gikk han over til å forklare trinn for trinn, han lot også de andre komme med utregningene og sørget for at alle hang med og var inkludert i gruppens svar. De gruppene som hadde en elev som noterte og en som forklarte oppdaget fort når de på gruppen ikke forsto forklaringene, og i disse gruppene var alle gruppemedlemmene klar over hvordan de fant svaret.

Sander: Skal jeg lese det for deg? En snekker snekret trebente stoler og firbente bord. En dag hadde han brukt 31 ben. Hvor mange stoler og hvor mange bord kan han ha laget? Forklar hvordan du kommer frem til svaret. Okey Pål, hvis vi sier at han bruker 4 bein på et bord sant, og til sammen 31. Så om han har brukt et bord har han brukt 4. så er det 3 og 3. da har vi 6 til. Nå er det 16. så 16 pluss 16. 22. så hvis han har 22. regner vi ut beina?

Pål: Ja.

Sander: Da går vi tilbake til 2 bord og 12 på et bord, 12 pluss 12 har vi

Pål:24.

Sander: Ja, også er det to bord, som blir 8, da blir det 32, og det går ikke. Da må vi ha 3 stoler på et bord. Det er 3-3-3- det er som er 9 så er det 4 som er tretten, så 3,3,3 som blir 22. pluss 4, 26. da har vi brukt 2,3. 2 bord har vi brukt. Og 6 stoler. Da vet vi hvert fall det. Skal vi skrive det ned? 7 +7

Pål: 14

Sander: Bra. Da kan vi ta det mange ganger. Pluss 7 er 21. pluss 7 er 28, pluss 7 er.. det går ikke opp. Da krysser vi ut. Skal vi ha to stoler på alle bordene? Vi tester bare alle.

*Stille 60 sek

Transkripsjon 5: Gruppe 2, oppgave 1.

I denne gruppen er det Sander som skriver og forklarer, man kan anta at Pål ikke helt henger med i forklaringene, da han ikke sier så mye. Sander forklarer godt, men snakker fort og Pål prøver å henge med. Dersom Pål hadde vært den som hadde notert, hadde Sander blitt tvunget til å stoppe opp, sikret seg at Pål fikk med seg hva som var ment og hva som skulle noteres ned. Pål hadde kanskje også følt mer eierskap til arbeidet, og deltatt mer i å finne en løsning.

4.1.3 Oppdager hverandres feil

Når gruppene arbeidet med problemløsingen snakket de sammen og var flere hoder som tenkte sammen. Dette gjorde at misoppfatninger og feil ble fanget opp av medelever.

Kim: Kan vi bare skrive vi tror at, også skriver vi svaret? For eksempel 16+15 er 31.

Sandra: men det er jo ikke det vi skal gjøre nå, vi skal vite hvor mange stoler og hvor mange bord.

Det kan se ut til at Kim tenkte at de skulle finne regnestykker som ble 31, eller at han har tenkt rett i forhold til oppgaven, men formulerte seg feil. Dette fanget Sandra opp og repeterte hva oppgaven spurte om. Denne gruppen tenkte senere at da må det være 16 bord og 15 stoler, så de har nok misforstått oppgaven, etter veiledning fra lærer kom de inn på rett spor igjen.

Sandra: 1- 2 1- 2

Anna: Men han sa jo firer grupper ikke toer grupper.

Sandra: Åja.

Gruppen teller: 1-2-3-4......5-6-7-8.......9-10-11-12.......13-14-15-16

Anna: Det var alle, nå han du skrive 16 øverst og sette runding.

Sandra: 4-8-12-16

Transkripsjon 6: Gruppe 3, oppgave 1.

Dette utdraget er hentet fra diskusjon i gruppen senere i oppgaven. Gruppen har forstått oppgaven litt bedre og skal nå finne hvor mange bord de kan lage. Sandra begynner å telle med to om gangen, da retter Anna på henne og sier at oppgaven handler om firer-grupper, så teller gruppa sammen, med fire om gangen. Hadde Sandra jobbet alene med denne oppgaven kunne hun gitt svaret i toer-grupper, bare fordi hun husket feil eller ikke sjekket i oppgaven. Grunnet at de jobbet sammen, klarte gruppen å observere feil og rette på dem på en god måte. Dette eksempelet viser også at i gruppearbeid er gruppen sammen om å finne et svar, og at de lytter til og tolker andres ideer.

4.1.4 Støtte i klassen og hverandre

Alle oppgavene som ble gitt var utfordrende for gruppene, det viser da at oppgavene faktisk har vært problemoppgaver. Det var flere grupper som ville gi opp fordi det var vanskelig, eller som sluttet å tenke etter at de har funnet et svar som de tror stemmer. Gruppemedlemmene var gode til å støtte hverandre og til å hente hverandre inn igjen i oppgaver. I flere tilfeller var det elever som meldte seg ut av diskusjonen, noen begynte å tegne, noen snakket med andre grupper og noen begynte å lese i boka de hadde på pulten. I alle disse tilfellene var det elever på gruppen som ga beskjed om at eleven måtte være med. Da kunne de begynne å forklare igjen slik at eleven som meldte seg ut kunne vite hvor de var i løsningsprosessen.

Sander: Jeg hører at det er mange som ikke hadde forstått oppgaven, det hadde ikke vi heller.

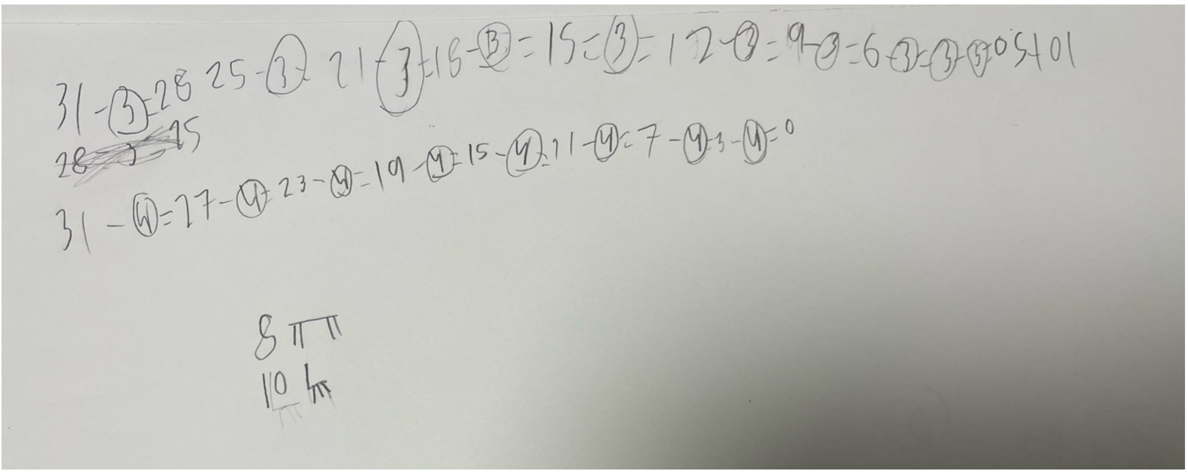
Transkripsjon 7. Gruppe 3, oppgave 1.

I transkripsjonen over var Sander og Pål umotiverte, de hadde funnet ut at det de hadde regnet ut ikke løste problemet, de måtte starte på nytt og tenke nytt. Sander ser og hører at det er flere i klassen som er i samme situasjon, og sier dette til Pål, deretter setter de i gang på nytt med å arbeide. Det virker som om de begge fant ny giv i at de ikke var alene i frustrasjonen rundt oppgaven.

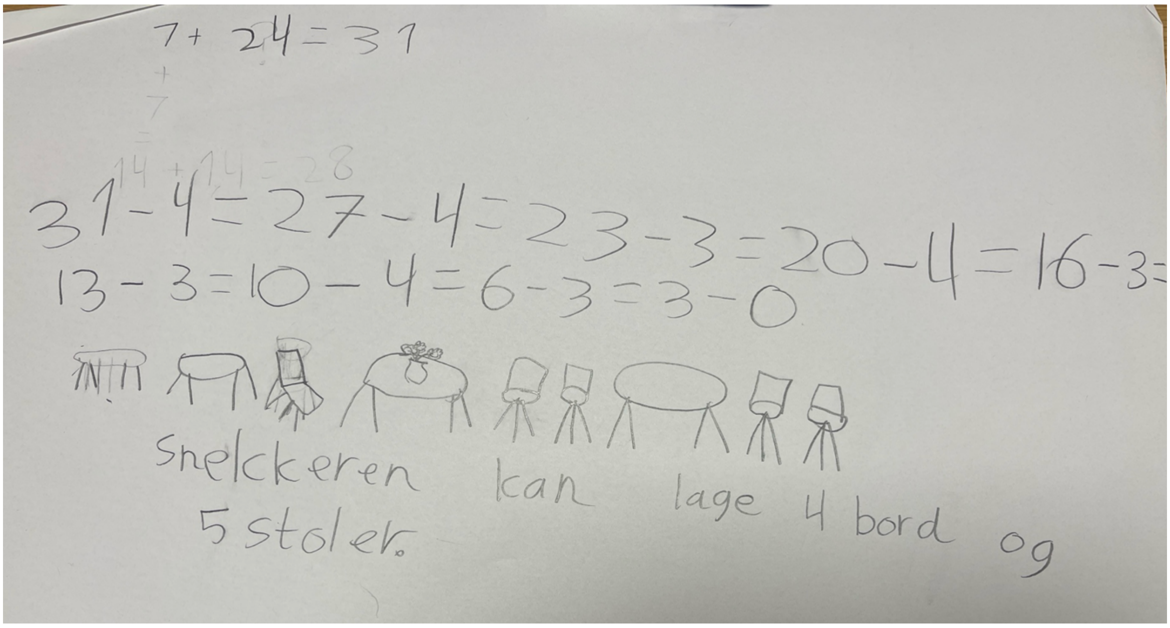
4.2 Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasertproblemløsing?

Elevene brukte ulike strategier, for å løse problemene som de ble gitt. Det var spennende å følge lydopptak og lytte til hvordan de bygget på hverandres ideer og forståelser for å komme til et svar som de alle kunne enes om. Elevene brukte ulike strategier, for å finne svar på oppgavene. I denne delen skal jeg presentere de ulike løsningsstrategiene, som gruppene har brukt. Det som er spennende med disse funnene er at løsningene kom uoppfordret og elevene fikk selv tolke og finne metode. Elevene er nye problemløsere, resultatene presentert i dette kapittelet viser hvor mye elevene kan få til i problemløsing.

4.2.1 Arbeide baklengs



Figur 4. Gruppe 1, oppgave 1

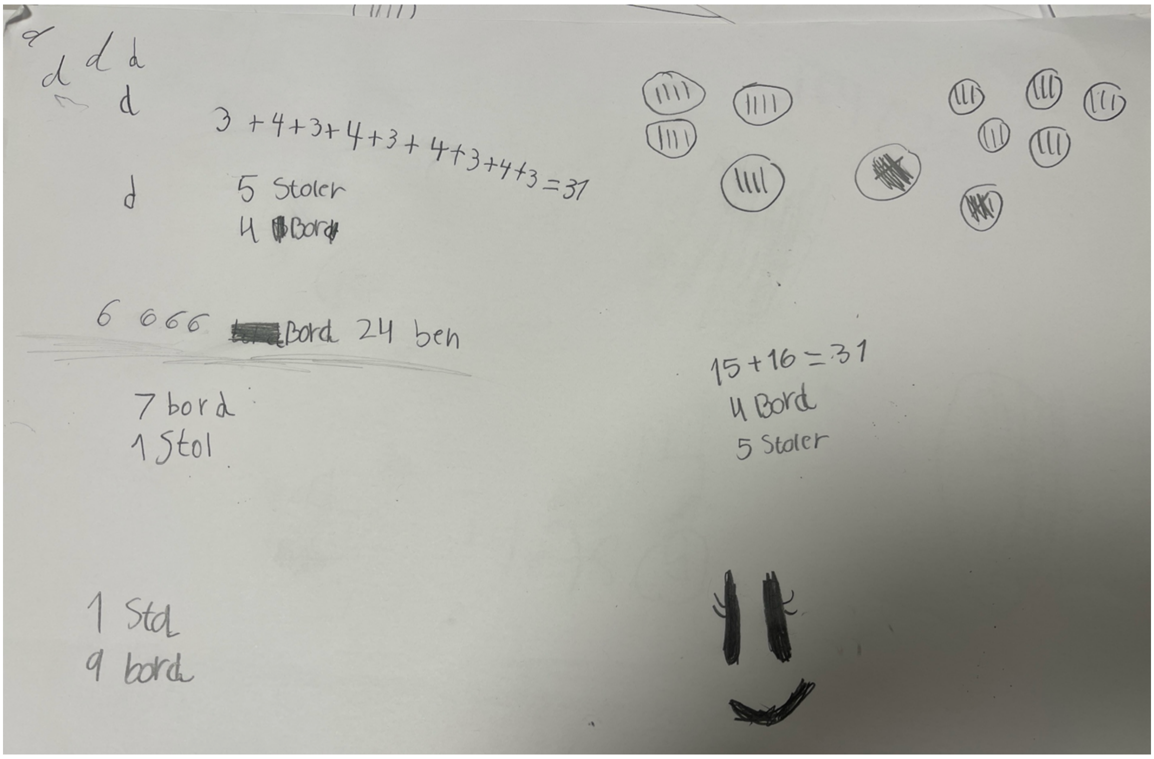


Figur 5.Gruppe 6, oppgave 1

Ovenfor på figur 1 og 2 kan man se at begge disse gruppene, har valgt å subtrahere bord og stoler for så å finne en løsning. Elevene begynte på hvor de skulle ende og subtraherte seg nedover til 0. På det første bildet, ser vi at gruppen fant to ulike løsninger, men at noe av utregningen ikke stemmer. Uansett var det ikke resultatet som var i fokus, det var prosessen. Begge disse gruppene har brukt en god metode, som fungerte for dem. På det øverste bildet ser vi at gruppen har tatt sirkler rundt tallene tre og fire, for så å finne ut hvor mange bord og hvor mange stoler som er subtrahert før de kom til null.

Elevenes løsning er ikke helt arbeide baklengs, siden de ikke har reversert regneoperasjonene, men elevene på begge gruppene snakket om at de kunne bruke både addisjon og subtraksjon for å løse oppgaven «ja det går ann å gjøre dette med pluss OG minus». Dette kan tyde på at elevene hadde en idé som kan ligne på å løsningsstrategien å arbeide baklengs, dermed ble denne strategien kategorisert som arbeide baklengs i denne oppgaven.

4.2.2 Gjett og sjekk



Figur 6. Gruppe 5, oppgave 1

Nils: Da tar vi 31 ben, vi kan hoppe 3-7-10-14-17-21-24-28-23, ja! Vi har funnet svaret

Kari: Hva da?

Nils: 3+4, 3+4, 3+4 helt til du kommer til 31, se

Pål: 3+4 er 7

Nils: Pluss 3 er ti pluss 4 er 14, pluss 3, er 17, pluss 4 er

Pål: 21

Nils: Ja pluss 3 da er det 24, pluss 4, er 28 pluss 3 igjen da er det 31

Kari: Du må skrive er lik

Pål: Ferdig!

......

Pål: Nei, men det må hvert fall være en annen måte enn det

Nils: Vi kan prøve 3 stoler og 5 bord.

Pål: 3 stoler og 5 bord?

Nils: Eller 6 bord.

Kari: Okey.

Nils: Okey 9 stoler da.

Pål: Eeh nei?

Nils: Nei, 9 bein, 3 stoler. Også 6 bord vent, 24, ja det går, eller neineinei, det blir 33.
Se 3 ganger 3 er 9 også 6 ganger 4 er 24, så 9+24 er 33 så det går ikke.
Kari: Går det ikke?
Pål: Dere forstår ikke, se her begynner dere.
Nils: Man må ikke tenke på det, man må tenke hvordan man jobber, bare rable det ut.
Pål. Jeg rabler ut når jeg gjør feil.

Transkripsjon 8. Gruppe 5, oppgave 1.

Denne gruppen brukte strategien gjett og sjekk. Nils fant en løsning innen de første tre minuttene, og delte dette med gruppen. Han brukte logiske resonnement for å addere seg opp til 31. På arket deres ser vi at de har prøvd flere kombinasjoner, de har krysset ut noe, for så å sitte igjen med tre svar på oppgaven. De prøvde seg frem med å addere litt og litt, og så justerte de utfra hva de hadde igjen av ben. Man ser i dialogen på gruppen, at etter de fant en løsning, har de funnet en strategi som de mestrer. Deretter prøver de med ulike mengder bord, de ser om det går opp i tre, eller opp i antall stoler. Gruppen har funnet tre gode løsninger, ved å gjette ett starttall, sjekke om det går opp i tre, og deretter justert deres gjett.

I oppgave 3 var det en annen gruppe som ønsket å prøve og feile eller gjett og sjekk, men møtte på en utfordring.

Silje: Hva a tenker dere her
Sander: Det er vanskelig siden den er ikke lik som den
Silje: Men tror du at det trenger å være likt som på tavlen?
Sander: Ja det tror jeg, siden da kan vi tegne hvor stort det er og da finne ut hvor mange blokker vi trenger.

Transkripsjon 9. Gruppe 2, oppgave 3.

Gruppen tenkte at de skulle måle hvor stor figuren var og måle hvor stor en flis var, deretter sette inn fliser, for å finne ut hvor mange fliser som trengtes for å fylle figuren. Tanken her er veldig god, de ønsket å ha helt like mål som på tavla, de klarer ikke å sette seg inn i problemet, med mindre det ikke er helt likt. På oppgaven står det tallene en og to, på sidene av flisene. Da det ikke er oppgitt centimeter eller måleenhet, var det flere grupper som følte at de måtte opp til tavlen for å måle, det var flere grupper som gjorde dette. Dette viser at disse elevene tolker oppgaven bokstavelig, og at de ikke har erfaring og kunnskap om forhold i sin matematiske kunnskapsbank. Gruppen klarte ikke å tegne opp figuren helt lik, så de satt lenge uten å si noe.

Sander: Adrian se

Adrian: 2+2+2+2+1?

Sander: Ja 2+2+2+2+1 er 9 og det er jo så lang figur 4 er

Transkripsjon 10. Gruppe 2, oppgave 3

Helt mot slutten kom gruppen frem til hvordan bunnen på figuren var bygget opp, og dette viser at de har fått en forståelse om at det ikke trenger å være likt, men at figuren er bygget opp av fliser med forholdet to og en. De fikk ikke nok tid til å komme i mål med oppgaven, men det ser ut som at de lærte noe underveis i arbeidet, om forhold og figuren. Gjennom å prøve seg frem, kom de til slutt inn på rett spor for å løse oppgaven, det tyder også på at de forsto oppgaven da.

4.2.3. Å se for seg problemet - Tegn et bilde, visualisere, figur og mønster

I gjennomgangen av lydopptakene av diskusjonene, på de ulike gruppene, ble det tydelig at det var flere av elevene som syntes at det var vanskelig å forstå oppgaven. Dette kom frem i utrykk som «jeg forstår ingenting», «dette gir ikke mening» eller «dette var vanskelig». Elevene brukte litt tid på å forstå hva oppgaven faktisk spurte etter. Etter samtale med lærerne i klassen, tenker jeg at dette kommer av at elevene ikke er vant med å bruke tid på å forstå oppgaver. En vanlig matematikk-økt for disse elevene, består av en gjennomgang eller en repetisjon, hvor lærer og elever har en diskusjon rundt en oppgave eller et matematisk emne. Deretter viser læreren oppgavene som elevene skal jobbe med, de forklarer oppgavene og viser eksempler på strategier som kan brukes for å finne svar. Dette er en kontrast til hvordan dette gruppearbeidet rundt problemløsing ble gjennomført. I arbeidet fikk elevene lest opp oppgaven, og ble deretter satt i gang til å finne løsninger i grupper. Da er det ikke rart at mange sin første reaksjon var at de ikke forsto helt.

Thea: Det er litt vanskelig siden jeg forstår ikke helt

Lærer: Hvor mange ben hadde et bord?

Per: 3

Lærer: Var det 3?

Per: Nei, det var 4.

Svein: Det var stolen som hadde 3.

Lærer: Hvordan kan man tenke da?

Thea: Jeg vil liksom telle nedover, da har vi liksom 28, også tar vi minus når vi har tatt det.

Lærer: At du tar 31, også minus en stol?

Thea: Ja 3 og 3 eller 4, da kan man liksom først gå ned med 3, så blir 31 til 28. Se her, nå har vi 28 igjen, så tar vi 28 minus 3

Svein: Ja, også med et bord er det 7.

Thea: Ja Svein! Forsett sånn videre.

Svein: Nå har vi 10, så kan vi ta kanskje 1 til bord. Jeg har ikke flere blyanter

Thea: Jeg kan hente flere blyanter til deg.

Svein: Kan vi ikke tegne 16?

Transkripsjon 11. Gruppe 5, oppgave 1

Flere av gruppene tok i bruk konkreter i et forsøk på å forstå oppgaven, eller for å finne en løsning. I den første oppgaven brukte gruppe 4, blyanter for å bedre forstå problemet. De la blyantene i grupper, for å finne ut ulike kombinasjoner av treer- og firer-grupper som til sammen ble trettien. Transkripsjonen over viser en ide som Svein kom opp med, før dette var det kun han som hadde forstått hva de egentlig skulle finne ut. Ved å visualisere blyantene som bena, som snekkeren brukte, fikk han med seg hele gruppa på å finne flere ulike løsninger. Svein tar frem blyantene etter at Thea har gitt utrykk for at hun ikke forstår, i utdraget kan man se at Thea blir mer med på fremgangsmåten og forstår mer av hva oppgaven går ut på. Når alle på gruppen hadde en forståelse av hva de skulle finne ut, fant de flere strategier for å finne svar. Mens de la opp blyantene, diskutere gruppen at dersom de hadde trettien ben og subtraherte seg nedover til null, ved å trekke fra tre eller fire, så ville de finne svar med blyantene. De begynte deretter å ramse opp addisjonsrekker som ga samme svar. Deretter snakket gruppen om at man kan bruke multiplikasjon for å finne svar på oppgaven. Denne gruppen viser et godt eksempel på hvor viktig det er å forstå hva man gjør, og ikke bare gjøre det. Da alle på gruppen hadde en felles og klar tanke av hvor målet for oppgaven var, klarte de å utnytte det matematiske potensialet i oppgaven og de fikk en god matematisk diskusjon. Sammen fant de flere veier til dette målet, de oppdaget organisk sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon, men også sammenhengen mellom addisjon og multiplikasjon. De klarte å vise oppgaven praktisk og vise på arket hvordan de hadde tenkt, ved å tegne det som oppgaven spurte om.

Nils: Vi trenger linjal

Pål: Hvis vi tegner brønnen så blir det kanskje lettere

Kari: Jeg tegner sneglen

Pål: Vent Nils

Nils: Den må være 10 meter, nei 10 cm. Vi later som 1cm er 1m

Pål: Så tegner vi 3 opp og 2 ned

Nils: Vi kan gå opp og ned på linjalen

Kari: Vi kan tegne sneglen

Nils: 3 opp 2 ned, 3 opp 2 ned

Pål: Men Nils, jeg forstår ikke,

Nils: Men se, vi går opp og ned og teller hvor mange ganger. Nå bruker vi linjal. På 3 dager så er vi der

Transkripsjon 12. Gruppe 5, oppgave 2.

Mange av gruppene valgte å visualisere i form av tegning i løsningsprosessen. Alle de 18 arkene, som ble samlet inn, hadde en form for visualisering i form av tegning. Noen brukte også tellestreker, figurer eller tallinjer. Disse illustrasjonene tegnet de fleste gruppene tidlig i problemløsingsprosessen. Mange av tegningene minnet om illustrasjonene til oppgaven.

Lise: Burde vi ikke gjort oppgaven før vi tegner?

Mats: Hva som er svaret?

Fredrik: Vet ikke, hvordan tegner du en brønn?

Lise: Men skal vi gjøre selve oppgaven, oppgaven er ikke å tegne

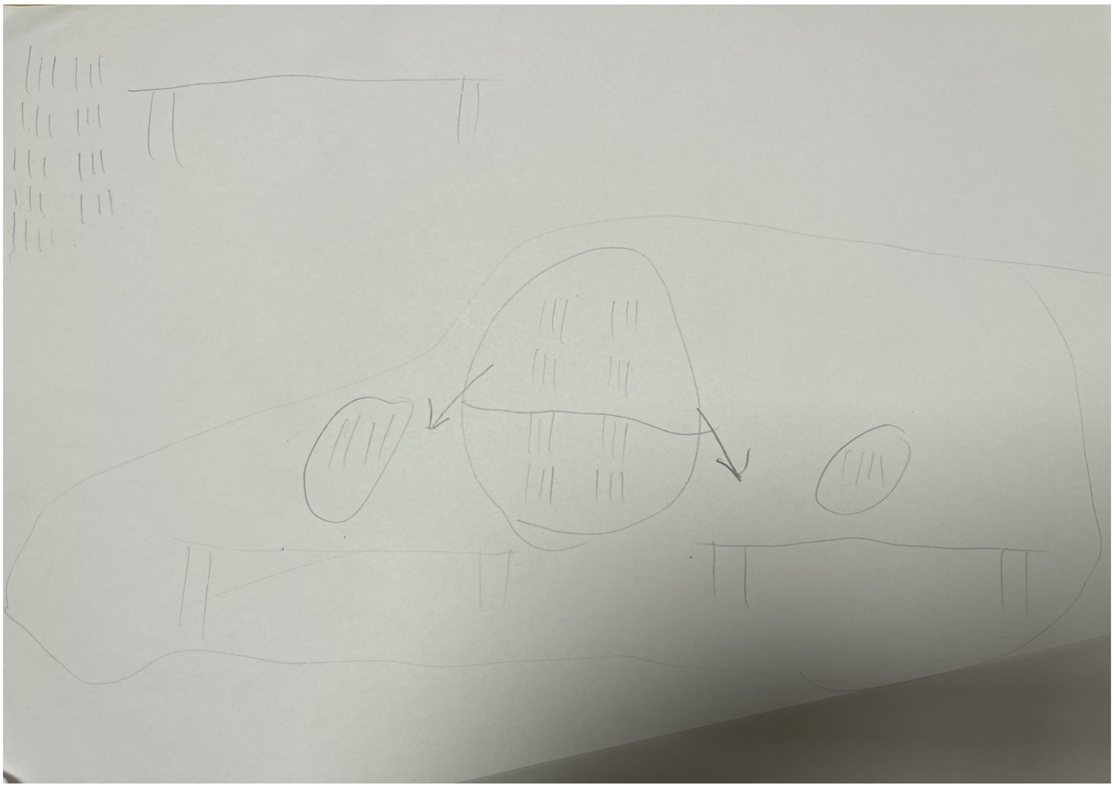
Fredrik: Ja det kan vi

Mats: Men tegningen kan gi oss svaret.

Transkripsjon 13. Gruppe 1, oppgave 2.

Flere elever tegnet, for mange av gruppene føltes det ikke helt som en vei mot en løsning på oppgaven. Som dialogen over viser, så mener Lise at man burde gjøre oppgaven før de tegner. Dette kan vise til at noen elever tenker at tegning ikke hører hjemme i matematikken, og at tegning kan ikke være en løsningsmetode. Mats derimot har en forståelse for at teningen er en del av en matematisk prosess, at tegningen kan visualisere for gruppen hva de skal finne ut. Altså for å forstå oppgaven, samtidig som de kan bruke tegningen for å finne et svar.

Bildet under viser en gruppe, som tegnet for å visualisere hva de har tenkt på, på en effektiv måte. Elevene tegner grupper på tre, som skulle illustrere stolene og bord med fire ben.



Figur 7. Gruppe 5, oppgave 1, 2. side av ark.

Svein: 30-29-28.27-26.25-23-22-21-20-19, så nå har vi 19, så må vi ha 1 bord

Thea: Ja, men nå forstår jeg ikke, skulle vi ikke finne ut hvor mange stoler vi har?

Svein: Ja vent, hvor mange stoler har vi brukt. 1-2-3-4-5-6 ... her er det 12 ben. Vi har 12 bein.

Thea: Men for at vi skal vite det må vi liksom ta dem i grupper igjen. Liksom 3 og 3

Svein: Åja sånn ja

Thea. Ja, vi bruker liksom opp bein

Svein: Ja, da lager jeg grupper.

Thea: Hvor mange har vi liksom

Svein: Vi har brukt 12 bein, vi har 19 igjen. Minus 4. Men hvor mange hadde vi igjen?

Thea: Okey, Per du må høre etter

Per: Ja

Thea: Så bra

Svein: Nå har vi 15 bein igjen. Vi kan ta mer stoler.

Thea: Kan vi ikke ta et til bord?

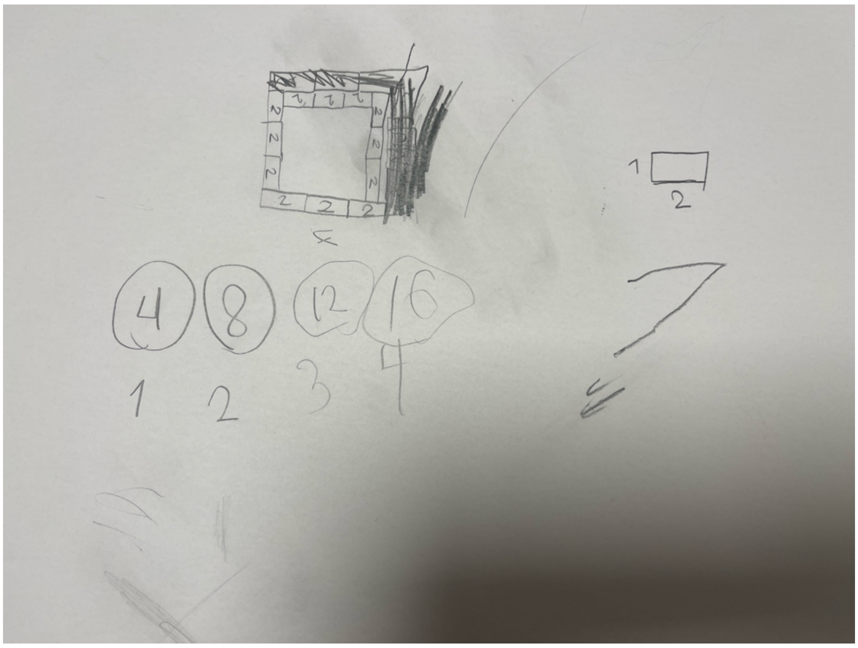
Svein: Jo vi kan ta et til bord. 15-4=11

Thea: Også mer stoler

Transkripsjon 14. Gruppe 4, oppgave 1.

I starten av transkripsjonen over, ser vi at Thea sier at hun ikke forstår. Svein har tenkt at de trekker fra bord og stoler, men Thea og Per følger ikke helt med på hvordan han gjør dette. Dermed begynner han å tegne opp, slik som på figur 7, da blir det tydelig at Thea blir mer aktiv og forstår bedre hvordan Svein tenkte opprinnelig. Dette er et eksempel, som også viser godt hvor viktig det er å kunne forklare egen matematisk tenkning på flere måter. Svein viser at han jobber med en metode, som han har god forståelse for. Han klarer å forklare på ulike måter og han klarer å forklare på måter, slik at alle på gruppen klarer å henge med i hans ideer.

Det var flere grupper som så et mønster i oppgave tre (vedlegg 3). Noen av gruppene brukte mønster for å forstå problemet, for noen grupper var dette en del av løsningen. De aller fleste gruppene kommenterte tallrekken tre-fem-sju, som var lengden av kvadratene. Disse lengdene var oppgitt i illustrasjonen. Via dette resonnerte de fleste gruppene seg til at figur 4 måtte ha en lengde på ni.



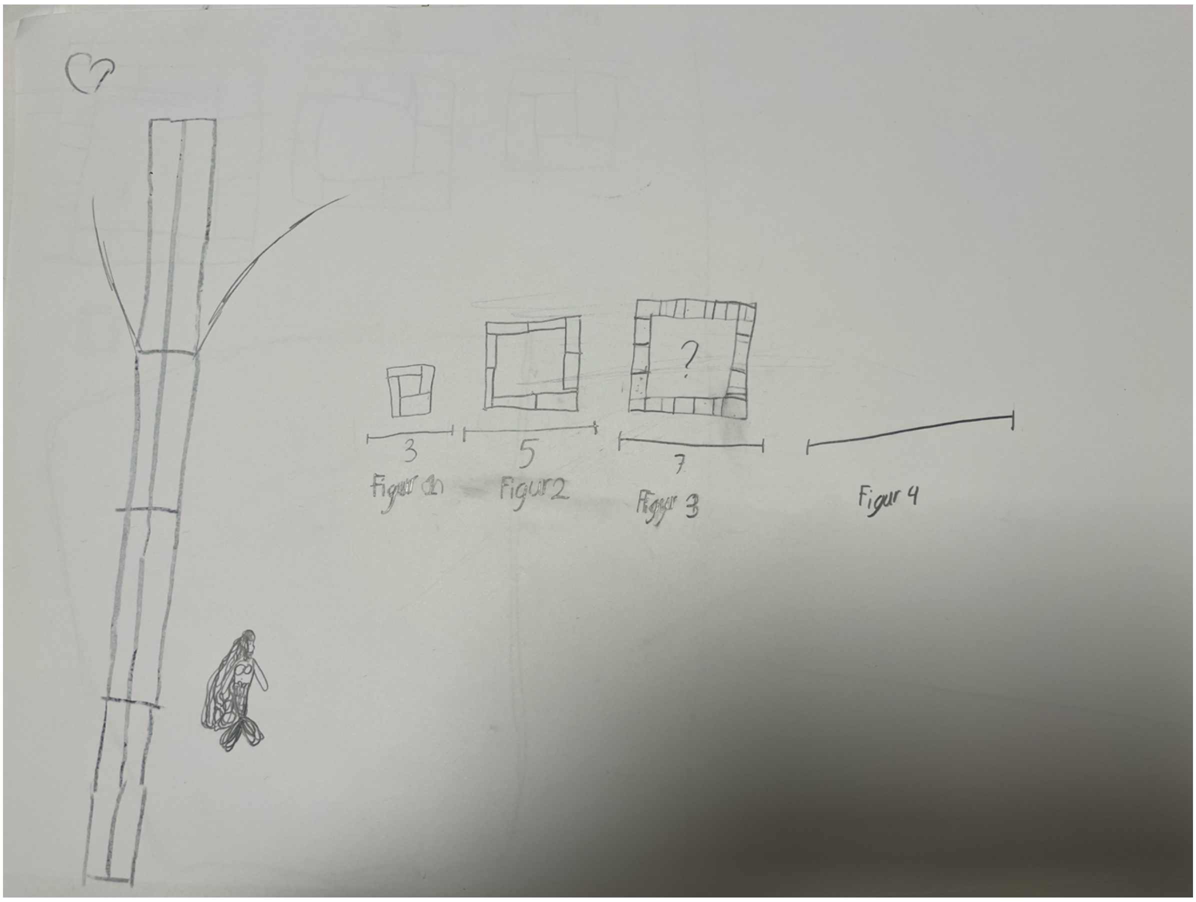
Figur 8. Gruppe 6, oppgave 3

Gruppe 6 så på lengdene og deretter fant de ut hvor mange fliser som ble brukt i figur 3. På bildet ovenfor ser man at gruppen har tegnet opp forkanten med lengde sju, de så at for å lage en side som var sju, måtte de sette sammen 2 + 2 + 2+ 1, dette tegnet de opp. Deretter telte de at det var tolv fliser i figur 3. Da så de et mønster. Elevene kommenterte at det «hoppet med fire», og dermed måtte figur 4 ha fire mer fliser enn figur 3. I denne løsningsstrategien brukte elevene den sammensatte kunnskapen de hadde om tallrekker, mønster, geometri, multiplikasjon og addisjon.

> Lærer: Har dere funnet ut av det, ser dere tegner figur
>
> Mats: Også to prikker, så skriver du 13.
>
> Lise: Men hva med figur 4?
>
> Mats: Figur 4 er 17
>
> Fredrik: Da skriver jeg figur 4
>
> Mats: Og neste er 21

Transkripsjon 15. Gruppe 1, oppgave 3.

Denne gruppen har også sett et mønster. Utdraget er hentet fra helt i slutten av aktiviteten, gruppen hadde akkurat funnet svaret tretten på figur 3, svaret tretten skyldes en slurvefeil. Når Lise spør om figur 4, har allerede Mats svaret. Han hadde sett et mønster, at det økte med like mange på hver figur, dermed svarer han med en gang sytten. Sytten er rett i forhold til svaret de hadde på figur 3. Det at sytten blir feil, er en følgefeil, det er tydelig at de har funnet et mønster i figurene.



Figur 9. Gruppe 3, oppgave 3.

Denne gruppen har også valgt å bruke symmetri og mønster for å løse problemet. Man kan se på figur 3 i deres notatark at de har visket ut inndelingen flere ganger. Elevene gjettet og sjekket ulike kombinasjoner for å få den oppgitte lengden, som var sju. De så at figuren var symmetrisk og dermed at sidene måtte bestå av et likt antall fliser. Denne strategien består ikke bare av å bruke symmetri, men også gjett og sjekk. Elevene gjettet et antall, visket ut og prøvde igjen. De hadde sett mønsteret.

> Anna: Visk Sandra jeg glemte en
>
> Kim: Hallo, jaa. Det må øke med 4 siden der er det 3 også der nede er ...
>
> ...
>
> Sandra: Jeg visker
>
> Anna: 3- 4- 5- 6- 7- 8- 9- 10 -11- 12, ja
>
> Sandra: Hø: jaaaa
>
> Kim: Da kan vi bytte ut spørsmålstegnet
>
> Sandra: Vi må spørre læreren om 12 er svaret. Lærer!!
>
> Anna: Urh hun sier ikke om det er rett eller ikke.

Transkripsjon 16. Gruppe 3, oppgave 3

Gruppe 3 diskuterer nå figuren sin, de visker ut når de gjør feil, og Kim ser at de må øke med fire for hver figur. Dette ser han etter at de har tegnet og visket ut flere ganger. Noe som tyder på at prosessen med å tegne, gjette og sjekke, se etter symmetri og se etter mønster, er alle strategier som har bidratt til at denne gruppen fant en løsning.

4.2.4 Gå tilbake til start

I arbeid med problemløsing, kan man oppleve at man prøver ut noe som man merker at ikke fungerer. Da kan det være lurt å se tilbake og tenke nytt, det gjorde gruppe 1, i snegleoppgaven.

> Fredrik: Det er 60 dager og 6 timer
>
> Lise: Hæ? Hvordan kan det være timer?
>
> Fredrik: Nei, det ble feil
>
> Mats: Vi må tenke på at han går opp 3 på dagen og når han sover går han ned 2
>
> Fredrik: Men det er 6 timer der
>
> Mats: Men vi vet ikke hvor mange dager det er, men jeg tipper 57, hva hvis vi tegner en snegle og ser hvor langt han går.

Transkripsjon 17. Gruppe 1, oppgave 2.

I samtalen over, ser vi at Fredrik har gjettet at sneglen bruker seksti dager og seks timer. Dette er en påstand som han ikke begrunner. Lise lytter til forslaget og reagerer på at svaret har timer i seg. Fredrik mener også at det må være feil. Gruppen har diskutert en stund og ikke kommet frem til en løsning som gruppen har tro på. Mats sier "vi må tenke på at han går opp tre på dagen og når han sover går han ned to." I dette utsagnet virker det som at Mats tenker at de må begynne tankeprosessen på nytt. Han går tilbake til oppgaven, ser på hvilken informasjon oppgaven gir og på hva de egentlig vet om problemet. Dermed kan de starte nye tankeprosesser på veien til et svar i denne oppgaven.

> Fredrik: Det har gått 3 dager, så går han opp der, så går han ned igjen, da har det vært 4 dager også opp og ned nå er det 5 dager nei, så kommer han opp sånn. Opp her på 4 dager. Også når han er her er det 5 dager, på 5 dager så kommer han opp.
>
> Mats: Men det er 6 også, tror det er 6
>
> Fredrik: Vent, vi er på 7
>
> Mats: Ja, nå er det 7, så går den opp en gang, nei så går den opp.

Fredrik: Hvor mange telte du?

Mats: 8 ganger!

Transkripsjon 18. Gruppe 1, oppgave 2

Etter litt frem og tilbake kommer gruppen frem til riktig svar på oppgaven. Løsningsstrategien som de brukte, var at de tegnet en snegle i en brønn og telte hvor mange ganger de gikk opp og ned, altså hvor mange dager sneglen brukte. For å komme frem til denne strategien måtte de gå bort fra sin opprinnelige løsningsmetode og gå tilbake. De så på hvilken informasjon oppgaven ga dem, og ved å tegne opp problemet på arket, klarte de å forstå hva oppgaven handlet opp, noe som hjalp dem til å velge en passende strategi.

4.2.5 Sette prøve på svar

I dataene fra denne studien kom det frem at elevene så på oppgavene, som noe som skulle løses. Elevene som hadde kommet frem til et svar, ropte ofte ut at de var ferdig, eller rakk opp hånden for å fortelle at de var ferdig, for å deretter få en bekreftelse på om svaret var rett eller galt. Dette skjedde, selv om det ble gitt beskjed i oppstarten og underveis at svaret ikke var det viktigste, og at dersom de fant en løsning, så ønsket vi at de skulle prøve å finne en annen løsning. Slik ble det ikke. De aller fleste gruppene fant ikke flere metoder, selv om de utforsket flere metoder, frem til de fant en som fungerte for dem.

Elevene spurte om svaret ble rett eller galt, og de ble i de fleste tilfeller bedt om å forklare hva de selv trodde, eller om hvorfor de trodde svaret var rett. Dette var det tydelig at elevene ikke hadde gjort så mye. Det var noen grupper som mente at om dersom flere på gruppen regnet likt, så var nok svaret rett. For eksempel gruppe 5, som vist i transkripsjonen under. Pål kommer med en påstand om at dersom Nils får samme svar som han har regnet ut, så er det uansett rett.

Pål: Kan du finne visk, enten er det rett eller så er det feil. Nils du må regne

Nils: Ja Okey

Pål: Hvis du får det samme, så er det uansett rett

Nils: Jeg må regne på et ark, siden jeg har ikke nok fingre, når jeg kommer opp til 6 så klarer jeg ikke å regne videre.

Transkripsjon 19. Gruppe 5, oppgave 2.

De fleste andre gruppene sa seg fort fornøyd med svaret de hadde fått, dersom de ble spurt om hvorfor de trodde svaret deres var rett, svarte de med å forklare fremgangsmåten de hadde brukt.

4.2.6 Ser på kjente problem

Elevene brukte sine matematiske kunnskaper i arbeidet med problemoppgavene. Gruppene jobbet med samme oppgave, de løste allikevel problemene på ulike måter og de brukte ulik matematisk kunnskap. Et interessant funn er at en gruppe henviser til et problem de har løst før, for å komme frem til en metode på et nytt problem.

> Thea: Vi kan tegne, sånn vi gjør med bord og stol oppgaven

Transkripsjon 20. Gruppe 5, oppgave 2.

Dette var undervisningsøkt 2. Dagen før jobbet de med bord og stol oppgaven, gruppen tegnet da opp problemet og brukte tegning på en effektiv måte for å løse problemet. Thea foreslår i gruppa at de kan bruke samme løsningsstrategi i dette problemet, som de brukte i et annet kjent problem.

> Per: Så den må ...
>
> Svein: Vent se, har noen en blyant. Jeg kan tegne på mint pult
>
> *Svein tegner opp figurene på papiret
>
> Svein: Liksom hvor mange sånne er det på en
>
> Per: Åja nå forstår jeg, hvor masse skal det være på 4 og 3

Transkripsjon 21. Gruppe 4, oppgave 3.

Ovenfor ser vi transkripsjon fra samme gruppe, men i økt 3. Utdraget er det første som blir sagt etter at de har lest oppgaven. Svein er raskt ute med å prøve å tegne problemet. Dette kan tyde på at Svein husker at i oppgave 1 og i oppgave 2 ble det lettere å løse oppgaven, dersom man tegner det opp. Gruppen har funnet en metode, som de syns er effektiv og bruker tidligere erfaringer til å sette i gang med problemløsingen.

5 Diskusjon

Gjennom datainnsamlingen fant jeg flere interessante. Funnene er drøftet i resultatdelen. Funnene presentert i oppgaven er med på å belyse min problemstilling: «Hvilke løsningsstrategier bruker elevene på 3. trinn i arbeidet med samarbeidsbasert problemløsing i matematikkfaget.». I arbeidet med å analysere datamaterialet, så jeg at det var nødvendig å dele problemstillingen opp i to forskningsspørsmål: «hvordan kan samarbeid påvirke problemløsingsprosessen?» og «hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing?». På grunnlag av forskningsspørsmålene, har jeg valgt å dele diskusjonsdelen på lik måte som i kapittel 4. Resultatene vil bli drøftet i lys av relevant tidligere forskning og teori. Delen som omhandler samarbeidet, er relevant for å skille mellom arbeid med et problem alene, og arbeid med et problem sammen med andre. Jeg vil også se på hvordan samarbeidet kan påvirke hvilke løsningsstrategier som blir brukt. Liljedahl og Cai (2021) skriver om hvordan forskning på problemløsing lenge kun handlet om individuelt arbeid, og de belyser hvor lite innsikt dette ga i elevenes tanker (Liljedahl & Cai, 2021). Samarbeidet er en sentral del av denne oppgaven, for å belyse hvilke strategier tredjeklassingene har brukt for å løse problemene.

5.1 Hvilke påvirkninger kan samarbeid ha i problemløsing?

Samarbeid og matematiske diskusjoner kan gjøre at elever opplever arbeidet som mer meningsfylt (Wæge & Nosrati, 2022). Etter flere år med forskning er det tydelig at samarbeidslæring rundt problemløsing er gunstig (Medaille & Usinger, 2020). I en internasjonal studie der, blant annet norske 1 og 2. klassinger deltok, konkluderes det med at læringsutbytte til elevene er best når de arbeider i grupper, og mye individuelt arbeid kan i noen grad virke negativt for læringsutbyttet i matematikk (Olafsen & Maugesten, 2015). Likevel er det slik at i Norge er individuelt arbeid den klart mest dominerende arbeidsformen i klasserommet, noen elever opplever nesten aldri, eller aldri, å arbeide i grupper (Wæge & Nosrati, 2018). Dette kan komme av at læreren kan føler et press på å følge læreboka, isteden for å hjelpe elevene å få en forståelse av matematikken (Torkildsen, 2017).

Læreren setter av lite tid til å arbeide i grupper, jeg ønsker å belyse påvirkninger som samarbeid har på problemløsing. For å se på hvordan samarbeidet påvirker læringen og forståelsen til elevene.

5.1.1 Ressurser i klasserommet.

Liljedahl (2021) mener at i et klasserom med god kunnskapsmobilitet, blir læreren mer frigjort. Dette fordi læreren ikke blir den eneste kilden til ny kunnskap (Liljedahl, 2021). I kapittel 4.1.1 legges dette frem som et resultat i denne studien. Læreren ble frigjort når elevene arbeidet med samarbeidsbasert problemløsing. Dette resultatet er bekreftet i analysen, hvor det kom frem at læreren ble stilt få spørsmål og at læreren fikk mulighet til å bruke tid på enkeltgrupper som trengte hjelp. Dette resultatet ble vurdert å ikke kommentere da fokuset på oppgaven er på elevene og ikke læreren i problemløsingsprosessen, men det ble vurdert at dette funnet var så markant og påvirket elevene i positiv forstand, og ble dermed tatt med. Resultatene viser at gruppene bruker hverandres kompetanse og ideer for å komme seg videre i løsningsprosessen (Liljedahl, 2021). Gjennom samarbeid i grupper kunne elevene bruke hverandres ulike kunnskaper og ideer, og sammen prøve ut løsningsstrategier. Dette tyder på at det var god kunnskapsmobilitet i det klasserommet hvor datainnsamlingen foregikk. Dette kan også sees i en sosiokulturell kontekst. Elevene får være i sin proksimale utviklingssone, når de arbeider med en kompetent annen. I denne studien er den kompetente andre, medelever. Dette er med på å frigjøre læreren, da elevene støtter seg på kunnskapen innad i gruppa (Vygotsky et al., 1978). Johnson (1984) beskriver samarbeid som en prosess, der elever opplever at de er gjensidig avhengig av hverandre, for å nå et felles mål (Johnson, 1984). Dette kan også være med på å forklare hvorfor elevene ikke er så avhengig av hjelp fra en lærer i gruppearbeidet. Det kan se ut til at elevene har en sterk gruppefølelse når de arbeider i gruppene, og at de leter innad i gruppen etter svar, heller enn utenfor (Johnson, 1984). I kapittel 4.1.1, ser vi en dialog i en gruppe, som ikke helt forstår oppgaven, allikevel er det ingen i gruppen som slutter å jobbe, de bygger videre på hverandres ideer og prøver å komme frem til en løsning. I følge Liljedahl og Cai (2021), kan samarbeid i matematikkundervisningen føre til en dypere forståelse og øke elevenes motivasjon (Liljedahl & Cai, 2021). At gruppearbeid fremmer motivasjon i matematikken, kan være en grunn til at elevene i denne gruppen ikke gir opp i arbeidet, men heller jobber videre mot en løsning. Liljedahl og Cai (2021) legger også vekt på at i gruppearbeid får elevene brukt flere ressurser enn seg selv, både innad og utenfor gruppen. Samtidig som de to forfatterne igjen knytter arbeidet til det sosiokulturelle som nevnt ovenfor (Liljedahl & Cai, 2021). Liljedahl og Cai beskriver at en fordel med samarbeidet er at elevene bruker ressurser innad og utenfor gruppen, dette kan sees i lys av intragruppeavhengighet og mellomgruppeavhengighet (Liljedahl, 2021). Altså at gruppene bruker ressurser i og utenfor gruppen som kunnskapskilder (Liljedahl, 2021).

Overvekten av spørsmålene som læreren fikk, handlet om at elevene søkte en bekreftelse fra læreren om de hadde fått rett svar, dette beregnes som stop thinking questions (Liljedahl, 2021). Disse spørsmålene kommer av at elevene kan syntes at noe er for vanskelig eller at elevene ikke evner å evaluere om svaret er rett. Det var et fåtall av gruppene som gikk tilbake i oppgaven for å selv sjekke om svaret var rett, dette blir diskutert mer i kap. 5.2.7. En annen grunn til at eleven stiller stop thinking questions, kan være at elevene har lav selvtillit på egne ferdigheter i problemløsingen, og at de derfor søker bekreftelse fra andre, i dette tilfellet læreren (Ahlberg & Moen, 1999). I studien mottok læreren spørsmål relatert til oppgaven, en gang. Dette betegnes som et keep thinking question. I dette tilfellet strevde gruppen med å forstå problemet, dermed spurte de læreren. Læreren forklarte spørsmålet og gruppen startet arbeidet (Liljedahl, 2021). At gruppen stilte dette keep thinking spørsmålet, var avgjørende for at de skulle komme i gang med arbeidet. I følge Polya er det avgjørende å forstå problemet før man setter i gang, og at arbeidet da blir lettere (Polya, 2014). Man løser også problemet raskere dersom man har forstått problemet (Olafsen & Maugesten, 2015). Omtrent hver gang læreren eller jeg lyttet til gruppediskusjonen, stilte elevene spørsmål eller kom med utsagn, altså proximity questions. Disse spørsmålene var både keep thinking og stop thinking questions, aller mest var det stop thinking spørsmål. I følge Liljedahl (2021) er dette fordi elevene ønsker å vise læreren at de arbeider. Det kan også være tilfelle i denne studien. Stop thinking spørsmålene var spørsmål som gruppen kunne finne svar på selv, dette kan jeg si fordi jeg og læreren hadde avtalt å bare svare med spørsmål tilbake. Når elevene ikke fikk svar på det de lurte på, diskuterte de videre og fant svarene selv. Dette styrker Liljedahls tanke om at elevene stiller stop thinking questions fordi de synes det er slitsomt å tenke selv (Liljedahl, 2021).

5.1.2 Ansvarsfordeling

Gjennom analysearbeidet kom det frem at tre av seks grupper, valgte å ha en person på gruppen som forklarte og en annen person som noterte på arket. Gruppene i denne studien fikk bare en blyant per gruppe, de fikk informasjon om at de skulle skrive ned hva de tenkte underveis når de løste problemene. I de gruppene som fordelte oppgavene, med at en elev noterte og en annen elev forklarte, fulgte de fleste elevene resonnementene og forsto hvordan oppgaven ble løst. Dette samsvarer med hva Liljedahl (2021) har funnet ut gjennom sin forskning. Han forklarer dette med at elevene blir avhengig av å forklare godt hva de tenker til de andre gruppemedlemmene, slik at tankene kan bli overført til arket (Liljedahl, 2021).

(kap.2.7.4). Det at ikke samme person både skriver og presenterer ideen, er med på å sikre kunnskapsmobiliteten innad i gruppen (Liljedahl, 2021). Når elevene blir nødt til å forklare hva de gjør, blir det god kunnskapsmobilitet i gruppen.

Det er også interessant at i de gruppene hvor en elev forklarte og en annen noterte, valgte gruppene å jobbe etter denne metoden hver gang. Denne arbeidsmetoden gjorde at flere på gruppen var aktive og deltok i problemløsingen. Dette kan komme av at elevene får en avhengighet til hverandre. Elevene må bruke hverandre som ressurser og involvere seg i hverandres ideer og tanker for å kunne henge med i resonnementene (Johnson, D. W.1984). Når en elev noterer og en annen forklarer så økes avhengigheten av at elevene forstår hverandre, altså avhengigheten av hverandre økes. Dersom en eller flere på gruppen melder seg ut, kan det føre til at arbeidet stopper opp eller at elevene får mindre utbytte (Johnson, D. W.1984). Det at disse gruppene valgte å arbeide på lik måte hver gang, kan også handle om at elevene ikke har mye erfaring med samarbeidsbasert problemløsing. Derfor kan det være tilfeldig at de valgte og fordeler arbeidsoppgaver på denne måten første økt, og deretter laget de seg en erfaring til dette, og tenker at det er slik man skal arbeide (Lyngsnes & Rismark, 2016).

Det å fordele arbeidsoppgavene fører også til et samhold i gruppen, og flere av elevene kan føle seg inkludert og viktige for arbeidet. Gode samarbeid kan føre til at elever føler at de har noe å bidra til i gruppa (Wæge & Nosrati, 2018). Bare det å være den som skriver eller den som forklarer kan være med å styrke følelsen av tilhørighet til gruppen (Keagan, 1994).

Det kom frem i studien at i gruppene som ikke jobbet på denne måten var det flere som ikke hang med i resonnementene, eller som begynte og melde seg ut av gruppen. Wæge og Nosrati (2018) mener at i noen tilfeller kan det være tilstrekkelig å bare sette en gruppe elever sammen for at samarbeidet skal fungere. De legger også vekt på at dårlige samarbeid kan føre til at en i gruppen tar all styringen og at de andre ikke slipper til med sine tanker, eller det motsatte, at ingen tar ordet og at diskusjonen stopper opp (Wæge& Nosrati, 2018). Det kan derfor tyde på at i samarbeid der en på gruppen forklarer og en annen noterer, heves kvaliteten på samarbeidet.

5.1.3 Oppdager hverandres feil og opplever støtte fra hverandre og i gruppen

Når elevene samarbeider, blir de nødt til å lytte til andres tenking. De må også ta innover seg og forstå hva den andre tenker, og evaluere denne informasjonen (Ahlberg & Moen, 1999). Det er et kjerneelement i læreplanen (LK20) i matematikk at elevene skal: *komme med egne resonnementer, følge andres resonnement, begrunne resonnement, bevise, bruke matematisk språk, ha matematiske samtaler og begrunne matematiske valg* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Ahlberg & Moen (1998) mener at mange barn kan føle på en usikkerhet til egne evner i matematikk. Når elevene jobber sammen kan de lene seg på hverandre og de kan oppleve støtte, da de kan se at de ikke er alene om å syntes at noe er vanskelig (Ahlberg & Moen, 1999).

> Sander: Jeg hører at det er mange som ikke hadde forstått oppgaven, det hadde ikke vi heller.

Transkripsjon 22. Gruppe 3, oppgave 1.

I dette sitatet kan vi se at Sander ser seg rundt i klasserommet og lytter til de andre gruppene. Han finner trøst og motivasjon i at han ikke er alene om å ikke ha forstått oppgaven. Sander deler dette til gruppen og de fortsetter arbeidet. Dette er et godt eksempel på at elevene kan finne støtte i hverandre, slik som Ahlberg & Moen (1998) presenterer. Det at Sander lyttet til de andre gruppene kan tyde på at det er god kunnskapsmobilitet i klasserommet. Sander brukte ressurser utenfor gruppen (Liljedahl, 2021). Mer nøyaktig brukte han den første formen av kunnskapsmobilitet: *medlemmer av en gruppe går ut til andre grupper for å låne en ide for å ta med tilbake til deres gruppe (*Liljedahl, 2021, s. 48*).* Det kan være at Sander ønsket å få noen hint om hvordan de skulle forstå eller komme i gang med problemet når han lyttet til gruppene rundt, men han fikk heller en bekreftelse på at deres gruppe ikke var alene i usikkerheten, og fant nytt mot i dette (Ahlberg & Moen, 1999). Liljedahl (2021) mener at å sette høye kognitive krav, det kan for eksempel være å gi dem utfordrende problemoppgaver, kan føre til at elevene får bedre selvtillit innenfor problemløsing, og de blir bedre matematiske tenkere.

Resultatene i kapittel 4.1.3 er spesielt interessante i lys av den sosiokulturelle læringsteorien. Vygotsky læringsteori er basert på at læring skjer gjennom samhandling med andre (Vygotsky et al., 1978), dette kommer frem i disse funnene. Man ser at elevene strever med å finne et svar på oppgaven, og at de bruker kunnskapsmobiliteten i gruppa (Liljedahl 2021). Elevene sitt faktiske utviklingsnivå, er mindre enn deres potensielle utviklingsnivå. Gjennom samhandling med andre, utvider de sin proksimale utviklingssone. Samt tilfører ny kunnskap om problemløsingen (Vygotsky et al., 1978). Problemløsing er en egenskap som elevene må trene opp, på lik linje med andre matematiske konsepter (Posamentier, 2009). Ved å jobbe sammen med andre, tilegner elevene seg ny kunnskap, som de senere kan bruke når de jobber alene. Sonene har utvidet seg (Vygotsky et al., 1978). Både Liljedahl (2021) og Polya (2014) beskriver at problemløsing ikke er en lineær prosess, derimot er problemløsning en prosess hvor man «get stuck» og «unstuck» (Polya, 2014). Dette stemmer overens med funnene i denne studien. Alle gruppene møtte på utfordringer og kom seg videre fra disse. Det å møte på kognitive konflikter og kan føre til at elevene motiveres for å lære ny kunnskap (Lyngsnes & Rismark, 2016). Så det å «get stuck» og «unstuck» kan vær med å motivere elevene til å arbeide videre (Polya, 2014). Blant annet Csíkszentmihályi (1990), Liljedahl (2021) og Polya (2014) peker på at det er viktig at problemene gitt til elevene er utfordrende men ikke for utfordrende. Csíkszentmihályi, (1990) presenterer teorien om «Flow», og viktigheten at balansen mellom at elevene blir utfordret og at de kommer seg videre, og at elevene må ha evnene som er nødvendig før de setter i gang med problemløsingen (Csíkszentmihályi, 1990). Det er derfor viktig at selv om elevene «get stuck» så er det viktig at elevene har støtte fra gruppen og andre i klassen for å fortsette å holde seg i flytsonen (Polya, 2014), (Csíkszentmihályi, 1990).

I resultatene i kapittel 4.1.3 ser vi også at noen elever meldte seg ut av diskusjonen når de ikke kom seg videre. Dette kan være fordi de mistet flyten i problemløsingsarbeidet. Når elevene havner utenfor flytsonen kan det vises gjennom kjedsomhet eller frustrasjon (Liljedahl, 2021). Mason (2016) mener at elevene må trene opp utholdenheten, og lære seg å stå i følelsene som problemløsing kan få frem i en selv (Mason, 2016). Så grunnen til at noen elever meldte seg ut av diskusjonene og arbeidet kan være at på grunn av liten erfaring med denne arbeidsformen. Elevene har kanskje ikke utholdenheten som er nødvendig for å hente seg inn igjen i en flytsone eller å «get unstuck» i problemløsingsarbeidet.

5.1.4 Følelser og problemløsing

Et interessant sidefunn, som ikke ble tatt med i resultatdelen, men som jeg allikevel syntes var verdt å diskutere, var følelsene til elevene som oppstod i problemløsingen. Dette ble ikke tatt med som et resultat, da det ikke passer inn direkte under mine to forskningsspørsmål: «hvilke påvirkninger kan samarbeid ha i problemløsing?» og «hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing?». Noen av gruppene synes det var vanskelig å holde motivasjonen oppe, når de møtte på utfordringer. Dette kom til utrykk gjennom at elevene begynte å gjøre noe annet enn å løse oppgaven. De begynte å snakke om andre ting, tegne tegninger som ikke var relevant for problemet, synge, eller de bare gjettet et tilfeldig svar og dermed sa seg fornøyd, de spurte andre grupper eller en voksen om de bare kunne gi svaret.

> Silje: Klarer dere se hvor mange dager det går med den tegningen?
>
> Adrian: Nei, men kan du bare si svaret?
>
> Silje: Nei
>
> Adria: Aaaaaah. Noen har fått rett svar.
>
> Sander: Ja. En to en to
>
> Adrian: Umuuuulig
>
> Sander: Sier du
>
> Adrian: Uuummmmulig. Hun kommer til å høre svarene våre så kommer hun til å høre umuuulig.
>
> Sander: Det er 9 dager. Det er 9 dager, det er 9 dager
>
> Adrian: Det er 8 dager, de sa det
>
> Sander: Hææ?

Transkripsjon 23. Gruppe 2, oppgave 3.

Ovenfor er det en gruppe som synes problemet var «umulig». Gruppen hadde prøvd flere strategier, uten at de kunne finne en løsning (vedlegg 18). De begynte da å stille spørsmål om de kunne få vite svaret. Når de ikke fikk svaret levert, ble de ennå mer frustrert. Deretter lyttet de til de andre gruppene og hører et svar som de kopierer. Denne gruppen sitt fokus var på om svaret var rett eller galt, når de hørte svaret til en annen gruppe, kopierte de det. Man kan også se at frustrasjonen var varierende innad i gruppen. Sander prøver å tenke og finne svar, de andre på gruppen klarer ikke å følge hans tanker, da han ikke forklarer løsningsmetoden han bruker.

Mason (2016) peker på at frustrasjon er en nærliggende følelse i arbeidet med problemløsing (Mason, 2016). Han peker på at elevene skal lære seg å sitte i følelsene, altså trene opp utholdenheten innenfor problemløsingen (Mason, 2016). For at elevene skal klare å stå i frustrasjonen og «reflekt in action» (Mason, 2016), (kap. 2.8), er det viktig at de har de nødvendige redskapene. Altså nødvendig matematisk kunnskap, for å kunne løse problemet. Mason (2016) mener at læreren ikke skal gi dem hjelp for å komme seg videre. Dette er for at elevene skal få trening i å sitte fast, mens de jobber med problem (Mason, 2016). I utdraget over får ikke elevene hjelp til å løse problemet, elevene stiller et «stop thinking question» (Liljedahl, 2021), «kan du ikke bare si svaret?». Etter dette «stop thinking» spørsmålet, kan det virke som at Adrian blir mer frustrert. Ifølge Mason burde Adrian nå gått tilbake og tenkt gjennom hvilken matematisk kunnskap han kunne brukt for å løse problemet (Mason, 2016). Polya derimot, mener at dersom eleven ikke får hjelp på veien videre, kan de sette seg fast og ikke komme seg videre i problemet (Polya, 2014). Dette kan se ut til å stemme for Adrian i dette tilfellet. Utdraget er hentet fra helt mot slutten av aktiviteten og han kommer seg ikke videre. Det kan virke som han er lei av å tenke, i og med at han stiller «stop thinking questions» (Liljedahl, 2021). Polya mener, i motsetning til Mason, at det er viktig at læreren hjelper elevene i problemløsingen. Han mener at det å hjelpe elevene er en av de viktigste oppgavene til en lærer, og at det er nødvendig (Polya, 2014).

Generelt gjennom datainnsamlingen så det ut til at elevene syntes at det var gøy å jobbe med problemløsing i grupper. Når de kom inn i klasserommet og så diktafonene og arkene på pultene kom flere med utsagn som «YES!», «åååå, vi skal kjøre oppgaver igjen!», «kan vi gjøre dette alltid?». I samtalene etter økten fikk jeg også inntrykk av at de likte arbeidsformen, flere elever sa at dette var gøy, en elev sa «dette var veldig gøy men veldig vanskelig». Disse observasjonene støtter Lockharts mening om at problemløsing fører til større interesse hos elevene (Lockhart, 2002). Dette stemmer også med påstanden om at: «Matematiske samtaler kan fremme elevenes tenking, læring og motivasjon i matematikk.» (Wæge & Nosrati, 2018, s. 128. henvist til Jansen, 2008.).

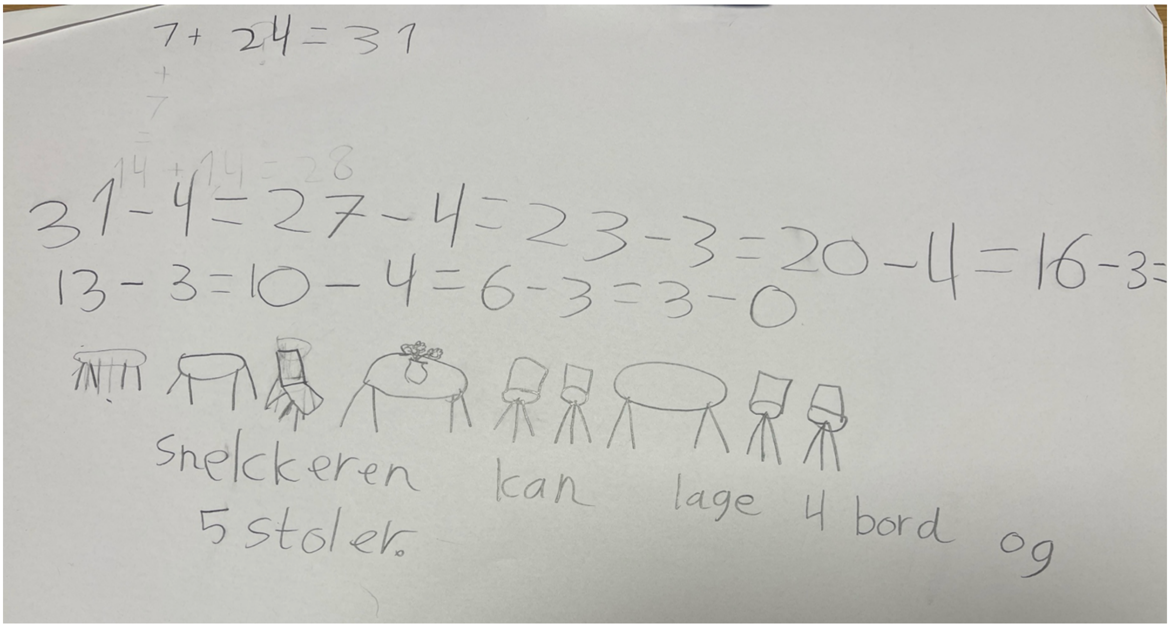
5.2 Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasertproblemløsing?

Charles, Lester og O'Daffer (1992) sier at «gjett og sjekk, tegne et bilde, spille ut problemet, bruke konkreter, velg en regneoperasjon, løse et lettere problem, lag en tabell, se etter mønster, lage en organisert liste, skriv en ligning, lage logiske resonnement eller jobbe baklengs» kan passe som strategier på barneskolen (Charles, et al. 1992, sitert i Elia, et al. 2009, s. 607, oversatt). Flere av disse løsningsstrategiene ble brukt av tredjeklassingene i denne studien. Målet i denne delen av oppgaven er å se nærmere på forskningsspørsmålet: «hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing». Jeg ønsker å belyse disse strategiene på grunn av elevenes uerfarenhet med samarbeidsbasert problemløsing, dette arbeidet kan gjøre det lettere for lærere å predikere elevsvar før de deler ut problemoppgaver, da løsningsstrategiene diskutert er strategier som elevene selv har oppdaget uten oppfordringer. Zimmermann (2016) skriver i sin forskning at elevene ofte gjenoppfinner matematiske ideer gjennom arbeidet med problemløsing. Elevene oppdaget eller brukte strategiene i delkapitlene nedenfor.

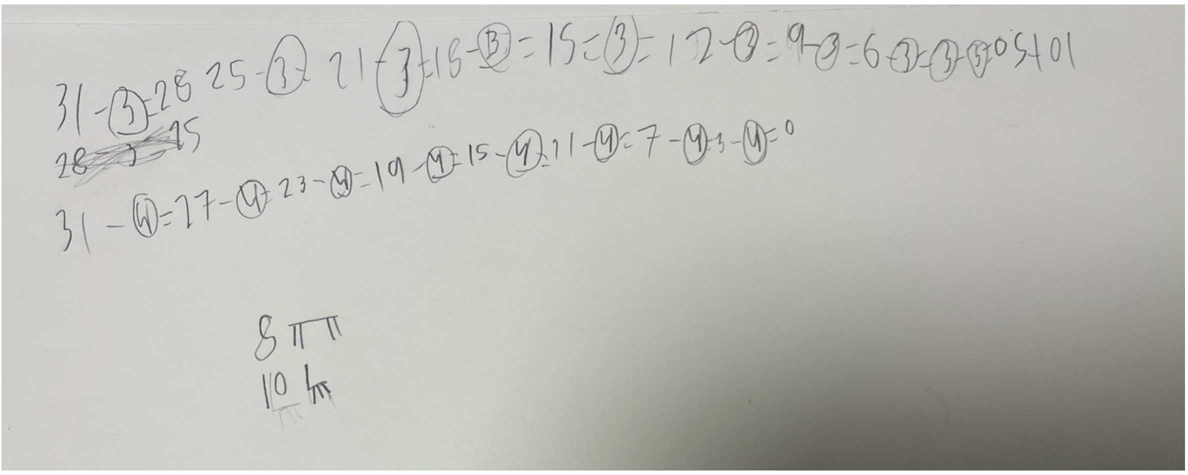
5.2.1 Arbeide baklengs

Som sagt i kapittel 4.2.1, er ikke resultatene i denne studien direkte å arbeide baklengs. Posametier (2009), forklarer det å arbeide baklengs som når: «Studentene begynner med sluttresultatet av problemet og utfører handlingen baklengs for å finne betingelsene i begynnelsen. De matematiske operasjonene blir reversert; så, for eksempel, blir det som var subtraksjon nå den inverse operasjonen, nemlig, addisjon. Når svaret er funnet, kan resultatene sjekkes ved å starte med dette svaret og gjennomføre handlingen fra start til slutt.» (Posamentier, 2009, s. 60, oversatt)

Elevene i gruppe 1 og gruppe 6 arbeidet ikke baklengs. Det er fordi de ikke reverserte operasjonen subtraksjon. Derimot kan det se ut til på figur 5, at gruppe 6 begynte med en plan om å løse oppgaven med addisjon, deretter visket de ut dette. De gikk dermed videre til addisjon, noe som kan tyde på at elevene har en forståelse av at addisjon og subtraksjon er reversible regneoperasjoner (Posamentier, 2009). Gruppe 1 viste også en forståelse av dette da de diskuterte i gruppa at det gikk an å bruke både pluss og minus for å finne en løsning på oppgaven.



Figur 10. Gruppe 1, oppgave 1



Figur 11.Gruppe 6, oppgave 1

Det kan være at gruppe 6 begynte med en plan om å løse problemet med addisjon, men at de i arbeidet fant en annen metode, som var mer hensiktsmessig (Alseth, 1998). Det kan også være at elevene bare gjettet på en løsningsmetode, og dermed tilpasset metoden (Gay, 1992).

> *Det er imidlertid ikke slik at en strategi nødvendigvis fører til en løsning av problemet. Mens en algoritme alltid gir en, om enn feilaktig, løsning, kan det vise seg under løsningsarbeidet at det er umulig å fortsette med den strategien man har valgt. Derfor er det viktig at man vurderer strategien man bruker underveis: er jeg på rett vei, kan jeg effektivisere denne strategien, bør jeg heller velge en annen strategi?* (Alseth, 1998, s. 15).

Det kommer ikke tydelig frem i lydopptakene hva som var tilfelle med gruppe 6, det er likevel en interessant observasjon. Det at elevene begynte med en løsningsmetode og deretter gikk tilbake og prøvde en annen metode. Dette er jo et tips som Polya kommer med (Polya, 2014).

5.2.2 Gjett og sjekk

I kapittel 4.2.2 ser vi på gruppe 5, som fort kom frem til en løsning, men som ønsket å finne flere løsninger. For å finne en ny løsning, begynte gruppen å gjette og sjekke.

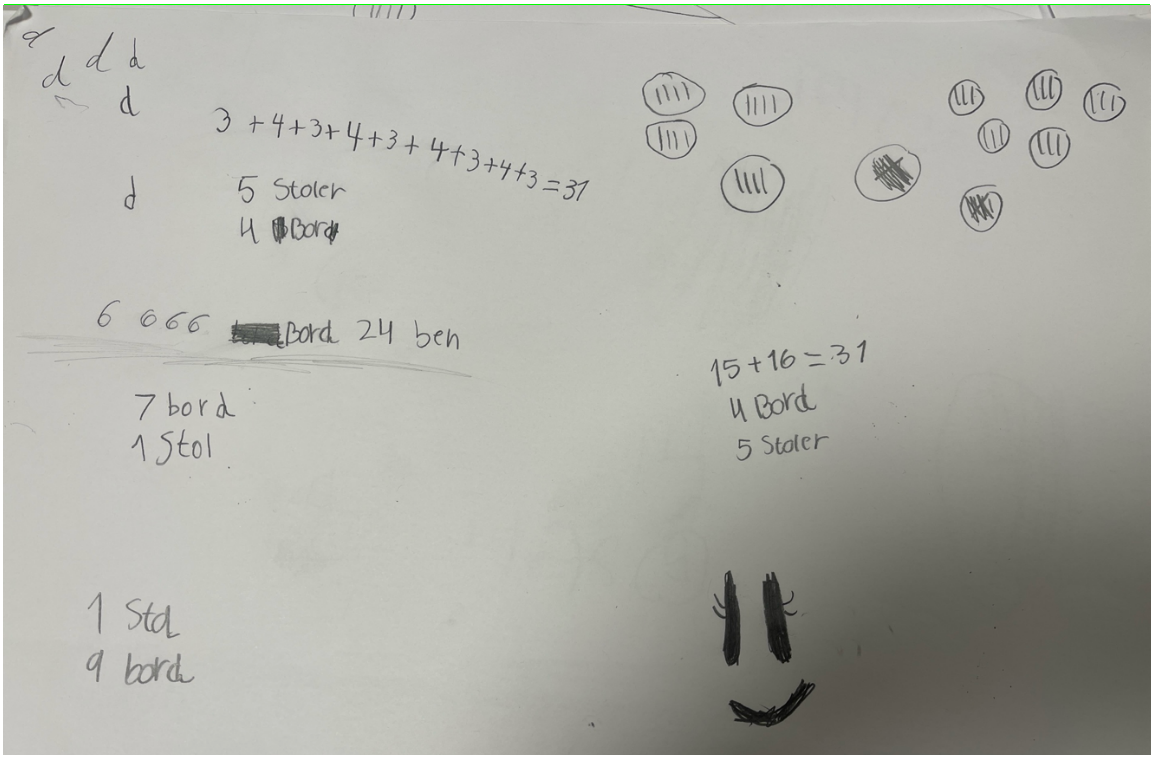
> Pål: Nei, men det må hvert fall være en annen måte enn det
>
> Nils: Vi kan prøve 3 stoler og 5 bord.
>
> Pål: 3 stoler og 5 bord?
>
> Nils: Eller 6 bord.
>
> Kari: Okey.
>
> Nils: Okey 9 stoler da.
>
> Pål: Eeh nei?
>
> Nils: Nei, 9 bein, 3 stoler. Også 6 bord vent, 24, ja det går, eller neineinei, det blir 33. Se 3 ganger 3 er 9 også 6 ganger 4 er 24, så 9+24 er 33 så det går ikke.

Transkripsjon 24. Gruppe 5, oppgave 1.

Det å komme med et gjett, og deretter teste det ut, kan gjøre det lettere å komme i gang med arbeidet (Gay, 1992). Et gjett som gir feil svar kan gi mye kunnskap om et problem, og elevene kan lære av sine feil (Gay, 1992). Etter en sjekk kan man gjette igjen eller finne en annen metode som kan fungere for å løse problemet, utfra den informasjonen man har lært av gjettet (Alseth, 1998). Det er forskjell på å komme med et tilfeldig gjett og det å komme med et *intelligent gjett*. For at elevene skal ha *intelligent gjett* må elevene gjette *systematisk, informert, og validert* (Posamentier, 2009). Gjettet bør bli gjort på grunnlag av matematiske kunnskaper, og av informasjonen gitt i oppgaven (Posamentier, 2009). Polya mener at «ingen ideer er dårlige så lenge det ikke er et helt ukritisk gjett, det som er dårlig er å ikke ha noen ideer» (Polya, 1945/2014. s.99, oversatt).

Om gruppe 5 tar et tilfeldig gjett eller et informert gjett, er vanskelig å fastslå kun utfra dialogen i opptakene. Det er litt tvetydig hvilken begrunnelse gruppen legger i gjettene sine.

Et av forslagene som blir foreslått på neste gjett, er tre stoler og 6 bord. Dette kan virke som et intelligent og systematisk gjett, da det er ett bord opp og en stol ned fra deres første løsning. Man kan argumentere om hvor god denne strategien er. Dersom de hadde stoppet der, hadde de ikke funnet flere løsninger. Dersom de hadde fortsatt systematisk og sjekket ut alle de ulike kombinasjonene av stoler og bord, hadde dette vært en god metode for å sikre seg at de hadde fått med seg alle mulige løsninger. Gruppen landet derimot på å sjekke ni stoler og prøvde å finne ut hvor mange bord de trengte. Dette gjettet førte ikke til en løsning, men det ga dem mer informasjon om problemet (Alseth, 1998). Man kan kanskje si at gjettene ikke var helt ukritiske, da gjettene ble evaluert underveis (Posamentier, 2009). Som Polya skriver er «det som er dårlig er å ikke ha noen ideer» (Polya, 1945/2014. s.99, oversatt). Og ideer, det har denne gruppen mange av. Dersom vi ser på deres notatark, ser vi at de har testet ut flere strategier og har brukt flere metoder for å gjette og sjekke.



Figur 12. Gruppe 5, oppgave 1

Det er spennende å følge deres gruppediskusjon, da de er innom mye matematisk innhold. Det at de har mye matematisk kunnskap fører til at de kan bruke denne kunnskapen og utforske flere ulike løsningsmetoder (Posamentier, 2009). Polya mener også at man kan bruke tidligere kunnskap for å løse problem lettere (Polya, 2014). Dette samsvarer også med sosiokulturell læringsteori, der man tenker at ny læring skjer av at man bygger på kunnskap som man allerede har (Vygotsky et al., 1978), Samt den kognitive læringsteorien om at man bruker erfaringer, legger til og redigerer nye erfaringer slik at det gir mening for det individet (Lyngsnes & Rismark, 2016).

I resultatene i kapittel 4.2.2, ser jeg på gruppe xx som jobber med Oppgave 3. Deres plan er å tegne en helt lik figur som den på tavlen, deretter tegne inn flisene, slik at de kan prøve seg frem, eller gjette og sjekke seg frem til hvor mange fliser det er plass til i figuren. Denne løsningsstrategien kan bli sett på som gjett og sjekk, da de skal prøve seg frem til et svar og sjekke om dette stemmer. Gjettene i dette tilfellet vil være et intelligent gjett, da de har lagt matematiske ideer i bunn for å bruke denne strategien (Posamentier, 2009). I deres gjett og sjekk av denne figuren bruker de også en figur, altså visualiserer problemet (Polya, 2014). Gruppen har selv kombinert metoder, for å lage en løsningsstrategi som gir mening for dem. Alseth (1998) skriver at det kan være mer gunstig å utvikle egne metoder i problemløsingen, enn å bruke en algoritme som de har pugget. Elevene kan da føle seg friere til å endre metoden underveis (Alseth, 1998). Det kan tyde på at elevene har brukt kunnskap som de hadde, om metoden gjett og sjekk. De har så trukket inn kunnskap som de hadde om figurer, for å lande på denne strategien. Gay (1992) mener at dersom man ser et mønster i en oppgave, kan man gjøre et kalkulert gjett og deretter sjekke om mønsteret kan brukes for å løse oppgaven (Gay, 1992). Det kan se ut til at dette var ideen til elevene på gruppa. Elevene ønsket å lage en eksakt kopi av modellen, noe som Polya mener kan være hensiktsmessig i noen oppgaver (Polya, 2014). I denne oppgaven var ikke dette nødvendig, men for disse elevene, som er unge, og har lite erfaring, virket det nødvendig å lage en eksakt kopi, for å kunne bruke metoden de hadde bestemt seg for.

5.2.3 Å se for seg problemet - Tegn et bilde, visualisere, figur og mønster

Det å visualisere problemet er ifølge Alseth (1998) «Den mest nyttige strategien i arbeidet med matematiske problemer ...» (Alseth, 1998, s. 15). I denne studien kom det tydelig frem at dette var en strategi som tredjeklassingene brukte mye. Alle notatarkene som ble samlet inn, inneholdt en eller flere tegninger. Det å tegne et bilde er en form for å visualisere, og det er nyttig å gjøre dette uavhengig av alder (Wæge & Nosrati, 2018). Elevene i denne studien brukte tegning for å for å forstå problemet, men mange brukte det også som en del av løsningen (Gay, 1992). Elevene brukte også konkreter og mønster som en del av visualiseringen.

Flere grupper syntes at det var vanskelig å forstå oppgaven. Som nevnt i resultatene kom dette til utrykk ved utsagn fra elevene som: «jeg forstår ingenting», «Dette gir ikke mening» eller «Dette var vanskelig». Dette kan komme av at elevene ikke er vant til å bruke tid på å forstå problemoppgaver. Det å forstå problemet er en viktig del av problemløsingsprosessen (Polya, 2014). Det å forstå problemet gjør at problemløsingen vil gå raskere (Olafsen & Maugesten, 2015), og lettere (Polya, 2014). Det var derfor lurt av elevene å bruke tid på å forstå problemet. I en problemløsingsprosess, kan det å tegne et bilde, gjøre det lettere å forstå problemet (Gay, 1992). Spesielt for de yngre elevene, kan det å tegne en tegning, gjøre at de klarer å løse mer komplekse problemer, enn de hadde klart uten (Alseth, 1998).

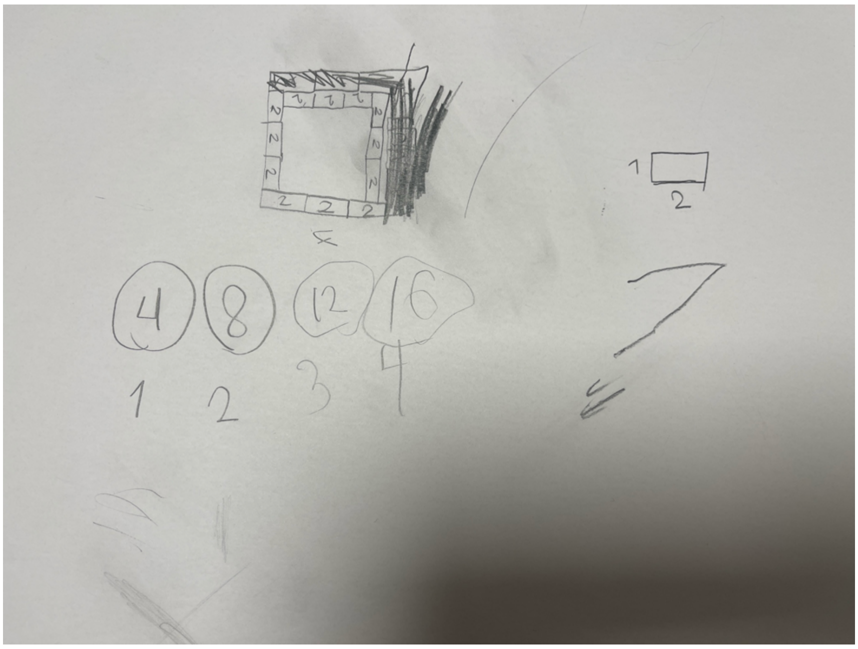
I kapittel 4.2.3 ser vi på gruppe 5 som bruker blyanter for å løse Oppgave 1. Vi ser i dette eksempelet, hvordan de bruker konkreter for å visualisere problemet. Når problemet blir konkret, forstår resten av gruppa problemet. Gruppen kan da gå videre til å lage en plan på hvordan de kan finne flere løsninger. Det å lage en plan handler om å velge ut en fremgangsmåte for hvordan de skal finne løsninger på problemet (Polya, 2014). Det å lage en plan blir lettere om elevene har erfaring med ulike løsningsstrategier for problemløsingen. Det å lage en god plan er tidkrevende, og vanskelig. Elevene i denne studien er uerfarne problemløsere dermed kan dette steget bli enda vanskeligere, fordi det er vanskelig å lage en plan om man ikke har erfaring (Polya, 2014). Gruppen landet på planen og gikk deretter bort fra å bruke blyanter for å visualisere problemet. De valgte heller å bruke gjentatt addisjon for å finne løsninger. Deretter fant de ut at de kunne ha brukt multiplikasjon. Det kan tyde på at elevene ser tilbake, og reflekterer over valg og utregninger (Polya, 2014). Denne gruppen sitt arbeid kan styrke elevenes matematiske forståelse. Wæge og Nosrati tenker at når elevene øver seg på å se matematikk presentert i ulike former og de får erfart at man kan veksle mellom dem, da kan elevene få en relasjonell forståelse for matematikken. Denne relasjonelle forståelsen kan de ta med seg videre, som erfaringer i senere problemløsing (Wæge & Nosrati, 2018).

I kapittel 4.2.3 ser vi også en gruppe som har ulik forståelse av tegning i matematikken. En av elevene i gruppen ser på tegning som noe som ikke hører hjemme i matematikk faget, mens en annen ser på tegning som en del av løsningsprosessen. Det å tegne opp problemet kan hjelpe elevene å få en bedre forståelse av problemet, og tegningen kan også bli brukt som en strategi for å finne en løsning (Gay, 1992).

Senere i kapittel 4.2.3 ser vi på et eksempel fra gruppe 5 igjen. De har gått videre fra å jobbe med visualisering, og jobber nå med subtraksjon for å finne nye løsninger. Som nevnt tidligere brukte denne gruppen flere representasjoner i arbeidet med denne oppgaven. Det at elevene klarer å forklare for hverandre på nye måter sikrer at alle elevene henger med i resonnementene. Dette resultatet viser hvor mye matematisk innhold som kommer frem via å løse problemer sammen. Det tyder også på at elevene bruker ressurser innad i gruppen for å komme seg videre i problemene (Liljedahl, 2021). I kjerneelementene i matematikk står det blant annet at elevene skal: «*komme med egne resonnementer», «følge andres resonnement», «begrunne resonnement», «bevise», «bruke matematisk språk», «ha matematiske samtaler» og «begrunne matematiske valg»* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Alle disse elementene kan sees, i varierende grad, i dette samarbeidet for å løse problemet.

Flere grupper i denne studien fant også mønster som de brukte for å finne løsninger. Bruk av symmetri, mønster eller figurer kan være at man bruker en figur som hjelpemiddel for å løse et problem. Man kan starte med å tegne opp en figur relevant for problemet, legger så ved relevant informasjon som oppgaven gir (Polya, 2014).

De fleste løsningene med bruk av mønster var på oppgave 3. Gruppe 6 fant blant annet mønster i oppgave 3, der de så på tallrekkene for å se hvor mye figuren økte med for hver gang. De begynte å tegne opp figuren, for å visualisere problemet (Polya, 2014). Deretter brukte de forståelsen de fikk av visualiseringen til å finne neste figur, da ser de et mønster, som gjør at de klarer å finne løsningen på de neste ukjente figurene (Polya, 2014).



Figur 13. Gruppe 6, oppgave 3

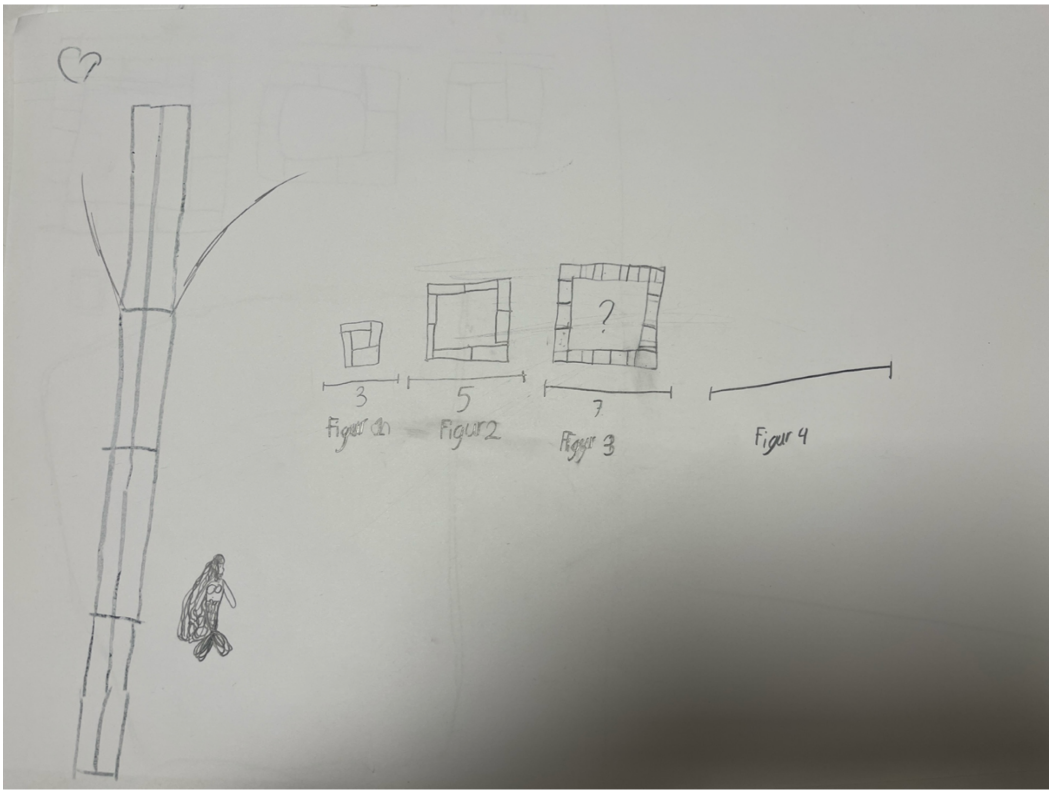
Gruppe 1 brukte også mønster i oppgave 3, dette mønsteret så de ikke før helt i slutten av arbeidet, når de så mønsteret klarte de å finne resten av svarene på oppgaven mer effektivt.

> Lærer: Har dere funnet ut av det, ser dere tegner figur
>
> Mats: Også to prikker, så skriver du 13.
>
> Lise: Men hva med figur 4?
>
> Mats: Figur 4 er 17
>
> Fredrik: Da skriver jeg figur 4
>
> Mats: Og neste er 21

Transkripsjon 25. Gruppe 1, oppgave 3.

Gruppen har tegnet en figur og gjennom arbeidet har de funnet et mønster. Gay (1992) skriver at om man løser deler av oppgaven så kan ny informasjon bli synlig for problemløseren, noe som kan gjøre at man klarer å se et mønster, som kan gi oss en idé om hva som er løsningen på problemet (Gay, 1992). Med informasjonen man får kan man da gjøre kalkulerte gjett og deretter sjekke svaret, da kan man bruke mønsteret for å løse oppgaven (Gay, 1992). Denne gruppen har sjekket svaret på figur 3, de har tegnet en modell som de ser stemmer overens med informasjonen gitt i oppgaven. De har ikke tid til å sjekke svarene på de neste figurene som de har funnet utav, siden økten ble avsluttet. Gruppen brukte en figur som et hjelpemiddel på å løse et problem (Polya, 2014). Om denne figuren var tilstrekkelig for å løse problemet viste de ikke før de startet arbeidet, men med å legge til info og tilpasse figuren underveis, fant gruppen en løsning (Polya, 2014).

Gruppe 3 fant også mønster i oppgave 3. Denne gruppen tegnet opp modellen og prøvet og feilet helt til de fant ut hvor mange fliser det var plass til i figuren.



Figur 14. Gruppe 3, oppgave 3.

Man kan se på deres ark at de har prøvd flere ganger å lage en modell som går opp i mønsteret som flisene ligger i. De løser deler av problemet først for å finne ut at sidene i figur 3 har en lengde på syv. Denne informasjonen brukte de på å finne ut hvor mange fliser det var plass til i denne lengden. Etter at gruppen hadde funnet svaret på oppgaven sier Kim at figuren øker med fire for hver figur. Deres løsningsstrategi med å lage en modell, og løse deler av problemet, ga dem ny informasjon om oppgaven, de så et mønster, som de kunne bruke for å løse hele problemet (Polya, 2014)

I sitatet til Posamentier (2009) i kapittel 2.5.3, ser vi at han mener at noen problemoppgaver har et tydelig mønster, som tydeliggjør at et mønster ligger i oppgaven, mens andre oppgaver kan elevene selv oppdage mønster for å finne løsninger til problemet (Posamentier, 2009), i resultatene i drøftet i dette delkapittelet ser vi at noen av elevene ser at oppgaven inneholder mønster. Disse elevene bruker informasjonen i oppgaven for å finne de neste svarene i oppgaven. Andre grupper ser ikke med en gang at det er et mønster i oppgaven, men utforsker oppgaven, prøver ulike strategier for å forstå problemet, og dermed oppdager egne mønster som er med på å løse oppgaven (Posamentier, 2009). Disse to måtene å bruke mønster på skjer i samme oppgave. Det kan være en indikator på at elevene har forstått problemet i ulik grad og på ulik måte, men gjennom å utforske oppgaven, fant alle de presenterte gruppene mønster, som de brukte for å svare på problemet (Polya, 2014).

5.2.4 Gå tilbake til start

Gjennom arbeidet med denne oppgaven ble det tydelig hvor relevant Polyas teorier om problemløsning var. Selv for elever som aldri har hørt om han. Flere av Polyas steg falt naturlig for elevene i problemløsningsprosessen, som man ser tidligere i diskusjonskapittelet så kan Polya trekkes inn i de aller fleste løsningsprosesser. I kapittel 5.2.7, 5.2.8 og dette delkapittelet (kap. 5.2.6), skal vi se på løsningsmetoder som direkte kan knyttes til Polyas steg og strategier for problemløsning. Prosessene diskutert i disse kapitlene er ikke løsningsstrategier for problem, men elevene brukte disse strategiene som en del av løsningsprosessen, og for å få mer informasjon om problemet, derfor blir disse funnene diskutert i delen om løsningsstrategier.

I resultatene i kapittel 4.3.5 ser man at elevene merket at det de jobbet med ikke fungerte. De gjettet ukritiske gjett og kom seg ikke videre. De merker at planen de hadde ikke fungerer, og kanskje at de ikke har forstått problemet helt. Dermed går de tilbake til trinn en, forstå problemet (Polya, 2014). Mats sier: «Vi må tenke på at han går opp 3 på dagen og når han sover går han ned 2». Med dette ser han på «hva skal jeg finne ut», «har jeg nok informasjon for å forstå problemet?». Han går tilbake til start og ser på oppgaven og hvilken informasjon oppgaven gir (Polya, 2014). Deretter forstår gruppen oppgaven på nytt, første steg. Gruppen lager deretter en plan, som er Polyas andre steg, de velger å bruke en tallinje. Deretter utfører de planen, steg tre, og kommer frem til svaret (Polya, 2014).

Polya mener at det er vanlig å sitte fast i problemoppgaver og det er en naturlig del av problemløsingen. Gjennom det å tenke på nytt, sitte fast, og prøve igjen så vil elevene bli bedre til å tenke og bedre i matematikk (Polya, 2014). I sitatet til Polya i kapittel 2.4.2

ser vi at Polya mener at det er naturlig å endre synet på oppgaven mens man jobber, slik som elevene i 4.3.5 gjorde. Elevene endret synet på oppgaven og bestemte seg derfor for at det var nødvendig å se tilbake på hva de kunne gjøre annerledes (Polya, 2014). Dette vises i figur 2 i kapittel 2.4.4. Ved å gå tilbake i oppgaven, kan de ta med seg erfaringene som de har gjort, i dette tilfelle har elevene fått en idé om hva som ikke fungerer så godt, samtidig som de har endret syn på oppgaven som fører til at de finner en løsning ved å bruke en annen metode (Polya, 2014). Det viser også at elevene har en forståelse av problemløsing som en ikke lineær prosess (Liljedahl, 2021), og at det å gå tilbake til start kan være et lurt verktøy i problemløsingen.

5.2.5 Sette prøve på svar

Polya legger vekt på i hans fjerde, og siste steg hvor viktig det er at man skal se tilbake på arbeidet sitt. Det holder ikke bare å se tilbake, men også reflektere over valg og løsninger (Polya, 2014). Dette arbeidet er spesielt viktig for å bli en god problemløser siden man tar med seg erfaringer og kunnskap, som man kan bruke i andre problemløsningsoppgaver. I arbeidet med å se tilbake, men også når man utfører planen, er det viktig at man sjekker utregningene (Polya, 2014).

I denne studien var det et fåtall av elevene som gikk tilbake i arbeidet, men det var noen som tok evalueringer underveis. Dette var ofte i form av å forklare fremgangsmåte til de andre på gruppen eller for å svare på spørsmål læreren hadde. Polya ser på det å sette prøve på svar, som en del av selve løsningsprosessen, dersom man kan sjekke svaret, styrker det troverdigheten til resonnementene og tankene dine gjennom løsningsprosessen (Polya, 2014). De aller fleste elevene sa seg fornøyde når de fikk et svar, og ønsket å få det bekreftet av læreren om svaret var rett eller feil. I denne studien fikk de ikke svar på dette, men ble oppfordret til å sjekke svarene sine selv. Det å sette prøve på svar kan gjøres på flere måter, en metode er å sjekke argument. Da kan man gå gjennom steg for steg for å sjekke utregningene og om argumentene holder (Polya, 2014). Når elevene ble spurt om å begrunne svarene sine så valgte de aller fleste gruppene å begrunne svaret med å gå gjennom løsningsprosessen steg for steg.

Elevene sa seg ofte fornøyd med løsningsmetoden som de hadde brukt, selv om de ble oppfordret til å finne flere fremgangsmåter. Dette var i flere tilfeller av at det ikke var mer tid, eller at gruppen ikke klarte å gå bort fra deres valgte løsningsmetode. Når eleven ble spurt om de kunne løse oppgaven på en annen måte, så ble de litt oppgitt over at de ikke var ferdige.

Det var en gruppe som sjekket svaret på eget initiativ, de tenkte at om to på gruppen regnet ut det samme og fikk samme svar så var svaret rett, dette er ikke et direkte bevis på at svaret er rett, men det viser at elevene har en tanke om at det er viktig å sjekke svarene sine, og reflektere rundt løsningsprosessen, noe som er Polyas fjerde steg (Polya, 2014). Elevene er ikke erfarne problemløsere enda, og derfor har de kanskje ikke verktøyene de trenger for å sjekke svarene sine, men det at de kom på å sjekke svarene med en metode som var logisk og hensiktsmessig for dem uten å bli oppfordret er interessant.

5.2.6 Se på kjente problem

Når man lager en plan for hvordan man skal løse et problem, kan det være vanskelig å vite hva som fungerer og ikke (Polya, 2014). Det er vanskelig å lage en plan, Polya mener at det er en fordel å se på kjente og lignende problem, for å hente inspirasjon til hvordan man kan løse det aktuelle problemet (Polya, 2014).

I Resultatkapittel 4.2.6 ser man at Thea ser likheter med et problem hun har kjennskap til.

> Thea: Vi kan tegne, sånn vi gjør med bord og stol oppgaven

Transkripsjon 26. Gruppe 5, oppgave 2.

Thea husker det problemet de jobbet med dagen før, og at tegning var en god metode for å løse problemet. også i 3. økt kom elevene fort frem til planen for å løse problemet. De ønsket å tegne det opp. Dette er nok basert på at elevene har dannet seg erfaringer, som de bruker i det nye problemene. Selv om problemene er nye så ser de likhetstrekk med kjente problem og bruker tidligere kunnskap for å lage en plan for hvordan de skal gå frem for å løse nye problem (Polya, 2014).

6 Konklusjon

I denne kvalitative studien undersøkes det hvilke løsningsstrategier elevene brukte for å løse problemoppgaver. Det blir også sett på hvordan samarbeidet kan påvirke problemløsingsprosessen. Studien er en enkeltcasestudie. Studien ser på en gruppe uerfarne problemløsere, som arbeider med problemløsing i grupper. Da studien er en enkeltcasestudie, er funnene vanskelige å generalisere (Postholm & Jacobsen, 2022). Studiens hensikt er å sette fokus på problemløsing i småskolen. For å besvare problemstillingen har jeg brukt lydopptak og transkripsjon av elevdiskusjon, notater fra elevene, observasjonsskjema og logger, som forklart i metodekapittelet. Transkripsjonene har blitt analysert via en deduktiv innholdsanalyse (kap. 3.7) og utfra analysen har jeg funnet resultater i studien som blir brukt for å besvare problemstillingen: *Hvilke løsningsstrategier bruker elevene på 3. trinn i arbeidet med samarbeidsbasert problemløsing i matematikkfaget.* For å besvare denne problemstillingen på best mulig måte valgte jeg å dele problemstillingen inn i to forskningsspørsmål. Det første forskningsspørsmålet er: *Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsing?* Dette spørsmålet besvarer delen av problemstillingen som omhandler hvilke strategier tredjeklassingene brukte i problemløsingen i denne studien. Det andre forskningsspørsmålet var *Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?* denne delen skal belyse samarbeidsaspektet ved problemstillingen. Dette spørsmålet gir ikke svar på hvordan alle samarbeid påvirker problemløsing, den gir heller et innblikk i hvordan samarbeid kan påvirke problemløsingsprosessen, og hvordan samarbeidet påvirket problemløsingen i denne studien.

6.1 Svar på forskningsspørsmål

Observasjon, lydopptak, transkripsjon og elevenes notater, var grunnlaget for datamaterialet i denne studien. Jeg har analysert datamateriale gjennom en deduktiv innholdsanalyse, som baserer seg på relevant teori og litteratur. Dataene og tilhørende analyse har gjort at det ble mulig å besvare begge forskningsspørsmålene. Det ble mulig å presentere hvilke løsningsstrategier disse elevene brukte, samt vise hvilke observasjoner som ble gjort angående hvordan samarbeidet påvirket problemløsingsprosessen for elevene i studien.

Resultatene som besvarer det første forskningsspørsmålet i studien, er at elevene bruker løsningsstrategiene: en form for å arbeide baklengs, gjett og sjekk, visualiserer og de finner mønster. Elevene bruker også Polya (2014) i problemløsingsprosessen, dette var et interessant funn fordi elevene ikke hadde kunnskap om hans problemløsingsstrategier (Polya, 2014). De brukte Polyas anbefaling om å gå tilbake til start, sette prøve på svar og se på kjente problem (Polya, 2014). Disse blir diskutert som løsningsstrategier, da de ble brukt av elevene i løsningsprosessen. De resulterte enten i en ide om hvilken metode de burde bruke, eller i at de evaluerte svaret og evaluerte metoden brukt. Selv om forskningsspørsmålet omhandlet direkte hvilke løsningsstrategier elevene brukte, ble likevel elevenes bruk av Polyas teorier og råd fort vurdert som en stor del av det å besvare dette forskningsspørsmålet. Mange av gruppene brukte Polyas fire steg, som er forklart i kapittel 2.4 (Polya, 2014). Elevene jobbet med å forstå problemet, laget en felles plan og utførte planen, kapittel 2.4 og tilhørende delkapittel. Det var fåtallet av elevene som så tilbake på arbeidet sitt i etterkant. Derimot gikk noen grupper tilbake i trinnene når de møtte på utfordringer, noe som tyder på at elevene hadde en forståelse av problemløsingen som en ikke lineær prosess (Liljedahl, 2021), (Polya, 2014). Denne forståelsen kan være avgjørende for at elevene ikke skal kjøre seg fast i en metode som ikke fører til en løsning, og kan kanskje føre til mindre frustrasjon i prosessen (Mason, 2016). Det er også interessant at løsningsstrategiene som Charles. et al. (1992) presenterer som gunstige for de yngste elevene, se kapittel 2.5, samsvarer med løsningsstrategiene som disse tredjeklasseelevene bruker. Denne studien kan være med å underbygge at disse strategiene faktisk passer de yngre elevene.

Det andre forskningsspørsmålet: «Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?» blir besvart i denne studien, gjennom funnene som er knyttet til ressursene i klasserommet (kap. 5.1.1), ansvarsfordeling (kap. 5.1.2), elevene oppdager hverandres feil (kap. 5.1.3) og støtte i klassen og hverandre (kap. 5.1.3), og et sidefunn som omhandler følelsene elevene møter i problemløsingsprosessen (kap. 5.1.4).Det rettes fokus på hvordan samarbeidet kan påvirke dette, ved at en persons forståelse av oppgaven kan påvirke hele gruppens. Det tydeligste funnet som omhandler samarbeidet i problemløsingsprosessen er at læreren fikk en friere rolle i klasserommet. Dette var egentlig ikke et område som skulle undersøkes, siden fokuset i denne studien er på elevene. Det ble likevel relevant å ha med nettopp fordi det opplevdes så tydelig, og fordi det at læreren har mer tid til å hjelpe enkelt grupper som trenger det, kan være med å påvirke elevenes mulighet for læring. I studien fikk læreren få spørsmål og kunne bruke tiden sin på enkeltgrupper som trengte ekstra veiledning. Hvordan elevene valgte å fordele arbeidsoppgavene var et uventet og interessant funn. I gruppene som hadde en elev som forklarte og en annen elev som noterte på arket, økte deltakelsen til elevene i gruppen. Samtidig viste de tegn på at forståelsen av hverandres tanker og ideer ble styrket.

6.2 Begrensninger og kritisk blikk på studien

Studiens relevans og betydning ble presentert i kapittel 1.3. Det kan være vanskelig å bedømme om dette er oppnådd, studien har i alle fall besvart begge forskningsspørsmålene som ble undersøkt. Da denne studien er en enkeltcasestudie, er det vanskelig å si om funnene i denne studien er gjeldende i andre sammenhenger. Om de kan generaliseres til andre settinger, enn kun den ene klassen, på den skolen, de dagene datainnsamlingen foregikk. I kapittel 3.8 og følgende delkapittel diskuterer jeg kvaliteten på studien.

I etterkant av studiens gjennomføring, er det flere valg jeg har reflektert over. Jeg tenker blant annet at intervjuet kunne ha styrket kvaliteten av studien, da disse dataene kunne vært med å underbygge resultatene fra transkripsjonen (Postholm, 2020). Det kunne vært med på å styrke relabiliteten til funnene i oppgaven, da elevene selv kunne gitt forklaringer og refleksjoner for hvordan de hadde tenkt. Mine tolkninger av dialogen kunne da ha blitt bekreftet eller avkreftet av elevene selv.

Det er flere faktorer som kunne sikret et bedre intervju, som kunne gitt gode data for å belyse mine forskningsspørsmål. Det første er at jeg burde laget en bedre plan med læreren for når og hvilke elever som skulle bli tatt ut. Kanskje det å rette fokuset bare på noen av gruppene eller tatt ut en enkelt elev fra hver gruppe, kunne gjort dette lettere å gjennomføre. Jeg tenker også at det at vi satt i biblioteket var avgjørende for dårlig kvalitet på intervjuet. Det førte til flere forstyrrelser og dårlig kvalitet i lydopptakene. Jeg burde laget et ekstra plan for å sikre at vi hadde et eget rom for å gjennomføre intervjuene. Strukturen på intervjuene kunne også blitt gjort bedre. Jeg burde gitt instrukser til elevene om at de skulle rekke opp hånden og vente på å få ordet, for å unngå at elevene snakket i munnen på hverandre. Da kunne jeg hatt bedre kontroll og kunne dratt samtalen i rett retning når elevene begynte å snakke om tema som ikke var tilknyttet forskningsprosjektet.

Likevel opplevde jeg, når jeg gikk gjennom lydopptakene av elevenes diskusjon i klasserommet, at lydopptakene ga mye gode data til min problemstilling. Kvaliteten på studien kunne blitt styrket av data fra intervju, som kunne underbygget eller avkreftet mine observasjoner og tolkninger. Altså ga de 18 lydopptakene av grupper som jobbet sammen med problemløsing, nok data for å gi denne studien kredibilitet. I hver økt fikk jeg høre 18 elever, som tenkte matematikk og samarbeidet, samtidig som de noterte på ark. Disse dataene ga et innblikk i hvordan elever løser problemoppgaver i grupper og hvilke løsningsstrategier de bruker, det er det denne oppgaven skulle belyse.

En annen begrensning i oppgaven er at resultatene kan være påvirket av situasjonen. Elevene hadde ikke erfaring med å bli observert. Det var flere som ble distrahert av diktafonen på pulten. Dette predikerte jeg som en utfordring. Derfor valgte jeg å informere elevene om hva diktafonen var, og hva lydopptakene skulle brukes til. De ble informert om dette en uke før prosjektet og i forkant av hver aktivitet. Dette gikk mye bedre enn forventet, selv om alle gruppene kommenterte noe rundt denne diktafonen i løpet av prosjektet. Noen elever ble fokusert på tiden de hadde brukt. Noen fokuserte på hva dette skulle bli brukt til. Noen oppdaget at dersom de snakket høyere, så viste det på skjermen. Noen benyttet muligheten til å synge en sang, rope eller lage prompelyder. Diskusjonene rundt diktafonene var for det meste korte og ikke veldig forstyrrende for arbeidet, mens sanger og prompelyder gjorde at noe av diskusjonene ikke ble tatt opp på diktafonen. Jeg opplevde ikke at elevene ble stille eller nervøse av diktafonene. Diskusjonene oppleves naturlige og de kommuniserte på en vanlig og naturlig måte med hverandre.

Grunnen til at jeg ønsket å forske på uerfarne problemløsere det ble tydelig gjennom litteratursøk at overvekten av forskning omhandlende problemløsing var på eldre elever, og dermed ønsket jeg å utføre min forskning på elever på småskolen. Dette valget medførte at elevene var uerfarne problemløsere. Dette valget kan ha påvirket studien, fordi resultatene speiler hvordan elevene tenker i problemløsingsprosesser. Disse elevene hadde ikke mange strategier som hadde blitt presentert for dem på forhånd. Resultatene belyser hvordan elevene jobber sammen for å finne løsninger, samt hvilke løsninger de kommer frem til.

I studien ble 18 ulike løsningsprosesser identifisert og analysert gjennom bruk av et kategoritre og tilhørende deduktiv innholdsanalyse. Denne metodikken muliggjorde kategorisering av transkripsjoner basert på etablerte løsningsmetoder, som var forankret i teoridelen av studien. Teoretisk grunnlag for analysen inkluderte litteratur om løsningsstrategier. Jeg baserte kategoriene i treet (Figur 3) på listen presentert i kapittel 2.4.2, basert på verkene til Polya (2014) og Grevholm (2016). Observasjoner relatert til samarbeid ble støttet av et litteratursøk som adresserte samarbeid og problemløsning. Under diskusjonen av resultatene ble det nødvendig å inkludere ytterligere litteratur for å belyse alle funn. Gjennom dette utvidede litteratursøket ble ytterligere relevant litteratur identifisert og integrert i kategoritreet, og materialet ble re-analysert for å sikre en grundig forståelse av funnene.

Det siste og kanskje den viktigste kritikken til denne studien omhandler omfanget av oppgaven. Elevene fulgte ikke en bestemt metode, men var innom mange ulike, noen etablerte og noen de laget selv. Elevenes løsningsprosesser kunne med fordel blitt sett i sin helhet, altså fokusert på noen grupper sine helhetlige løsningsprosesser, for å få et mer helhetlig bilde av mine forskningsspørsmål. Bruken av den valgte analysemetoden introduserte en viss kontekstuell begrensning i denne studien. Forsøket på å passe elevenes tankeprosesser inn i forhåndsdefinerte teoretiske rammeverk, reduserte dybden av innsikt som kunne oppnås. Gjennom den deduktive innholdsanalysen, ble analysen hovedsakelig en søken etter kjente løsningsstrategier, noe som kan ha oversett unike aspekter av elevenes problemløsningsprosesser. For å besvare problemstillingen med større validitet, kunne jeg begrenset omfanget av dataene, og gått i dybden på enkeltgrupper sine prosesser, for å kunne gi et mer helhetlig innblikk i hvordan elevene finner løsninger sammen. Fordelen derimot, med den deduktive innholdsanalysen, var at jeg fikk mulighet til å trekke ut resultat av hele datamaterialet. Noe som gjorde at det kunne bli presentert en større variasjon i resultatene.

6.3 Implikasjoner for videre forskning

Denne studien undersøkte hvordan en gruppe tredjeklassinger jobbet sammen med problemløsing, og hvilke løsningsstrategier de brukte. Som tidligere nevnt i innledningen er overvekten av forskning gjort angående problemløsing gjort på eldre elever. Denne studien gir et innblikk i hvilke strategier som elevene i denne aldersgruppen oppdager, i arbeidet med samarbeidsbasert problemløsing. Jeg mener i aller høyeste grad at dette er noe som bør undersøkes mer. Fordi det er tydelig i forskningslitteraturen, blant annet det som har blitt presentert i denne studien, at det er mange fordeler for elever å arbeide med samarbeidsbasert problemløsing.

For å forske videre på temaet, kan det være nyttig å gjennomføre studien med en større deltakergruppe, og kanskje sammenligne på tvers av trinn. Da kunne man generalisert funnene fra studiene, for å lære mer om de yngste elevene og om hvordan de tenker under problemløsingsprosesser. Man kan også ta datamaterialet i denne studien og prøve å analysere det med en annen metode, for å se på enkelt gruppers løsningsprosesser og resonnement, for å forstå på et dypere plan hvordan elevene arbeider sammen med problemløsing.

7 Litteraturliste:

Ahlberg, A. & Moen, S. (1999). *Barn og matematikk: problemløsing i 1.-3. klasse*. Cappelen Damm akademisk.

Alseth, B. (1998). *Matematikk på småskoletrinnet: Kartlegging av matematikkforståelse*. Utdanningsdirektoratet.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. Journal for Research in Mathematics Education, 29(1), 41–62. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.29.1.0041

Brooks, B. (1976). Philosophy and action in education. *When is a problem?* 19,11-13.

Csíkszentmihályi, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience*. Harper and Row.

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving* (6. utg.). Gyldendal akademisk.

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). *Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics*. ZDM Matematics Education, *41*(5), 605–618. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6

Gay, D. (1992). *Solving problems using elementary mathematics*. Dellen Publishing company.

Gevholm, B. (red.). (2016). *Matematikkundervisning 1-7*. Cappelen Damm akademisk.

Gick, M. L. (1986). Problem-Solving Strategies. *Educational Psychologist.*, *21*(1-2), 99–120. https://doi.org/10.1080/00461520.1986.9653026

Jacobsen, D. I. (2022). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? innføring i samfunnsvitenskapelig metode* (4.utg.). Cappelen Damm akademisk.

Jaworski, B., Fuglestad, A. B., Bjuland, R., Breiteig, T., Goodchild, S. & Grevholm, B. (2007). *Læringsfelleskap i matematikk = Learning communities in mathematics*. Caspar forlag A/S.

Johnson, D. W. (1984). Læring gjennom samarbeid*: 1: Individuelt arbeid, konkurranse og samarbeid i undervisningen* (Vol. 1). Pedagogisk psykologisk forl.

Kagan, S., & Kagan, S. (1994). *Cooperative learning*. San Clemente: Kagan.

Karlsen, L. (2023). *Tenk det! : utforsking, forståelse og samarbeid - elever som tenker sjæl i matematikk* (2. utgave.). Cappelen Damm akademisk.

Kunnskapsdepartementet *(*2017*). Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/?lang=nob

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i Matematikk (MAT01-05*). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Kunnskapsdepartementet (2023), *hva er nytt i matematikk?* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

Lester Jr., F. H, & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. I P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pekhonen (Red.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives* (s. 117–135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Lester, F.K. Jr. (1983) Trends and issues in mathematical problem-solving research. I R. Lesh & M. Landau (red.), *Acquisition of mathematics conceps and prosesses* (s. 229-261). Academic Press Inc.

Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning.* Corwin Press.

Liljedahl, P. & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing*:* a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education 53(*4*)*, 723–735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Lochhart, P. (2002), *A mathematician`s lament*, 1-25. https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_03_08.html

Lyngsnes, K. M., & Rismark, M. (2016). *Didaktisk arbeid* (3. utg, 3. opplag.). Gyldendal akademisk.

Mason, J. (2016). When is a problem...? “When” is actually the problem! I P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pekhonen (Red.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives (s. 263–285*). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_16

Matematikksenteret. (u.å.). *Tekstnøtt: Sneglen i brønnen*. Hentet 18.januar, 2024. https://www.matematikk.org/tekstnott.html?tid=105034

Matematikksenteret. (u.å.). *Kenguruoppgaver- oppgavebank.* Hentet 18. januar, 2024 fra https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser-og-undervisningsopplegg/kenguru/kenguruoppgaver-oppgavebank

Medaille, A., & Usinger, J. (2020). “That’s going to be the hardest thing for me”: tensions experienced by quiet students during collaborative learning situations. *Educational studies*, *46*(2), 240-257.

Olafsen, A. R. & Maugesten, M. (2015). *Matematikkdidaktikk i klasserommet* (2. utg.). Universitetsforl.

Polya, G., & Conway, J. H. (2014). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Expanded Princeton Science Library edition : Princeton University Press. (orginalverk publisert 1945)

Posamentier, A. S. & Krulik, S. (2009). *Problem Solving in Mathematics, Grades 3-6 : Powerful Strategies to Deepen Understanding*. Corwin Press.

Postholm, M. B. (2020). *Kvalitativ metode : en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Universitetsforl.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2022). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning* (1.utg). Cappelen Damm Akademisk.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (s. 334–370). Macmillan.

Sikt. (u.å., 21. mars). *Barnehage- og skuleforskning.* https://sikt.no/tjenester/personverntjenester-forskning/personvernhandbok-forskning/barnehage-og-skoleforskning

Sikt. (u.å., 21. mars). *Meldeskjema for personopplysninger*. https://sikt.no/tjenester/personverntjenester-forskning/fylle-ut-meldeskjema-personopplysninger

Stedøy, I. M. & Valbekmo, I. (2018), Problemløsing, hva er problemløsing, og hvordan skiller det seg fra arbeid med vanlige matematikkoppgaver? Hva kjennetegner en god problemløser. *Matematikksenteret.* https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/2022-04/Probleml%C3%B8sing.pdf

Taflin, E. (2007). *Matematiska problem I skolan för att skapa tillfällen till lärande.* [Doktorgradsavhandling]. Uumeå universitetet, instutisjonen för matematik och matematisk statestik.

Torkildsen, S. T. (2017). Å undervise matematisk problemløsing, matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/MAM/Revisjon%2020-

21/Modul%209/09%20Torkildsen%20A%CC%8A%20undervise%20Matematisk%20Probleml%C3%B8sing.pdf

Utdanningsdirektoratet (2012, september), Tall Tallregning. Læringsstøttene prøver: matematikk 5.- 10. årstrinn. *Ressurshefte til Tall Tallregning.* https://web01.usn.no/~panderse/KIMhefter/ressursheftetall.pdf

Van Galen, F. H. J. Feijs, E. Figueiredo, N. & Gravemeijer, K. (2008*). Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. A Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6.*: SensePublishers.

Vygotsky, L. S., Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S., & Souberman, E. (1978). *Mind in society : the development of higher psychological processes*. Harvard University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvjf9vz4

Wæge, K., & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Universitetsforlaget.

8 Vedlegg

8.1 Oversikt over figurer

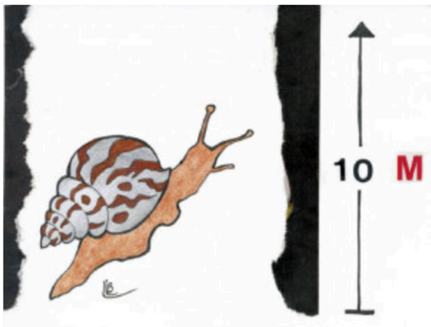
8.2 Oversikt over transkripsjon

Vedlegg 1: Oppgave 1

Snekkeren: En snekker snekret trebente stoler og firbente bord. En dag hadde han brukt 31 ben. Hvor mange stoler og hvor mange bord kan han ha laget? Forklar hvordan du kommer fram til svaret.

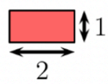
Vedlegg 2: Oppgave 2

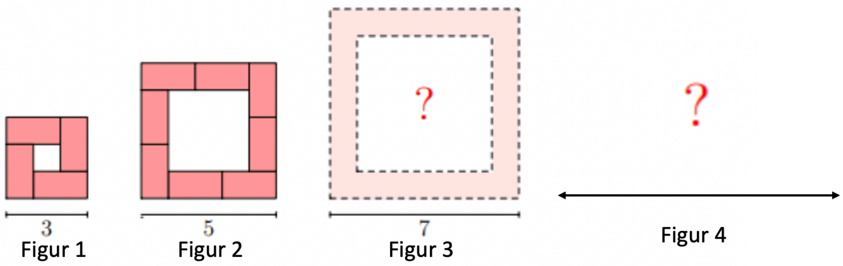
En snegl sitter på bunnen av en ti meter dyp brønn og skulle gjerne komme seg opp. Hver dag klarer den å klatre tre meter, men mens den sover om natten, sklir den to meter ned igjen. Hvor mange dager tar det sneglen å komme opp til brønnkanten?



Vedlegg 3: Oppgave 3

Katrine bygger en gang rundt hvert av kvadratene ved å bruke slike fliser:

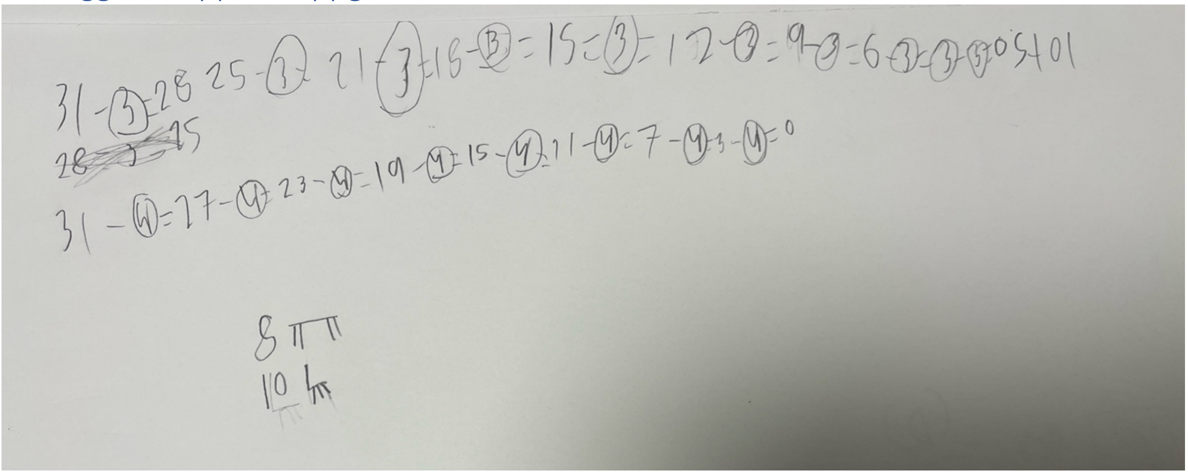




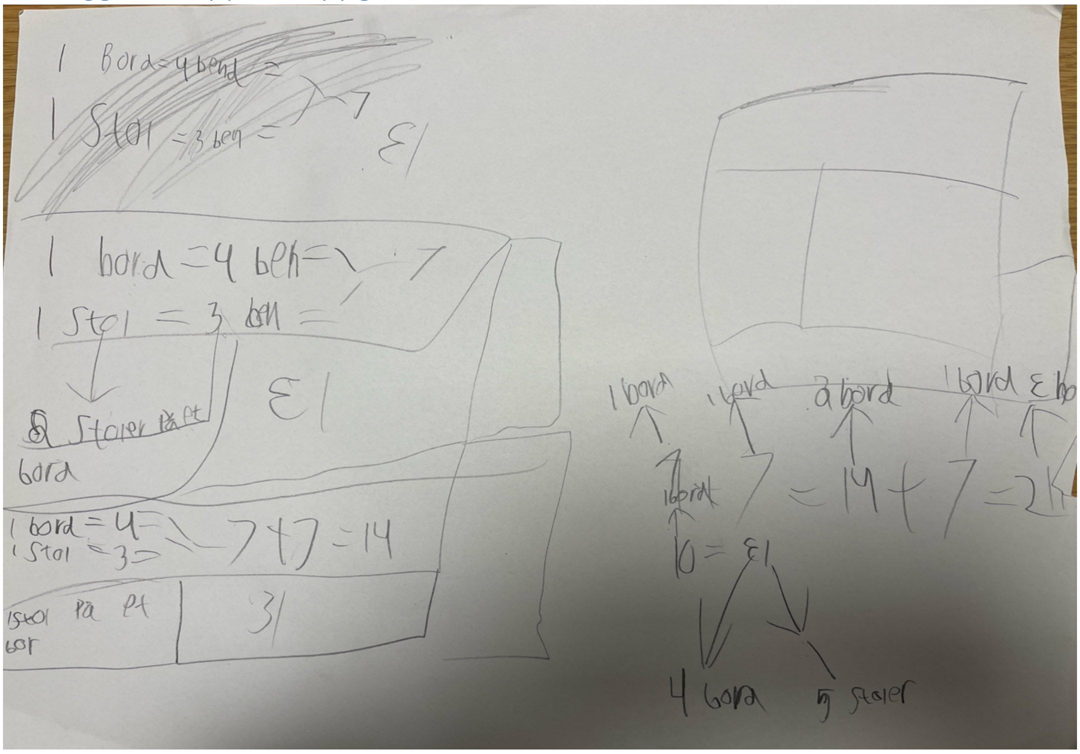
Hvor mange fliser må hun bruke rundt kvadratet med side 7?

Hvor mange fliser blir brukt i figur 3 og figur 4?

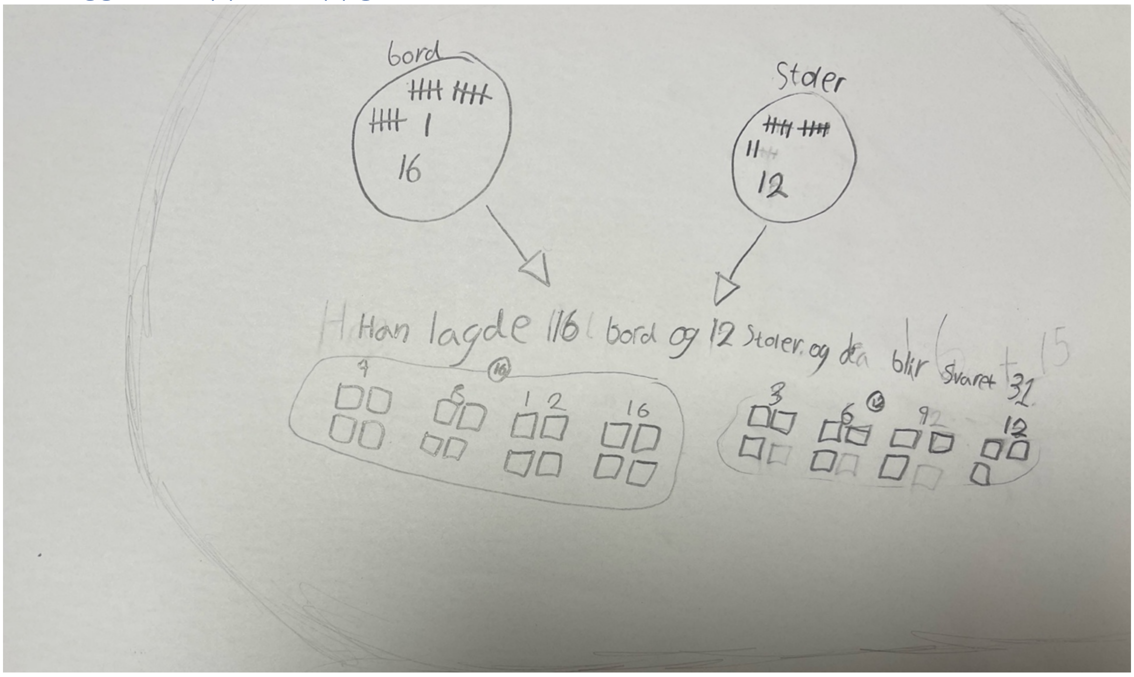
Vedlegg 4:Gruppe 1, oppgave 1



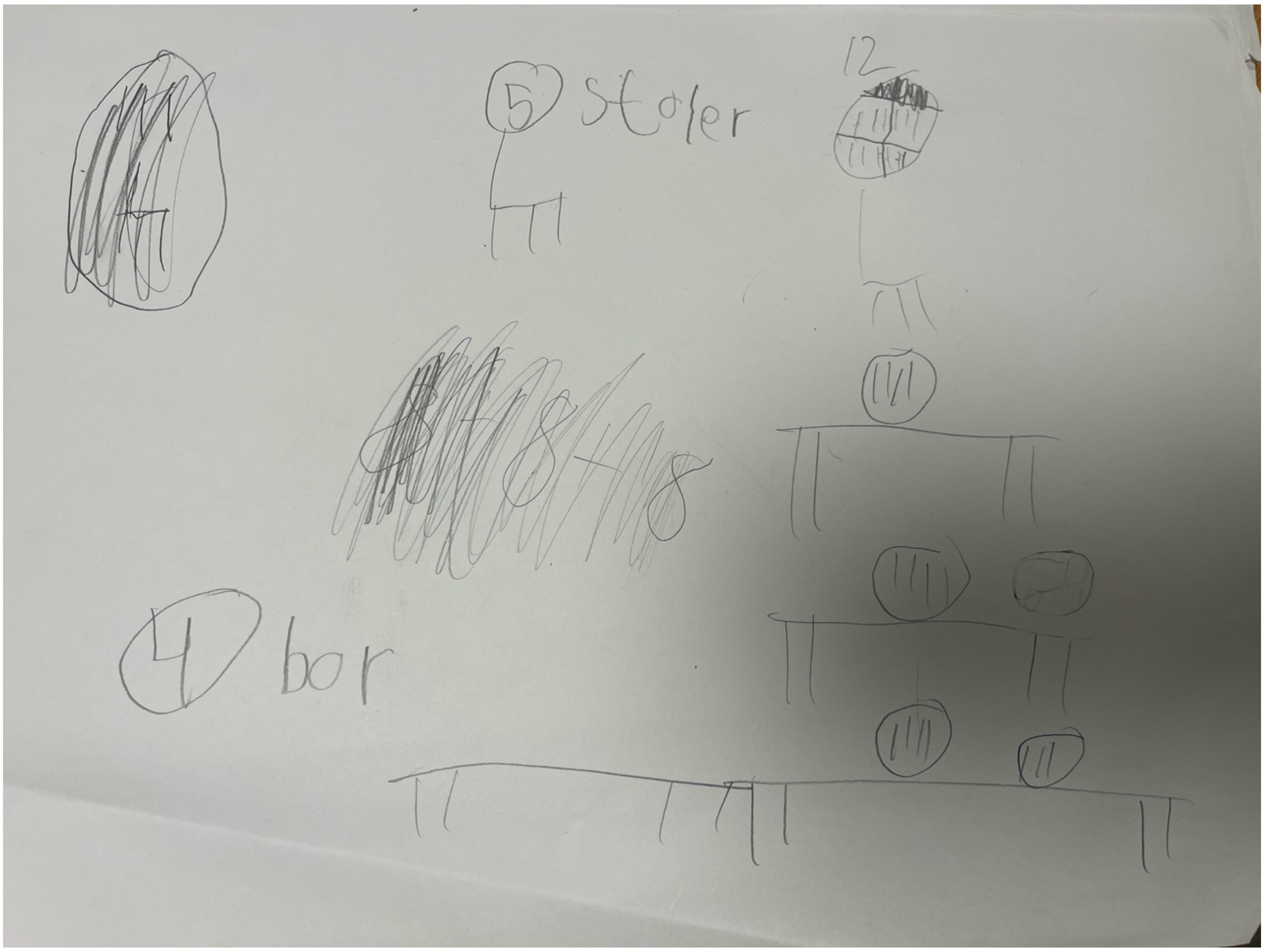
Vedlegg 5: Gruppe 2, oppgave 1



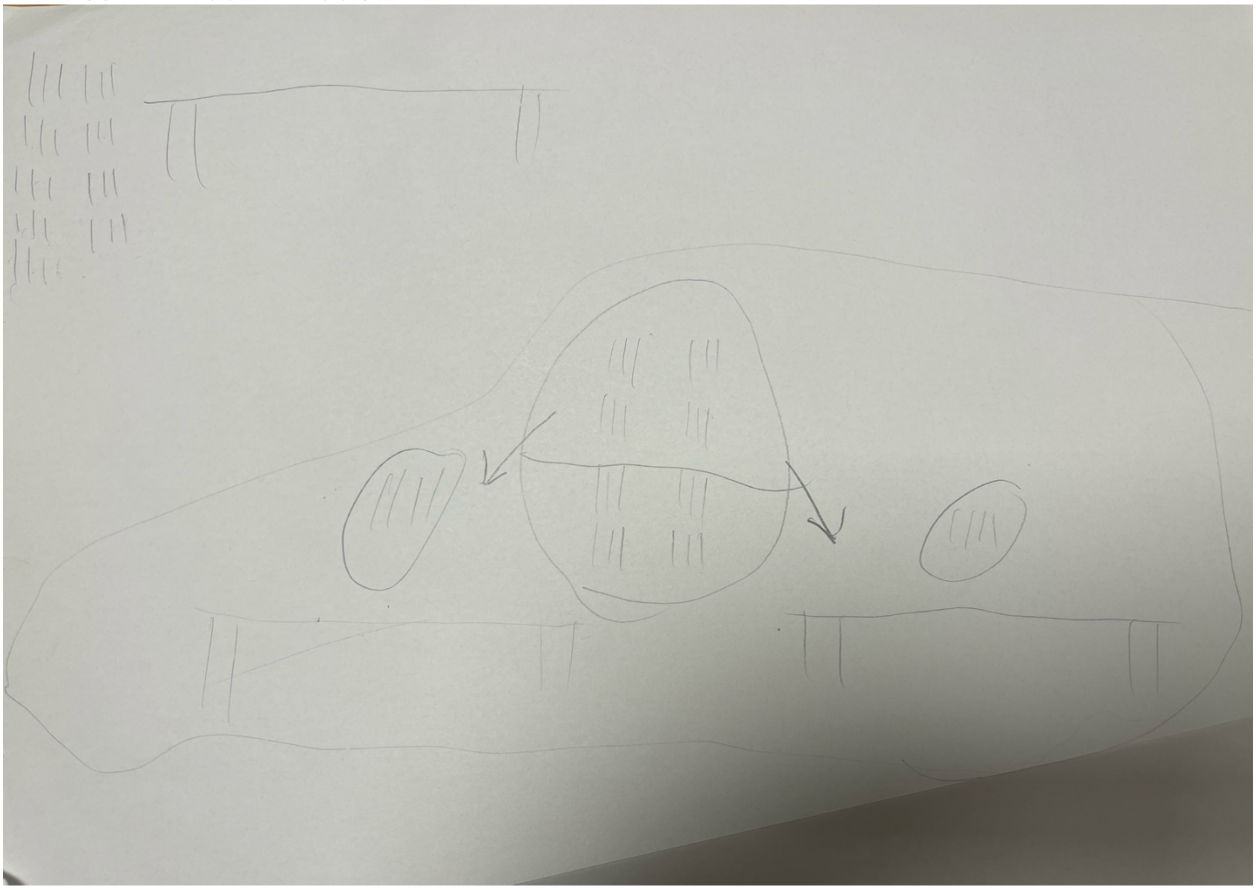
Vedlegg 6: Gruppe 3, oppgave 1



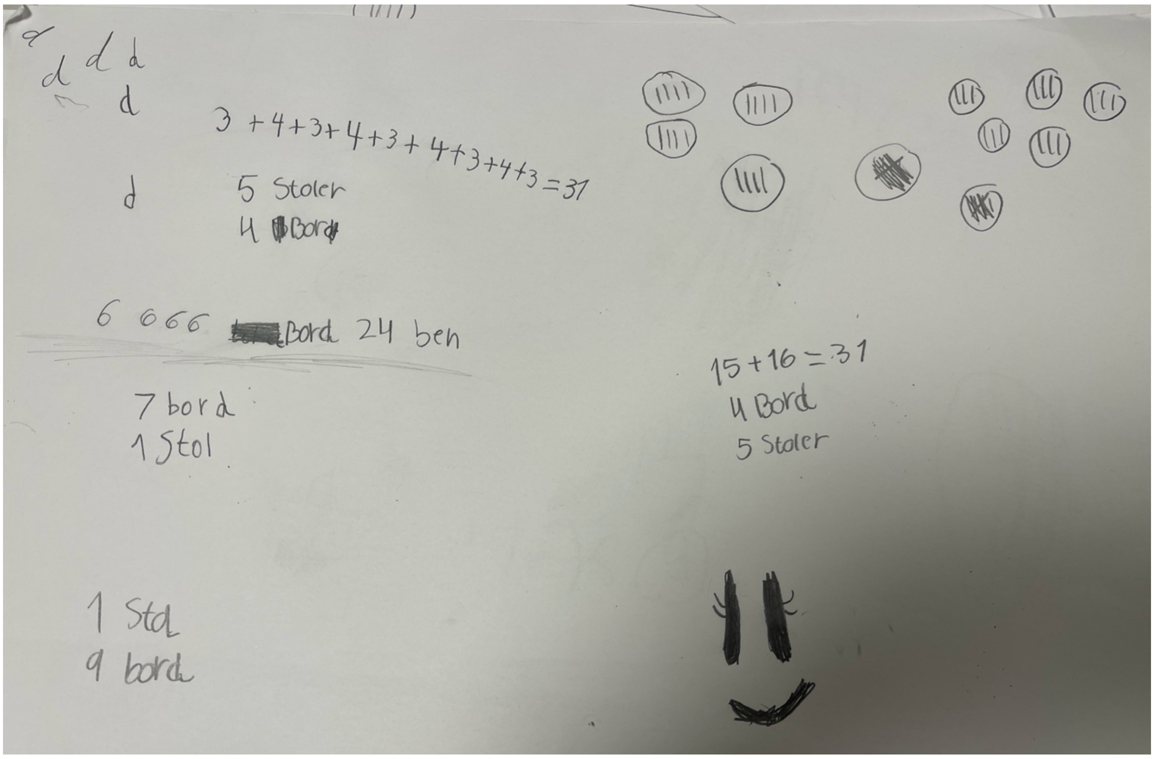
Vedlegg 7: Gruppe 4, oppgaver 1



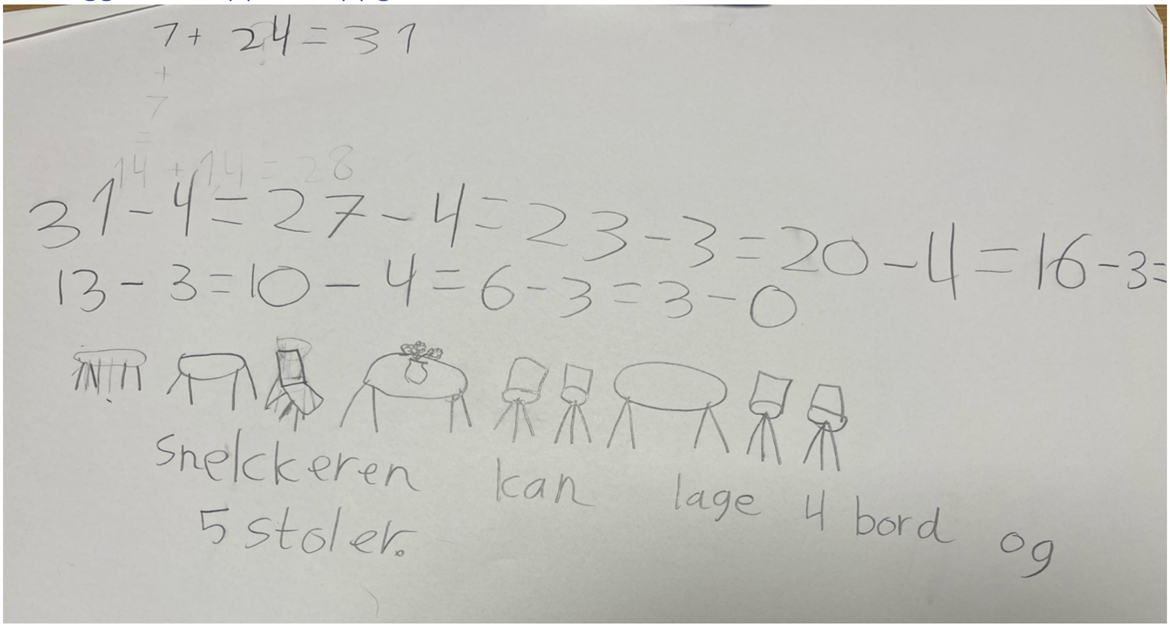
Vedlegg 8: Gruppe 4, oppgave 1. 2. siden av ark



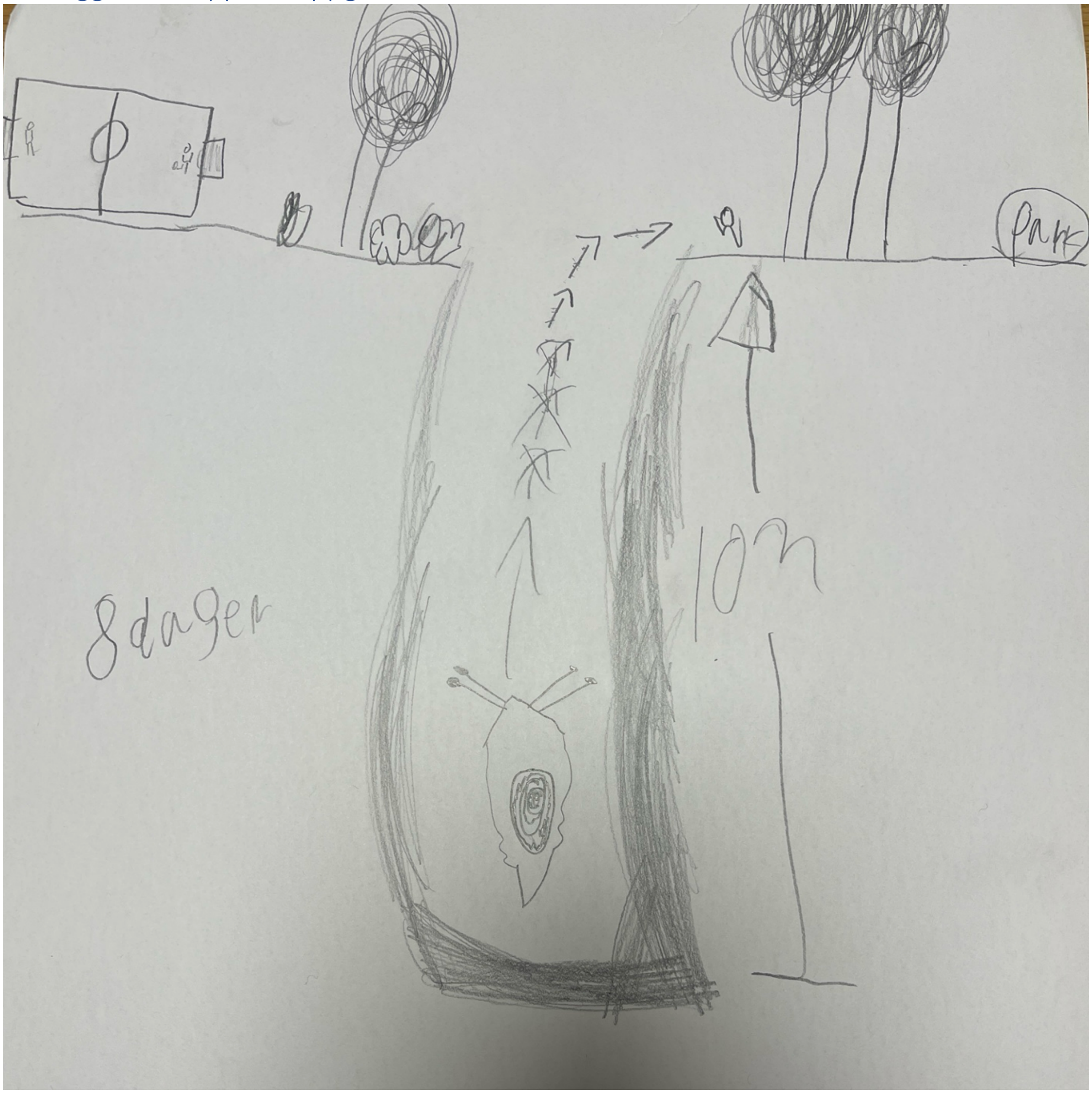
Vedlegg 9: Gruppe 5, oppgave 1



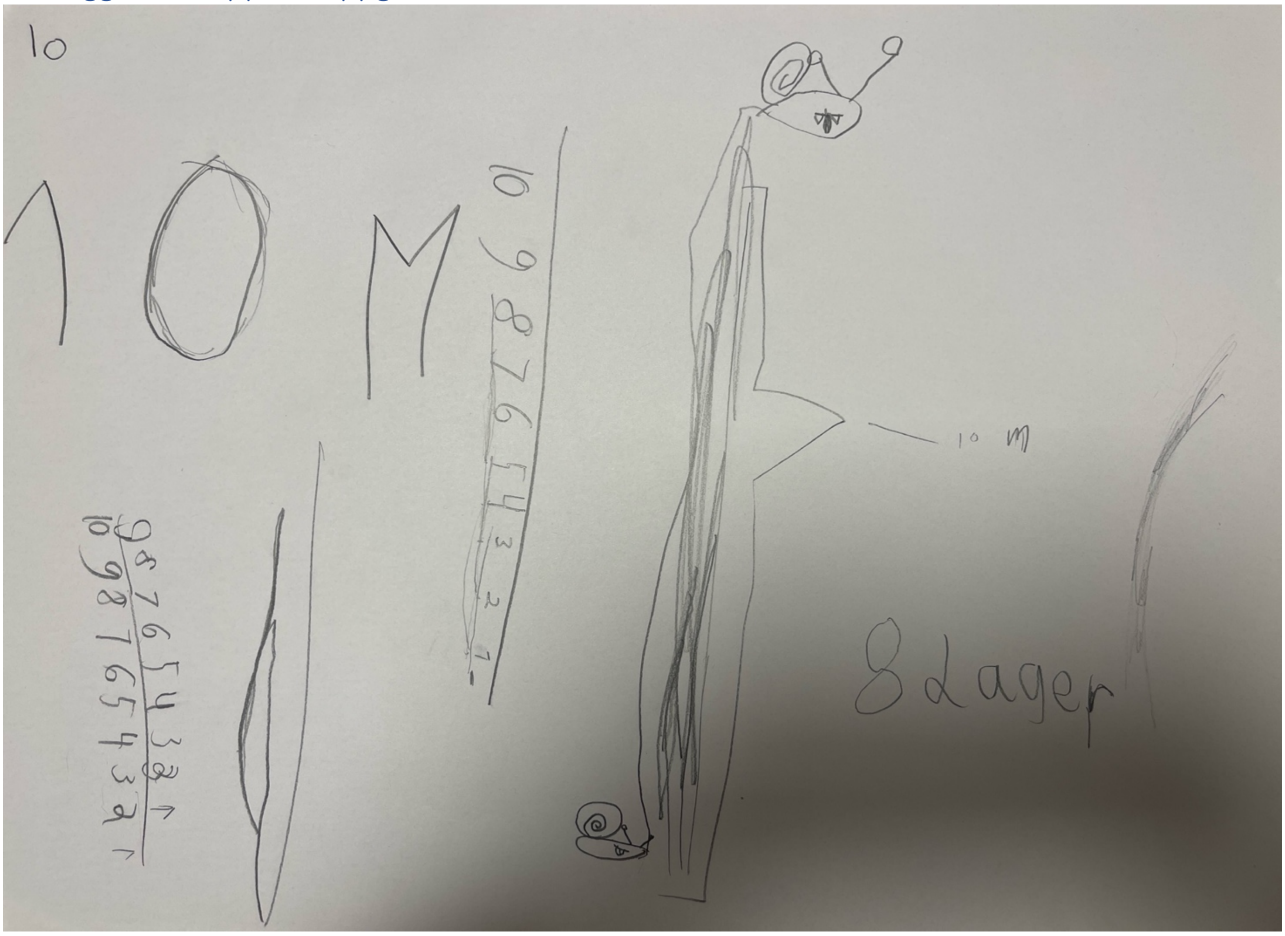
Vedlegg 10: Gruppe 6, oppgave 1



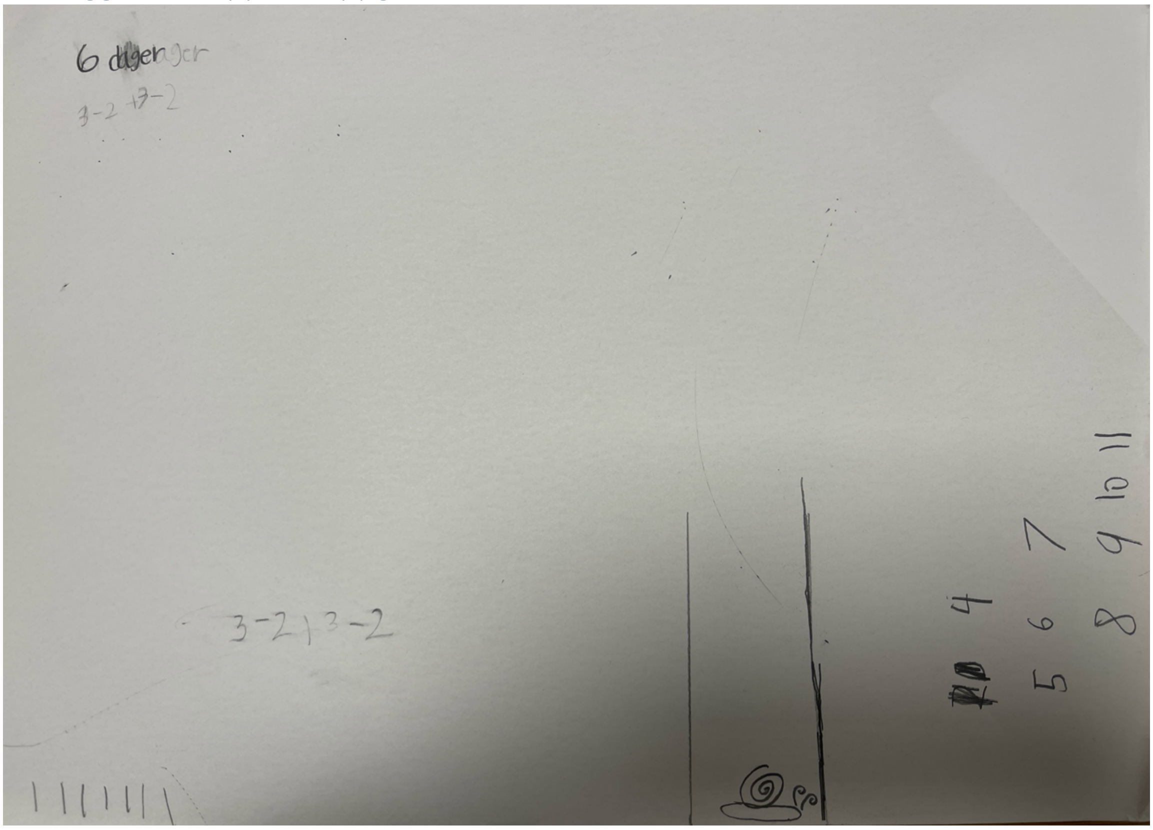
Vedlegg 11: Gruppe 1, oppgave 2



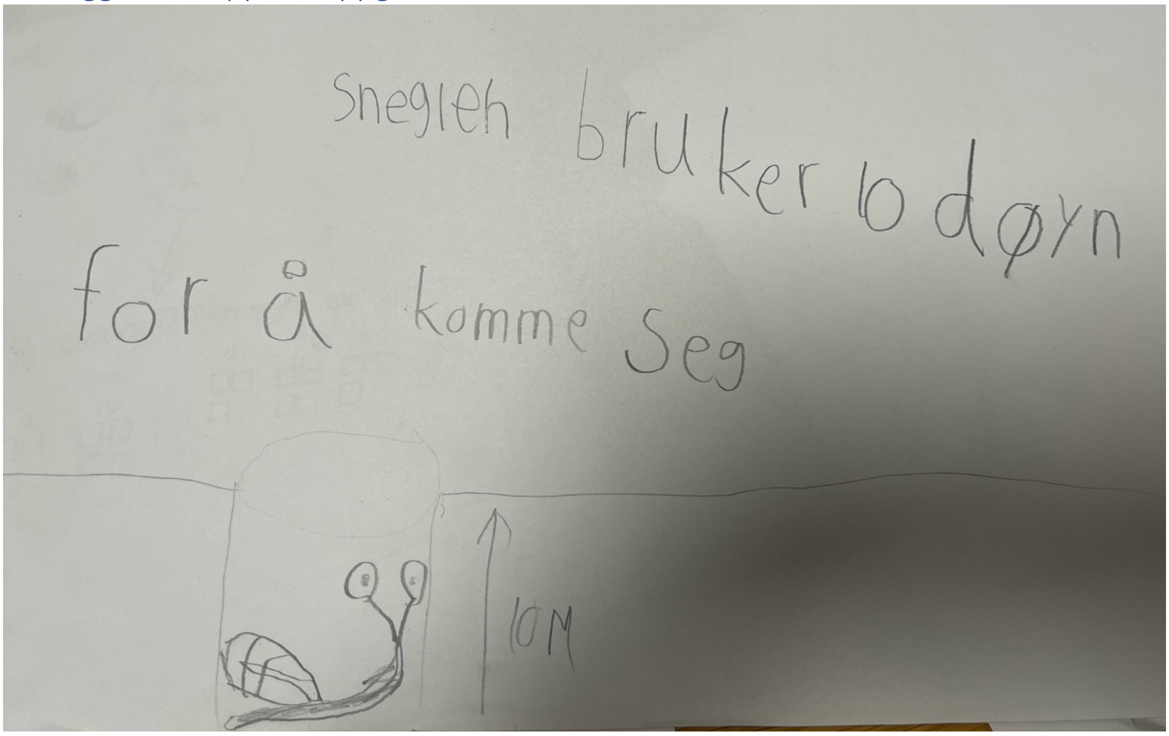
Vedlegg 12: Gruppe 2, oppgave 2



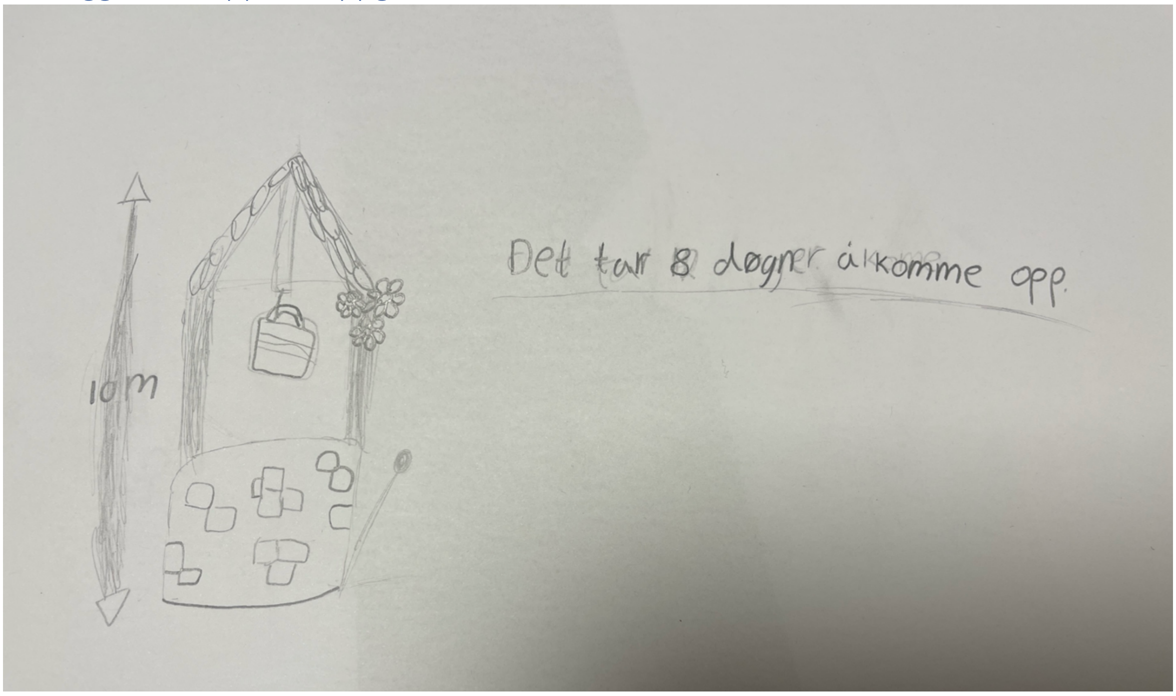
Vedlegg 13: Gruppe 3, oppgave 2



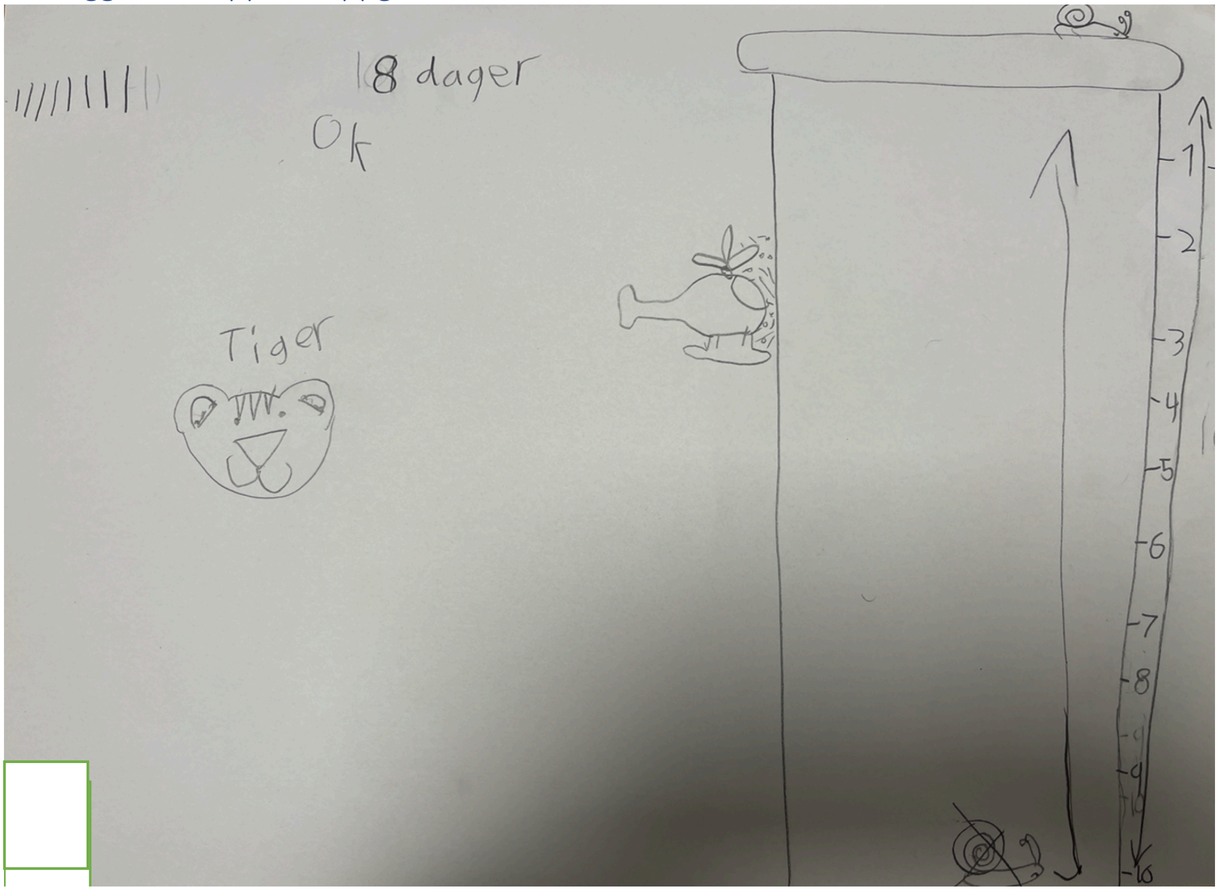
Vedlegg 14: Gruppe 4, oppgave 2



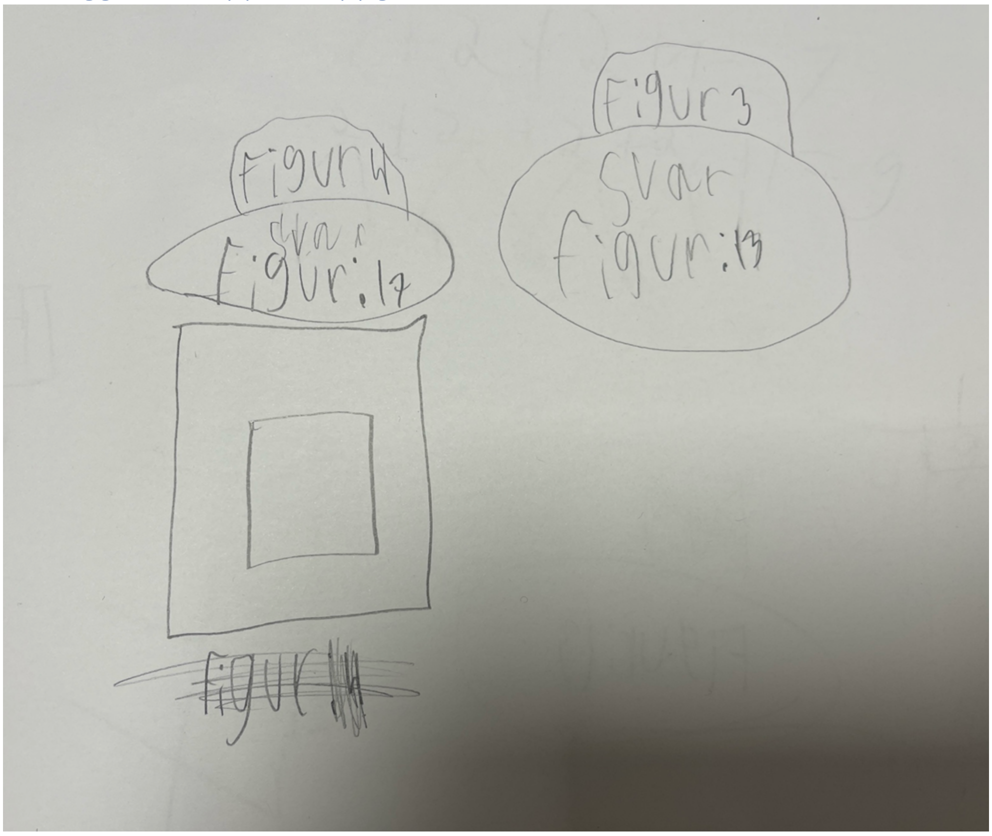
Vedlegg 15: Gruppe 5, oppgave 2



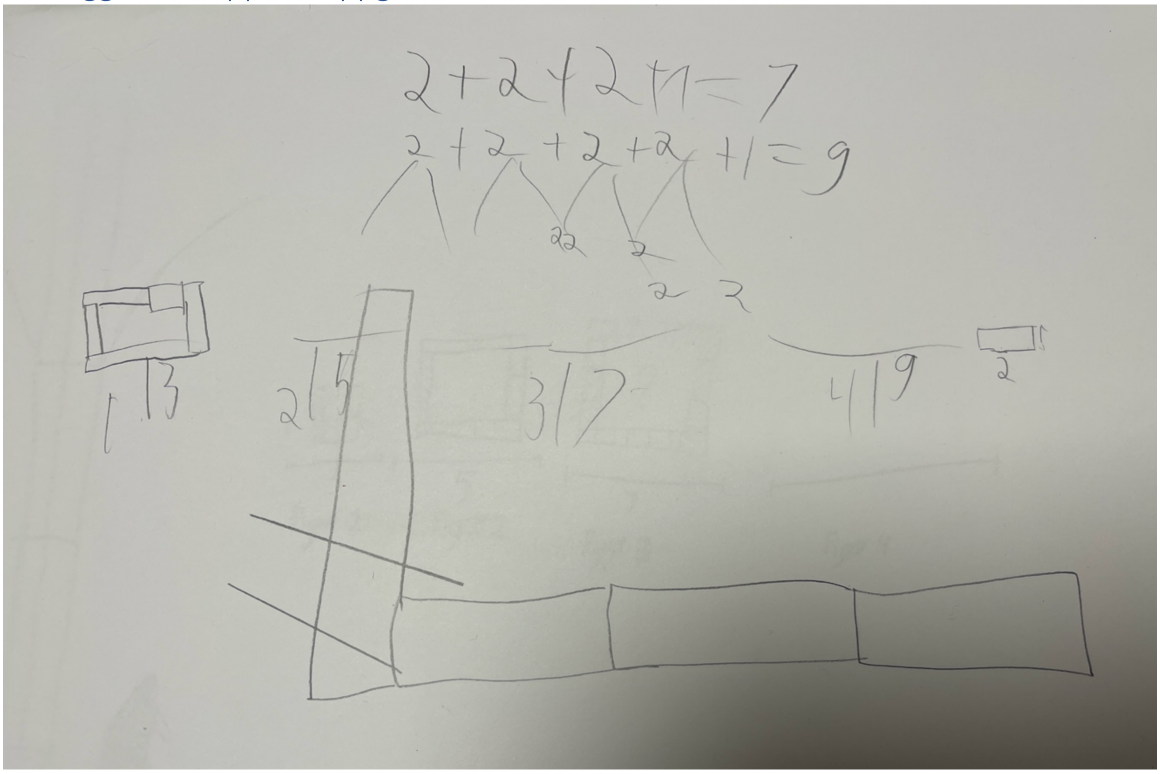
Vedlegg 16: Gruppe 6, oppgave 2



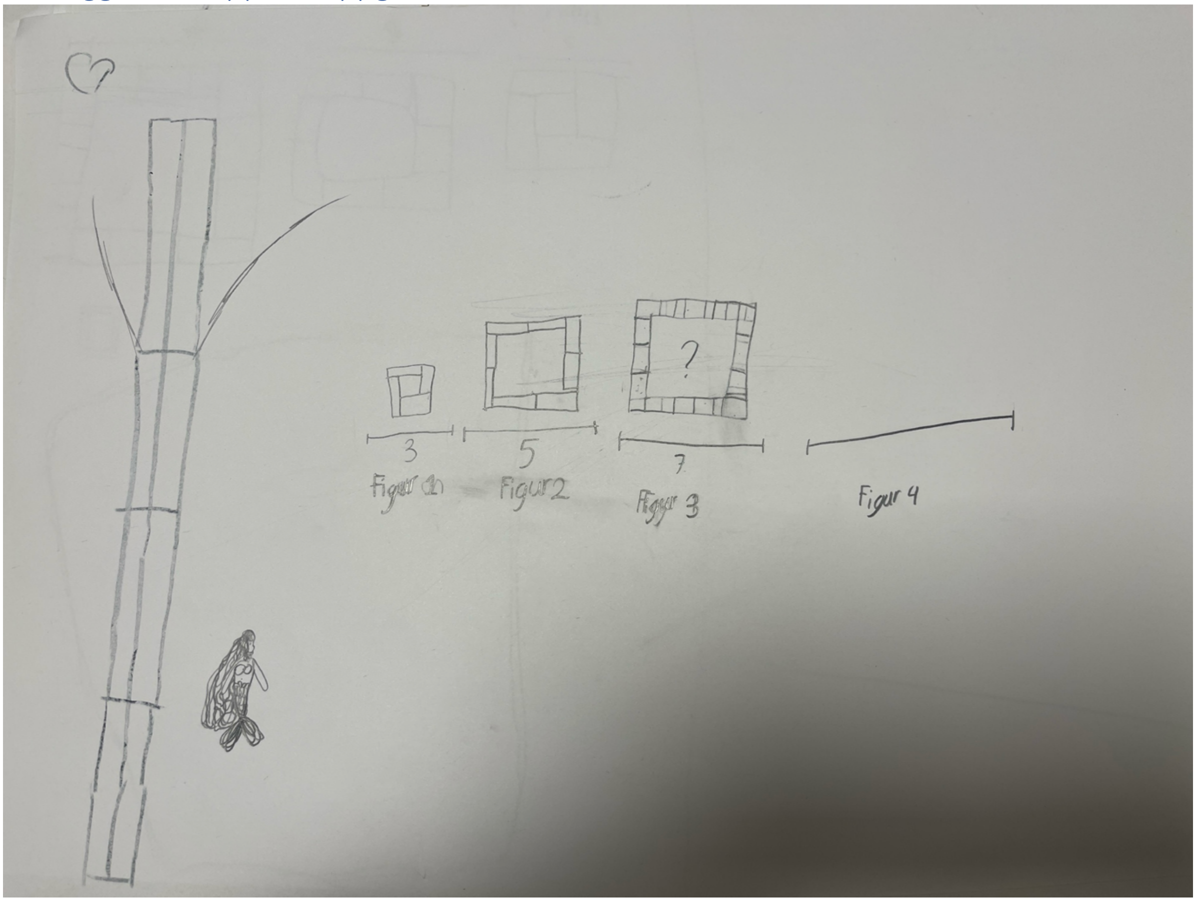
Vedlegg 17: Gruppe 1, oppgave 3



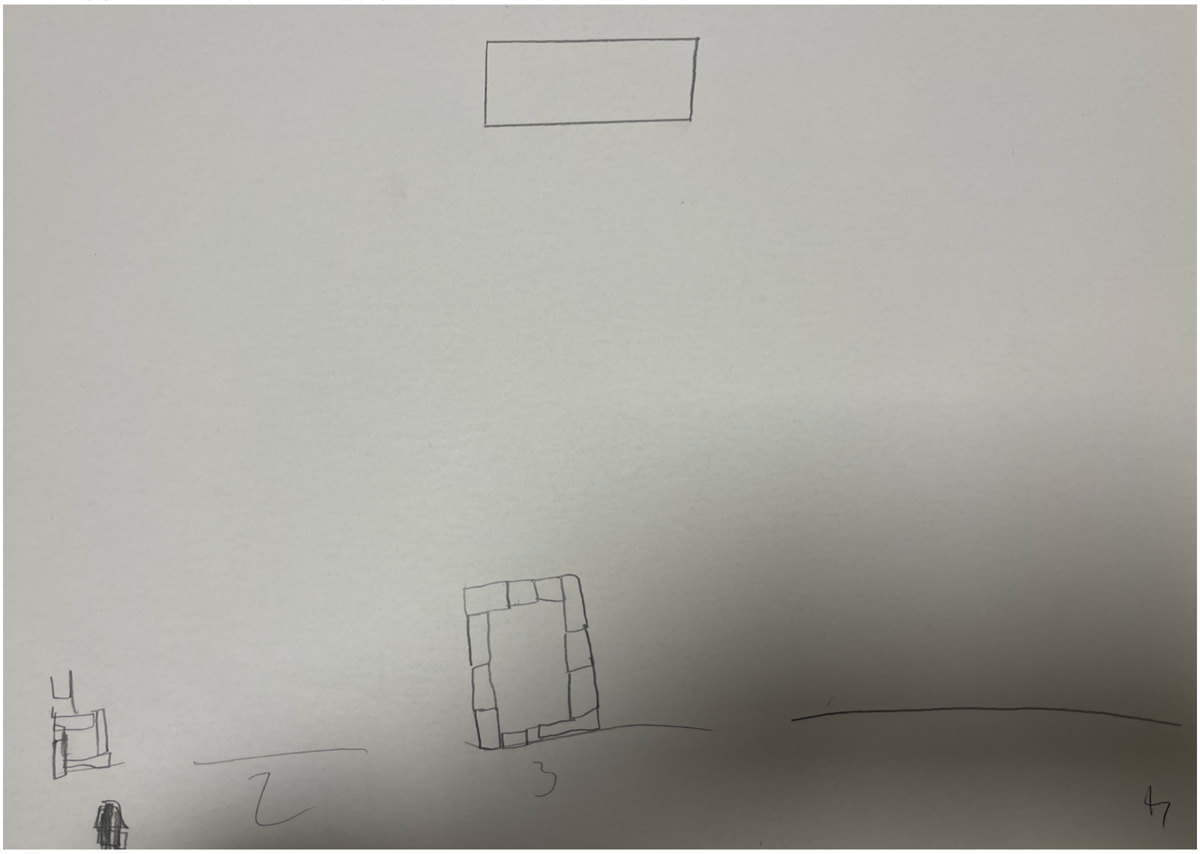
Vedlegg 18: Gruppe 2, oppgave 3



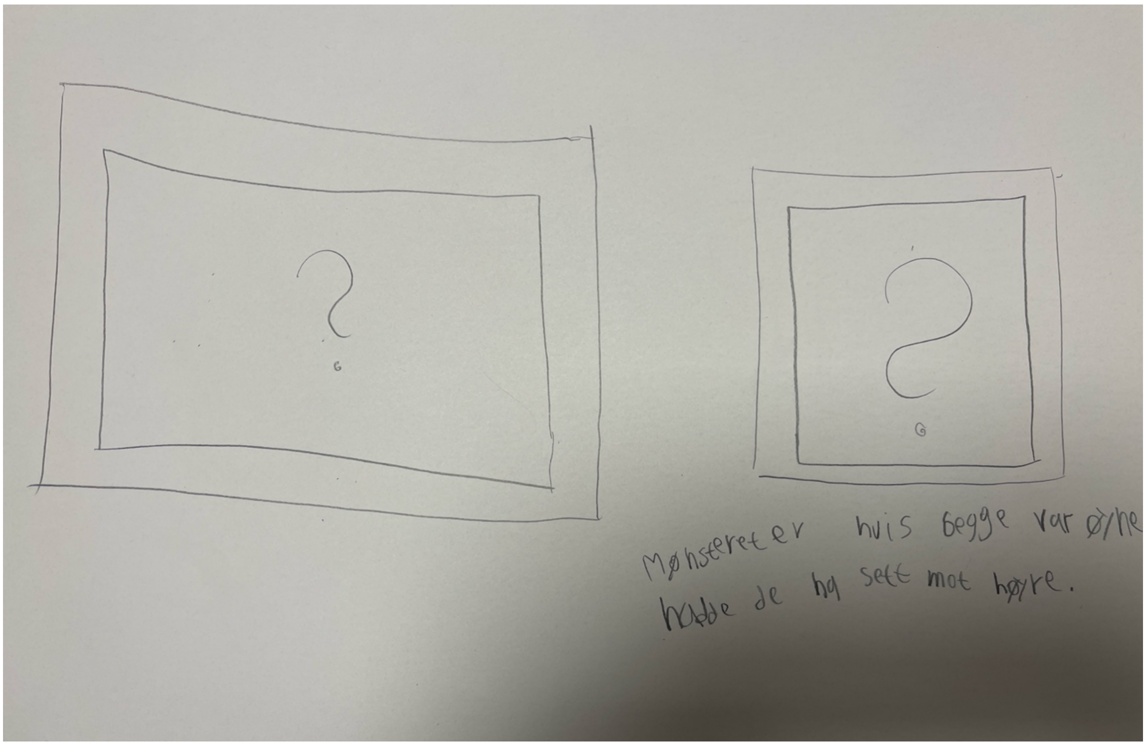
Vedlegg 19: Gruppe 3, oppgave 3



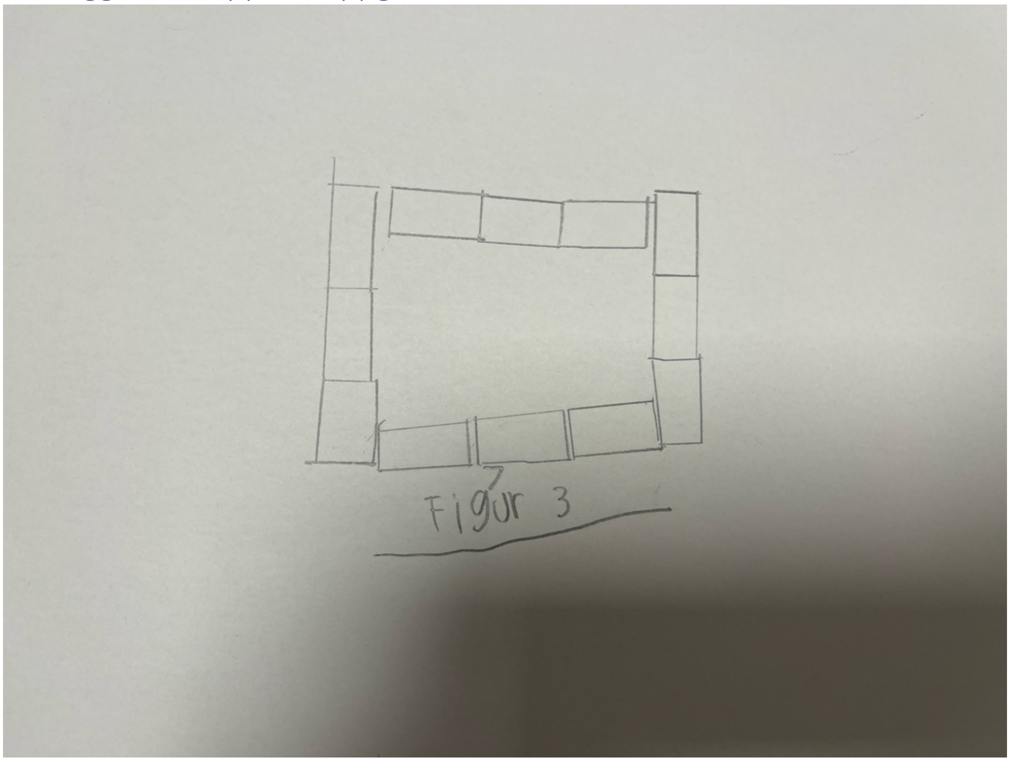
Vedlegg 20: Gruppe 4, oppgave 3



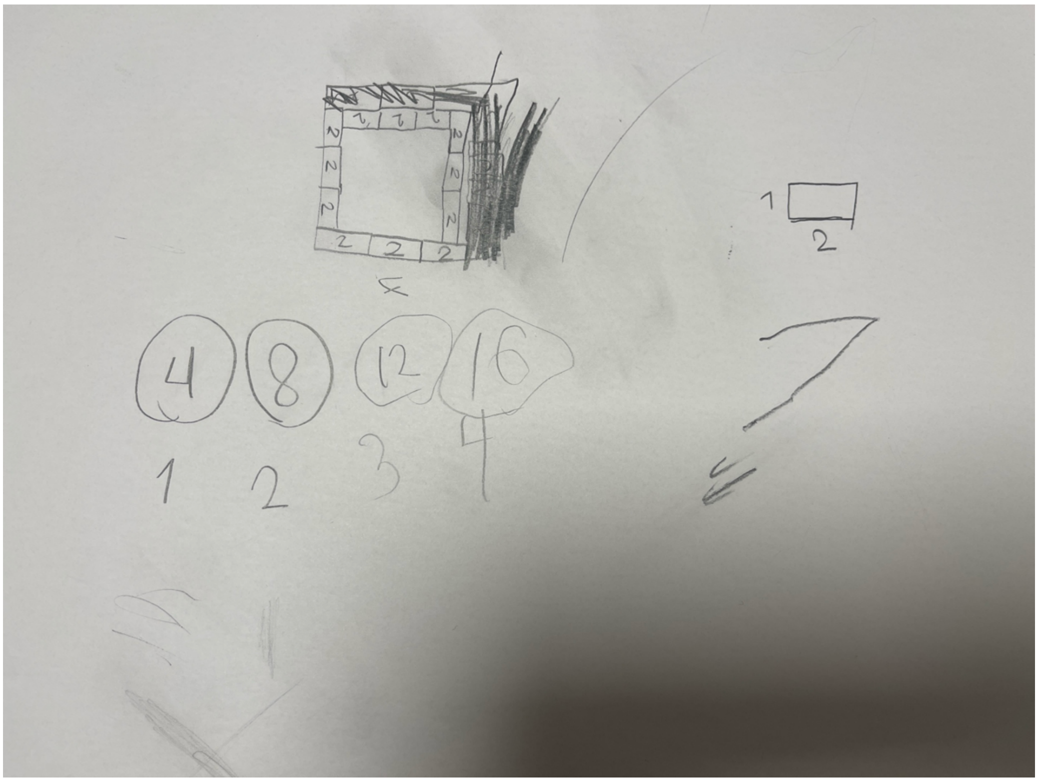
Vedlegg 21: Gruppe 5, oppgave 3



Vedlegg 22: Gruppe 5, oppgave 3, 2. side av ark.



Vedlegg 23: Gruppe 6, oppgave 3



Vedlegg 24: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Samarbeidsbasert problemløsning i matematikkundervisning på småskoletrinnet.»?

Dette er et spørsmål til deg om ditt barn kan delta i et forskningsprosjekt, hvor formålet er å studere samarbeid og problemløsning i matematikkundervisningen. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og om hva en deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette prosjektet er å få samlet inn data som vil brukes i min master i matematikkdidaktikk. Prosjektet vil foregå i den ordinære undervisningen. I form av at elevene skal jobbe med problemløsingsaktiviteter/oppgaver i en del av matematikkundervisningen. De elevene, som velger å delta i prosjektet vil bli tatt opp med lydopptak, for å se på samarbeid og på hvordan elevene finner frem løsninger sammen. Elever som ikke ønsker å delta i prosjektet vil ikke bli tatt opp lyd av, og blir ikke en del av datamaterialet til masteroppgaven. Alle elevene vil bli anonymisert. Forskningsspørsmålet kommer til å være: *Hvilke Løsningsstrategier bruker elever på småskole trinnet, i norske skoler, i møte med samarbeidsbaserte problemløsningsaktiviteter?* Oppgaven kommer til å fokusere på å få svar på: hvordan elever finner løsninger sammen? hvilke løsningsstrategier bruker elevene? Og hvordan samarbeider elevene?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Stavanger er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Den nye læreplanen, og kompetansemålene for 3. trinn omhandler problemløsning og samarbeid, men overvekten av forskning på dette er gjort med elever på ungdomsskolen. Derfor ønsker jeg gjennom denne studien å observere elever på 3. trinn (småskolen) sine reaksjoner, løsninger og opplevelser rundt samarbeidsbasert problemløsning. Jeg jobber med elever på 3. trinn, og føler at jeg har en ide om hvilke oppgaver som kan være aktuelle å velge ut, samt hvilket nivå oppgavene bør ligge på. Forskningen vil foregå i helklasse, gruppe observasjon og gruppe intervju.

Hva innebærer det for deg å delta?

Min studie kommer til å inneholde observasjon av undervisning der elevene jobber i mindre grupper som samarbeider med problemløsningsoppgaver og elevintervju. Studien vil foregå gjennom 3-4 matematikkøkter i en periode på rundt en uke. Elevene som deltar, vil bli observert og diskusjonene på gruppene vil bli tatt opp på lydopptaker. Noen grupper vil bli trukket ut for gruppeintervju for å fortelle om sine opplevelser, i gruppeintervjuet vil de aktuelle elevene også blitt tatt opp på lydopptak. I Masteroppgaven vil elevene bli anonymisert, elevene vil få fiktive navn og skolen blir anonymisert. Lydopptak vil bli lagret på et kryptert program og vil kun være tilgjengelig for meg som jobber med studien. Etter masteroppgaven er godkjent (Juli/august 2024) vil datamaterialet bli slettet. Prosjektet vil bli gjennomført i klassen, men du som foresatt kan velge om ditt barn ikke skal være en del av datamaterialet for oppgaven. Prosjektet vil bare ta opp rundt 15/20 min av hver undervisningsøkt den aktuelle uken, og alle elevene vil være en del av denne problemløsingen, da det matematiske innholdet er forankret i kjerneelementene og læreplanen i matematikk. Når elevene jobber med problemløsningsoppgavene vil gruppene som deltar i studien ha en lydopptaker på pulten slik at man kan fange opp elevenes diskusjoner. Elevene som velger å ikke delta vil jobbe sammen i grupper uten lydopptaker, denne/disse gruppene vil da bli plassert bakerst i klasserommet, slik at deres diskusjoner ikke blir fanget opp av andres lydopptakere. Om noe lyd likevel skulle komme frem i et lydopptak, vil dette ikke være en del av materialet som blir brukt i masteroppgaven. Etter hver økt kommer jeg til å hente ut noen av gruppene for å ha et intervju/samtale for å få svar på hvordan elevene løste oppgaven/samarbeidet og hvordan elevene opplevet å jobbe på denne måten. Disse intervjuene skjer utenfor klasserommet og er kun aktuelt for de foresatte/elevene som ønsker å delta på dette, her vil også elevene ha fiktive navn og blir tatt opp på lydopptaker. Om ditt barn deltar i studien kan du etterspør observasjonsskjema og intervjuguide på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du eller ditt barn når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Elevenes personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg eller ditt barn hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Det vil ikke bli opplyst til lærer eller skolen om du velger å trekke deg fra studien. Prosjektet vil som sakt foregå gjennom 3-4 undervisningsøkter, og temaet vil være aktuelt for temaet som det jobbes med i matematikken, problemløsingen vil foregå en del av timen (15-20 min), dette blir en del av den ordinære undervisningen. Elever med rett på tilpasset opplæring vil få tilpassede oppgaver eller opplegg. Jeg vil ha en forskerrolle i dette prosjektet og fungere som en observatør, mens kontaktlærer og faglærer har undervisningen. Om ditt barn deltar eller ikke deltar vil det ikke få noen konsekvenser for elevens læringsutbytte. Om ditt barn ikke deltar vil dette ikke være synlig for medelever eller skolen, prosjektet er helt frivillig. Elevene som ønsker å være med på gruppeintervju (de som blir valgt ut), vil bli tatt ut maksimalt 10-20min i slutten av dagen (de aktuelle 3-4 dagene).

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Personopplysningene vil kun være tilgjengelig for studenten som skriver oppgaven. *I Masteroppgaven vil elevene bli anonymisert, elevene vil få fiktive navn og skolen blir anonymisert. Lydopptak vil bli lagret på et kryptert program og vil kun være tilgjengelig for meg som jobber med studien. Etter master oppgaven er godkjent (Juli/august 2024) vil datamaterialet bli slettet.* Navnet og kontaktopplysningene til ditt barn vil jeg erstatte med fiktive navn som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Opplysningene som vil bli publisert er elevsvar, elevdiskusjon, elev intervju og eventuelle andre observasjoner som kommer frem i studien.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes når oppgaven blir godkjent, innleveringsfrist på masteroppgaven er 3. juni 2024. Etter prosjektslutt vil datamaterialet med lydopptak og personopplysninger (navn og klasse) vil slettes.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Stavanger har Sikt – Kunnskapssektorens tjenesteleverandør vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Eva-Maria Reich, Førsteamanuensis i matematikk ved Universitetet i Stavanger, eva-maria.reich@uis.no
- Silje Undheim, 5. års student ved GLU 1-7, ved Universitetet i Stavanger på mail: 255618@uis.no
- Vårt personvernombud: personvernombudet@uis.no

Hvis du har spørsmål knyttet til vurderingen som er gjort av personverntjenestene fra Sikt, kan du ta kontakt via:
- Epost: personverntjenester@sikt.no eller telefon: 73 98 40 40.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig/ student
Silje Undheim

Samtykkeerklæring

Elevens navn: ______________

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet: **«Samarbeidsbasert problemløsning i matematikkundervisning på småskoletrinnet»**, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ At mitt barn deltar i observasjon og lydopptak i klassen
- ☐ At mitt barn deltar i gruppeintervju
- ☐ Jeg ønsker ikke at mitt barn er en del av studien

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltakers foresatte, dato)

Vedlegg 25. infoskriv til lærer

Prosjektet mitt handler om samarbeidsbasert problemløsing. Elevene sitter 3 og tre sammen, og skal finne løsninger sammen. 5/6 av gruppene vil ha diktafon på pulten, da jeg skal bruke deres resonnement i oppgaven. Målet i oppgaven min er å finne ut hvilke løsningsstrategier elever på småskolen bruker i problemløsing. Studien min har elevene i fokus, så hva dere sier eller gjør blir ikke lagt vekt på i studien.

	Problemløsing	Intervju
Tirsdag	1. time	Slutten av dagen
Onsdag	3. time	Intervju uteblir
Torsdag	2. time	Slutten av dagen

- Jeg tar ut 2 grupper(6 elever) til intervju ca. 10/15 min i 3. eller 4. time utfra hva som passer.
- Jeg informerer raskt om prosjektet og forklarer diktafonene på pulten.
- (Nevnte enkeltelever), får et eget ark med problem som de løser sammen i en gruppe.

Problemløsningsaktiviteten vises på tavlen, elevene får informasjon om hva de skal gjøre eks: «Nå skal vi i gang med noe dere ikke har gjort før, vi skal jobbe med problemløsing i grupper. Dere skal jobbe sammen for å finne løsninger. Det er ikke viktig om dere klarer å løse problemet, men det er viktig at dere prøver sammen. Når man jobber sammen så er det viktig at alle på gruppen får være med og at alle på gruppen tenker. Dere skal bruke en blyant og skrive ned hva dere tenker på arket, men dere må også forklare hva dere gjør til de andre i gruppen. Om noen på gruppen ikke forstår hva du mener eller hva du har tenkt så er det viktig at du prøver å forklare på en annen måte slik at alle forstår. På denne oppgaven er det ikke bare et rett svar, det er flere, og dere skal prøve å finne alle svarene og kanskje prøve å finne svarene på forskjellige måter. Nå er vi veldig mange som skal jobbe i grupper, det er derfor viktig at alle snakker med lav stemme slik at alle klarer å tenke»

Om elevene har spørsmål ønsker jeg at dere ikke gir svaret eller viser dem hva de skal gjøre videre. Men heller stille spørsmål og la elevene resonere sammen til hva de kan gjøre videre.

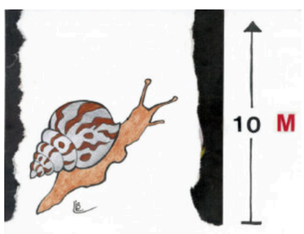
Jeg tenker at aktiviteten skal vare ca. 15/20 min, men om dere ser at mange begynner å bli lei eller sier seg ferdige kan det avsluttes før. Dette kan dere vurdere.

Tirsdag:

Snekkeren: En snekker snekret trebente stoler og firbente bord. En dag hadde han brukt 31 ben. Hvor mange stoler og hvor mange bord kan han ha laget? Forklar hvordan du kommer fram til svaret.

Onsdag:

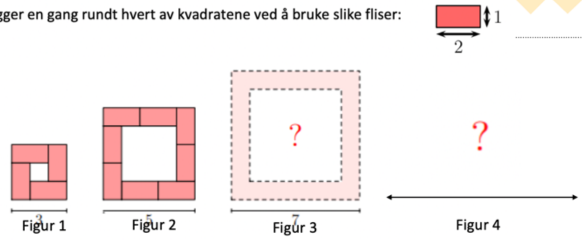
En snegl sitter på bunnen av en ti meter dyp brønn og skulle gjerne komme seg opp. Hver dag klarer den å klatre tre meter, men mens den sover om natten, sklir den to meter ned igjen. Hvor mange dager tar det sneglen å komme opp til brønnkanten?



Ekstra: hvor lang tid hadde det tatt om brønnen var 15 meter dyp?

Torsdag:

15. Katrine bygger en gang rundt hvert av kvadratene ved å bruke slike fliser:

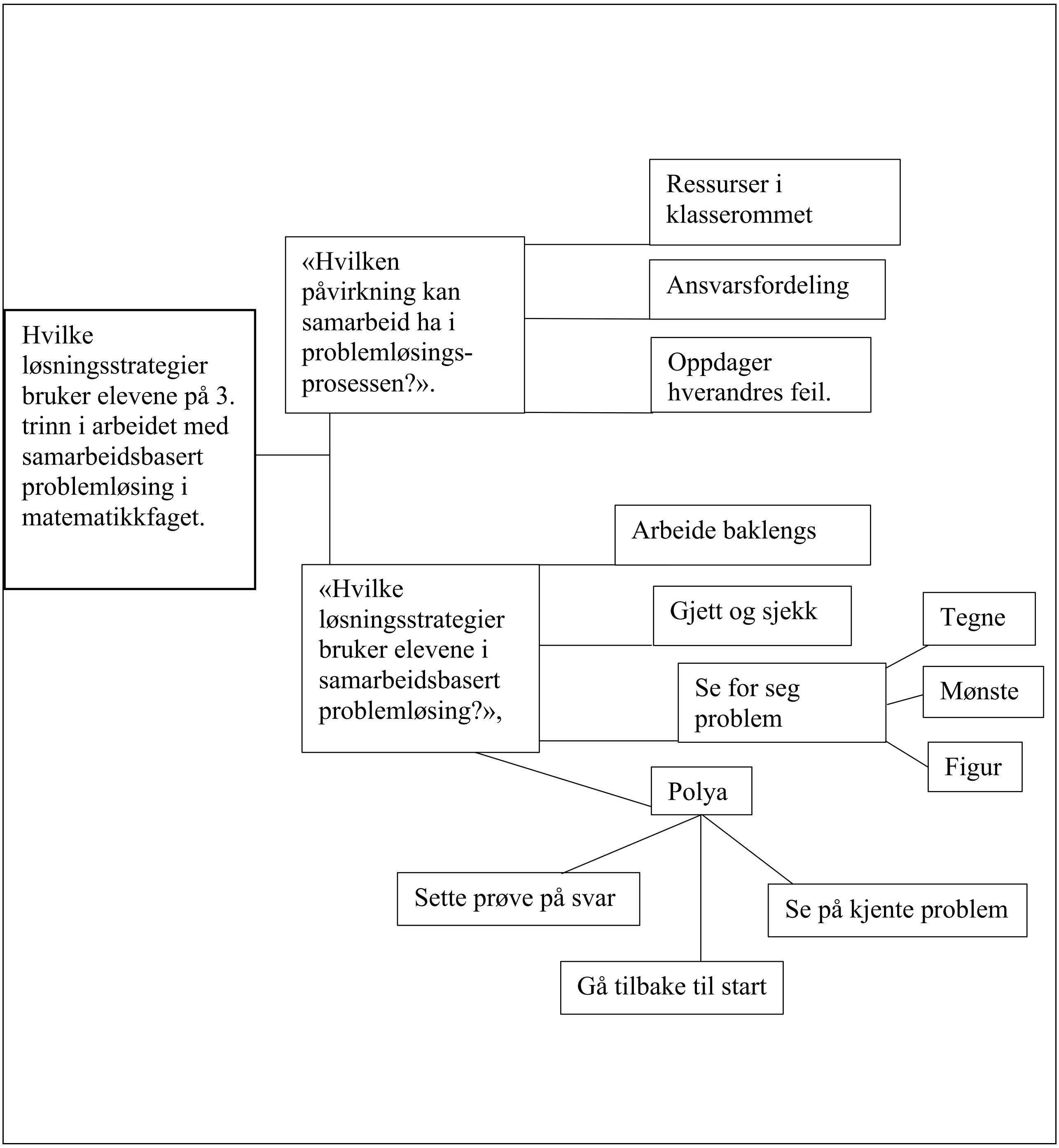


Hvor mange fliser må hun bruke rundt kvadratet med side 7?

Hvor mange fliser blir brukt i figur 3 og figur 4?

Ekstra: Ser dere et mønster?

Vedlegg 26. figur 1, Kategoritre



Vedlegg 27: resultat: Hvilke påvirkninger kan samarbeid ha i problemløsing?

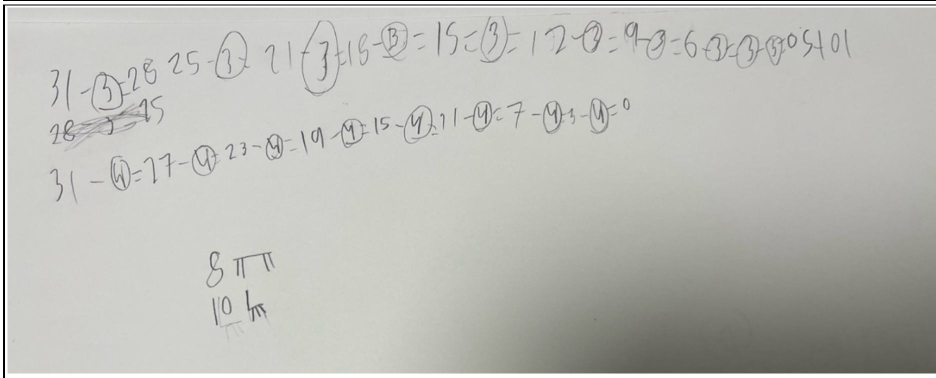
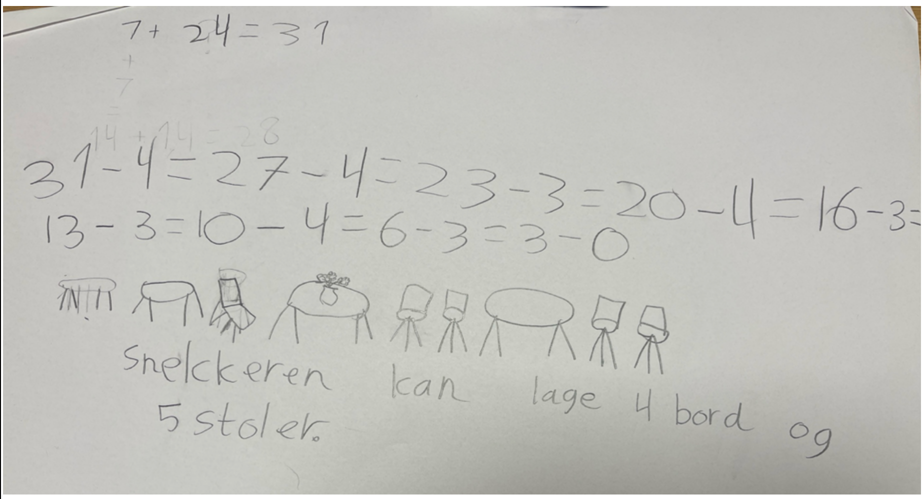
«Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?».	**Funn**
Ressurser i klasserommet:	Kim: Kan vi bare skrive vi tror at, også skriver vi svaret? For eksempel 16+15

«Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?».	Funn
	Sandra: Men det er jo ikke det vi skal gjøre nå, vi skal vite hvor mange stoler o mange bord. Anna: Du skal liksom forklare hva vi mener, du skal liksom ikke bare skrive 1 skal skrive «han laget…» Kim: Det var det jeg mente, at man skriver han laget 15 bord og 16 stoler Sandra: *snakker mens hun skriver* han laget.. Anna: Den der er på* henviser til lydopptaker Kim: Haaallllloooooo Sandra: Han laget 16 bord og 15 stoler, hvilken vei var b nå igjen? ..... Sandra: 15 stoler, da må vi lage det. 1-2-3-4-5-6.........15. Anna: Men da er det bare 3, så gjør vi det samme som vi gjorde med den. Sandra: Okey, 3-6-9-12-15 Anna: Så må du skrive 15
Ansvarsfordeling	Mats: Det er 6. Fredrik: Det er 7 Mats: Nei, fordi se 9-8-7-6, man hopper 3 Fredrik: Åja, det var det jeg sa. Okey også 6- 3 det er 3, også 3-3 det er Mats: Nå må vi telle alle treerne. Fredrik: Okey vi hadde komt til 5-6-7-8-9-10 Mats: Da har vi svaret. 10 stoler Lise: Da må vi gå over til bord, da gjør vi det samme bare med 4 og ikk Fredrik: Ja, det vet jeg. Mats: Hva skriver du? Fredrik: Stol

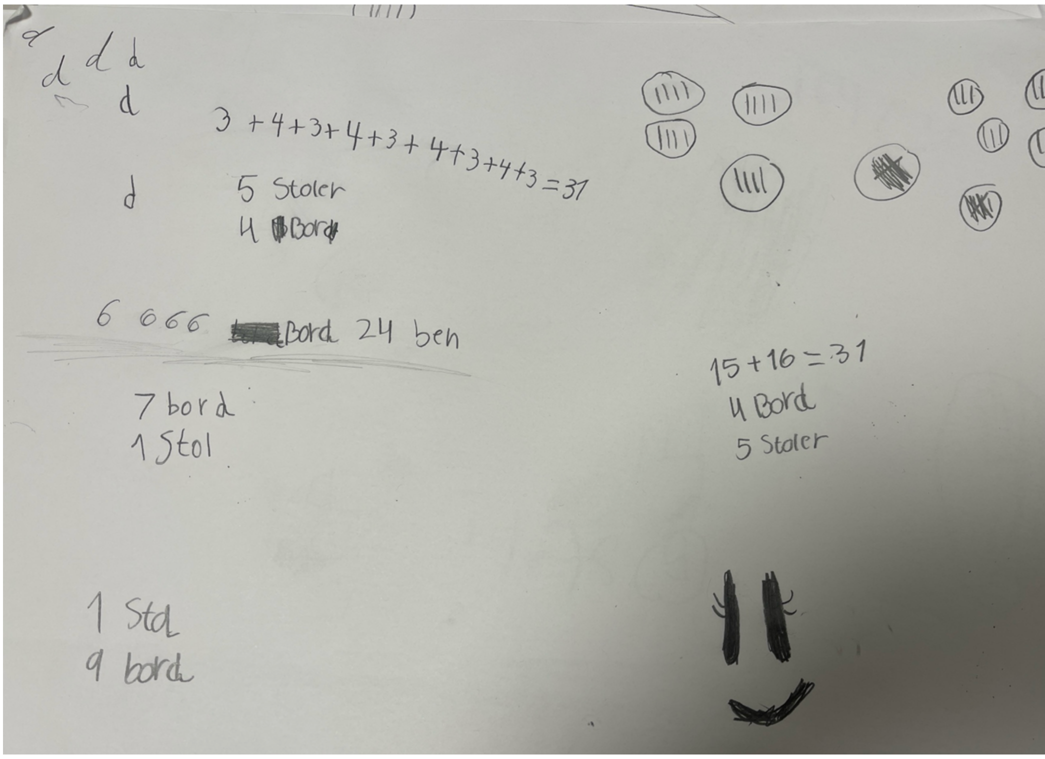
«Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?».	Funn
	Fredrik: Da tar vi 31 og tar vekk 4 Mats: Ja 4. hvert bord trenger 4 ben, da skriver du 31 først, så minus 4, er lik, mindre en når vi gjorde det med 3, så da er det 27 Fredrik: Dette svaret blir 27. Mats: 27 minus 4, og det blir 24 Fredrik: Så det blir 24. Mats: Se nå, vi hadde 27, og så tar vi bort 1-2-3-4. nei det blir 23. Fredrik: Også minus 4 igjen. Sander: Skal jeg lese det for deg? En snekker snekret trebente stoler og bord. En dag hadde han brukt 31 ben. Hvor mange stoler og hvor mang han ha laget? Forklar hvordan du kommer frem til svaret. Okey Pål, hv han bruker 4 bein på et bord sant, og til sammen 31. Så om han har bru har han brukt 4. så er det 3 og 3. da har vi 6 til. Nå er det 16. så 16 plus hvis han har 22. regner vi ut beina? Pål: Ja. Sander: Da går vi tilbake til 2 bord og 12 på et bord, 12 pluss 12 har vi Pål:24. Sander: Ja, også er det to bord, som blir 8, da blir det 32, og det går ikk ha 3 stoler på et bord. Det er 3-3-3- det er som er 9 så er det 4 som er tr 3,3,3 som blir 22. pluss 4, 26. da har vi brukt 2,3. 2 bord har vi brukt. C Da vet vi hvert fall det. Skal vi skrive det ned? 7 +7 Pål: 14 Sander: Bra. Da kan vi ta det mange ganger. Pluss 7 er 21. pluss 7 er 2 er.. det går ikke opp. Da krysser vi ut. Skal vi ha to stoler på alle borde bare alle. *Stille 60 sek
Oppdager hverandres feil	Gruppe 3, Oppgave 1 Kim: Kan vi bare skrive vi tror at, også skriver vi svaret? For eksempel

«Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?».	Funn
	Sandra: men det er jo ikke det vi skal gjøre nå, vi skal vite hvor mange hvor mange bord. Sandra: 1- 2 1- 2 Anna: Men han sa jo firer grupper ikke toer grupper. Sandra: Åja. Gruppen teller: 1-2-3-4......5-6-7-8.......9-10-11-12.......13-14-15-16 Anna: Det var alle, nå han du skrive 16 øverst og sette runding. Sandra: 4-8-12-16

Vedlegg 28, resultat: Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasertproblemløsing?

Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	Funn
Arbeide baklengs	 

<table>
<tr><th>Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?</th><th>Funn</th></tr>
<tr><td>Gjett og sjekk</td><td>



-

Nils: Da tar vi 31 ben, vi kan hoppe 3-7-10-14-17-21-24-28-23, ja! Vi har funnet

Kari: Hva da?

Nils: 3+4, 3+4, 3+4 helt til du kommer til 31, se

Pål: 3+4 er 7

Nils: Pluss 3 er ti pluss 4 er 14, pluss 3, er 17, pluss 4 er

Pål: 21

Nils: Ja pluss 3 da er det 24, pluss 4, er 28 pluss 3 igjen da er det 31

Kari: Du må skrive er lik

Pål: Ferdig!

......

Pål: Nei, men det må hvert fall være en annen måte enn det

Nils: Vi kan prøve 3 stoler og 5 bord.

Pål: 3 stoler og 5 bord?

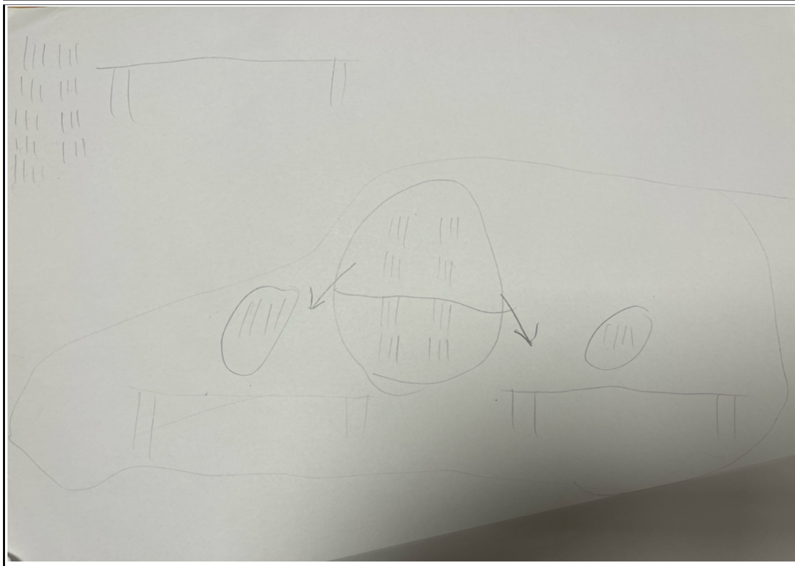
Nils: Eller 6 bord.

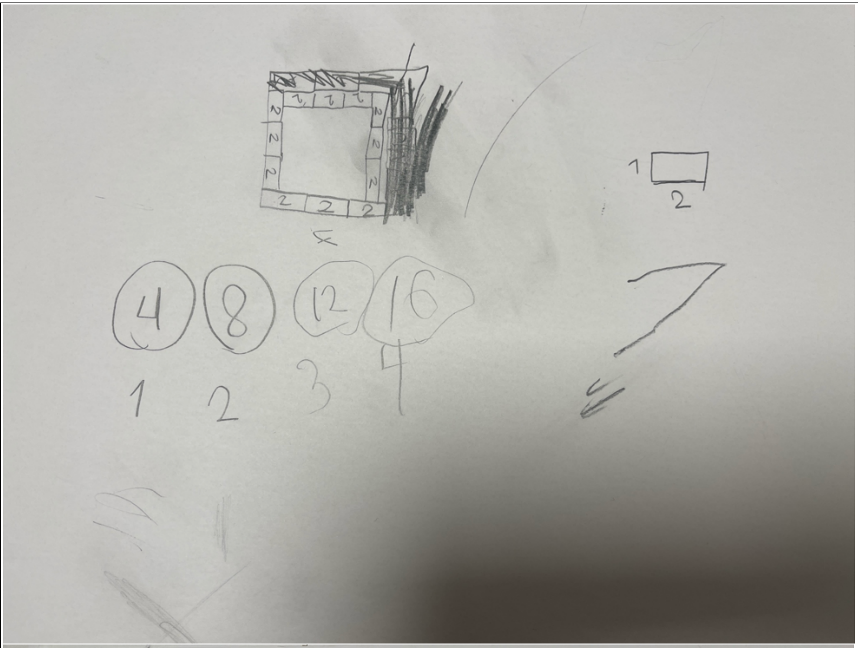
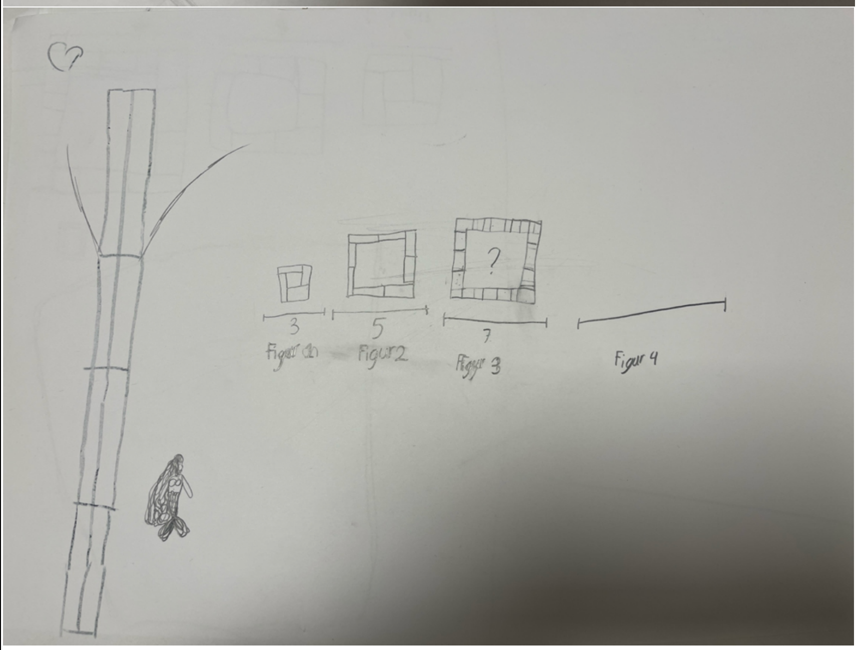
Kari: Okey.

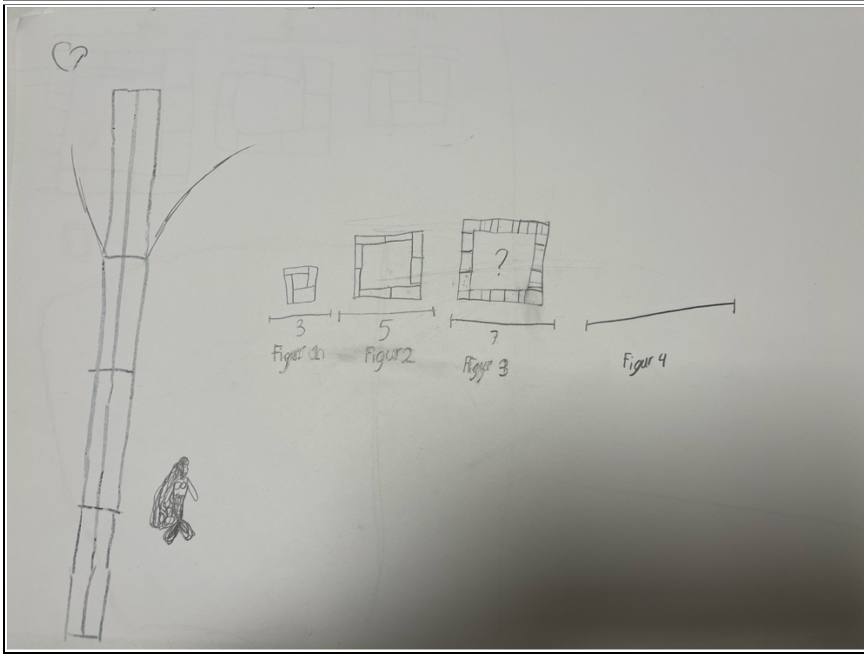
</td></tr>
</table>

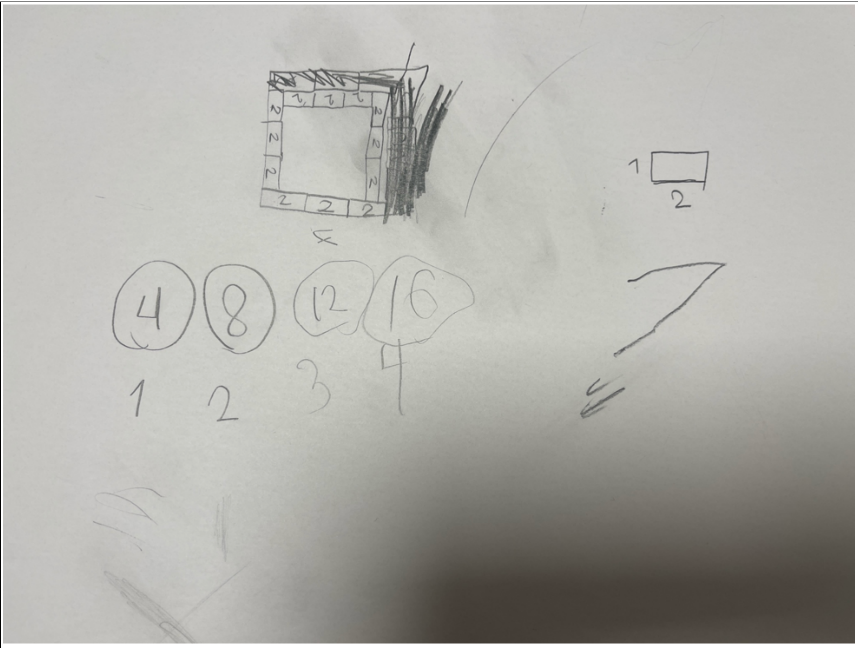
Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	Funn
	Nils: Okey 9 stoler da. Pål: Eeh nei? Nils: Nei, 9 bein, 3 stoler. Også 6 bord vent, 24, ja det går, eller neineinei, det blir 3 ganger 3 er 9 også 6 ganger 4 er 24, så 9+24 er 33 så det går ikke. Kari: Går det ikke? Pål: Dere forstår ikke, se her begynner dere. Nils: Man må ikke tenke på det, man må tenke hvordan man jobber, bare rable de Pål. Jeg rabler ut når jeg gjør feil. Silje: Hva a tenker dere her Sander: Det er vanskelig siden den er ikke lik som den Silje: Men tror du at det trenger å være likt som på tavlen? Sander: Ja det tror jeg, siden da kan vi tegne hvor stort det er og da finne ut hvor m blokker vi trenger. Sander: Adrian se Adrian: 2+2+2+2+1? Sander: Ja 2+2+2+2+1 er 9 og det er jo så lang figur 4 er
Se for seg problem (Se også underkategorier)	Thea: Det er litt vanskelig siden jeg forstår ikke helt Lærer: Hvor mange ben hadde et bord? Per: 3 Lærer: Var det 3? Per: Nei, det var 4. Svein: Det var stolen som hadde 3. Lærer: Hvordan kan man tenke da? Thea: Jeg vil liksom telle nedover, da har vi liksom 28, også tar vi minus når vi ha det.

Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	Funn
	Lærer: At du tar 31, også minus en stol? Thea: Ja 3 og 3 eller 4, da kan man liksom først gå ned med 3, så blir 31 til 28. Se har vi 28 igjen, så tar vi 28 minus 3 Svein: Ja, også med et bord er det 7. Thea: Ja Svein! Forsett sånn videre. Svein: Nå har vi 10, så kan vi ta kanskje 1 til bord. Jeg har ikke flere blyanter Thea: Jeg kan hente flere blyanter til deg. Svein: Kan vi ikke tegne 16? Nils: Vi trenger linjal Pål: Hvis vi tegner brønnen så blir det kanskje lettere Kari: Jeg tegner sneglen Pål: Vent Nils Nils: Den må være 10 meter, nei 10 cm. Vi later som 1cm er 1m Pål: Så tegner vi 3 opp og 2 ned Nils: Vi kan gå opp og ned på linjalen Kari: Vi kan tegne sneglen Nils: 3 opp 2 ned, 3 opp 2 ned Pål: Men Nils, jeg forstår ikke, Nils: Men se, vi går opp og ned og teller hvor mange ganger. Nå bruker vi linjal. I dager så er vi der

Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	Funn
Tegne	 Svein: 30-29-28.27-26.25-23-22-21-20-19, så nå har vi 19, så må vi ha 1 bord Thea: Ja, men nå forstår jeg ikke, skulle vi ikke finne ut hvor mange stoler vi har? Svein: Ja vent, hvor mange stoler har vi brukt. 1-2-3-4-5-6... her er det 12 ben. Vi bein. Thea: Men for at vi skal vite det må vi liksom ta dem i grupper igjen. Liksom 3 o Svein: Åja sånn ja Thea. Ja, vi bruker liksom opp bein Svein: Ja, da lager jeg grupper. Thea: Hvor mange har vi liksom Svein: Vi har brukt 12 bein, vi har 19 igjen. Minus 4. Men hvor mange hadde vi i Thea: Okey, Per du må høre etter Per: Ja Thea: Så bra Svein: Nå har vi 15 bein igjen. Vi kan ta mer stoler. Thea: Kan vi ikke ta et til bord? Svein: Jo vi kan ta et til bord. 15-4=11 Thea: Også mer stoler

Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	**Funn**
Mønster	  Lise: Burde vi ikke gjort oppgaven før vi tegner? Mats: Hva som er svaret? Fredrik: Vet ikke, hvordan tegner du en brønn? Lise: Men skal vi gjøre selve oppgaven, oppgaven er ikke å tegne Fredrik: Ja det kan vi Mats: Men tegningen kan gi oss svaret.

Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	Funn
	Anna: Visk Sandra jeg glemte en Kim: Hallo, jaaa. Det må øke med 4 siden der er det 3 også der nede er... ... Sandra: Jeg visker Anna: 3- 4- 5- 6- 7- 8- 9- 10 -11- 12, ja Sandra: Hø: jaaaa Kim: Da kan vi bytte ut spørsmålstegnet Sandra: Vi må spørre læreren om 12 er svaret. Lærer!! Anna: Urh hun sier ikke om det er rett eller ikke.
Figur	

Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	**Funn**
	 Lærer: Har dere funnet ut av det, ser dere tegner figur Mats: Også to prikker, så skriver du 13. Lise: Men hva med figur 4? Mats: Figur 4 er 17 Fredrik: Da skriver jeg figur 4 Mats: Og neste er 21
Polya (Se underkategorier)	
Gå tilbake til start	Fredrik: Det er 60 dager og 6 timer Lise: Hæ? Hvordan kan det være timer? Fredrik: Nei, det ble feil Mats: Vi må tenke på at han går opp 3 på dagen og når han sover går han ned 2 Fredrik: Men det er 6 timer der Mats: Men vi vet ikke hvor mange dager det er, men jeg tipper 57, hva hvis vi teg snegle og ser hvor langt han går.

Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	**Funn**
	Fredrik: Det har gått 3 dager, så går han opp der, så går han ned igjen, da har det v dager også opp og ned nå er det 5 dager nei, så kommer han opp sånn. Opp her på dager. Også når han er her er det 5 dager, på 5 dager så kommer han opp. Mats: Men det er 6 også, tror det er 6 Fredrik: Vent, vi er på 7 Mats: Ja, nå er det 7, så går den opp en gang, nei så går den opp. Fredrik: Hvor mange telte du? Mats: 8 ganger!
Sette prøve på svar	Pål: Kan du finne visk, enten er det rett eller så er det feil. Nils du må regne Nils: Ja okey Pål: Hvis du får det samme, så er det uansett rett Nils: Jeg må regne på et ark, siden jeg har ikke nok fingre, når jeg kommer opp til klarer jeg ikke å regne videre.
Se på kjente problem	Thea: Vi kan tegne, sånn vi gjør med bord og stol oppgaven Per: Så den må... Svein: Vent se, har noen en blyant. Jeg kan tegne på mint pult *Svein tegner opp figurene på papiret Svein: Liksom hvor mange sånne er det på en Per: Åja nå forstår jeg, hvor masse skal det være på 4 og 3

Vedlegg 29: Tabell 1: resultat for «Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?».

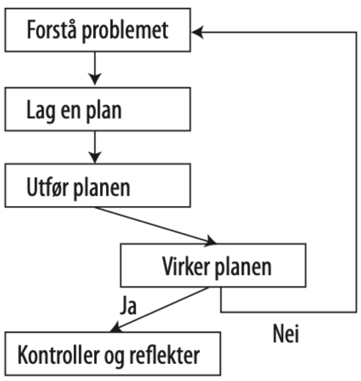
«Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?».	**Funn**
Ressurser i klasserommet	

«Hvilken påvirkning kan samarbeid ha i problemløsingsprosessen?».	Funn
Ansvarsfordeling	
Oppdager hverandres feil	

Vedlegg 30: Tabell 2: resultat for: Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?

Hvilke løsningsstrategier bruker elevene i samarbeidsbasert problemløsning?	Funn
Arbeide baklengs	
Gjett og sjekk	
Se for seg problem (Se underkategorier)	
Tegne	
Mønster	
Figur	
Polya (Se underkategorier)	
Sette prøve på svar	
Se på kjente problem	
Gå tilbake til start	

Vedlegg 31. figur 2, Polyas steg for problemløsing



Vedlegg 32. Figur 3, Flow